

République Algérienne Démocratique et Populaire

*Ministère de l'enseignement supérieur et
de la recherche scientifique
Université Mouloud Mammerie de Tizi
Ouzou
Faculté des sciences économiques,
commerciales et des sciences de gestion*

Département des sciences économiques



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة مولود معمري تيزي وزو

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم

التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

Polycopié de cours :

***Fondements de recherche
opérationnelle***

A l'usage des étudiants de deuxième année sciences économiques

Assuré par :
Dr. CHERIEF Wahida
Maître de conférences classe B
Département des sciences économiques

Année universitaire : 2024/2025

Sommaire

Introduction :

Chapitre 1 : généralités sur la recherche opérationnelle

- 1) Histoire de la recherche opérationnelle :
- 2) Définition de la Recherche Opérationnelle RO
- 3) Les domaines d'applications de la recherche opérationnelle
- 4) Enjeux de la recherche opérationnelle RO
- 5) Étapes d'analyse pour un problème de recherche opérationnelle
- 6) Formulation d'un problème d'optimisation
- 7) Les Outils utilisés en recherche Opérationnelle
- 8) Qu'est-ce-que la programmation linéaire ?
- 9) Qu'est qu'un programme linéaire ?
- 10) Hypothèses pour l'application de la programmation linéaire :

Chapitre2 : Formulation d'un programme linéaire (Modélisation)

- 1) Les conditions de formulation d'un PL
- 2) Etapes de formulation d'un PL :
- 3) Présentation Théorique
- 4) La forme canonique d'un PL :
- 5) La forme standard d'un PL
- 6) Les règles de transformation d'un PL
- 7) Exemples de formulations

Chapitre 3 : Résolution d'un programme linéaire par la méthode graphique

- 1) Résolution graphique d'un problème linéaire : cas de maximisation
- 2) Résolution graphique d'un programme linéaire en cas de minimisation :
- 3) Résolution graphique d'un programme linéaire : cas particulier

Chapitre 4 : Résolution d'un programme linéaire de maximisation par la méthode simplexe

- 1) Cas d'un PL de maximisation écrit sous forme canonique
 - 1.1. Ecriture de PL sous forme standard
 - 1.2. La méthode des tableaux
 - 1.3. Tableau initial de simplexe
 - 1.4. Amélioration de la solution
 - 1.5. Calcul des tableaux suivants
 - 1.6. Résumé de la procédure de la méthode du simplexe dans le cas d'un problème de maximisation sous contraintes \leq et avec un second membre positif
- 2) Cas d'un PL de maximisation avec contraintes type (\geq , \leq et $=$), aperçu par exemple :
 - 2.1. Introduction des variables artificielles
 - 2.2. Tableau initial de simplexe
 - 2.3. Amélioration de la solution

Chapitre 5 : Résolution d'un programme linéaire par la méthode simplexe : cas de minimisation et problème particulier

- 1) Résolution d'un programme linéaire de minimisation par la méthode simplexe :
- 2) Résolution d'un programme linéaire par la méthode simplexe : cas particuliers
 - 2.1. Les problèmes impossibles
 - 2.2. Les problèmes à solutions multiples
 - 2.3. Les problèmes à solution infinie
 - 2.4. Les problèmes à solution dégénérée
- 3) Résolution des problèmes de minimisation et problèmes irréguliers par la méthode des deux phases
 - 3.1. Création de programme auxiliaire (PA)
 - 3.2. Exemple d'application
 - 3.3. Exercices corrigés

Chapitre 6: La Dualité

- 1) Interprétation économique
- 2) Définition du Coût marginal
- 3) Dualité
 - 3.1. Définition

3.2. Propriétés et signification économique du programme dual

4) Tableau de correspondance primal-dual

Chapitre 7 : programmation linéaire en nombre entiers : problème de transport

1) Mise en équation

2) Dual du problème de transport

3) Modélisation d'un problème de transport :

4) Méthode du simplexe appliquée au problème de transport

4.1. Détermination d'une solution réalisable de base

1.1.1. La solution réalisable de base par la méthode du coin nord-ouest

1.1.2. La solution réalisable de base par la méthode de coût minimal

1.1.3. La solution réalisable de base par la méthode d'approximation de vogel (synonyme : heuristique de Balas-Hammer/ méthode de la différence maximale/ méthode de la pénalité unitaire/ méthode des regrets maximaux successifs)

4.2. Passage à une autre solution adjacente par la méthode des coûts duaux (u_i, v_j)

4.3. Passage à une autre solution adjacente par l'algorithme de STEPPING-STONE :

Conclusion

Bibliographie

Introduction :

La recherche opérationnelle est une discipline essentielle qui s'applique à la prise de décision dans des contextes complexes, en utilisant des méthodes analytiques et quantitatives. Dans un monde où les ressources sont souvent limitées et où les choix doivent être optimisés, la recherche opérationnelle offre des outils puissants pour modéliser, analyser et résoudre des problèmes variés dans les domaines économiques, commerciaux et de gestion.

Ce polycopié est conçu pour les étudiants de deuxième année en sciences économiques, commerciales et des sciences de gestion. Il se compose de sept chapitres, chacun abordant des aspects fondamentaux de la recherche opérationnelle et de la programmation linéaire.

Le premier chapitre présente les généralités sur la recherche opérationnelle, en définissant ses concepts clés et en illustrant son importance dans le monde moderne.

Le deuxième chapitre se concentre sur la formulation d'un programme linéaire, étape cruciale pour modéliser des problèmes réels sous forme mathématique. Dans le troisième chapitre, nous explorerons la résolution graphique d'un programme linéaire, une méthode intuitive qui permet de visualiser les solutions dans un espace à deux dimensions.

Le quatrième et le cinquième chapitre introduit la méthode du simplexe, une technique algorithmique puissante pour résoudre des programmes linéaires de manière systématique.

Le sixième chapitre, consacré à la dualité, met en lumière les relations entre un programme linéaire et son programme dual, offrant ainsi une perspective enrichissante sur la structure des problèmes. Enfin, le septième chapitre aborde le problème de transport, un cas particulier de programmation linéaire qui illustre l'application pratique des concepts étudiés.

À travers ce polycopié, nous espérons fournir aux étudiants une compréhension approfondie des outils et techniques de la recherche opérationnelle, leur permettant ainsi d'appliquer ces connaissances dans leurs futures carrières professionnelles.

Chapitre 1 : généralités sur la recherche opérationnelle

1) Histoire de la recherche opérationnelle :

Bien que les méthodes de la recherche opérationnelle aient été déjà utilisées av. J.-C., le développement des ordinateurs a favorisé leurs utilisations dans de nombreux domaines, surtout à partir de 1945. On situe habituellement la naissance de la RO lors de la deuxième guerre mondiale, lorsque l'Etat-major britannique fit appel à des équipes de mathématiciens et de physiciens pour l'aider à l'analyse des questions de stratégie militaire :

- Applications aux opérations militaires
- Répartition des troupes, du matériel, des ressources
- Approvisionnement en vivres, en pièces, en armement

Après la guerre, cette approche systématique et scientifique des problèmes de décision a été transposée au monde économique et industriel où elle a connu de nombreux succès. Depuis, de nouvelles méthodes et de nouveaux champs d'application ont vu le jour :

- Programmation linéaire (1ère publication en 1939)
- Développement du simplexe par G. Dantzig (1947)
- Développement des techniques classiques en programmation linéaire, non-linéaire, dynamique, théorie des files d'attente, etc.
- Ralentissement des recherches générés par le manque d'outils de calcul

2) Définition de la Recherche Opérationnelle RO

La recherche Opérationnelle est une discipline qui permet de formuler des problèmes par des supports scientifiques, mathématiques et informatiques pour aider à mieux décider. La

Recherche Opérationnelle (R.O.) est avant tout un outil d'aide à la décision.

Autrement définie, la Recherche Opérationnelle (RO) traduit des énoncés ou des cahiers de charges liés à des problématiques spécifiques sous forme de méthodes et des démarches à base d'équation mathématique, des algorithmes et des outils statistiques.

La Recherche Opérationnelle (RO) permet d'assurer la communication entre le milieu industriel (les secteurs extérieurs) et les applications théoriques dans le but de proposer les solutions les mieux adaptées à une situation donnée.

La recherche opérationnelle est l'ensemble des méthodes et des techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes des organisations.

La recherche opérationnelle, encore appelée science du management ou science de la décision, est une discipline dont l'objet est d'aider les gestionnaires à prendre des décisions en utilisant des modèles et des méthodes scientifiques adaptés.

La recherche opérationnelle propose des méthodes de résolution pour la prise de la meilleure décision quand le choix est multiple, elle intervient quand le bon sens est naturellement incapable de trancher parmi des possibilités multiples.

La difficulté de choisir est motivée par le fait de la complexité du problème ou de l'importance des données de celui-ci.

La recherche opérationnelle offre donc la meilleure solution dans un ensemble de solutions réalisables. C'est donc une boîte à outils indispensable à tout gestionnaire responsable. Notons que la finalité de la RO est la prise de décision plutôt que la description ou l'explication de phénomènes observés

La procédure utilisée par la recherche Opérationnelle RO peut être schématisée comme suit :

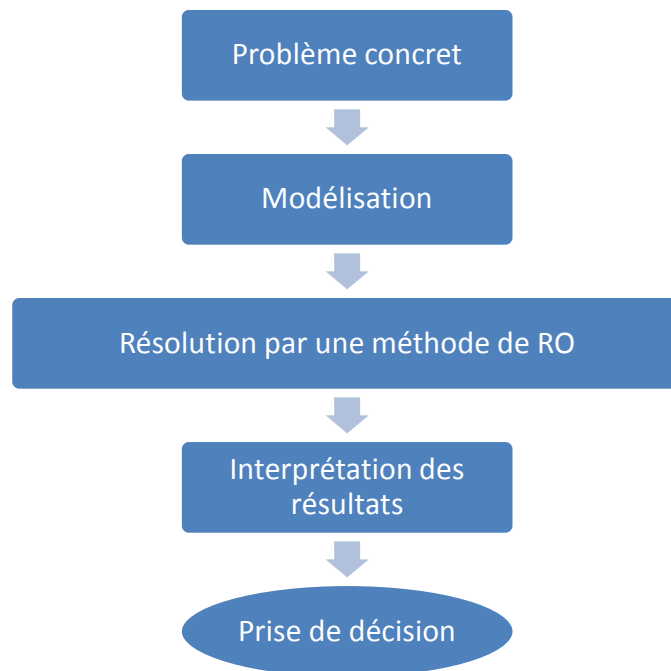


Figure 1 : Schéma de procédure utilisée par la RO

3) Les domaines d'applications de la recherche opérationnelle

- Dans le monde financier, des modèles extrêmement complexes, font appel à l'optimisation stochastique et à la simulation numérique, sous-tendent de nombreuses décisions posées par les grands fonds d'investissement.

- Dans un autre secteur économique en pleine expansion, celui des télécommunications, la RO est devenue un instrument de choix pour l'aide à la conception des réseaux (choix de capacité, localisation des émetteurs et des relais, affectation de fréquences...).
- Les modules de planification de production et d'ordonnancement de projets, de gestion des stocks, de distribution dans la plupart des systèmes de gestion des flux logistiques reposent, de façon plus ou moins importante, plus ou moins explicite et plus ou moins sophistiquée sur l'utilisation de modèles classiques de RO.
- L'évolution de la RO, au cours des dernières années, est caractérisée par une intégration croissante des outils et des solutions au sein d'applications et parfois à l'insu de l'utilisateur final. En particulier, la RO est également présente dans certains logiciels « tous publics ». Monsieur tout le monde fait donc bien souvent de la RO sans le savoir

Cependant, le décideur fera généralement meilleur usage d'un outil quand il comprend au moins superficiellement les tenants et aboutissants que d'une boîte magique dont il accepte les recommandations sans comprendre les principes qu'elle met en œuvre.

4) Enjeux de la recherche opérationnelle RO

L'utilisation de la recherche opérationnelle devient de plus en plus sollicitée dans la vie quotidienne et à différents niveaux puisqu'elle offre plusieurs avantages et traite plusieurs points tels que :

- l'amélioration de la compétitivité des entreprises
- la préservation des emplois
- l'accession à l'innovation
- elle propose les meilleures décisions stratégiques
- fournit une meilleure gestion des ressources. Etc.

5) Étapes d'analyse pour un problème de recherche opérationnelle

Pour résoudre un problème le principe est de l'identifier à un modèle connu ; ensuite les méthodes associées à ce modèle sont appliquées pour proposer des solutions.

Après avoir détecté le problème, l'analyse des opérations se fait en étapes qui ne sont pas nécessairement ordonnées. L'ensemble de ces étapes constitue la démarche pour la réalisation d'un système d'optimisation utilisant la recherche opérationnelle dans tout cas concret :

- **Détection du problème** : C'est la prise de conscience de l'existence du problème et de la nécessité de le Solutionner.

- **Formulation du problème :** C'est une étude détaillée du problème qui précise la frontière entre le système et son environnement. Les objectifs seront fixés et les contraintes possibles clairement identifiées. On aboutit à une formulation du problème.
- **Elaboration du modèle :** On doit élaborer un modèle représentant la réalité simplifiée. Des symboles mathématiques sont utilisés pour représenter les propriétés du système considéré. Cette étape est rarement bien faite, on se trouve souvent incapable d'évaluer certains paramètres ou d'identifier certaines relations fonctionnelles (contraintes, fonctions économiques etc.).
- **Acquisition et analyse des données :** L'acquisition des données est nécessaire pour évaluer certains paramètres, c'est à partir de l'analyse des données que l'on peut formuler des hypothèses nécessaires à la modélisation. Cette étape est fastidieuse et elle demande beaucoup de temps.
- **Recherche d'une solution optimale :** A partir du modèle, on recherche la solution optimale et on dira qu'on a trouvé un programme. Dans la plupart des problèmes complexes, on a recours à des méthodes itératives qui permettent de choisir, par étape, un ensemble de valeurs de rentabilité croissante jusqu'à obtenir une solution optimale. Même si en réalité il est difficile de fonctionner de manière à aboutir à cette solution optimale, une bonne appréciation de la rentabilité de chaque activité est un élément indispensable à la prise de décisions susceptibles de faire progresser l'organisation dans le sens d'une amélioration des résultats.
- **Vérification du modèle et de solution :** La validité du modèle est souvent réalisée au cours de l'acquisition et de l'analyse des données. Une fois la validité du modèle établie, on doit analyser la sensibilité des résultats face à des fluctuations des valeurs des variables non contrôlables (matrice des coûts, coefficients de la fonction économique, etc.).
- **Implémentation de la solution et maintenance du modèle :** Cette étape concerne surtout l'approbation des gestionnaires pour l'implémentation de la solution. Il faut tenir compte aussi des changements dans le temps du système et de son environnement. Afin d'ajuster le modèle au nouvel état du système, il faut créer un système de contrôle permettant une vérification périodique sur l'estimation des paramètres du modèle et des hypothèses sur lesquelles il est basé.

6) Formulation d'un problème d'optimisation

La modélisation du problème ou le passage du texte vers les équations mathématiques ne se fait pas de manière aléatoire. Il doit vérifier certaines conditions et doit passer par plusieurs étapes : l'analyse, la modélisation et le critère à optimiser décrit comme suit :

- **Analyse** : Dans cette phase, on commence toujours par l'identification des données nécessaires à la résolution du problème, les valeurs de consommations ou les fiches techniques des articles, la quantité des ressources disponibles, les coûts de transport, la capacité de production, les gains engendrés par chaque article ou les dépenses établies pour la réalisation d'une action. Dans cette phase, on détermine les composantes, les enjeux et les limites du problème. Toutes ces informations sont primordiales pour la formulation des problèmes.
- **Modélisation** : L'optimisation repose toujours sur des modèles mathématiques qui sont généralement simples et partiels. Pour définir le modèle du système, on définit
 - **Ses variables** : Une fois l'analyse effectuée, on détermine les variables du Système qui représente les décisions à prendre et qui doit répondre à un certain nombre de questions : que faut-il réaliser et en quelle quantité ? Combien doit-on acheter ? Combien de classes à faire dans une école ? Les variables représentent les inconnues du système.
 - **Les contraintes** : Les objets mathématiques qui assurent l'interaction et la liaison des variables par rapport aux ressources disponibles et aux données du problème sont appelées contraintes.
 - **Critère à optimiser** : Représente l'objectif ou le but attendu du problème. il peut être une fonction de minimisation lorsqu'il s'agit d'une dépense, d'un investissement ou une fonction de maximisation lorsqu'il s'agit d'un profit ou de gain.
- **Solutions d'un problème**
 - **Solution admissible** : On appelle solution admissible (ou solution) d'un problème tout vecteur $x \in S$ qui satisfait toutes les contraintes du problème.
 - **Solution optimale** : On appelle solution optimale x^* , la solution parmi toutes les solutions admissibles qui fournissent le meilleur résultat, c'est à dire de trouver le max pour un problème de maximisation ou trouver le min pour un problème de minimisation.

7) Les Outils utilisés en recherche Opérationnelle

La recherche opérationnelle puise ses ressources de plusieurs domaines des mathématiques, on cite :

- La programmation mathématique : linéaire et non linéaire.
- La théorie des graphes.
- L'optimisation combinatoire.
- Les processus stochastiques.
- L'aide multicritère à la décision.
- La théorie des jeux.

8) Qu'est-ce-que la programmation linéaire ?

La programmation linéaire est une technique de modélisation mathématique qui permet d'analyser et de résoudre des problèmes d'optimisation appelés programmes linéaires. Ces derniers consistent à optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction objectif (appelée aussi fonction de coût ou fonction économique) linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes formulées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires exprimées avec les n variables de décision.

- Elle traite de manière générale d'un problème d'allocation de ressources limitées parmi des activités concurrentes et ce d'une façon optimale.
- Elle emploie un modèle mathématique qui décrit le problème réel.
- L'adjectif "linéaire" indique que toutes les fonctions mathématiques de ce modèle sont linéaires tandis que le terme "programmation" signifie essentiellement planification.

9) Qu'est qu'un programme linéaire ?

Un programme linéaire (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

A l'origine, le terme programme a le sens de planification opérationnelle mais il est aujourd'hui employé comme synonyme de problème (d'optimisation).

La terminologie est due à G. B. Dantzig, inventeur de l'algorithme du simplexe.

Un programme mathématique contient deux parties : une fonction objective à maximiser ou à minimiser et un ensemble de contraintes à satisfaire. Un programme linéaire est un programme mathématique dont la fonction objective ainsi que toutes les contraintes sont écrites sous forme linéaire.

Les programmes linéaires sont beaucoup plus simples à résoudre que les programmes non linéaires. En effet, des techniques de résolution assez faciles à mettre en œuvre sont disponibles.

L'algorithme du simplexe est une bonne illustration de ces techniques. Beaucoup de problèmes pratiques peuvent être formulés comme des programmes linéaires. L'abréviation PL pour "programme linéaire" sera largement dans ce document.

Lorsque François Quesnay (1694-1774) publie en 1758 son tableau économique de la France, il inaugure l'application de l'algèbre linéaire à un nouveau domaine: le calcul économique. Mieux compris de Karl Marx que d'Augustin Cournot, ses vrais continuateurs n'apparaîtront qu'au début du XXe siècle, avec V. K. Dimitriev (1904) et Vassily Léontieff, qui, en 1925, expose dans la revue *Planification socialiste* sa méthode du tableau intersectoriel.

Mais, dans l'intervalle, d'autres applications de la programmation mathématique sont nées.

En 1776, l'illustre Gaspard Monge (1744-1818) réalise l'optimisation du coût des transports dans le problème de déblai et remblai (séances des 27 janvier et 7 février 1776 de L'Académie royale des Sciences). Bien que cette communication ait subi plusieurs remaniements avant d'être publiée sous sa forme définitive aux Comptes rendus de l'Académie dont Monge était devenu membre (mémoire présenté le 28 mars 1781, *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, 2e partie, 1784), elle ne cessa de susciter une vive curiosité. Plusieurs géomètres de talent s'y intéressèrent, tels Charles Dupin (*Histoire de l'Académie*, 18 décembre 1815), Albert de Saint-Germain en 1884 (*Acad. Caen*, 1826), Paul Appell en 1884, 1926 et 1928 (*Mémorial des sciences mathématiques*, XXVII, 1928) et, enfin, Ferdinand Pottier (*CR Acad. des Sciences*, t. 31, 1950, p. 11- 22-1124). Il est vrai que Monge inventa la belle théorie des congruences de normales pour venir à bout d'un problème qu'il formulait « en continu » et « dans l'espace », alors qu'aujourd'hui on le considère comme « plan » et « discret » et le résout directement au moyen d'algorithmes déduits de la théorie des graphes.

Un autre mathématicien de renom, le baron Jean- Baptiste Fourier (1768-1830), contemporain du premier essor de l'industrie, se trouve confronté à certains problèmes d'inéquations simultanées. Il fit connaître, en 1824, pour les résoudre, une méthode directe qui suscite encore l'admiration (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, t. VII, *Analyse des travaux*, p. xlvi-lv, 1824)

Des méthodes efficaces de résolution des problèmes de programmation linéaire sont apparues à la fin des années 1930. En 1939, Kantorovich a présenté un certain nombre de solutions à

des problèmes liés à la planification de la production et du transport. Pendant la Seconde Guerre mondiale, Koopmans a contribué de manière significative à la résolution des problèmes de transport. Kantorovich et Koopmans ont reçu un prix Nobel d'économie en 1975 pour leurs travaux sur la théorie de l'allocation optimale des ressources. En 1947, Dantzig a développé une nouvelle méthode pour résoudre les programmes linéaires, connue aujourd'hui sous le nom de méthode du simplexe. Dans le chapitre suivant, nous présentons en détail la méthode du simplexe. La méthode du simplexe est efficace et élégante. Cependant, elle a la propriété indésirable que, dans le pire des cas, le nombre d'étapes (et donc le temps total) nécessaires pour trouver une solution croît de manière exponentielle avec le nombre de variables. Ainsi, on dit que la méthode du simplexe a une complexité exponentielle dans le pire des cas. Cette constatation a suscité un intérêt pour la conception d'algorithmes de résolution de programmes linéaires de complexité polynomiale, c'est-à-dire des algorithmes qui trouvent une solution en un temps limité par un polynôme du nombre de variables.

Khachiyan, en 1979, a été le premier à concevoir un tel algorithme. Cependant, son algorithme a suscité un intérêt plus théorique que pratique. Puis, en 1984, Karmarkar a proposé un nouvel algorithme de programmation linéaire de complexité polynomiale, qui semble résoudre certains problèmes complexes du monde réel en matière d'ordonnancement, de routage et de planification plus efficacement que la méthode du simplexe. Les travaux de Karmarkar ont conduit au développement de nombreuses autres méthodes non complexes, communément appelées méthodes du point intérieur. Cette approche est actuellement encore un domaine de recherche actif.

10) Hypothèses pour l'application de la programmation linéaire :

Pour l'application de programmes linéaires, il faut préciser que des hypothèses simplificatrices, préalablement établies, sont à respecter et seront utiles lors des calculs et de l'exploitation des résultats obtenus. Ces hypothèses sont l'additivité, la linéarité, la continuité et la substitution. Ces hypothèses sont applicables aussi bien à la fonction objective qu'aux contraintes.

1. **Proportionnalité:** avec les programmes linéaires, nous supposons que la contribution des variables individuelles dans la fonction objectif et les contraintes est proportionnelle à leur valeur. Autrement dit, si nous doublons la valeur d'une variable, nous doublons la contribution de cette variable à la fonction objectif et à chaque contrainte dans laquelle la variable apparaît. La contribution par unité de la variable est constante. Par exemple, supposons que la variable

x_j soit le nombre d'unités du produit j fabriquées et que C_j soit le coût unitaire de production du produit j . Si l'on double la quantité du produit j fabriquée alors on doublera son coût, le coût unitaire est constant et l'hypothèse de proportionnalité est satisfaite.

- **Additivité.** Lorsque dans un programme linéaire, un certain phénomène est le résultat d'actions conjuguées (plusieurs activités différentes), on suppose que les effets de chacune d'entre elles sont additifs, c'est-à-dire s'additionnent algébriquement et excluent toute interaction. Ainsi, si une usine fabrique quatre produits avec pour chacun un profit différent, le profit global sera la somme des profits réalisés sur ces quatre produits.

- **Linéarité.** L'hypothèse de linéarité implique qu'il y a proportionnalité entre les effets d'une activité et les moyens nécessaires pour la mettre en œuvre, et ce, quelle que soit la grandeur considérée. Il s'agit de la loi des rendements constants. C'est cette hypothèse qui confère la linéarité aux contraintes, par l'intermédiaire des coefficients techniques, et à la fonction objective par les coefficients de proportionnalité. Ainsi, d'après cette hypothèse, si l'on produit une unité X on utilise la même quantité de matière première, de main d'œuvre ou de temps pour une production de 20 ou 200 000 unités. Évidemment, cela ne reflète nullement la réalité, on peut cependant élargir les résultats dus à cette hypothèse en ajoutant certaines contraintes dans un programme linéaire. Pour le cas cité ci-dessus, on ajoutera deux contraintes sur la production en précisant que celle-ci ne peut varier qu'entre 100 000 et 150 000 unités, les deux contraintes seront alors : Production \geq 100 000 et Production \leq 150 000.

