

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Maameri De Tizi-ouzou  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques



# *MÉMOIRE DE MASTER*

En vue de l'obtention d'un Master En Recherche Opérationnelle

## Thème

***CONTRÔLE OPTIMAL THÉORIES  
ET  
APPLICATIONS***

Présenté par :

AIDER Kahina

IMINE Mazighe

Président  
Rapporteur  
Examineur

M. BELHADJ Abdelaziz  
M. CHEBBAH Mohammed  
M. MERAKEB Abdelkader

U.M.M. Tizi-Ouzou.  
U.M.M. Tizi-Ouzou.  
U.M.M. Tizi-Ouzou.

Tizi-ouzou, Novembre 2016.

## *\* Remerciements \**

*Avant tout, nous remercions Dieu de nous avoir donné le courage et la  
foie pour mener à bien ce travail, malgré tous les obstacles.*

*Nos vifs et sincères remerciements vont a M<sup>r</sup> CHEBBAH MOHAMMED  
qui, en acceptant de diriger ce travail, nous a permis de profiter de ses  
conseils, son aide et ses encouragements, nous lui témoignons notre  
respectueuse gratitude.*

*Nos sincères remerciements s'adressent également au membres de jury  
pour avoir accepté d'examiner notre travail.*

*Nous tenons également à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou  
de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

*Merci beaucoup.*

※ *Dédicaces* ※

*Je dédie ce modeste travail :*

*Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde :  
Mon PÈRE et Ma MAMAN qui ont sacrifié les plus belles années de  
leurs vie pour me voir un jour réussir, et qui m'ont soutenu jusqu'à  
la fin.*

*A mes deux frère Aghiles et sofiane qui n'ont jamais  
cessé de m'encourager.*

*À mes chères GRANDS PARENTS.*

*À mes oncles et mes tantes, cousins et cousines.*

*À Mr BELHADJ et sa FAMILLE.*

*À Madame Bouslat, Zozo et Mr Gouadfel.*

*À notre PROMOTEUR qui nous a vraiment été d'un grand soutien.*

*À nos très chers amis(es) et camarades Dyhia, Imane, Sihem, Kikiwi,  
Fatiha, Ouafa, Hakima et Lyes...*

*À tous ceux qui m'ont soutenu de prés ou de loin.*

**KAHINA.**

*\* Dédicaces \**

*Il m'est un énorme plaisir de dédier ce travail :*

*Aux deux personnes les plus nobles et les plus chères au monde :  
Mon PÈRES et Ma MÈRE qui ont sacrifié les plus belles années de  
leurs vie pour me voir un jour réussir, et qui m'ont soutenu jusqu'à  
la fin.*

*À Mon Frère CHAOURAR et à Ma Soeur LILIA, qui n'ont jamais  
cessé de m'encourager.*

*À mes chères GRANDS PARENTS.*

*À Toute ma FAMILLE.*

*À celle qui berce mon coeur, à ma bien aimée KENZA.*

*À notre PROMOTEUR qui nous a vraiment été d'un grand soutien.*

*À mes très chers amis et camarades.*

*À tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.*

*MAZIGHE.*

# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iii
Introduction générale	1
<b>1 Généralités sur la théorie du contrôle optimal</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Théorie du contrôle et des systèmes de contrôle . . . . .	3
1.2.1 Objet de la commande . . . . .	3
1.2.2 Conditions initiales du système . . . . .	4
1.2.3 Le but de la commande . . . . .	4
1.2.4 Classes de commandes admissibles . . . . .	4
1.2.5 Critères de qualité . . . . .	5
1.3 Position du problème de contrôle optimal . . . . .	5
1.3.1 Temps optimal . . . . .	6
1.3.2 Coût optimal . . . . .	6
1.3.3 Problème de Mayer-Lagrange . . . . .	6
1.4 Contrôlabilité . . . . .	7
1.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires . . . . .	8
1.4.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes . . . . .	9
1.4.3 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires . . . . .	10
1.5 Principe du Maximum de Pontryagin . . . . .	10
1.6 Méthodes de résolution numérique . . . . .	13
1.6.1 Méthodes indirectes . . . . .	13
1.6.2 Méthodes directes . . . . .	13
1.7 Exemple [11] . . . . .	14
1.8 Conclusion . . . . .	17

<b>2</b>	<b>Méthode directe de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal</b>	<b>18</b>
2.1	Introduction . . . . .	18
2.2	Le cas discret . . . . .	18
2.2.1	Position du problème . . . . .	18
2.2.2	Notion de commandabilité . . . . .	20
2.2.3	Calcul de l'accroissement de la fonctionnelle . . . . .	21
2.2.4	Critère d'optimalité . . . . .	22
2.2.5	Critère de suboptimalité . . . . .	22
2.2.6	Méthode de résolution . . . . .	22
2.2.7	Exemple . . . . .	23
2.3	Le cas continu . . . . .	25
2.3.1	Position du problème . . . . .	25
2.3.2	Support-Contrôle . . . . .	27
2.3.3	Formule d'accroissement de la fonctionnelle . . . . .	27
2.3.4	Problème dual . . . . .	28
2.3.5	Calcul de la valeur de suboptimalité . . . . .	29
2.3.6	Critère d'optimalité . . . . .	29
2.3.7	Critère d' $\varepsilon$ -optimalité . . . . .	30
2.3.8	Détermination d'un support-contrôle de départ . . . . .	30
2.3.9	Méthode de résolution . . . . .	31
2.3.10	Exemple . . . . .	37
2.4	Conclusion . . . . .	40
	<b>Conclusion générale</b>	<b>41</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>

# Table des figures

1.1	Problème de contrôlabilité [11] . . . . .	7
1.2	Ensemble accessible [11] . . . . .	8
1.3	Trajectoires optimales. . . . .	15
1.4	Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte. . . . .	16
1.5	Trajectoire et commande optimales par la méthode directe. . . . .	17

---

# Introduction générale

Le contrôle optimal est une théorie qui vise à analyser les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Dans le monde réel, la théorie du contrôle est rencontrée sous forme de plusieurs variétés ayant des propriétés différentes, par exemples :

- Contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, boursiers, fluviaux,
- systèmes de freinage ABS, assistance à la conduite, réseaux informatiques, moteurs de recherches sur internet, thermostat,
- contrôle des systèmes médicaux automatisés, robotique, satellites, guidages aérospatiaux,
- contrôle des procédés chimiques, raffinage pétrolier, chaînes industrielles de montage,
- les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Cette théorie est non seulement répandue dans la vie réelle, mais elle est également un sujet important pour de nombreux travaux de recherches [11, 5, 8, 2, 7].

Historiquement, la théorie du contrôle optimal est très liée au calcul des variations, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol.

Le problème de contrôle optimal se décompose en deux parties :

Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut savoir d'abord si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Il existe une caractéristique très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman [4].

Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (maximum). La résolution du problème de contrôle optimal se fait par différentes méthodes. Parmi ces méthodes on peut citer :

- ◇ Le Principe du Maximum de Pontryagin,
- ◇ méthode directe de résolution d'un problème terminal d'un système dynamique linéaire...*etc*

Le travail est structuré comme suit :

Le premier chapitre sera consacré au fondement théorique du contrôle optimal en effectuant un état de l'art sur ses différentes notions. Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin [6, 9], formulé par L. S. Pontryagin en 1956.

Au second chapitre, nous étudions une méthode directe de résolution d'un système dynamique linéaire tout en donnant un exemple d'application pour le cas continu et le cas discret.

Enfin, le document se termine par une conclusion où des perspectives futures seront données.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## Généralités sur la théorie du contrôle optimal

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les notions de base du contrôle optimal (commande admissible, but de la commande, état initial du problème...*etc*) et la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires, tout en donnant un petit aperçu sur le Principe du Maximum de Pontryagin.

### 1.2 Théorie du contrôle et des systèmes de contrôle

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques,...*etc*. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'interconnexion de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Le problème général de contrôle optimal est constitué des données suivantes :

#### 1.2.1 Objet de la commande

Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que  $n$  variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système dépendant de celles-ci est une tâche très importante c'est l'étape de modélisation mathématique.

1. Les variables, nommées variables d'état seront notées  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Le système évolue dans le temps, donc les  $x_i$  sont des fonctions de  $t$ ,  $x_i(t)$ . Les  $n$  variables d'état vont

être gouvernées par  $n$  équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps  $T = [t_0, t^*]$ ; ce sont des équations de la forme générale :

$$\dot{x}_i = f^i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Les variables de contrôle seront notées  $u_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

### 1.2.2 Conditions initiales du système

La condition initiale du système,  $x_0 = x(t_0)$  est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, les composantes de  $x(t)$  et de  $x_0$  peuvent représenter physiquement : (la position, la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables).

### 1.2.3 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle optimal, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la condition initiale  $x_0 = x(t_0)$ , ( $x_0 \in M_0$ ) à une autre position  $x^* = x(t^*)$ , ( $x^* \in M_1$ ) où  $M_0$  est l'ensemble de départ, et  $M_1$  l'ensemble d'arrivée.

### 1.2.4 Classes de commandes admissibles

L'ensemble  $U$  est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non borné, borné ou du type bang-bang définit ci-dessous.

#### Commande bornée

La commande  $u(t)$  est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par des constantes  $a_j$  et  $b_j$ , par la forme suivante :

$$a_j \leq u_j(t) \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad t \in [t_0, t^*].$$

Si de plus  $a_j \leq u_j(t) \leq b_j$ , on peut remplacer  $u_j$  par  $v_j$  en posant  $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$  et ainsi  $v_j$  est aussi intégrable et l'on a  $-1 \leq v_j \leq 1$ . Donc lorsque  $U$  est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

#### Commande Bang-Bang

Un contrôle  $u \in U$  est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant  $t$  et chaque indice  $j = 1, \dots, m$ ; on a :

$$|u_j(t)| = 1.$$

### 1.2.5 Critères de qualité

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématique des exigences physiques du système.

Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule :

$$J(x, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt.$$

Cette fonctionnelle comporte deux parties,  $g(t^*, x^*)$  est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final  $t^*$  ; il a son importance lorsque  $t^*$  est libre, si non il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif  $\int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt$  dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps  $t$  mais sur tout des variables de contrôle  $u$ .

- Les variables nommées variables d'état seront notées  $x_i, i = 1, \dots, n$ . On a des systèmes qui évoluent dans le temps, donc les  $x_i$  sont des fonctions de temps notées :

$$x_i(t), \quad t \in [t_0, t^*].$$

- Les composantes du contrôle seront notées  $u_j(t), j = 1, \dots, m$  elles doivent être intégrables par rapport à  $t$ .
- Les  $n$  variables d'état vont être gouvernées par  $n$  équations différentielles du premier ordre nommées équations d'état de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t^*],$$

ou  $\dot{x}$  est le vecteur dérivé par rapport au temps  $t$  de toutes les composantes de  $x$ .

## 1.3 Position du problème de contrôle optimal

Dans cette partie de ce document, nous présentons la formule générale d'un problème de contrôle optimal. Pour tout contrôle  $u \in U$  on définit le coût de la trajectoire associée  $x(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t^*]$  par :

$$J(x, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt,$$

avec  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles sur  $[t_0, t^*]$ .

Donc la formule générale du problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} J(x, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u & (1), \\ \dot{x}_u(t) = f(t, x(t), u(t)) & (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 & (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 & (4), \\ u \in U, \quad t \in I = [t_0, t^*] & (5). \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Où  $M_0$  (ensemble de départ) et  $M_1$  (Ensemble d'arrivée) sont des sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 = x(t_0)$  est la position initiale du système (2),  $x(t^*)$  est sa position terminale. En pratique, (la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température,...etc). Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires  $x(t)$  solutions de  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ , qui minimise le coût  $J(x, u)$  en satisfaisant les contraintes.

### 1.3.1 Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque  $f_0(t, x, u) = 1$ ,  $g(t^*, x^*) = 0$ , et le temps final  $t^*$  est libre dans l'expression de

$$\min_u \int_{t_0}^{t^*} 1 dt.$$

### 1.3.2 Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final  $t^*$  est fixé dans l'expression

$$\min_u g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt.$$

**Remarque 1.3.1.** Il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualités, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.

### 1.3.3 Problème de Mayer-Lagrange

L'objectif du problème de Mayer-Lagrange est de minimiser le coût

$$J(t^*, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x, u) dt.$$

◇ Lorsque  $g = 0$  dans l'expression de la fonctionnelle  $J$ , on parlera d'un problème de Lagrange.

◇ Lorsque  $f_0 = 0$ , on parlera d'un problème de Mayer.

## 1.4 Contrôlabilité

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle optimal, elle a été introduite par Kalman [4] en 1960 pour des systèmes linéaires de la forme  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ . Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener en temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit (voir figure 1.1).

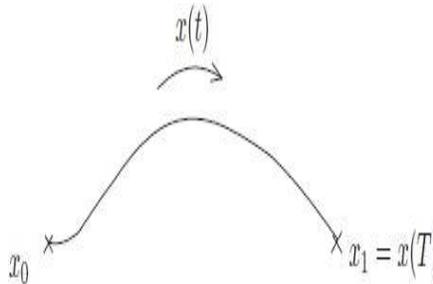


FIG. 1.1 – Problème de contrôlabilité [11]

Dans cette section, nous allons étudier cette dernière en présentant certaines de ses propriétés.

**Définition 1.4.1.** Considérons le système contrôlé (1.2) :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $t^* > 0$  est défini par :

$$Acc(x_0, t^*) = \{x_u(t^*), \quad u \in U\}.$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système (1.2) associée au contrôle  $u$ . Autrement dit  $Acc(x_0, t^*)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps  $t^*$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$  (voir figure 1.2).

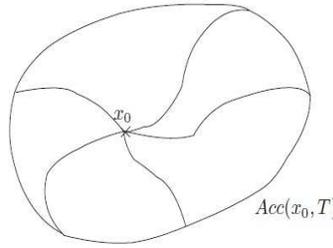


FIG. 1.2 – Ensemble accessible [11]

### 1.4.1 Controlabilité des systèmes linéaires

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(t_0) = x_0, \forall t \in I .$$

Où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $B$ ,  $A$  et  $r$  sont trois applications localement intégrable sur  $I$  à valeurs respectivement dans  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}^n$ .

$M_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles de dimension  $n$ , et  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de  $n$  lignes et de  $n$  colonnes.

L'ensemble des contrôles  $u$  considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur  $I$  à valeurs dans un sous ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$ .

Soit  $F(\cdot) : I \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$  la résolvante du système linéaire homogène  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  défini par :

$$\begin{cases} \dot{F} = A(t)F(t), \\ F(t_0) = Id. \end{cases}$$

Pour tout contrôle  $u$  le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , admet une unique solution  $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t^*} F(t)F(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \quad t \in I.$$

Si  $r = 0$  et  $x_0 = 0$ , la solution du système s'écrit :

$$x(t) = F(t) \int_{t_0}^{t^*} F(s)^{-1}B(s)u(s)ds,$$

elle est linéaire en  $u$ .

Le théorème suivant donne une condition générale de la contrôlabilité des systèmes linéaires.

**Théorème 1.4.1.** [5] *Le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$  est contrôlable en temps  $t^*$  si et seulement si la matrice*

$$C(t^*) = \int_{t_0}^{t^*} F(t)^{-1} B(t) B'(t) F(t)^{-1} dt,$$

*dite matrice de contrôlabilité, est inversible.*

**Remarque 1.4.1.** Cette condition ne dépend pas de  $x_0$ , c-à-d que si un système linéaire est contrôlable en temps  $t^*$  depuis  $x_0$ , alors il est contrôlable en temps  $t^*$  depuis tout point.

## 1.4.2 Controlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système (1.2) est dit autonome lorsque les matrices  $A$  et  $B$  ne dépendent pas de  $t$ . Dans ce cas la matrice  $F(t) = e^{At}$ , et la solution du système associée au contrôle  $u$  s'écrit :

$$\forall t \in I \quad x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_{t_0}^{t^*} e^{-As} (B(s)u(s) + r(s)) dt \right).$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contraintes sur le contrôle.

**Théorème 1.4.2.** [4] *On suppose que  $U = \mathbb{R}^m$ . Le système  $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$  est contrôlable en temps  $t^*$  si et seulement si la matrice*

$$C = B, AB, \dots, A^{n-1}B,$$

*est de rang  $n$ .*

**Remarque 1.4.2.** La matrice  $C$  est appelée matrice de *Kalman*, et la condition  $\text{rang } C = n$ , est appelée condition de *Kalman*.

**Exemple 1.4.1.** Le système suivant :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t) + r, \quad \text{avec } r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

est contrôlable car la matrice de *Kalman*  $C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang  $2 = n$ .

**Remarque 1.4.3.** Dans le cas où le contrôle  $u$  est contraint, c'est-à-dire il appartient à un sous ensemble  $U \subset \mathbb{R}^m$ , les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice  $A$ .

### 1.4.3 Contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept clé pour la compréhension des propriétés structurelles et qualitatives, comme la stabilisation. L'extension de la contrôlabilité au cas non-linéaire de dimension finie et infinie a suscité depuis plusieurs années une littérature considérable, qui n'a en rien épuisé ce sujet riche et varié.

Les auteurs dans leurs quasi-totalité, ont considéré des généralisations naturelles de

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non-linéaires.

**Proposition 1.4.1.** [11] *Considérons le système  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ ,  $x(0) = x_0$  avec  $f(x_0, u^0) = 0$ .*

*On note  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u^0)$  et  $B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u^0)$ , si :*

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

*Alors le système est localement contrôlable en  $x_0$ .*

**Remarque 1.4.4.** En général, le problème de contrôlabilité est difficile. Cependant, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité locale dans le cas des systèmes linéarisés.

## 1.5 Principe du Maximum de Pontryagin

Dans cette section nous présentons le principe du maximum de Pontryagin [6], qui a été formulé par le mathématicien russe Lev Semenovich Pontryaginen en 1956, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

Ce principe donne une condition nécessaire d'optimalité, il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune.

On considère le problème de contrôle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t^*, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (1), \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \quad (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 \quad (4), \\ u \in U, t \in I = [t_0, t^*] \quad (5). \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Avant d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

**Définition 1.5.1.** Le contrôle  $u$  est dit extrémal sur  $[t_0, t^*]$  si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (1.3) associée à  $u$  vérifie

$$x(t) \in \partial \text{Acc}(x_0, t^*), \quad t \in I = [t_0, t^*].$$

**Définition 1.5.2.** Un contrôle  $u_0(t)$ ,  $t \in [t_0, t^*]$  est dit optimal si  $u^0(t)$  est extrémal et  $J(u^0(t)) < J(u(t))$  pour tout contrôle extrémal (linéaire)  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t^*]$ .

**Théorème 1.5.1.** [11] *Considérons le système*

$$\forall t \in I, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

*Supposons que le domaine des contraintes noté  $\Omega$  est compact. Soit  $t^* > 0$ . Le contrôle  $u$  est extrémal sur  $I = [t_0, t^*]$  si et seulement si il existe une solution non triviale  $p(t)$ ,  $t \in I$ , de l'équation  $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$  telle que*

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{u \in U} p(t)B(t)u. \quad (1.4)$$

*pour presque tout  $t \in [t_0, t^*]$ .*

**Définition 1.5.3.** Le vecteur  $p(t) \in \mathbb{R}^n$  est appelé vecteur adjoint.

**Définition 1.5.4.** Dans ce cas, la fonction  $\gamma(t) = p(t)B(t)$  est appelée fonction de commutation.

**Définition 1.5.5.** Le temps  $t_c$  auquel le contrôle extrémal  $u(t)$ ,  $t \in [0, T]$  change de signe est appelé temps de commutation.

