

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU  
FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE**  
Spécialité : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

Présentée et soutenue le 1 juillet 2018 par :

**Lynda TIDJOUIMAT**  
**Katia TIGUERCHA**

**Thème**

**Observateur pour les systèmes chaotiques  
représentés par une représentation Takagi Sugeno**

Composition du jury :

M.A. TOUAT	<i>MCB, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Président
H. HAMICHE	<i>MCA, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Examineur
Z. YACINE	<i>MCB, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou</i>	Encadreur



## Remerciements

*Nous remercions avant tout le bon Dieu de nous avoir donné le courage et la volonté de réaliser ce travail.*

*Nous remercions infiniment notre promotrice Mme Z.Yacine pour avoir dirigé ce travail .*

*Pour son soutien, son suivi, sa générosité, sa disponibilité à chaque instant et sa patience.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements au président et membres du jury qui nous furent l'honneur d'évaluer notre travail.*

*Notre gratitude et reconnaissance s'adressent à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation pendant notre cursus universitaire.*

*Sans oublier de remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail*



*Je dédie ce travail :*  
*Á mes chères parents.*  
*Á mes soeurs (Karima, Radia, Kenza).*  
*Á mes frères (Ali, Amar, Karim).*  
*Á mon neveu Nabil et ma nièce Malak.*  
*Á tous mes amis : Wahiba, Lamia, Amal, Fatiha, Kouceilla.*  
*Á ma copine et binôme ainsi que sa famille.*  
**T.Lynda**



*Je dédie ce travail :*  
*Á la mémoire de mon grand père.*  
*Á mes chères parents.*  
*Á ma grande mère.*  
*Á mes deux frères (Karim et Zohir).*  
*Á tous mes amis : Wahiba, Lamia, Amal, Kouceilla.*  
*Á ma copine et binôme ainsi que sa famille.*  
**T.Katia**



# Table des matières

Table des figures	xi
Notations	xiii
Introduction générale	1

## Chapitre 1

### Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires

1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Étude de stabilité . . . . .	4
1.2.1	Stabilité des systèmes LTI . . . . .	4
1.3	Observateurs et observabilité . . . . .	7
1.3.1	Observation dans le cas linéaire . . . . .	8
1.3.2	Observation dans le cas non linéaire . . . . .	14
1.4	Étude comparative . . . . .	17
1.5	Conclusion . . . . .	18

## Chapitre 2

### Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno

2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Modèle de Takagi Sugeno . . . . .	20
2.2.1	La représentation multimodèles . . . . .	20
2.3	Construction des modèles TS . . . . .	21
2.3.1	Approche par secteurs non linéaires . . . . .	22
2.4	Stabilité des systèmes T-S . . . . .	24
2.5	Observabilité des systèmes T-S . . . . .	26
2.5.1	Variables de décision mesurables : VDM . . . . .	27

2.5.2	Variables de décision non mesurables : VDNM . . . . .	28
2.6	Approches $L_2$ . . . . .	28
2.7	Conclusion : . . . . .	31

**Chapitre 3**

**Estimation d'état d'un système chaotique Rössler représenté par un modèle de Takagi Sugeno.**

3.1	Introduction . . . . .	34
3.2	La théorie du chaos . . . . .	34
3.3	Étude d'un système chaotique de Rössler et ces caractéristiques . . . . .	35
3.3.1	Aspect aléatoire . . . . .	35
3.3.2	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	37
3.3.3	L'attracteur étrange . . . . .	37
3.4	L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDM . . . . .	39
3.5	L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDNM . . . . .	40
3.6	Simulations et interprétation . . . . .	41
3.6.1	Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDM . . . . .	41
3.6.2	Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDNM . . . . .	43
3.7	Conclusion . . . . .	46

**Conclusion générale** **47**

**Annexe A**

**Notions générales**

A.1	Placement de pôles . . . . .	49
A.2	Inégalités Matricielles Linéaires : LMIs . . . . .	49
A.2.1	Ensembles et fonctions convexes . . . . .	49
A.2.2	Résolution des LMI . . . . .	50
A.3	Dérivée de Lie . . . . .	51
A.4	Systèmes linéaires à paramètres variants : $LPV$ . . . . .	51

**Bibliographie** **53**

# Table des figures

1.1	Principe d'un observateur d'état. . . . .	7
1.2	Principe de la synchronisation à base d'un observateur. . . . .	8
1.3	Schéma structurel de l'observateur de Luenberger. . . . .	10
1.4	La convergence des erreurs $e_i$ . . . . .	14
2.1	Approche multimodèles. . . . .	20
2.2	Secteur non linéaire global. . . . .	22
2.3	Secteur non linéaire local. . . . .	23
3.1	États $x_i$ du système chaotique de Rössler. . . . .	36
3.2	Évolution dans le temps du système chaotique de Rössler comparé à une sinusoïde. . . . .	36
3.3	Sensibilité aux conditions initiales de l'attracteur de Rössler. . . . .	37
3.4	Attracteur de Rössler. . . . .	38
3.5	L'attracteur étrange de Rössler. . . . .	38
3.6	Simulation de système Rössler et modèle TS. . . . .	41
3.7	Comparaison des états réels et estimés obtenus avec l'observateur de Luen- berger. . . . .	42
3.8	Erreurs d'estimation des états avec l'observateur de Luenberger. . . . .	43
3.9	Erreurs d'estimation des états avec l'observateur de Luenberger au bout de 10s. . . . .	43
3.10	Comparaison des états réels et estimés obtenus avec l'observateur $L_2$ . . . .	44
3.11	Erreurs d'estimation des états avec l'observateur $L_2$ . . . . .	45
3.12	Erreurs d'estimation des états avec l'observateur $L_2$ au bout de 5s. . . . .	45
A.1	Ensemble convexe . . . . .	50



# Notations

## ACRONYMES

- LTI : Linear Time Invariant (Linéaire à temps Invariant)
- LTV : Linear Time Variant (Linéaire à temps Variant)
- TS : Takagi-Sugeno
- TS à VDM : Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables
- TS à VDNM : Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables
- LMI : Linear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Linéaire)
- BMI : Bilinear Matrix Inequality (Inégalité Matricielle Bi-linéaire)
- Lpv : Linéaire à Paramètre Variant
- q-Lpv : quasi Linéaire à Paramètre Variant
- ISS : Input to State Stability (Stabilité Entré Sortie)

## MATRICES

- $I$  : Matrice identité
- $P > 0$  ( $P < 0$ ) : Matrice définie positive (resp. négative)
- $P^T$  : Matrice transposée
- $P^{-1}$  : Matrice inverse
- $\lambda_i(A)$  : Valeurs propres de  $A$
- $PR(\lambda_i)$  : Partie réelle de la valeur propre  $\lambda_i$
- $\lambda_{\max}$  : Valeur propre maximale

## ENSEMBLES

- $\Re$  : Ensemble des nombres réels
- $\Re^+$  : Ensemble des nombres réels positifs



# Introduction générale

Pendant plusieurs siècles de l'histoire de la science et jusqu'à la fin du dix neuvième siècle, les scientifiques interprétaient les phénomènes naturels complexes par le hasard. Plusieurs comportements complexes tels que les phénomènes météorologiques, ne trouvaient pas d'explication logique. Au début du vingtième siècle, H. Poincaré a expliqué ces phénomènes par leur sensibilité aux conditions initiales. En 1967, E. Lorenz a présenté un système dynamique déterministe ayant un comportement complexe manifesté par un attracteur étrange et caractérisé par une forte sensibilité aux conditions initiales [25]. Quatre ans plus tard, J. Yorke a introduit pour la première fois le terme « chaos » pour décrire ces systèmes déterministes.

Beaucoup de systèmes physiques se comportent de manière chaotique. Parmi ces systèmes, on peut citer l'atmosphère, un robinet qui goutte, un pendule excité dans un champ magnétique, etc. Ces systèmes sont des systèmes chaotiques, évaluant d'une manière aléatoire avec une forte sensibilité aux conditions initiales. À cause de ces caractéristiques, on a cru pendant longtemps que le chaos serait inutilisable et incontrôlable, mais depuis quelques années, les chercheurs ont réussi à modéliser le chaos par des équations différentielles tels que le système chaotique de Lorenz [25] et Rossler [9] qui ont montrés qu'il existe un côté déterministe dans ce phénomène ce qui permet au chercheurs d'étudier et de contrôler les systèmes chaotiques à l'aide des observateurs qui permettant de les estimer.

La théorie de l'estimation tient une place de plus en plus importante en Automatique [35],[8]. La connaissance de l'état du système étudié est nécessaire dans de nombreuses stratégies comme la synthèse de lois de commande, la modélisation, la détection et diagnostic de défauts, le contrôle et la supervision des systèmes industriels.

L'estimation d'état des systèmes linéaires à fait l'objet de nombreux travaux [26], [22], [34]. Cependant, l'hypothèse de linéarité des relations entrées sorties d'un système permet d'élaborer simplement un modèle approximatif de son comportement dans une

zone restreinte de l'espace de fonctionnement.

Pour mieux représenter les systèmes réels tels que les systèmes chaotiques, il est impératif de prendre en considération les non linéarités dans la phase de modélisation ce qui permet de décrire son comportement sur une large plage de fonctionnement. Cependant, la complexité de leurs structures d'un point de vue mathématique rend la tâche délicate et difficilement exploitable.

La stratégie de reconstruction d'état proposée dans ce mémoire est d'utiliser une technique de modélisation visant à obtenir un modèle tenant compte des non linéarités et offrant une structure simple et facilement exploitable du point de vue mathématique. Cette approche porte le nom général d'approche multimodèles. Celle ci s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous modèles linéaires décrivant le comportement du système dans une zone de fonctionnement particulière en utilisant des fonctions d'activation (de pondération) traduisant la contribution de chaque sous modèle.

Afin de mener à bien les objectifs visés, nous avons organisé notre mémoire comme suit :

Le premier chapitre, est un état de l'art qui porte sur des généralités sur la stabilité au sens de Lyapunov, observabilité des systèmes linéaires et non linéaires ainsi que l'estimation d'état pour les systèmes linéaires à temps invariant (LTI) en utilisant l'observateur de Luenberger et les différents observateurs pour les systèmes non linéaires.