- **Continuité.** Les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive sur l'axe des nombres réels dans un intervalle délimité par les contraintes du programme. Si, le niveau d'une activité varie entre 10 et 1 000, la solution peut être toute valeur d'un nombre réel compris entre ces deux bornes. Ainsi, il n'y a pas d'indivisibilité, l'activité est supposée continue. - **Substitution.** Dans une certaine limite, définie par les contraintes du programme, les variables peuvent se substituer les unes aux autres. Cette hypothèse permet de ne pas subir les inconvénients d'une sous-utilisation des moyens employés.

Divisibilité: les variables de décision peuvent prendre n'importe quelle valeur numérique réelle dans une plage spécifiée par les contraintes. En d'autres termes, les variables ne sont pas limitées à des valeurs entières. Lorsque les valeurs fractionnaires ne constituent pas une solution sensée, comme le nombre de vols qu'une compagnie aérienne doit effectuer chaque jour entre deux villes, le problème doit être formulé et résolu comme un programme linéaire entier.

Certitude: nous supposons que les valeurs des paramètres du modèle sont connues avec certitude ou sont au moins traitées comme telles. La solution optimale obtenue est optimale pour le problème spécifique formulé. Si les valeurs des paramètres sont erronées, la solution obtenue n'a que peu de valeur.

Dans la pratique, les hypothèses de proportionnalité et d'additivité nécessitent la plus grande attention et sont les plus susceptibles d'être violées par le modélisateur. Avec l'expérience, nous reconnaissons quand des solutions entières sont nécessaires et que les variables doivent être modélisées explicitement.

Chapitre 2 : Formulation d'un programme linéaire (Modélisation)

Limité au départ aux problèmes industriels et militaires, de nos jours plusieurs problèmes de divers domaines sont représentés ou approximés par des modèles de PL. L'utilisation de ces techniques de modélisation s'est renforcée encore après avoir construit des algorithmes et des logiciels capables de résoudre de plus larges problèmes avec autant de variables de décision que de contraintes.

La tâche de formulation demande généralement une certaine expertise et connaissance du problème pour pouvoir relever facilement les différentes composantes du problème et ainsi donner un programme qui modélise au mieux la situation réelle.

1) Les conditions de formulation d'un PL

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

- Les variables de décision du problème sont positives $X_j \geq 0$
- Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objective (ou fonction économique).
- Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple: limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
- Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude

2) Etapes de formulation d'un PL :

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

- Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, y_1).

- Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
- Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

3) Présentation Théorique

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

Soient N variables de décision x_1, x_2, \dots, x_N , l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0$.

La fonction objective est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N$$

où les coefficients c_1, \dots, c_N doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par exemple le coefficient c_j peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_j , ainsi la valeur de z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à x_1, x_2, \dots, x_N .

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par M inégalités

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &\geq b_M \end{aligned}$$

Où les coefficients a_{1M}, \dots, a_{MN} et b_1, \dots, b_M doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_i représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_j utilise une quantité égale à $a_{ij}x_j$.

En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \\ \text{s.c} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

4) La forme canonique d'un PL :

Définition 1 : on dit qu'un problème linéaire est donné sous forme canonique de type MAX s'il est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \\ \text{s.c} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \leq b_M \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Si nous utilisons la notation matricielle, ce problème linéaire canonique de type MAX va s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c^t x \\ \text{s.c} \quad & A x \leq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Définition 2 : on dit qu'un problème linéaire est donné sous forme canonique de type MIN s'il est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \\ \text{s.c} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N \geq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N \geq b_M \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Si nous utilisons la notation matricielle, ce problème linéaire canonique de type MIN va s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c^t x \\ \text{s.c} \quad & A x \geq b \\ & X \geq 0 \end{aligned}$$

Définition 3 : un problème linéaire est dit mixte s'il est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Max / Min } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \\
 \text{s.c } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N &\geq b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N &\leq b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N &= b_M \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N &\geq 0
 \end{aligned}$$

5) La forme standard d'un PL

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables supplémentaires (une pour chaque contrainte) de manière à réécrire les inégalités (\geq ; \leq) sous la forme d'égalités(=). Chacune de ces variables représente le nombre de ressources non utilisés. On les appelle variable d'écart. La forme standard s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \text{Max } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N + 0S_1 + 0S_2 + \dots + 0S_M \\
 \text{s.c } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N + S_1 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N + S_2 &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N + S_M &= b_M \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0 \\
 S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_M \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N + 0S_1 + 0S_2 + \dots + 0S_m \\
 \text{s.c } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N - S_1 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N - S_2 &= b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N - S_M &= b_M \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_N \geq 0 \\
 S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_M \geq 0
 \end{aligned}$$

L'impact de ces variables d'écart sur la fonction objectif est nul. Ceci explique le fait que leur existence soit tout simplement liée à une mise en forme du programme linéaire initial. Ces variables d'écart peuvent prendre des valeurs non négatives. Le fait de donner la valeur des variables d'écart à l'optimum donne une idée du nombre des ressources non utilisées.

6) Les règles de transformation d'un PL

a) Maximisation \rightarrow Minimisation

$$\text{Max } Z = CX \rightarrow \text{Min } W = -CX$$

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 \rightarrow \text{Min } W = -(2X_1 + X_2) = -2X_1 - X_2$$

b) Inéquation \geq \rightarrow Inéquation \leq

$$aX \geq b \rightarrow -aX \leq -b$$

c) Equation \rightarrow Inéquation

$$aX = b \rightarrow \begin{cases} aX \geq b \\ aX \leq b \end{cases}$$

d) Inéquation \rightarrow Equation

$$aX \leq b \rightarrow aX + S = b$$

$$aX \geq b \rightarrow aX - S = b$$

e) $X_j \in \mathbb{R} \rightarrow$ On pose $X_j = X_j' - X_j''$ $\begin{cases} X_j' \geq 0 \\ X_j'' \geq 0 \end{cases}$

f) $X_j \leq 0 \rightarrow$ On pose : $X_j = -X_j'$ avec $X_j' \geq 0$

g) $X_j \geq b$ dont $b \leq 0 \rightarrow$ On pose : $X_j = X_j' + b$ avec $X_j' \geq 0$

h) $I_j \leq X_j \leq U_j$ $\begin{cases} U_j \geq 0 \\ I_j \leq 0 \end{cases} \rightarrow$ On pose $X_j = X_j' - X_j''$ avec $\begin{cases} X_j' \geq 0 \\ X_j'' \geq 0 \end{cases}$

On ajoute au système de contraintes les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} X_j' - X_j'' \leq U_j \\ X_j' - X_j'' \geq I_j \end{cases}$$

7) **Exemples de formulations :** Dans ce qui suit, on présentera quelques exemples de formulation en programme linéaire liés à différents problèmes de décision :

Exemple n°1 : (cas de production) :

Un fabricant produit 2 types de yaourts `a la fraise A et B `a partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières

	Yaourts A	Yaourt B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

Les matières premières sont en quantité limitée : 800 kilos de Fraises, 700 kilos de Lait et 300 kilos de sucre. La vente des yaourts A rapportent 4 € par kilo et les yaourts B 5€

Ecrire le problème sous forme mathématique ;

Solution :

2. **Identification des variables de décision :**

X_1 : la quantité de yaourts A à produire ;

X_2 : la quantité de yaourts B à produire ;

3. La fonction objective :

$$\text{Max } Z = 4 X_1 + 5X_2$$

4. Les contraintes structurelles :

	Yaourts A (X_1)	Yaourts B (X_2)	Disponibilités de matières premières
Fraise	2	1	800
Lait	1	2	700
Sucre	0	1	300

1^{ère} Contrainte (disponibilité de la fraise)

2^{ème} contrainte (disponibilité du lait)

3^{ème} contrainte (disponibilité du sucre)

1^{ère} Contrainte : $2X_1 + X_2 \leq 800$

2^{ème} contrainte : $X_1 + 2X_2 \leq 700$

3^{ème} contrainte : $X_2 \leq 300$

5. Les contraintes de positivité :

$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\text{Max } Z = 4 X_1 + 5X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 800 \\ X_1 + 2X_2 \leq 700 \\ X_2 \leq 300 \end{cases}$$

$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$

Exemple n°2 : (cas de lots de produits)

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qu'il vend 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un prix de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Ecrire le programme mathématique qui permet au fleuriste de réaliser une recette maximale ?

Solution :

1. Identification des variables de décision :

X_1 : le nombre de bouquets de type 1 (qui sera vendu contre 40€) à former ;

X_2 : le nombre de bouquets de type 2 (qui sera vendu contre 50€) à former ;

2. La fonction objective :

$$\text{Max } Z = 40 X_1 + 50 X_2$$

3. Les contraintes structurelles :

	Bouquets 1 (X_1)	Bouquets 2 (X_2)	Disponibilités de matières premières (les fleurs)
Lys	10	10	50
roses	10	20	80
jonquilles	20	10	80

1^{ère} Contrainte (nombre de lys disponible)

2^{ème} contrainte (nombre de roses disponible)

3^{ème} contrainte (nombre de jonquilles
disponible)

$$1^{\text{ère}} \text{ Contrainte : } 10X_1 + 10X_2 \leq 50$$

$$2^{\text{ème}} \text{ contrainte : } 10X_1 + 20X_2 \leq 80$$

$$3^{\text{ème}} \text{ contrainte : } 20X_1 + 10X_2 \leq 80$$

Les contraintes de positivité :

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$$

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\text{Max } Z = 40 X_1 + 50 X_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10X_1 + 10X_2 \leq 50 \\ 10X_1 + 20X_2 \leq 80 \\ 20X_1 + 10X_2 \leq 80 \end{array} \right.$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$$

Exemple n°3 : (cas de mélanges)

Un agriculteur souhaite mélanger des engrais de façon à obtenir au minimum 15 unités de potasse, 20 unités de nitrates et 30 unités de phosphates. Il achète deux types d'engrais.

- Le type 1 procure 3 unités de potasse, 1 unité de nitrates et 3 unités de phosphates. Il coûte 120 €.
- Le type 2 procure 1 unité de potasse, 5 unités de nitrates et 2 unités de phosphates. Il coûte 60 €.

Exprimer à l'aide d'un programme linéaire la combinaison d'engrais qui remplira les conditions exigées au moindre coût.

Solution :

4. Identification des variables de décision :

X_1 : la quantité de mélange de type 1 à acheter ;

X_2 : la quantité de mélange de type 2 à acheter;

5. La fonction objective :

$$\text{Min } Z = 120 X_1 + 60 X_2$$

6. Les contraintes structurelles

	Mélange de type 1 (X_1)	Mélange de type 2 (X_2)	Les besoins
potasse	3	1	15
Nitrates	1	5	20
Phosphates	3	2	30

1^{ère} Contrainte (les besoins en potasse)

2^{ème} contrainte (les besoins en nitrates)

3^{ème} contrainte (les besoins en phosphates)

1^{ère} Contrainte : $3X_1 + X_2 \geq 15$

2^{ème} contrainte : $X_1 + 5X_2 \geq 20$

3^{ème} contrainte : $3X_1 + 2X_2 \geq 30$

7. Les contraintes de positivité :

$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$

Alors, le programme linéaire peut s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\text{Max } Z = 120 X_1 + 60 X_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 + 5X_2 \geq 20 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 30 \end{array} \right.$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$$

Exemple 5: Problème d'agriculture

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main d'œuvre et de 440 m³ d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main d'œuvre, 4 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 100 dinars. Un hectare de piments demande 4 heures de main d'œuvre, 2 m³ d'eau et donne un bénéfice net de 200 dinars.

Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Solution :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ & x_1 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 7 : Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Solution :

Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 8 : problème de production

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.

La disponibilité pour chaque machine :

- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3 .

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dinars et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dinars.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Solution :

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 900x_1 + 1000x_2 \\ \text{s.c.} & 11x_1 + 9x_2 \leq 9900 \\ & 7x_1 + 12x_2 \leq 8400 \\ & 6x_1 + 16x_2 \leq 9600 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Exemple 9 : Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit

précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1 Kg d'aliment M contient 100 g de A, 100 g de C, 200 g de D ; 1 Kg d'aliment N contient 100 g de B, 200 g de C, 100 g de D.

Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 10 DA le Kg et N coûte 4 DA le Kg. Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Solution :

Le programme linéaire est un programme de minimisation :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & 10x_1 + 4x_2 \\
 \text{s.c.} & x_1 \geq 4 \\
 & x_2 \geq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 20 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 17 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Exemple 10 : Problème de mélange

Un industriel veut produire un alliage Z à 30% de plomb, 30% de zinc et 40% d'étain. Supposons qu'il puisse se procurer sur le marché des alliages A, B, C, D, E, F, G, H, I dont les compositions et les prix respectifs sont donnés dans le tableau suivant :

Compositions des alliages (en %)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Alliage à fabriquer
Plomb	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
Zinc	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
Etain	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Coût au Kilo	4.1	4.3	5.8	6	7.6	7.5	7.3	6.9	7.3	

Combien doit-il acheter de chaque alliage A, B, C, D, E, F, G, H et I pour obtenir au prix de revient minimum un 1 Kg de l'alliage Z ?

Solution :

La décision à prendre : Combien acheter de chaque alliage A, B, ..., I ?

Les variables de décision sont :

- x_i : la quantité d'alliage i , $i = A, B, \dots, I$, à acheter.

On vérifie bien que les variables de décision x_i , $i = A, B, \dots, I$, sont positives :
 $x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, x_D \geq 0, x_E \geq 0, x_F \geq 0, x_G \geq 0, x_H \geq 0, x_I \geq 0$.

Les contraintes relatives au problème sont :

- Equation de la conservation de la matière :

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, x_C \geq 0, x_D \geq 0, x_E \geq 0, x_F \geq 0, x_G \geq 0, x_H \geq 0, x_I \geq 0$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Plomb :

$$x_A + 0.3x_B + 0.5x_C + 0.3x_D + 0.3x_E + 0.4x_F + 0.2x_G + 0.4x_H + 0.3x_I = 0.3$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Zinc :

$$0.1x_A + 0.3x_B + 0.5x_C + 0.3x_D + 0.3x_E + 0.4x_F + 0.2x_G + 0.4x_H + 0.3x_I = 0.3$$

- Equation de la satisfaction des proportions en Etain :

$$0.8x_A + 0.6x_B + 0.1x_C + 0.1x_D + 0.4x_E + 0.3x_F + 0.5x_G + 0.1x_H + 0.5x_I = 0.4$$

La fonction objectif dans cet exemple représente le coût d'achat des différents alliages A, B, C, D, E, F, G, H et I. Donc l'expression de la fonction objectif est la suivante :

$$z = 4.1x_A + 4.3x_B + 5.8x_C + 6x_D + 7.6x_E + 7.5x_F + 7.3x_G + 6.9x_H + 7.3x_I$$

Le programme linéaire qui modélise ce problème mélange s'écrit :

$$\text{Min} \quad 4.1x_A + 4.3x_B + 5.8x_C + 6x_D + 7.6x_E + 7.5x_F + 7.3x_G + 6.9x_H + 7.3x_I$$

$$\text{s.c.} \quad x_A + x_B + x_C + x_D + x_E + x_F + x_G + x_H + x_I = 1$$

$$0.1x_A + 0.1x_B + 0.4x_C + 0.6x_D + 0.3x_E + 0.3x_F + 0.3x_G + 0.5x_H + 0.2x_I = 0.3$$

$$0.1x_A + 0.3x_B + 0.5x_C + 0.3x_D + 0.3x_E + 0.4x_F + 0.2x_G + 0.4x_H + 0.3x_I = 0.3$$

$$0.8x_A + 0.6x_B + 0.1x_C + 0.1x_D + 0.4x_E + 0.3x_F + 0.5x_G + 0.1x_H + 0.5x_I = 0.4$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_F, x_G, x_H, x_I \geq 0$$

Exemple 6 : Sélection de Médias

Une entreprise désire effectuer une campagne publicitaire dans la télévision, la radio et les journaux pour un produit lancé récemment sur le marché. Le but de la campagne est d'attirer le maximum possible de clients. Les résultats d'une étude de marché sont donnés par le tableau suivant :

	Télévision		Radio	Journaux
	Locale	Par satellite		
Coût d'une publicité	40 DA	75 DA	30 DA	15 DA
Nombre de client potentiel par publicité	400	900	500	200
Nombre de client potentiel femme par publicité	300	400	200	100

Pour la campagne, on prévoit de ne pas payer plus que 800DA pour toute la campagne et on demande que ces objectifs soient atteints :

1. Au minimum 2000 femmes regardent, entendent ou lisent la publicité ;
2. La campagne publicitaire dans la télévision ne doit pas dépasser 500 DA ;
3. Au moins 3 spots publicitaires seront assurés par la télévision locale et au moins de deux spots par la télévision par satellite.
4. Le nombre des publicités dans la radio ou dans les journaux sont pour chacun entre 5 et 10.

Solution :

Les variables de décision du problème sont

- x_1 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision locale
- x_2 : le nombre de spots publicitaires dans la télévision par satellite
- x_3 : le nombre de spots publicitaires dans la radio
- x_4 : le nombre d'affiches publicitaires dans les journaux

Les contraintes de non-négativité sont vérifiées.

Les contraintes du problème sont :

- Coût total de la campagne publicitaire : $40x_1 + 75x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800$
- Nombre de clients femmes potentiels par publicité :

$$300x_1 + 400x_2 + 200x_3 + 100x_4 \geq 2000$$

- Contraintes de la télévision : $40x_1 + 75x_2 \leq 500$, $x_1 \geq 3$ et $x_2 \geq 2$
- Contraintes sur le nombre de publicités dans la radio et dans les journaux $5 \leq x_3 \leq 10$ et $5 \leq x_4 \leq 10$.

La fonction objectif à maximiser représente le nombre de clients potentiels par publicité

$$z = 400x_1 + 900x_2 + 500x_3 + 200x_4.$$

Le programme linéaire résultant est :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 400 x_1 + 900 x_2 + 500 x_3 + 200 x_4 \\ \text{s.c.} & 40x_1 + 75 x_2 + 30x_3 + 15x_4 \leq 800 \\ & 30x_1 + 40 x_2 + 20x_3 + 10x_4 \geq 2000 \\ & 40x_1 + 75 x_2 \leq 500 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_3 \geq 5 \\ & x_3 \leq 10 \\ & x_4 \geq 5 \\ & x_4 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Série n° : (Modélisation)

Exercice n°1 :

Considérons :

- X_1 : nombre des unités P_1 à fabriquer.
- X_2 : nombre des unités P_2 à fabriquer.
- X_3 : nombre des unités P_3 à fabriquer.
- X_4 : nombre des unités P_4 à fabriquer.
- X_5 : nombre des unités P_5 à fabriquer.

R : le profit à réaliser pour

- Pour P_1 :
R=96DA/Unité
- Pour P_2 :
R=72DA/Unité
- Pour P_3 :R=48DA/Unité
- Pour P_4 :
R=64DA/Unité
- Pour P_5 :R=81DA/Unité

Disponibilités

- M_1 : 130 Unités
- M_2 : 150 Unités
- M_3 : 115 Unités
- M_4 : 142 Unités

Plan de production :

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M1	0.5	1.2	0	0.6	0.8
M2	1	0.8	0.6	1	0.3
M3	0.7	1	0.9	1.5	0
M4	1.2	0.4	0.5	10	1.2

Question : Déterminer la fonction objective, les contraintes structurelles et les contraintes de positivité.

Exercice 2 : une entreprise dispose de 200Kgs de café africain, 300Kgs de café brésilien et 500Kgs de café colombien. En utilisant ces trois produits, l'entreprise procède à des mélanges pour obtenir deux types de café à commercialiser. Le plan de production est représenté par le tableau suivant :

	Café type 1	Café type 2
Café africain	0.6	0.4
Café brésilien	0.3	0.4
Café colombien	0.1	0.2

Le 1^{er} type est vendu à 140 DA/Kg

Le 2^{ème} type est vendu à 170DA/Kg

Question : écrire le modèle de programmation linéaire correspondant à ce problème de manière à ce que la compagnie réalise un bénéfice maximal.

Exercice 3 : une entreprise possède deux usines U_1 et U_2 , l'usine U_1 dispose de 500 unités d'un certain produit et l'usine U_2 dispose de 300 unités du même produit. L'entreprise a trois clients : E_1 , E_2 , E_3 dont la demande pour ce produit est : 100 unités pour le client E_1 , 200 unités pour le client E_2 , 300 unités pour le client E_3 ; les coûts unitaires de transport(en milliers de DA) sont résumés dans le tableau suivant :

	E_1	E_2	E_3
U_1	20	10	30
U_2	30	20	20

Question : Etablir un programme linéaire pour un plan de distribution optimal

Exercice4 : Une firme fabrique deux produits P_1 et P_2 à l'aide des matières premières M_1 , M_2 , M_3 . Le plan de production de l'usine est présenté par le tableau suivant :

	P ₁	P ₂
M ₁	2	1
M ₂	4	2
M ₃	0	1

La direction de la firme dispose des matières premières M₁, M₂, M₃ en quantités respectives :800 ,700 et 300 unités. Le profit dû à la fabrication d'une unité de P1 est égal à 5 et celui de P2 à 6.

Question : Ecrire le problème sous forme de modèle de programmation linéaire.

Corrigé type série 1 (Modélisation)

Exercice 1 :

1) Identification des variables de décision :

- X₁ : nombre des unités P₁ à fabriquer.
- X₂ : nombre des unités P₂ à fabriquer.
- X₃ : nombre des unités P₃ à fabriquer.
- X₄ : nombre des unités P₄ à fabriquer.
- X₅ : nombre des unités P₅ à fabriquer.

2) Les contraintes structurelles :

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	Disponibilités des matières premières
M1	0.5	1.2	0	0.6	0.8	130
M2	1	0.8	0.6	1	0.3	150
M3	0.7	1	0.9	1.5	0	115
M4	1.2	0.4	0.5	10	1.2	142

1^{ère} contrainte

2^{ème} contrainte

3^{ème} contrainte

4^{ème} contrainte

- 1^{ère} contrainte :

$$0,5 X_1 + 1,2 X_2 + 0 X_3 + 0,6$$

$$X_4 + 0,8 X_5 \leq 130$$

- 2^{ème} contrainte :

$$1 X_1 + 0,8 X_2 + 0,6$$

$$X_3 + 1 X_4 + 0,3 X_5 \leq 150$$

- 3^{ème} contrainte : $0,7 X_1 + 1 X_2 + 0,9 X_3 + 1,5 X_4 + 0 X_5 \leq 115$
- 4^{ème} contrainte : $1,2 X_1 + 0,4 X_2 + 0,5 X_3 + 10 X_4 + 1,2 X_5 \leq 142$

3) La fonction objective :

$$\text{Max } Z = 96 X_1 + 72 X_2 + 48 X_3 + 64 X_4 + 81 X_5$$

4) Les contraintes de positivités :

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; X_4 \geq 0 ; X_5 \geq 0$$

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

$$\text{Max } Z = 96 X_1 + 72 X_2 + 48 X_3 + 64 X_4 + 81 X_5$$

$$\begin{cases} 0,5 X_1 + 1,2 X_2 + 0 X_3 + 0,6 X_4 + 0,8 X_5 \leq 130 \\ 2 X_1 + 0,8 X_2 + 0,6 X_3 + 1 X_4 + 0,3 X_5 \leq 150 \\ 0,7 X_1 + 1 X_2 + 0,9 X_3 + 1,5 X_4 + 0 X_5 \leq 115 \\ 1,2 X_1 + 0,4 X_2 + 0,5 X_3 + 10 X_4 + 1,2 X_5 \leq 142 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; X_4 \geq 0 ; X_5 \geq 0$$

Exercice 2 :

1) Identification des variables de décision :

- X_1 : Quantité de café de type 1 à fabriquer
- X_2 : Quantité de café de type 2 à fabriquer

2) Les contraintes structurelles :

- 1^{ère} contrainte : $0,6 X_1 + 0,4 X_2 \leq 200$
- 2^{ème} contrainte : $0,3 X_1 + 0,4 X_2 \leq 300$
- 3^{ème} contrainte : $0,1 X_1 + 0,2 X_2 \leq 500$

3) La fonction objective :

$$\text{Max } Z = 140 X_1 + 170 X_2$$

4) Les contraintes de positivités :

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$$

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

$$\text{Max } Z = 140 X_1 + 170 X_2$$

$$\begin{cases} 0,6 X_1 + 0,4 X_2 \leq 200 \\ 0,3 X_1 + 0,4 X_2 \leq 300 \\ 0,1 X_1 + 0,2 X_2 \leq 500 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Exercice 3 :

X_{11} : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E1

X_{12} : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E2

X_{13} : quantité de produit transporté de l'usine U1 vers le client E3

X_{21} : quantité de produit transporté de l'usine U2 vers le client E1

X_{22} : quantité de produit transporté de l'usine U2 vers le client E2

X₂₃ : quantité de produit transporté de l'usine U3 vers le client E3

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

$$\text{Min } Z = 20 X_{11} + 10 X_{12} + 30 X_{13} + 30 X_{21} + 20 X_{22} + 20 X_{23}$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 500$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 300$$

$$X_{11} + X_{21} = 100$$

$$X_{12} + X_{22} = 200$$

$$X_{13} + X_{23} = 300$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad i=1,2 ; j=1,3$$

Exercice 4 :

- X₁ : Quantité de P1 à fabriquer
- X₂ : Quantité de P2 à fabriquer

Alors le programme linéaire peut être écrit comme suit :

$$\text{Max } Z = 5 X_1 + 6 X_2$$

$$2 X_1 + 1 X_2 \leq 800$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 700$$

$$X_2 \leq 300$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$$

Chapitre 3 : Résolution d'un programme linéaire par la méthode graphique

Introduction

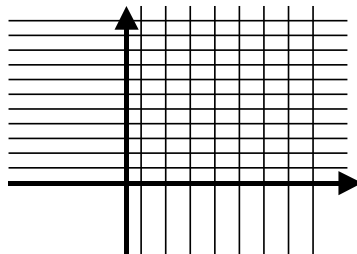
Après avoir illustré par des exemples, comment un problème pratique peut être modélisé par un programme linéaire, l'étape qui va suivre sera certainement celle de la résolution de ce problème mathématique. La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.

Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à deux variables et au plus à trois variables. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

1) Résolution graphique d'un problème linéaire : cas de maximisation

- **Système d'axes**

Une des conditions de la réussite de notre représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.



A cause des contraintes de non-négativité des variables de décision, nous nous intéressons seulement au cadran positif (voir figure ci-dessus).

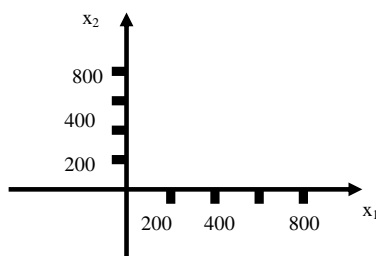
Cette région s'appelle la *région des solutions possibles* du problème.

Prenons l'exemple 1 relatif au problème de production des yaourts à base de la fraise. Le programme linéaire est le suivant :

$$\text{Max } Z = 4 X_1 + 5 X_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X_1 + X_2 \leq 800 \\ X_1 + 2X_2 \leq 700 \\ X_2 \leq 300 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Un bon choix se base sur une lecture des différents paramètres du programme linéaire. Dans notre cas, on ne peut qualifier de bon, le choix de 200 comme unité dans les deux axes. Pour cet exemple, on peut choisir le système d'axes suivant :



- **Représentation graphique des contraintes**

Parmi les solutions possibles d'un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.

Exemple d'application :

Revenons à l'exemple 1 du problème de production des yaourts :

➤ Une des contraintes de ce problème est celle relative à la disponibilité de la fraise :

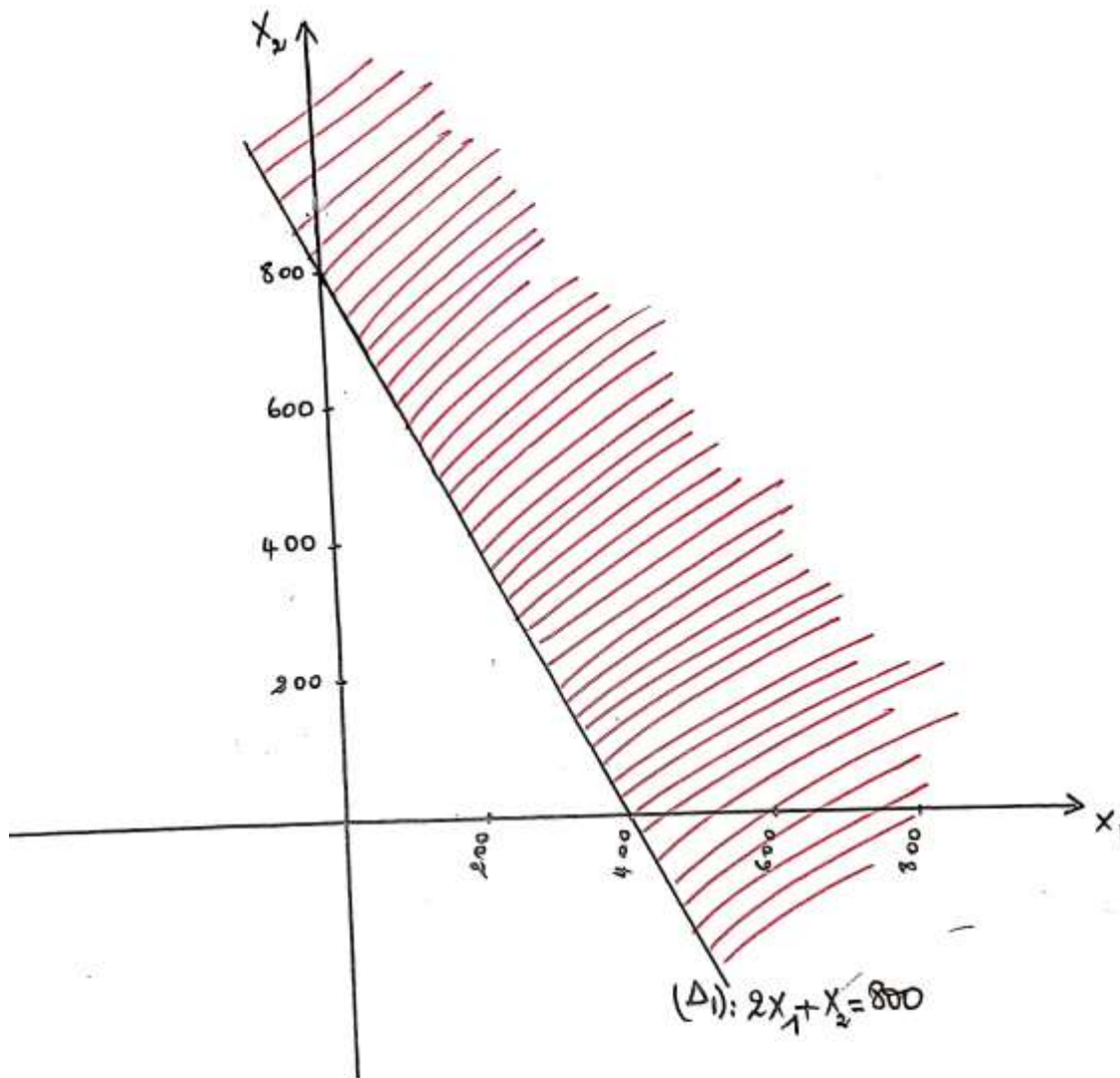
$$2X_1 + X_2 \leq 800$$

L'ensemble des solutions qui vérifient cette inégalité est le même que celui qui vérifie $2X_1 + X_2 = 800$ et $2X_1 + X_2 < 800$

L'ensemble des solutions qui correspond à l'équation est l'ensemble des points de la droite (Δ 1) définie par $2X_1 + X_2 = 800$.

Pour tracer la droite (Δ 1) il suffit de designer deux points comme suit :

X₁	0	400
X₂	800	0

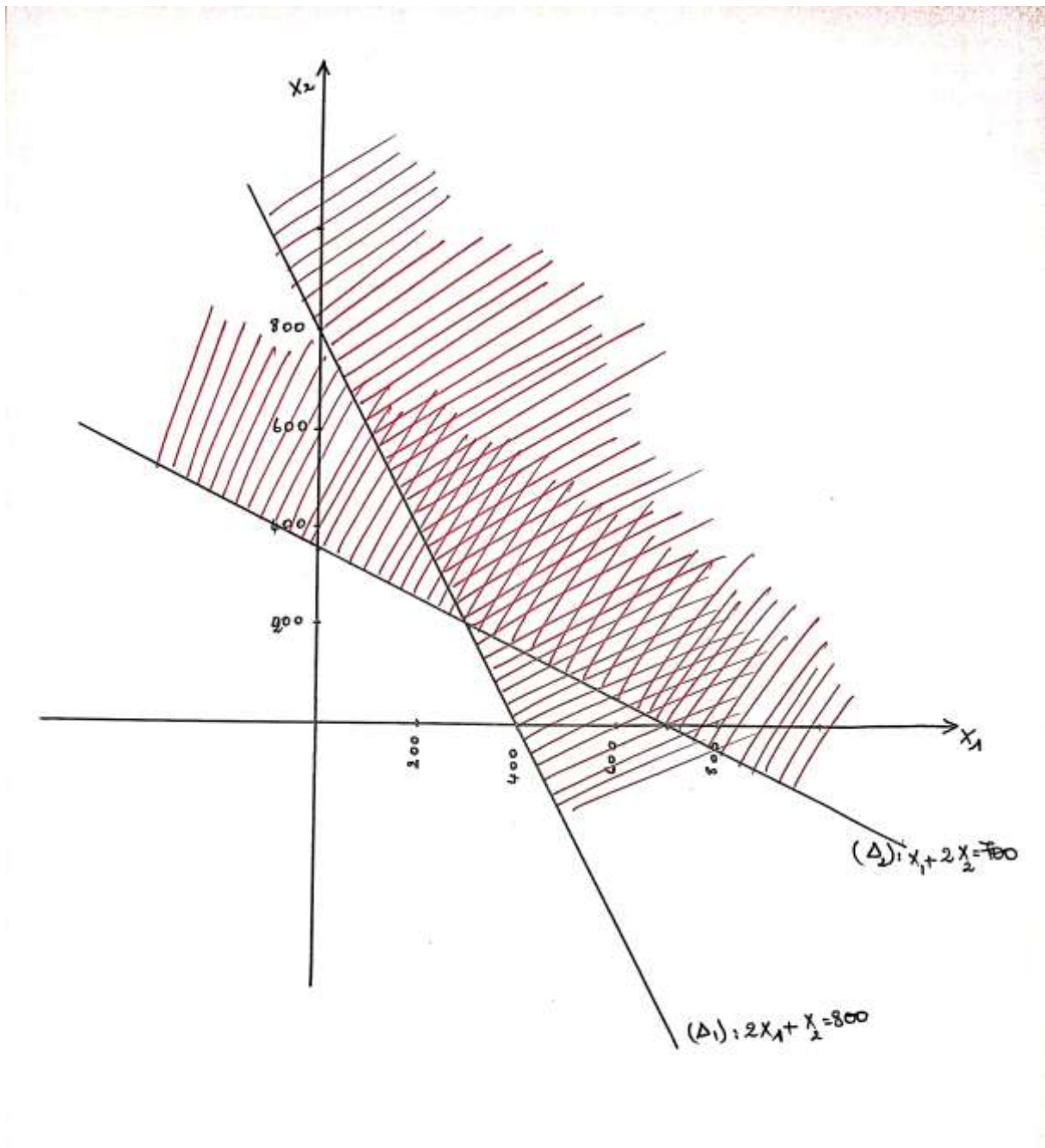


L'inégalité $2X_1 + X_2 < 800$ correspond à un demi-plan limité par la droite $2X_1 + X_2 = 800$. Or cette droite divise le plan en deux demi-plans ouverts donc quel est le demi-plan à choisir ?

Pour ce faire, il suffit de prendre un point de l'un des demi-plans (c'est à dire n'appartenant pas à la droite $2X_1 + X_2 = 800$) et voir s'il vérifie l'inégalité $2X_1 + X_2 < 800$. Par exemple le point de coordonnées $(0,0)$ vérifie l'inégalité $2X_1 + X_2 < 800$ donc le demi-plan π_1 au-dessous de la droite est celui recherché (voir figure ci-dessus).

L'espace hachuré représente le demi-plan fermé des solutions qui ne vérifient pas la contrainte $2X_1 + X_2 < 800$.

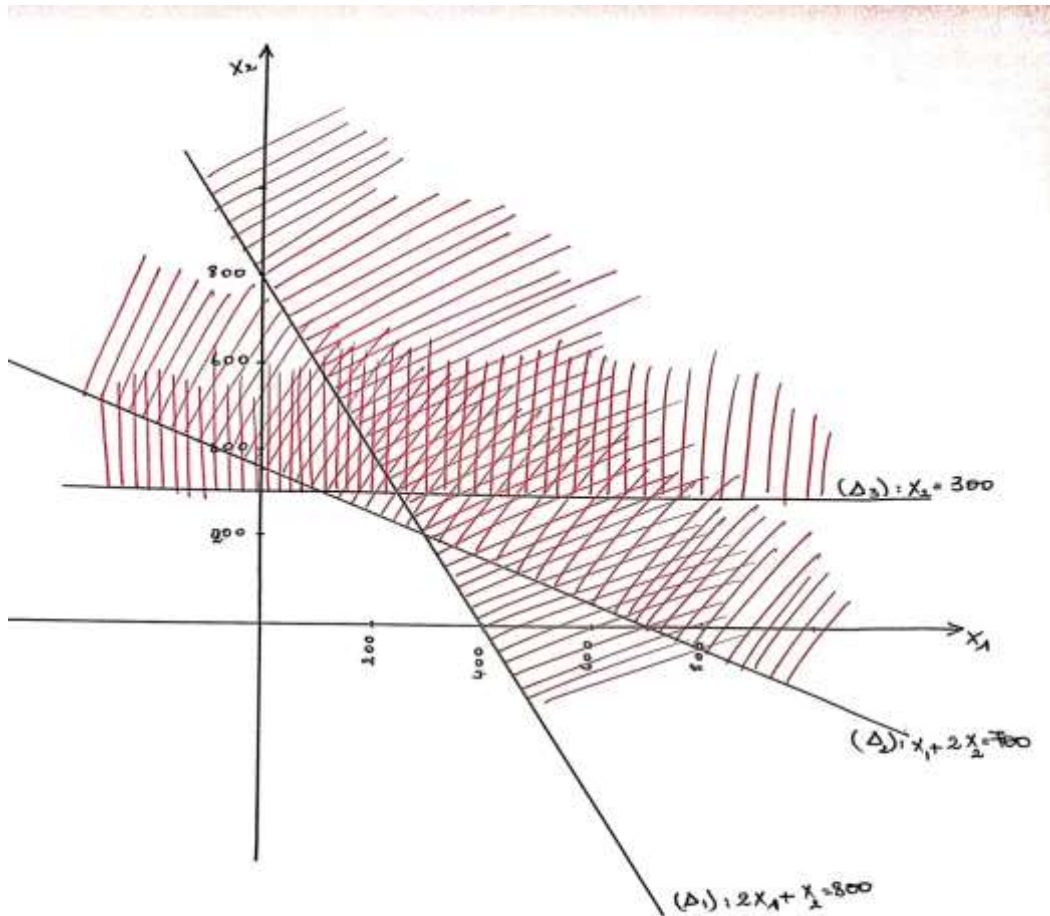
Si on fait de même pour les deux autres contraintes du problème (voir figures ci-dessous), on obtient les deux autres demi-plans π_2 et π_3 relatifs aux solutions vérifiant respectivement les contraintes $X_1 + 2X_2 \leq 700$ et $X_2 \leq 300$.



Une solution possible du problème est dite réalisable si et seulement si elle vérifie toutes les contraintes, c'est à dire si elle appartient aux trois demi-plans relatifs à chaque contrainte du

programme linéaire, en d'autre terme à

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.



- **Représentation de la fonction objectif**

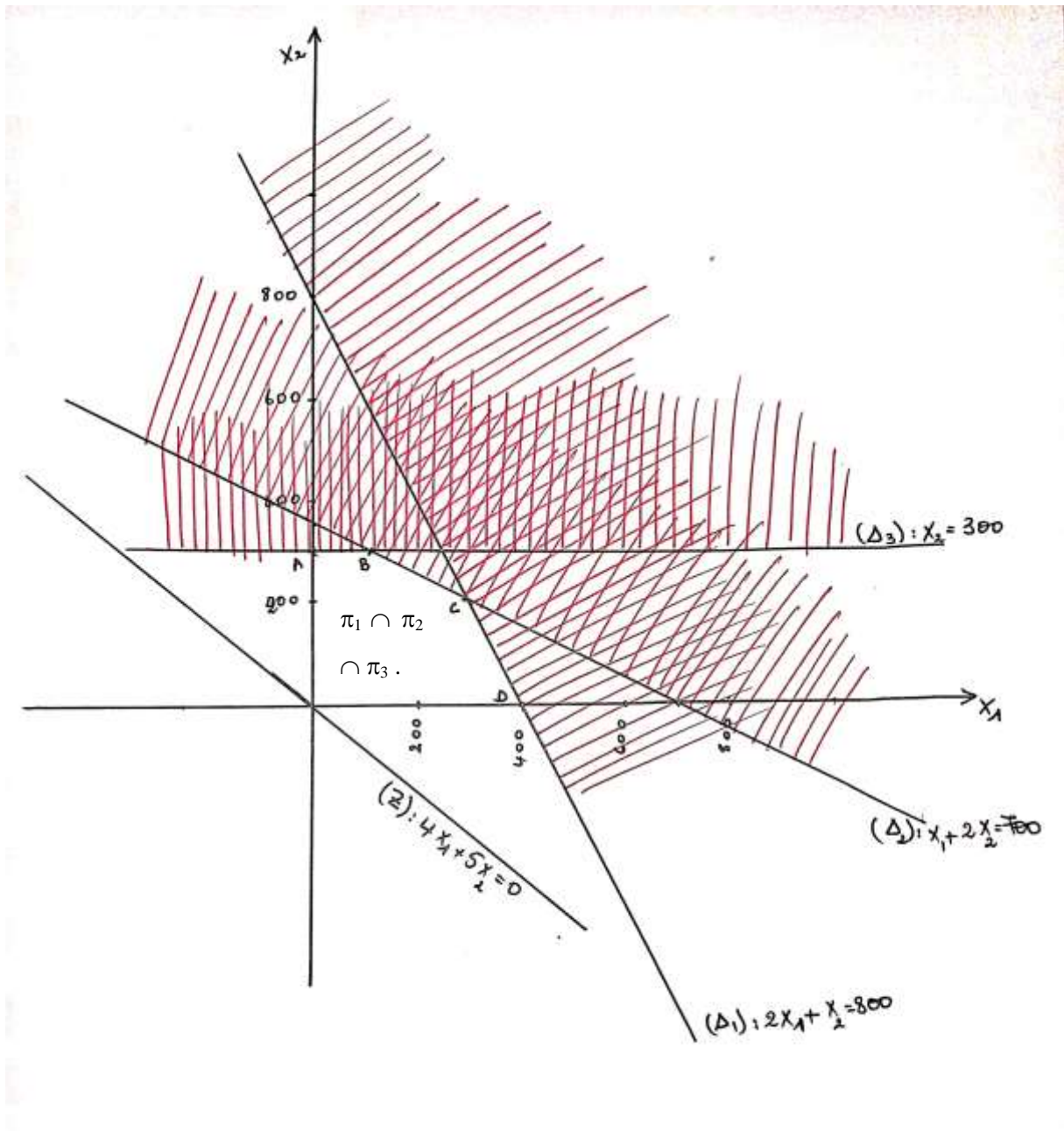
Soit z la valeur de la fonction objectif du problème de médecine $z = 4x_1 + 5x_2$.

Pour $z=0$, la fonction objectif est représentée de la manière suivante : pour $Z=0$

$X_1 = -250$ et $X_2 = 200$

On peut tracer une infinité de droites qui représentent les différentes valeurs de la fonction objective. Par suite elles sont parallèles entre elles. De plus on peut améliorer la valeur de z indéfiniment dans le sens indiqué dans la figure ci-dessous.

Le problème est de connaître qu'elle est la droite qui correspond à la valeur maximale de la fonction objectif ?



- Recherche de la solution optimale

a. Résolution graphique

Si nous retraçons l'ensemble des droites parallèles relatives aux différentes valeurs de la fonction objectif sur la figure qui représente l'ensemble des solutions réalisables, on peut localiser la solution optimale. Elle correspond à la solution réalisable qui intercepte la droite à la plus grande valeur de z .

Dans notre exemple, la solution optimale est l'intersection des deux contraintes $2x_1 + x_2 \leq 800$ et $x_2 \leq 300$. Une évaluation des coordonnées de ce point revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 800 \\ X_2 \leq 300 \end{cases}$$

Elle correspond d'après le graphique au point (300,200). Donc la prescription optimale est de 300 unités des yaourts de type 1 et 200 unités des yaourts de type 2. Le chiffre d'affaire rapporté (la valeur de la fonction objectif) est égal à 2200€.

b. Résolution par énumération :

On remarque que la solution optimale du problème de production des yaourts à la base de la fraise est un point extrême qui se trouve sur le bord de l'ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

On peut admettre le résultat suivant : « Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale »

Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d'intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objective.

Dans le problème de production des yaourts, l'ensemble des solutions réalisables de base présente 3 points extrêmes A(0,300), B(100,300) , C(300,200) et D(400,0). La valeur de la fonction objective associée respectivement à A, B , C et D est : 1500€, 1900 € ,2200€ et 1600€. On vérifie bien que « C » est la solution optimale du problème avec une valeur optimale égale à 2200€.

2) Résolution graphique d'un programme linéaire en cas de minimisation :

Reprenons l'exemple 3 de mélange d'engrais modélisé sous la forme mathématique ci-dessous :

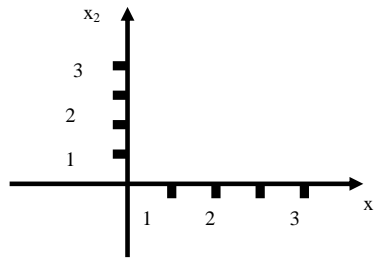
$$\text{Max } Z = 120 X_1 + 60 X_2$$

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 + 5X_2 \geq 20 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 30 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; \end{cases}$$

- **Système d'axes**

Un bon choix se base sur une lecture des différents paramètres du programme linéaire. Dans notre cas, on ne peut qualifier de bon, le choix de 1=1cm comme unité dans les deux axes.

Pour cet exemple, on peut choisir le système d'axes suivant :



- **Représentation graphique des contraintes**

Parmi les solutions possibles d'un problème, il y a ceux qui vont satisfaire toutes les contraintes du programme, appelés solutions réalisables, et ceux qui vont satisfaire une partie ou aucune de ces contraintes, appelés solutions non réalisables.

Une représentation graphique des inégalités (des contraintes) va nous permettre de déterminer l'ensemble des solutions réalisables.

Revenons à l'exemple 3 du problème de mélange d'engrais :

➤ La première contrainte de ce problème est celle relative au besoin en potasse :

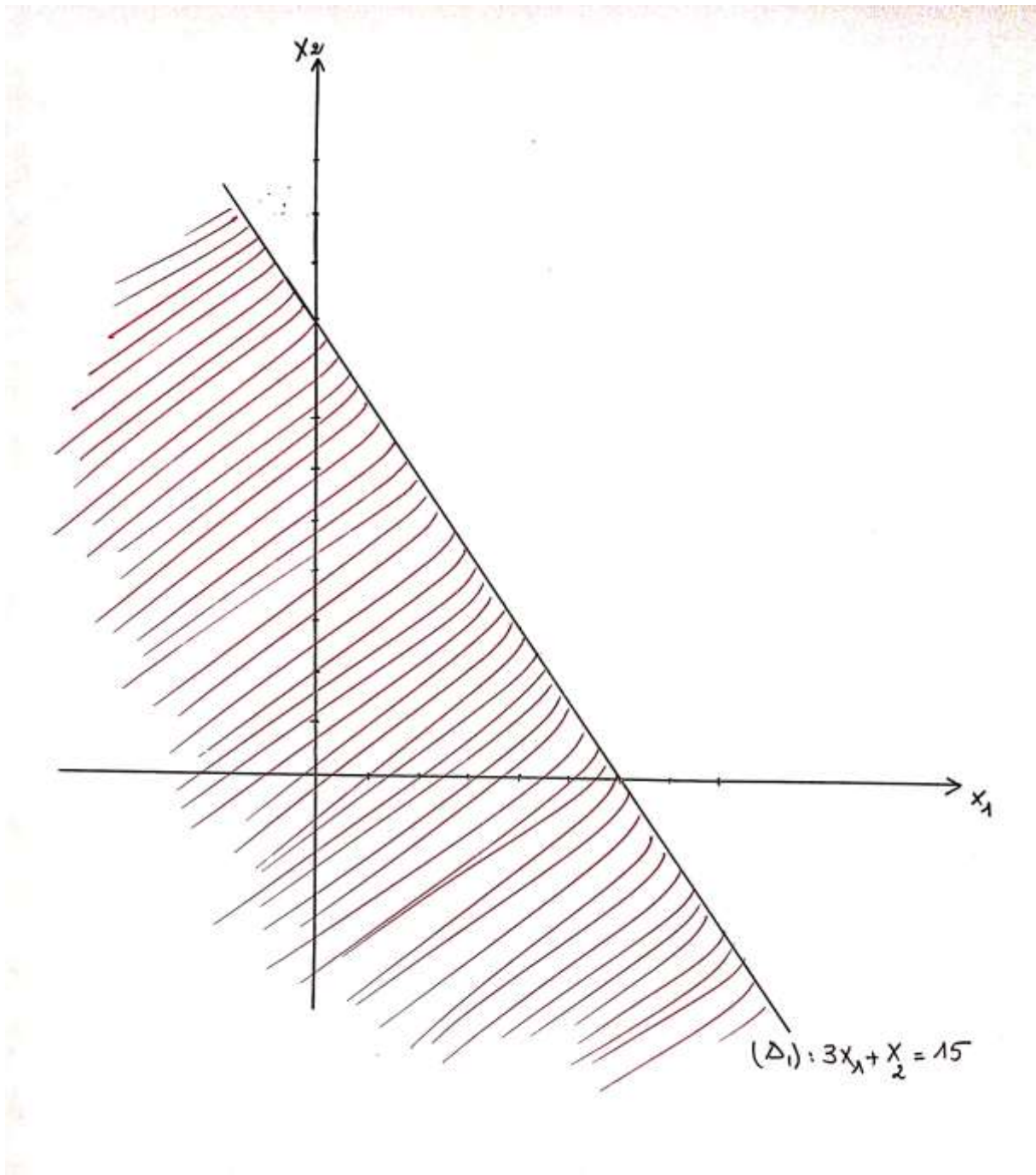
$$3X_1 + X_2 \geq 15$$

L'ensemble des solutions qui vérifient cette inégalité est le même que celui qui vérifie

$$3X_1 + X_2 = 15 \text{ et } 3X_1 + X_2 > 15$$

L'ensemble des solutions qui correspond à l'équation est l'ensemble des points de la droite (Δ 1) définie par $3X_1 + X_2 = 15$ Pour tracer la droite (Δ 1) il suffit de designer deux points comme suit :

X₁	5	4
X₂	0	3



L'inégalité $3X_1 + X_2 > 15$ correspond à un demi-plan limité par la droite $3X_1 + X_2 = 15$

Or cette droite divise le plan en deux demi-plans ouverts donc quel est le demi-plan à choisir ?