**Théorème 1.5.2.** [11] *Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Considérons le système de contrôle dans  $\mathbb{R}^n$*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.5)$$

*où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C_1$ , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Notons par  $U$  l'ensemble des contrôles admissibles  $u$  dont les trajectoires associées relient un point initial de  $M_0$  à un point final de  $M_1$  en temps  $t$ . On définit le coût*

$$J(t^*, u) = \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t))dt + g(t^*, x(t^*)),$$

où  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C_1$ ,  $x(\cdot)$  est la solution de (1.5) associée au contrôle  $u$ .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant  $M_0$  à  $M_1$  en minimisant le coût  $J$ . Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle  $u \in U$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[t_0, t^*]$ , alors il existe une application  $p(\cdot) : [t_0, t^*] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel  $p^0 \leq 0$  tel que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  est non trivial et tels que pour presque tout  $t \in [t_0, t^*]$ ,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.6)$$

$$\dot{p} = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.7)$$

où  $H(t, x, p, p^0, u) = p(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$  est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[t_0, t^*]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u). \quad (1.8)$$

Si de plus le temps final pour joindre  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition au temps final  $t^*$

$$\max_{u \in U} H(t^*, x(t^*), p(t^*), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t^*, x(t^*)). \quad (1.9)$$

Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de  $\mathbb{R}^n$  ayant des espaces tangents en  $x(t_0) = x_0 \in M_0$  et  $x(t^*) = x_1 \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp t_{x(0)}^* M_0, \quad (1.10)$$

$$p(t^*) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t^*, x(t^*)) \perp t_{x(t^*)}^* M_1. \quad (1.11)$$

**Remarque 1.5.1.** Si  $f$  et  $f_0$  ne dépendent pas du temps  $t$  c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien  $H$  ne dépend pas de  $t$  et on a

$$\forall t \in [t_0, t^*], \quad \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u) = Cste.$$

**Remarque 1.5.2.** La convention  $p^0 \leq 0$  conduit au principe du maximum. la condition  $p^0 \geq 0$  conduira au principe du minimum.

Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens, le lecteur est orienté vers les articles ([12, 13, 14]).

**Remarque 1.5.3.** Lorsqu'ils n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (1.8) devient  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ .

**Définition 1.5.6.** Les conditions (1.10) et (1.11) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint.

## 1.6 Méthodes de résolution numérique

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytique. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre. Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équations non linéaire ; on distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal, les méthodes directes et les méthodes indirectes.

### 1.6.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin ([6], [9]) qui donne une condition nécessaire d'optimalité, il faut vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toutes dimensions. Il existe également des approches probabilistes, ces méthodes consistent à exprimer le problème de commande optimale dans des espaces de mesure, puis à rechercher la commande optimale en tant que mesure d'occupation, qui est approchée par un nombre fini de ses moments. Cette méthode utilise des outils de géométrie algébrique et elle permet de réduire le problème de contrôle optimal à un problème d'optimisation de dimension finie. Pour plus d'informations, les lecteurs sont invités à lire l'article récent d'Emmanuel Trélat [11], ( Contrôle optimal : théorie et applications).

### 1.6.2 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support ([7, 5, 8, 2, 3]). Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre

méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là, on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée. La mise en oeuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas à étudier les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

## 1.7 Exemple [11]

Considérons le problème du temps minimal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = 0, \\ \dot{y}(t) = u(t), & y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Le contrôle  $u(t)$ ,  $t \in I = [0, T]$  vérifie  $|u(t)| \leq 1$ . Résoudre le problème de temps minimal pour atteindre le point final  $(0, -1)$ , en allant de l'origine  $(0, 0)$ .

Cherchons la solution théoriquement et puis avec les deux méthodes directe et indirecte. L'Hamiltonien du système (1.12) est

$$H(x(t), y(t), p_x(t), p_y(t), u) = p_x(t)y(t) + p_y(t)u + p^0.$$

où  $p_x$  et  $p_y$  sont les composantes du vecteur adjoint. Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = \frac{-\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y(t) = \frac{-\partial H}{\partial y} = -p_x(t). \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} p_x(t) = Cste = \gamma, \\ p_y(t) = -\gamma t + \mu. \end{cases}$$

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien :

$$H = p_x(t)y(t) + p_y(t)u + p^0.$$

alors quelque soit la valeur de  $p^0$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(p_y(t)u + p_x(t)y(t)),$$

par ailleurs la condition de maximum du principe du maximum donne

$$u = \text{sign}(p_y(t)).$$

De là, le contrôle extrémal sera le suivant :

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } p_y(t) < 0, \\ +1 & \text{si } p_y(t) > 0, \quad t \in I. \end{cases}$$

Les contrôles extrémaux ont en plus une commutation. Soit  $t_c$ , ce temps de commutation. La trajectoire obtenue pour  $u(t) = 1$  sur  $[0, t_c]$  et pour  $u(t) = -1$  sur  $[t_c, T]$  est :

✂ Si  $t \in [0, t_c]$ , on obtient  $y(t) = t$  et  $x(t) = \frac{1}{2}t^2$ .

✂ Si  $t \in [t_c, T]$ , on obtient  $y(t) = -t + 2t_c$  et  $x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t_c t - t_c^2$ .

Les trajectoires obtenues en prenant  $u = +1$  puis  $u = -1$  sont illustrées dans la figure (1.3).

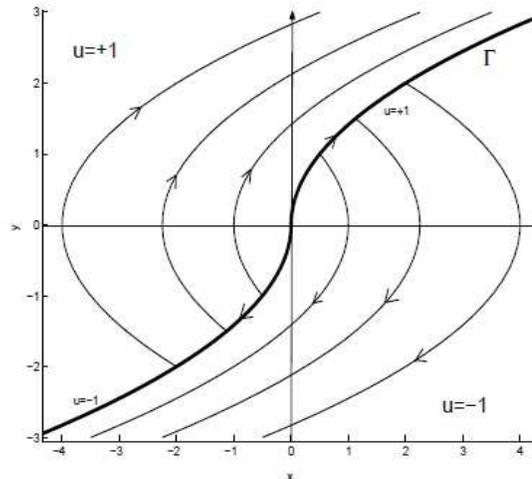


FIG. 1.3 – Trajectoires optimales.

Nous avons mis en oeuvre une méthode indirecte, les résultats sont tracés dans la figure (1.4).

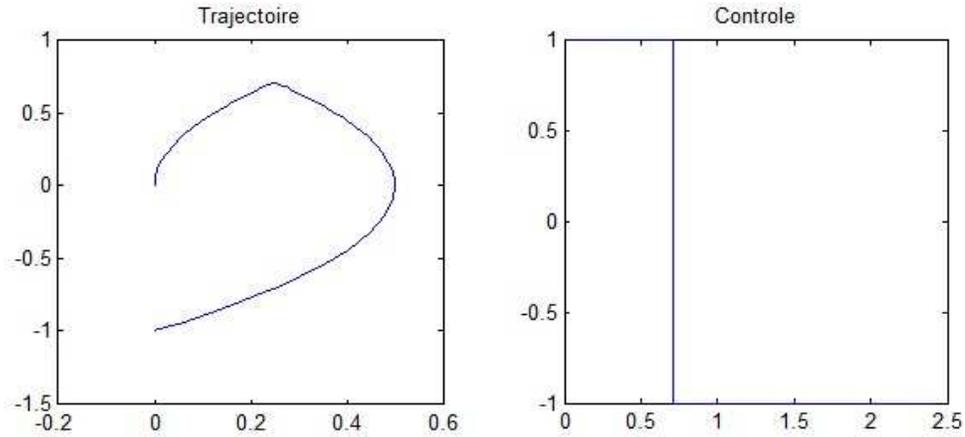


FIG. 1.4 – Trajectoire et commande optimales par la méthode indirecte.

Dans le cas d'une méthode directe, on discrétise la commande  $u(\cdot)$  et l'état  $x(\cdot)$  en utilisant la subdivision :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$$

Le problème (1.12) devient le problème suivant :

$$T \rightarrow \min$$

Sous les contraintes :

$$x[i + 1] = x[i] + \frac{T}{N}y[i],$$

$$y[i + 1] = y[i] + \frac{T}{N}u[i]$$

Les résultats d'un tel problème sont tracés dans la figure (1.5).

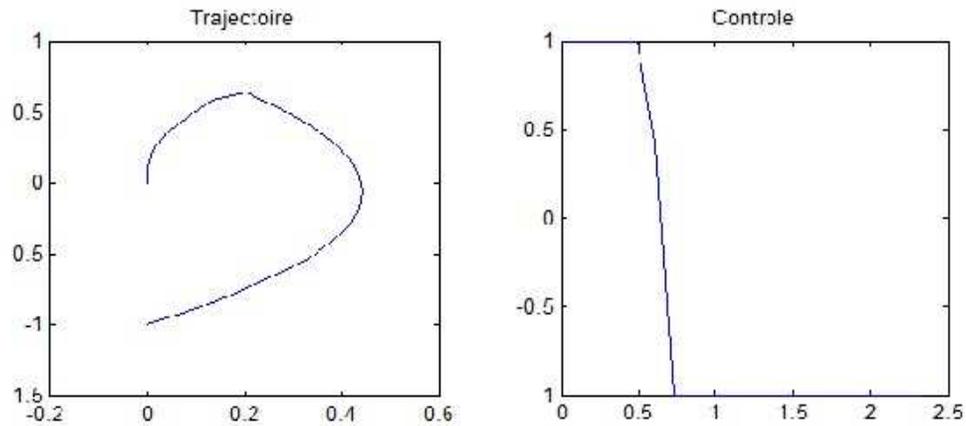


FIG. 1.5 – Trajectoire et commande optimales par la méthode directe.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la théorie du contrôle optimal tout en donnant ses différentes notions à savoir la contrôlabilité et le Principe du Maximum de Pontryagin. En tirant profit de plusieurs recherches déjà effectuées à ce sujet, nous avons clarifié et rappelé certaines définitions, extensions et généralisations ainsi que leurs paramètres fondamentaux et quelques résultats théoriques. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier une méthode directe de résolution des systèmes dynamique linéaires.