Au deuxième chapitre, nous allons présenté les modèles de Takagi-Sugeno avec un bref rappel sur les approches de construction. La stabilité et la conception d'observateurs pour les systèmes T-S est présentée, en mettant en avant deux classes de modèles T-S : les modèles à variables de décision mesurables et les modèles à variables de décision non mesurables. Afin d'estimer les états de dernière classe, nous avons utilisé l'approche  $L_2$  par atténuation de perturbation.

Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les systèmes chaotiques. Les méthodes développées dans les chapitres 1 et 2 sont étendues au chapitre 3. L'observateur de Luenberger par atténuation de perturbation a été utilisé pour estimer l'état du système chaotique de Rossler. Le problème est résolu à l'aide des outils *LMI* dédiés. Des simulations sont effectuées pour valider l'approche  $L_2$ .

Enfin, nous terminons par une conclusion générale et des perspectives par rapport à la suite des travaux présentés dans ce mémoire.

# Chapitre 1

## Synthèse d'observateurs des systèmes linéaires

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Étude de stabilité</b>	<b>4</b>
1.2.1	Stabilité des systèmes LTI	4
<b>1.3</b>	<b>Observateurs et observabilité</b>	<b>7</b>
1.3.1	Observation dans le cas linéaire	8
1.3.2	Observation dans le cas non linéaire	14
<b>1.4</b>	<b>Étude comparative</b>	<b>17</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

---

### 1.1 Introduction

Une bonne maîtrise d'un procédé passe en général par une bonne information sur ce procédé. La disponibilité de toutes les variables d'état est rarement possible dans la pratique. En effet, pour des raisons techniques et/ou économiques, il est difficile, voire impossible, de mesurer la totalité des variables d'état du système, d'où la nécessité d'estimer ces dernières à partir d'un jeu de données entrées/sorties en utilisant des capteurs logiciels appelés observateurs. De façon générale, le besoin d'information sur l'état est motivé par le fait qu'elle est une étape importante, voire indispensable pour la synthèse de lois de commande, pour l'identification, la détection et diagnostic de défauts ou la supervision des systèmes industriels.

Au cours des dernières décennies, une part importante des activités de recherche en automatique s'est focalisée sur le problème d'estimation d'état des systèmes dynamiques. La conception d'observateurs pour les systèmes linéaires bénéficie d'une abondante littérature où beaucoup de travaux ont été dédiés, initiés par les travaux de Kalman [17] sur les systèmes stochastiques et Luenberger [26].

A travers ce chapitre, nous proposons de revoir quelques concepts et notions utilisés dans la suite de ce mémoire sur l'estimation d'état par l'observateur de Luenberger ainsi que une vue d'ensemble sur les observateurs des systèmes non linéaires.

## 1.2 Étude de stabilité

La stabilité est une notion importante pour l'élaboration des lois de commande et d'observation. Cette propriété est lié au système lui-même. Les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux.

Dans cette section on s'intéresse à la stabilité au sens de Lyapunov [35],[2] qui est une théorie générale valable pour toute équation différentielle. La philosophie de la méthode réside dans l'extension mathématique d'une observation fondamentale de la physique qui est : Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue alors le système (qu'il soit linéaire ou non linéaire) devra rejoindre finalement un point d'équilibre. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point d'équilibre en reste suffisamment proche.

### Définition 1.1 (Point d'équilibre) [35], [19]

La classe des systèmes considérée est celle des systèmes qui peuvent être mis sous la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{1.1}$$

$x(t) \in R^n$  est l'état du système et  $f$  est une fonction non linéaire.

Le point de l'espace  $x_e = 0$  est un point d'équilibre s'il vérifie l'équation algébrique suivante :

$$f(0, t) = 0, \forall t > 0$$

### 1.2.1 Stabilité des systèmes LTI

Considérons un système LTI suivant avec un seul point d'équilibre à l'origine :

$$\dot{x}(t) = A x(t), x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

Ce système admet pour solution de l'équation suivante :

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (1.3)$$

Ce qui peut être réécrit comme suit :

$$x(t) = \sum_{i=0}^n r_i e^{\lambda_i t} \quad (1.4)$$

Où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $A$  et  $r_i$  sont des résidus dépendant des vecteurs propres (après diagonalisation de  $A$ ) et des conditions initiales.

A partir de (1.4) la stabilité du système (1.2) peut être analysée par les valeurs propres de  $A$ .

- Le système (1.2) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si toutes les valeurs propres de  $A$ ,  $\lambda_i(A)$  ont des parties réelles ( $PR(\lambda_i)$ ) négatives ( $A$  est Hurwitz).

- On dit qu'il est marginalement stable si une ou plusieurs des valeurs propres ont une partie réelle nulle.

Pour étudier la stabilité d'un système LTI en utilisant la seconde méthode de Lyapunov, une fonction de Lyapunov quadratique est choisie comme suit :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (1.5)$$

Où  $P$  est une matrice symétrique de dimension  $n \times n$ .

$V(x(t))$  est positive (semi) définie si  $P$  est positive (semi) définie.

### Rappel :

Une matrice symétrique est dite définie positive si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

- 1- Toutes les valeurs propres de  $P$  sont positives.
- 2- Tous les déterminants mineurs de  $P$  sont positifs.
- 3- Tous les éléments diagonaux sont positifs.

La dérivée de  $V(x(t))$  par rapport au temps est :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (1.6)$$

En remplaçant  $\dot{x}(t)$  par son expression, on obtient :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) (A^T P + P A) x(t) \quad (1.7)$$

Le système (1.2) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $Q$  positive définie tel que l'équation suivante possède une solution unique positive définie  $P$  :

$$A^T P + P A = -Q \quad (1.8)$$

$A^T P + P A < 0$  permet d'aboutir à une inégalité matricielle linéaire LMI dont l'inconnue est une matrice symétrique strictement définie positive. La résolution de cette LMI se fait grâce à des outils numériques.

### Stabilité entrée-état [32], [19]

La stabilité entrée-état (Input to State Stability ISS) est une forme de stabilité interne qui étudie la relation entre l'entrée d'un système et son état. Ce type de stabilité est important et intéressant dans le cas où l'entrée du système est prise en considération. L'entrée peut être une perturbation et il est dans ce cas là utile de connaître l'effet de cette dernière sur l'évolution des états du système car ce sont les entrées associées aux conditions initiales qui influencent l'état du système.

#### Définition 2.1 (Stabilité ISS) [29], [32] :

Soit le système  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t))$ . Il est dit ISS par rapport à une perturbation bornée  $w$ , si les conditions suivantes sont satisfaites :

$f(x, u, w) \in \chi$  pour tout  $x \in \chi$ ,  $w \in W$  et  $u(t) \in R^n$

Il existe des fonctions de classe  $K_\infty$ ,  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$  et  $\alpha_3(\cdot)$  ainsi qu'une fonction  $\gamma(\cdot)$  de classe  $K$  et  $V : \chi \rightarrow R^+$  pour tout  $x \in \chi$ , tel que nous ayons :

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x(t)) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\dot{V}(f(x, u, w)) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \gamma(\|w\|)$$

Cela garantit que pour toute perturbation bornée  $w \in W$ , la solution du système satisfait :

$$\|x(t, u, w)\| \leq \varphi(\|x_0\|, t) + \gamma\|w\|_\infty$$

Quand  $t \rightarrow \infty$ , la fonction  $\varphi(\|x_0\|, t)$  tend vers zéro et l'état reste dans un volume de rayon  $\gamma\|w\|_\infty$ . La dimension de ce volume, lié au rayon  $\gamma\|w\|_\infty$ , est directement corrélée à l'influence des perturbations sur le système. En d'autres termes, c'est une mesure de l'effet des perturbations. Plus ce volume est petit, plus l'effet de ces perturbations est faible. En l'absence de perturbations, ce volume est l'origine.

## 1.3 Observateurs et observabilité

Il est souvent nécessaire d'estimer certaines variables décrivant l'état de système qui n'est pas souvent accessible à la mesure, dû à des contraintes d'ordre économiques ou techniques. Une solution alternative est envisagée qui est d'utiliser des capteurs logiciels appelés « observateurs ».

L'observateur est un capteur logiciel basé sur le modèle mathématique du système. Il utilise les entrées et les sorties du processus comme étant les entrées d'observation dans le but d'estimer l'état interne du système. Cette information estimée est utilisée pour construire la loi de commande par retour d'état, pour la surveillance et l'identification du système et même le diagnostic et la détection des fautes.

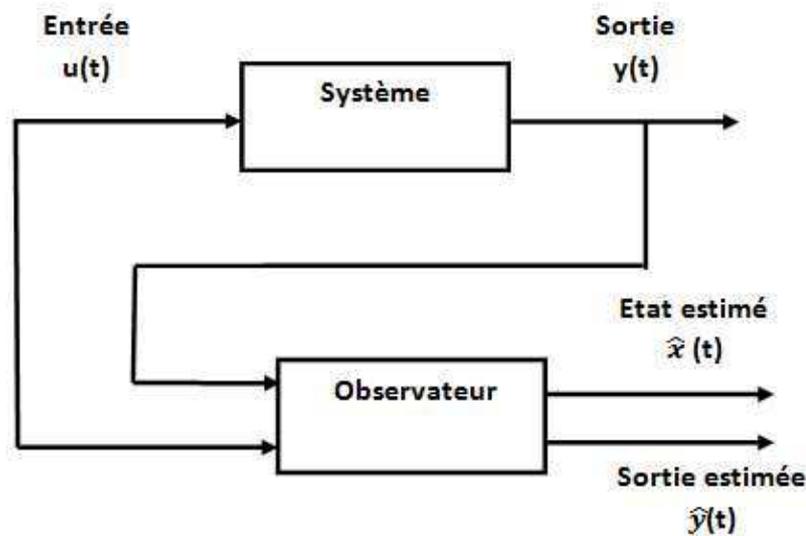


FIGURE 1.1 – Principe d'un observateur d'état.

L'utilité des observateurs, au delà du domaine de l'automatique (diagnostic, surveillance, commande des processus, . . .) trouve applications dans plusieurs autres domaines tels que la supervision, la chimie, la synchronisation des systèmes complexes et même la médecine [4].

Plusieurs stratégies de commande utilisent l'état du système à fin de calculer une loi de commande qui permet au système d'accomplir sa mission et comme le vecteur d'état n'est pas toujours mesurable directement, un observateur est alors nécessaire pour l'estimer.