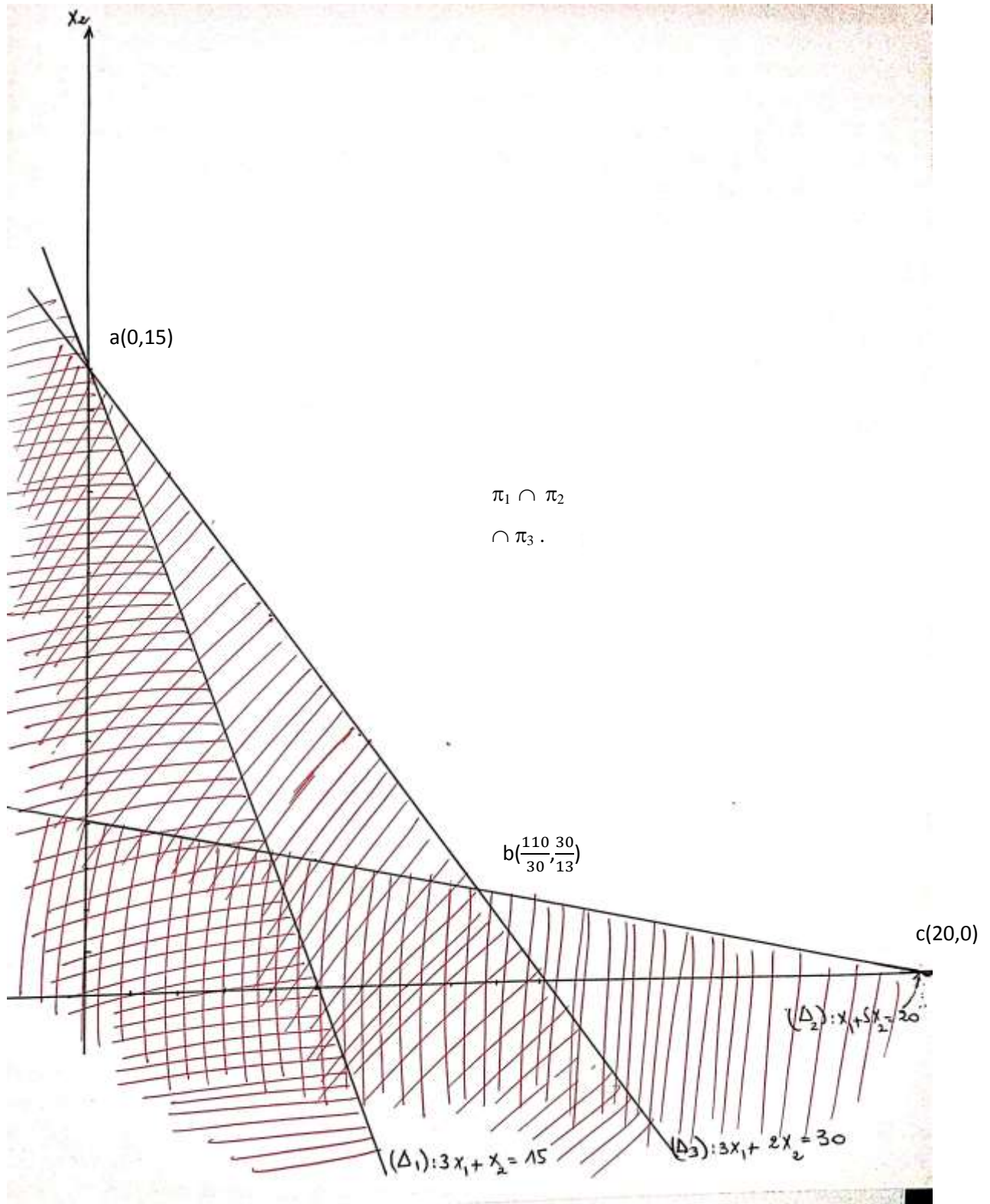
Pour ce faire, il suffit de prendre un point de l'un des demi-plans (c'est à dire n'appartenant pas à la droite $3X_1 + X_2 = 15$) et voir s'il vérifie l'inégalité $3X_1 + X_2 > 15$.

Par exemple le point de coordonnées $(0,0)$ ne vérifie pas l'inégalité $3X_1 + X_2 > 15$ donc le demi-plan π_1 au-dessus de la droite est celui recherché (voir figure ci-dessus).

L'espace hachuré représente le demi-plan fermé des solutions qui ne vérifient pas la contrainte $3X_1 + X_2 > 15$

Si on fait de même pour les deux autres contraintes du problème (voir figures ci-dessous), on obtient les deux autres demi-plans π_2 et π_3 relatifs aux solutions vérifiant respectivement les contraintes $X_1 + 5X_2 \geq 20$ et $3X_1 + 2X_2 \geq 30$

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.



Une solution possible du problème est dite réalisable si et seulement si elle vérifie toutes les contraintes, c'est à dire si elle appartient aux trois demi-plans relatifs à chaque contrainte du programme linéaire, en d'autre terme à $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$.

- **Représentation de la fonction objectif**

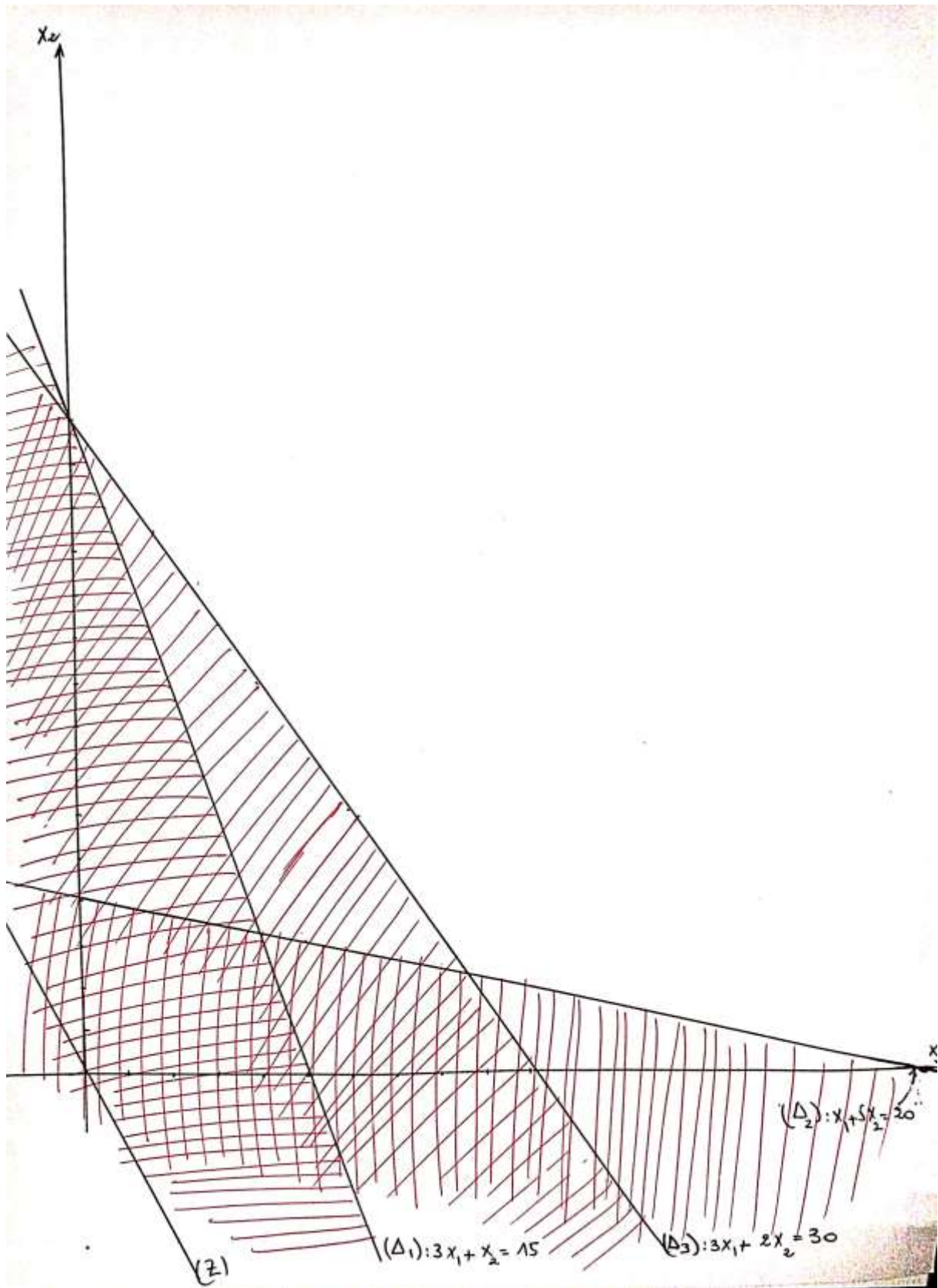
Soit z la valeur de la fonction objectif du problème de mélange d'engrais $z = 120x_1 + 60x_2$.

Pour $z=0$, la fonction objectif est représentée de la manière suivante : pour $Z=0$

$X_1 = -2$ et $X_2 = 4$

On peut tracer une infinité de droites qui représentent les différentes valeurs de la fonction objective. Par suite elles sont parallèles entre elles. De plus on peut améliorer la valeur de z indéfiniment dans le sens indiqué dans la figure ci-dessous.

Le problème est de connaître qu'elle est la droite qui correspond à la valeur maximale de la fonction objectif ?



- **Recherche de la solution optimale**

a. Résolution graphique

Si nous retraçons l'ensemble des droites parallèles relatives aux différentes valeurs de la fonction objectif sur la figure qui représente l'ensemble des solutions réalisables, on peut localiser la solution optimale. Elle correspond à la solution réalisable qui intercepte la droite à la plus petite valeur de z .

Dans notre exemple, la solution optimale correspond d'après le graphique au point $a(0,15)$. Donc la prescription optimale est de 0 unités d'engrais de type 1 et 15 unités d'engrais de type 2. Le coût d'achat des engrais (la valeur de la fonction objectif) est égal à 900 €.

b. Résolution par énumération :

On remarque que la solution optimale du problème de production des yaourts à la base de la fraise est un point extrême qui se trouve sur le bord de l'ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

On peut admettre le résultat suivant : « Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale »

Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d'intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objective.

Dans le problème de production des yaourts, l'ensemble des solutions réalisables de base présente 3 points extrêmes $A(0,15)$, $B(110/13,30/13)$ et $C(20,0)$. La valeur de la fonction objective associée respectivement à A , B et C est : 900 €, 1153.84 € et 2400€. On vérifie bien que « a » est la solution optimale du problème avec une valeur optimale égale à 900 €.

3) Résolution graphique d'un programme linéaire : cas particulier

Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs aux différents cas possibles :

- **Programme linéaire avec solution non bornée**

Problème avec solution non bornée	
$\begin{aligned} \text{Max} \quad & -2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 \leq 5 \quad (1) \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \quad (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	
<p>On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée</p>	

- **Programme linéaire avec solution impossible**

Problème impossible	
$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \quad (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	
<p>L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus</p>	

- **Programme linéaire avec solution multiple**

Problème à solutions multiples	
<p><i>Max</i> $x_1 + 3x_2$</p> <p><i>s.c.</i> $2x_1 + 6x_2 \leq 30$ (1)</p> <p> $x_1 \leq 10$ (2)</p> <p> $x_2 \leq 4$ (3)</p> <p> $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$</p>	
<p>L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire</p>	

- Programme linéaire avec solution dégénérée

Problème de dégénérescence	
<p><i>Max</i> $x_1 + x_2$</p> <p><i>s.c.</i> $3x_1 + 2x_2 \leq 40$ (1)</p> <p> $x_1 \leq 10$ (2)</p> <p> $x_2 \leq 5$ (3)</p> <p> $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$</p>	
<p>La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.</p>	

Exercices proposés :

Résoudre les programmes linéaires suivants par la méthode graphique :

$$\begin{cases} \text{Max} Z = 300X_1 + 200X_2 \\ X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ 2X_1 + X_2 \leq 22 \\ X_1 + X_2 \leq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max} Z = 20X_1 + 30X_2 \\ X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ X_1 + X_2 \leq 8 \\ 2X_1 + X_2 \leq 14 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Min} Z = 150X_1 + 100X_2 \\ 3X_1 + X_2 \geq 1200 \\ 5X_1 + 3X_2 \geq 3000 \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 1800 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Max} Z = 2X_1 + X_2 \\ X_1 + 2X_2 \leq 14 \\ 2X_1 - X_2 \leq 10 \\ X_1 - X_2 \leq 2 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Chapitre 4 : Résolution d'un programme linéaire de maximisation par la méthode simplexe

La méthode simplexe est une technique d'optimisation mathématique largement utilisée pour résoudre des problèmes de programmation linéaire. Développée par le mathématicien américain George Dantzig dans les années 1940, cette méthode permet de maximiser ou de minimiser une fonction objective sous des contraintes linéaires. La méthode simplexe se distingue par son approche itérative, qui consiste à se déplacer le long des sommets d'un polytope défini par les contraintes, à la recherche de la solution optimale.

L'un des principaux atouts de la méthode simplexe est sa capacité à traiter des problèmes de grande taille, ce qui en fait un outil précieux dans divers domaines tels que l'économie, la logistique, la gestion des ressources et l'ingénierie. En exploitant les propriétés géométriques des solutions, la méthode simplexe offre une manière systématique d'évaluer les différentes options disponibles et d'identifier la meilleure solution possible. On a présenté dans le chapitre précédent une procédure graphique pour résoudre un programme linéaire à deux variables. Par contre, dans la plupart des problèmes réels, on a plus que deux variables à déterminer. Une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. C'est la méthode de simplexe. Une implémentation de cette procédure a permis de résoudre des programmes avec un peu plus de quelques milliers de variables.

1) Cas d'un PL de maximisation écrit sous forme canonique

Dans cette partie de cours la méthode de simplexe est présentée pour les problèmes

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^t x \\ \text{s.c.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{Et en utilisant l'exemple:}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ & x_1 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

1.1. Ecriture de PL sous forme standard

La forme standard du programme linéaire de l'agriculteur est :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{s. c} & x_1 + x_2 + S_1 = 150 \quad (1^{\text{ère}} \text{ contrainte}) \\ & 4x_1 + 2x_2 + S_2 = 440 \quad (2^{\text{ème}} \text{ contrainte}) \\ & x_1 + 4x_2 + S_3 = 480 \quad (3^{\text{ème}} \text{ contrainte}) \\ & x_1 + S_4 = 90 \quad (4^{\text{ème}} \text{ contrainte}) \\ & x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{array}$$

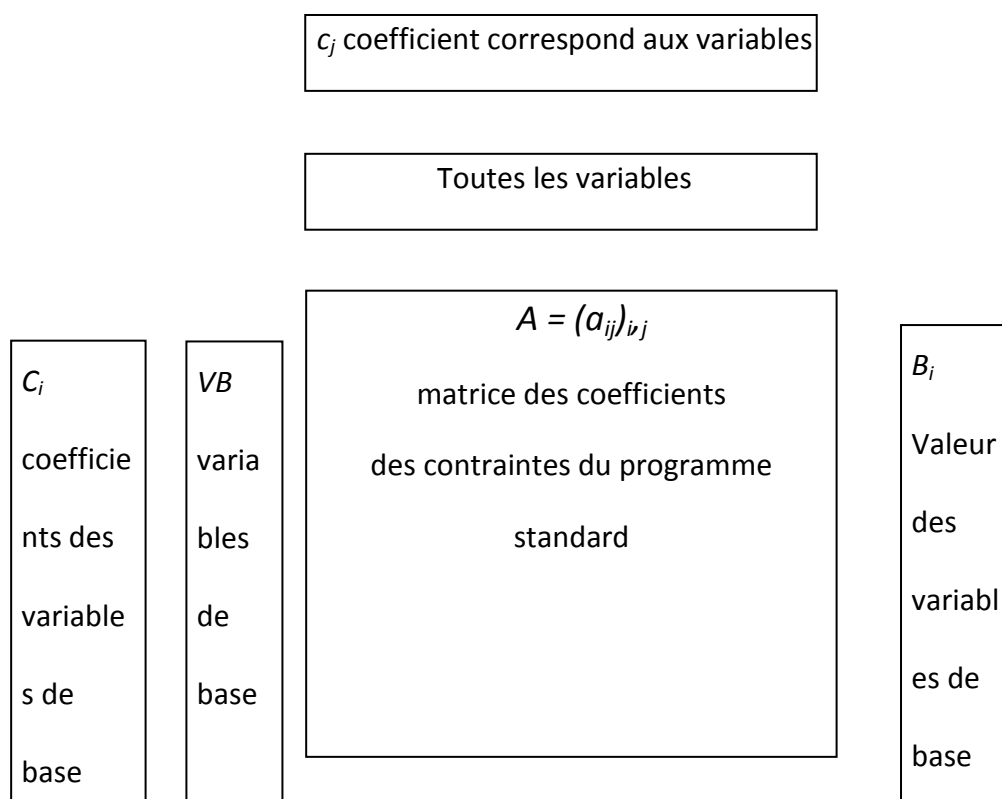
1.2. La méthode des tableaux

- La méthode de simplexe commence par l'identification d'une solution réalisable de base et ensuite, elle essaye de trouver d'autres solutions réalisables de base jusqu'à atteindre à la solution optimale. Ainsi, on doit, tout d'abord, retrouver cette solution réalisable de base.
- Généralement si le programme linéaire satisfait ces deux propriétés :
 - P1/ Parmi les variables du problème standard, il y a m variables qui apparaissent avec un coefficient non nul dans chaque contraintes (dans notre exemple : S_1, S_2, S_3 et S_4).
 - P2/ Les valeurs du second membre des contraintes (les composants du vecteur b) sont positives.
- Alors une solution réalisable de base est obtenue en annulant les (n-m) variables de décision et la valeur des variables d'écart est directement donnée par le second membre. La deuxième propriété assure la satisfaction des contraintes de non négativité des variables d'écart.

Dans notre exemple, la forme standard du programme linéaire vérifie ces deux propriétés.

1.3. Tableau initial de simplexe

Après avoir mis le programme linéaire sous une forme qui vérifie les deux propriétés P1 et P2, l'étape suivante est de tracer le tableau de simplexe initial. Le modèle général des tableaux de simplexe est :



Pour notre exemple le tableau de simplexe initial est le suivant :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	1	1	1	0	0	0	150
0	S_2	4	2	0	1	0	0	440
0	S_3	1	4	0	0	1	0	480
0	S_4	1	0	0	0	0	1	90

On remarque qu'on a placé en première ligne les contributions unitaires de toutes les variables de décision x_1, \dots, S_4 dans la fonction objectif les (C_j). Dans la troisième ligne, on retrouve la première contrainte $x_1 + x_2 + S_1 = 150$. La valeur 150 représente ici la valeur de S_1 relative à la solution réalisable de base initiale. Dans la première colonne on trouve les contributions nulles des variables d'écart qui forment la solution de base initiale.

Remarque : Les variables qui figurent dans la deuxième colonne sont dites variables de base. A chacune de ces variables, on associe la valeur 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne relative à cette variable et dans le reste de la colonne on trouve des zéros.

Jusqu'à ici on a vu comment retrouver une solution réalisable de base et comment présenter le tableau de simplexe initial. Dans la section suivante, on examinera la procédure liée à la méthode de simplexe qui permet de passer de cette solution réalisable de base initiale à une autre solution réalisable de base qui donne une meilleure valeur de la fonction objectif.

1.4. Amélioration de la solution

Pour améliorer la solution il faut générer une autre solution de base (point extrême) qui augmente la valeur de la fonction objective. C'est à dire, qu'on doit sélectionner une variable hors base et une variable de base et les permuter de telle façon que la nouvelle solution donne une plus grande valeur de la fonction objectif.

Pour savoir si on peut améliorer notre solution réalisable de base initiale nous allons introduire deux nouvelles lignes au-dessus du tableau de simplexe.

La première ligne, notée z_j , représente la variation de la valeur de la fonction objectif qui résulte du fait qu'une unité de la variable correspondante à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A est amenée dans la base. Par exemple z_1 représente la diminution du profit qui résulte de l'ajout d'une unité à la valeur de x_1 .

En effet, si on produit un hectare supplémentaire de x_1 , la valeur de quelques variables de base va changer vu qu'on a :

$$\begin{cases} x_1 + S_1 = 150 \\ 4x_1 + S_2 = 440 \\ x_1 + S_3 = 480 \\ x_1 + S_4 = 90 \end{cases}$$

Donc, une augmentation de x_1 de 0 vers 1 va être accompagnée d'une diminution des variables de base S_1, S_2, S_3, S_4 respectivement de 1, 4, 1 et 1.

L'effet de cette diminution sur la fonction objectif est nul car les coefficients des variables d'écart dans cette fonction sont nuls

$$z_1 = 0 \times S_1 + 0 \times S_2 + 0 \times S_3 + 0 \times S_4 = 0 \times 1 + 0 \times 4 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$$

La valeur z_1 est calculée en multipliant les coefficients de la première colonne de la matrice A relatifs à la variable x_1 par les coefficients c_i de la première colonne. Généralement, on a :

$$z_j = \sum_i a_{ij} \times c_i$$

La deuxième ligne, notée $c_j - z_j$, représente l'effet net de l'augmentation d'une unité de la $j^{\text{ème}}$ variable.

Dans notre exemple, l'effet net sur la fonction objectif engendré par l'augmentation d'une unité dans la valeur de x_1 est

$$c_1 - z_1 = 100 - 0 = 100$$

Si on reprend la même opération pour le reste des variables, on trouve le tableau suivant :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	1	1	1	0	0	0	150
0	S_2	4	2	0	1	0	0	440
0	S_3	1	4	0	0	1	0	480
0	S_4	1	0	0	0	0	1	90
z_j		0	0	0	0	0	0	$Z=0$
$c_j - z_j$		100	200	0	0	0	0	

En analysant la ligne relative à l'évaluation nette $c_j - z_j$, on remarque qu'une augmentation d'une unité de la valeur de x_1 engendre un profit de 100 dinars, et qu'une augmentation d'une unité de la valeur de x_2 engendre un profit supplémentaire de 200 dinars. Donc, si on a à choisir, on va opter pour une augmentation de la valeur de x_2 . On dit que x_2 est la variable entrante.

Le problème est maintenant, jusqu'où peut-on augmenter x_2 ?

Cette augmentation ne peut pas se faire infiniment, sous l'hypothèse que x_1 reste nulle. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + S_1 = 150 \\ 2x_2 + S_2 = 440 \\ 4x_2 + S_3 = 480 \\ x_4 + S_4 = 90 \end{array} \right.$$

On peut voir que x_2 peut prendre comme valeur maximale la valeur de 100 (il ne faut pas oublier que les S_i , $i=1, 2, 3, 4$ sont des variables positives). Cette valeur est obtenue en choisissant la plus petite valeur positive des divisions de $100/1$, $440/2$, $480/4$ et $90/0$ (on suppose que $90/0$ est égale à l'infini ∞).

