

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE et POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

Filière :
MATHEMATIQUES

Spécialité: Analyse Mathématique et Applications

Thème

Estimation des données manquantes et prédiction des champs aléatoires stationnaires

Présenté par

MEZALA Katia

Devant le jury d'examen composé de :

Mohammed Morsli	Professeur	UMMTO	Président
Abdelghani Hamaz	M. Conf B	UMMTO	Encadreur
Fazia Bedouhene	Professeur	UMMTO	Examinatrice
Farida Achemine	M. Conf A	UMMTO	Examinatrice

Soutenu le /09/2018

Remerciements

C'est avec une certaine émotion et beaucoup de sincérité que je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu durant la réalisation de ce mémoire. Je tiens tout particulièrement à remercier M. Hamaz Abdelghani qui a dirigé ce travail, pour sa disponibilité, son soutien et ses conseils qui ont été nombreux et importants.

Melle Arezki Ouardia a beaucoup œuvré pour la mise en valeur de mon travail, et j'ai apprécié l'ambiance d'équipe qui s'est formée au laboratoire LMPA. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse toute ma reconnaissance.

Je remercie M. Morsli Mohammed, Mme Bedouhene Fazia et Mme Achemine Farida pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury.

Mes plus profonds remerciements vont à mes parents. Tout au long de mon cursus, ils m'ont toujours soutenu, encouragé et aidé. Ils ont su me donner toutes les chances pour réussir. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner mes frères et soeurs. Je les remercie pour m'avoir fait partager leur joie de vivre et m'avoir ainsi soutenu dans mes efforts.

Table des matières

1	Prédiction de séries chronologiques	6
1.1	Prédiction de séries chronologiques	6
1.1.1	Méthodes de calcul des coefficients des prédicteurs	7
1.1.2	Equations de prédiction	8
1.1.3	Algorithme de Durbin-Levinson	9
1.1.4	Algorithme d'innovation	11
1.2	Estimation de données manquantes	11
1.2.1	Interpolation d'une seule valeur manquante	13
1.2.2	Interpolation de plusieurs valeurs manquantes	16
2	Prédiction de champs aléatoires	19
2.1	Champs aléatoire stationnaire	19
2.1.1	Représentation MA avec le demi plan passé	20
2.1.2	Représentation MA avec le quart du plan passé	21
2.1.3	Prédiction à h pas	22
2.2	Prédiction avec le quart du plan augmenté	24
2.2.1	Cas du passé augmenté d'une seule observation	26
2.2.2	Cas du passé augmenté de plusieurs observations	27
3	Prédiction des modèles MSAR	29
3.1	Calcul des auto-corrélations	29
3.1.1	Structure générale des auto-corrélations	30
3.2	problème d'interpollation	35
3.3	Etude comparative des prédicteurs	36
3.3.1	Comparaison des prédicteurs par rapport au crétere PMC et MSP	39
	Conclusion	49

Table des matières	2
Appendix	50
Bibliographie	61

Table des figures

3.1	Localisation des observations $O(i,j)^1$ permettant d'effectuer l'extrapolation	37
3.2	Localisation des observations $O(i,j)^2$ permettant d'effectuer l'interpollation	37
3.3	Représentation en 3-D du MSE du prédicteur $X_{i,j}^1$	41
3.4	Représentation en 3-D du MSE du prédicteur $X_{i,j}^2$	42
3.5	Représentation en 3-D du $\widehat{PMC}_X(\hat{X}^1/\hat{X}^2)$ du prédicteur $X_{i,j}^2$	43
3.6	Caractérisation graphique des paramètres pour lesquels l'interpolation est meilleur que l'extrapolation	44
3.7	Comparaison entre les prédicteurs pour b fixé.	45
3.8	Comparaison entre les prédicteurs pour b fixé.	46
3.9	Comparaison entre les prédicteurs pour a fixé.	47
3.10	Comparaison entre les prédicteurs pour a fixé.	48

Introduction

La prédiction des champs aléatoires, est une méthode de prédiction quelconque qui incorpore la dépendance spatiale. Cette théorie est appliquée dans plusieurs domaines incluant l'agriculture, la climatologie, l'économétrie, les études médicales, les explorations pétrolières et l'analyse de la pollution des eaux, et ce, lorsque les données sont disponibles à des endroits spécifiques (c'est le cas des stations expérimentales situées au dessus du sol ou à une certaine distance dans l'air). Le but est de prédire des quantités à des localisations non échantillonnées.

Une technique bien connue dans ce domaine de prédiction, intensivement utilisée dans le domaine de l'environnement de la terre, s'appuie sur la connaissance des covariances entre les localisations interpolées et observées. Sous l'hypothèse de stationnarité des champs aléatoires, l'approche paramétrique classique qui consiste à étudier les variogrammes à des pas différents pour ajuster un modèle a été aussi abordé dans la littérature (Cressie 1993). Cette approche présente un inconvénient de taille qui réside dans la sélection du modèle basée sur le choix des covariances qui une question très subjective. De ce fait, le développement des méthodes de prédiction des champs aléatoires en imposant le minimum de conditions aux structures de covariances des données est un majeur challenge. Partant du succès de Wiener-Kolmogorov dans le domaine de prédiction de séries chronologiques (processus 1-D), il est attendu à ce que la factorisation spectrale des champs aléatoires (Processus p-D, $p \geq 2$) ou de sa représentation $MA(\infty)$ s'expriment en fonction du passé, ce qui constitue une clé pour la résolution de ce problème. Cependant, les notions futur-passé, dépendance et direction à partir d'un instant donné sont bien évidentes pour les séries chronologiques, mais elles ne le sont pas pour les champs aléatoires.

A défaut d'un ordre unidirectionnel, la résolution du problème de prédiction de champs aléatoires est non triviale. Il existe une littérature abondante traitant le problème de prédiction des processus stationnaires en se basant sur le concept de séries chronologiques

(processus 1-D). La structure de tels processus est parfaitement décrite par les résultats de la théorie de la prédiction de Wiener Kolmogorov qui sont fondamentaux en modélisation, car, ils permettent de caractériser analytiquement l'une des représentations possibles d'un processus stationnaire comme sortie d'un filtre excité par un bruit blanc, en l'occurrence celle pour laquelle le bruit blanc générateur est l'innovation du processus.

Pour pouvoir généraliser ce type de résultats au cas 2-D; il est nécessaire d'étendre la théorie de la prédiction linéaire de Wiener-Kolmogorov en choisissant le passé de telle sorte que l'erreur de prédiction soit un bruit blanc.

En somme, la plupart des travaux ayant traité la question de prédiction de séries chronologiques et/ou des champs aléatoires stationnaires, se sont intéressés à l'expression du prédictor à un pas, et ce, en généralisant le théorème de Szego-Kolmogorov-Wiener et en s'appuyant sur les coefficients de la représentation moyenne mobile. Le travail effectué dans ce mémoire s'insère dans cette thématique et il est organisé comme suit. Le chapitre 1 présente les diverses techniques de prédiction et d'estimation de séries chronologiques en présentant des algorithmes et des méthodes itératives. Le second chapitre s'intéresse aux mêmes objectifs que le premier mais dans le domaine des champs aléatoires. Le troisième chapitre fera l'objet d'étude d'un modèle particulier des champs aléatoires en présentant une étude comparative de certains prédictors par rapport aux critères de proximité de Pitman et de l'erreur quadratique moyenne. Ce travail s'achève par une conclusions et des perspectives.

Chapitre 1

Prédiction de séries chronologiques

Ce chapitre porte sur la prédiction et l'estimation des données manquantes d'une série chronologique. Il s'agit de développer différentes approches permettant d'atteindre ces objectifs.

Nous nous limitons à l'étude de prédicteurs linéaires. Le critère retenu pour mesurer la qualité d'un prédicteur \hat{X} de X est l'erreur quadratique $\mathbb{E}[(\hat{X} - X)^2]$. Pratiquement, il permet de pénaliser plus fortement les grandes erreurs que les petites. Mathématiquement, il permet de se placer dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ des variables aléatoires réelles de carrés intégrables et de pouvoir utiliser tous les outils afférents notamment pour expliciter \hat{X} . On obtient ainsi un prédicteur ponctuel et une estimation de l'erreur quadratique commise.

1.1 Prédiction de séries chronologiques

Il est important de noter que le prédicteur de Wiener-Kolmogorov, noté \hat{X}_{n+h} est un prédicteur de référence pour lequel l'erreur quadratique de prédiction est minimum. Plus précisément, \hat{X}_{n+h} est le meilleur prédicteur linéaire à l'horizon h , au sens de L^2 , connaissant le passé infini $\{X_{n+1-j}, j \geq 1\}$, c'est-à-dire, \hat{X}_{n+h} est la projection de X_{n+h} sur le sous-espace engendré par la famille de variables aléatoires $\{X_{n+1-j}, j \geq 1\}$.

Le prédicteur de Wiener-Kolmogorov s'écrit :

$$\hat{X}_{n+h} = P_n X_{n+h} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j X_{n-j}$$

où P_n est le projecteur sur le sous espace engendré par la famille $\{X_j, j \leq n\}$.

Les $a_j, j \in \mathbb{N}$ s'obtiennent en minimisant l'espérance :

$$\mathbb{E}[(\hat{X}_{n+h} - X_{n+h})^2].$$

En pratique on ne dispose jamais d'un nombre infini d'observations, on ne peut donc pas utiliser le prédicteur de Wiener-Kolmogorov. On a alors deux possibilités : soit recourir au prédicteur de Wiener-Kolmogorov tronqué soit utiliser le prédicteur projeté sur les n dernières observations disponibles.

Le prédicteur projeté sur les n dernières observations fera l'objet des deux premières sections en supposant que le processus est stationnaire. Dans ce contexte, des algorithmes et des relations de récurrence entres les coefficients des prédicteurs sont établies.

1.1.1 Méthodes de calcul des coefficients des prédicteurs

Considérons une série chronologique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, à valeurs réelles et de variance finie. On suppose ce processus stationnaire dans le sens où sa fonction de covariance $Cov(X_s, X_t)$ ne dépend que de $t - s$. Cette hypothèse est fondamentale et correspond à une régularité dans le temps de certaines propriétés statistiques du processus. En pratique, la stationnarité n'est pas nécessairement satisfaite et devra donc être vérifiée au moyen de tests statistiques adéquats. La stationnarité permet d'obtenir des informations sur des données futures en utilisant des statistiques calculées au moyen de données passées. Le problème de la prédiction linéaire à un pas de X_t consiste à trouver une fonction linéaire de X_{t-1}, X_{t-2}, \dots qui approxime X_t au sens de l'erreur quadratique moyenne. En pratique, on dispose seulement d'un nombre fini d'observations $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}$ à partir desquelles on construit le prédicteur $\hat{X}_{t,n}$ sous la forme $\hat{X}_{t,n} = \sum_{k=1}^n a_{k,n,t} X_{t-k}$. Les coefficients $a_{k,n,t}$ sont obtenus en régressant X_t sur $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}$. L'hypothèse de stationnarité permet de démontrer que les coefficients $a_{k,n,t}$ sont indépendants de t . On pose alors $a_{k,n,t} = a_{k,n}$, et le calcul des paramètres $a_{k,n}$ nécessite l'inversion d'une matrice de covariance de taille n . Quand n est grand, il est souvent plus commode de résoudre le problème de prédiction en supposant que l'on dispose d'un nombre infini d'observations ($n = \infty$). On note \hat{X}_t le prédicteur linéaire de X_t correspondant, et on suppose que \hat{X}_t peut s'écrire sous la forme $\hat{X}_t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t-k}$ où la série converge en moyenne quadratique. On dit alors que X_t admet une représentation autorégressive, et les coefficients a_k s'appellent les paramètres autorégressifs. Des conditions assez faibles sur la densité spectrale f de $\{X_t\}$ garantissant l'existence et l'unicité

d'une représentation autorégressive. Un prédicteur de X_t à l'échantillon de taille finie n est obtenu par la série tronquée $S_{t,n} = \sum_{k=1}^n a_k X_{t-k}$. L'intérêt de cette approche est que les paramètres a_k ne dépendent pas de la taille du passé n , ils dépendent uniquement des coefficients de Fourier de $\ln f$ et peuvent être calculés facilement.

1.1.2 Equations de prédiction

Soit \hat{X}_{n+1} le prédicteur de la variable X_{n+1} défini par

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ P_{1,n} X_{n+1} & \text{si } n \geq 1, \end{cases}$$

où $P_{k,l}$ est le projecteur sur $\mathcal{H}_{k,l} = \overline{\text{sp}}\{X_j, k \leq j \leq l\}$.

Comme $\hat{X}_{n+1} \in \mathcal{H}_{1,n}$, il s'écrit

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} X_{n+1-j}, \quad n \geq 1, \quad (1.1)$$

où les $\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn}$ vérifient les équations de prédiction suivantes :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \phi_{ni} X_{n+1-i}, X_{n+1-j} \right\rangle = \langle X_{n+1}, X_{n+1-j} \rangle \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

En utilisant la linéarité du produit scalaire, ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^n \phi_{ni} \gamma(i-j) = \gamma(j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

ou d'une manière plus compacte

$$\Gamma_n \Phi_n = \gamma_n, \quad (1.4)$$

où $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$, $\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))'$ et $\Phi_n = (\phi_{n1}, \phi_{n2}, \dots, \phi_{nn})'$. Si Γ_n est non sigulière, alors (1.4) admet une seule solution donnée par

$$\Phi_n = \Gamma_n^{-1} \gamma_n. \quad (1.5)$$

C'est notamment le cas sous les hypothèses de la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Si $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$ alors la matrice de covariance $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1,\dots,n}$ de (X_1, \dots, X_n) est non-singulière pour tout n .*

Corollaire 1.1. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1, le meilleur prédicteur linéaire \hat{X}_{n+1} de X_{n+1} en fonction de X_1, \dots, X_n est*

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \phi_{ni} X_{n+1-i}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

où $\Phi = (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})' = \Gamma_n^{-1} \gamma_n$, $\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))'$ et $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1, \dots, n}$. De plus, l'erreur quadratique moyenne est $\nu_n = \gamma(0) - \gamma_n \Gamma_n^{-1} \gamma_n$.

Calcul des coefficients des prédicteurs

L'équation (1.5) donne l'expression du prédicteur mais nécessite le calcul de l'inverse de la matrice Γ . Dans ce qui suit, nous décrivons deux algorithmes récursifs simples et efficaces permettant d'obtenir l'expression du meilleur prédicteur linéaire $\hat{X}_{n+1}, n \geq 1$ défini dans (1.6), sans avoir à calculer explicitement l'inverse de Γ . Nous montrons également comment ce prédicteur peut être utilisé pour trouver l'expression de $\hat{X}_{n+h}, h \geq 2$.

1.1.3 Algorithme de Durbin-Levinson

L'algorithme de Durbin-Levinson donne un schéma récursif pour calculer les coefficients $\Phi_n = (\phi_{n1}, \dots, \phi_{nn})'$ du prédicteur \hat{X}_{n+1} défini dans (1.6) ainsi que les erreurs quadratiques moyennes de la prédiction définies par

$$\nu_n = \mathbf{E}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}]^2, \quad n \geq 1. \quad (1.7)$$

Il est clair que $\nu_0 = 0$.

Proposition 1.2. *Si $\{X_t\}$ est stationnaire, centré de fonction d'autocovariance $\gamma(\cdot)$ telle que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$, alors les coefficients ϕ_{nj} et l'erreur quadratique moyenne ν_n définie dans (1.6) et (1.7) vérifient $\phi_{11} = \gamma(1)/\gamma(0), \nu_0 = \gamma(0)$,*

$$\phi_{nn} = \left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \right] \nu_{n-1}^{-1} \quad (1.8)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{n1} \\ \vdots \\ \phi_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{n-1,1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \phi_{nn} \begin{bmatrix} \phi_{n-1,n-1} \\ \vdots \\ \phi_{n-1,1} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

et

$$\nu_n = \nu_{n-1} [1 - \phi_{nn}^2]. \quad (1.10)$$

Démonstration. Par définition, $\mathcal{H}_{2,n} = \overline{\text{sp}}\{X_2, \dots, X_n\}$ et $\mathcal{H}_{1,1}^\perp = \overline{\text{sp}}\{X_1 - P_{\mathcal{H}_{2,n}}X_1\}$ sont deux sous espaces orthogonaux de $\mathcal{H}_{1,n}$. Ce qui implique $\forall Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, p)$, $P_{1,n}Y = P_{2,n}Y + P_{1,1}^\perp Y$ où $P_{1,1}^\perp$ est le projecteur sur $\mathcal{H}_{1,1}^\perp = \overline{\text{sp}}\{X_1 - P_{\mathcal{H}_{2,n}}X_1\}$.