Dans le domaine de la supervision, l'opérateur humain a besoin de connaître l'évolution dans le temps de certaines variables d'un système physique pour prendre la décision. Par exemple, un pilote d'avion a besoin de connaître, entre autre, l'altitude et la vitesse de l'avion.

Pour un réacteur chimique, la surveillance de l'évolution des concentrations permet de déterminer le moment où certains produits doivent être ajoutés. Un observateur d'état peut être alors utilisé à fin d'estimer ces concentrations à chaque instants.

L'estimation d'état d'un système joue un rôle important dans le contexte de la surveillance et du diagnostic des systèmes, car elle permet de générer des symptômes de défaillance du système à partir d'une comparaison entre les variables mesurées et celles estimées [10].

Pour la synchronisation des systèmes complexes tel que les systèmes chaotiques, un observateur peut être utilisé comme un récepteur dont le but est de crypter les données émises par l'émetteur.

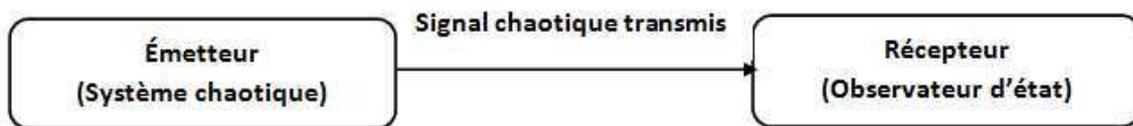


FIGURE 1.2 – Principe de la synchronisation à base d'un observateur.

### 1.3.1 Observation dans le cas linéaire

Cette section porte sur l'estimation d'état des systèmes linéaires déterministes, dans laquelle nous présentons une définition sur la notion d'observabilité et l'estimation d'état par l'observateur de Luenberger avec un exemple d'application.

#### Observabilité :

L'observabilité d'un processus est un concept très important en Automatique. En effet, pour reconstruire l'état et la sortie d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

L'observabilité est la possibilité de reconstruire l'état initial  $x(t_0)$  du système à partir des informations sur l'entrée  $u(t, t_0)$  et la sortie  $y(t, t_0)$  pendant un intervalle de temps bien défini  $[t_0, t_0 + T]$ .

Dans le cas des systèmes linéaires, la propriété d'observabilité est une condition de rang de la paire  $(A, C)$  indépendante de l'entrée  $u(t)$ . Cette condition, critère de Kalman [34], est suffisante et une fois vérifiée, cela permet de garantir l'existence d'un observateur qui converge de manière asymptotique.

Soit un système linéaire à temps invariant LTI décrit par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

$x(t)$  est le vecteur d'état  $\in R^n$ ,  $u(t)$  est le vecteur commande  $\in R^m$  et  $y(t)$  est la sortie de système  $\in R^p$

A : est la matrice d'état ou d'évolution de système de dimension  $(n \times n)$  .

B : est la matrice d'application de commande de dimension  $(n \times m)$ .

C : est la matrice d'observation de dimension  $(p \times n)$ .

L'observabilité du système (1.9) est garantie si et seulement si le rang de la matrice d'observation  $O$  est vérifié.

$$\text{Rang} ( O ) = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (1.10)$$

De plus, le système est complètement observable si et seulement si pour tout  $S$  complexe :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} SI - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad (1.11)$$

Si un système linéaire est complètement observable, il est globalement observable, c'est-à-dire que toutes les composantes du vecteur d'état du système sont observables et peuvent donc être reconstruites par un observateur.

### Observateurs :

Le problème d'estimation d'état pour les systèmes LTI décrit par (1.9) a été résolu par Luenberger [26]. Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe. Son idée est d'ajouter au modèle (mis sous forme canonique) un terme de correction, entre la sortie et la sortie estimée.

Luenberger propose l'observateur suivant pour le système (1.9) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.12)$$

L : est le gain d'observateur.

On peut aussi écrire l'observateur sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC) \hat{x}(t) + B u(t) + L y(t) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

Avec une erreur d'estimation :  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

La dynamique d'erreur d'estimation est donné par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC) e(t)$$

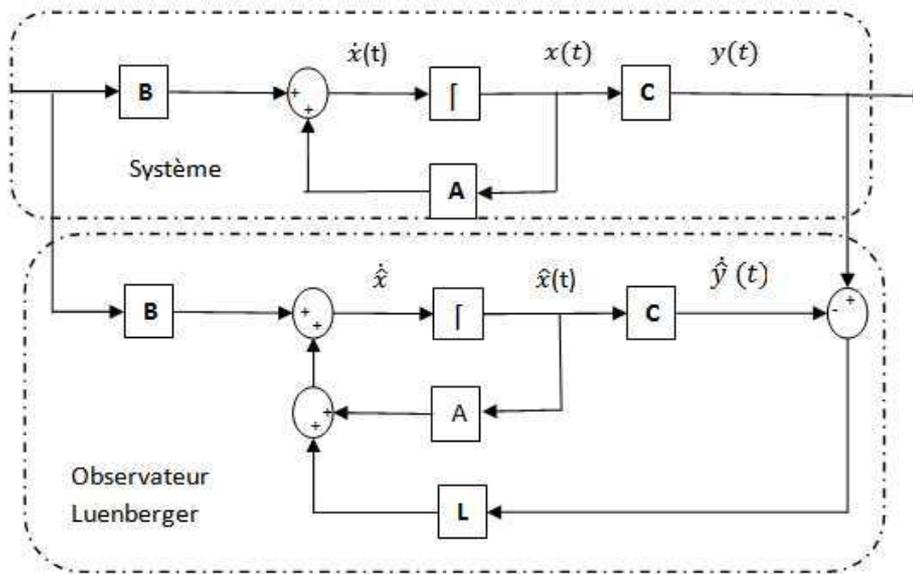


FIGURE 1.3 – Schéma structurel de l'observateur de Luenberger.

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur la technique de placement de pôles. En utilisant cette technique, il suffit alors de choisir le gain L de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice  $(A - LC)$  soient dans le demi-plan complexe gauche.

Pour une meilleure estimation de l'état, la dynamique de l'observateur est choisie plus rapide que celle du système. Pour cela, on fixe les valeurs propres de l'observateur dans le demi-plan gauche du plan complexe de sorte que leurs parties réelles soient plus grandes en valeur absolue que celles de la matrice d'état A.

Il est à noter que si le couple  $(A, C)$  est observable, alors on peut toujours trouver un gain L qui permet d'assigner les valeurs propres de  $(A - LC)$  à des positions désirées.

On dit que le système (1.13) est asymptotiquement stable si la matrice  $A$  est de Hurwitz.

### Exemple d'application

Soit le système linéaire représenté par sa représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_3(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

Tel que :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \ 0 \ 0) \quad (1.15)$$

#### 1- Étude d'observabilité :

$$\text{rang}(O) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (1.16)$$

$\det(O) = 1 \neq 0$  elle est de rang plein donc le système est observable.

**Remarque 1.1** La matrice d'état  $A$  est sous la forme modale. Á la première colonne de  $A$  il correspond un élément non nul dans  $C$ , le système est donc observable.

Le système (1.14) est linéaire et observable, il est possible de construire un observateur de Luenberger sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

Avec :

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$\hat{x}(t)$  : est le vecteur d'état estimé.

## 2- Calcul analytique du gain L d'observateur :

Avec le choix de pôles désirés  $p = [-3 -4 -4.5]$ , le polynôme caractéristique désiré s'écrit sous la forme :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \lambda_0 \quad (1.19)$$

Avec :  $\beta$  et  $\lambda$  sont des spécifications désirés .

D'où le polynôme caractéristique désiré est :

$$P_d = (\lambda + 3)(\lambda + 4)(\lambda + 4.5) = \lambda^3 + 11.5\lambda^2 + 43.5\lambda + 5 \quad (1.20)$$

Le polynôme caractéristique de l'observateur s'écrit :

$$P_{obs}(\lambda) = \det |\lambda I - (A - LC)| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 + l_1 & -1 & 0 \\ l_2 & \lambda & 0 \\ \lambda + l_3 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \quad (1.21)$$

$$P_{obs}(\lambda) = \lambda^3 + (6 + l_1)\lambda^2 + (4l_1 + l_2 + 12)\lambda + (8 + 4l_1 + 2l_2 + l_3) \quad (1.22)$$

Par identification entre le polynôme caractéristique désiré et le polynôme de l'observateur :

$$\begin{cases} l_1 + 6 = 11.5 \\ 4l_1 + l_2 + 12 = 43.5 \\ 4l_1 + 2l_2 + l_3 + 8 = 54 \end{cases} \quad (1.23)$$

D'où :

$$L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 9.5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

On peut aussi procéder d'une autre manière pour déterminer le gain L de l'observateur en utilisant une fonction de Lapunov quadratique  $V(e(t) = e^T(t) P e(t))$  pour avoir un problème sous forme de LMI.

L'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (1.25)$$

La dynamique d'erreur d'estimation est :

$$\dot{e}(t) = (A - LC) e(t) \quad (1.26)$$

On utilise une fonction de Lyapunov quadratique. La stabilité asymptotique est assurée si  $\dot{V}(e(t)) < 0$ .

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t) P e(t) + e^T(t) P \dot{e}(t) \quad (1.27)$$

$$\dot{V}(e(t)) = [(A - LC) e(t)]^T P e(t) + e^T(t) P [(A - LC) e(t)] \quad (1.28)$$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) (A - LC)^T P e(t) + e^T(t) P (A - LC) e(t) \quad (1.29)$$

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) (A^T P + PA - C^T L^T P - PLC) e(t) \quad (1.30)$$

$\dot{V}(e(t)) < 0$  si seulement si :

$$(A^T P + PA - C^T L^T P - PLC) < 0 \quad (1.31)$$

On pose :  $M = PL$ . Delà, on aboutit à :

$$A^T P + PA - C^T M^T - MC < 0 \quad (1.32)$$

Après résolution de la LMI (1.32), on obtient P et M. Le gain de l'observateur est alors donné par :  $L = P^{-1}M$ .