---

---

## CHAPITRE 2

---

# Méthode directe de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions une méthode de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal qui est la méthode adaptée. Nous donnons essentiellement des résultats théoriques ainsi que des exemples d'application pour le cas continu et le cas discret.

## 2.2 Le cas discret

Dans cette partie de ce document, nous étudions une méthode de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal pour le cas discret [2].

### 2.2.1 Position du problème

Considérons le système dynamique linéaire suivant :

$$J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.2)$$

$$Hx(t^*) = g, \quad (2.3)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [t_0, t^*]. \quad (2.4)$$

où :

- ◇  $x(t)$  est un  $n$ -vecteur décrivant la trajectoire du système à l'instant  $t$ ,
- ◇  $u(t)$  la commande d'entrée à l'instant  $t$  du système,
- ◇  $f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t)$ ,  $t \in [t_0; t^*]$ ,
- ◇  $f_*(t)$  et  $f^*(t)$  des fonctions définies sur  $T = [t_0; t^*]$ ,
- ◇  $A$  une  $n \times n$  matrice caractérisant l'état du système,
- ◇  $b$  un  $n$ -vecteur,
- ◇  $x_0$  la position initiale du système à l'instant  $t = t_0$ ,
- ◇ le système est caractérisé par un signal de sortie pour  $t = t^*$  :

$$Hx(t^*) = g,$$

- ◇  $H$  est une  $m \times n$  matrice avec  $\text{rang}H = m \leq n$ ,  $g$  un  $m$ -vecteur,
- ◇  $J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max_u$ , est un critère de qualité,
- ◇  $I = \{1, \dots, m\}$  : L'ensemble des indices des lignes,
- ◇  $J = \{1, \dots, n\}$  : L'ensemble des indices des colonnes.

**Définition 2.2.1.** Une commande  $u$  est dite impulsive sur l'intervalle  $[t_0, t^*]$  si :

$$u(t) = u_i = \text{constante}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i = (0, \dots, N), \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_{N+1} = t^*, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = h > 0,$$

$h$  est le pas de quantification.

En utilisant la formule de cauchy, la solution du système dynamique (2.2) s'écrit sous la forme :

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_{t_0}^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], \quad (2.5)$$

où  $F(t) = \exp(At)$ ,  $t \in T$ , est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{F} = AF, \\ F(t_0) = Id, \quad t \in T. \end{cases}$$

Comme la commande  $u$  est impulsive, l'équation (2.5) prend la forme suivante :

$$x(i+1) = x(\tau_{i+1}) = F(h)[x(i) + \int_0^h F^{-1}(\tau)bu(i)d\tau],$$

où

$$u(i) = u(\tau_i), \quad \tau_i \in T, \quad i = (0, \dots, N), \quad T = \bigcup_{i=0}^N [\tau_i, \tau_{i+1}], \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_{N+1} = t^*, \quad \tau_{i+1} - \tau_i = h > 0.$$

En posant  $D = \exp(Ah) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ah)^n}{n!}$  et  $d = D \cdot \int_0^h F^{-1}(\tau)b \, d\tau$ , on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \\ x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ Hx(t^*) = g, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), \quad t \in T = [t_0, t^*]. \end{cases} \quad (2.6)$$

avec  $x(t^*)$  vérifiant la propriété suivant :

$$x(t^*) = D^{\frac{t^*}{h}} x_0 + \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t).$$

Donc cela va nous permettre d'établir une autre formulation équivalente du problème (2.6) comme suit :

$$\begin{cases} J(u) = (c' \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t) + c' D^{\frac{t^*}{h}} .x_0) \longrightarrow \max_u, \\ H \sum_{t \in T} D^{\frac{t^*-t}{h}-1} du(t) = g - HD^{\frac{t^*}{h}} x_0, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), \quad t \in T = [t_0, t^*]. \end{cases} \quad (2.7)$$

où

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

## 2.2.2 Notion de commandabilité

Un processus de contrôle décrit par l'équation (2.2) est dit commandable, si pour toute paire  $x_0, x^* \in \mathbb{R}^n$ , il existe une commande mesurable bornée  $u(t)$  sur un intervalle fini  $[t_0, t^*]$  qui ramène l'objet sur la trajectoire  $x(t)$  du point  $x(t_0) = x_0$  au point  $x(t^*) = x^*$ , (c'est-à-dire de la position initiale à la position finale).

**Théorème 2.2.1.** [2] *Un système linéaire de  $\mathbb{R}^n$  décrit par l'équation (2.2) est commandable si et seulement si le rang de la matrice  $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b]$  est égal à  $n$ .*

**Remarque 2.2.1.** On impose au système linéaire de  $\mathbb{R}^n$  décrit par l'équation (2.2) une stabilité ( $\lim A^v = 0$  quand  $v \rightarrow \infty$ ).

Dans toute la suite, on fera hypothèse de la stabilité du système linéaire (2.2) pour  $v=n$ .

**Définition 2.2.2.** La commande  $u(t)$  et sa trajectoire  $x(t)$  sont admissible, s'ils vérifient les contraintes du problème (2.7).

La commande admissible  $u^0$  est optimal si  $\max J(u) = J(u^0)$ .

La commande admissible  $u^\varepsilon$  est  $\varepsilon$ -optimal si  $J(u^0) - J(u^\varepsilon) < \varepsilon$ .

**Définition 2.2.3.** Le support contrôle  $\{u, \tau_B\}$  est dit non dégénéré si

$$f_*(t) < u(t) < f^*(t).$$

### 2.2.3 Calcul de l'accroissement de la fonctionnelle

Considérons un support contrôle non dégénéré  $\{u, \tau_B\}$  et une autre commande admissible  $\bar{u} = u + \Delta u$  avec  $\bar{x} = x + \Delta x$  sa trajectoire correspondante.

L'accroissement de la fonctionnelle est

$$\Delta J = J(\bar{u}) - J(u) = - \sum_{t \in T} \Delta(t) \cdot \Delta u(t).$$

Le maximum de cet accroissement sous les contraintes :

$$f_*(t) - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^*(t) - u(t), \quad \forall t \in T.$$

est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f^*(t) - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ \Delta u(t) = f_*(t) - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \end{cases} \quad t \in T,$$

est égal à :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \sum_{t \in T_H^+} \Delta(t)(u(t) - f_*(t)) + \sum_{t \in T_H^-} \Delta(t)(u(t) - f^*(t)), \quad (2.8)$$

appelée valeur de suboptimalité du support contrôle  $\{u, \tau_B\}$ ,

où

$$T_H^+ = \{t \in T_H / \Delta(t) \geq 0\}, \quad T_H^- = \{t \in T_H / \Delta(t) \leq 0\}.$$

Il en résulte que pour  $\bar{u} = u^0$ , on obtient

$$0 \leq J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B). \quad (2.9)$$

## 2.2.4 Critère d'optimalité

**Théorème 2.2.2.** [2] *Les relations*

$$\begin{cases} u(t) = f^*(t), & \text{si } \Delta(t) \leq 0, \\ u(t) = f_*(t), & \text{si } \Delta(t) \geq 0, \\ f_*(t) \leq u(t) \leq f^*(t), & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T_H, \end{cases} \quad (2.10)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence elles sont nécessaires pour l'optimalité du support contrôle  $\{u, \tau_B\}$ .

## 2.2.5 Critère de suboptimalité

**Théorème 2.2.3.** [2] *Pour  $\varepsilon > 0$  donné. Pour l' $\varepsilon$ -optimalité de la commande  $u$ , il est suffisant de trouver un tel support  $\tau_B$  pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :*

$$\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon.$$

## 2.2.6 Méthode de résolution

Dans ce cas, il suffit de résoudre le problème (2.7) par la méthode adaptée, une fois la commande optimale obtenue, on cherchera la trajectoire  $x(t)$  correspondante à partir de l'expression suivante :

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ce qui nous permet d'écrire l'algorithme suivante :

### Algorithme de résolution

- ◇ Tester la commandabilité du système, dans le cas positif continuer.
- ◇ Sinon arrêter le processus le système n'est pas commandable.
- ◇ Tester la stabilité du système dans le cas positif, continuer.
- ◇ Sinon arrêter le processus le système n'est pas stable.
- ◇ Poser le problème (2.6) à résoudre.
- ◇ Écrire (2.6) sous forme (2.7).
- ◇ Résoudre (2.7) par la méthode adaptée.
- ◇ Calcul de la trajectoire  $x(t)$  grâce à la solution obtenue et de la formule

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

### 2.2.7 Exemple

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), \\ Hx(t^*) = g, \\ |u(t)| \leq 2.5, \quad t \in T = [0, 6]. \end{cases}$$

avec

$$c' = (2 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0 \ 4),$$

$$b' = (0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2),$$

$$g' = (0.1 \ 0.18 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.3),$$

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a le  $\text{rang}[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 6$ , donc on continue le processus. De plus  $A^n = [0]$ .