Donc

$$\hat{X}_{n+1} = P_{2,n}X_{n+1} + P_{1,1}^\perp X_{n+1} = P_{2,n}X_{n+1} + a(X_1 - P_{2,n}X_1), \quad (1.11)$$

où

$$a = \langle X_{n+1}, X_1 - P_{2,n}X_1 \rangle / \|X_1 - P_{2,n}X_1\|^2. \quad (1.12)$$

La stationnarité du processus entraine que les vecteurs $(X_1, \dots, X_n)'$ et $(X_2, \dots, X_{n+1})'$ ont une même matrice d'autocovariance, et pour la même raison, les vecteurs $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_1)'$ et $(X_2, \dots, X_{n+1})'$ ont également la même matrice de covariance, par conséquent

$$P_{2,n}X_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} X_{j+1} \quad (1.13)$$

$$P_{2,n}X_{n+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} X_{n+1-j} \quad (1.14)$$

et

$$\|X_1 - P_{2,n}X_1\|^2 = \|X_{n+1} - P_{2,n}X_{n+1}\|^2 = \|X_n - \hat{X}_n\|^2 = \nu_{n-1}. \quad (1.15)$$

En utilisant (1.11), (1.13) et (1.14), on obtient

$$\hat{X}_{n+1} = aX_1 + \sum_{j=1}^{n-1} [\phi_{n-1,j} - a\phi_{n-1,j-j}] X_{n+1-j}. \quad (1.16)$$

De (1.11)

$$\begin{aligned} a &= \left(\langle X_{n+1}, X_1 \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \langle X_{n+1}, X_{j+1} \rangle \right) \nu_{n-1}^{-1} \\ &= \left[\gamma(n) - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_{n-1,j} \gamma(n-j) \right] \nu_{n-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

La proposition (1.1) nous assure l'unicité de la représentation

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \phi_{nj} X_{n+1-j}. \quad (1.18)$$

En identifiant, les paramètres dans (1.16) et (1.18), on déduit

$$\phi_{nn} = a \quad (1.19)$$

et

$$\phi_{nj} = \phi_{n-1,j} - a\phi_{n-1,n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (1.20)$$

De (1.8) et (1.9) découle

$$\begin{aligned}
 \nu_n &= \|X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}\|^2 \\
 &= \|X_{n+1} - P_{2,n}X_{n+1}\|^2 + \|P_{1,1}^\perp X_{n+1}\|^2 - \langle X_{n+1} - P_{2,n}X_{n+1}, P_{1,1}^\perp X_{n+1} \rangle \\
 &= \nu_{n-1} + a^2\nu_{n-1} - 2a \langle X_{n+1}, X_1 - P_{2,n}X_1 \rangle.
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

En utilisant (1.15) et l'orthogonalité de $\mathcal{H}_{2,n}$ avec $\mathcal{H}_{1,1}^\perp$ on obtient

$$\nu_n = \nu_{n-1}(1 - a^2). \tag{1.22}$$

□

1.1.4 Algorithme d'innovation

L'idée principale de l'algorithme de Durbin-Levinson est de décomposer le sous espace $\mathcal{H}_{1,n}$ en deux sous espaces orthogonaux $\mathcal{H}_{2,n}$ et $\mathcal{H}_{1,1}^\perp$. L'idée de l'algorithme d'innovation est de décomposer le sous espace $\mathcal{H}_{1,n}$ en n sous espaces orthogonaux. L'algorithme qui suit permet d'étendre l'expression du prédicteur à un cadre plus général qui inclut le cas non stationnaire.

Proposition 1.3. (Brockwell et Davis, 1991)

Si $\{X_t\}$ est centré et $\mathbf{E}[X_i X_j] = \kappa(i, j)$, où la matrice $[\kappa(i, j)]_{i, j=1}^n$ est non-singulière pour tout $n = 1, 2, \dots$, alors les coefficients du prédicteur $\hat{X}_{n+1}, n \geq 0$ défini par

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{nj}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

et les erreurs quadratiques ν_n s'obtiennent par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} \nu_0 &= \kappa(1, 1). \\ \theta_{n, n-k} &= \nu_k^{-1} \left(\kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k, k-j} \theta_{n, n-j} \nu_j \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \nu_n &= \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n, n-j} \nu_j. \end{cases} \tag{1.24}$$

1.2 Estimation de données manquantes

On traite dans cette section le problème de données manquantes d'une série chronologique. L'intérêt de ce problème, est justifié par la rencontre fréquente de séries avec données manquantes dans la réalité des problèmes pratiques. En effet, on a souvent affaire à des séries que l'on n'observe que pendant quelques heures de la journée, voire quelques jours de

la semaine, à cause des rythmes de la vie sociale ou économique. En général, les données manquantes peuvent être attribuées à des origines diverses tenant - par exemple - à la nature du phénomène observé, à l'appareil de mesure, etc ..., on peut citer des exemples de séries avec données manquantes plus systématique, comme dans Parzen (1983): enregistrer l'écho réfléchi d'un signal radar émis vers la lune nécessite l'arrêt de l'émission durant la période de réception de l'écho - faute d'émission. D'autres exemples figurent dans l'expérience océanographique.

Il est important de souligner que l'analyse des données manquantes est en relation avec les méthodes de détection de valeurs aberrantes. En effet, dans bien de situations réelles, les observations d'une série sont observées avec erreurs, une analyse prudente des données exige, dans certaines situations, l'élimination de ces observations et de les considérer manquantes.

Soit $\{X_t\}$ une série chronologique centrée stationnaire de fonction d'autocovariance γ_k . Notons $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace des variables aléatoires réelles définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) pour lesquelles $\mathbf{E}X^2 < \infty$, muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathbf{E}XY$.

Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, nous définissons le sous espace

$$\mathcal{H}_t = \overline{\text{sp}}\{X_s, s \leq t\},$$

où $\overline{\text{sp}}\{A\}$ est le sous espace engendré par les éléments de A, qui est, un sous espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Le processus $\{X_t\}$ est non déterministe si $X_{t+1} \notin \mathcal{H}_t$.

Il est bien connu que tout processus non déterministe peut se décomposer d'une manière unique comme

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \epsilon_{t-k} + V_t, \quad b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 < \infty \quad (1.25)$$

où $\{\epsilon_t\}$ est une suite de v.a. non corrélées, avec $V(\epsilon_t) = \sigma^2$, ϵ_t et V_t sont non corrélées.

Les coefficients de la représentation autorégressive d'un tel processus s'obtiennent par récurrence :

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_l &= \sum_{k=0}^{l-1} b_k a_{l-k} \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Notons que la décomposition de Wold engendre la décomposition utile de la matrice de covariance $\Gamma = (\gamma_{k-l})$ du processus $\{X_t\}$:

$$\Gamma = \sigma^2 T T' + \Gamma_V \quad (1.27)$$

où

$$T = (b_{j-i})_{\substack{i=0,\infty \\ j=0,\infty}} \quad (1.28)$$

avec $b_0 = 1$, $b_k = 0$ pour $k < 0$, et Γ_V est la matrice de covariance du processus $\{V_t\}$.

Rappelons aussi que $\{X_t\}$ est purement non déterministe si $V_t \equiv 0$ ou $\Gamma_V = 0$.

Pour $k > 0$, le prédicteur de l'observation X_k basé sur $\mathcal{H}_{-1} = \overline{\text{sp}}\{X_{-1}, X_{-2}, \dots\}$ est noté par \hat{X}_k . Il est la projection orthogonale de X_k sur \mathcal{H}_{-1} . De (1.25), il suit

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= \sum_{i=k+1}^{\infty} b_i \epsilon_{k-i} + V_t \\ X_k - \hat{X}_k &= \sum_{i=0}^k b_i \epsilon_{k-i} \\ \text{var}(X_k - \hat{X}_k) &= \sigma^2 \sum_{i=0}^k b_i^2 \\ \text{cov}(X_k - \hat{X}_k, X_l - \hat{X}_l) &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\min(k,l)} b_i^2 + |l - k| \quad (l \geq 0). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Il est important de signaler que $\text{cov}(X_k - \hat{X}_k, X_l - \hat{X}_l)$ est le (k,l) ème élément de la matrice $G = TT'$. Cette matrice joue un rôle important dans ce qui suit.

Il est bien connu que $\hat{X}_k, k \geq 0$, possède une représentation AR, en fonction des valeurs passées X_{-1}, X_{-2}, \dots :

$$\hat{X}_k \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,k} X_{-i} + V_k \quad (1.30)$$

et que les coefficients $\{a_{i,k}\}_{i=1}^{\infty}$ de la représentation AR dans (1.30) satisfont

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^{l-1} b_j a_{l-j,k} &= b_{l+k} \quad (l = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.2.1 Interpolation d'une seule valeur manquante

Pour la clarté de la présentation, nous commençons par le cas où une seule valeur est manquante. Soit $X'_{0,r}$ la projection orthogonale de X_0 sur

$$\mathcal{H}'_{0,r} = \overline{\text{sp}}\{X_t; t \leq r, t \neq 0\}.$$

Une difficulté essentielle dans la projection orthogonale sur le sous espace $\mathcal{H}'_{0,r}$, est que les

sous espaces engendrés par le passé et le futur ne sont pas orthogonaux. Il convient donc d'écrire le sous espace $\mathcal{H}'_{0,r}$ sous forme d'une somme directe de deux espaces orthogonaux. Les deux sous espaces sont \mathcal{H}_{-1} et $S_r = \overline{\text{sp}}\{X_k - \hat{X}_k; 1 \leq k \leq r\}$.

Lemme 1.1. (Pourahmadi, 1989).

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire non déterministe. Alors, pour tout $0 \leq r < \infty$,

(a) $X_0 \notin \mathcal{H}'_{0,r}$

(b) \mathcal{H}_{-1} et S_r sont orthogonaux, et

$$\mathcal{H}'_{0,r} = \mathcal{H}_{-1} \oplus S_r.$$

Démonstration. (a).

Supposons que $X_0 \in \mathcal{H}'_{0,r}$. Alors on peut l'écrire comme

$$X_0 = \sum_{k=1}^r c_k X_k + Y \tag{1.32}$$

avec $Y \in \mathcal{H}_{-1}$. Sans perte de généralité, nous supposons que $c_r \neq 0$. Ceci entraîne que

$$X_r = c_r^{-1} X_0 - \sum_{k=1}^{r-1} c_r^{-1} c_k X_k - c_r^{-1} Y \in \mathcal{H}_{r-1},$$

ce qui contredit que $\{X_t\}$ est non déterministe. Par conséquent $X_0 \notin \mathcal{H}'_{0,r}$.

(b).

Tout $X \in \mathcal{H}'_{0,r}$ peut s'écrire sous la forme

$$X = Y + \sum_{k=1}^r c_k X_k = \left(Y + \sum_{k=1}^r c_k \hat{X}_k \right) + \sum_{k=1}^r (X_k - \hat{X}_k) \in \mathcal{H}_{-1} \oplus S_r.$$

□

Il est maintenant possible d'écrire

$$\hat{X}'_{0,r} = P_{\mathcal{H}'_{0,r}} X_0 = P_{\mathcal{H}_{-1}} X_0 + P_{S_r} X_0 \tag{1.33}$$

Une représentation explicite de $P_{S_r} X_0$ est fournie par le lemme suivant :

Lemme 1.2. (Pourahmadi, 1989).

Si $\{X_t\}$ est un processus non déterministe alors

$$P_{S_r} X_0 = \sum_{i=1}^r c_{i,r} (X_i - \hat{X}_i),$$

où le vecteur $c = (c_1, \dots, c_r)'$ vérifie

$$A_r c = b$$

et $b = (b_1, \dots, b_r)'$ représente les premières composantes de la représentation moyenne mobile de $\{X_t\}$,

$$A_r = T_r' T_r + b b'$$

avec

$$T_r = (b_{j-i})_{i,j=0,\dots,r-1}.$$

Le théorème qui suit donne l'expression explicite de la meilleure interpolation linéaire d'une seule valeur manquante.

Théorème 1.1. (Pourahmadi, 1989).

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire non déterministe de représentation autorégressive (AR) de paramètres $\{a_k\}$, et soit $\hat{X}'_{0,r}$ la meilleure interpolation linéaire de X_0 basée sur $\{X_t, t \leq r, t \neq 0\}$, alors

(a)

$$\hat{X}'_{0,r} = \hat{X}_0 + \sum_{k=1}^r c_{k,r} (X_k - \hat{X}_k), \quad (1.34)$$

où

$$c_{k,r} = \left(1 + \sum_{i=1}^r a_i^2\right)^{-1} \left(a_k - \sum_{i=1}^{r-k} a_i a_{i+k}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

(b)

$$\text{var}(X_0 - \hat{X}'_{0,r}) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^r a_i^2\right)^{-1}. \quad (1.35)$$

Démonstration. (1.34) découle du lemme 1.2.

Pour démontrer (1.35), remarquons d'abord

$$X_0 - \hat{X}'_{0,r} = X_0 - \hat{X}_0 - \sum_{k=1}^r c_{k,r} (X_k - \hat{X}_k).$$

Comme $\hat{X}'_{0,r}$ est orthogonale à $(X_0 - \hat{X}'_{0,r})$, et

$$\text{var}(X_0 - \hat{X}'_{0,r}) = \sigma^2,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
 \text{var}(X_0 - \hat{X}_{0,r}) &= \text{cov}(X_0 - \hat{X}'_{0,r}, X_0) \\
 &= \text{cov}(X_0 - \hat{X}_{0,r}, X_0) - \sum_{k=1}^r c_{k,r} \text{cov}(X_k - \hat{X}_k, X_0) \\
 &= \text{var}(X_0 - \hat{X}_0) - \sigma^2 \sum_{k=1}^r c_{k,r} b_k \\
 &= \sigma^2(1 - b' A_r^{-1} b) \\
 &= \sigma^2(1 + a'a).
 \end{aligned}$$

□

Exemple 1.1. Soit $\{X_t\}$ un processus autorégressif d'ordre 1, stationnaire, d'équation $X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t$ alors

$$\hat{X}'_{0,r} = \frac{a_1}{1 + a_1^2} (X_1 + X_{-1}).$$

1.2.2 Interpolation de plusieurs valeurs manquantes

Le schéma précédent s'applique tout à fait à plusieurs valeurs manquantes et fournit une procédure d'estimation de ces dernières en utilisant la même technique. Ainsi, nous résoudrons ce problème sans restriction sur le modèle et nous distinguons le cas particulier où les indices des valeurs manquantes sont successifs du cas où les indices sont quelconques. Le cas particulier a été l'objet des travaux de Brubacker et Wilson (1976) et Abraham (1981). Pourahmadi (1989) s'est intéressé en suite à la généralisation de ces résultats, d'autant plus c'est le cas le plus fréquent dans la pratique. Soit

$$M = \{n_1, \dots, n_m\} \quad n_1 = 0 < n_2 < \dots < n_m$$

les indices des valeurs manquantes du processus, et $m = \text{card } M$ est le nombre total des valeurs manquantes.

Soit

$$K = \{k_1, \dots, k_r\} \quad 0 < k_1 < k_2 < \dots < k_r < \infty$$

l'ensemble des indices des valeurs observées après l'insant $t = 0$.

Nous utilisons le vecteur

$$X_M = [X_{n_1}, \dots, X_{n_m}]'$$

pour caractériser les données manquantes et le vecteur

$$X_K = [X_{k_1}, \dots, X_{k_r}]'$$

pour caractériser les données observées.

Il est à noter que le lemme 1.2 est démontré d'une manière analogue quand plusieurs valeurs sont manquantes. L'équivalent de la matrice A_r dans le lemme 1.2 est

$$A_K = \sigma^{-2} \{ \text{cov}(X_{k_i} - \hat{X}_{k_i}, X_{k_j} - \hat{X}_{k_j}) \}_{i,j=1,\dots,r}. \quad (1.36)$$

L'équivalent du théorème 2.1 s'annonce alors :

Théorème 1.2. (*Pourahmadi, 1989*).

Soit $\{X_t\}$ un processus stationnaire non déterministe dont les indices des valeurs manquantes sont données par M . Alors, avec les notations précédentes, nous avons :

a)

Pour tout $1 \leq j \leq m$

$$\hat{X}'_{n_j} = \hat{X}_{n_j} + \sum_{i=1}^r c_{ij} (X_{k_i} - \hat{X}_{k_i}),$$

où les vecteurs

$$c_j = (c_{1j}, \dots, c_{rj})'$$

sont solutions des équations

$$A_K c_j = b_j.$$

L'interpolation des valeurs manquantes peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante

$$\hat{X}'_M = \hat{X}_M + C'(X_K - \hat{X}_K),$$

où C est une $r \times m$ vérifiant

$$A_K C = B.$$

(b)

$$\text{cov}(X_M - \hat{X}'_M) = \text{Cov}(X_M - \hat{X}_M) - \sigma^2 B' A_K^{-1} B.$$

Exemple 1. Pour un processus autorégressif d'ordre 1 stationnaire

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t$$

nous avons, avec les mêmes notations,

$$A = \begin{bmatrix} a^m & a^{m-1} & \dots & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Soit a_1 la première ligne de la matrice A . Alors

$$A'A = a'_1 a_1 = [a^{2m-i-j}]_{i,j=1,\dots,m}.$$

En utilisant le lemme 1.2, avec $\alpha = (1 + a_1 a'_1)^{-1}$, on obtient

$$(I_m + A'A)^{-1} = I_m - \alpha a'_1 a_1 = I_m - \alpha A'A.$$

D'où

$$C = A(I_m + A'A)^{-1} T_m = (I_r - \alpha AA') AT_m.$$

Notons que

$$AA' = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m a^{2i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$AT_m = \begin{bmatrix} a_1 T_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent

$$X'_M = \hat{X}_M + \alpha (a_1 T_m)' (X_m - \hat{X}_m),$$

où

$$\hat{X}_M = X_{-1} \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}, \quad \hat{X}_m = a^{m+1} X_{-1}.$$

Comme attendu, l'interpolation des valeurs manquantes X_0, X_1, \dots, X_{m-1} dépend seulement de X_{-1} et X_m .