En général, la valeur maximale de la variable entrante x_j est le minimum des valeurs positives des rapports de B_i par les coefficients de la colonne de la matrice A relatif à la $j^{\text{ème}}$ variable. Ces rapports feront l'objet d'une autre colonne à droite de la matrice A .

Dans notre exemple, on aura :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i	B_i/a_{i2}
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1	1	1	1	0	0	0	150	150
0	S_2	4	2	0	1	0	0	440	220
0	S_3	1	<u>4</u>	0	0	1	0	480	120
0	S_4	1	0	0	0	0	1	90	∞
z_j		0	0	0	0	0	0	$Z=0$	
$c_j - z_j$		100	200	0	0	0	0		



Le fait d'augmenter x_2 jusqu'à la valeur 100 va engendrer l'annulation de la valeur du variable d'écart S_3 , ce qui élimine S_3 de la base. On appelle S_3 variable sortante.

L'élément 4, à l'intersection de la ligne relative à la variable sortante S_1 (dite ligne pivot) et de la colonne relative à la variable entrante x_2 (dite colonne pivot) est l'élément pivot. (C'est l'élément cerclé dans le tableau).

1.5. Calcul des tableaux suivants

Dans le nouveau tableau de simplexe on va remplacer S_3 par x_2 et l'ensemble des variables de base deviendra S_1, S_2, x_2, S_4 . On exige que x_2 prenne la même place dans la colonne des variables de base que celle de la variable sortante S_3 .

Jusqu'à maintenant on ne peut pas remplir le tableau relatif à cette nouvelle solution de base :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1							
0	S_2							
200	x_2							
0	S_4							
z_j								
$c_j - z_j$								

Fondements de recherche opérationnelle

Ce qui reste à déterminer sont les coefficients a_{ij} de la nouvelle matrice A et les valeurs B_i des variables de base. Ceci est réalisé en utilisant la règle de pivot :

- ✓ Diviser la ligne de pivot par la valeur de l'élément de pivot pour trouver la ligne transformée de la ligne de pivot.

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1							
0	S_2							
200	x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
0	S_4							
z_j								
$c_j - z_j$								

- ✓ A chacune des variables de base, on associe la valeur 1 à l'intersection de la ligne et de la colonne relative à cette même variable et dans le reste de la colonne on trouve des zéros.

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1		0	1	0		0	
0	S_2		0	0	1		0	
200	x_2	1/4	1	0	0	1/4	0	120
0	S_4		0	0	0		1	
z_j								
$c_j - z_j$								

- ✓ Pour calculer le reste des valeurs du tableau, on opère à des combinaisons linéaires dans le précédent tableau de simplexe. Par exemple pour calculer la nouvelle valeur qui va prendre la place de la valeur 100 devant la variable de base S_1 : On multiplie 100 par le pivot (4), on retranche de ce produit le produit de la projection de la valeur 100 sur la ligne pivot par la projection de la valeur 100 sur la colonne pivot, et on divise le tout par la valeur du pivot (4).

le nouveau élément= l'ancien élément – (l'élément qui lui correspond sur la ligne pivot * l'élément qui lui correspond sur la colonne pivot)/ pivot

En appliquant cette règle sur notre exemple, on trouve le tableau suivant :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	30
0	S_2	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200
200	x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	120
0	S_4	1	0	0	0	0	1	30
z_j		50	200	0	0	50	0	$Z=2400$
$c_j - z_j$		50	0	0	0	-50	0	

Remarque:

- a) On vérifie toujours que les colonnes de la matrice relative à chacune des variables de base sont formées par des zéros sauf 1 dans l'intersection avec la ligne relative aux mêmes variables de base.
- b) On peut vérifier aussi que l'ensemble des solutions réalisables, induit par les contraintes décrites dans le dernier tableau de simplexe, est le même que celui représenté par les contraintes initiales. La règle de pivot est une combinaison linéaire des contraintes du programme linéaire donc elle ne change pas l'ensemble des solutions réalisables.
- c) La nouvelle solution réalisable de base est

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 120$$

$$S_1 = 30$$

$$S_2 = 200$$

$$S_3 = 0$$

$$S_4 = 90$$

Cette nouvelle solution correspond au point A(voir graphique). On vérifie bien que la valeur de la fonction objectif est passer de 0 à 120 x 200. La valeur de la fonction objectif peut être facilement calculé en multipliant membre à membre les c_i de la première colonne par les valeurs des variables de base Q_i dans la 3^{ème} colonne.

d) La solution de départ correspond au point O . La première itération nous a amené dans le sens de l'amélioration du profit (fonction objectif), c'est à dire le long de l'axe des ordonnées.

Ayant retrouvé une nouvelle solution, on veut savoir s'il est possible de retrouver une solution réalisable de base meilleure. Pour arriver à cette fin, on doit ajouter les deux lignes relatives au choix de la variable entrante, et la colonne relative au choix de la variable sortante.

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i	B_i/a_{i1}
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_1	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	30	40
0	S_2	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200	$\frac{400}{7}$
200	x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	120	480
0	S_4	1	0	0	0	0	1	30	90
z_j		50	200	0	0	50	0	Z=2400	
$c_j - z_j$		50	0	0	0	-50	0		

La variable entrante est x_1 ; elle présente la plus grande valeur $c_j - z_j$. Si on calcule les quotients B_i/a_{i1} , on retrouve que la variable sortante est S_1 à qui on associe la plus petite valeur du ratio $B_i/a_{i1} = 40$. L'élément pivot dans ce tableau est $\frac{3}{4}$. La nouvelle base est composée de x_1, S_2, x_2, S_4 .

Le tableau de simplexe suivant issu de l'application de la règle de pivot est :

C_j		100	200	0	0	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
100	x_1	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	40
0	S_2	0	0	$-\frac{14}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	60
200	x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	110
0	S_4	0	0	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	50
z_j		100	200	$\frac{200}{3}$	0	$\frac{100}{3}$	0	Z=26000
$c_j - z_j$		0	0	$-\frac{200}{3}$	0	$-\frac{100}{3}$	0	

Cette nouvelle solution

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 40 \\ x_2 = 110 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 60 \end{array} \right.$$

$$S_3 = 0$$

$$S_4 = 50$$

$$Z=26000$$

L'effet net associé aux variables hors base S_1 et S_2 est négatif. Ceci nous oblige à dire que faire entrer une de ces deux variables dans la base va engendrer une diminution dans la valeur de la fonction objectif. Donc il n'y a pas une autre solution réalisable de base qui peut engendrer un profit meilleur. Par suite cette dernière solution est la solution optimale. Ce dernier tableau de simplexe est donc dit tableau optimal.

On peut généraliser ce résultat en disant que la solution optimale d'un programme linéaire est atteinte s'il n'y a aucune valeur positive dans la ligne c_j-z_j du tableau du simplexe.

1.6.Résumé de la procédure de la méthode du simplexe dans le cas d'un problème de maximisation sous contraintes \leq et avec un second membre positif

<i>Etapas</i>	<i>Justification</i>
1. Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	Pour obtenir une représentation mathématique du problème
2. Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif	Ceci est nécessaire pour obtenir comme variable de base initiale l'origine
3. Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	Mettre toutes les contraintes sous forme d'égalité
4. Construire le premier tableau de simplexe	Ce tableau correspond à la solution initiale de base
5. Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif c_j-z_j .	La valeur de c_j-z_j indique la quantité d'augmentation de la fonction objectif si on augmente la valeur de x_j d'une unité.
6. Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	La plus petite valeur de B_i/a_{ij} indique le nombre maximal d'unité de x_j qu'on peut introduire avant que la variable de base de l'ième ligne ne soit égale à zéro.
7. Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	Cette règle nous permet entre autre de calculer les valeurs des nouvelles variables de décision
8. Faire le test d'optimalité. Si $(c_j-z_j) \leq 0$ pour toutes les variables (hors base),	Si $(c_j-z_j) \leq 0$ alors on n'a pas d'intérêt à faire entrer dans la base aucune de ces variables. Une

la solution obtenue est donc optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	telle introduction engendra une diminution de la fonction objectif.
---	---

2) Cas d'un PL de maximisation avec contraintes type (\geq , \leq et $=$), aperçu par exemple :

Introduction

Dans l'élément précédent tous les programmes linéaires qu'on a traités sont du type : Maximiser une fonction linéaire sous contraintes de type inférieur ou égale et avec un second membre positif (écrit sous forme canonique).

Or dans beaucoup de problèmes réels, on peut retrouver des contraintes de type supérieur ou égale et/ou de type égal, ainsi que des problèmes où on a à minimiser au lieu de maximiser.

Dans ce qui suit, on étudiera les modifications à apporter à la méthode du simplexe pour qu'elle puisse résoudre tous ces types de programmes.

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 5x_1 + 6x_2 \\
 \text{S.c} \quad & -x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 5x_1 + 3x_2 = 60 \\
 & x_2 \geq 5 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

2.1. Introduction des variables artificielles

L'introduction des variables d'écart dans le programme linéaire donne

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \\
 \text{S.c} \quad & -x_1 + x_2 + S_1 = 4 \\
 & 5x_1 + 3x_2 = 60 \\
 & x_2 - S_2 = 5 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Afin de générer une solution réalisable de base initiale pour la méthode de simplexe, on a annulé les variables de décision x_1 et x_2 . Ceci nous permet de commencer à partir de l'origine O . Or, on vérifie bien que l'origine n'est pas une solution réalisable. La question qui se pose est comment nous allons réécrire le programme de manière qu'on puisse construire le tableau de simplexe initial à l'origine.

Pour arriver à cette fin, on doit ressortir une astuce mathématique qui se résume à l'introduction de nouvelles variables, dite variables artificielles A_1 et A_2 .

Ces variables n'ont aucune interprétation, comme leur nom l'indique, ils sont conçus artificiellement pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine.

Si on ajoute ces deux variables artificielles A_1 et A_2 respectivement à la 2^{ème} et 3^{ème} contrainte, le programme devient le suivant.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & 5x_1 + 6x_2 + \dots \\
 \text{S.c} & -x_1 + x_2 + S_1 = 4 \\
 & 5x_1 + 3x_2 + A_1 = 60 \\
 & x_2 - S_2 + A_2 = 5 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0
 \end{array}$$

Maintenant on peut obtenir une solution initiale de base du système d'équations, si on pose $x_1 = x_2 = 0$.

La solution initiale est

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_1 = 0 \\
 x_2 = 0 \\
 S_1 = 4 \\
 S_2 = 0 \\
 A_1 = 60 \\
 A_2 = 5
 \end{array} \right.$$

Cette solution n'est pas réalisable puisque x_2 n'est pas supérieur à 50. Ainsi, il est important de distinguer entre une solution réellement réalisable et une solution du programme linéaire réécrit pour la procédure du simplexe. Certes, une solution réalisable du problème réel reste toujours une solution réalisable pour le programme linéaire transformé, le contraire n'est pas toujours vrai.

On peut conclure que tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme.

Une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associer un grand coût $-M$ dans la fonction objectif. Ainsi, si ces variables restent dans la base ils vont causer une diminution importante de la valeur de la fonction objectif. Ce qui nous contraint à les faire sortir le plus tôt possible de la base.

La fonction objectif s'écrit donc :

$$\text{Max } z = 5x_1 + 6x_2 - M A_1 - M A_2$$

avec M un très grand nombre (exemple: $M \geq 10^{10}$). En appliquant de ces modifications, le tableau de simplexe initial est :

2.2. Tableau initial de simplexe

C_j		5	6	0	0	-M	-M	B_i
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	-1	1	1	0	0	0	4
-M	A_1	5	3	0	0	1	0	60
-M	A_2	0	1	0	-1	0	1	5
z_j		-5M	-4M	0	M	-M	-M	
$c_j - z_j$		5+5M	6+4M	0	-M	0	0	

2.3. Amélioration de la solution

De la même manière que précédemment essayons de retrouver la variable entrante et la variable sortante :

C_j		5	6	0	0	-M	-M	B_i	B_i/a_i
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
0	S_1	-1	1	1	0	0	0	4	-4
-M	A_1	5	3	0	0	1	0	60	12
-M	A_2	0	1	0	-1	0	1	5	∞
z_j		-5M	-4M	0	M	-M	-M		
$c_j - z_j$		5+5M	6+4M	0	-M	0	0		

La variable entrante est x_1 ($5 + 5M \geq 6 + 4M$ avec M assez grand) et la variable sortante est A_1 . Le tableau de simplexe qui suit est :

C_j		5	6	0	0	-M	-M	B_i	B_i/a_i
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
0	S_1	0	8/5	1	0	1/5	0	16	10
5	x_1	1	3/5	0	0	1/5	0	15	20
-M	A_2	0	1	0	-1	0	1	2	5
z_j		5	3-M	0	M	1	-M		
$c_j - z_j$		0	3+M	0	-M	-M-1	0		

Le tableau de simplexe après la deuxième itération indique que la variable sortante est A_2 .

C_j		5	6	0	0	-M	-M	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	0	0	1	8/5			8
5	x_1	1	0	0	3/5			9
6	X_2	0	1	0	-1			5
z_j		5	6	0	-3			
$c_j - z_j$		0	0	0	3			

Remarque: Simplification du tableau

Les deux premières itérations on fait sortir de la base les variables artificielles A_1 et A_2 . Leurs effets nets est maintenant négatif et très élevé, elles ne pourront donc pas être sélectionnées à l'itération suivante, ni même ultérieurement comme on peut facilement le constater. Donc on peut supprimer du tableau la colonne relative à A_1 et A_2 .

En appliquant la règle ci-dessus, on obtient le tableau de simplexe suivant :

C_j		5	6	0	0	B_i	B_i/a_{i4}
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2		
0	S_1	0	0	1	8/5	8	5
5	x_1	1	0	0	3/5	9	15
6	X_2	0	1	0	-1	5	-5
z_j		5	6	0	-3		
$c_j - z_j$		0	0	0	3		

C_j		5	6	0	0	B_i
CVB	VB	x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_2	0	0	5/8	1	5
5	x_1	1	0	-3/8	0	6
6	X_2	0	1	5/8	0	10
z_j		5	6	15/8	0	Z=90
$c_j - z_j$		0	0	-15/8	0	

Le tableau ci-dessus est optimal car tous les effets nets sont négatifs ou nuls. Donc la solution optimale est :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 5 \end{array} \right.$$

Remarque: cas où le second membre négatif

Le problème qui peut se poser est que l'une des variables du second membre soit négative.

Par exemple supposons que lors de la formulation on trouve une contrainte de ce type :

$$x_1 - x_2 \geq -4$$

La condition qu'il faut vérifier avant de se lancer dans la réécriture de cette contrainte, en vue de construire le programme standard, est la non négativité du second membre.

Ainsi, on doit modifier la contrainte avant de commencer la standardisation et la réécrire comme suit : $-x_1 + x_2 \leq 4$

Chapitre 5 : Résolution d'un programme linéaire par la méthode simplexe : cas de minimisation et problème particulier

Il y a deux manières de résoudre un problème de minimisation en utilisant la méthode de simplexe.

La première méthode nécessite le changement de la règle de choix de la variable entrante. Dans un problème de maximisation la règle est de choisir comme variable entrante celle qui a le plus grand effet net positif non nul. Ceci parce que notre objectif est de choisir la variable qui en entrant dans la base va engendrer un profit supplémentaire et ainsi accroître la valeur de la fonction objectif. Pour un problème de minimisation, on va utiliser la règle inverse. C'est-à-dire la variable entrante est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle de l'effet net $c_j - z_j$.

Ceci va nous amener aussi à changer notre règle d'arrêt de la procédure de simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où tous les effets nets $c_j - z_j$ sont positifs ou nuls.

1) Résolution d'un programme linéaire de minimisation par la méthode simplexe :

Essayons d'appliquer la méthode de simplexe sur le problème de médecine :

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_1 + x_2 \\ \text{Sc } & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour permettre à la méthode de simplexe de démarrer de l'origine, il faut comme on l'a déjà vu dans le cas de problème de maximisation, introduire les variables artificielles.

Avec les problèmes de maximisation on attribue à ces variables un coefficient $-M$ dans la fonction objectif pour les contraindre à quitter la base rapidement. Dans le cas de problèmes de minimisation, on a intérêt à changer le coefficient de ces variables en M (M très grand) afin d'arriver au même résultat et de les faire sortir de la base.

Avant de construire le tableau de simplexe initial, on réécrit le programme linéaire relatif au problème de médecine avec les variables artificielles.

Fondements de recherche opérationnelle

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & x_1 + x_2 + MA_1 + MA_2 + MA_3 \\
 \text{Sc} \quad & 2x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 12 \\
 & 5x_1 + 8x_2 - S_2 + A_2 = 74 \\
 & x_1 + 6x_2 - S_3 + A_3 = 24 \\
 & x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Le tableau de simplexe initial est :

C_j		1	1	0	0	0	M	M	M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
M	A_1	2	1	-1	0	0	1	0	0	12	12
M	A_2	5	8	0	-1	0	0	1	0	74	9,25
M	A_3	1	6	0	0	-1	0	0	1	24	4
Z_j		8M	15M	-M	-M	-M	M	M	M	$Z=110M$	
C_j-Z_j		1-8M	1-15M	M	M	M	0	0	0		

1^{ère} itération :

C_j		1	1	0	0	0	M	M	M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
M	A_1	11/6	0	-1	0	1/6	1	0		8	48/11
M	A_2	11/3	0	0	-1	4/3	0	1		42	126/11
1	X_2	1/6	1	0	0	-1/6	0	0		4	24
Z_j		1/6	0	-M	-M	-1/6	M	M		$Z=50M+4$	
C_j-Z_j		5/6-11/2M	0	M	M	1/6-3/2M	0	0			

2^{ème} itération :

C_j		I	I	0	0	0	M	M	M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3		
M	X_1	1	0	$-6/11$	0	$1/11$		0		$48/11$	-8
M	A_2	0	0	2	-1	1		1		26	13
M	X_2	0	1	$1/11$	0	$-2/11$		0		$36/11$	36
Z_j		1	1	$-5/11$	$-M$	$-1/11$		M		$Z=26M+$	
C_j-Z_j		0	0	$5-2M$	M	$1/11-M$		0		$84/11$	

3^{ème} itération :

C_j		I	I	0	0	0	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
I	X_1	1	0	0	$-3/11$	$4/11$	$126/11$	$126/4$
0	S_1	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	13	26
I	X_2	0	1	0	$1/22$	$-5/22$	$23/11$	$-46/5$
Z_j		1	1	0	$-5/22$	$3/22$	$Z=$	
C_j-Z_j		0	0	0	$5/22$	$-3/22$	$149/11$	

4^{ème} itération :

C_j		I	I	0	0	0	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
I	X_1	1	0	$-8/11$	$1/11$	0	2
0	S_3	0	0	2	-1	1	26
I	X_2	0	1	$5/11$	$-2/11$	0	8
Z_j		1	1	$-3/11$	$-1/11$	0	$Z^*=10$
C_j-Z_j		0	0	$3/11$	$1/11$	0	

Après 4 itérations, on a trouvé le tableau de simplexe optimal ci-dessus,

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 26 \\ Z = 10 \end{cases}$$

Après avoir vérifié que le second membre des contraintes est positif, le tableau suivant résume les transformations à faire subir à notre programme linéaire avant de le résoudre par la méthode de simplexe :

Quand la contrainte est	Pour la fonction objectif d'un problème de	
	Maximisation	Minimisation
I- de type « \leq » Ajouter une variable d'écart	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart	
II- de type « $=$ » Ajouter une variable d'écart et une variable artificielle	Attribuer un coefficient -M pour variable artificielle	Attribuer un coefficient M pour la variable artificielle
III- de type « \geq » Ajouter une variable artificielle et une variable d'écart avec un signe "-"	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient - M pour variable Artificielle	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient M pour variable artificielle

Le tableau suivant résume les étapes de la méthode de simplexe relatif aux problèmes de maximisation et minimisation :

Etape	Maximisation	Minimisation
1	Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	Formuler un programme linéaire pour le problème réel.
2	Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif sinon modifier les contraintes	Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif sinon modifier les contraintes
3	Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	Ecrire le programme linéaire sous une forme standard
4	Construire le premier tableau de simplexe	Construire le premier tableau de simplexe
5	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif $c_j - z_j$.	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus petit effet net négatif $c_j - z_j$.
6	Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.
7	Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot
8	Faire le test d'optimalité. Si $(c_j - z_j) \leq 0$ pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	Faire le test d'optimalité. Si $(c_j - z_j) \geq 0$ pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.

- La deuxième méthode pour résoudre un problème de se base sur le résultat suivant « Résoudre un problème $\min c^t x$ sujet à un ensemble de contraintes est équivalent à résoudre un problème $\max -c^t x$ sujet au même ensemble de contraintes ». Ces deux problèmes sont équivalents dans la mesure où ils donnent le même vecteur des solutions optimales. La seule différence est que la valeur de la solution $\max -c^t x$ est l'opposé de la solution de $\min c^t x$; (i.e. $\min c^t x = - \max -c^t x$).

Donc pour résoudre le programme linéaire relatif au problème de médecine, on peut résoudre le problème de maximisation suivant:

$$\text{Max} \quad -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} S.c. \quad & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement que la méthode de simplexe appliquée au programme ci-dessus, engendre le même vecteur de solutions optimales.

2) Résolution d'un programme linéaire par la méthode simplexe : cas particuliers

Après avoir examiné comment on peut résoudre un programme linéaire par la méthode de simplexe, on s'intéresse dans cette section aux problèmes irréguliers, qu'on peut rencontrer lors de la résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe. Donc, l'objet de cette section est de reconnaître ces problèmes et de les résoudre par la méthode de simplexe.

2.1. Les problèmes impossibles

Graphiquement, on a caractérisé ces problèmes par un ensemble de solutions réalisables vide. Avec la méthode de simplexe, on reconnaît que le problème est impossible si une ou plusieurs variables artificielles sont présentes dans la base dans le tableau de simplexe optimal, ce qui signifie que la solution donnée par ce tableau n'est pas réellement réalisable.

Exemple:

Vérifions à l'aide de la méthode de simplexe, que le problème suivant est réellement impossible :

$$\begin{aligned} Max \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ Sc \quad & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En introduisant les variables d'écarts et les variables artificielles le programme s'écrit:

$$\begin{aligned} Max \quad & 4x_1 + 3x_2 - MA_1 \\ Sc \quad & x_1 + x_2 - S_1 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 - S_2 + a_1 = 10 \\ & x_1, x_2, S_1, S_2, A_1 \geq 0 \end{aligned}$$

C_j		4	3	0	0	-M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1		
0	S_1	1	1	-1	0	0	2	2
-M	A_1	3	1	0	-1	1	10	10/3
Z_j		-3M	-M	0	M	-M		
C_j-Z_j		4+3M	3+M	0	-M	0		

C_j		4	3	0	0	-M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1		
4	X_1	1	1	1	0	0	2	2
-M	A_1	0	-2	-3	-1	1	10	5
Z_j		4	4+2M	1+3M	M	-M		
C_j-Z_j		0	-1-2M	-1-3M	-M	0		

Le tableau de simplexe ci-dessus est optimal avec une variable artificielle dans la base.

Remarque : Un programme de maximisation ou de minimisation avec seulement des contraintes de type « \leq » ne peut pas être impossible (sous l'hypothèse que le second membre b est positif). Ceci est dû au fait que lors de la résolution de ce genre de programme par la méthode de simplexe on n'utilise pas des variables artificielles. Donc il est impossible de les retrouver dans la solution optimale.

2.2. Les problèmes à solutions multiples

Graphiquement, ce problème est caractérisé par le fait que la pente de la droite représentant la fonction objectif ($z = 0$) est égale à la pente de l'une des contraintes restrictives. Lorsqu'on utilise la méthode de simplexe, on identifie ce problème lorsqu'un des effets nets (relatif à une variable hors base) est nul. L'exemple de la section 3 du précédent chapitre représente un problème avec solutions multiples.

2.3. Les problèmes à solution infinie

Graphiquement, ce problème est caractérisé par le fait qu'on peut déplacer la droite de la fonction objectif indéfiniment de manière à accroître la valeur, en gardant toujours une intersection non vide avec l'ensemble des solutions réalisables.

Avec la méthode de simplexe, on reconnaît ce problème lorsque la variable entrante n'admet aucune limite sur sa valeur d'entrée, c'est à dire que tous les ratios B_i/a_{ij0} sont négatifs ou nuls.

Exemple

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{Sc} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

On introduit les variables d'écart et les variables artificielles, le programme linéaire devient :

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 - Ma_1 \\ \text{Sc} \quad & x_1 + x_2 - S_1 + a_1 = 2 \\ & x_2 + S_2 = 3 \\ & x_1, x_2, S_1, S_2, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Les tableaux de simplexe sont :

C_j		1	2	0	0	-M	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1		
-M	A_1	1	1	-1	0	1	2	2
0	S_2	0	1	0	1	0	3	3
Z_j		-M	-M	M	0	-M		
$C_j - Z_j$		1+M	2+M	-M	0	0		

C_j		1	2	0	0	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2		
2	X_2	1	1	-1	0	2	-2
0	S_2	-1	0	1	1	1	1
Z_j		2	2	-2	0		
$C_j - Z_j$		-1	0	2	0		

C_j		1	2	0	0	B_i	
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2		
2	X_2	0	1	0	1	2	∞
0	S_1	-1	0	1	1	1	-1
Z_j		0	2	0	2		
$C_j - Z_j$		1	0	0	-2		

?