La dynamique de l'erreur d'estimation est la suivante :

$$\dot{e}(t) = \begin{pmatrix} -7.5 & 1 & 0 \\ -9.5 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} e(t) \quad (1.33)$$

### 3- Simulations :

Les résultats de simulation sont données par la figure suivante :

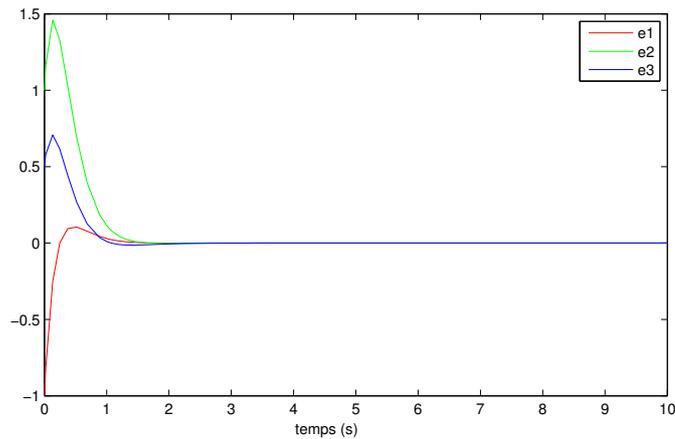


FIGURE 1.4 – La convergence des erreurs  $e_i$ .

Les courbes montrent bien que les estimées convergent vers les états du système au bout d'un temps négligeable grâce à l'observateur de Luenberger. L'erreur d'estimation tend d'une manière asymptotique vers zéro, ce qui illustre la performance et la bonne convergence de l'observateur utilisé.

### 1.3.2 Observation dans le cas non linéaire

Cette section porte sur une introduction au problème d'estimation d'état des systèmes non linéaires, dans laquelle nous présentons une définition sur la notion d'observabilité et un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

#### Observabilité :

Pour les systèmes non linéaires, il n'existe pas une méthode générale pour la conception des observateurs. L'étude d'observabilité reste un sujet de recherche en cours de développement. Pour la vérifier, on peut utiliser les dérivées de Lie.

On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.34)$$

Les vecteurs  $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$  sont respectivement les vecteurs d'état et de commande.  $f$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires.

**Définition 1.2** [32] :

Le système non linéaire décrit par (1.34) est dit observable au sens du rang si :

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} dh(x, u) \\ dL_f h(x, u) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x, u) \end{pmatrix} = n \quad (1.35)$$

Avec :

$$\begin{cases} dh(x, u) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} \dots \frac{\partial h}{\partial x_n} \right) \\ L_f h(x, u) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x, u) \end{cases} \quad (1.36)$$

Où :  $L_f h(x, u)$  : est la dérivée de Lie.

$dL_f^{n-1} h(x, u)$  : est les dérivées successives de Lie.

Cela veut dire que l'état  $x$  peut s'écrire en fonction de la sortie  $y(t)$  et de l'entrée  $u(t)$  ainsi que de leurs dérivées successives (observabilité différentielle). En effet, nous avons [32] :

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dh(x, u) \\ dL_f h(x, u) \\ \vdots \\ dL_f^{n-1} h(x, u) \end{pmatrix} = \Psi x \quad (1.37)$$

Si cette condition de rang est vérifiée alors l'état peut s'écrire par le théorème des fonctions implicites [32], comme suit :

$$x = \Psi^{-1} \left( y \quad \dot{y} \quad \dots \quad y^{n-1} \right)^T \quad (1.38)$$

### Observateurs pour les systèmes non linéaires :

Dans le cas des systèmes non linéaires, l'observation d'état est un peu plus délicate. En effet, la notion d'observabilité dépend de l'entrée du système et n'est pas définie de façon globale [27]. A notre connaissance il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse de ces observateurs. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non linéaires spécifiques. En général, on distingue deux approches pour la synthèse d'observateurs :

1- Les méthodes fondées sur une transformation non-linéaire, basée sur l'algèbre de Lie, permettent de mettre le système sous une forme canonique quasi linéaire. L'objectif est de trouver un changement de coordonnées pour que la dynamique de l'erreur d'estimation devienne linéaire. Une telle transformation étant faite, les techniques d'observation des systèmes linéaires peuvent être utilisées pour estimer l'état du système transformé ainsi que l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse [20],[21].

2- Des méthodes basées sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement [22]. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et Luenberger étendu. Elle est largement utilisée dans la pratique et donne généralement de bons résultats.

Dans cette partie on cite de manière non exhaustive, les observateurs non linéaires utilisés pour la reconstruction d'état des systèmes dynamiques non linéaires.

- **Observateur de Luenberger étendu** [12]

Ce type d'observateur intervient au niveau du système original avec un gain constant. Cette technique nécessite un modèle linéaire et le gain  $L$  d'observateur est calculé par un placement de pôles. Cette technique est possible si on est sûr que l'état reste au voisinage de l'état d'équilibre ; soit il intervient avec la technique de changement de coordonnées avec un gain  $L$  qui dépend de l'état à estimer, cette méthode nécessite l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Ce changement de variable sert à réécrire l'erreur d'estimation sous forme linéaire. A partir de là, l'analyse de la convergence de l'erreur s'effectue comme pour le cas linéaire et le vecteur d'état initial est obtenu par la transformation inverse.

- **Filtre de Kalman étendu** [31]

La technique d'estimation avec ce filtre est la plus populaire et est largement utilisée pour estimer l'état des systèmes non linéaires. Elle consiste à utiliser les équations de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor du premier ordre. Toutefois, la preuve de convergence de cet estimateur établie pour le cas linéaire ne peut être étendue de manière générale au cas des systèmes non linéaires.

- **Observateur de Luenberger généralisé OLG**

Proposé par [3], l'idée de cette technique est d'ajouter un deuxième gain à l'intérieur de la partie non linéaire du système au gain de l'observateur de Luenberger. L'inconvénient de OLG est qu'il n'est applicable aux systèmes dont la jacobienne de chaque composante de la fonction non linéaire est une matrice carrée.

### • Observateurs à grand gain [8]

L'observabilité des systèmes non linéaires dépend de l'entrée, mais il existe toutefois des systèmes qui sont observables quelque soit l'entrée (dits uniformément observables). Dans ce cas là, un changement de coordonnées pour obtenir une forme canonique est possible où la partie observable est linéaire tant que le gain d'observateur dépend uniquement de la partie linéaire. Quant à la partie non linéaire, son effet devient négligeable pour une valeur importante du gain. Cet observateur est appelé 'observateur à grand gain'. L'observateur à grand gain à l'avantage de générer une erreur d'estimation qui converge de manière asymptotique vers zéro. Elle converge d'autant plus rapidement que le gain est élevé. Le problème majeur de l'observateur à grand gain réside dans la sensibilité aux bruit de mesure quand les gains sont importants.

## 1.4 Étude comparative

La conception d'observateurs pour des systèmes linéaires bénéficie d'une abondante littérature. La modélisation linéaire est un sujet maîtrisé avec une variété de méthodes puissantes. Ces observateurs sont caractérisés par leur simplicité et stabilité, faciles à mettre en oeuvre d'un point de vue mathématique. À partir d'un choix judicieux des gains d'observateurs, il est possible d'établir une dynamique d'observation plus rapide que le système. L'estimateur linéaire a une erreur d'estimation qui converge asymptotiquement vers zéro ce qui permet de corriger et de commander le système rapidement comme c'est le cas pour l'observateur de Luenberger.

Pour la conception d'un observateur linéaire, le choix des valeurs propres dépend de la possibilité de réalisation. On effet, on ne peut pas les prendre infiniment grandes pour éviter la sensibilité aux bruit de mesure. Ce sont des observateurs basés sur le système linéaire, il est alors difficile de prendre en compte les incertitudes liées au modèle réel, tel que :

- 1- Incertitudes liées aux paramètres (changement de valeur).
- 2- Incertitudes liées à la structure (changement de modèle par rapport aux bruits de mesures).

Comme mentionné précédemment, les observateurs linéaires se basent sur un modèle linéaire qui ne reflète pas le comportement réel du système et la plupart des systèmes réels sont des systèmes non linéaires. Les estimateurs d'états non linéaires se basent en général sur des systèmes de formes similaires à la quelle sont assignées ce qui reflète mieux le comportement de processus. Ces observateurs présentent de bonnes performances du

point de vue précision.

L'utilisation du formalisme non linéaire est le moyen le plus naturel pour représenter un système réel. Cependant, la complexité du modèle utilisé d'un point de vue mathématique rend la tâche délicate et difficilement exploitable. Par ailleurs, si un modèle non linéaire est considéré, il spécifique et de ce fait toutes ces procédures d'estimation sont toutes liées à la structure du modèle utilisé. De plus, la notion d'observabilité dépend de l'entrée du système et n'est pas définie de façon globale mais elle est singulière et propre au modèle non linéaire utilisé. Et comme la majorité de ces approches utilisent la méthode de changement de coordonnées qui n'est pas toujours évidente à satisfaire, bien qu'en théorie une transformation soit possible, et même si le modèle linéaire est obtenu il faut éviter de s'éloigner des points de fonctionnement sinon l'observateur peut être comprimé par les instabilités qui peuvent se révéler ainsi que la sensibilité au bruit de mesure qui n'intervient plus linéairement.

Il est difficile à priori, étant donné les travaux actuels, de trouver une théorie générale sur l'estimation de l'état non linéaire. L'extention directe des méthodes développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires est délicate. Cependant, ces techniques sont parfois difficiles à appliquer à cause des contraintes imposées. Les modèles Takagi Sugeno par leur propriété d'approximateurs universels et leur structure particulière permettent l'extension de certains outils d'analyse des systèmes linéaires au cas non linéaires tout en préservant une certaine précision. Dans ce qui suit, nous présentons ces modèles ainsi que la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires représentés par les modèles de Takagi Sugeno.

## 1.5 Conclusion

Ce chapitre constitue un rappel qui regroupe certaines notions de stabilité, d'observateurs et d'observabilité des systèmes dynamiques linéaires déterministes (observateur Luenberger) et non linéaires, avec un étude comparative sur l'estimation d'état dans les deux cas (systèmes linéaires et non linéaires).

Dans le chapitre suivant, nous aborderons la seconde problématique qui est la synthèse d'observateurs pour des systèmes non linéaires représentés par des multi modèles appelés Takagi Sugeno (TS).