Chapitre 2

Prédiction de champs aléatoires

Ce chapitre est consacré à la prédiction et l'estimation des valeurs manquantes des champs aléatoires stationnaires. Les divers résultats présentés constituent les préliminaires travaux de Kohli et Pourahmadi (2014) cités en bibliographie. Même si que la plupart des résultats de la prédiction des champs aléatoires constitue une généralisation naturelle des divers travaux effectués dans le domaine des séries chronologiques, l'approche est très difficile à mettre en oeuvre et sa mise en application est assez complexe. Ce chapitre est organisé comme suit : la section 2 fera l'objet de rappels de certains résultats basiques des champs aléatoires. L'accent sera mis sur la décomposition de Wold. L'expression du prédicteur à $h = (h_1, h_2)$ pas, basé sur le troisième quadrant, et la variance de son erreur seront donnés en fonction des coefficients de la représentation moyenne mobile. Dans les sections 3 et 4, une extension naturelle des champs aléatoires sera présentée et de nouveaux résultats relatifs aux prédiction de champs aléatoires stationnaires dont le passé est, soit augmenté, ou détérioré de certaines observations seront présentés.

2.1 Champs aléatoire stationnaire

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert des variables aléatoires d'espérances nulles et de carrés intégrables définies sur le même espace de probabilité. La suite $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ avec $X(s,t) \in \mathcal{H}$ est dite champ aléatoire stationnaire si pour tout s_1, s_2, t_1 et t_2 , la covariance entre $X(s_1, t_1)$ et $X(s_2, t_2)$ dépend seulement du pas $(s_1 - s_2, t_1 - t_2)$, i.e.

$$\text{Cov}(X(s_1, t_1), X(s_2, t_2)) = \gamma(s_1 - s_2, t_1 - t_2).$$

Comme $\gamma(.,.)$ est une fonction définie positive sur le réseau \mathbb{Z}^2 , alors le théorème de Bochner nous assure l'existence d'une fonction unique $F(.,.)$ sur le pavé $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ tel que

$$\gamma(s,t) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{-i(s\lambda_1 + t\lambda_2)\} dF(\lambda_1, \lambda_2), \quad (s,t) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.1)$$

Dans ce qui suit nous supposons que F est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda_1 d\lambda_2$ et sa dérivée de Radon-Nikodym $f(\lambda_1, \lambda_2)$ est dite densité spectrale du champs aléatoire.

Soit $L^2(f)$ l'espace de Hilbert de toutes les fonctions, définies sur le pavé, de carrées intégrables par rapport à la mesure $dF(\lambda_1, \lambda_2)$. De (2.1), l'opérateur $X(s,t) \rightarrow \exp\{-i(t\lambda_1 + s\lambda_2)\}$, se prolonge en un isomorphisme de $H_X \equiv$ sous espace linéaire fermé engendré par $\{X(s,t), (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ sur $L^2(f)$. Pour un sous espace M d'un réseau du plan, on définit par H_X^M comme le sous espace fermé engendré par toutes les combinaisons linéaires de $X(s,t)$ avec $(s,t) \in M$. De même, on définit $\mathcal{H}_X^{m,\infty}$, $\mathcal{H}_X^{\infty,n}$ et $\mathcal{X}^{m,n}$ les sous espaces engendré par les $X(s,t)$ dont les indices appartiennent respectivement à $\{(s,t); s \leq m, t \in \mathbb{Z}\}$, $\{(s,t), s \in \mathbb{Z}; t \leq n\}$ et $\{(s,t), s \leq m; t \leq n\}$.

Pour une densité spectrale $f(\lambda_1, \lambda_2)$ donnée, les sous espaces $\mathcal{H}_f^{m,\infty}$, $\mathcal{H}_f^{\infty,n}$ et \mathcal{H}_f^{mn} sont respectivement les sous espaces fermés engendrés par les $\exp\{s\lambda_1 + t\lambda_2\}$ dont les indices appartiennent aux ensembles ci-dessus mentionnés.

L'opérateur de projection orthogonal de H_X sur H_X^M est noté P_X^M .

2.1.1 Représentation MA avec le demi plan passé

La théorie de prédiction générale des champs aléatoires stationnaires basée sur le demi plan passé a été développée dans l'article pionnier de Helson et all (1985). La relation d'ordre totale sur \mathbb{Z}^2 est caractérisée par le sous espace $\mathcal{S} \subset \mathbb{Z}^2$ est appelé demi-plan. Le demi-plan \mathcal{S} au sens de Helson et all est un sous espace du réseau localisé par l'origine $\mathbf{0}=(0,0)$, qui satisfait

1. $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{0}\}$ est un semi groupe additif.
2. $\mathcal{S} \cup \{-\mathcal{S}\} = \mathbb{Z}^2$
3. $\mathcal{S} \cap (-\mathcal{S}) = \phi$

où la dernière propriété assure que $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$. Le demi plan \mathcal{S} vérifiant (1) est l'exemple spécifique d'un demi plan et il est le seul ordre dans \mathbb{Z}^2 qui coïncide avec la lexicographie

des ordres, c'est à dire :

$$(s,t) < (s',t') \quad \text{si} \quad (s - s', t - t') \in \mathcal{S}.$$

Pour $h = (h_1, h_2)$ quelconque, désignons par $S_h = \{(i + h_1, j + h_2); (i, j) \in \mathcal{S}\}$ les indices de la version décalée.

Le champs aléatoire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ est pûrement non déterminable si

$$\bigcap \mathcal{H}_X^{S_h} = \{0\}.$$

Il est bien connu que le champs aléatoire est purement non déterminable si et seulement si $F(.,.)$ est absolument continue par rapport à la mesure $dF(\lambda_1, \lambda_2)$ et sa densité spectrale satisfait la condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda_1, \lambda_2)) d\lambda_1 d\lambda_2 > -\infty \quad (2.2)$$

Dans ce cas, $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ admet une représentation MA(∞) unilatérale donnée par

$$X(s,t) = \epsilon(s,t) + \sum_{(k,l) \in -\mathcal{S}} b_{k,l} \epsilon(s - k, t - l), \quad (2.3)$$

où $\{\epsilon(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ est le processus des innovations de $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ de moyenne nulle et de variance σ^2 . Ici, $\{b_{k,l}; (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ dénotes les coefficients de la représentation MA avec $b_{0,0} = 0$ et $b_{k,l} = 0$ pour $k < 0$ ou $l < 0$ et $\sum_{(k,l) \in -\mathcal{S}} |b_{k,l}|^2 < \infty$.

Le théorème de Szego nous donne l'expression de la variance des innovations,

$$\sigma^2 = \sigma^2(S) = \exp \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f(\lambda_1, \lambda_2)) d\lambda_1 d\lambda_2 \right\}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Représentation MA avec le quart du plan passé

Dans ce qui suit, le quart du plan passé est noté par \mathcal{Q} . Il est à rappeler que le champs aléatoire stationnaire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ admet de représentation unilatérale MA(∞) sur \mathcal{Q} s'il existe un bruit blanc $\{\epsilon(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ tel que

$$\begin{aligned} X(s,t) &= \epsilon(s,t) + \sum_{(k,l) \in -\mathcal{Q}} b_{k,l} \epsilon(s - k, t - l), \\ \mathcal{H}_X^{mn} &= \mathcal{H}_\epsilon^{mn}, \quad \text{pour tout } (m,n) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

où $\{b_{k,l}; (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est la suite de la représentation MA. Elle vérifie $b_{0,0} = 0$, $b_{k,l} = 0$ pour $k < 0$ ou $l < 0$. et $\sum_{(k,l) \in -\mathcal{Q}} |b_{k,l}|^2 < \infty$. La variance du processus d'innovation

$\{\epsilon(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ est $\text{Var}\{\epsilon(s,t)\} = \sigma^2 = \sigma^2(\mathcal{Q}) = \sigma^2(S)$.

Le théorème qui suit caractérise la représentation spectrale d'un champs aléatoire admettant une représentation MA(∞) unilatérale.

Théorème 2.1 (caractérisation spectrale). *Le champs aléatoire stationnaire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ de densité spectrale $f(\lambda_1, \lambda_2)$ admet une représentation MA(∞) unilatérale sur \mathcal{Q} si et seulement si*

- (i) $\log(f) \in L^1$,
- (ii) Les coefficients de Fourriers de $\log(f)$ varient dans $\mathcal{Q} \cup \{0\}$,
- (iii) $\mathcal{H}_f^{00} = \mathcal{H}_f^{0\infty} \cap \mathcal{H}_f^{\infty 0}$.

Si la densité spectrale du champs aléatoire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$, est telle que $f(\lambda_1, \lambda_2) = |\phi(z_1, z_2)|^2 = \phi(z_1, z_2)\bar{\phi}(z_1, z_2)$ avec $\phi(0,0) = 0$, et

$$\phi(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{k,l} z_1^k z_2^l, \quad \text{et} \quad \phi^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} z_1^k z_2^l,$$

où la suite $\{a_{k,l}, (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dite suite des coefficients de la représentation autorégressive du champs aléatoire $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$. $a_{0,0} = 0$ et $a_{k,l} = 0$, pour tout $k < 0$ ou $l < 0$.

La fonction ϕ est dite factorisation optimale (maximale) de f .

Il s'en suit que les coefficients de la représentation MA et AR du champs aléatoire sont liés par les relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} b_{0,0} &= a_{0,0} = 1 \\ b_{i,j} &= \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j b_{k,l} a_{i-k, j-l}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.1.3 Prédiction à h pas

Soit $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ aléatoire stationnaire pûrement non déterminable qui satisfait la condition du théorème 2. Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{Q}^c$, où \mathcal{Q}^c est le complémentaire de \mathcal{Q} , le prédicteur optimal au sens de l'erreur quadratique d'ordre (h_1, h_2) basé sur \mathcal{Q} est

$$\hat{X}(h_1, h_2) = \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \epsilon(h_1 - k, h_2 - l),$$

dont l'erreur de prédiction est

$$X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2) = b_{h_1, h_2} \epsilon(0, 0) + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \epsilon(h_1 - k, h_2 - l)$$

$$+ \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l).$$

En définissant

$$V = |b_{h_1, h_2}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} |b_{k,l}|^2 + \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k,l}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k,l}|^2, \quad (2.6)$$

alors la variance de l'erreur de prédiction est

$$\text{Var}\{X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)\} = \sigma^2 V.$$

où $\sigma^2 = \sigma^2(\mathcal{Q})$

Démonstration. La représentation MA(∞) de $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ est

$$\begin{aligned} X(h_1, h_2) &= b_{h_1, h_2} \varepsilon(0, 0) + \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \\ &+ \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \\ &+ \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \\ &+ \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des innovations, nous obtenons :

$$\hat{X}(h_1, h_2) = \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l)$$

L'erreur de prédiction correspondante est :

$$\begin{aligned} X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2) &= b_{h_1, h_2} \varepsilon(0, 0) \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) + \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \\ &+ \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} b_{k,l} \varepsilon(h_1 - k, h_2 - l) \end{aligned}$$

Et la variance de l'erreur de préecition est

$$\begin{aligned}
 \text{Var}\{X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)\} &= |b_{h_1, h_2}|^2 \text{Var}\{\varepsilon(0, 0)\} + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} |b_{k, l}|^2 \text{Var}\{\varepsilon(h_1 - k, h_2 - 1)\} \\
 &+ \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k, l}|^2 \text{Var}\{\varepsilon(h_1 - 1, h_2 - 1)\} \\
 &+ \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k, l}|^2 \text{Var}\{\varepsilon(h_1 - 1, h_2 - 1)\} \\
 &= \sigma^2 (|b_{h_1, h_2}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=h_2}^{\infty} |b_{k, l}|^2 + \sum_{k=h_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k, l}|^2 + \sum_{k=0}^{h_1-1} \sum_{l=0}^{h_2-1} |b_{k, l}|^2) = \sigma^2 V
 \end{aligned}$$

□

Le corrolaire qui suit quantifie la covariance entre deux erreurs de prédictions.

Corollaire 2.1 (Kohli & Pourahmadi (2014)). *Pour un champs aléatoire pûrement non déterminable $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ vérifiant les conditions du théorème 2, nous avons*

a. *L'autocovariance entre les erreurs de prédiction basées sur le passé \mathcal{Q} , pour deux observations différentes appartenant à \mathcal{Q}^c est*

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}\{X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2), X(h'_1, h'_2) - \hat{X}(h'_1, h'_2)\} &= \sigma^2 b_{h_1, h_2} \bar{b}_{h'_1, h'_2} \\
 + \sigma^2 \left(+ \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=M_2}^{\infty} b_{k, l} \bar{b}_{k+|h_1-h'_1|, l+|h_2-h'_2|} + \sum_{k=M_1}^{\infty} \sum_{l=0}^{M_2-1} b_{k, l} \bar{b}_{k+|h_1-h'_1|, l+|h_2-h'_2|} + \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{k=0}^{M_2-1} b_{k, l} \bar{b}_{k+|h_1-h'_1|} \right) & \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

où $\bar{b}_{k, l}$ représente le conjugué de $b_{k, l}$, $M_1 = \min(h_1, h'_1)$ et $M_2 = \min(h_2, h'_2)$.

b. *La covariance entre $X(0, 0)$ et l'erreur de prédiction de X_{h_1, h_2} basé sur \mathcal{Q} est*

$$\text{Cov}\{X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2), X(0, 0)\} = \begin{cases} \sigma^2 b_{h_1, h_2} \bar{b}_{0, 0} & \text{si } h_1 \geq 0, h_2 \geq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ce qui montre que $X(0, 0)$ et les erreurs de prédiction des observations sont non corrélées lorsque $h_1 < 0$ ou $h_2 < 0$.

2.2 Prédiction avec le quart du plan augmenté

Dans cette section, nous considérons le problème de prédiction de $X(0, 0)$ lorsqu'un nombre fini d'observations est rajouté au passé \mathcal{Q} . En d'autres termes le passé est $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{K}$, où \mathcal{K} représente les indices de l'ensemble engendré par les observations rajoutées au quart du plan. La première étape, naturelle, consiste à généraliser les résultats des série

chronologiques au cas des processus 2-D, et ce, en donnant l'expression de la variance de l'erreur de prédiction en fonction des coefficients de la représentation MA. Toutefois, la caractérisation de cette variance en fonction des coefficients de la représentation AR demeure non résolue.

La projection orthogonale de $X(0,0)$ sur le sous espace linéaire engendré par les variables aléatoires dont les indices appartiennent à $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{K}$ fournit le meilleur prédicteur linéaire de $X(0,0)$. Cependant, en raison de la non orthogonalité des deux sous espaces \mathcal{K} et \mathcal{Q} , il n'est pas évident d'obtenir l'expression de cette projection. C'est pour cette raison qu'on doit exprimer \mathcal{I} comme somme de deux sous espaces orthogonaux. Visant cet objectif, on définit

$$\mathcal{A} = sp \left\{ X(i,j) - \hat{X}_{\mathcal{Q}}(i,j); (i,j) \in \mathcal{K} \right\}$$

où $\hat{X}_{\mathcal{Q}}(i,j)$ est la projection orthogonale de $X(i,j)$ sur \mathcal{Q} .

Le lemme basique suivant est très utile pour le calcul de l'expression du prédicteur.

Lemme 2.1 (Kohli & Pourahmadi (2014)). *Soit $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ aléatoire PND stationnaire satisfaisant les conditions du théorème 2. Supposons que les coefficients de la représentation MA de $\{X(s,t); (s,t) \in \mathbb{Z}^2\}$ sont $\{b_{k,l}; (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$, alors*

(a) $X(0,0) \notin \mathcal{I}$.

(b) \mathcal{Q} et \mathcal{A} sont deux sous espaces orthogonaux de \mathcal{I} vérifiant

$$\mathcal{I} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{A}.$$

(c) La projection orthogonale de $X(0,0)$ sur $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{A}$ est donnée par

$$\hat{X}_{\mathcal{I}}(0,0) = P_{\mathcal{I}}X(0,0) = P_{\mathcal{Q}}X(0,0) + P_{\mathcal{A}}X(0,0),$$

où $P_{\mathcal{Q}}X(0,0)$ et $P_{\mathcal{A}}X(0,0)$ sont les projections orthogonales de $X(0,0)$ sur \mathcal{Q} et \mathcal{A} , respectivement.