Le dernier tableau montre que la variable x_1 n'admet aucune limite sur sa valeur de sortie.

2.4. Les problèmes à solution dégénérée

Graphiquement, on appelle solution dégénérée le point où plusieurs contraintes concourent (un nombre supérieur ou égale à trois contraintes). Un programme linéaire est dit dégénérée si une ou plusieurs variables dans la base optimale sont nulles. Dans la résolution graphique ce problème n'est pas difficile à résoudre, mais avec la méthode de simplexe il peut causer des difficultés.

Exemple

$$\text{Max } z = 2x_1 + 0x_2 + 3/2x_3$$

$$\text{s.c. } x_1 - x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solution optimale de ce problème est :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 \\ z = 5 \end{array} \right.$$

La forme standard du programme linéaire est

$$\text{Max } 2x_1 + 0x_2 + 3/2x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\text{Sc } x_1 - x_2 + S_1 = 2$$

$$2x_1 + x_3 + S_2 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + S_3 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Le tableau de simplexe initial est :

Cj		2	0	3/2	0	0	0	Bi	Bi/ai1
CVB	VB	x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃		
0	S ₁	1	-1	0	1	0	0	2	2
0	S ₂	2	0	1	0	1	0	4	2
0	S ₃	1	1	1	0	0	1	3	3
zj		0	0	0	0	0	0	Z=0	
Cj-Zj		2	0	3/2	0	0	0		



La variable entrante est x_1 , mais les deux premières contraintes donnent la même valeur minimale du ratio. Ceci indique que lorsque x_1 passe à 2, les variables d'écart S_1 et S_2 vont s'annuler malgré que l'un des deux demeure encore dans la base.

Choisissons arbitrairement de faire sortir de la base la variable d'écart S_1 .

Cj		2	0	3/2	0	0	0	Bi	Bi/ai2
CVB	VB	x ₁	x ₂	x ₃	S ₁	S ₂	S ₃		
2	x ₁	1	-1	0	1	0	0	2	-2
0	S ₂	0	2	1	-2	1	0	0	0
0	S ₃	0	2	1	-1	0	1	1	1/2
zj		2	-2	0	2	0	0	Z=4	
Cj-Zj		0	2	3/2	-2	0	0		



La nouvelle solution réalisable de base est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ S_1 = 2 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{array} \right.$$

et la valeur de la fonction objectif $z = 4$. Cette solution de base est dite dégénérée. Continuons les itérations relatives à la méthode de simplexe. La variable entrante est x_2 .

Le problème est qu'un des ratios est nul ce qui indique qu'on ne peut pas augmenter la valeur de x_2 puisque la valeur de la fonction objectif ne va pas augmenter et reste égale à 4.

Si on réitère une autre fois, en remplaçant S_2 par x_2 dans la base on obtient :

C_j		2	0	3/2	0	0	0	B_i	B_i/a_{i3}
CVB	VB	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
2	x_1	1	0	1/2	0	1/2	0	2	4
0	x_2	0	0	1/2	-1	1/2	0	0	0
0	S_3	0	0	0	1	-1	1	1	∞
z_j		2	0	0	0	1	0	$Z=4$	
C_j-Z_j		0	0	1/2	0	-1	0		



Ce tableau n'est pas optimal, la variable entrante est x_3 et la variable sortante est x_2 . On remarque aussi que ce passage d'une solution à une autre ne s'accompagne pas d'une augmentation de la valeur de la fonction objectif.

On peut facilement vérifier que nous sommes en train de cycler sans atteindre la solution optimale. Ce genre de cycle dans la méthode de simplexe est dangereux et on doit l'identifier avant de commencer à résoudre le problème, sinon on passera un temps énorme sans atteindre la solution optimale.

Pour terminer cette section, il faut noter que ce n'est pas tout problème de dégénérescence qui peut conduire à un cycle.

Exemple

$$\text{Max } 10x_1 + 9x_2$$

$$\text{Sc } 7/10x_1 + x_2 \leq 630$$

$$1/2x_1 + 5/6x_2 \leq 480$$

$$x_1 + 2/3x_2 \leq 708$$

$$1/10x_1 + 1/4x_2 \leq 135$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Essayer de résoudre ce programme par la méthode de simplexe (choisir en cas de deux quotients égaux, celui qui se trouve dans la ligne supérieure).

3) Résolution des problèmes de minimisation et problèmes irréguliers par la méthode des deux phases

Introduction :

Dans ce chapitre, nous supposons que notre programme linéaire (P.L) nous ne disposons pas de solution de base réalisable de départ. alors, logiquement pour appliquer l'algorithme de simplexe il faut introduire des variables artificielles pour les utiliser comme solution de base réalisable de départ.

3.1.Création de programme auxiliaire (PA)

Considérons un problème de la programmation linéaire sous forme standard (P.L)

$$\text{Min } z = cx$$

$$s.c \quad Ax = b \quad \text{Supposons aussi que tous les } b_i \geq 0.$$

$$X \geq 0$$

Associons à ce problème, le problème linéaire auxiliaire, (P.A) :

$$\text{Min } \omega = \sum_{i=1}^m V_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A.X + I^m V = b \\ Z - c.X = 0 \\ X \geq 0, V \geq 0 \end{array} \right.$$

$I^{(m)}$ étant la matrice unité $m \times m$ et les V_i sont des variables dites " artificielles ".

Les $(V_i)_{i=1, \dots, m}$ forment une base de départ et on peut appliquer à (P.A) l'algorithme du simplexe et on obtiendra une solution optimale finie (en supposons qu'il n'existe pas de solution de base dégénérée). En effet si $\omega = V_1 + V_2 + \dots + V_m$, $V_i \geq 0$, il est impossible que $\min \omega = +\infty$.

Hypothèse : Si $V \neq 0$ est une solution optimale de (PA), ceci implique que (PL) n'a pas de solution optimale. Supposons que $\phi(V^*) = 0$. Deux cas sont possibles.

– Aucune des variables artificielles v_i n'est dans la base optimale de (P.A). Cette base ne comprend que les variables x_i .

Z joue le rôle d'une variable quelconque non astreinte et on considère $z - c.x = 0$ comme une contrainte. La forme diagonale par rapport à cette base optimale pour (PA) est une

forme diagonale par rapport à la base réalisable pour (PL). On peut lui appliquer l'algorithme du simplexe.

- Au moins une variable V_i est dans la base optimale, par exemple une V_r , alors l'équation contenant V_r s'écrit : $\alpha_r x + c_r V = b_r$ (1) Avec $\alpha_r = (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rm})$, $c_r = (0, \dots, 0, 1(\text{rang } r), 0, \dots, 0)$, $V_r = 0$, $b_r = 0$ et $\min \omega = \sum_{i=1}^m V_i = 0$. S'il existe un certain coefficient $a_{rs} \neq 0$ dans l'équation (1) alors on peut effectuer une opération de pivotage autour de lui. On peut faire rentrer x_r dans la base et faire sortir x_s . L'opération de pivotage ne changera pas la valeur de la fonction objectif (puisque $b_r = v_r = 0$) mais elle changera la base. Cette opération est possible que si a_{rs} soit strictement positif ou strictement négatif.

3.2.Exemple d'application1 : soit à résoudre le programme linéaire (PL) suivant :

Min $Z = -X_1 + 2X_2 - 2X_3$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 = 12 \\ 4X_1 + X_2 + 2X_3 = 14 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nous ne disposons pas de solutions de base de départ.

Associés à ce (PL) le problème auxiliaire (PA) :

Min $w = V_1 + V_2 = -6X_1 - 4X_2 - 3X_3 + 26$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 + X_3 + V_1 = 12 \Rightarrow V_1 = 12 - (2X_1 + 3X_2 + X_3) \\ 4X_1 + X_2 + 2X_3 + V_2 = 14 \Rightarrow V_2 = 14 - (4X_1 + X_2 + 2X_3) \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; V_1 \geq 0 ; V_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dressons un tableau du simplexe.(Phase1)

C_j		0	0	0	1	1	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	X_3	V_1	V_2	
1	V_1	2	3	1	1	0	12
1	V_2	4	1	2	0	1	14
W_j		6	4	3	1	1	W=26
$C_j - W_j$		-6	-4	-3	0	0	

1^{ère} itération :

Cj		0	0	0	1	1	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	V1	V2	
1	V1	0	5/2	0	1		5
0	X1	1	1/4	1/2	0		7/2
Wj		0	5/2	0	1		W=5
Cj-Wj		0	-5/2	0	0		

2^{ème} itération

Cj		0	0	0	1	1	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	V1	V2	
0	X2	0	1	0			2
0	X1	1	0	1/2			3
Wj		0	0	0			W=0
Cj-Wj		0	0	0			

Comme, $Min w=0$, alors la solution optimale de (PA) $X=(3,2,0)$ constituera une solution de base réalisable du problème initial (PL) de départ.

Phase N° 2 : tableau de simplexe de programme linéaire (P.L)

Cj		-1	2	-2	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	
2	X2	0	1	0	2
-1	X1	1	0	1/2	3
Zj		-1	2	-1/2	Z=1
Cj-Zj		0	0	-3/2	

$X=(3,2,0)$ n'est pas optimale car $C_3 < 0$. il faut effectuer un autre changement de base.

3^{ème} itération :

Cj		-1	2	-2	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	
2	X2	0	1	0	2
-2	X3	2	0	1	6
Zj		-4	2	-2	Z= -8
Cj-Zj		3	0	0	

La solution $X^*=(0,2,6)$ est optimale et $\min Z= -8$.

Remarque :

Dans la phase 1, il n'est pas indispensable de s'occuper de l'équation $c \cdot x - Z = 0$. En effet si l'on aura trouvé une base réalisable pour l'ensemble des contraintes $A \cdot x = b, b \geq 0$, il suffira de retrancher une combinaison linéaire correspondante des équations de ce système aux deux membres de la fonction objectif $Z = c \cdot x$ pour une forme diagonale complète.

3.3.Exemple d'application2 :

Soit le (PL) suivant :

$$\text{Min } Z = 2X_1 - X_2 - 3X_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 = 6 \\ X_1 - X_2 + 4X_3 = 8 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Le problème auxiliaire (PA) est :

$$\text{Min } w = V_1 + V_2 = -2X_1 - X_2 - 3X_3 + 14$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_3 + V_1 = 6 & \Rightarrow V_1 = -X_1 - 2X_2 + X_3 + 6 \\ X_1 - X_2 + 4X_3 + V_2 = 8 & \Rightarrow V_2 = -X_1 + X_2 - 4X_3 + 8 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; V_1 \geq 0 ; V_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dressons le tableau de simplexe du problème auxiliaire (Phase 1) :

Cj		0	0	0	1	1	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	V1	V2	
1	V1	1	2	-1	1	0	6
1	V2	1	-1	4	0	1	8
Wj		2	1	3	1	1	W=14

$C_j - W_j$	-2	-1	-3	0	0	
-------------------------------	----	----	----	---	---	--

1^{ère} itération :

C_j		0	0	0	1	1	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$X3$	$V1$	$V2$	
1	$V1$	5/4	7/4	0	1		8
0	$X3$	1/4	-1/4	1	0		2
W_j		5/4	7/4	0	1		W=8
$C_j - W_j$		-5/4	-7/4	0	0		

2^{ème} itération :

C_j		0	0	0	1	1	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$X3$	$V1$	$V2$	
0	$X2$	5/7	1	0			32/7
0	$X3$	3/7	0	1			22/7
W_j		0	0	0			W=0
$C_j - W_j$		0	0	0			

Tous les $c_j = 0$ alors $x = (0, 32/7, 22/7)$ est optimale pour le problème auxiliaire (PA) et $\min w = 0$. La base optimale de (PA) constituera une base réalisable du problème initial (PL). On peut appliquer la méthode de simplexe au problème (PL) avec cette base réalisable.

Phase n°2 : (tableau de simplexe de programme linéaire (P.L))

C_j		2	-1	-3	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$X3$	
-1	$X2$	5/7	1	0	32/7
-3	$X3$	3/7	0	1	22/7
Z_j		-14/7	-1	-3	Z= -14
$C_j - Z_j$		4	0	0	

La solution courante est optimale pour (PL), alors la solution optimale de (PL) est :

$X^*=(0,32/7, 22/7)$.

Remarque :

Le but de la phase 1 est d'éliminer si cela est possible les variables artificielles de la base.

Tout vecteur artificiel sorti de la base ne doit être jamais candidat à l'entrée dans la base. Cette méthode est appelée " **Méthode des deux phases** ".

Série d'exercices corrigés

Exercice n°1 :

Soit le programme linéaire (P.L)

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 3X_1 + 3X_2 + 5X_3 \geq 20 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre (P.L) par la méthode des deux phases.

Solution :

- Ecriture de (P.L) sous la forme standard :

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 0S$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 3X_1 + 3X_2 + 5X_3 - S = 20 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; S \geq 0 \end{cases}$$

- Associons le programme auxiliaire (P.A) correspondant au (P.L) :

$$\text{Min } w = V_1 + V_2 = -5X_1 - 4X_2 - 6X_3 + S + 30$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 + V_1 = 10 \dots\dots\dots V_1 = -2X_1 - X_2 - X_3 + 10 \\ 3X_1 + 3X_2 + 5X_3 - S + V_2 = 20 \dots\dots\dots V_2 = -3X_1 - 3X_2 - 5X_3 + S + 20 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; S \geq 0 ; V_1 \geq 0 ; V_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Dressons le tableau initial de simplexe correspondant au (P.A) (phase 1 :

C_j		0	0	0	0	1	1	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	X_3	S	V_1	V_2	
1	V_1	2	1	1	0	1	0	20
1	V_2	3	3	5	-1	0	1	10
W_j		5	4	6	1	1	1	$W=30$
$C_j - W_j$		-5	-4	-6	1	0	0	

1^{ère} itération :

<i>C_j</i>		0	0	0	0	1		<i>B_i</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>S</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	
1	<i>V1</i>	7/5	2/5	0	1/5	1		6
0	<i>X3</i>	3/5	3/5	1	-1/5	0		5
<i>W_j</i>		7/5	2/5	0	1/5	1		W=6
<i>C_j-W_j</i>		-7/5	-2/5	0	-1/5	0		

2^{ème} itération :

<i>C_j</i>		0	0	0	0	1		<i>B_i</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>S</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	
0	<i>X1</i>	1	2/7	0	1/7			30/7
0	<i>X3</i>	0	3/7	1	-2/7			10/7
<i>W_j</i>		0	0	0	0			W=0
<i>C_j-W_j</i>		0	0	0	0			

Tous les $c_j - w_j = 0$ alors $x = (30/7, 0, 10/7)$ est optimale pour le problème auxiliaire (PA) et $\min w = 0$. La base optimale de (PA) constituera une base réalisable du problème initial (PL). On peut appliquer la méthode de simplexe au problème (PL) avec cette base réalisable.

Phase n°2 : (tableau de simplexe de programme linéaire (P.L))

<i>C_j</i>		3	2	4	0	<i>B_i</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>X3</i>	<i>S</i>	
3	<i>X1</i>	1	2/7	0	1/7	30/7
4	<i>X3</i>	0	3/7	1	-2/7	10/7
<i>Z_j</i>		3	18/7	4	-5/7	Z=130/7
<i>C_j-Z_j</i>		0	-4/7	0	5/7	

2^{ème} itération :

Cj		3	2	4	0	Bi
CVB	VB	X1	X2	X3	S	
3	X1	1	0	-2/3	1/3	10/3
2	X2	0	1	7/3	-2/3	10/3
Zj		3	2	8/3	-1/3	Z=50/3
Cj-Zj		0	0	4/3	1/3	

La solution courante est optimale pour (PL), car tous les $c_j - z_j$ sont positifs ou nuls, alors la solution optimale de (PL) est : $X^* = (10/3, 10/3, 0)$

Exercice n°2 :

Soit le programme linéaire (P.L)

$$\text{Min } Z = 120X_1 + 60X_2$$

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 \geq 20 \\ 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 30 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0$$

Résoudre (P.L) par la méthode des deux phases

Solution :

- Ecriture de (P.L) sous la forme standard :

$$\text{Min } Z = 120X_1 + 60X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 - S_1 = 20 \\ 3X_1 + X_2 - S_2 = 15 \\ 3X_1 + 2X_2 - S_3 = 30 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; S_1 \geq 0 ; S_2 \geq 0 ; S_3 \geq 0 ;$$

- Associons le programme auxiliaire (P.A) correspondant au (P.L) :

$$\text{Min } Z = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 - S_1 + V_1 = 20 \\ 3X_1 + X_2 - S_2 + V_2 = 15 \\ 3X_1 + 2X_2 - S_3 + V_3 = 30 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; X_3 \geq 0 ; S_1 \geq 0 ; S_2 \geq 0 ; S_3 \geq 0 ; V_1 \geq 0 ; V_2 \geq 0 ; V_3 \geq 0 ;$$

- Dressons le tableau initial de simplexe correspondant au (P.A) (phase 1 :)

<i>Cj</i>		0	0	0	0	0	1	1	<i>I</i>	<i>Bi</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	<i>V3</i>	
1	<i>V1</i>	1	5	-1	0	0	1	0	0	20
1	<i>V2</i>	3	1	0	-1	0	0	1	0	15
1	<i>V3</i>	3	2	0	0	-1	0	0	1	30
<i>Wj</i>		7	8	-1	-1	-1	1	1	1	W=65
<i>Cj-Wj</i>		-7	-8	1	1	1	0	0	0	

1^{ère} itération :

<i>Cj</i>		0	0	0	0	0	1	1	<i>I</i>	<i>Bi</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	<i>V3</i>	
0	<i>X2</i>	1/5	1	-1/5	0	0		0	0	4
1	<i>V2</i>	14/5	0	1/5	-1	0		1	0	11
1	<i>V3</i>	13/5	0	2/5	0	-1		0	1	22
<i>Wj</i>		27/5	0	3/5	-1	-1		1	1	W=33
<i>Cj-Wj</i>		-27/5	0	-3/5	1	1		0	0	

2^{ème} itération :

<i>Cj</i>		0	0	0	0	0	1	1	<i>I</i>	<i>Bi</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	<i>S3</i>	<i>V1</i>	<i>V2</i>	<i>V3</i>	
0	<i>X2</i>	0	1	-3/14	1/14	0			0	45/14
0	<i>X1</i>	1	0	1/14	-5/14	0			0	55/14
1	<i>V3</i>	0	0	3/14	13/14	-1			1	165/14
<i>Wj</i>		0	0	3/14	13/14	-1			1	W=
<i>Cj-Wj</i>		0	0	-3/14	-13/14	1			0	

3^{ème} itération :

C_j		0	0	0	0	0	1	1	1	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	V_1	V_2	V_3	
0	X_2	0	1	-3/13	0	1/13				30/13
0	X_1	1	0	2/13	0	-5/13				110/13
0	S_2	0	0	3/13	1	-14/13				165/13
W_j		0	0	0	0	0				$W=0$
C_j-W_j		0	0	0	0	0				

Tous les $c_j-w_j = 0$ alors $X_2=30/13$, $X_1=110/13$, $S_2=165/13$ est une solution optimale pour le problème auxiliaire (PA) et $\min w = 0$. La base optimale de (PA) constituera une base réalisable du problème initial (PL). On peut appliquer la méthode de simplexe au problème (PL) avec cette base réalisable.

Phase n°2 : (tableau de simplexe de programme linéaire (P.L))

C_j		120	60	0	0	0	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
60	X_2	0	1	-3/13	0	1/13	30/13
120	X_1	1	0	2/13	0	-5/13	110/13
0	S_2	0	0	3/13	1	-14/13	165/13
Z_j		120	60	60/13	0	-540/13	$Z=$
C_j-Z_j		0	0	-60/13	0	540/13	15000

4^{ème} itération :

C_j		120	60	0	0	0	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
60	X_2	0	1	0	1	-1	15
120	X_1	1	0	0	-2/3	-1/39	0
0	S_2	0	0	1	13/3	-14/3	55
Z_j		120	60	0	-20	-159/39	$Z=$
C_j-Z_j		0	0	0	20	159/39	900

La solution courante est optimale pour (PL), car tous les $c_j - z_j$ sont positifs ou nuls, alors la solution optimale de (PL) est : $X_1^* = 0$; $X_2^* = 0$; $S_1^* = 0$; $S_2^* = 55$; $S_3^* = 0$; $Z^* = 900$.

Exercice n°3 :

Soit le programme linéaire (P.L)

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 \leq 4 \\ 5X_1 + 3X_2 = 60 \\ X_2 \geq 5 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ;$$

Résoudre (P.L) par la méthode des deux phases

Solution :

- Ecriture de (P.L) sous la forme standard :

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + S_1 = 4 \\ 5X_1 + 3X_2 = 60 \\ X_2 - S_2 = 5 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; S_1 \geq 0 ; S_2 \geq 0 ;$$

- Associons le programme auxiliaire (P.A) correspondant au (P.L) :

$$\text{Min } w = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + S_1 + V_1 = 4 \\ 5X_1 + 3X_2 + V_2 = 60 \\ X_2 - S_2 + V_3 = 5 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 ; S_1 \geq 0 ; S_2 \geq 0 ; V_1 \geq 0 ; V_2 \geq 0 ; V_3 \geq 0 ;$$

- Dressons le tableau initial de simplexe correspondant au (P.A) (phase 1 :

C_j		0	0	0	0	1	1	1	B_i
CVB	VB	X_1	X_2	S_1	S_2	V_1	V_2	V_3	
1	V_1	-1	1	1	0	1	0	0	4
1	V_2	5	3	0	0	0	1	0	60
1	V_3	0	1	0	-1	0	0	1	5
W_j		4	5	1	-1	1	1	1	W=69
$C_j - W_j$		-4	-5	-1	1	0	0	0	

1^{ère} itération :

C_j		0	0	0	0	1	1	1	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$S1$	$S2$	$V1$	$V2$	$V3$	
0	$X2$	-1	1	1	0		0	0	4
1	$V2$	8	0	-3	0		1	0	48
1	$V3$	1	0	-1	-1		0	1	1
W_j		9	0	-4	-1		1	1	W=49
C_j-W_j		-9	0	4	1		0	0	

2^{ème} itération :

C_j		0	0	0	0	1	1	1	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$S1$	$S2$	$V1$	$V2$	$V3$	
0	$X2$	0	1	0	-1		0		5
1	$V2$	0	0	5	8		1		40
0	$X1$	1	0	-1	-1		0		1
W_j		0	0	5	8		1		W=40
C_j-W_j		0	0	-5	-8		0		

3^{ème} itération :

C_j		0	0	0	0	1	1	1	B_i
CVB	VB	$X1$	$X2$	$S1$	$S2$	$V1$	$V2$	$V3$	
0	$X2$	0	1	5/8	0				10
0	$S2$	0	0	5/8	1				5
0	$X1$	1	0	-3/8	0				6
W_j		0	0	0	0				W=0
C_j-W_j		0	0	0	0				

Tous les c_j-w_j sont nuls alors $X2=10, S2=5, X1=6$ est une solution optimale pour le problème auxiliaire (PA) et $\min w = 0$. La base optimale de (PA) constituera une base réalisable du problème initial (PL). On peut appliquer la méthode de simplexe au problème (PL) avec cette base réalisable.

Phase n°2 : (tableau de simplexe de programme linéaire (P.L))

<i>C_j</i>		5	6	0	0	<i>B_i</i>
<i>CVB</i>	<i>VB</i>	<i>X1</i>	<i>X2</i>	<i>S1</i>	<i>S2</i>	
6	<i>X2</i>	0	1	5/8	0	10
0	<i>S2</i>	0	0	5/8	1	5
5	<i>X1</i>	1	0	-3/8	0	6
<i>Z_j</i>		5	6	15/8	0	Z=90
<i>C_j-Z_j</i>		0	0	-15/8	0	

La solution courante est optimale pour (PL), car tous les $c_j - z_j$ sont négatifs ou nuls, alors la solution optimale de (PL) est : $X1^*=6$; $X2^*=10$; $S1^*=0$; $S2^*=5$; $Z^*=90$.

Chapitre 6:La Dualité

Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier des notions relatives aux programmes linéaires tels que le programme dual, les coûts marginaux ainsi que des techniques de validation de la solution d'un programme linéaire, c'est à dire l'analyse de sensibilité.

Nous allons commencer ce chapitre par donner quelques termes clés du jargon utilisé pour interpréter économiquement les différents résultats du programme linéaire.

1) Interprétation économique

Les éléments clés d'un programme linéaire standard sont :

- La fonction objectif dite fonction économique. Cette fonction peut représenter un coût, un profit, etc...
- Les contraintes sont composées, des coefficients a_{ij} de la matrice A , dite matrice technologique, et des constantes b_i , qui forment le vecteur du second membre. Le second membre peut représenter la disponibilité des ressources, les niveaux de demande etc...
- Les variables d'écart peuvent représenter, par exemple dans le problème de l'agriculteur, l'excédent de chacune des ressources : terrain, eau, heures de travail, bureau d'irrigation. Elles sont aussi dites variables de surplus.