# Chapitre 2

## Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Modèle de Takagi Sugeno</b>	<b>20</b>
2.2.1	La représentation multimodèles	20
<b>2.3</b>	<b>Construction des modèles TS</b>	<b>21</b>
2.3.1	Approche par secteurs non linéaires	22
<b>2.4</b>	<b>Stabilité des systèmes T-S</b>	<b>24</b>
<b>2.5</b>	<b>Observabilité des systèmes T-S</b>	<b>26</b>
2.5.1	Variables de décision mesurables : VDM	27
2.5.2	Variables de décision non mesurables : VDNM	28
<b>2.6</b>	<b>Approches <math>L_2</math></b>	<b>28</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente la modélisation polytopique avec le formalisme Takagi-Sugeno pour remédier aux inconvénients des systèmes linéaires et systèmes non linéaires. Les modèles Takagi-Sugeno par leur propriété d'approximateurs universels et leur structure particulière offrent, d'une part, la possibilité de décrire des comportements non linéaires très complexes avec une structure simple inspirée des modèles linéaires. D'autre part, leur structure particulière permet l'extension de certains résultats obtenus dans le

cadre des systèmes linéaires. Dans ce qui suit, nous présentons succinctement les modèles TS (appelés aussi Lpv ou qLpv) ainsi que les méthodes de leur obtention et on termine par un observateur par atténuation de perturbation avec l'approche  $L_2$ .

## 2.2 Modèle de Takagi Sugeno

Les modèles de Takagi Sugeno constituent une représentation particulière des systèmes non linéaires sous forme d'une interpolation entre des modèles linéaires locaux. Chaque modèle local est un système dynamique LTI (Linéaire à Temps Invariant) valide autour d'un point de fonctionnement. Ces sous-modèles sont alors interpolés pour aboutir à un multimodèle. Ces multimodèles vérifient la somme de propriété convexe qui est une intersection de plusieurs sous espace fermés appelés polytopes comme l'indique la figure (2.1).

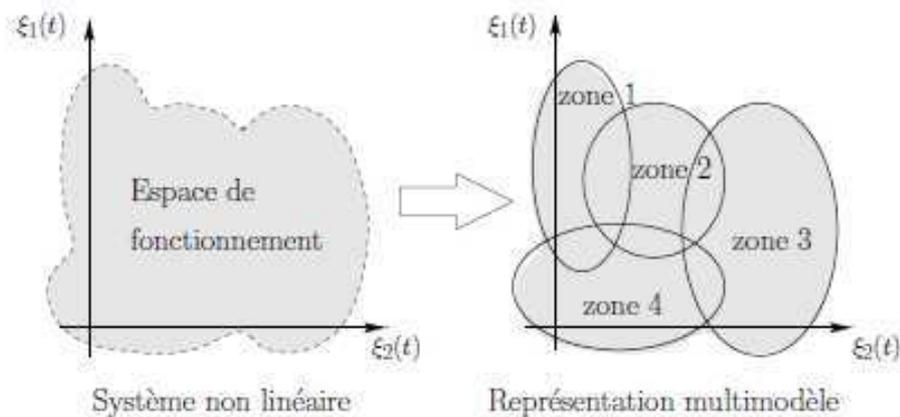


FIGURE 2.1 – Approche multimodèles.

### 2.2.1 La représentation multimodèles

Soit un système non linéaire modélisé sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où le vecteur  $x(t) \in R^n$  est l'état du système,  $u(t) \in R^m$  est l'entrée et  $y(t) \in R^p$  est la sortie.  $f$  et  $h$  sont des fonctions non linéaires.

Un modèle de Takagi-Sugeno est composé d'un ensemble fini de modèles linéaires interconnectés grâce à des fonctions non linéaires caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement vérifiant la propriété de somme convexe (2.3).

La formulation mathématique des modèles T-S est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les  $r$  sous-modèles sont définis par des matrices connues :

$$A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times n_u}, C_i \in R^{n_y \times n} \text{ et } D_i \in R^{n_y \times n_u}.$$

Les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$  sont des fonctions non linéaires dépendant du paramètre  $\xi(t)$  pouvant être mesurable (par exemple l'entrée  $u(t)$  ou la sortie  $y(t)$  du système) ou non mesurable (l'état  $x(t)$  du système). Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, i = 1, \dots, r \\ \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.3 Construction des modèles TS

La modélisation des systèmes à l'aide de modèles de Takagi- Sugeno est une façon intéressante de représenter le comportement des systèmes non linéaires. Celle-ci s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires caractérisant le fonctionnement du système dans différentes zones de fonctionnement.

Dans la littérature trois approches peuvent être rencontrées :

**Première approche** repose sur les techniques d'identification [24](à partir d'un jeu d'E/S). La structure du modèle ainsi que les fonctions d'activation sont tout d'abord choisies a priori. Cette technique est utilisée quand le modèle analytique n'est pas disponible ou que celui-ci est très complexe à mettre en équations.

**Deuxième approche** repose sur la linéarisation (autour de plusieurs points de fonctionnement) [7]. Des sous modèles linéaires sont alors obtenus pour chaque zone de fonctionnement.

**Troisième approche** repose sur la transformation par secteurs non linéaires initiée dans [18]. Elle est basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire. Contrairement aux deux approches précédentes qui donnent une approximation du modèle non linéaire, cette troisième méthode fournit un modèle **T-S** représentant de manière exacte le modèle non linéaire dans un compact de l'espace considéré.

Il est noté que l'approche par secteur non linéaire est utilisée pour construire les modèles **TS** à **VDNM** par contre les deux autres approches utilisées pour les multimodèles **TS** à **VDM**.

### 2.3.1 Approche par secteurs non linéaires

La construction des systèmes de Takagi Sugeno par l'approche des secteurs non linéaires est introduite pour la première fois dans les travaux de [18] et par la suite, a été étendue par [30]. Le principe des transformations par secteurs non linéaires pour l'élaboration d'un modèle **TS** est basé sur l'idée de trouver un secteur global de manière à ce que le système non linéaire soit compris entre deux secteurs tel que :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \in [a_1 \ a_2] x(t) \quad (2.4)$$

La figure ci-dessous représente le secteur non linéaire global

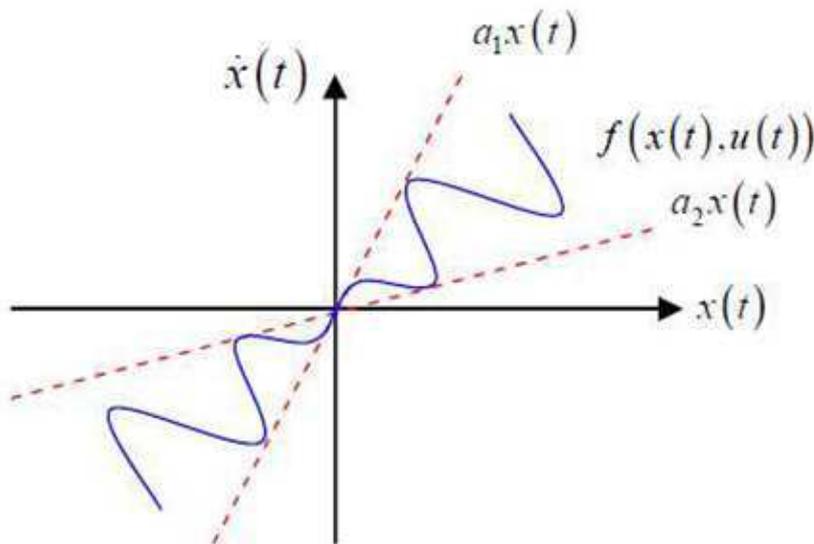


FIGURE 2.2 – Secteur non linéaire global.

Parfois, il est difficile de trouver un secteur global pour le système non linéaire, dans ce cas là, on considère un secteur local, comme il est indiqué dans la figure (2.3).

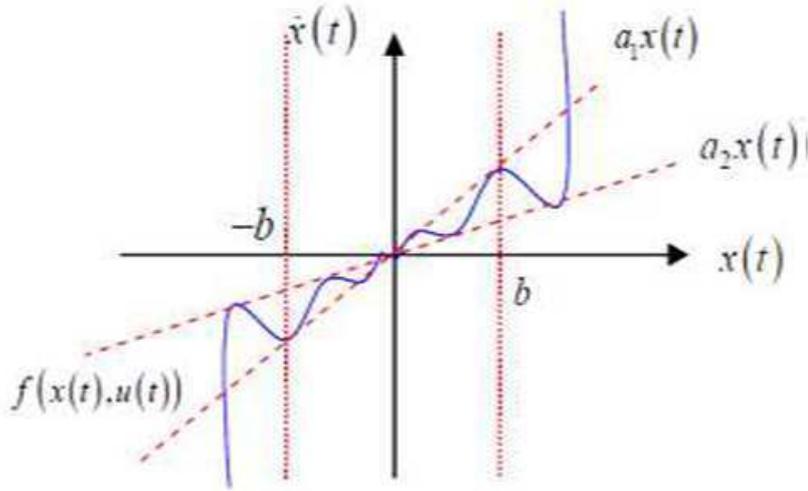


FIGURE 2.3 – Secteur non linéaire local.

Le choix s'est porté sur cette approche particulièrement pour l'exactitude du modèle polytopique TS obtenu sur un espace compact des variables d'état ainsi que son application possible sur une large classe de systèmes non linéaires.

Considérons le modèle non linéaire décrit par (2.1) qui peut être réécrit sous forme q-Lpv comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t))x(t) + G(x(t), u(t))u(t) \\ y(t) = H(x(t), u(t))x(t) + R(x(t), u(t))u(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

$F, G, H$  et  $R$  sont des fonctions non linéaires dépendant de l'état  $x(t) \in R^n$  et de l'entrée  $u(t) \in R^m$ .

D'une manière générale, on nomme la variable de prémise  $\xi(t) = [x(t), u(t)]^T$  est définie comme étant la variable de décision dont le choix est lié à la transformation q-Lpv.

Le système (2.5) est alors réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(\xi(t))x(t) + G(\xi(t))u(t) \\ y(t) = H(\xi(t))x(t) + R(\xi(t))u(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

Soit  $k$  le nombre de fonctions non linéaires présentes dans le système (2.6). On les note

$f_i, i = 1, \dots, k$ .