(d) La projection orthogonale de $X(0,0)$ sur $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{A}$ est donnée par

$$\hat{X}_{\mathcal{I}}(0,0) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{K}} \sum \beta_{i,j} \left\{ X(i,j) - \hat{X}(i,j) \right\} = \beta' \left(X_{\mathcal{K}} - \hat{X}_{\mathcal{K}} \right),$$

où β' est le transposé du vecteur $\beta = (\beta_{ij}; (i,j) \in \mathcal{K})$. Soit C la matrice de variance-covariance des erreurs de prédiction dans \mathcal{A} dont les éléments sont donnés par (2.7), et $b = \{b_{i,j}, (i,j) \in \mathcal{K}\}$ le vecteur des paramètres MA, alors les équations normalisées suivantes sont vérifiées

$$C\beta = b. \tag{2.8}$$

2.2.1 Cas du passé augmenté d'une seule observation

Lorsque le passé modifié est augmenté d'une seule observation $X(h_1, h_2)$, c'est à dire

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{Q} \cup \{X(h_1, h_2)\} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{K}, \quad (2.9)$$

avec $h_i \geq 0, i = 1, 2$ et $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$.

Théorème 2.2. *Soit $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champs aléatoire PND stationnaire satisfaisant les conditions du théorème 2. Supposons que les coefficients de la représentation MA de $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ sont $\{b_{k, l}; (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$ et σ^2 est la variance des innovations. Alors, le meilleur prédicteur de $X(0, 0)$ basé sur \mathcal{I}_1 est donné par*

$$\hat{X}_{\mathcal{I}_1}(0, 0) = \hat{X}(0, 0) + \beta_{h_1, h_2}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)), \quad (2.10)$$

où

$$\beta_{h_1, h_2} = V^{-1}b_{h_1, h_2},$$

où V est donné par (2.6). La variance de l'erreur de prédiction est

$$\sigma^2(\mathcal{I}_1) = \sigma^2 (1 - V^{-1} |b_{h_1, h_2}|^2). \quad (2.11)$$

Démonstration. Comme \mathcal{A} ne contient qu'une seule observation, du lemme 2.1 s'ensuit :

$$P_{\mathcal{A}}X(0, 0) = \beta_{h_1, h_2} \left(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2) \right),$$

où β_{h_1, h_2} est obtenu par le corrolaire précédent comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_{h_1, h_2} &= \left\{ \text{Var}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)) \right\}^{-1} \text{Cov}(X(0, 0), X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)) \\ &= (\sigma^2 V)^{-1} (\sigma^2 b_{h_1, h_2} b_{0, 0}) \\ &= V^{-1} b_{h_1, h_2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

L'erreur de prédiction est :

$$\begin{aligned} X(0, 0) - \hat{X}_{\mathcal{I}_1}(0, 0) &= X(0, 0) - \hat{X}(0, 0) - \beta_{h_1, h_2}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)) \\ &= \epsilon(0, 0) - \beta_{h_1, h_2}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)). \end{aligned}$$

Et la variance de l'erreur de prédiction est

$$\begin{aligned} \sigma^1(I_1) &= \text{Var}(X(0, 0) - \hat{X}_{\mathcal{I}_1}(0, 0)) \\ &= \text{Var} \left\{ \epsilon(0, 0) - \beta_{h_1, h_2}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)) \right\} \\ &= \text{Var}(\epsilon(0, 0)) + |\beta_{h_1, h_2}|^2 \text{Var}(X(h_1, h_2) - \hat{X}(h_1, h_2)) - 2\beta_{h_1, h_2} \text{Cov}(\epsilon(0, 0), X(h_1, h_2)) \\ &= \sigma^2 - \beta_{h_1, h_2} \text{Cov}(X(0, 0), X(h_1, h_2) - X(h_1, h_2)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

En remplaçant β_{h_1, h_2} par sa valeur donnée par (2.12) on obtient :

$$\sigma^2(I_1) = \sigma^2(1 - V^{-1}|b_{h_1, h_2}|^2).$$

□

Remarque 2.1. De (2.11), il est clair qu'un champ aléatoire stationnaire avec $b_{h_1 h_2} = 0$, l'ajout de $X(h_1, h_2)$ n'a pas d'effet sur la variance de l'erreur du prédicteur $\hat{X}(0, 0)$.

2.2.2 Cas du passé augmenté de plusieurs observations

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la prédiction de $X(0, 0)$ en se basant sur

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{Q} \cup \{X(i, j); 0 \leq i \leq h_1, 0 \leq j \leq h_2, (i, j) \neq (0, 0)\} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{K}, \quad (2.14)$$

où \mathcal{K} est un ensemble quelconque des n observations "futures" après le premier quadrant. L'objectif est donner l'expression du prédicteur dans une telle situation. Aussi, afin d'évaluer la qualité de ce prédicteur le théorème qui suit donne l'expression de l'erreur de prédiction ainsi que sa variance. Il constitue une généralisation du théorème précédent en passant de l'ajout d'une seule observation au cas de plusieurs valeurs ajoutées.

Théorème 2.3 (Kohli & Pourahmadi (2014)). Soit $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ un champ aléatoire PND stationnaire satisfaisant les conditions du théorème 2 avec le passé modifié $\mathcal{I} = \mathcal{Q} \cup \mathcal{K}$. Supposons que les processus des innovations de $\{X(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$ est $\{\epsilon(s, t); (s, t) \in \mathbb{Z}^2\}$, et les paramètres de la représentation MA et AR sont $\{b_{k, l}; (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\{a_{k, l}; (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$, respectivement, alors,

(a) Le vecteur des erreurs de prédiction des observations de \mathcal{K} basé sur le passé \mathcal{Q} peut être exprimé comme :

$$X_{\mathcal{K}} - \hat{X}_{\mathcal{K}} = b_{\mathcal{K}}\epsilon(0, 0) + T'\epsilon_{\mathcal{K}}, \quad (2.15)$$

où $b_{\mathcal{K}} = \{b_{kl}; (k, l) \in \mathcal{K}\}$ est le vecteur des paramètres de la représentation MA dans l'ensemble \mathcal{K} , $\epsilon_{\mathcal{K}}$ est le vecteur indexé par les points du lattice dans l'ensemble \mathcal{K} des observations "futures" avec tous les points dans le rectangle $h_1 \times h_2$.

La matrice T est rectangulaire avec un nombre infini de ligne et un n colonnes.

Les paramètres de la représentation MA apparaissent dans les erreurs de prédiction des n observations de \mathcal{K} correspondant aux n colonnes de T .

(b) La matrice de variance-covariance des vecteurs des erreurs de prédiction $(X_{\mathcal{K}} - \hat{X}_{\mathcal{K}})$ est

$$C = \sigma^2 (b_{\mathcal{K}} b_{\mathcal{K}}^* + TT'), \quad (2.16)$$

où $\bar{T} = (T')^*$

(c) Soit a_k le vecteur de la représentation AR dont les indices sont ordonnés suivant $\epsilon_{\mathcal{K}}$.

Alors,

$$b_{\mathcal{K}} = T'a_{\mathcal{K}}. \quad (2.17)$$

Chapitre 3

Prédiction des modèles MSAR

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à une classe particulière des modèles spatiaux, les modèles autorégressifs spatiaux à moyenne ajustée. Plus précisément, nous détaillons les calculs de l'expression explicite des autocorrélations spatiales, les conditions de stationnarité faibles et le calcul de la meilleure approximation d'une donnée située à l'intérieure d'une grille. Pour le modèle autorégressif spatial multiplicatif, nous allons, à base des travaux de Saber 2017, effectuer une étude comparative des divers prédicteurs par rapport aux critères de proximité de Pitman et de l'erreur quadratique moyenne.

Le modèle considéré le long de ce chapitre est l'autorégressif à moyenne ajustée spatial introduit par Basu & al (1993). Ce modèle vérifie l'équation

$$X(s,t) = \alpha_1 X(s-1,t) + \alpha_2 X(s,t-1) + \alpha_3 X(s-1,t-1) + \epsilon(s,t) + \theta_1 \epsilon(s-1,t) + \theta_2 \epsilon(s,t-1) + \theta_3 \epsilon(s-1,t-1). \quad (3.1)$$

où $\{\epsilon(s,t)\}$ est une suite de variables aléatoire indépendantes telles que:

$$\mathbf{E}\{\epsilon(s,t)\} = 0; \quad \text{Var}\{\epsilon(s,t)\} = \sigma^2.$$

Ce modèle est dit multiplicatif lorsque $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ et $\alpha_3 = -\alpha_1 \alpha_2$.

3.1 Calcul des auto-corrélations

Dans cette section, à base des travaux de Basu et Reinsel (1993), nous donnons l'autocorrélation spatiale d'ordre (s,t) du modèle (3.1). Whittle (1954) et Besag (1972) se sont intéressés à cette question pour le cas particulier correspondant à $\theta_i = 0, \forall i$. Martin (1979) a considéré le modèle autorégressif spatial multiplicatif qui correspond au cas $\alpha_3 = -\alpha_1 \alpha_2$

et $\theta_j = 0, \forall j$. Les résultats obtenus par ces auteurs constituent un cas particulier des autocorrélations du modèle (3.1).

3.1.1 Structure générale des auto-corrélations

En introduisant les opérateurs retard (*Backward*),

$$B_1X(s,t) = X(s-1,t) \quad \text{et} \quad B_2X(s,t) = X(s,t-1).$$

Le modèle (3.1) peut s'écrire comme :

$$X(s,t) = (1 - \alpha_1 B_1 - \alpha_2 B_2 - \alpha_3 B_1 B_2)^{-1} (\epsilon(s,t) + \theta_1 \epsilon(s-1,t) + \theta_2 \epsilon(s,t-1) + \theta_3 \epsilon(s-1,t-1)).$$

Notons que si $1 - \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1 z_2 \neq 0$, pour tout z_1 et z_2 tels-que $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$, Tjostheim (1978) a donné une représentation convergente dans L_2 de $X(s,t)$ qui est :

$$\begin{aligned} X(i,j) = & \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(k+l+r)!}{k! \, l! \, r!} \\ & \alpha_1^k \alpha_2^l \alpha_3^r (\epsilon(i-k-r, j-l-r) \\ & + \theta_1 \epsilon(i-k-r-1, j-l-r) + \theta_2 \epsilon(i-k-r, j-l-r-1) \\ & + \theta_3 \epsilon(i-k-r-1, j-l-r-1)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La proposition suivante donne une condition sur α_1, α_2 et α_3 qui assure la stationnarité faible de la série (3.2).

Proposition 3.1 (Basu & Reinsel (1993)). *Pour le modèle autorégressif spatial donné par (3.2) avec $\Phi(z_1, z_2) = 1 - \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1 z_2$. On a $\Phi(z_1, z_2) \neq 0$, pour $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$ si et seulement si :*

- (i) $|\alpha_i| < 1$ pour tout i .
- (ii) $(1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3)^2 > 0$.
- (iii) $1 - \alpha_2^2 > |\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3|$.

Démonstration.

a.) La condition suffisante.

Supposons que les conditions imposées sur les racines de $\phi(z_1, z_2) = 0$ sont vérifiées. Montrons d'abord la condition (i) qui correspond $|\alpha_i| < 1$.

En posant $z_2 = 0$ dans $\phi(z_1, z_2) = 0$, on obtient $|z_1| = \frac{1}{|\alpha_1|} > 1$ par hypothèse, et donc $|\alpha_1| < 1$.

De la même manière, en posant $z_1 = 0$, nous montrons que $|\alpha_2| < 1$. Pour montrer que $|\alpha_2| < 1$, notons que les racines de $\phi(z_1, z_2) = 0$, correspondent à: $z_2 = (1 - \alpha_1 z_1)/(\alpha_2 + \alpha_3 z_1)$. En posant z_1 égale à 1 et -1 et en utilisant: $(1 - \alpha_1)/|\alpha_2 + \alpha_3| > 1$ et $(1 + \alpha_1)/|\alpha_2 - \alpha_3| > 1$, on en déduit $|\alpha_3| < 1$.

Pour prouver la condition (ii), supposons que $\Delta^2 = (1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)^2 \leq 0$ est vraie, et considérons les valeurs de $(z_1^*$ et $z_2^*)$ tels que:

$$z_1^* = (1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 + \Delta)/2(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)$$

et

$$z_2^* = (1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \Delta)/2(\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)$$

Notons que (z_1^*, z_2^*) est la racine de $\phi(z_1, z_2) = 0$ et il est possible de montrer que Δ^2 est équivalent à $(1 - \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 - 4(\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)^2$.

Par conséquent, $|z_1^*| = |z_2^*| = 1$ si $\Delta^2 \leq 0$ qui appartient ou unité et donc c'est une contradiction. Ainsi la condition (ii) est établie.

En posant $z_2 = \alpha_2$ dans $\phi(z_1, z_2) = 0$, avec $|z_2| < 1$, on aura $z_1 = (1 - \alpha_2^2)/(\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2)$ est plus grand que 1 en valeurs absolue ce qui entraîne la condition (iii).

b.) La condition nécessaire.

Supposons que les conditions (i) et (iii) sont vérifiées, notons que si (ω_1, ω_2) est une solution de $\phi(z_1, z_2) = 0$, alors: $\omega_2 = (1 - \alpha_1\omega_1)/(\alpha_2 + \alpha_3\omega_1)$ et celà entraîne:

$$|\omega_2|^2 = \frac{1 + \alpha_1^2|\omega_1|^2 - 2\alpha_1 Re(\omega_1)}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2|\omega_1|^2 + 2\alpha_2\alpha_3 Re(\omega_1)}$$

Soit $|\omega_1| \leq 1$ et posons $\omega_1 = r \exp(i\phi)$, où $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Il suffit de démontrer que les racines de $\phi(z_1, z_2) = 0$, sont à l'extérieur du disque unité, et donc il est suffisant de montrer que $|\omega_2| > 1$ et que $1 - \alpha_2^2 > M$ tel-que

$$M = \sup_{0 \leq r \leq 1} f(r) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \{\alpha_3^2 - (\alpha_1^2)r^2 + 2r|\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3|\}.$$

La fonction $f(r)$ peut atteindre son maximum dans $0 \leq r \leq 1$ en $r = 1$, dans ce cas, il est nécessaire d'avoir $1 - \alpha_2^2 > \alpha_3^2 - \alpha_1^2 + 2|\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3|$, ce qui est assuré par la condition (ii) et en utilisant aussi (i) on obtient $1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \geq 0$.

Autrement, (si $\alpha_3^2 - \alpha_1^2 < 0$), $f(r)$ peut atteindre son maximum en un point intérieur $r_0 = |\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3|/(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) < 1$ avec le maximum

$$M = f(r_0) = |\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3|r_0 \leq |\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3|$$

Par conséquent, $1 - \alpha_2^2 > M$ s'en suit de la condition (iii) ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

Nous allons dans ce qui suit nous intéresser au calcul des auto-covariance du modèle considéré. De (3.2), il s'en suit :

$$\mathbf{E}(X(k,l).\epsilon(i,j)) = 0 \text{ pour } k < i \text{ ou } l < j \text{ et } \mathbf{E}(X(i,j).\epsilon(i,j)) = \sigma^2 \quad (3.3)$$

Soit ρ_{st} la corrélation en (s,t) , définie par :

$$\rho_{st} = \frac{\mathbf{E}(X(i,j)X(i-s,j-t))}{\gamma} \text{ où } \gamma = \text{Var}(X(i,j)).$$

Notons que $\rho_{-s,-t} = \frac{\mathbf{E}(X(i,j)X(i+s,j+t))}{\gamma} = \mathbf{E}(X(i,j)X(i-s,j+s))/\gamma = \rho_{s,t}$. Par conséquent, il est possible de limiter l'étude au demi-plan $\{(s,t); s \geq 0; -\infty < t < +\infty\}$ pour obtenir des corrélations bivariées.

En utilisant (3.1), nous avons :

$$\begin{aligned} \gamma\rho_{st} &= \gamma(\alpha_1\rho_{s-1,t} + \alpha_2\rho_{s,t-1} + \alpha_3\rho_{s-1,t-1}) \\ &+ \mathbf{E}\{\epsilon(i,j).X(i-s,j)\} + \theta_1\mathbf{E}\{\epsilon(i-1,j).X(i-s,j-t)\} \\ &+ \theta_2\mathbf{E}\{\epsilon(i,j-1).X(i-s,t-j)\} \\ &+ \theta_3\mathbf{E}\{\epsilon(i-1,j-1).X(i-s,j-t)\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.3), on déduit $\mathbf{E}(\epsilon(i-1,j-1)X(i-s,j-t)) = 0$, pour $s > 1$ ou $t > 1$ et donc

$$\rho_{st} = \alpha_1\rho_{s-1,t} + \alpha_2\rho_{s,t-1} + \alpha_3\rho_{s-1,t-1} \quad (3.5)$$

pour : $\{s > 1 \text{ et } -\infty < t < +\infty\}$ et $\{s \leq 1 \text{ et } t > 1\}$.