Il en résulte que :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & \frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 & -\frac{1}{120}t^5 \\ 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 & \frac{1}{24}t^4 \\ 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec un pas de quantification  $h = 1$ , alors

$$D = \exp(Ah) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 & 0.01041 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 & 0.0416 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 & 0.166 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$d = D \int_0^h F^{-1}(s) b ds = \begin{pmatrix} 0.2180 \\ -0.7166 \\ 1.7083 \\ 1.666 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas le problème devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 574.9943u(0) + 304.6499u(1) + 152.8055u(2) + 72.7944u(3) + 33.9499u(4) + \\ 17.6055u(5) + 169.5 \rightarrow \max, \\ \\ -436.9943u(0) - 202.6499u(1) - 80.8055u(2) - 24.7944u(3) - 3.9499u(4) + 0.3944u(5) = 111.7, \\ -427.0638u(0) - 209.5582u(1) - 88.5527u(2) - 27.7138u(3) - 1.7083u(4) + 5.7972u(5) = 117.98, \\ 489.5276u(0) + 212.5166u(1) + 73.0055u(2) + 12.3277u(3) - 8.1833u(4) - 11.1944u(5) = -115.2, \\ -73.0777u(0) + 17.4333u(1) + 42.4444u(2) + 38.6222u(3) + 26.6333u(4) + 15.1444u(5) = -14.9, \\ -1124.688u(0) - 544.9998u(1) - 235.3110u(2) - 86.2888u(3) - 24.5999u(4) - 4.9110u(5) = 301.5, \\ \\ -2.5 \leq u(0) \leq 2.5, \\ -2.5 \leq u(1) \leq 2.5, \\ -2.5 \leq u(2) \leq 2.5, \\ -2.5 \leq u(3) \leq 2.5, \\ -2.5 \leq u(4) \leq 2.5, \\ -2.5 \leq u(5) \leq 2.5, \end{array} \right.$$

La solution de départ est :

$$u' = ( -0.25002 \quad 0.7126 \quad -1.9159 \quad 0 \quad 1.9149 \quad -1.0086 ), \quad J_B = \{1, 2, 3, 5, 6\}.$$

La solution optimale est :

$$\bar{u} = ( -0.30208 \quad 0.98806 \quad -2.5 \quad -0.6292 \quad 1.55304 \quad -0.9081 ), \quad J_B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

La trajectoire  $x(t)$  est donnée par la formule

$$x(t+h) = Dx(t) + du(t),$$

ce qui donnera :

x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)
0	-0.1234	-0.5938	-0.01203	0.1411	0.3622
0	-0.3913	-0.0619	0.6846	-0.3347	-0.28706
0	-0.8654	2.1162	-1.2249	-0.9656	1.3985
0	-0.5069	3.0782	-0.6153	-1.5063	0.5709
0	0.0937	3.4537	-1.6742	-2.4147	0.8747
1	0.3958	2.3719	-2.62804	-1.3696	1.7364

## 2.3 Le cas continu

Dans cette section, nous étudions une méthode de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal dans le cas continu [2, 5].

### 2.3.1 Position du problème

Considérons le problème terminal de commande optimale suivant :

$$J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \tag{2.11}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.12}$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{2.13}$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [t_0, t^*]. \tag{2.14}$$

où :

- ◇  $J(u)$  est le critère de qualité,
- ◇  $A(i, j)$  est une  $n \times n$  matrice caractérisant le système dynamique,
- ◇  $b(j)$  est un  $n$ -vecteur de commande donné,
- ◇  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système,
- ◇  $H(i, j)$  est une matrice  $m \times n$  de rang  $m \leq n$ ,
- ◇  $g$  est un  $m$ -vecteur représentant le signal de sortie au temps  $t^*$ ,
- ◇  $I = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des indices lignes,
- ◇  $J = \{1, \dots, m\}$  l'ensemble des indices colonnes,
- ◇  $u(t)$  est une commande constante par morceaux, bornée par  $f_*, f^* \in \mathbb{R}^n$ ,

◇  $c = c(j)$  est le  $n$ -vecteur des coûts.

Notre problème consiste à trouver la commande admissible  $u^0$  qui avec la trajectoire optimale  $x^0$ , maximise le critère de qualité :

$$J(u^0) = c'x^0(t^*) = \max c'x(t^*) = \max J(u).$$

En utilisant la formule de cauchy, la solution du système dynamique (2.12) s'écrit sous la forme

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_{t_0}^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], \quad (2.15)$$

où  $F(t)$ ,  $t \in T$ , est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{F} = AF, \\ F(t_0) = Id, \quad t \in T. \end{cases}$$

En utilisant la solution (2.15), le problème (2.11)-(2.14) devient un problème de la seule variable  $u(t)$ ,  $t \in T$  :

$$J(u) = c'x(t^*) = c'F(t^*)x_0 + \int_{t_0}^{t^*} c(t)u(t)dt \rightarrow \max_u, \quad (2.16)$$

$$\int_{t_0}^{t^*} \phi(t)u(t)dt = g - HF(t^*)x_0, \quad (2.17)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad (2.18)$$

où

$$\begin{cases} c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b, \\ \phi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b, \quad t \in T. \end{cases} \quad (2.19)$$

**Définition 2.3.1.** Toute commande  $u(t)$  vérifiant les contraintes

$$Hx(t^*) = g, \quad f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [t_0, t^*],$$

est dite commande admissible du problème (2.11)-(2.14).

Une commande admissible  $u^0 = u^0(t)$  est alors dite optimale si et seulement si :

$$J(u^0) = \max_{f_* \leq u(t) \leq f^*} J(u), \quad (2.20)$$

et elle est  $\varepsilon$ -optimale si :

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0). \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Support-Contrôle

**Définition 2.3.2.** L'ensemble  $T_B = \{T_i = [\tau_i, \tau^i], T_i \subset T, i = \overline{1, m} / [\tau_i, \tau^i] \cap [\tau_j, \tau^j] = \emptyset, \forall i \neq j\}$  est appelé support généralisé du problème (2.11)-(2.14) si le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x(t_0) = x_0, \\ Hx(t^*) = 0, & t \in T. \end{cases} \quad (2.22)$$

n'admet pour  $u(t) \equiv 0, t \in T_H = T/T_B$  que la solution triviale  $u(t) \equiv 0, t \in T_B$ , mais pour tout intervalle  $T^* = [\tau_*, \tau^*], T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$  et

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in T_H/T^*, \\ u^*, & t \in T^*. \end{cases}$$

le système (2.22) admet une solution non triviale

$$u(t) \neq 0, \quad t \in T_B \cup T^*$$

dans la classe des commandes constantes sur  $T_i, i = \overline{1, m}$ .

### 2.3.3 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit  $\{u, \tau_B\}$  un support-contrôle de départ et  $x(t)$  la trajectoire correspondante. En utilisant le support  $\tau_B$ , on construit le vecteur potentiel :

$$v' = c'_B \phi_B^{-1}, \quad (2.23)$$

et la co-commande (vecteur des estimations) :

$$\Delta(t) = -\psi'(t)b, \quad t \in T, \quad (2.24)$$

où  $\psi(t)$  est la solution du système conjuguée

$$\dot{\psi}(t) = -A'\psi, \quad \psi(t^*) = c - H'v. \quad (2.25)$$

$\Delta(t)$  peut être écrite d'une autre manière :

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -\psi'(t)b = -((c - H'v)F(t^*)F^{-1}(t))'b \\ &= v'HF(t^*)F^{-1}(t)b - c'F(t^*)F^{-1}(t)b \\ &= v'\phi(t) - c(t) \end{aligned}$$

où

$$\phi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b,$$

et

$$c(t) = c'(t)F(t^*)F^{-1}(t)b,$$

d'où

$$\Delta(t) = v'\phi(t) - c(t), \quad t \in T. \quad (2.26)$$

Soit  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$  une autre commande admissible et  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ ,  $t \in T$ , la trajectoire correspondante associée.

Déterminons l'accroissement de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) = \int_{t_0}^{t^*} c(t)\Delta u(t)dt, \\ &= \int_{t_0}^{t^*} (-\Delta(t) + v'\phi(t))\Delta u(t)dt, \\ &= - \int_{t_0}^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)dt + \int_{t_0}^{t^*} v\phi(t)\Delta u(t)dt. \end{aligned}$$

De l'admissibilité de  $u$  et  $\bar{u}$ , on a :

$$\int_{t_0}^{t^*} v'\phi(t)\Delta u(t)dt = 0,$$

Donc

$$\Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t^*} \Delta(t)\Delta u(t)dt. \quad (2.27)$$

### 2.3.4 Problème dual

Définissons le problème dual du problème (2.11)-(2.14) :

$$\begin{cases} L(\zeta, v, \omega) = \bar{b}'\zeta - \int_{t_0}^{t^*} v(t)f_*dt + \int_{t_0}^{t^*} \omega(t)f^*dt \rightarrow \min, \\ \zeta\phi(t) - v(t) + \omega(t) = c(t), \\ v(t) \geq 0, \omega(t) \geq 0, \quad t \in T, \end{cases}$$

où

$$\bar{b} = g - HF(t^*)x_0.$$

Les fonctions  $v(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $t \in T$  pour  $v(I) = \zeta(I)$  sont définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} v(t) = \Delta(t), \quad \omega(t) = 0, & \text{si } \Delta(t) \geq 0, \\ v(t) = 0, \quad \omega(t) = -\Delta(t), & \text{si } \Delta(t) \leq 0, \end{cases}$$

elles forment un plan dual du problème (solution admissible du dual).

Définissons par  $(\zeta^0, v^0(t), \omega^0(t))$ ,  $t \in T$  la solution optimale.

### 2.3.5 Calcul de la valeur de suboptimalité

On définit les ensembles suivant :

$$T^+ = \{t \in T, \Delta(t) > 0\},$$

$$T^- = \{t \in T, \Delta(t) < 0\}.$$

De l'admissibilité de la nouvelle commande  $\bar{u}(t)$ , on déduit :

$$f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), \quad (2.28)$$

Le maximum de la fonctionnelle (2.27) sous les contraintes (2.28) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f_* - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \Delta u(t) = f^* - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T. \end{cases} \quad (2.29)$$

est égal à :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - f_*)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - f^*)dt, \quad (2.30)$$

$\beta(u, \tau_B)$  appelé valeur de suboptimalité du support-contrôle  $\{u, \tau_B\}$ .