Supposons qu'il existe un compact  $C$  des variables  $\xi(t)$  où les non-linéarités sont bornées.

$$f_i \in [f_{min}^i \quad f_{max}^i], i = 1, \dots, k \quad (2.7)$$

En utilisant la transformation convexe, les  $f_i$  sont réécrite sous la forme :

$$f_i(x(t)) = f_{min}^i \omega_0^i(\xi(t)) + f_{max}^i \omega_1^i(\xi(t)) \quad (2.8)$$

Les fonctions  $\omega_i^j(\xi(t))$  avec  $i, j = 0, 1$ , sont les fonctions de pondération locales définies par [32] :

$$\begin{cases} \omega_0^i = \frac{f_{max}^i - f(\xi(t))}{f_{max}^i - f_{min}^i} \\ \omega_1^i = \frac{f_i(\xi(t)) - f_{min}^i}{f_{max}^i - f_{min}^i} \end{cases} \quad (2.9)$$

Les fonctions d'activation globales  $\mu_i(\xi(t)), i = 1, \dots, r$  sont obtenues à partir des fonctions  $\omega_0^i$  et  $\omega_1^i$  par [13] :

$$\mu_i + i_0 + i_1 \times 2 + \dots + i_k \times 2^{k-1}(\xi(t)) = \prod_j^k \omega_i^j(\xi(t)) \quad (2.10)$$

Le nombre de sous-modèles  $r$  est égal à  $2^k$ .

## 2.4 Stabilité des systèmes T-S

La stabilité des systèmes non linéaires représentés par un modèle de Takagi-Sugeno a fait l'objet de nombreux travaux [1]. La structure particulière de ce type de modèle a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires.

Soit un système non linéaire autonome représenté par son modèle polytopique TS comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \quad (2.11)$$

On analyse la stabilité par la deuxième méthode de Lyapunov établie dans [35],[2] pour  $i = 1, \dots, r$  tel que :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (2.12)$$

Où  $P$  est une matrice symétrique de dimension  $n \times n$ .  $P$  est positive (semi) définie.

La dérivée de  $V(x)$  par rapport au temps est :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (2.13)$$

En remplaçant  $\dot{x}(t)$  par son expression (2.11), on obtient :

$$\dot{V}(x) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i^T P + P A_i) \right) x(t) \quad (2.14)$$

L'utilisation de la propriété de somme convexe des fonctions de Lyapunov permet l'obtention de  $r$  conditions, formulées en termes d'inégalités linéaires matricielles (LMIs) données par :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (2.15)$$

Il est noté que si le nombre  $r$  de sous-modèles est important, il est difficile de trouver une matrice commune  $P$  satisfaisant simultanément les  $r$  LMIs. Pour pallier ce conservatisme, plusieurs approches ont été étudiées et on peut en particulier citer l'utilisation de fonctions de Lyapunov polyquadratiques de la forme [32] :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) P_i x(t) \quad (2.16)$$

Avec :

$$P_i > 0, \mu_i(\xi(t)) \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) = 1 \quad (2.17)$$

L'idée de cette approche consiste à chercher des matrices  $P_i$  au lieu d'une seule matrice commune  $P$ . Par la suite, une fonction de Lyapunov non quadratique a été introduite exploitant l'idée de fonction continue par morceaux [32].

Elle est définie par :

$$V(x(t)) = \max \{V(x(t)), \dots, V_i(x(t)), \dots, V_r(x(t))\} \quad (2.18)$$

où :

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), P_i = P_i^T > 0, i = 1, \dots, r \quad (2.19)$$

Les conditions de stabilité issues de ce type de fonctions de Lyapunov sont données par le théorème suivant :

**Théorème 2.1** [16] :

Le modèle TS (2.11) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_i$  et des scalaires positifs  $\tau_{ijk}$  tels que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0 \quad (i, j) = 1, \dots, r \quad (2.20)$$

$$P_k > 0, P_j > 0, \tau_{ijk} > 0$$

$\tau_{ijk}$  : paramètre de relaxation.

Ces résultats constituent des conditions de stabilité moins restrictives que les conditions de stabilité quadratiques. Cependant, elles sont exprimées en terme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMIs) qui sont plus difficiles à résoudre que les LMIs.

## 2.5 Observabilité des systèmes T-S

Considérons le modèle T-S suivant pour lequel la sortie est une fonction linéaire de l'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

L'observateur de Luenberger proposé est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{\xi}(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

Afin de déterminer les gains  $L_i$  de l'observateur (2.22), la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est étudiée, cette dernière étant définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.23)$$

Sa dynamique est régie par une équation différentielle qui dépend de la connaissance ou non des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$ . On définit alors deux cas selon que les variables de décision soient mesurables ou non mesurables.

### 2.5.1 Variables de décision mesurables : VDM

Dans le cas où les variables de décision sont mesurables, l'observateur et le système utilisent les mêmes variables de décision ce qui permet une factorisation par les fonctions d'activation lors de l'évaluation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Plus précisément, cette dernière s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i - L_i C) e(t) \quad (2.24)$$

Les gains  $L_i$  sont déterminés par l'analyse de la stabilité du système (2.24). Une fonction de Lyapunov quadratique permettant une formulation sous forme de LMIs.

**Théorème 2.2** [28] :

L'erreur d'estimation d'état (2.24) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice positive définie  $P = P^T$  et des matrices gains  $M_i$  tel que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$P A_i + A_i^T P - M_i C - C M_i^T < 0 \quad i = 1, \dots, r \quad (2.25)$$

Les gains de l'observateur sont déterminés par :  $L_i = P^{-1} M_i$

Avec le choix de la fonction de Lyapunov quadratique suivante :  $V(e(t)) = e^T P e(t)$

La dérivé de  $V(e(t))$  par apport au temps est :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}^T(t) P e(t) + e^T(t) P \dot{e}(t) \quad (2.26)$$

En remplaçant  $\dot{e}(t)$  par son expression, nous obtenons :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((A_i - L_i C) e(t))^T P e(t) + e^T(t) P \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((A_i - L_i C) e(t)) \quad (2.27)$$

Le système (2.24) est asymptotiquement stable si seulement si :

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) ((A_i - L_i C)^T P + P (A_i - L_i C)) \right) e(t) < 0 \quad (2.28)$$

En exploitant la propriété de somme convexe,  $\dot{V}(t) < 0$  si seulement si :

$$(A_i - L_i C)^T P + P (A_i - L_i C) < 0 \quad (2.29)$$

$$A_i^T P - C^T L_i P + P A_i - P L_i C < 0 \quad (2.30)$$

Nous posons :  $L_i = P^{-1} M_i$ , nous obtenons :

$$P A_i + A_i^T P - M_i C - C M_i^T < 0 \quad (2.31)$$

### 2.5.2 Variables de décision non mesurables : VDNM

Dans le cas où les variables de décision ne sont pas connues, leur factorisation n'est plus possible et la dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))) \quad (2.32)$$

Les résultats obtenus dans le cas des VDM ne sont plus applicables à la synthèse d'observateurs TS à VDNM. Le théorème suivant fournit les conditions de convergence de l'observateur à VDNM :

**Théorème 2.3** [5] :

L'erreur d'estimation d'état (2.32) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices positives définies  $P = P^T$  et  $Q = Q^T$  ainsi que des matrices gains  $M_i$  et un scalaire positif  $\gamma$  tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$P A_i + A_i^T P - M_i C - C M_i^T < -Q_i = 1, \dots, r \quad (2.33)$$

$$\begin{pmatrix} -Q + \gamma^2 & P \\ P & -I \end{pmatrix} < 0. \quad (2.34)$$

## 2.6 Approches $L_2$

L'estimation dans le contexte des systèmes TS à variables de décision non mesurables a fait l'objet de quelques travaux [14],[15] où le problème y est traité comme un problème d'estimation des systèmes incertains. Les incertitudes considérées sont dues au fait que les variables de décision ne soient pas mesurables. Les gains de l'observateur sont alors déterminés de manière à assurer la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état, tout en assurant une atténuation  $L_2$  du transfert de l'influence des incertitudes sur l'erreur d'estimation d'état.

Le principe de la synthèse d'un observateur par l'approche  $L_2$  est de réécrire le système TS à VDNM sous forme d'un système à  $VDM$  perturbé, où les perturbation sont bornées.

Soit le système TS décrit par sa représentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

Le système (2.35) peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) + \Delta(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.36)$$

Le système (2.36) est à  $VDM$  avec une pseudo perturbation  $\Delta(t)$  due à la non disponibilité à la mesure des variables de décision. Cette pseudo perturbation est exprimée par :

$$\Delta(t) = \left( \sum_{i=1}^r \mu_i(x(t)) - \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) \right) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.37)$$

Le fait que les fonctions de pondération soient bornées due à l'état  $x(t)$  implique que la pseudo-perturbation  $\Delta(t)$  le soit également. L'observateur de Luenberger proposé est alors comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\hat{x}(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.38)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r (\mu_i(\hat{x}(t)) (A - LC) e(t) + \Delta(t)) \quad (2.39)$$

La dynamique d'erreur d'estimation a pour expression (2.39) vérifiant les hypothèses suivantes :

### Hypothèses 2.1

- L'état  $x(t)$  du système est borné.
- L'entrée  $u(t)$  est bornée.
- $\Delta(t)$  est bornée.
- Les paires  $(A_i, C)$  sont observables.

A partir de ces hypothèses, des conditions de stabilité du système (2.39) sont formulées dans l'objectif d'estimer les états tout en minimisant l'effet de la pseudo perturbation  $\Delta(t)$  l'erreur d'estimation. Cependant, la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation ne peut pas être assurée à cause de la présence du terme  $\Delta(t)$  en sa qualité de perturbation.

Dans la pratique, les systèmes dynamiques sont très souvent soumis à des perturbations bornées (perturbations sur la commande ou des erreurs sur les mesures). Dès lors qu'on parle de perturbations, l'état ne convergera plus vers l'origine, mais vers un ensemble invariant. Plus cet ensemble est petit, plus l'effet de la perturbation est faible sur le système. On fait alors appel à la notion de stabilité au sens entrée-état (ISS).

L'objectif de la synthèse d'observateur (2.38) est de minimiser l'effet de la perturbation  $\Delta(t)$  sur l'erreur d'estimation  $e(t)$  tout en assurant un faible taux d'atténuation  $\bar{\gamma}$  [32].

$$\sup_{\|\Delta\|_2 \neq 0} \frac{\|e(t)\|_2}{\|\Delta(t)\|_2} < \bar{\gamma} \quad (2.40)$$

Le théorème suivant présente les conditions exprimées sous forme de *LMI* pour la synthèse des gains  $L_i$  de l'observateur proposé en (2.38) assurant la stabilité de (2.39) et la minimisation de l'effet de  $\Delta(t)$  sur l'erreur d'estimation sous condition que les hypothèses (2.1) soient vérifiées.