La résolution explicite de cette équation aux différences spatiales et détaillée dans Mickens (1987), chapitre 5. Afin de résoudre explicitement cette équation aux différences partiales, l'auteur exprime la solution de la forme générale $\lambda^s \mu^{-t}$ pour $s > 1$ et $t < -1$. Notons que (3.4) implique aussi

$$\rho_{st} = \alpha_1\rho_{s+1,t} + \alpha_2\rho_{s,t+1} + \alpha_3\rho_{s+1,t+1}, \quad (3.6)$$

pour $s > 1$ ou $t < -1$ ce qui nous amène

$$\alpha_1\lambda + \alpha_2\mu^{-1} + \lambda\alpha_3\mu^{-1} = 1 = \alpha_1\lambda^{-1} + \alpha_2\mu + \lambda^{-1}\alpha_3\mu. \quad (3.7)$$

En éliminant μ des deux équations (3.7), on obtient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)\lambda^2 - \{1 + \alpha_1^2 - (\alpha_2^2 + \alpha_3^2)\}\lambda + (\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3) = 0. \quad (3.8)$$

Les deux racines de (3.8) sont λ et λ^{-1} , et donc une racine réelle λ existe si:

$$(1 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)^2 - 4(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)^2 > 0.$$

Notons que ceci, avec les conditions de la Proposition 3.1 sont équivalentes à affirmer que $1 - \alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 - \alpha_3 z_1 z_2 \neq 0$ pour $|z_1| \leq 1$ et $|z_2| \leq 1$.

Lorsque $\alpha_3 = 0$, la condition se réduit à $|\alpha_1| + |\alpha_2| < 1$. De (3.7), les relations entre λ et μ sont : $\mu = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 \lambda}{1 - \alpha_1 \lambda}$ et $\lambda = \frac{\alpha_1 + \alpha_3 \mu}{1 - \alpha_2 \mu}$.

Afin d'obtenir la représentation explicite de ρ_{st} pour le reste de la région du quadrant $s \geq 0$ et $t \leq 0$ nous divisons cette région en deux sous régions et pour trouver les solutions $\rho_{s,t}$, nous utilisons simultanément les équations aux différences spatiales pour ces deux sous régions.

En un premier temps, considérons les relations pour la région $s > 1$ avec $t = 0$ et $t = -1$. nous remarquons que pour $s > 1$, on aura $\rho_{s,0} = \alpha_1 \rho_{s-1,0} + \alpha_2 \rho_{s,-1} + \alpha_3 \rho_{s-1,-1}$. Aussi, en utilisant $\mathbf{E}(\epsilon(i,j)X(i+s,j)) = \sigma^2(\alpha_1 + \theta_1)\alpha_1^{s-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} \rho_{s,-1} = \rho_{-s,1} &= \alpha_1 \rho_{s+1,-1} + \alpha_2 \rho_{s,0} + \alpha_3 \rho_{s+1,0} \\ &+ \frac{\sigma^2}{\gamma}(\alpha_1 + \theta_1)(\theta_3 + \alpha_1 \theta_3)\alpha_1^{s-1}, \quad s > 1. \end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour $s > 1$,

$$-(\alpha_2 + \alpha_3 B_1^{-1}) \rho_{s,0} + (1 - \alpha_1 B_1^{-1}) \rho_{s,-1} = (\sigma^2/\gamma)(\alpha_1 + \theta_1)(\theta_2 + \alpha_1 \theta_3)\alpha_1^{s-1}. \quad (3.9)$$

En utilisant ce qui précède, on obtient : $\rho_{s,-1} = \rho_{2,-1}\lambda^{s-2}$ et $\rho_{s,0} = (\rho_{2,0} - \rho_{2,-1}\mu^{-1})\alpha_1^{s-1} + \mu_{2,-1}\mu^{-1}\lambda^{s-2}$, $s > 1$.

Dans ce qui suit, nous considérons la région $t > 1$ avec $s = 0$ et $s = -1$. ce qui est équivalent à considérer la région $t < -1$ avec $s = 0$ et $s = -1$.

dans le même ordre d'idée que $s > 1$ avec $t = 0$ et $t = -1$, nous pouvons montrer que pour $t > 1$,

$$\begin{aligned} \rho_{-1,t} &= p_{1,-t} = p_{1,-2}\mu^{t-2} \\ \rho_{0,-1} &= \rho_{0t} = (\rho_{02} - \rho_{1,-2}\lambda^{-1})\alpha_2^{t-2} + \mu_{1,-2}\lambda^{-1}\mu^{t-2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ainsi, il est clair qu'à partir des développements ci-dessus que les corrélations $\rho_{s,t}$ pour le quadrant $s \geq 0$ et $t \leq 0$ seront obtenues une fois que les valeurs initiales $\rho_{1,0}$, $\rho_{0,1}$, $\rho_{1,-1}$, $\rho_{2,0}$, $\rho_{0,2}$, $\rho_{1,-2}$, $\rho_{2,-1}$. sont connues.

Il est donc possible de déterminer toutes les valeurs de $\rho_{s,t}$ à partir de ces valeurs initiales. Les propriétés de l'auto-corrélation du modèle (3.1) sont résumées par la propriété ci dessous.

Proposition 3.2. [Basu & Reinsel (1993)]. Pour un modèle autorégressif spatial vérifiant (3.1), les auto-corrélations spatiales $\rho_{s,t}$ sont données explicitement par

$$\rho_{s,0} = \lambda^{s-1} \rho_{10} + \frac{\sigma^2 (\theta_2 + \alpha_1 \theta_3)(\alpha_1 + \theta_1)}{\gamma (\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3)} (\lambda^{s-1} - \alpha_1^{s-1}), \quad s > 0, \quad (3.11)$$

$$\rho_{s,-1} = \rho_{1,-1} \lambda^{s-1}, \quad s > 0, \quad (3.12)$$

$$\rho_{0,t} = \mu^{t-1} \rho_{0,1} + \frac{\sigma^2 (\theta_1 + \alpha_2 \theta_3)(\alpha_2 + \theta_2)}{\gamma (\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3)} (\mu^{t-1} - \alpha_2^{t-1}), \quad t > 0, \quad (3.13)$$

$$\rho_{1,t} = \rho_{1,-1} \mu^{-t-1}, \quad t < 0, \quad (3.14)$$

et

$$\rho_{s,t} = \rho_{1,-1} \lambda^{s-1} \mu^{-t-1}, \quad s \geq 1 \text{ et } t \leq 1, \quad (3.15)$$

avec les valeurs initiales données par

$$\rho_{1,-1} = \lambda \rho_{0,1} + [\lambda / (\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3)] f_4, \quad \rho_{1,-1} = \mu \rho_{10} + [\mu / (\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3)] f_4^* \quad (3.16)$$

$$\rho_{1,0} = \lambda + [\lambda / (\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3)] (\mu f_4^* + \alpha_3 f_2 + f_3), \quad (3.17)$$

$$\rho_{0,1} = \mu + [\mu / (\alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3)] (\lambda f_4 + f_2 + \alpha_3 f_3). \quad (3.18)$$

Démonstration. Pour obtenir les valeurs initiales de $\rho_{s,t}$: (pour $s = 0, 1, 2$ et $t = 0, -1, -2$), rappelons que $\rho_{s,t}$ pour $s > 1$ et $t < -1$ est une constante que nous notons C . Les équations données ci-dessous permettent l'obtention des corrélationsse initiales, et ce, en se basant sur (3.4).

$$\begin{aligned} (A.1) \quad & \rho_{0,0} = 1 = \alpha_1 \rho_{1,0} + \alpha_2 \rho_{0,1} + \alpha_3 \rho_{1,1} + f_1, \\ (A.2, A.3) \quad & \rho_{0,1} = \alpha_1 \rho_{1,-1} + \alpha_2 + \alpha_3 \rho_{1,0} + f_2, \quad \rho_{1,0} = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_{1,-1} + \alpha_3 \rho_{0,1} + f_3, \\ (A.4a) \quad & \rho_{1,-1} = \alpha_1 \rho_{0,1} + \alpha_2 \rho_{1,-2} + \alpha_3 \rho_{0,2} + f_4, \\ (A.4b) \quad & \rho_{1,-1} = \alpha_1 \rho_{2,-1} + \alpha_2 \rho_{1,0} + \alpha_3 \rho_{2,0} + f_4^*, \\ (A.5a, b) \quad & \rho_{2,0} = \alpha_1 \rho_{1,0} + \alpha_2 \rho_{2,-1} + \alpha_3 \rho_{1,-1}, \quad \rho_{0,2} = \alpha_1 \rho_{1,-2} + \alpha_2 \rho_{0,1} + \alpha_3 \rho_{1,-1} \\ (A.6a) \quad & \rho_{2,-1} = \alpha_1 \rho_{1,-1} + \alpha_2 \rho_{2,-2} + \alpha_3 \rho_{1,-2}, \\ (A.6b) \quad & \rho_{1,-2} = \alpha_1 \rho_{2,-2} + \alpha_2 \rho_{1,-2} + \alpha_3 \rho_{2,-1}, \\ (A.7) \quad & \rho_{2,-2} = \alpha_1 \rho_{1,-2} + \alpha_2 \rho_{2,-3} + \alpha_3 \rho_{1,-3}, \\ (A.8) \quad & \rho_{1,1} = \alpha_1 \rho_{0,1} + \alpha_2 \rho_{1,0} + \alpha_3 + (\sigma^2 / \gamma) \theta_3. \end{aligned}$$

Les formes des fonctions f sont

$$(A.9a, b) \quad f_1 = (\sigma^2 / \gamma) [1 + (\alpha_1 + \theta_1)(\theta_1 + \alpha_2 \theta_3) + (\alpha_2 + \theta_2)(\theta_2 + \alpha_1 \theta_3) + \theta_3(\alpha_3 + \theta_3)]$$

$$(A.10a, b) \quad f_2 = (\sigma^2 / \gamma) [\theta_2 + \theta_3(\alpha_1 + \theta_1)]; \quad f_3 = (\sigma^2 / \gamma) [\theta_1 + \theta_3(\alpha_2 + \theta_2)];$$

$$(A.10a, b) \quad f_4 = (\sigma^2 / \gamma)(\alpha_2 + \theta_2)(\theta_1 + \alpha_2 \theta_3); \quad f_4^* = (\sigma^2 / \gamma)(\alpha_1 + \theta_1)(\theta_2 + \alpha_1 \theta_3).$$

Supposons qu'au moins un des $\alpha_i = 0$, ceci entraîne que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ Après une suite de substitutions algébriques dans (A.7), (A.6) et (A.5); nous aboutissons aux relations suivantes:

$$(A.11a,b,c) \quad \rho_{2,-2} = \lambda\rho_{1,-2}, \quad \rho_{1,-2} = \mu\rho_{1,-1}, \quad \rho_{2,-1} = \lambda\rho_{1,-1},$$

avec

$$(A.12a,b) \quad \rho_{2,0} = \alpha_1\rho_{1,0} + (\alpha_3 + \alpha_2\lambda)\rho_{1,-1}, \quad \rho_{0,2} = \alpha_2\rho_{0,1} + (\alpha_3 + \alpha_1\mu)\rho_{1,-1}.$$

En substituant (A.11b) et (A.12b) dans (A.4a), et (A.11c) et (A.11c) et (A.12a) dans (A.4b) respectivement on aboutit à

$$(A.13a,b) \quad \rho_{1,-1} = \lambda\rho_{0,1} + [\lambda/(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)]f_4, \quad \rho_{1,-1} = \mu\rho_{1,0} + [\mu/(\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)]f_4^*,$$

En remplaçant (A.2) et (A.13b) dans (A.3) et après des substituons similaires de (A.3) et (A.13a) dans (A.2) on obtient

$$(A.14a) \quad \rho_{1,0} = \lambda + [\lambda/(\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)](\mu f_4^* + \alpha_3 f_2 + f_3),$$

$$(A.14b) \quad \rho_{0,1} = \mu + [\mu/(\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)](\lambda f_4 + f_2 + \alpha_3 f_3),$$

Au final, en remplaçant ces valeurs dans les expressions (3.11) et (3.12) pour $\rho_{s,0}$, $\rho_{s,-1}$, $\rho_{0,t}$ et $\rho_{1,-t}$, on obtient les résultats (3.13)-(3.18) de la proposition (3.2). \square

3.2 problème d'interpolation

A présent, nous considérons le problème d'interpolation de données générées par le modèle autorégressif spatial (3.1). Plus précisément, nous calculons l'espérance conditionnelle de $X(k,l)$ située dans une grille. Pour simplifier les notations nous notons $X(k,l) = X_{k,l}$. Par convenances, nous supposons aussi que la donnée à interpoler est située à l'intérieur de la grille de dimension $m \times n$ et ainsi, la meilleure approximation de cette dernière $\hat{X}_{k,l}$ s'obtient en minimisant $\sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m \epsilon_{i,j}^2$ où $\epsilon_{i,j} = X_{i,j} - \alpha_1 X_{i-1,j} - \alpha_2 X_{i,j-1} - \alpha_3 X_{i-1,j-1}$. Pour obtenir l'expression de $\hat{X}_{k,l}$, nous dérivons S par rapport à $X(k,l)$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m \epsilon_{i,j}^2 \\ &= (X_{k,l}\alpha_1 X_{k-1,l} - \alpha_2 X_{k,l-1} - \alpha_3 X_{k-1,l-1})^2 \\ &\quad + (X_{k+1,l} - \alpha_1 X_{k,l} - \alpha_2 X_{k+1,l-1} - \alpha_3 X_{k,l-1})^2 \\ &\quad + (X_{k,l+1} - \alpha_1 X_{k-1,l+1} - \alpha_2 X_{k,l} - \alpha_3 X_{k-1,l})^2 \\ &\quad + (X_{k+1,l+1} - \alpha_1 X_{k,l+1} - \alpha_2 X_{k+1,l} - \alpha_3 X_{k,l})^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donc:

$$\begin{aligned} \frac{d(S)}{d(X_{k,l})} &= 2(X_{k,l} - \alpha_1 X_{k-1,l} - \alpha_2 X_{k,l-1} - \alpha_3 X_{k-1,l-1}) \\ &\quad - 2\alpha_1 (X_{k+1,l} - \alpha_1 X_{k,l} - \alpha_2 X_{k+1,l-1} - \alpha_3 X_{k,l-1}) \\ &\quad - 2\alpha_2 (X_{k,l+1} - \alpha_1 X_{k-1,l+1} - \alpha_2 X_{k,l} - \alpha_3 X_{k-1,l}) \\ &\quad - 2\alpha_3 (X_{k+1,l+1} - \alpha_1 X_{k,l+1} - \alpha_2 X_{k+1,l} - \alpha_3 X_{k,l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 X_{k,l}) = 2(-\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)(X_{k-1,l} + X_{k+1,l}) \\
 &+ 2(-\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)(X_{k,l-1} + X_{k,l+1}) - 2\alpha_3(X_{k-1,l-1} + X_{k+1,l+1}) + 2\alpha_1\alpha_2(X_{k-1,l+1} + X_{k+1,l-1}) \\
 &\Rightarrow \hat{X}_{k,l} = \frac{1}{1 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \{(\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3)(X_{k-1,l} + X_{k+1,l}) \\
 &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)(X_{k,l-1} + X_{k,l+1}) + \alpha_3(X_{k-1,l-1} + X_{k+1,l+1}) - \alpha_1\alpha_2(X_{k-1,l+1} + X_{k+1,l-1})\} \\
 &S = \sum_{i=2}^m \sum_{j=2}^m \epsilon_{i,j}^2 \\
 &= (X_{k,l} - \alpha_1 X_{k-1,l} - \alpha_2 X_{k,l-1} - \alpha_3 X_{k-1,l-1})^2 \\
 &\quad + (X_{k+1,l} - \alpha_1 X_{k,l} - \alpha_2 X_{k+1,l-1} - \alpha_3 X_{k,l-1})^2 \\
 &\quad + (X_{k,l+1} - \alpha_1 X_{k-1,l+1} - \alpha_2 X_{k,l} - \alpha_3 X_{k-1,l})^2 \\
 &\quad + (X_{k+1,l+1} - \alpha_1 X_{k,l+1} - \alpha_2 X_{k+1,l} - \alpha_3 X_{k,l})^2 + C \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dX_{k,l}} &= 2(X_{k,l} - \alpha_1 X_{k-1,l} - \alpha_2 X_{k,l-1} - \alpha_3 X_{k-1,l-1}) \\
 &\quad - 2\alpha_1(X_{k+1,l} - \alpha_1 X_{k,l} - \alpha_2 X_{k+1,l-1} - \alpha_3 X_{k,l-1}) \\
 &\quad - 2\alpha_2(X_{k,l+1} - \alpha_1 X_{k-1,l+1} - \alpha_2 X_{k,l} - \alpha_3 X_{k-1,l}) \\
 &\quad - 2\alpha_2(X_{k+1,l+1} - \alpha_1 X_{k,l+1} - \alpha_2 X_{k+1,l} - \alpha_3 X_{k,l}) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2^2 + 2\alpha_3^2 X_{kl}) &= (-\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)(X_{k-1,l} + X_{k+1,l}) \\
 &\quad + 2(-\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)(X_{k,l-1} + X_{k,l+1}) \\
 &\quad - 2\alpha_3(X_{k-1,l-1} + X_{k+1,l+1}) + 2\alpha_1\alpha_2(X_{k-1,l+1} + X_{k+1,l-1}) \\
 &\Rightarrow (1 + \alpha_1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)X_{k,l} = (-\alpha_1 + \alpha_2\alpha_3)(X_{k-1,l} + X_{k+1,l}) \\
 &\quad + (-\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3)(X_{k,l-1} + X_{k,l+1}) \\
 &\quad - \alpha_3(X_{k-1,l-1} + X_{k+1,l+1}) + \alpha_1\alpha_2(X_{k-1,l+1} + X_{k+1,l-1}) \\
 &\Rightarrow \hat{X}_{k,l} = \frac{1}{1 + \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \{(\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3)(X_{k-1,l} + X_{k+1,l}) \\
 &\quad + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3)(X_{k,l-1} + X_{k,l+1}) \\
 &\quad + \alpha_3(X_{k-1,l-1} + X_{k+1,l+1}) \\
 &\quad + \alpha_1\alpha_2(X_{k-1,l+1} + X_{k+1,l-1})\}
 \end{aligned}$$

3.3 Etude comparative des prédicteurs

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au modèle autorégressif spatial multiplicatif MSAR(1), qui correspond au cas particulier : $\alpha_3 = -\alpha_1\alpha_2$ avec $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1$. Ce modèle a été intensivement relaté dans la littérature statistique. Nous allons à base des travaux de Saber 2017, effectuer une étude comparative de certains prédicteurs.