De ce qui précède, on a toujours :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B),$$

pour tout  $\bar{u}$ , et pour tout  $\bar{u} = u^0$ , on obtient :

$$J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B).$$

### 2.3.6 Critère d'optimalité

**Théorème 2.3.1.** [3] Pour l'optimalité du support-contrôle  $\{u, \tau_B\}$ , les relations :

$$\begin{cases} \Delta(t) > 0, & \text{si } u(t) = f_*, \\ \Delta(t) < 0, & \text{si } u(t) = f^*, \\ \Delta(t) = 0, & \text{si } f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T. \end{cases} \quad (2.31)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires.

**Remarque 2.3.1.** Le critère d'optimalité peut être sous la forme traditionnelle du principe du maximum de pontryagin. Pour cela en utilisant la fonction hamiltonienne on obtient :

$$H(x, \psi, u) = \psi'(Ax + bu),$$

La condition du maximum :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t \in T, \quad (2.32)$$

est suffisante, et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle  $\{u, \tau_B\}$ .

### 2.3.7 Critère d' $\varepsilon$ -optimalité

**Théorème 2.3.2.** [5] Pour tout  $\varepsilon \geq 0$ , la commande admissible  $u(t)$ ,  $t \in T$  est  $\varepsilon$ -optimale si et seulement s'il existe un tel support  $\tau_B$  sur lequel le long de  $u(t)$  et des solutions  $x(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  des systèmes direct conjugué, la condition  $\varepsilon$ -maximum est vérifiée :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u(t)) - \varepsilon(t), \quad t \in T, \quad (2.33)$$

avec  $\int_{t_0}^{t^*} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon$ .

**Remarque 2.3.2.** Pour  $\varepsilon = 0$ , le principe  $\varepsilon$ -maximum devient le principe traditionnel du maximum.

### 2.3.8 Détermination d'un support-contrôle de départ

Pour déterminer un support-contrôle de départ admissible, on prend la commande  $u(t)$ ,  $t \in T$  vérifiant la contrainte

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T.$$

Par la suite, on détermine la trajectoire correspondante  $x(t)$ ,  $t \in T$ , solution de

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0.$$

Si la condition  $Hx(t^*) = g$  est vérifiée, alors  $u(t)$ ,  $t \in T$  est une commande admissible.

Sinon, on ajoute une variable artificielle pour avoir un support de départ, la méthode des deux phases (phase 1) ou M-méthode [] permet de déterminer la solution initiale du problème.

Quant au support  $\tau_B$ , on le choisit de manière à avoir  $|\phi_B| \neq \emptyset$ , et si on ne peut pas déterminer un tel support, on démarre l'algorithme à partir de  $\tau_B = \emptyset$  avec  $\det \phi_B(t) \neq 0$ .

### 2.3.9 Méthode de résolution

Soit  $\{u, \tau_B\}$  un support-contrôle de départ, une itération de l'algorithme  $\{u, \tau_B\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  se fait en trois étapes de tel sorte que  $J(\bar{u}) \geq J(u)$  :

1. Changement de commande :  $u \rightarrow \bar{u}$ .
2. Changement de support :  $\tau_B \rightarrow \bar{\tau}_B$ .
3. Procédure finale.

#### Changement de commande

Soit  $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$ ,  $t \in T$  une autre commande admissible, où  $\Delta u(t)$ ,  $t \in T$  est la direction, et  $\theta$  le pas maximal le long de cette direction, qui seront trouvés comme solutions du problème :

$$\begin{cases} \Delta J(u) = -\theta \int_{t_0}^{t^*} \Delta(t) \Delta u(t) dt \rightarrow \max_{\theta, \Delta u(t)}, \\ \int_{T^*} \phi(t) \theta \Delta u(t) dt = 0, \\ f_* - u(t) \leq \theta \Delta u(t) \leq f^* - u(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.34)$$

Choisissons les nombres :  $\alpha > 0$ ,  $h > 0$  (paramètre de la méthode), et construisons les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T, \quad |\Delta(t)| < \alpha\}, \quad T_1 = \{t \in T, \quad |\Delta(t)| \geq \alpha\} = T/T_0.$$

Comme  $\Delta(t) = 0$ ,  $t \in T_B$  alors  $T_B \subset T_0$ .

Subdivisons l'ensemble  $T_0$  en sous ensembles :

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N},$$

tel que :

$$[\tau_j, \tau^j[ \cap [\tau_i, \tau^i[ = \emptyset, \quad \forall i \neq j \text{ et } \tau^j - \tau_j = h.$$

posons :

$$u(t) = \text{cnst}, \quad t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N}.$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} f^* - u(t), & \text{si } \Delta(t) \leq -\alpha; \\ f_* - u(t), & \text{si } \Delta(t) \geq \alpha, \quad t \in T_1. \end{cases} \quad (2.35)$$

Faisons un changement de variables :

$$l_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t), & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N}, \\ \theta, & \text{pour} \quad j = N + 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

où  $j=N+1$  est un indice supplémentaire correspondant à l'ensemble  $T_1$ . Calculons les quantités suivantes :

$$g_j = \begin{cases} \int_{\tau_i}^{\tau^i} \Delta(t) dt, & j = \overline{1, N}, \\ \int_{\tau_i}^{\tau^i} \Delta(t) \Delta u(t) dt, & j = N + 1. \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \int_{T_1} \phi(t) dt, & j = \overline{1, N}, \\ \int_{T_1} \phi(t) \Delta u(t) dt, & j = N + 1. \end{cases}$$

et prenons :

$$f_{*j} = f_* - u_j, \quad f_j^* = f^* - u_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

avec :

$$0 \leq \theta \leq 1.$$

soit alors :

$$f_{*N+1} = 0 \quad \text{et} \quad f_{N+1}^* = 1.$$

en utilisant les quantités précédentes, le problème (2.34) devient un problème de programmation linéaire :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} g_j l_j \rightarrow \max_{l_j}, \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j l_j = 0, \\ f_{*j} \leq l_j \leq f_j^*, \quad j = \overline{1, N+1}. \end{cases} \quad (2.37)$$

En prenant comme plan de départ  $\{l = 0, J_B\}$ , on résout par la méthode adaptée le problème (2.37) où :

$$\phi_B = \phi(J_B) = (q_j, j \in J_B), \quad J_B = \{j \in \{1, \dots, N+1\} / T_j \subset T_B\}.$$

où :

$$q_j = \int_{\tau_j}^{\tau^{j+h}} \phi(t) dt, \quad j = \overline{1, N}.$$

Au bout d'un certain nombre d'itérations, nous aboutissons à une solution optimale  $\{\bar{l}, \bar{J}_B\}$ , donc la nouvelle commande sera :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + l_{N+1} \Delta u(t), & t \in T_1, \\ u(t) + l, & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N}. \end{cases}$$

La commande  $\bar{u}$  ainsi construite vérifie l'inégalité :

$$J(\bar{u}) \geq J(u).$$

Si l'indice  $(N + 1)$  n'appartient pas à  $\bar{J}_B$ , alors on pose  $\bar{J}_B = J_B$ . Sinon on l'exclut du support  $\bar{J}_B$  en utilisant la méthode dual [5]. Pour cela, on cherche la nouvelle co-commande :

$$\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma\delta(t),$$

où  $\delta(t)$  est la direction de changement de support et  $\sigma$  le pas le long de cette direction.

Déterminons  $j_*$  tel que :

$$\sigma_{j_*} = \min \sigma_j, \quad j \in J/J_B.$$

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-\bar{\Delta}_j}{\delta_j}, & \text{si } \delta_j \bar{\Delta}_j \leq 0, \quad \delta_j \neq 0, \\ 0, & \text{si } \Delta_j = 0, \quad u(t) \neq f_*, \quad \delta_j > 0, \text{ ou } \Delta_j = 0, \quad u(t) \neq f^*, \quad \delta_j < 0, \quad j \in J_H \\ \infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

la direction sera calculée de la manière suivante :

$$\delta_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{sur } T_B/t_{N+1}, \\ 1, & \text{si } \bar{u}(t) = f_*, \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t) = f^*. \end{cases}$$

$$\Delta_j = (g_j, \quad j \in \bar{J}_B)' \phi^{-1}(\bar{J}_B) q_j - g_j.$$

Le nouveau support du problème (2.37) sera alors :

$$\tilde{J}_B = (\bar{J}_B/N + 1) \cup \{j_*\}.$$

En utilisant ce dernier support, on calcule le support du problème initial (2.34) en posant :

$$\tilde{\tau}_B = \{\tau_j, \quad j \in \tilde{J}_B\},$$

et construisons la matrice :

$$\phi_B = (\phi(t_j), \quad j \in \tilde{J}_B) = \phi(\tilde{\tau}_B),$$

par suite, on a la nouvelle valeur de suboptimalité correspondant à  $\tilde{\tau}_B$ ,  $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B)$  :

- Si  $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) = 0$  alors  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$  est une commande optimale.
- Si  $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) \leq \varepsilon$  alors  $\bar{u}(t)$ ,  $t \in T$  est une commande  $\varepsilon$ -optimale.
- Si  $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) > \varepsilon$  alors on passe soit à une nouvelle itération en démarrant avec  $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$ ,  $\bar{\alpha} < \alpha$ ,  $\bar{h} < h$ , ou à la procédure de changement de support.