**Théorème 2.4** [32] :

*S'il existe une matrice symétrique positive définie  $P$ , des matrices gains  $K_i$  ainsi qu'un scalaire positif  $\bar{\gamma}$  solutions au problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{P, K_i} \bar{\gamma} \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} A_i^T P + P A_i - K_i C - C^T K_i^T + I & P \\ P & -\bar{\gamma} I \end{pmatrix} < 0$$

$$i = 1 \dots r$$

*L'erreur d'estimation (2.39) est alors ISS par rapport à  $\Delta(t)$  et satisfait l'inégalité suivante :*

$$\|e(t)\| \leq e^{-\frac{(t-t_0)}{2\lambda_{\max}(P)}} e(t_0) + \gamma \|\Delta(t)\|_\infty \quad (2.42)$$

Où :

$\lambda_{\max}$  : Valeur propre maximale.

Les gains de l'observateur sont donnés par :  $L_i = P^{-1}K_i$  et le taux d'atténuation du

transfert de  $e(t)$  vers  $\Delta(t)$  est :  $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$ .

Pour plus de détails, le lecteur peut se referer à [32],[33].

## 2.7 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle polytopique TS et les différentes techniques de reconstruction d'état des systèmes non linéaires représentés sous forme de multimodèles. Nous avons traité les multimodèles TS à VDM et les multimodèles TS à VDNM.

A la fin de ce chapitre, on a analysé la stabilité ISS par la théorie de Lyapunov qui est employée pour prouver la convergence de l'observateur proposé. Le problème est traité comme un problème d'optimisation sous forme de *LMI* en utilisant l'observateur par atténuation de perturbations avec l'approche  $L_2$ .



# Chapitre 3

## Estimation d'état d'un système chaotique Rössler représenté par un modèle de Takagi Sugeno.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>3.2</b>	<b>La théorie du chaos</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Étude d'un système chaotique de Rössler et ces caractéristiques</b>	<b>35</b>
3.3.1	Aspect aléatoire	35
3.3.2	Sensibilité aux conditions initiales	37
3.3.3	L'attracteur étrange	37
<b>3.4</b>	<b>L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDM</b>	<b>39</b>
<b>3.5</b>	<b>L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDNM</b>	<b>40</b>
<b>3.6</b>	<b>Simulations et interprétation</b>	<b>41</b>
3.6.1	Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDM	41
3.6.2	Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDNM	43
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>

---

## 3.1 Introduction

L'étude des systèmes dynamiques non linéaires a connu un essor spectaculaire depuis l'apparition du chaos dans les systèmes déterministes. Les propriétés spécifiques des systèmes chaotiques a fait l'intérêt de plusieurs chercheurs (Lorenz[25], Rossler [9]). Leurs efforts dans ce domaine donnent des résultats encourageants. Ils ont proposés des modèles mis sous forme d'équations différentiels qui facilitent l'étude de ces systèmes.

Dans notre étude, on traite l'estimation d'état d'un système chaotique de Rossler présenté par un modèle de Takagi Sugeno. Nous considérons les deux cas de variables de décision soit TS à VDM où bien TS à VDNM.

## 3.2 La théorie du chaos

Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique caractérisé par :

- La non linéarité : Si un système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- Le déterminisme : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes, c'est à dire, la capacité de prédire le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent.
- Un comportement apériodique à long terme : le système chaotique varie d'une manière aléatoire dans le temps.
- Attracteur étrange : La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique chaotique s'appelle "attracteur".

### Domaines d'applications

Au cours des dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant pour les systèmes chaotiques. Á partir de la naissance du chaos, il est possible de décrire le complexe.

En météorologie, les travaux de Lorenz [25] ont été pionniers en matière des systèmes chaotiques. Aujourd'hui, l'application des modèles chaotiques aux mouvements atmosphériques et océaniques semblent être une approche prometteuse. En analysant la sensibilité aux conditions initiales, on peut prédire le changement climatique. Dans le comportement

chaotique de l'atmosphère, la reconnaissance de zones relativement stables permet de fixer plus précisément la limite de validité des prévisions.

En biologie et médecine, l'intérêt de la théorie du chaos c'est de pouvoir expliquer des phénomènes plus variés. Le cerveau humain est un réseau non linéaire comportant un vaste nombre de neurones mutuellement reliés, dans lequel des phénomènes chaotiques sont observées. L'étude et l'analyse de l'activité de ces neurones, dans le but de mieux comprendre l'activité du cerveau, permettrait de guérir beaucoup de maladies.

Le comportement complexe des systèmes chaotiques a attiré l'attention des chercheurs travaillant dans le domaine de la télécommunication sur les méthodes de transmission sécurisée d'informations basées sur les techniques de la cryptographie. Depuis les années 1990, plusieurs analogies entre les systèmes chaotiques et cryptographiques ont été constatées, ce qui a ouvert une grande voie pour l'utilisation du chaos dans les systèmes de communication sécurisée [23].

### 3.3 Étude d'un système chaotique de Rössler et ces caractéristiques

En 1976, un biochimiste allemand, Otto Rössler [9] a essayé de construire un attracteur chaotique semblable à celui de Lorenz [25] en plus facile à analyser. Il a tenté de concevoir le système le plus simple possible, capable de générer du chaos. La dynamique est donnée par un système d'équations différentielles. On sait alors que, pour obtenir du chaos, il faut un espace de phase au moins de dimension 3. Le modèle dynamique résultant est donné ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + a x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) x_3(t) - c x_3(t) + b u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  sont les états du système et  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des paramètres numériques du système Rössler.

$$u(t) = 1$$

#### 3.3.1 Aspect aléatoire

La figure suivante illustre la variation au cours de temps des états d'un système chaotique de Rössler pour les paramètres  $a=0.398$ ,  $b=2$ ,  $c=4$ .

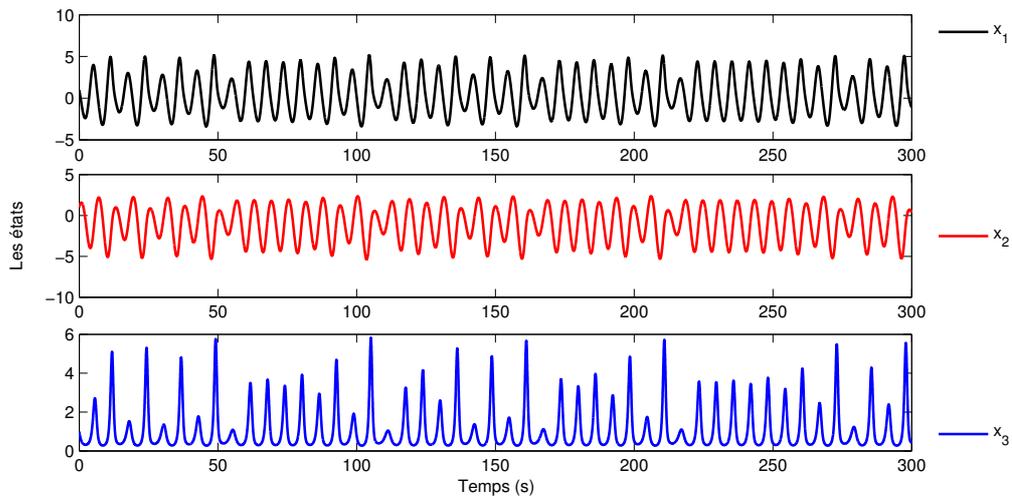


FIGURE 3.1 – États  $x_i$  du système chaotique de Rössler.

La courbe suivante permet de comparer une évolution simple, périodique d'un système classique sinusoïdal avec l'évolution plus complexe et non périodique du système chaotique de Rössler.

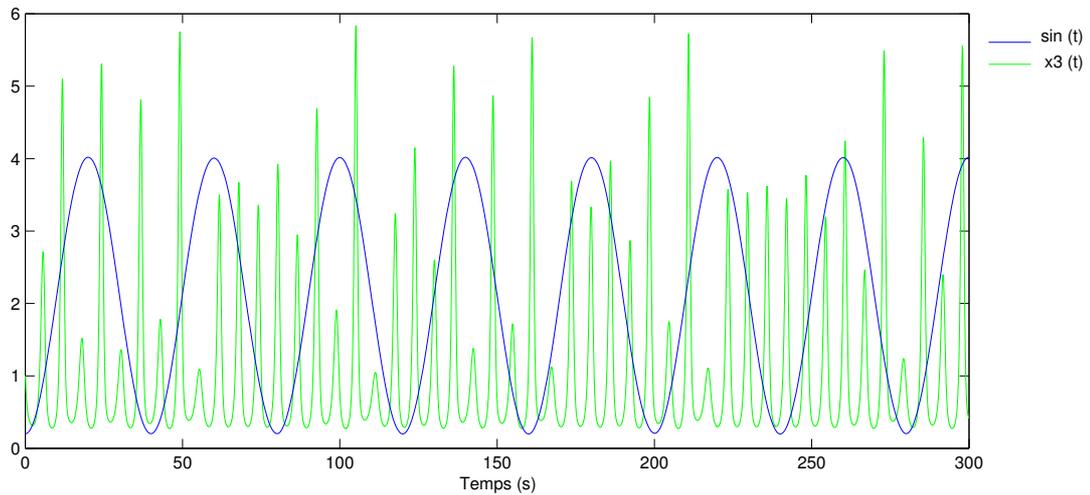


FIGURE 3.2 – Évolution dans le temps du système chaotique de Rössler comparé à une sinusoïde.