Notre objectif, est de comparer les interpolations de certaines données, en retenant l'erreur quadratique moyenne et la proximité de Pitman comme critères du comparaison.

Ce critère a été développé par Pitman (1937) afin de comparer deux estimateurs en compétition. Plus précisément, l'estimateur $\hat{\theta}_1$ de θ domine l'estimateur $\hat{\theta}_2$ au sens de Pitman si et seulement si :

$$P \left\{ |\hat{\theta}_1 - \theta| < |\theta_2 - \theta_1| \right\} > \frac{1}{2}.$$

Nous proposons deux prédicteurs linéaires de $X(i,j)$ du modèle (1,1); ces deux prédicteurs se distinguent du choix du support de prédiction. Le premier prédicteur $X_{i,j}^1$ de $X_{i,j}$ est celui basé sur le support

$$O(i,j)^1 = \{(s,t); (s \leq i, t \leq j), (s \geq i, t \geq j), |s - i| \leq 2, (s,t) \neq (i,j)\} \quad (3.22)$$

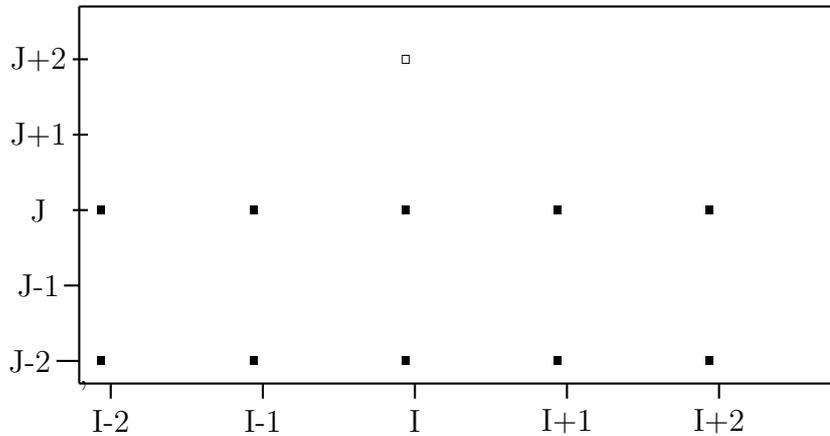


FIG. 3.1 – Localisation des observations $O(i,j)^1$ permettant d'effectuer l'extrapolation

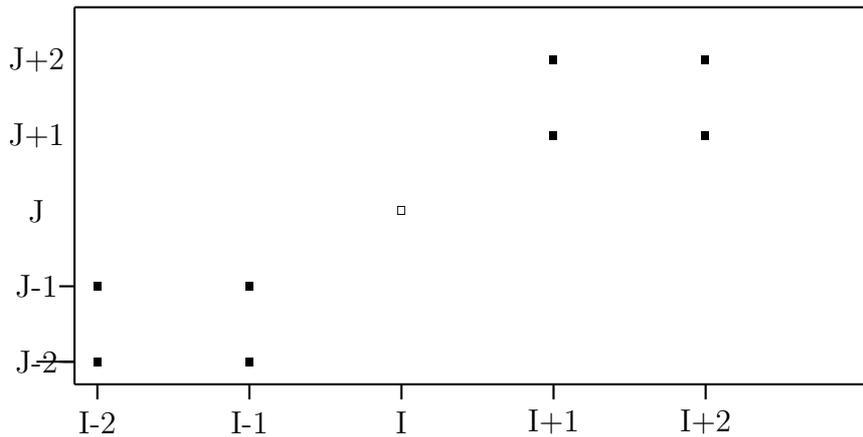


FIG. 3.2 – Localisation des observations $O(i,j)^2$ permettant d'effectuer l'interpolation

Le deuxième prédicteur de $X_{i,j}$ est $X_{i,j}^2$ obtenu par projection sur le support $O_{i,j}^2$. Les deux figures caractérisent les localisations des données observées, désignées par ■ et la

donnée à prédire représentée par \square . Il ressort que le nombre de sommets de $O_{i,j}^1 = 8$ et ce lui de $O_{i,j}^2$ est 10. Le théorème qui suit donne les expressions explicites des deux prédicteurs.

Théorème 3.1 (Saber, 2017). *Soit $\{X_{i,j}\}$ un MSAR(1) vérifiant l'équation*

$$X_{i,j} = \alpha_1 X_{i-1,j} + \alpha_2 X_{i,j-1} - \alpha_1 \alpha_2 X_{i-1,j-1} + \epsilon_{i,j} \quad (3.23)$$

où $|\alpha_1| < 1$ et $|\alpha_2| < 1$ et les $\{\epsilon_{i,j}\}$ sont des variables aléatoires non corrélées, centrées et de variance $\sigma^2 < \infty$. Alors, le meilleur prédicteur linéaire de $X_{i,j}$ basé sur $O(i,j)^k$; $k = 1, 2$ par rapport à l'erreur quadratique moyenne sont :

$$\hat{X}_{i,j}^1 = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 X_{i+1,j+1} & i = 1, j = 1, \dots, n-1; j = 1, i = 1, \dots, m-1 \\ \alpha_2 X_{i,j-1} & i = 1, j = n \\ \alpha_1 \alpha_2 (X_{i-1,j-1} + X_{i+1,j+1}) & i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1 \\ \frac{1}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2} (\alpha_1 (1 - \alpha_2^2)) X_{i-1,j} \\ + \alpha_2 (1 - \alpha_1^2) X_{i,j+1} & i = m, j = 1 \\ \alpha_1 \alpha_2 X_{i-1,j-1} & i = m, j = 2, \dots, n; j = n, i = 2, \dots, m. \end{cases}$$

et

$$\hat{X}_{i,j}^2 = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 X_{i+1,j+1} & j = 1, i = 1, \dots, m-1 \\ \frac{1}{1 - \alpha_1^2 \alpha_2^2} (\alpha_1 (1 - \alpha_2^2)) X_{i-1,j} \\ + \alpha_2 (1 - \alpha_1^2) X_{i,j+1} & j = 1, i = m \\ \alpha_2 X_{i,j-1} & j = 2, \dots, n, i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Démonstration. Les deux prédicteurs sont des combinaisons linéaires des données observées que nous notons $\hat{X}_{i,j}^k = \sum_{(s,t) \in O_{i,j}^k} \alpha_{s,t} X_{s,t}$. Par l'application du théorème de projection orthogonal pour tout $k = 1, 2$, on a

$$\mathbf{E} \left\{ \left(X_{i,j} - \sum_{(s,t) \in O_{i,j}^k} \alpha_{s,t} X_{s,t} \right) X_{u,v} \right\} = 0, \quad \text{pour tout } (u,v) \in O_{i,j}^k.$$

Le developpement de ces calculs, nous donne:

$$\mathbf{E} (X_{s+h_1, t+h_2} X_{s,t}) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{(\alpha_2^2 - 1)(\alpha_1^2 - 1)} \alpha_1^{|h_1|} \alpha_2^{|h_2|}.$$

Ainsi, les coefficients $\alpha_{s,t}$ s'obtiennent en résolvant les équations suivantes :

$$\alpha_1^{|i-u|} \alpha_2^{|j-v|} = \sum_{(s,t) \in O_{i,j}^k} \alpha_{s,t} \alpha_1^{|s-u|} \alpha_2^{|t-v|} \forall (u,v) \in O_{i,j}^k; k = 1, 2. \quad (3.24)$$

Dépendant du nombre des membres de $O_{i,j}^k$, (3.24) est un système d'équations avec le même ensemble d'inconnues.

Pour résoudre ces équations, nous considérons la matrice \mathbf{A}_r , les vecteur \mathbf{B}_r , $r = 1, \dots, 17$, la matrice Ω , le vecteur Ω_ω et le vecteur Γ_ω $\omega = 1, \dots, 13$ donnés en appendix.

Les éléments constituant les matrices \mathbf{A}_r et Γ_ω sont : $\alpha_1^{|s-u|} \alpha_2^{|t-v|}$ pour (s,t) et (u,v) dans $O_{i,j}^k$, $k = 1, 2$ respectivement.

Aussi, les vecteurs \mathbf{B}_r et Γ_ω sont constitués des composantes $\alpha_1^{|i-u|} \alpha_2^{|j-u|}$. Nous définissons les vecteurs des coefficients inconnus

$$\alpha_{i,j}^{1,r} = (\alpha_{k,l}; (k,l) \in O_{i,j}^{1,r}), r = 1, \dots, 17$$

et

$$\alpha_{i,j}^{2,\omega} = (\alpha_{k,l}; (k,l) \in O_{i,j}^{1,\omega}), \omega = 1, \dots, 13.$$

Les autres parties du prédicteur sont définies par

$$\hat{X}_{i,j}^{1,r} = \alpha_{i,j}^{1,r} \mathbf{X}_{i,j}^{1,r}, \hat{X}_{i,j}^{2,\omega} = \alpha_{i,j}^{2,\omega} \mathbf{X}_{i,j}^{2,\omega}, r = 1, \dots, 17, \omega = 1, \dots, 13 \quad (3.25)$$

où

$$\alpha_{i,j}^{1,r} = \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r, \alpha_{i,j}^{2,\omega} = \Omega^{-1} \Gamma_\omega, r = 1, \dots, 17, \omega = 1, \dots, 13. \quad (3.26)$$

Après, inversion de ces 30 matrices dont les expressions sont données en appendix, et le calcul des produits de vecteurs correspondants, les coefficients obtenus sont substitués dans (3.25) afin de compléter la preuve. \square

3.3.1 Comparaison des prédicteurs par rapport au critère PMC et MSP

Dans cette partie, les deux prédicteurs sont comparés par rapport aux critères MSP et PMC.

Les expressions explicites des MSP et des PMC des deux prédicteurs sont assez compliquées pour les valeurs mathématiquement. C'est pour cette raison, que nous allons procéder à leurs évaluation par simulations. Ainsi, les deux quantités seront estimées par:

$$\widehat{MSP}_x(\hat{X}) = \frac{\sum_{i,j}^{m,n} (\hat{X}_{i,j} - X_{i,j})^2}{mn} \quad (3.27)$$

et

$$\widehat{PMC}_x(\hat{X}|\tilde{X}) = \frac{\sum_{i,j}^{m,n} U(|\tilde{X}_{i,j} - X_{i,j}| - |\hat{X}_{i,j} - X_{i,j}|)}{mn} \quad (3.28)$$

ou $U(t)$ vaut 1 pour t positif et 0 si non.

Notons que ces critères dépendent de α_1 et α_2 , c'est pourquoi, il y'a lieu de les calculer pour toutes les valeurs α_1 et α_2 dans l'intervalle $] - 1 , 1[$.

Pour les erreurs gaussiennes, les résultats obtenues sont similaires pour des valeurs positives ou négatives. Nous nous limitons l'étude à des valeurs α_1 et α_2 appartenant à $]0 , 1[$ dans tous les cas.

Toutes les simulations sont réalisées à base du langage de programmation R.3.5.0.

Nous générons les variables $X_{i,j}$ comme réalisation du modèle MSAR(1) dans une grille de $150 * 150$. A chaque itération, nous calculons les deux prédicteurs et les valeurs des deux critères \widehat{PMC} et \widehat{MSP} associés.

Comme les critères (3.27) et (3.28) sont calculés par simulation, ils ne peuvent pas être évalués pour toutes les valeurs de $[0,1]$. Toutefois, ces critères sont obtenus dans

$\Theta = \{0,01,0,02,0,03, \dots ,0,99\}$ Les figure 3.3 et 3.4 représente le MSP, en dimension 3, des deux prédicteurs $\hat{X}_{i,j}^1$ $\hat{X}_{i,j}^2$ en fonction des paramètres $a = \alpha_1$ et $b = \alpha_2$.

Interprétation des résultats.

Il ressort des représentations graphiques 3.3, 3.4 et 3.5 que :

- Le MSP de $\hat{X}_{i,j}^1$ augmente en fonction de α_1 et α_2 .
- Bien que la croissance de MSP du prédicteur $\hat{X}_{i,j}^1$ dépend de α_1 et α_2 .
- La croissance du MSP du second prédicteur dépend beaucoup plus du paramètres α_2 que α_1 .
- La valeur de $\widehat{PMC}(\hat{X}^1/\hat{X}^2)$ se comporte comme fonction croissante de b mais comme fonction décroissance de a .