Quand une variable d'écart est nulle, on dit que la contrainte correspondante est saturée. Dans le problème de l'agriculteur les contraintes terrain et main d'œuvre sont saturées. Elles sont dites aussi restrictives car une variation du second membre (par exemple) engendre un changement dans la valeur de la solution optimale.

Toute contrainte non saturée à l'optimum n'est pas restrictive pour le problème, c'est à dire qu'elle n'a aucune influence sur la solution considérée.

2) Définition du Coût marginal

Par définition, on appelle coût marginal d'un bien l'augmentation minimale de dépenses, par rapport à la solution optimale, qui résulterait de l'utilisation d'une unité supplémentaire de ce bien, lorsque le problème posé consiste à produire des biens au moindre coût.

Si le problème posé consiste à transformer des biens pour vendre une production avec un meilleur profit et l'augmentation maximale de revenu qui résulte de la possibilité de disposer

d'une unité supplémentaire de l'un des biens, est la valeur marginale de ce bien. Très souvent, on emploie également dans ce cas le qualificatif coût marginal.

Remarque : Les coûts marginaux sont donc les effets nets associés aux variables d'écart, puisque ce sont ces variables qui déterminent les excédents (ou les insuffisances) de biens.

Si une variable d'écart n'est pas nulle, dans la solution optimale, c'est que le bien correspondant est déjà excédentaire. Par conséquent, le fait de disposer d'une unité supplémentaire de ce bien n'aura aucune influence sur le revenu. On dit alors que ce bien a une valeur marginale nulle, ou par extension, que la variable d'écart associée à ce bien a une valeur marginale nulle.

Par contre, si une variable d'écart est nulle dans la solution optimale, c'est que le bien correspondant est totalement utilisé. Par la suite une variation de la disponibilité aura généralement une influence sur le revenu. C'est pourquoi cette variable d'écart nulle dans la solution optimale a une valeur marginale non nulle, et cette valeur marginale précise la variation de la fonction économique résultant de l'utilisation d'une unité supplémentaire du bien associé.

Exemple : Dans le problème de l'agriculteur on a

- Le coût marginal lié à S_1 est $200/3$

⇒ Une augmentation de S_1 d'une unité entraîne une diminution de $200/3$ de la valeur de la fonction économique.

- Le coût marginal lié à S_2 est 0 et à l'optimum $S_2=0$

⇒ on a déjà $60m^3$ d'eau de plus donc si on ajoute $1m^3$ ça ne va pas changer la solution optimale ni la valeur de la fonction économique

Le système de contraintes dans le programme linéaire relatif au tableau de simplexe optimal du problème de l'agriculteur est

$$\begin{cases} x_1 + 4/3S_1 - 1/3S_3 = 40 \\ S_2 - 14/3S_1 + 2/3S_3 = 60 \\ x_2 - 1/3S_1 + 1/3S_3 = 110 \\ S_4 - 4/3S_1 + 1/3S_3 = 50 \end{cases}$$

La fonction économique s'écrit

$$z = 100x_1 + 200x_2$$

Si on exprime z en fonction de S_1 et S_3 (variables hors base) en utilisant le système d'équation ci dessus on a

$$z = 100(-4/3S_1 + 1/3S_3 + 40) + 200(1/3S_1 - 1/3S_3 + 110)$$

$$z = 26000 - 200/3S_1 - 100/3S_3$$

La valeur 26000 correspond à la valeur optimale de la fonction économique.

Si $S_1 = 1$ alors un hectare de terrain de moins à utiliser, donc une réduction de $200/3$ dinars de la valeur de la fonction objectif.

Si on ajoute 3 hectares de terrains ($S_1 = -3$), avec l'hypothèse que les autres quantités restent inchangées alors le revenu augmente de $(200/3) \times 3 = 200 \text{ dinars}$

On vérifie ceci, si on résout le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} & x_1 + x_2 \leq 153 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ & x_1 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

On trouve que la valeur optimale va augmenter de 200 dinars et devient 26 200 dinars.

Exercice : Expliquer graphiquement que si on ajoute des m^3 d'eau, on aura aucune amplification dans la fonction objectif.

Remarque : Dans le cas où on diminuerait $60m^3$ d'eau, la solution optimale devient dégénérée.

Les valeurs marginales apportent donc des renseignements économiques particulièrement intéressants, mais il faut les utiliser avec prudence car leur domaine de validité est limité.

Par exemple, si on ajoute 30 hectares de terrains aux 150 déjà disponibles dans le problème de l'agriculteur, le revenu augmentera de $(200/3) \times 3 = 200 \text{ dinars}$. Ceci n'est pas vrai, parce que si on résout le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} & x_1 + x_2 \leq 180 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ & x_1 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

La valeur optimale du programme linéaire ci-dessus est de 26 875,14 donc le revenu n'a pas augmenté de 2000 dinars comme prévu.

3) Dualité

3.1.Définition

La forme d'un programme linéaire de type maximisation est

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = c^t x \\ \text{S.C} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (PL1)$$

avec x, b, c des vecteurs de dimensions respectives n, m et n , et A une matrice de dimension (m, n)

On appelle programme dual de $(PL1)$, le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & w = b^t y \\ \text{S.C} & {}^t A.Y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Avec y un vecteur de dimension m et ${}^t A$ la transposée de la matrice A .

Le programme $(PL1)$ est appelé programme Primal.

Pour passer du primal au dual, on remarque que :

Les termes du second membre deviennent les coefficients de la fonction objectif et réciproquement.

Le problème de maximisation devient un problème de minimisation.

Les inégalités " \leq " deviennent des inégalités " \geq "

La matrice A se transforme en sa transposée.

Exemple : Le programme primal (problème de l'agriculteur) est

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = 100x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \quad & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 \\ & x_1 + 4x_2 \leq 480 \\ & x_1 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc le programme dual est

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & w = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4 \\ \text{S.C} \quad & y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \geq 100 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 200 \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.2. Propriétés et signification économique du programme dual

Pour expliquer la signification du problème dual on va se baser sur l'exemple de l'agriculteur. Supposons qu'un agriculteur (client) voudrait acheter la totalité de nos ressources disponibles. Notre agriculteur acceptera certainement cette proposition si le prix offert par ce client lui procure le même profit.

soit y_1 le prix d'un hectare de terrain

y_2 le prix d'un m^3 d'eau

y_3 le prix d'une heure de main d'œuvre

y_4 le prix de la permission de la culture d'un hectare de tomates.

Le problème du client consiste à minimiser les frais d'achat des ressources : c'est à dire $150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$ sous la contrainte que les prix satisfont notre agriculteur.

Pour notre agriculteur un hectare de terrain $4m^3$ d'eau, une heure de travail et un hectare de permission du bureau est équivalent a un revenu de 100 dinars.

Tandis que, un hectare de terrain, $2m^3$ d'eau et 4 heures de travail lui engendrent un revenu de 200 dinars.

Il n'est prêt à vendre ses ressources que si $y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4$ lui rapporte un revenu supérieur ou égale à 100 DT et que si $y_1 + 2y_2 + 4y_3$ lui rapporte un revenu supérieur ou égal à 200 DT.

Ainsi le problème du client est

$$\text{Min} \quad 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$$

$$\text{S.C} \quad y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \geq 100$$

$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 200$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

Donc le problème du client peut être modélisé par le programme dual.

Le tableau de simplexe final du programme dual est :

			150	440	480	90	0	0
			y_1	y_2	y_3	y_4	L_1	L_2
480	y_3	100/3	0	-2/3	1	-1/3	1/3	1/3
150	y_1	200/3	1	14/3	0	4/3	-4/3	1/3
			150	380	480	40	-40	-110
			0	60	0	50	40	110

Avec L_1 et L_2 , les variables d'écart à la 1^{ère} et la 2^{ème} contrainte du programme dual.

On remarque que la solution optimale du dual peut être déduite du primal de la manière suivante :

$$y_1 = 200/3 \quad \leftrightarrow \quad C_3 - z_3 = -200/3$$

$$y_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad C_2 - z_4 = 0$$

$$y_3 = 100/3 \quad \leftrightarrow \quad C_5 - z_5 = -100/3$$

$$y_4 = 0 \quad \leftrightarrow \quad C_6 - z_6 = 0$$

$$L_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad C_1 - z_1 = 0$$

$$L_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad C_2 - z_2 = 0$$

$$C_1 - z_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad S_1 = 0$$

$$C_2 - z_2 = 60 \quad \leftrightarrow \quad S_2 = 60$$

$$C_3 - z_3 = 0 \quad \leftrightarrow \quad S_3 = 0$$

$$C_4 - z_4 = 50 \quad \leftrightarrow \quad S_4 = 50$$

$$\begin{aligned}
 C_5 - z_5 = 40 & \leftrightarrow x_1 = 40 \\
 C_6 - z_6 = 110 & \leftrightarrow x_2 = 110 \\
 w = 26000 & \leftrightarrow z = 260000
 \end{aligned}$$

On peut généraliser ce résultat dans le tableau suivant :

Primal (Max)	Dual (Min)
Variables de décision	variables d'écart
$x_j = 0 \Rightarrow C_j - z_j < 0$	$L_i = C_j - z_j \neq 0 \Rightarrow C_j - z_j = 0$
$x_j > 0 \Rightarrow C_j - z_j = 0$	$L_i = 0 \Rightarrow C_j - z_j = x_j$
variables d'écart	Variables de décision
$S_j = 0 \Rightarrow C_j - z_j \neq 0$	$y_i = C_i - z_j \neq 0 \Rightarrow C_j - z_j = 0$
$S_j > 0 \Rightarrow C_j - z_j = 0$	$y_i = 0 \text{ et } C_j - z_j = S_j$

On remarque aussi qu'à l'optimum la valeur de la fonction objectif du dual est égale à la valeur de la fonction objectif du primal.

Proposition : Le dual du programme dual est le programme primal.

4) Tableau de correspondance primal-dual

Max	Min
- Matrice des contraintes (m, n)	- Transposée de la matrice des contraintes (n, m)
- Second membre des contraintes	- Coefficient de la fonction objectif
- Coefficient de la fonction objectif	- Second membre des contraintes
Nombre de contraintes	Nombre de variables principales
$i^{\text{ème}}$ contrainte de type « \leq »	$i^{\text{ème}}$ variable de type « ≥ 0 »
$i^{\text{ème}}$ contrainte de type « \geq »	$i^{\text{ème}}$ variable de type « ≤ 0 »
$i^{\text{ème}}$ contrainte de type « $=$ »	$i^{\text{ème}}$ variable qcq « $\in \mathbb{R}$ »
Nombre de variables	Nombre de contraintes
$j^{\text{ème}}$ variable « \geq »	$j^{\text{ème}}$ contrainte de type « \geq »

$j^{\text{ème}}$ variable « \leq » $j^{\text{ème}}$ variable qcq « $\in \mathbb{R}$ »	$j^{\text{ème}}$ contrainte de type « \leq » $i^{\text{ème}}$ contrainte de type « $=$ »
--	---

Exemples

Primal	Dual
$Max \frac{1}{2} x_1 + x_2$ S.c $x_1 + x_2 \leq 3$ $-x_1 + x_2 \leq 1$ $x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$Min \ 3y_1 + y_2 + 2y_3$ S.c $y_1 - y_2 + y_3 \geq \frac{1}{2}$ $y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$
$Min \ -x_1 + x_2$ S.c $2x_1 - x_2 \geq 2$ $-x_1 + 2x_2 \geq -2$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$Max \ 2y_1 - 2y_2 + 5y_3$ S.c $2y_1 - y_2 + y_3 \leq -1$ $-y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1$ $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$
$Max \ 2x_1 - x_2$ S.c $x_1 - x_2 = 3$ $x_1 \leq 4$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$Min \ 3y_1 + 4y_2$ S.c $y_1 + 2y_2 \geq 2$ $-y_1 \geq -1$ $y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0$
$Max \ 2x_1 - x_2$ S.c $x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 = 6$ $x_2 \leq 5$ $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$	$Min \ -2y_1 + 6y_2 - 5y_3$ S.c $y_1 + y_2 = 2$ $-2y_1 + y_2 + y_3 = -1$ $y_1 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}, y_3 \geq 0$

Chapitre 7 : programmation linéaire en nombre entiers : problème de transport

Introduction :

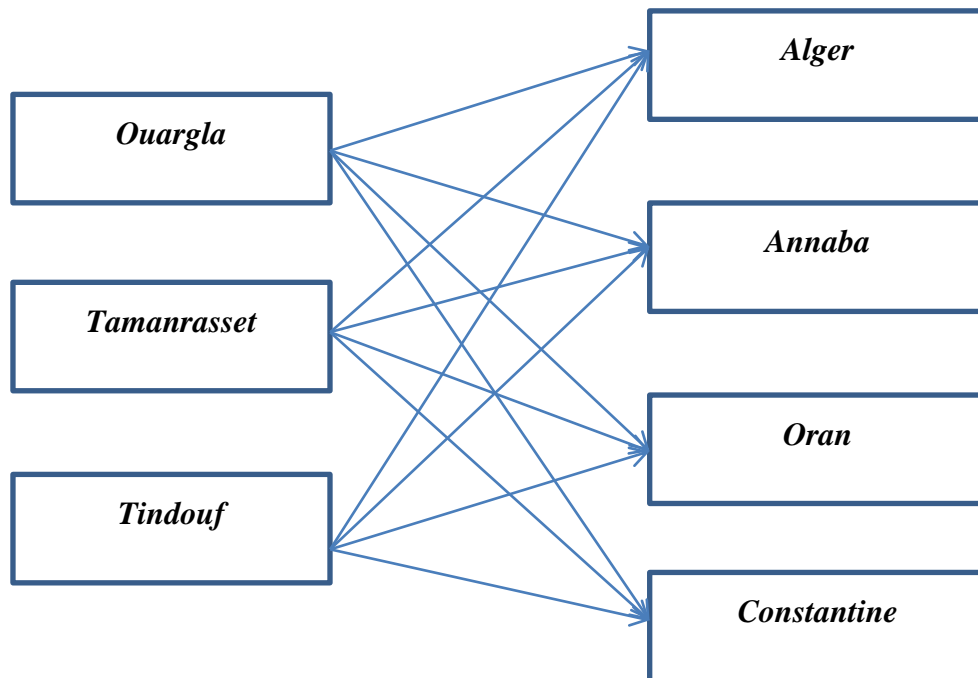
Le problème de transport s'agit de déterminer la façon optimale d'acheminer des biens à partir de m entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Nous allons faire l'hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminée vers les différentes destinations.

Les problèmes de transport sont des problèmes linéaires particuliers qu'on peut les résoudre comme d'habitude par un simplexe, mais on peut aussi les résoudre plus simplement et plus efficacement par d'autres méthodes ;

Pour mieux comprendre, nous allons illustrer ce type de problème par un exemple :

<i>Destinations</i>	<i>Alger</i>	<i>Annaba</i>	<i>Oran</i>	<i>Constantine</i>	<i>Offre</i>
<i>Entrepôts</i>					
<i>Ouargla</i>	147€	121€	344€	552€	450T
<i>Tamanrasset</i>	241€	153€	102€	312€	450T
<i>Tindouf</i>	451€	364€	557€	285€	750T
<i>Demande</i>	400T	450T	550T	250T	1650T
					1650T

On notera que l'offre totale est bien égale à la demande ce qui est conforme à l'hypothèse ci-dessus.



1) Mise en équation

Le problème général de transport sous l'hypothèse que l'offre totale égale la demande, s'énonce comme suit. Notons les sources par $S_1; S_2; \dots; S_m$ et $D_1; D_2; \dots; D_n$ les destinations.

On introduit les notations suivantes :

X_{ij} = quantité transportée de S_i à D_j ,

C_{ij} = coût unitaire du transport de S_i à D_j ,

S_i = offre de la source S_i ,

D_j = demande de la destination D_j .

On suppose que les (S_i) sont positifs $S_i \geq 0$ et de même pour les $D_j \geq 0$.

Il s'agit de minimiser le coût de transport. La fonction objective s'écrit :

$$Z = \sum_{i,j} C_{ij} \times X_{ij}$$

Sous les contraintes

Offre : $\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

Demande : $\sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

Positivité : $X_{ij} \geq 0$

Proposition 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de transport admette une solution optimale est que

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$$

Démonstration: Si (X) est une solution qui vérifie les contraintes, on a que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i &\Rightarrow \sum_{i,j} X_{ij} = \sum_{i=1}^m D_i \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j &\Rightarrow \sum_{i,j} X_{ij} = \sum_{j=1}^n D_j \end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j$$

Inversement :

Si $\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n D_j = T$, on pose :

$$X_{ij} = \frac{S_i D_j}{T} \geq 0$$

Montrons que ce choix de « X » vérifie les contraintes. En effet

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n X_{ij} &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n S_i D_j = S_i \frac{\sum_{j=1}^n D_j}{T} = S_i \\ \sum_{i=1}^m X_{ij} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^m S_i D_j = D_j \frac{\sum_{i=1}^m S_i}{T} = D_j \end{aligned}$$

De plus, l'ensemble des solutions réalisables est borné. Il suffit d'observer que, pour une paire d'indices « i » et « j ».

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \geq 0 \Rightarrow 0 \leq X_{ij} \leq S_i$$

Par conséquent, le problème admet une solution optimale.

Proposition 2 : On a les propriétés suivantes pour la matrice A.

- Chaque colonne contient exactement deux entrées non nulles et qui sont égales à 1.
- Le rang de A est égal à (m+ n-1).
- Chacune des lignes est une combinaison linéaire des autres lignes.
- Il y a toujours une ligne de trop que l'on peut éliminer.

- Il y a exactement (m + n - 1) variables de base réalisables.

2) Dual du problème de transport

Un problème de transport est de la forme :

$$\text{Min } Z = \sum C_{ij} X_{ij} = C^t X$$

Sous les contraintes :

$$\forall i = 1, 2, \dots, m \quad \sum_{j=1}^n X_{ij} = S_i \Leftrightarrow A1X = S$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{i=1}^m X_{ij} = D_j \Leftrightarrow A2X = D$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Sous forme compact, ceci s'écrit :

$$\text{Min } Z = C^t X$$

$$\begin{bmatrix} S1 \\ -S1 \\ S2 \\ -S2 \end{bmatrix} X \geq \begin{bmatrix} s \\ -s \\ d \\ -d \end{bmatrix}$$

$$X \geq 0$$

Le dual est :

$$\text{Max } Z = s^t u_+ - s^t u_- + d^t v_+ - d v_-$$

$$[S1^t \quad -S1^t \quad S2^t \quad -S2^t] \times \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \\ v_+ \\ v_- \end{bmatrix} \leq C$$

$$u_+, u_-, v_+, v_- \geq 0$$

C'est-à-dire avec $u = u_+ - u_-$ et $v = v_+ - v_-$, on obtient :

$$\text{Max } Z = s^t u + d^t v$$

$$S1^t u + S2^t v \leq C$$

$$u, v \text{ libre}$$

Or :

$$S1^t u + S2^t v \leq C \Leftrightarrow u_i + v_j \leq C_{ij}$$

Supposons que « X » soit la solution optimale du problème.

$$X^t (C - S1^t u + S2^t v) = 0$$

On a les relations

$$u_i + v_j = C_{ij} \quad \forall X_{ij} > 0$$

Si « X » est solution de base non dégénéré, on a bien la décomposition $u_i + v_j = C_{ij}$ pour les indices des variables de base.

3) Modélisation d'un problème de transport :

Pour mieux comprendre on va illustrer par un exemple d'application:

Trois abattoirs alimentent des boucheries qui se situent à Alger, Oran et Annaba. Les coûts de transport et la quantité offerte par chaque abattoir et les quantités demandées par les boucheries sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1	Boucherie d'Oran 2	Boucherie d'Annaba 3	Quantités offertes
Abattoir 1	8 €	5 €	6 €	120 Q
Abattoir 2	15 €	10 €	12 €	80 Q
Abattoir 3	3 €	9 €	10 €	80 Q
Quantités demandées	150 Q	70 Q	60 Q	280 Q

Ecrire ce problème linéaire sous forme mathématique (modélisation) :

a. Identification des variables :

X_{11} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 1 vers la boucherie1

X_{12} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 1 vers la boucherie2

X_{13} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 1 vers la boucherie3

X_{21} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 2 vers la boucherie1

X_{22} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 2 vers la boucherie2

X_{23} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 2 vers la boucherie3

X_{31} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 3 vers la boucherie1

X_{32} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 3 vers la boucherie2

X_{33} : Quantité de viande transportée de l'abattoir 3 vers la boucherie3

b. Les contraintes structurelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 80 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80 \end{array} \right. \quad \text{Les contraintes d'offre}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60 \end{array} \right. \quad \text{Les contraintes de la demande}$$

c. Les contraintes de positivité :

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

d. La fonction objective

$$\mathbf{Minz} = 8 X_{11} + 5 X_{12} + 6 X_{13} + 15 X_{21} + 10 X_{22} + 12 X_{23} + 3 X_{31} + 9 X_{32} + 10 X_{33}$$

Alors, on peut écrire le problème de transport sous la forme mathématique suivante :

$$\mathbf{Minz} = 8 X_{11} + 5 X_{12} + 6 X_{13} + 15 X_{21} + 10 X_{22} + 12 X_{23} + 3 X_{31} + 9 X_{32} + 10 X_{33}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = 80 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60 \end{array} \right. \quad X_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

4) Méthode du simplexe appliquée au problème de transport

Voici la démarche qui sera utilisée :

- Trouver une solution réalisable de base.
- Comment passer à une autre solution de base adjacente.
- Déterminer si la solution est optimale.

4.4. Détermination d'une solution réalisable de base

4.1.1. La solution réalisable de base par la méthode du coin nord-ouest

Démarche :

- On débute par la case (1; 1) (coin nord-ouest). Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d'épuiser la source i.
- Si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.
- On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice. Par exemple :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	
Abattoir 1	8	120	5		6		120	120-120=0
Abattoir 2	15	30	10	50	12		80	80-30=50 50-50=0
Abattoir 3	3		9	20	10	60	80	80-20=60
Dj	150		70		60			280
	150-120=30 30-30=0		70-50=20 20-20=0		60-60=0			

La solution réalisable de base de ce problème de transport par la méthode du coin nord-ouest est la suivante :

$X_{11}=120$	$X_{12}=0$	$X_{13}=0$
$X_{21}=30$	$X_{22}=50$	$X_{23}=0$
$X_{31}=0$	$X_{32}=20$	$X_{33}=60$

$$Z = (8 \times 120) + (15 \times 30) + (10 \times 50) + (9 \times 20) + (10 \times 60) = 2690$$

Caractéristiques de cette méthode :

- méthode facile,
- ne tient pas compte des coûts de transport,
- loin de la solution optimale,
- la moins efficace.

4.1.2. La solution réalisable de base par la méthode de coût minimal

Démarche :

- Choisir la case (i; j) de coût minimal. Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d'épuiser la source i.
- Si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.
- On recommence l'étape (a) à partir de la sous-matrice. Par exemple :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	
Abattoir 1	8		5	70	6	50	120	120-70=50 50-50=0
Abattoir 2	15	70	10		12	10	80	80-70=10
Abattoir 3	3	80	9		10		80	80-80=0
Dj	150		70		60		280	280
	150-80=70 70-70=0		70-70=0		60-50=10 10-10=0			

La solution réalisable de base de ce problème de transport par la méthode de coût minimal est la suivante :

$X_{11}=0$	$X_{12}=70$	$X_{13}=50$
$X_{21}=70$	$X_{22}=0$	$X_{23}=10$
$X_{31}=80$	$X_{32}=0$	$X_{33}=0$

$$Z = (5 \times 70) + (6 \times 50) + (10 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) = 2060$$

4.1.3. La solution réalisable de base par la méthode d'approximation de vogel (synonyme : heuristique de Balas-Hammer/ méthode de la différence maximale/ méthode de la pénalité unitaire/ méthode des regrets maximaux successifs)

La méthode d'approximation Vogel fournit général une solution très proche de l'optimum, en ce que le nombre de changement de plan nécessaire pour l'obtention d'une solution optimale est peu élevé.