### Changement de support

Soit  $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$  le support-contrôle trouvé précédemment avec  $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) > \varepsilon$ . En utilisant le support  $\tilde{\tau}_B$ , on construit la solution  $\tilde{\psi}(t)$ ,  $t \in T$  du système conjugué (2.26), posons :

$$\tilde{\Delta}(t) = -\tilde{\psi}'(t)b, \quad t \in T.$$

et calculons la quasi-commande suivante :

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} f^*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0, \\ f_*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0, \\ \in [f_*, f^*], & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \end{cases} \quad t \in T. \quad (2.38)$$

et la trajectoire correspondante  $\chi = (\chi(t)$ ,  $t \in T)$  solution de :

$$\dot{\chi} = A\chi + b\tilde{w}, \quad \chi(0) = x_0,$$

Si  $H\chi(t^*) = g$ , alors  $\tilde{w}(t)$ ,  $t \in T$  est optimale pour le problème (2.11)-(2.14).

Si  $H\chi(t^*) \neq g$ , construisant alors le vecteur :

$$\lambda(\tilde{T}_B) = \phi^{-1}(\tilde{T}_B)(g - H\chi(t^*)). \quad (2.39)$$

Si  $\lambda(\tilde{T}_B) = 0$ , alors la quasi-commande  $\tilde{w}$  construite par le support  $\tilde{\tau}_B$  est optimale pour le problème (2.11)-(2.14).

Sinon calculons  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\|$ , pour  $\mu > 0$ , paramètre de la méthode, deux cas peuvent se présenter :

1. Si  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| > \mu$ , alors on change  $\tilde{\tau}_B$  par la méthode duale.
2. Si  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| < \mu$ , on passe à la procédure finale.

### Méthode duale[5]

Soit  $t_1 \in \tau_B$ ,

$$|\lambda(t_1)| = \max |\lambda(t)|, \quad t \in \tilde{T}_B,$$

on à :

$$\bar{\Delta}(t) = \bar{v}'\varphi(t) - c(t), \quad \Delta(t) = v'\varphi(t) - c(t),$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(t) &= \Delta(t) + \sigma^0 \delta(t) = \bar{v}' \varphi(t) - c(t) \\ &= v' \varphi(t) - c(t) + \sigma^0 \delta(t) \\ &\Rightarrow \Delta v' \varphi(t) = \sigma^0 \delta'(t).\end{aligned}$$

Ici,  $\delta(t)$  est la direction, et  $\sigma^0$  le pas dual. Par suite :

$$\Delta v' = \sigma^0 \delta'(T_B) \varphi_B^{-1}.$$

posons :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{sur } T_B/t_1, \\ +1, & \text{si } u(t) = f_* \quad \text{pour } t = t_1, \\ -1, & \text{si } u(t) = f^* \quad \text{pour } t = t_1. \end{cases}$$

Déterminons le pas dual :

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\frac{\tilde{\Delta}(t)}{\delta(t)}, & \text{si } \tilde{\Delta}(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) > 0, \tilde{w}(t) \neq f_*, \text{ ou } \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) < 0, \tilde{w}(t) \neq f^*, \\ +\infty, & \text{sinon, } t \in T. \end{cases}$$

construisons l'ensemble :

$$T(\sigma) = \{t \in T, \sigma(t) < \sigma\},$$

et désignons par

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda(t_1)| + 2 \int_{T(\sigma)} |\delta(t)| dt,$$

la vitesse de décroissance de la fonctionnelle duale. Par construction :

$$\alpha(0) < 0, \quad \text{et } \alpha(\sigma) \leq \alpha(\bar{\sigma}), \quad \text{pour } \sigma < \bar{\sigma}.$$

Si  $\alpha(\sigma) < 0$  pour  $\sigma > 0$ , alors le problème (2.11)-(2.14) ne possède pas de commande admissible, dans le cas contraire cherchons un tel  $\sigma^0 \geq 0$  tel que :

$$\alpha(\sigma^0 - y) < 0, \quad \alpha(\sigma^0 + y) \geq 0, \quad \forall y/0 < y \leq \sigma^0.$$

Soit  $t_* \in T/\tilde{T}_B$  un tel moment vérifiant :

$$\tilde{\Delta}(t_*) + \sigma_0 \delta(t_*) = 0, \quad \delta(t_*) \neq 0.$$

On obtient alors le nouveau support

$$\bar{T}_B = (\tilde{T}_B/\{t_1\}) \cup \{t_*\}.$$

Si  $\lambda(\bar{T}_B) = 0$ , alors la quasi-commande  $\tilde{w}$  est optimale pour le problème (2.11)-(2.14).

Sinon dans le cas où  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| > \mu$ , on refait l'itération jusqu'à ce que  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| < \mu$ , puis on applique la procédure finale.

### Procédure finale

Soit la quasi-commande  $\tilde{w}$  et la quasi-trajectoire  $\chi$  construit par le support  $\tilde{T}_B$ , on ait la condition :

$$\|\lambda(\tilde{T}_B)\| \leq \mu.$$

Désignons par :

$$T^0 = \{t \in T, \quad \tilde{\Delta}(t) = 0\}, \quad T^0 = \{t_j, \quad j = \overline{1, m}\},$$

l'ensemble des points isolés  $t_j, j = \overline{1, m}$  et supposons que :

$$\dot{\Delta}(t_j) \neq 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Le but de la procédure finale est de déterminer  $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, j = \overline{1, m}\}$  à partir des équations :

$$(f^* - f_*) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{\Delta}(t_j) \int_{\tau_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt = g - H\chi(t^*), \quad (2.40)$$

obtenues à partir de a contrainte :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t^*) &= g - HF(t^*)x_0 - \int_T \varphi(t)u(t)dt \\ &= g - HF(t^*)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)u(t)dt - \int_{T_0} \varphi(t)u(t)dt, \end{aligned}$$

en identifiant la partie hors base à zéro et la partie basique à  $\mu$ .

Pour la résolution des equations (2.39), on prend comme approximation initiale de

$$\tau_B^0 = \tilde{\tau}_B = \{\tau_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, m}\},$$

On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{k+1} = \tau_B^k + \frac{1}{f^* - f_*} \{\text{sign} \dot{\Delta}(t_j) \lambda_j(\tau_B^k), \quad j = \overline{1, m}\},$$

où  $\lambda(\tau_B^k)$  est un vecteur calculé par la relation (2.39). La fonction  $w^0(t) = \tilde{w}(t)$ ,  $t \in T$  calculée par le support  $\tau_B^0$  solution de (2.40), est une commande optimale du problème (2.11)-(2.14).

### 2.3.10 Exemple

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} J(u) = c'x(t^*) \longrightarrow \max_u, \\ \dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ Hx(t^*) = g, \\ |u(t)| \leq 2.5, \quad t \in T = [0, 3]. \end{cases}$$

avec

$$c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g' = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$b' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le  $\text{rang}[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 3$ , donc on continue le processus, de plus le système est stable pour  $n = 3$ ,  $A^3 = [0]$ .

Il en résulte que :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit la commande suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 0.4867, & 0 \leq t \leq 1, \\ -2.5, & 1 \leq t \leq 2, \\ 1.2886, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

avec

$$\phi(t) = HF(t^*)F^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5 \\ \frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5 \end{pmatrix},$$

$$c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 4t + 6.5 \\ \frac{1}{2}t^2 - 3t + 1.5 \end{pmatrix},$$

la commande ainsi définie est admissible car :

$$\int_0^1 \phi(t)u(t)dt + \int_1^2 \phi(t)u(t)dt + \int_2^3 \phi(t)u(t)dt = g - HF(3)x(0), \quad |u(t)| \leq 2.5.$$

A présent considérons le support contrôle  $\{u, \tau_B\}$  avec

$$u(t) = \begin{cases} 0.4867, & 0 \leq t \leq 1, \\ -2.5, & 1 \leq t \leq 2, \\ 1.2886, & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

avec  $\tau_B = \{2, 3\}$ ,

$$\beta(u, \tau_B) = \sum_{t \in T^+} \Delta(t)\Delta u(t) + \sum_{t \in T^-} \Delta(t)\Delta u(t) = 0.3721$$

avec les paramètres de la méthode  $h \leq 1$  et  $\alpha = 0.5$ ,  $|\Delta(t)| \leq 0.5$ . nous scindons l'intervalle  $T = [0, 3] = T_0 \cup T_1$ , comme suit :

$$T_0 = [0.0505, 0.5252] \cup [0.5252, 1] \cup [1, 1.25] \cap [1.25, 1.5] \cup [1.5, 1.75] \cup [1.75, 2] \cup [2, 2.5] \cup [2.5, 2.75] \cup [2.75, 3],$$

$$T_1 = [0, 0.0505].$$

Cela nous permet d'aboutir au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2, 5632l_1 + 1.7801l_2 + 0.6588l_3 + 0.4869l_4 + 0.3307l_5 + 0.1901l_6 + 0.0651l_7 - 0.0442l_8 - \\ 0.1380l_9 - 0.2161l_{10} + 0.6507l_{11}) \rightarrow \max_l, \\ 11, 9862l_1 + 10, 3015l_2 + 4, 7838l_3 + 4, 3619l_4 + 3, 9557l_5 + 3, 5651l_6 + 3, 1901l_7 + 2, 8307l_8 + \\ 2, 4869l_9 + 2, 1588l_{10} + 2, 7758l_{11} = 0, \\ 7.0373l_1 + 5.8034l_2 + 2.5963l_3 + 2.2994l_4 + 2.0182l_5 + 1.7526l_6 + 1.5026l_7 + 1.2682l_8 + \\ 1.0494l_9 + 0.8463l_{10} + 1.6624l_{11} = 0, \\ -2.9867 \leq l_1 \leq 2.0132, \\ -2.9867 \leq l_2 \leq 2.0132, \\ 0 \leq l_3 \leq 5, \\ 0 \leq l_4 \leq 5, \\ 0 \leq l_5 \leq 5, \\ 0 \leq l_6 \leq 5, \\ -3.7886 \leq l_7 \leq 1.2113, \\ -3.7886 \leq l_8 \leq 1.2113, \\ -3.7886 \leq l_9 \leq 1.2113, \\ -3.7886 \leq l_{10} \leq 1.2113, \\ 0 \leq l_{11} \leq 1, \end{array} \right.$$