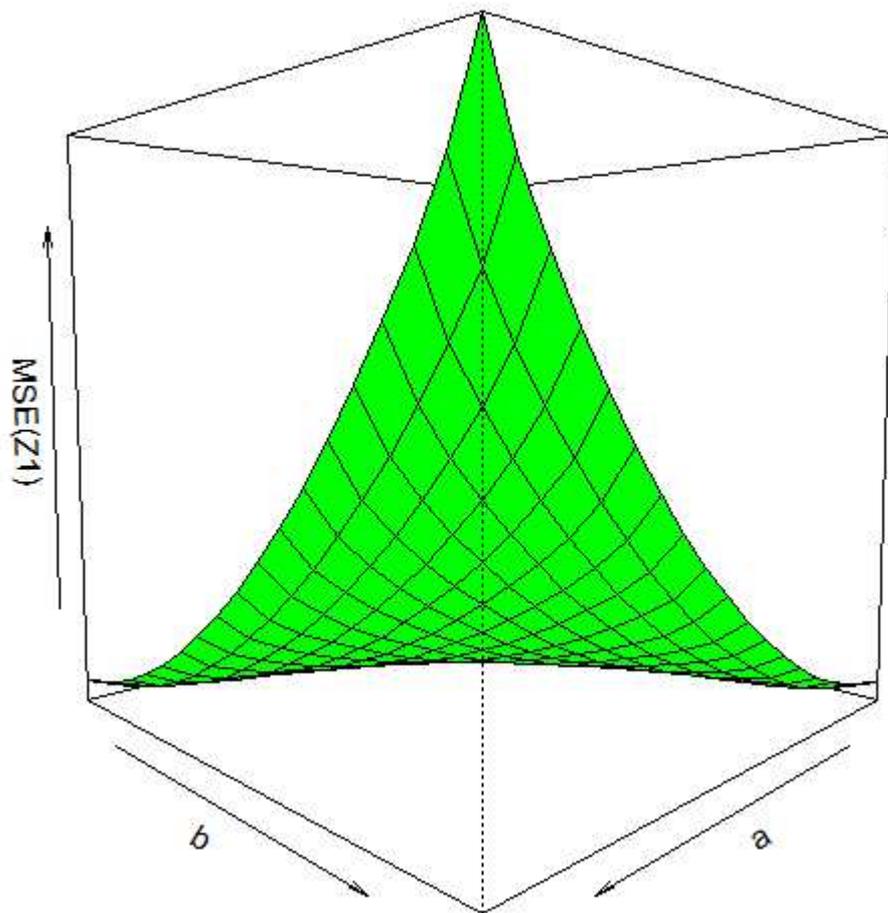


FIG. 3.3 – Représentation en 3-D du MSE du prédicteur $X_{i,j}^1$

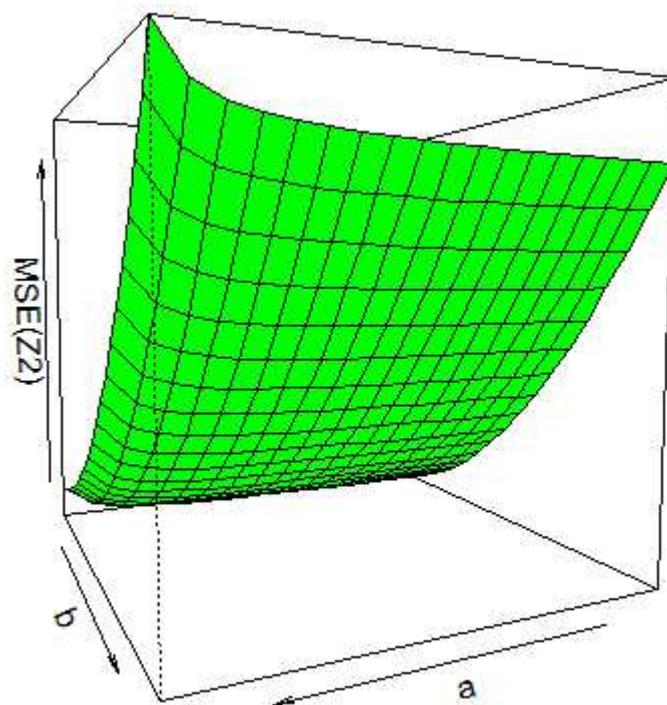


FIG. 3.4 – Représentation en 3-D du MSE du prédicteur $X_{i,j}^2$

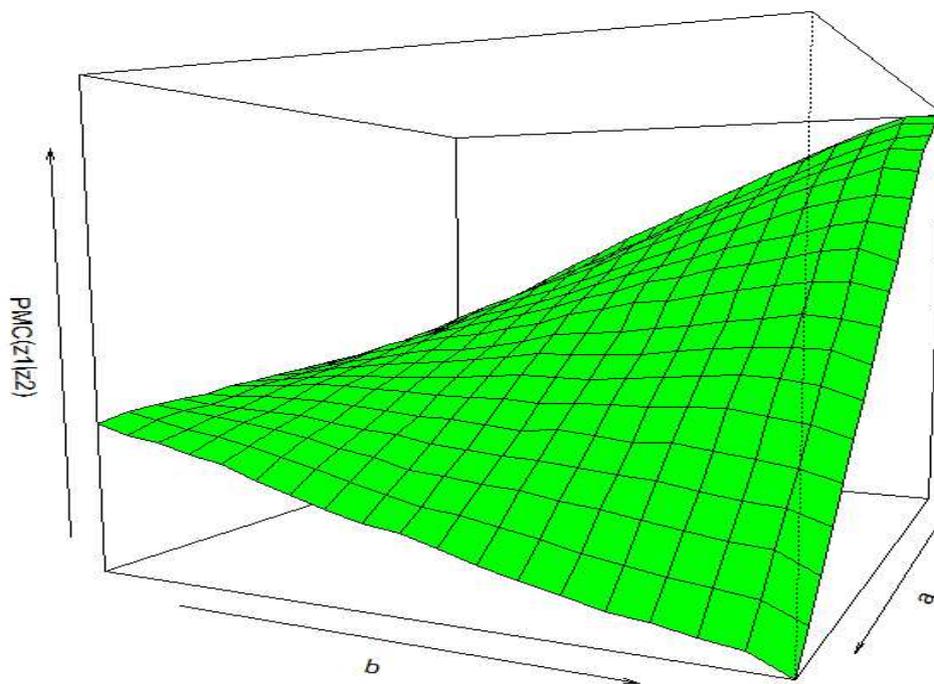


FIG. 3.5 – Représentation en 3-D du $\widehat{PMCF}_X(\hat{X}^1/\hat{X}^2)$ du prédicteur $X_{i,j}^2$

Critère	$\text{PMC}(\hat{Z}^1 \setminus \hat{Z}^2) > 0.5$	$\text{MSP}(\hat{Z}^1) > \text{MSP}(\hat{Z}^2)$
Pourcentage	78	87

TAB. 3.1 – *pourcentage des paramètres pour lesquels un prédicteur est meilleur qu'un autre.*

- La table 3.1 nous donne les valeurs des paramètres α_1 et α_2 dans Θ pour lesquels un prédicteur est meilleur qu'un autre. En effet, afin d'approuver ce résultat; les moyenne du MSP sont calculées pour différentes valeurs de α_1 et α_2 dans la figure 3.6. Cette figure caractérise les valeurs des paramètres pour lesquels l'interpolation est meilleure que l'extrapolation et inversement.

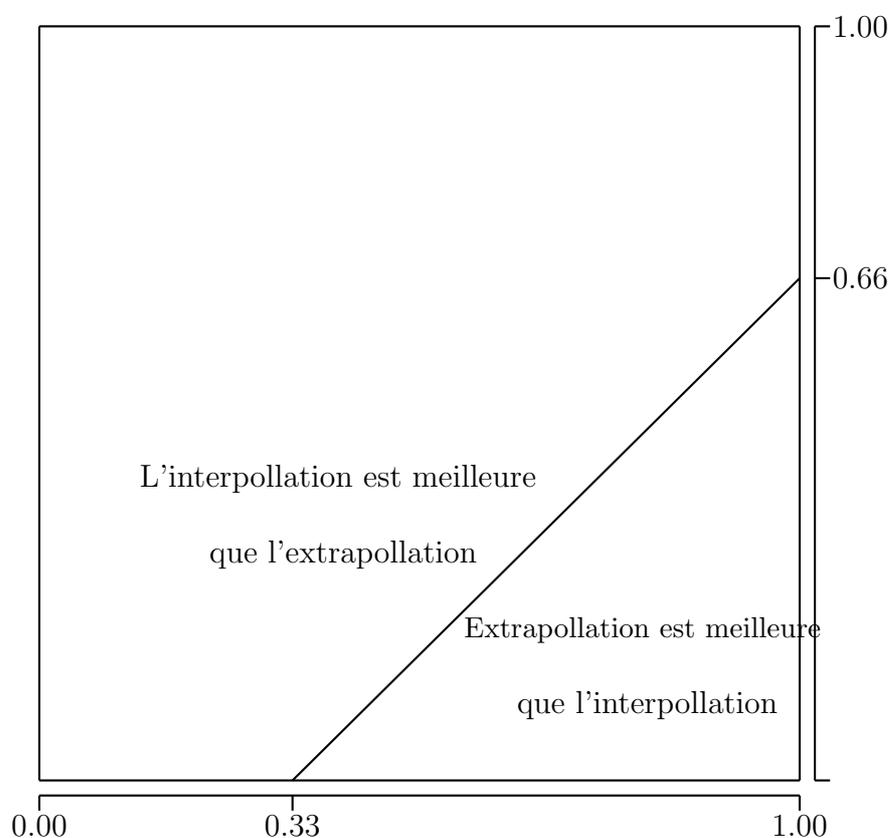


FIG. 3.6 – *Caractérisation graphique des paramètres pour lesquels l'interpolation est meilleur que l'extrapolation*

Remarque 3.1. Toutes les conclusions énoncées ci-dessus peuvent être retrouvées en réalisant des figure en dimension 2. Autrement dit, en fixant les valeurs d'un paramètre et en faisant varier les valeurs de l'autre, les figures 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10 nous confirment les assertions affirmées.

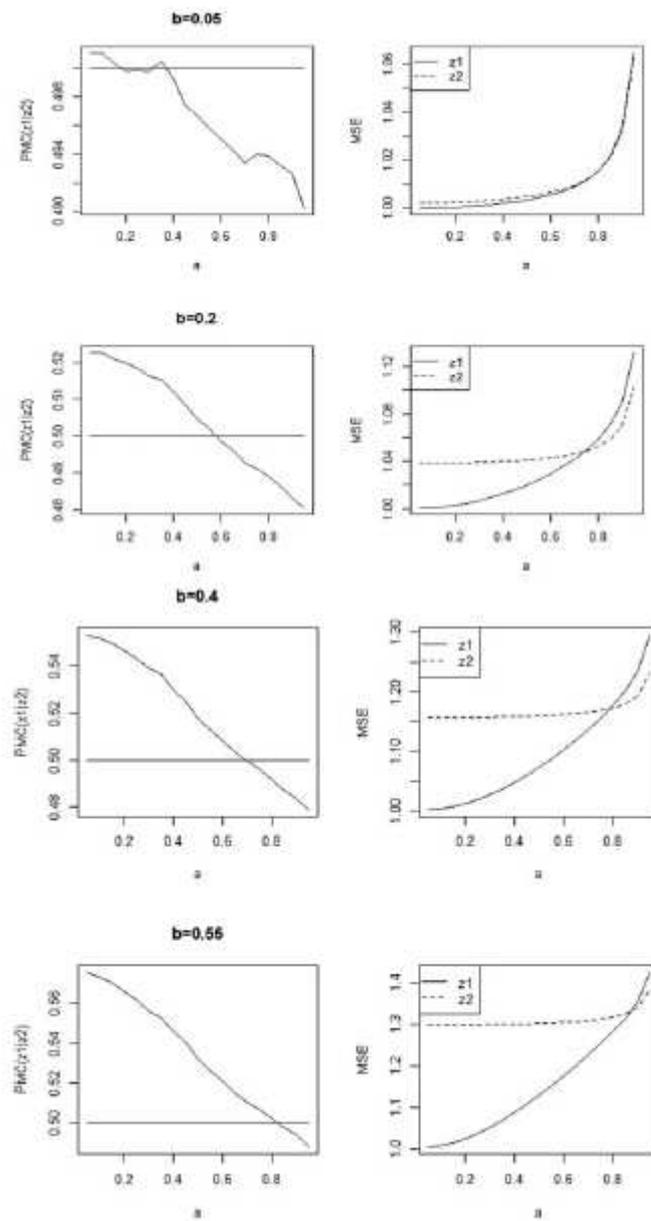


FIG. 3.7 – Comparaison entre les prédicteurs pour b fixé.

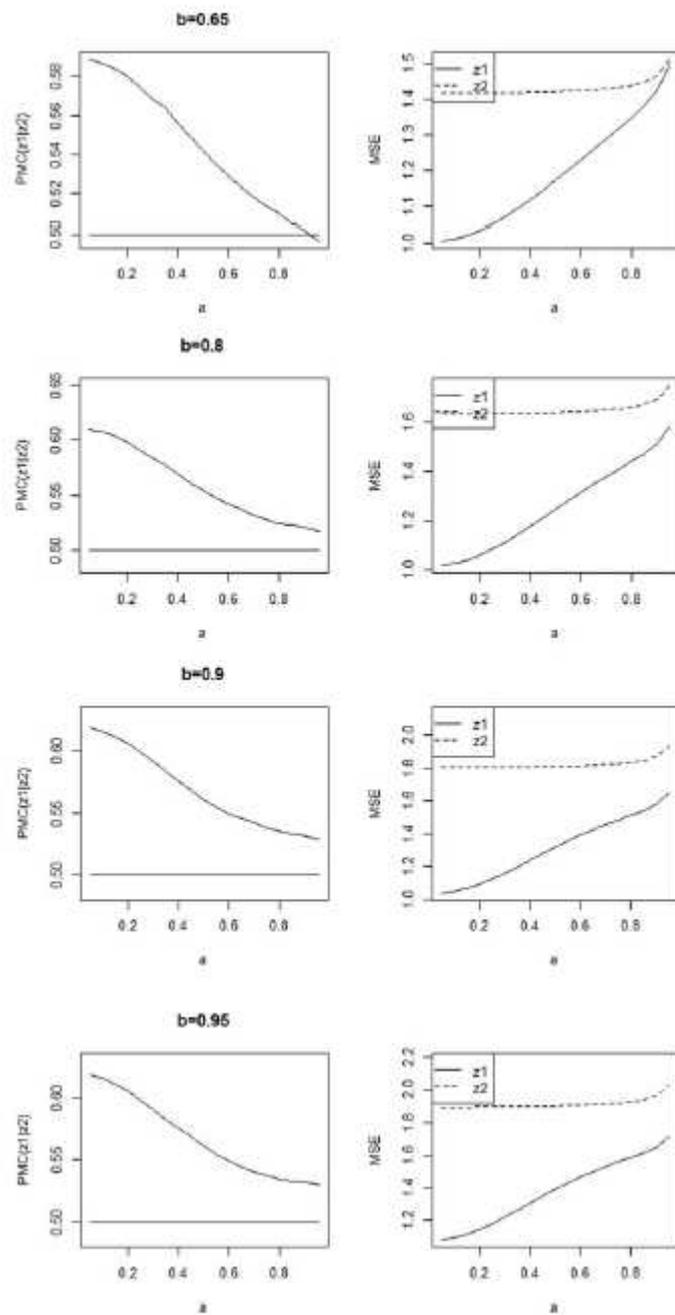


FIG. 3.8 – Comparaison entre les prédicteurs pour b fixé.

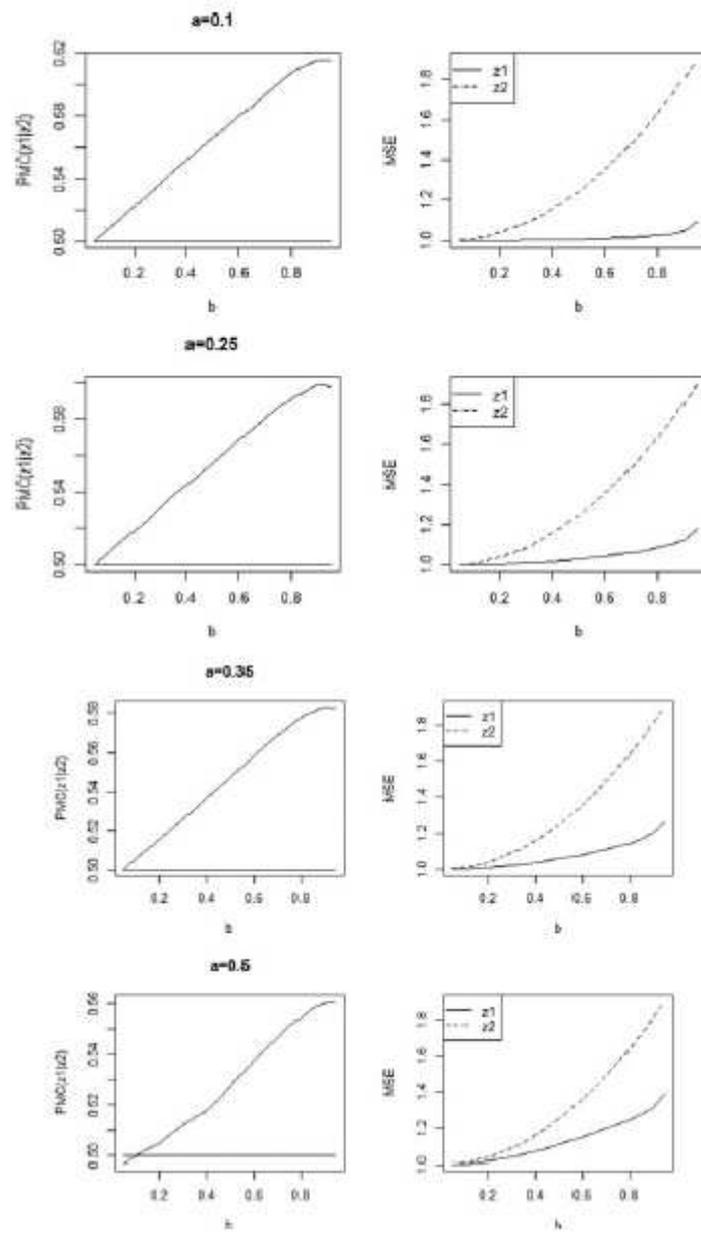


FIG. 3.9 – Comparaison entre les prédicteurs pour α fixé.

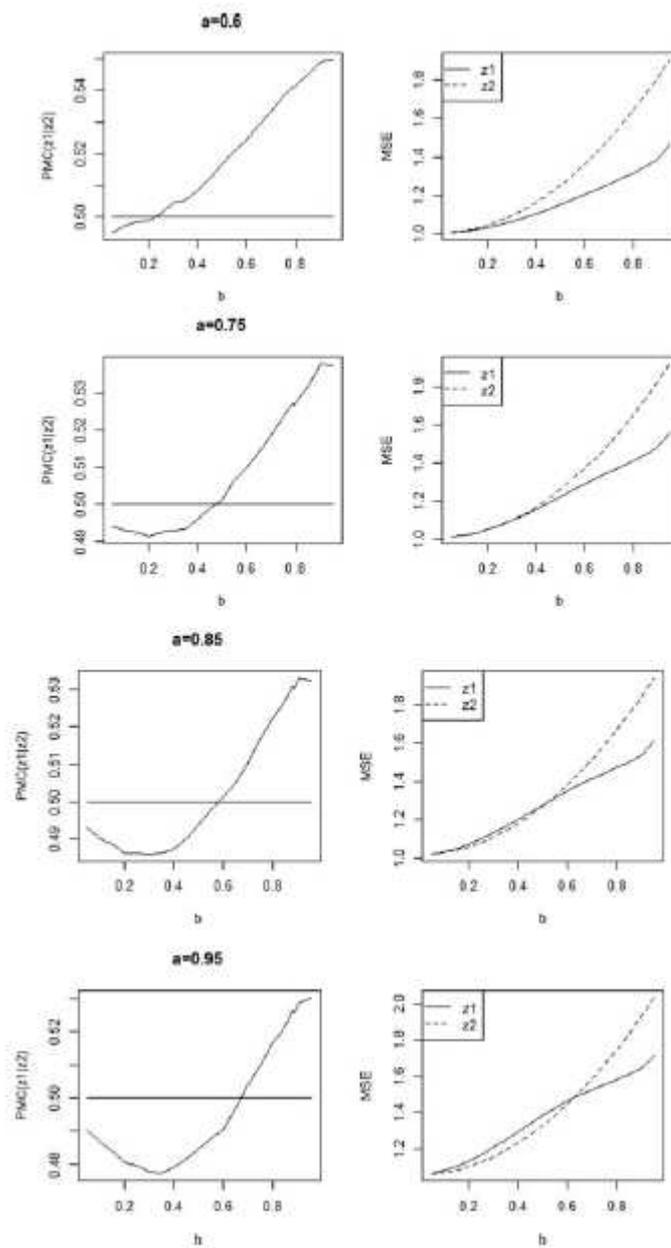


FIG. 3.10 – Comparaison entre les prédicteurs pour a fixé.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire aux problèmes de prédiction et d'estimation des champs aléatoires.