Démarche :

- Déterminer sur chaque ligne le coût minimum, noté C_{is} , et à chaque fois avant de passer à la ligne qui suit, exclure la colonne « s », puis déterminer le coût minimum C_{ik} (déterminer le coût minimum et le coût qui le suit sur la même ligne) ;
Ensuite, calculer $\Delta i = |C_{ik} - C_{is}|$ pour chaque ligne « i » ;
- Déterminer sur chaque colonne le coût minimum, noté C_{sj} , et à chaque fois, avant de passer à la colonne qui suit, exclure la ligne « s », puis déterminer le coût minimum C_{kj} (déterminer le coût minimum et le coût qui le suit sur la même colonne) ;
Ensuite, calculer $\Delta j = |C_{kj} - C_{sj}|$ pour chaque colonne « j » ;
- Définir l'ensemble $\{\Delta i, \Delta j\}$ et prendre, parmi les éléments de cet ensemble, celui qui a la plus grande valeur, on note Δc
- Déterminer sur la ligne ou la colonne qui correspond à Δc le plus petit coût noté C_{rs} ;
- Choisir la case (r; s) de coût minimal. Allouer à cette case la quantité la plus grande possible afin de satisfaire la demande j ou bien d'épuiser la source i.
- Si la source i est épuisée, rayer la ligne i. Si la demande j est satisfaite, rayer la colonne j.
- La matrice courante porte un plan faisable de transport si et seulement si $C_{ij} = \emptyset$;
- Dans le cas contraire, reprendre les différentes étapes de l'itération.
- Reprenons le même exemple et cherchons la solution réalisable de base par cette méthode :

Tableau 1 :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	Δi
Abattoir 1	8		5		6		120	6-5=1
Abattoir 2	15		10		12		80	12-10=2
Abattoir 3	3	80	9		10		80 -80=0	9-3=6
Dj	150 -80=70		70		60		280	280
Δj	8-3=5		9-5=4		10-6=4			

Tableau 2

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	Δ_i
Abattoir 1	8	70	5		6		120 -70 =50	6-5=1
Abattoir 2	15		10		12		80	12-10=2
Abattoir 3	3	80	9		10		80 - 80=0	
Dj	150 - 80=70 70-70=0		70		60		280 280	
Δ_j	15-8=7		10-5=5		12-6=6			

Tableau 3 :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	Δ_i
Abattoir 1	8	70	5		6	50	120 -70 =50 50-50=0	6-5=1
Abattoir 2	15		10		12		80	12-10=2
Abattoir 3	3	80	9		10		80 - 80=0	
Dj	150 - 80=70 70-70=0		70		60-50=10		280 280	
Δ_j			10-5=5		12-6=6			

Tableau4 :

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	Δ_i
	Abattoir 1	8	70	5		6	50	120 -70 =50 50-50=0
Abattoir 2	15		10		12	10	80 - 10 = 70	12-10=2
Abattoir 3	3	80	9		10		80 - 80 = 0	
Dj	150 - 80 = 70 70-70=0		70		60-50=10 10-10=0		280 280	
Δ_j			10		12			

Tableau5 :

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si	Δ_i
	Abattoir 1	8	70	5		6	50	120 -70 =50 50-50=0
Abattoir 2	15		10	70	12	10	80 - 10 = 70 70-70=0	10
Abattoir 3	3	80	9		10		80 - 80 = 0	
Dj	150 - 80 = 70 70-70=0		70-70=0		60-50=10 10-10=0		280 280	
Δ_j			10					

La matrice courante porte un plan faisable de transport car $C_{ij} = \emptyset$

La solution réalisable de base de ce problème de transport par la méthode de Vogel est la suivante :

$X_{11}=70$	$X_{12}=0$	$X_{13}=50$
$X_{21}=0$	$X_{22}=70$	$X_{23}=10$
$X_{31}=80$	$X_{32}=0$	$X_{33}=0$

$$Z = (8 \times 70) + (6 \times 50) + (10 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) = 1920$$

4.2. Passage à une autre solution adjacente par la méthode des coûts duaux (u_i, v_j)

Nous allons utiliser la technique des coûts duaux telle que présentée précédemment. Etant donné une solution de base x , la méthode consiste à déterminer une décomposition des coefficients C_{ij} (les coûts de transport) de la forme

$$C_{ij} = u_i + v_j$$

Pour les indices correspondant à ceux de la solution de base. Il y a $(m + n - 1)$ équations pour $(m + n)$ inconnues. Dans la pratique, on pose $u_1 = 0$ et on résoudra pour les autres variables. Reprenons notre exemple du début. Pour chaque case, on affiche le coefficient C_{ij} qui est encadré et la solution de base. La case est vide si la variable est hors-base. Démarrons avec la solution fournie par la méthode du minimum coût.

		$v_1 = 9$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$				
	Destinations	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3	Si	
	sources							
$u_1 = 0$	Abattoir 1	8		5	70	6	50	120
$u_2 = 6$	Abattoir 2	15	70	10		12	10	80
$u_3 = -3$	Abattoir 3	3	80	9		10		80
	Dj	150		70		60		280
								280

On évalue les coûts duaux $C_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante (pour les variables de base, les cases pleines)

$$u_1 = 0$$

$$C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 0 + v_2 = 5 \Rightarrow v_2 = 5$$

$$C_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow 0 + v_3 = 6 \Rightarrow v_3 = 6$$

$$C_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow 6 + v_1 = 15 \Rightarrow v_1 = 9$$

$$C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow u_2 + 6 = 12 \Rightarrow \mathbf{u_2 = 6}$$

$$C_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 + 6 = 3 \Rightarrow \mathbf{u_3 = -3}$$

Maintenant, On évalue les coûts duaux $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ de la manière suivante (pour les variables hors base, les cases vides)

$$\bar{C}_{11} = C_{11} - (u_1 + v_1) \Rightarrow \bar{C}_{11} = 8 - (0 + 9) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{11} = -1}$$

$$\bar{C}_{22} = C_{22} - (u_2 + v_2) \Rightarrow \bar{C}_{22} = 10 - (6 + 5) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{22} = -1}$$

$$\bar{C}_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) \Rightarrow \bar{C}_{32} = 9 - (-3 + 6) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{32} = +6}$$

Puisque, $\bar{C}_{11} < 0$ alors la variable X_{11} rentre à la base donc il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable X_{11} ;

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
Abattoir 1	8	$+ \theta$	5	70	6	$50 - \theta$	120
Abattoir 2	15	$70 - \theta$	10		12	$10 + \theta$	80
Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280
							280

Le choix de θ doit respecter la contrainte de positivité :

$$50 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 50$$

$$70 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 70$$

Alors $\theta \leq 50$

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	8		5	70	6		
Abattoir 1	8	+50	5	70	6	50-50=0	120
Abattoir 2	15	70-	10		12	10+50=60	80
Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280
							280

Le nouveau tableau est le suivant :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	8	50	5	70	6		
Abattoir 1	8	50	5	70	6		120
Abattoir 2	15	20	10		12	60	80
Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280
							280

On évalue les coûts duaux $C_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante (pour les variables de base , les cases pleines)

$$u_1 = 0$$

$$C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 0 + v_1 = 8 \Rightarrow v_1 = 8$$

$$C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 0 + v_2 = 5 \Rightarrow v_2 = 5$$

$$C_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow u_2 + 8 = 15 \Rightarrow u_2 = 7$$

$$C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 7 + v_3 = 12 \Rightarrow v_3 = 5$$

$$C_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow u_3 + 8 = 3 \Rightarrow u_3 = -5$$

Maintenant, On évalue les coûts duaux $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ de la manière suivante (pour les variables hors base, les cases vides)

$$\bar{C}_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \Rightarrow \bar{C}_{13} = 6 - (0 + 5) \Rightarrow \bar{C}_{13} = +1$$

$$\overline{C22} = C22 - (u2 + v2) \Rightarrow \overline{C22} = 10 - (7 + 5) \Rightarrow \overline{C22} = -2$$

$$\overline{C32} = C32 - (u3 + v2) \Rightarrow \overline{C32} = 9 - (-5 + 5) \Rightarrow \overline{C32} = +9$$

$$\overline{C33} = C33 - (u3 + v3) \Rightarrow \overline{C33} = 10 - (-5 + 5) \Rightarrow \overline{C33} = +10$$

Puisque, $\overline{C22} < 0$ alors la variable X22 rentre à la base donc il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable X22 ;

$v1 = 8$ $v2 = 5$ $v3 = 5$

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
$u1 = 0$ Abattoir 1	8	$50 + \theta$	5	$70 - \theta$	6		120
$u2 = 7$ Abattoir 2	15		10		12	60	80
$u3 = -5$ Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280
							280

Le choix de θ doit respecter la contrainte de positivité :

$$20 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 20$$

$$70 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 70$$

Alors $\theta \leq 20$

$v1 = 8$ $v2 = 5$ $v3 = 5$

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
$u1 = 0$ Abattoir 1	8	$50 + 20$	5	$70 - 20$	6		120
$u2 = 7$ Abattoir 2	15		10		12	60	80
$u3 = -5$ Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280
							280

Le nouveau tableau est le suivant :

Destinations sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
Abattoir 1	8	70	5	50	6		120
Abattoir 2	15		10	20	12	60	80
Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280 280

On évalue les coûts duaux $C_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante (pour les variables de base, les cases pleines)

$$u_1 = 0$$

$$C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 0 + v_1 = 8 \Rightarrow \mathbf{v_1 = 8}$$

$$C_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 0 + v_2 = 5 \Rightarrow \mathbf{v_2 = 5}$$

$$C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 + 5 = 10 \Rightarrow \mathbf{u_2 = 5}$$

$$C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 5 + v_3 = 12 \Rightarrow \mathbf{v_3 = 7}$$

$$C_{31} = u_3 + v_1 \Rightarrow u_3 + 8 = 3 \Rightarrow \mathbf{u_3 = -5}$$

Maintenant, On évalue les coûts duaux $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ de la manière suivante (pour les variables hors base, les cases vides)

$$\bar{C}_{13} = C_{13} - (u_1 + v_3) \Rightarrow \bar{C}_{13} = 6 - (0 + 7) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{13} = -1}$$

$$\bar{C}_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \Rightarrow \bar{C}_{21} = 15 - (5 + 8) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{21} = +2}$$

$$\bar{C}_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) \Rightarrow \bar{C}_{32} = 9 - (-5 + 5) \Rightarrow \mathbf{\bar{C}_{32} = +9}$$

Puisque, $\bar{C}_{13} < 0$ alors la variable X_{13} rentre à la base donc il faudra identifier la variable qui sortira de la base et calculer la valeur de cette variable X_{13} ;

		$v_1 = 8$		$v_2 = 5$		$v_3 = 7$		
sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1	Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si		
	$u_1 = 0$	Abattoir 1	8	70	5	$50 - \theta$	6	$\geq +\theta$
$u_2 = 5$	Abattoir 2	15		10	$20 + \theta$	12	$60 - \theta$	80
$u_3 = -5$	Abattoir 3	3	80	9		10		80
	Dj	150		70		60		280
								280

Le choix de θ doit respecter la contrainte de positivité :

$$50 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 50$$

$$60 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 60$$

Alors $\theta \leq 50$

		$v_1 = 8$		$v_2 = 5$		$v_3 = 7$		
sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1	Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si		
	$u_1 = 0$	Abattoir 1	8	70	5	$50 - 50$	6	$\geq +50$
$u_2 = 5$	Abattoir 2	15		10	$20 + 50$	12	$60 - 50$	80
$u_3 = -5$	Abattoir 3	3	80	9		10		80
	Dj	150		70		60		280
								280

Le nouveau tableau est le suivant :

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	8	70	5		6	50	
Abattoir 1	8	70	5		6	50	120
Abattoir 2	15		10	70	12	10	80
Abattoir 3	3	80	9		10		80
Dj	150		70		60		280 280

On évalue les coûts duaux $C_{ij} = u_i + v_j$ de la manière suivante (pour les variables de base, les cases pleines)

$$u_1 = 0$$

$$C_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 0 + v_1 = 8 \Rightarrow v_1 = 8$$

$$C_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow 0 + v_3 = 6 \Rightarrow v_3 = 6$$

$$C_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow 6 + v_2 = 10 \Rightarrow v_2 = 4$$

$$C_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow u_2 + 6 = 12 \Rightarrow u_2 = 6$$

$$C_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 + 6 = 3 \Rightarrow u_3 = -3$$

Maintenant, On évalue les coûts duaux $\bar{C}_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$ de la manière suivante (pour les variables hors base, les cases vides)

$$\bar{C}_{12} = C_{12} - (u_1 + v_2) \Rightarrow \bar{C}_{12} = 5 - (0 + 4) \Rightarrow \bar{C}_{12} = +1$$

$$\bar{C}_{21} = C_{21} - (u_2 + v_1) \Rightarrow \bar{C}_{21} = 15 - (6 + 8) \Rightarrow \bar{C}_{21} = +1$$

$$\bar{C}_{32} = C_{32} - (u_3 + v_2) \Rightarrow \bar{C}_{32} = 9 - (-3 + 4) \Rightarrow \bar{C}_{32} = +10$$

$$\bar{C}_{33} = C_{33} - (u_3 + v_3) \Rightarrow \bar{C}_{33} = 10 - (-3 + 6) \Rightarrow \bar{C}_{33} = +7$$

Tous les \bar{C}_{ij} sont positifs ou nuls, alors la solution courante est optimale ;

$X^*_{11}=70$	$X^*_{12}=0$	$X^*_{13}=50$
$X^*_{21}=0$	$X^*_{22}=70$	$X^*_{23}=10$
$X^*_{31}=80$	$X^*_{32}=0$	$X^*_{33}=0$

$$Z^* = (8 \times 70) + (6 \times 50) + (10 \times 70) + (12 \times 10) + (3 \times 80) = 1920$$

On peut remarquer que la solution réalisable de base trouvée par la méthode de VOGEL ce qui prouve que la méthode de Vogel est la plus proche à 'optimum.

4.3. Passage à une autre solution adjacente par l’algorithme de STEPPING-STONE :

Considérons le même exemple précédent :

La question qu’on pose est la suivante : quelles quantités de viandes (marchandise) envoyer des origines (abattoirs) vers les destinations (boucheries) en respectant l’offre en satisfaisant la demande au moindre coût ?

C’est, à l’évidence, un problème de programmation linéaire avec 9 variables qu’on pourra présenter dans un tableau analogue ; on aura donc deux tableaux similaires, un pour les coûts et un pour les quantités.

On pourrait résoudre ce problème à l’aide de l’algorithme du simplexe, mais on va préférer un algorithme spécifique (le Stepping-Stone) qui tiendra compte des particularités du problème posé pour en simplifier la résolution.

L’algorithme du Stepping-Stone sera un algorithme itératif (donc par étapes successives) visant à améliorer (donc faire baisser le coût global) une solution de base.

Il nous faut donc une solution de départ pour démarrer l’algorithme.

On a trouvé précédemment la solution de base réalisable par trois méthodes (la méthode du coin Nord-ouest, la méthode de coût minimum et la méthode de Balas-Hammer).

Pour mieux comprendre l’algorithme de Stepping-Stone, on va choisir la solution trouvée par la méthode du coin Nord-Ouest comme solution de départ.

Tableau 1 : la solution de départ

Destinations Sources	Boucherie d’Alger 1		Boucherie d’Oran 2		Boucherie d’Annaba 3		Si
Abattoir 1	8	120	5		6		120
Abattoir 2	15	30	10	50	12		80
Abattoir 3	3		9	20	10	60	80
Dj	150		70		60		280
							280

Le cout global= $8 \times 120 + 15 \times 30 + 10 \times 50 + 9 \times 20 + 10 \times 60 = 2690$

L'algorithme consiste à modifier la solution réalisable de base pour qui soit meilleure, donc à rendre non vide une case vide du tableau des quantités.

On choisira la case qui permet la plus grande baisse du coût global de transport pour la déterminer, on calculera la variation de cout consécutive au remplissage d'une case vide en utilisant les coûts des cases pleines .

Pour calculer la variation du cout due au remplissage de la case (1,2) :

Sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	8	120	5	50	6	60	
Abattoir 1	8	120	5	50	6	60	120
Abattoir 2	15	30	10	50	12		80
Abattoir 3	3		9	20	10	60	80
Dj	150		70		60		280
							280

$$\bar{C}_{12} = C_{12} - C_{11} + C_{21} - C_{22} = 5 - 8 + 15 - 10 = +2$$

Pour la case (1,3) :

Sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	8	120	5	50	6	60	
Abattoir 1	8	120	5	50	6	60	120
Abattoir 2	15	30	10	50	12		80
Abattoir 3	3		9	20	10	60	80
Dj	150		70		60		280
							280

$$\bar{C}_{13} = C_{13} - C_{11} + C_{21} - C_{22} + C_{32} - C_{33} = 6 - 8 + 15 - 10 + 9 - 10 = +2$$

Pour la case (2,3) :

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	30	10	50	12	$\overline{C23} = +1$	80
Abattoir 3	3		9	20	10	60	80
Dj	150		70		60		280
							280

$$\overline{C23} = C23 - C22 + C32 - C33 = 12 - 10 + 9 - 10 = +1$$

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	30	10	50	12		80
Abattoir 3	3	$\overline{C31} = -11$	9	20	10	60	80
Dj	150		70		60		280
							280

$$\overline{C31} = C31 - C32 + C22 - C21 = 3 - 9 + 10 - 15 = -11$$

Alors : on peut transporter une quantité (Δ) par le chemin(3,1) de l'abattoir 3 vers la boucherie d'Alger, pour minimiser le cout globale de(-11) pour chaque unité transportée par ce chemin toute en respectant l'équilibre $S_i=D_j$.pour cela la quantité Δ représente la quantité minimale entre la case (2,1) et la case (3,2) comme suit :

Fondements de recherche opérationnelle

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	30- Δ	10	50 + Δ	12		80
Abattoir 3	3	+ Δ	9	20- Δ	10	60	80
Dj	150		70		60		280 280

Alors : $\Delta = \min(20, 30) = 20$

Le nouveau tableau de transport :

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	30-20=10	10	50 +20 =70	12		80
Abattoir 3	3	+20	9	20-20 =0	10	60	80
Dj	150		70		60		280 280

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	10	10	70	12		80
Abattoir 3	3	20	9		10	60	80
Dj	150		70		60		280 280

Le cout global = $8 \times 120 + 15 \times 10 + 10 \times 70 + 3 \times 20 + 10 \times 60 = 2470$

Pour une deuxième fois, on doit évaluer les coûts potentiels pour chaque case vide (chemin non utilisé).

A partir du tableau ci-dessus, nous commençons à évaluer les coûts potentiels :

$$\overline{C12} = C12 - C11 + C21 - C22 = 5 - 10 + 15 - 8 = +2$$

$$\overline{C13} = C13 - C33 + C31 - C11 = 6 - 10 + 3 - 8 = -9$$

$$\overline{C23} = C23 - C33 + C31 - C21 = 12 - 10 + 3 - 15 = -10$$

$$\overline{C32} = C32 - C31 + C21 - C22 = 9 - 3 + 15 - 10 = +11$$

Alors, on doit transporter une quantité Δ par la case (2,3) pour minimiser le cout global :

Δ représente le $\min(10,60)=10$

Fondements de recherche opérationnelle

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	10-Δ	10	70	12	+Δ	80
Abattoir 3	3	20+Δ	9		10	60-Δ	80
Dj	150		70		60		280 280

Destinations Sources	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120	5		6	
Abattoir 2	15	10-10=0	10	70	12	+10	80
Abattoir 3	3	20+10=30	9		10	60-10 =50	80
Dj	150		70		60		280 280

Le cout global== $8 \times 120 + 10 \times 70 + 12 \times 10 + 3 \times 30 + 10 \times 50 = 2370$

Pour une troisième fois, on doit évaluer les coûts potentiels pour chaque case vide (chemin non utilisé) .

A partir du tableau ci-dessus, nous commençons à évaluer les coûts potentiels :

$$\overline{C12} = 5 - 10 + 12 - 10 + 3 - 8 = -8$$

$$\overline{C13} = 6 - 10 + 3 - 8 = -9$$

$$\overline{C21} = 15 - 12 + 10 - 3 = +10$$

$$\overline{C32} = 9 - 10 + 12 - 10 = +1$$

Alors, on doit transporter une quantité Δ par la case (1,3) pour minimiser le cout global :

Δ représente le $\min(120,50)=50$

Sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120- Δ	5		6	
Abattoir 2	15		10	70	12	10	80
Abattoir 3	3	30+ Δ	9		10	50- Δ	80
Dj	150		70		60		280 280

Sources \ Destinations	Boucherie d'Alger 1		Boucherie d'Oran 2		Boucherie d'Annaba 3		Si
	Abattoir 1	8	120-50=70	5		6	
Abattoir 2	15		10	70	12	10	80
Abattoir 3	3	30+50 =80	9		10	50-50 =0	80
Dj	150		70		60		280 280

Le cout global= $8 \times 70 + 6 \times 50 + 10 \times 70 + 12 \times 10 + 3 \times 80 = 1920$

Pour la quatrième fois, on doit évaluer les coûts potentiels pour chaque case vide (chemin non utilisé) .

A partir du tableau ci-dessus, nous commençons à évaluer les coûts potentiels :

$$\overline{C12} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$$

$$\overline{C21} = 15 - 12 + 6 - 8 = +1$$

$$\overline{C32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = +10$$

$$\overline{C33} = 10 - 6 + 8 - 3 = +9$$

Nous remarquons que tous les couts sont positifs ou nuls veut dire que l'attribution des quantités de produit à des chemins non utilisés procurera des couts supplémentaires, cela veut dire que la solution actuelle est optimale

$X^*_{11}=70$	$X^*_{12}=0$	$X^*_{13}=50$	$Z^*=8 \times 70 + 6 \times 50 + 10 \times 70 + 12 \times 10 + 3 \times 80 = 1920$
$X^*_{21}=0$	$X^*_{22}=70$	$X^*_{23}=10$	
$X^*_{31}=80$	$X^*_{32}=0$	$X^*_{33}=0$	

Conclusion :

ce polycopié sur les fondements de la recherche opérationnelle a permis d'explorer les fondements et les applications pratiques de ces outils essentiels dans le domaine des sciences économiques, commerciales et de gestion, la programmation linéaire constitue un outil fondamental en recherche opérationnelle, particulièrement dans le domaine des sciences économiques. En permettant d'optimiser des ressources limitées face à des contraintes variées, elle offre aux décideurs des méthodes rigoureuses pour maximiser les profits, minimiser les coûts ou encore atteindre des objectifs spécifiques. Grâce à sa capacité à modéliser des situations complexes de manière claire et structurée, la programmation linéaire facilite la prise de décision éclairée dans des contextes variés, allant de la gestion de la production à la logistique, en passant par la finance et le marketing.

L'importance de la programmation linéaire réside également dans sa flexibilité et son applicabilité à divers problèmes économiques. En intégrant des variables multiples et des contraintes réalistes, elle permet d'analyser des scénarios variés et d'anticiper les impacts de différentes stratégies. De plus, l'avènement des technologies informatiques a considérablement élargi les possibilités d'application de la programmation linéaire, rendant accessible des solutions optimales même pour des problèmes de grande envergure. En conclusion, la programmation linéaire est un pilier des sciences économiques, offrant des solutions pratiques et efficaces pour la gestion des ressources et l'optimisation des performances. Son utilisation croissante dans les entreprises et les institutions souligne son rôle crucial dans la prise de décisions stratégiques, contribuant ainsi à la compétitivité et à la durabilité des organisations dans un environnement économique en constante évolution.

BIBLIOGRAPHIE

1. COHEN Vidal, *La recherche opérationnelle*, Paris 1995.
2. NAKHLA Michel, *Recherche opérationnelle, méthodes d'optimisation en gestion*, Paris 2010.
3. DESBAZEILLE Gérard, *exercices et problème de la recherche opérationnelle*, édition DUNOD, Paris 1976.
4. FAURE Robert, *Précis de recherche opérationnelle*, DUNOD, Paris 1979.
5. FAURE Robert, *Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle T1*, DUNOD, Paris 2005.
6. PAPILLON Jean claude, *Eléments de recherche opérationnelle*, Sirey, Paris 1992.
7. THIEL Daniel, *Recherche opérationnelle et management des entreprises*, Economica, Paris 1990.
8. PHELIZON Jean François, *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle*, Economica, Paris 1998.
9. ECOTO François, *Initiation à la recherche opérationnelle*, Ellipses, 1986..
10. AIDENE Mohamed, *Recherche opérationnelle : programmation linéaire*, édition les pages bleues, Alger 2005..
11. GIARD Vincent, *Processus productifs et programmation linéaire*, Economica, Paris 1998.
12. ACHER J, *Programmation linéaire*, 3^{ème} édition, DUNOD, Paris 1978.
13. CARON Philippe, *Programmation linéaire : méthodes et application*, DUNOD, Paris 1988.
14. DROESBEKE F, *Programmation linéaire par l'exemple*, Ellipses, Paris 1986.
15. Sari Triqui Lamia, *Polycopié du cours, " Recherche Opérationnelle "*, Faculté de TECHNOLOGIE, Université Aboubakr Belkaïd – Tlemcen –, septembre 2016
16. Pierre. Pesneau, *Programmation Linéaire : Cours I*, Université Bordeaux I ;
17. AMADJI Moussa, *cours de recherche opérationnelle et optimisation*, Département de Sécurité Industrielle, Université de Batna 2- Mostefa Ben Boulaïd, 2020/2021
18. Babacar Mbaye NDIAYE, Mouhamadou A.M.T. Baldé, *Cours Recherche Opérationnelle*, Département de Mathématiques de la Décision (DMD), Faculté des Sciences Economiques et de Gestion, Université Cheikh Anta Diop (UCAD) de Dakar, 2021/2022 ;