La solution optimal est :

$$l' = ( 2.0132 \quad -2.8631 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2.0276 \quad 1.2113 \quad 1.2113 \quad 1.2113 \quad 1 ),$$

donc la nouvelle commande  $\bar{u}$  est :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 2.5, & 0 \leq t \leq 0.505, \\ 2.5, & 0.505 \leq t \leq 0.525, \\ -2.3763, & 0.525 \leq t \leq 1, \\ -2.5, & 1 \leq t \leq 1.25, \\ -2.5, & 1.25 \leq t \leq 1.5, \\ -2.5, & 1.5 \leq t \leq 1.75, \\ -2.5, & 1.75 \leq t \leq 2, \\ -0.739, & 2 \leq t \leq 2.25, \\ 2.5, & 2.25 \leq t \leq 2.5, \\ 2.5, & 2.5 \leq t \leq 2.75, \\ 2.5, & 2.75 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

le nouveau support contrôle est  $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$  avec

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(t) &= -3.8123 \times 10^{-3} + 7.7656 \times 10^{-2}t - 4.3103 \times 10^{-2}t^2. \\ \beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) &= \sum_{t \in T^+} \tilde{\Delta}(t) \Delta u(t) + \sum_{t \in T^-} \tilde{\Delta}(t) \Delta u(t) = 0.0752. \end{aligned}$$

Passons au changement du support.

### Changement du support

posons  $\mu = 1.7654 \times 10^{-4}$  (paramètre de la méthode). Soit la quasi-commande :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} 2.5, & \tilde{\Delta}(t) < 0, \\ -2.5, & \tilde{\Delta}(t) > 0, \\ \tilde{\omega}(t) \in [-2.5, 2.5], & \tilde{\Delta}(t) = 0. \end{cases}$$

avec sa trajectoire correspondante  $\chi(t)$  sur l'intervalle  $[0, 3]$ , avec  $H\chi(t) \neq g$ .

### ✓ 1<sup>ere</sup> itération

$$\tilde{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow t = 0.05051 \text{ ou } t = 1.75$$

on choisit  $t = 0.05051$  car pour cette valeur, on a  $\tilde{\Delta}(t)\delta(t) < 0$ .

Alors la nouvelle commande aura l'allure suivante :

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} 2.5, & 0 \leq t \leq 0.05051, \\ -2.5, & 0.05051 \leq t \leq 1.75, \\ 2.5, & 1.75 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

mais toujours  $H\chi(t^*) \neq g$ .

**√ 2<sup>ème</sup> itération**

$$\bar{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow \{t = 0.59\} \text{ ou } \{t = 1.75\}$$

on choisit  $t = 0.59$  car pour cette valeur, on a  $\tilde{\Delta}(t)\delta(t) < 0$ .

Alors la nouvelle commande aura l'allure suivante :

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} 2.5, & 0 \leq t \leq 0.59, \\ -2.5, & 0.59 \leq t \leq 1.75, \\ 2.5, & 1.75 \leq t \leq 3, \end{cases}$$

avec  $\{t = 0.59\}$  et  $\{t = 1.75\}$ , mais toujours  $H\chi(t^*) \neq g$ ,

**√ 3<sup>ème</sup> itération**

$$\bar{\Delta}(t) = 0 \Rightarrow t = 0.59 \text{ ou } t = 2.16$$

on choisit  $t = 2.16$  car pour cette valeur, on a  $\tilde{\Delta}(t)\delta(t) < 0$ .

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} 2.5, & 0 \leq t \leq 0.59, \\ -2.5, & 0.59 \leq t \leq 2.16, \\ 2.5, & 2.16 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

on a  $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| < \mu$ , donc on passe à la procédure finale.

**La procédure finale**

Posons  $\tau_B^0 = \{0.59, 2.16\}$

On à

$$\tau_B^{k+1} = \tau_B^k + \frac{1}{f^* - f_*} \{sign \tilde{\Delta}(t_j) \lambda_j(\tau_B^k), \quad j = \overline{1, m}\},$$

ce qui donne comme nouvelle commande

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} 2.5, & 0 \leq t \leq 0.53813520, \\ -2.5, & 0.53813520 \leq t \leq 2.1623208, \\ 2.5, & 2.1623208 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

La commande ci-dessus est optimale.

## 2.4 Conclusion

Dans cette partie de ce document, nous avons étudié une méthode de résolution d'un système dynamique linéaire. En tirant profit de plusieurs recherches déjà effectuées à ce sujet, nous avons clarifié et rappelé cette méthode avec des exemples d'applications.

---

## Conclusion générale

La théorie du contrôle optimal est un domaine très vaste qui a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs comme l'attest le nombre important de travaux de recherches réalisés dans ce cadre. Dans la vie réelle le contrôle optimal désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. L'application de la théorie du contrôle est intervenue dans plusieurs domaines pratiques tels que la mécanique, la gestion des stocks, la chimie, aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général.

L'objectif de cette étude est de faire connaître d'une manière générale le concept de la théorie du contrôle avec ses différentes variantes tout en mettant en évidence un exemple d'application. Ainsi, dans le cadre de ce travail, nous avons étudié une méthode directe de résolution des problèmes linéaires de contrôle optimal et en présentant des exemples d'applications de cette méthode pour le cas continu et le cas discret. En détail, les différents points suivants ont été réalisés :

- Définitions des notions de base de la théorie du contrôle optimale (commande admissible, but de la commande, état initial,...*etc*).
- Présentation des propriétés mathématiques de la théorie du contrôle optimal (contrôlabilité, principe du maximum de pontryagin) tout en donnant essentiellement quelques valeurs exactes pour ses propriétés et illustration par des exemples.
- Illustration par deux exemples pratiques comme une application du concept de la méthode adaptée pour la résolution d'un système dynamique linéaire.

Ce travail nous a permis de dégager plusieurs perspectives à explorer dans les travaux futurs. Parmi ces perspectives, nous citons :

- En théorie, il est intéressant d'appliquer la méthode de résolution directe des problèmes linéaires de contrôle optimal pour la résolution des problèmes min-max de contrôle optimal, problèmes multicritères...*etc*.

- En pratique, différents problèmes que ce soit en économie, en agriculture, en automatique...*etc*, peuvent être modélisés par des problèmes de contrôle optimal et résolus par la méthode étudiée.

---

## Bibliographie

- [1] C. Bennani. Stabilisation et estimation de l'état des système dynamiques non linéaires et application. *Mémoire de Magister (UMMTO)*. **3**, pp. 41-50, (2011).
- [2] M. Chebbah. Résolution et implémentation d'un problème min-max en contrôle optimal. *Mémoire de magister en mathematique appliquées UMMTO*, pp. 63-68, (2006).
- [3] R. Gabasov and F. M. Kirillova. Adaptive methods of solving linear programing problems. *Preprint Series of University of Karasruhe. Institute for Statistics and Mathematics*, (1994).
- [4] R.E. Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *J. SIAM. control*. pp. 152-192, (1963).
- [5] K. Louadj. Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal. *Thèse de doctorat UMMTO*, pp. 25-50, (2012).
- [6] R.V. Gamekrelidze L.S. Pontrygin, V.G Boltyaki and E.F Mishchenko. The mathématique theory of optimal processes. *Interscience publishers, New york*, (1962).
- [7] I. L. Vorobev M. Aidene and B. Oukacha. Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax. *Performance Index Computational Mathematics and Mathematical Physics* 45. **vol 10**, pp. 1691-1700, (2005).
- [8] B. Oukacha. Résolution de problème de contrôle optimal. *Thèse de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou*, (2005).
- [9] L. Pontryagin and al. Mathematical theory of optimal processes. *Eds Mir Moscou*, pp. 504-1974, (1974).
- [10] N. Toutzi. Optimisation dynamique. *Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique*, (2003).
- [11] E. Trélat. Contrôle optimal : théorie et applications. *Université Pierre et Marie Curie (Paris 6) et Institut Universitaire de France Laboratoire Jacques-Louis Lions CNRS, UMR 7598 4 place Jussieu, BC 187 75252 Paris cedex 05*, (2013).

- [12] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. Propriétés génériques des trajectoires singulières. *C R Math Acad Sci Paris.* **337**, pp. 49-52, (2003).
- [13] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. Genericity results for singular curves. *J Differential Geom.* **73**, pp. 45-73, (2006).
- [14] F. Jean Y. Chitour and E. Trélat. Singular trajectories of control affine systems. *SIAM J Control Optim.* **vol 2**, pp. 1078-1095, (2008).

## RÉSUMÉ

La théorie du contrôle optimal a reçue une grande attention de la part des chercheurs et elle a été étudiée intensivement ces dernières années dans la littérature. Ceci s'explique par ses applications intéressantes dans divers domaines à savoir le contrôle des flux routiers, télécommunication, raffinage pétrolier,...*etc.* Dans notre travail, nous avons effectué un état de l'art sur la théorie du contrôle optimal (classes de commandes, contrôlabilité, Principe du maximum de pontryagin, méthodes de résolutions numériques) tout en étudions une méthode directe de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal ainsi que des exemples d'applications.

**Mots clés :**Principe du maximum de pontryagin, contrôlabilité, méthodes de résolutions (directe et indirecte), méthode adaptée.

## ABSTRACT

The optimal control theory has received much attention from researchers and it has been intensively studied in recent years. This is explained by its interesting application in various fields namely the control of traffic flows, telecommunications, oil refining,...*etc.* In our work, we conducted a state of the art in the field of control theory (command classes, controllability, **PMP**, digital resolution methods) while studying a direct method of solving a linear system joined by application examples.

**Key words :**Principle of the Pontryagin maximum, controllability, digital resolution methods, adaptive methods.