Après un tour d'horizon sur les travaux effectués dans le domaine des séries chronologiques, nous avons présenté le problème de prédiction des champs aléatoires dans le chapitre 2.

Notre contribution se constitue en une étude comparative, à base de simulations intensives, de certains prédicteurs lorsque les données spatiales sont générées par un modèle autoregressif spatial multiplicatif.

Le travail effectué s'est basé sur les critères de proximité de Pitman et de l'erreur quadratique moyenne. Ces critères, intensivement relatés dans la littérature des modèles de séries chronologiques, ont été appliqués cette dernière décennie aux modèles spatiaux comme le prouvent les documents cités en bibliographie.

Comme perspectives futures, il serait intéressant de reprendre cette étude et de construire d'autres prédicteurs compétitifs aux prédicteurs utilisés, et ce, en considérant des modèles plus généraux et/ou des supports passés mieux appropriés.

Appendix

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,1} = (X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$i = 1, j = 1, \dots, n-2; j = 1, i = 1, \dots, m-2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,2} = (X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1})$$

$$i = 1, j = n-1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,3} = (X_{i+1,j+1}, X_{i+1,j+2})$$

$$j = 1, j = m-1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,4} = (X_{i,j-2}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-2}, X_{i+2,j-1})$$

$$i = 1, j = n-1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,5} = (X_{i-1,j}, X_{i,j+1})$$

$$j = 1, j = m.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,6} = (X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2},)$$

$$j = 2, j = 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,7} = (X_{i-1,j-2}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$i = 2, j = 3, \dots, m-2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,8} = (X_{i-1,j-2}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1})$$

$$i = 2, j = n-1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,9} = (X_{i-1,j-2}, X_{i-1,j-1})$$

$$i = 2, j = n.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,10} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$j = 2, i = 3, \dots, m-2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,11} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+1,j+2})$$

$$j = 2, i = m-1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,12} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1})$$

$$i = 2, j = m.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,13} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+1,j+2})$$

$$i = m-1, j = 3 \dots, n-2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,14} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1},)$$

$$i = m - 1, j = n - 1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,15} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1})$$

$$i = n - 1, i = 3 \cdots, m - 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,16} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+1,j+2})$$

$$j = n, i = 3 \cdots, m - 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{1,17} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$i = 3 \cdots, n - 2, i = 3 \cdots, m - 2.$$

et

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,1} = (X_{i,j-1}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-1})$$

$$i = 1, j = 2$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,2} = (X_{i,j-2}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-2}, X_{i+2,j-1})$$

$$i = 1, j = 3 \cdots, n.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,3} = (X_{i-1,j-1}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-1})$$

$$i = 2, j = 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,4} = (X_{i-1,j-2}, X_{i-1,j-1}, X_{i,j-2}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-2}, X_{i+2,j-1})$$

$$i = 2 \cdots, n - 2, j = 3 \cdots, n.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,5} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-1})$$

$$i = m - 1, j = 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,6} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-1,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$i = 3 \cdots, n - 2, i = 3 \cdots, m - 2.$$

$$\text{et } \mathbf{X}_{i,j}^{2,7} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i,j-1})$$

$$i = m, j = 2$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,8} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-2}, X_{i-1,j-1}, X_{i,j-2}, X_{i,j-1})$$

$$i = m, j = 3 \cdots, n.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,9} = (X_{i+1,j+1}, X_{i+2,j+1}, X_{i+1,j+2}, X_{i+2,j+2})$$

$$j = 1, i = 1 \cdots, m - 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,10} = (X_{i+1,j+1}, X_{i+1,j+2})$$

$$j = 1, i = m - 1.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,11} = (X_{i,j-2}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-2}, X_{i+2,j-1})$$

$$j = 2, i = m$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,12} = (X_{i-2,j-1}, X_{i-1,j-1}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-1})$$

$$j = 2, i = 3 \cdots, m - 2.$$

$$\mathbf{X}_{i,j}^{2,13} = (X_{i-2,j-2}, X_{i-2,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i,j-2}, X_{i,j-1}, X_{i+1,j-2}, X_{i+1,j-1}, X_{i+2,j-2}, X_{i+2,j-1})$$

$$j = 3, \cdots, n, i = 3, \cdots, m - 2.$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_5 = \begin{pmatrix} \gamma(1,0) \\ \gamma(0,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,2) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) \\ \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(3,2) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,3) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_6 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) & \gamma(2,4) & \gamma(3,4) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,2) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) \\ \gamma(2,3) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(3,3) & \gamma(3,2) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,4) & \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,4) & \gamma(3,3) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_7 = \begin{pmatrix} \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,2) \\ \gamma(2,3) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,3) & \gamma(3,2) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_8 = \begin{pmatrix} \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_9 = \begin{pmatrix} \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{10} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) & \gamma(4,2) & \gamma(3,3) & \gamma(4,3) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,2) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) \\ \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(4,2) & \gamma(3,2) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(4,3) & \gamma(3,3) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{10} = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) & \gamma(3,3) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(2,3) \\ \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{11} = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,1) & \gamma(3,3) & \gamma(3,4) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) & \gamma(2,4) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) & \gamma(3,3) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(2,3) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,4) & \gamma(2,4) & \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{13} = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{14} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(3,3) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{14} = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{15} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(3,3) & \gamma(4,4) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) & \gamma(3,4) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) & \gamma(4,3) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,3) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(4,4) & \gamma(3,4) & \gamma(4,3) & \gamma(3,2) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{15} = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{16} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{16} = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{17} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(3,3) & \gamma(4,3) & \gamma(3,4) & \gamma(4,4) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) & \gamma(2,4) & \gamma(3,4) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(3,2) & \gamma(4,2) & \gamma(2,3) & \gamma(0,3) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(2,2) & \gamma(3,2) & \gamma(2,3) & \gamma(3,3) \\ \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(3,2) & \gamma(2,2) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(4,3) & \gamma(3,3) & \gamma(4,2) & \gamma(3,2) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,4) & \gamma(2,4) & \gamma(3,3) & \gamma(2,3) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(4,4) & \gamma(3,4) & \gamma(4,3) & \gamma(3,3) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{17} = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} \gamma(0,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_3 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) & \gamma(3,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_4 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(3,0) & \gamma(3,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(3,1) & \gamma(3,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(3,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,1) & \gamma(3,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Gamma}_4 = \begin{pmatrix} \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_5 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) & \gamma(3,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_5 = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_6 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(3,0) & \gamma(3,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(3,1) & \gamma(3,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(3,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(3,1) & \gamma(3,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{\Gamma}_6 = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_7 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}_7 = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,1) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_8 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_8 = \begin{pmatrix} \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_9 = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_9 = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(2,2) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{10} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{10} = \begin{pmatrix} \gamma(1,1) \\ \gamma(1,2) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{11} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{11} = \begin{pmatrix} \gamma(0,2) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,2) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,2) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{12} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) & \gamma(3,0) & \gamma(4,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) & \gamma(3,0) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) \\ \gamma(4,0) & \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) \end{pmatrix}; \quad \Gamma_{12} = \begin{pmatrix} \gamma(2,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(0,1) \\ \gamma(1,1) \\ \gamma(2,1) \end{pmatrix}$$

$$\omega_{13} = \begin{pmatrix} \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(3,0) & \gamma(3,1) & \gamma(4,0) & \gamma(4,1) \\ \gamma(0,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(3,1) & \gamma(3,0) & \gamma(4,1) & \gamma(4,0) \\ \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(3,1) & \gamma(3,0) \\ \gamma(1,0) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(3,0) & \gamma(3,1) \\ \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) \\ \gamma(2,1) & \gamma(1,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(2,1) & \gamma(2,0) \\ \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(3,1) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) \\ \gamma(3,1) & \gamma(2,1) & \gamma(3,0) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) \\ \gamma(4,0) & \gamma(3,0) & \gamma(4,1) & \gamma(3,1) & \gamma(2,0) & \gamma(2,1) & \gamma(1,0) & \gamma(1,1) & \gamma(0,0) & \gamma(0,1) \\ \gamma(4,1) & \gamma(3,1) & \gamma(4,0) & \gamma(3,0)\gamma(2,1) & \gamma(2,0) & \gamma(1,1) & \gamma(1,0) & \gamma(0,1) & \gamma(0,0) & \end{pmatrix};$$

$$\Gamma_{13} = (\gamma(2,2)\gamma(2,1)\gamma(1,1)\gamma(1,2)\gamma(0,2)\gamma(0,1)\gamma(1,2)\gamma(1,1)\gamma(2,2)\gamma(2,1))^T$$

Code R.

```

rm(list=ls()) m<-150 ; n<-150 z0<-rnorm(m+n+1)
epsilon<-matrix(rnorm((m+1)*(n+1)),m+1,n+1) A<-seq(.05,.96,.05)
B<-seq(.05,.96,.05)

msezhat<-mseztilda<-matrix(0,length(A),length(B))
pzhatztilda<-matrix(0,length(A),length(B))

for(a in A){ for(b in B){

#a<-.6 ; b<-.13 g<-function(x,y) a^x*b^y

# AR(1) generation

zAR<-matrix(0,m+1,n+1) zAR[1,]<-z0[1:(n+1)]
zAR[-1,1]<-z0[(n+2):(n+m+1)] for(i in 2:(m+1)){ for(j in 2:(n+1)){
zAR[i,j]<-zAR[i-1,j]*a+zAR[i,j-1]*b+zAR[i-1,j-1]*-(a*b)
}}

z<-zAR+epsilon z<-z[-1,-1]

# Zhat

fZhat<-function(i,j){ if(((i==1)&(j<=(n-1))|((j==1)&(i<=(m-1))))
y<-a*b*z[i+1,j+1] if((i==1)&(j==n))
y<-b*z[i,j-1] if((i<=(m-1))&(i>=2)&(j<=(n-1))&(j>=2))
y<-a*b*(z[i+1,j+1]+z[i-1,j-1]) if((i==m)&(j==1))
y<-(a*(1-b^2)*z[i-1,j]+b*(1-a^2)*z[i,j+1])/(1-(a*b)^2)
if(((i==m)&(j<=n)&(j>=2))|((j==n)&(i<=m)&(i>=2)))
y<-a*b*z[i-1,j-1] return(y)}

fZtilda<-function(i,j){ if((j==1)&(i<=(m-1))) y<-a*b*z[i+1,j+1]
if((i==m)&(j==1))

```

```

y<-(a*(1-b^2)*z[i-1,j]+b*(1-a^2)*z[i,j+1])/(1-(a*b)^2)
if((j<=n)&(j>=2))      y<-b*z[i,j-1] return(y)}

#fZhat(15,14);fZtilda(15,14) ; z[15,14]

zhat<-matrix(0,m,n) ztilda<-matrix(0,m,n) for(i in 1:m){ for(j in
1:n){ zhat[i,j]<-fZhat(i,j) ztilda[i,j]<-fZtilda(i,j) }}

#zhat; ztilda; z #sum(zhat-z);sum(ztilda-z)

msezhat[a*20,b*20]<-sum((zhat-z)^2)
mseztilda[a*20,b*20]<-sum((ztilda-z)^2)
pzhatztilda[a*20,b*20]<-mean((abs(zhat-z))<(abs(ztilda-z)))
      }}

grid<-expand.grid(xj=A,yj=B) AA<-grid$xj BB<-grid$yj
persp(A,B,msezhat,theta=135,phi=5,scale=TRUE,expand=1,col="green",ltheta=0,
lphi=0,box=T,ticktype="simple",xlab="a",ylab="b",zlab="MSE(Z1)")

grid<-expand.grid(xj=A,yj=B) AA<-grid$xj BB<-grid$yj
persp(A,B,mseztilda,theta=155,phi=5,scale=TRUE,expand=1,col="green",ltheta=0,
lphi=0,box=T,ticktype="simple",xlab="a",ylab="b",zlab="MSE(Z2)")

grid<-expand.grid(xj=A,yj=B) AA<-grid$xj BB<-grid$yj
persp(A,B,pzhatztilda,theta=115,phi=5,scale=TRUE,expand=1,col="green",ltheta=0,
lphi=0,box=T,ticktype="simple",xlab="a",ylab="b",zlab="PMC(z1|z2)")

#min(msezhat); max(msezhat); mean(msezhat) #min(mseztilda);
max(mseztilda); mean(mseztilda) #pzhatztilda;

par(mfrow=c(2,1)) # mean on b similar to b fixed
plot(A,rowMeans(pzhatztilda),"l",xlab="a",ylab="PMC(z1|z2)",main="Mean
on b") lines(A,rep(.5,length(A)),"l")
minn<-min(c(rowMeans(msezhat/(m*n)),rowMeans(mseztilda/(m*n))))

```

```
maxx<-max(c(rowMeans(msezhat/(m*n)),rowMeans(mseztilde/(m*n))))
AA<-seq(minn,maxx,length=length(A))
plot(A,AA,"n",xlab="a",ylab="MSE")
lines(A,rowMeans(msezhat/(m*n)),"l")
lines(A,rowMeans(mseztilde/(m*n)),"l",lty=2,xlab="a")
legend("topleft", legend = c("z1","z2"),lty=c(1,2), merge=TRUE)

par(mfrow=c(2,1)) # mean on a similar to a fixed
plot(A,colMeans(pzhatztilde),"l",xlab="a",ylab="PMC(z1|z2)",main="Mean
on a") lines(A,rep(.5,length(A)),"l")
minn<-min(c(colMeans(msezhat/(m*n)),colMeans(mseztilde/(m*n))))
maxx<-max(c(colMeans(msezhat/(m*n)),colMeans(mseztilde/(m*n))))
AA<-seq(minn,maxx,length=length(A))
plot(A,AA,"n",xlab="a",ylab="MSE")
lines(A,colMeans(msezhat/(m*n)),"l")
lines(A,colMeans(mseztilde/(m*n)),"l",lty=2,xlab="a")
legend("topleft", legend = c("z1","z2"),lty=c(1,2), merge=TRUE)

mean(mseztilde>msezhat) mean(pzhatztilde<.5)
```

Bibliographie

Basu, Sabyasachi, and Gregory C. Reinsel. (1993). *Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model*. Advances in applied Probability, **25.3**, 631-648.

Bourbonnais, R. et Terraza, M. (2010) *Analyse des séries temporelles*, 3ème Edition. Dunod.

Bondon, P. (2002). *Prediction with incomplete past of a stationary process*, Stochastic Processes and their Applications, **98** (1), 67-76.

Bondon, P. (2005). *Influence of missing values on the prediction of a stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, **26** (4), 519-525.

Box, G. E. P and Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis, Forecasting and Control (2nd edn)*, Holden-Day San Francisco, CA.

Brockwell, P.J. and Davis R.A. (1991). *Time Series: Theory and Methods (2nd eds)*, New York: Springer Verlag.

Hamaz, A. and Ibazizen, M. (2009). *Comparison of two estimation methods of missing values using Pitman-Closeness Criterion*, Communication in Statistics: Theory and Methods, **38**, 2210-2214.

Hamaz, A. (2010). *Influence des données manquantes sur la prédiction de séries chronologiques*, Thèse de Doctorat.

Kohli, Priya and Pourahmadi, Mohsen. (2014). *Some prediction problems for stationary random fields with quarter-plane past*. Journal of Multivariate Analysis, **127**, 112-125.

Pourahmadi, M. (1989). *Estimation and interpolation of missing values of stationary time series*, Journal of Time Series Analysis, **10** (2), 149-169.

Pourahmadi, M. (2001). *Foundation of Time Series Analysis and Prediction Theory*, New York: Wiley.

Saber, Mohammad Mehdi. (2017). *Performance of extrapolation based on Pitman's measure of closeness in spatial autoregressive models*. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1-19.