### 3.3.2 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales, communément appelée effet papillon, a été popularisée par le météorologue Edward Lorenz [25]. Elle se caractérise par le fait que la distance entre deux trajectoires de phase initialement voisines, tend à augmenter de manière drastique au cours du temps. Ainsi, la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider quelle sera la trajectoire effectivement suivie à long terme. La simulation du modèle de Rössler montre bien cette sensibilité aux conditions initiales. Avec les paramètres  $a=0.398$ ,  $b=2$  et  $c=4$ . Les conditions initiales choisies sont :  $X_{CI_1} = [1, 1, 1]^T$  et  $X_{CI_2} = [1, 1, 1.000001]^T$

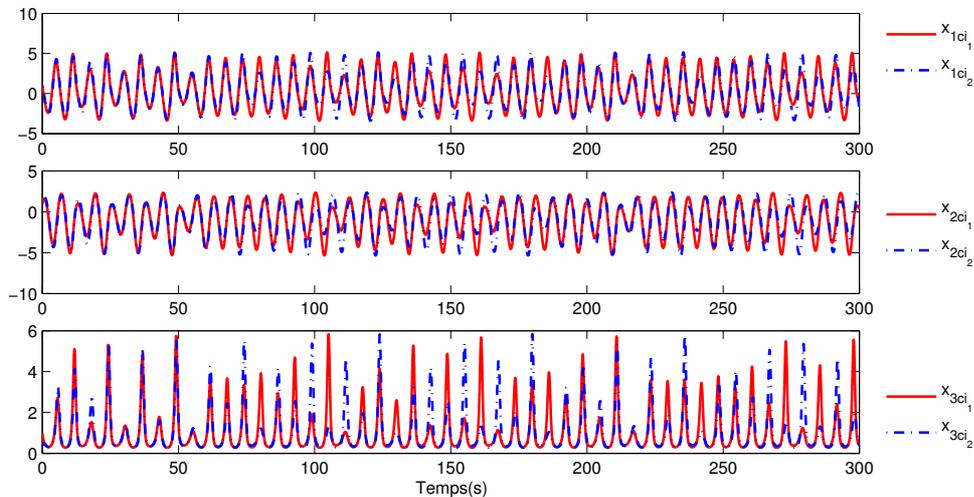


FIGURE 3.3 – Sensibilité aux conditions initiales de l'attracteur de Rössler.

### 3.3.3 L'attracteur étrange

Nous appelons attracteur la région de l'espace des phases précis d'un système vers lequel le système évolue de façon irréversible. Au sein de cette région de l'espace des phases, l'attracteur définit une forme géométrique.

L'évolution dans le temps d'une trajectoire chaotique au cours du temps apparaît comme aléatoire, cependant l'observation de la trajectoire dans l'espace des phases, lorsque  $t$  tend vers l'infini, décrit une forme particulière qui présente une structure fractale. C'est l'attracteur étrange qui n'est pas une surface lisse, mais une surface repliée plusieurs fois sur elle même, voir la figure suivante (3.5)

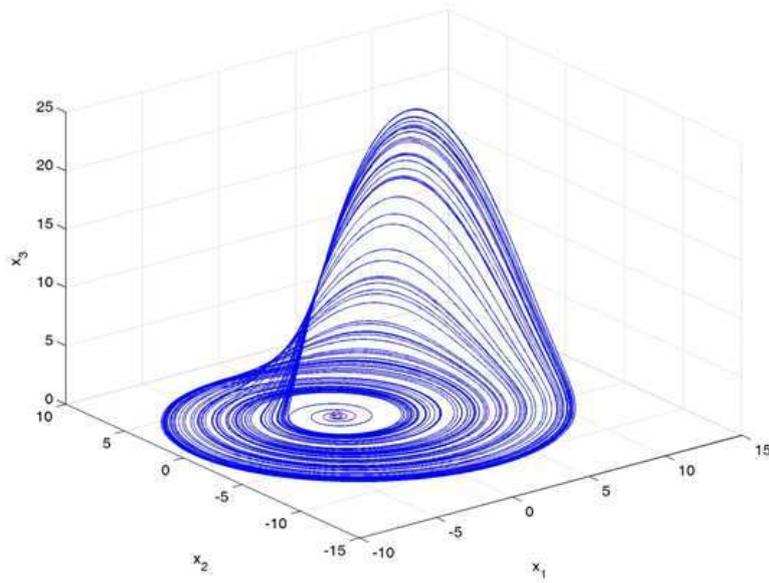


FIGURE 3.4 – Attracteur de Rössler.

Pour faciliter l'étude et l'estimation d'état du système chaotique de Rössler, il est intéressant d'utiliser la représentation multimodèles par le formalisme de Takagi Sugeno (TS à VDM où TS à VDNM), parce que, d'une part on conserve les propriétés non linéaires du système de Rössler et d'autre part, on assure une structure simple inspirée des modèles linéaires.

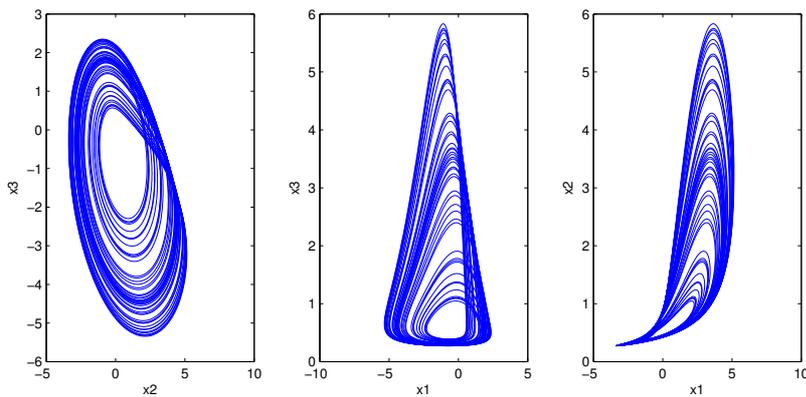


FIGURE 3.5 – L'attracteur étrange de Rössler.

## 3.4 L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDM

Soit le système chaotique de Rössler décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + a x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) x_3(t) - c x_3(t) + b u(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Le système (3.2) peut être présenté par le modèle de Takagi Sugeno suivant dont la variable de décision  $\xi(t) = x_3(t)$  est mesurable.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(x_3(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

La non linéarité est  $x_3(t)$  est bornée tel que :

$$x_3 \in [x_{3min} \quad x_{3max}] \quad (3.4)$$

En utilisant la transformation convexe, la non linéarité  $x_3(t)$  peut s'écrire sous la forme suivant :

$$x_3(t) = x_{3min} \omega_1(\xi(t)) + x_{3max} \omega_2(\xi(t)) \quad (3.5)$$

Avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_{3min} & 0 & -c \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_{3max} & 0 & -c \end{pmatrix}, C = (0 \quad 0 \quad 1)$$

Avec :  $x_{3min} = -10$  et  $x_{3max} = 10$ .

Les fonctions de pondération sont définies par :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{x_{3max} - x_3}{x_{3max} - x_{3min}} \\ \omega_2 = \frac{x_3 - x_{3min}}{x_{3max} - x_{3min}} \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.5 L'attracteur de Rössler représenté par un TS à VDNM

Soit le système chaotique Rössler suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) - x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + a x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) x_3(t) - c x_3(t) + b u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système (3.7) possède une seule non linéarité. Il peut être réécrit en utilisant l'approche par secteurs non linéaires pour obtenir un modèle TS à VDNM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(x_3(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

Dont la variable de décision est  $\xi(t) = x_3(t)$  qui est non mesurable.

La non linéarité est  $x_3(t)$  est bornée tel que :

$$x_3 \in [x_{3min} \quad x_{3max}] \quad (3.9)$$

En utilisant la transformation convexe, la non linéarité  $x_3(t)$  peut s'écrire sous la forme suivant :

$$x_3(t) = x_{3min} \omega_1(\xi(t)) + x_{3max} \omega_2(\xi(t)) \quad (3.10)$$

Avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_{3min} & 0 & -c \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_{3max} & 0 & -c \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Avec :  $x_{3min} = -10$  et  $x_{3max} = 10$

Les fonctions de pondération sont définies par :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{x_{3max} - x_3}{x_{3max} - x_{3min}} \\ \omega_2 = \frac{x_3 - x_{3min}}{x_{3max} - x_{3min}} \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3.6 Simulations et interprétation

La simulation du système chaotique de Rössler et sa représentation TS sont illustrées sur la figure suivante :

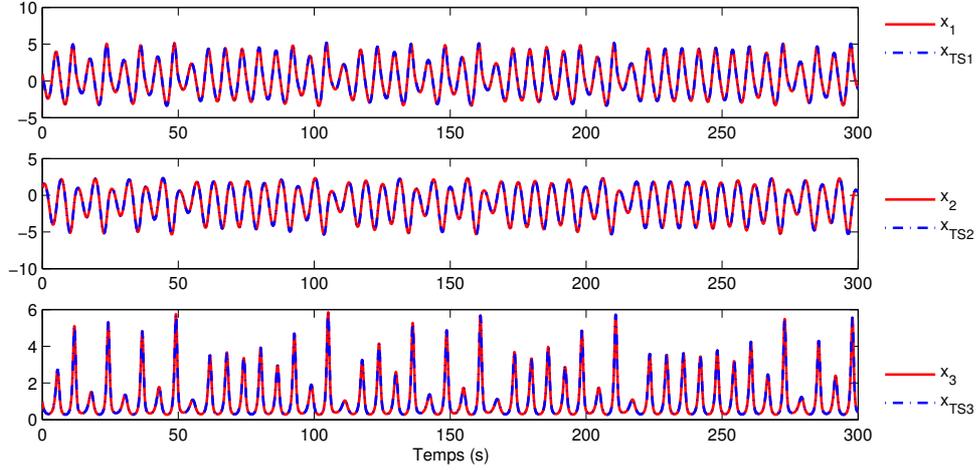


FIGURE 3.6 – Simulation de système Rössler et modèle TS.

La simulation de système Rössler qui est un système non linéaire représente l'état réel avec leur modèle TS montre bien la validité de la représentation de Takagi Sugeno qui est une représentation précis, exacte de modèle non linéaire initial.

Afin de tester la convergence de l'observateur, les conditions initiales ont été choisies différentes où  $x(0) = [0.1, 0.2, 0.3]^T$  et  $\hat{x}(0) = [1, 1, 1]^T$ .

#### 3.6.1 Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDM

Dans le cas du système chaotique représenté par un modèle *TS* à *VDM*, on considérons l'observateur de Luenberger suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(\hat{x}_3(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3.12)$$

Les estimations de l'observateur de Luenberger sont comparées aux états du système Rössler, les résultats de simulations sont données en figure (3.7) et figure(3.8)

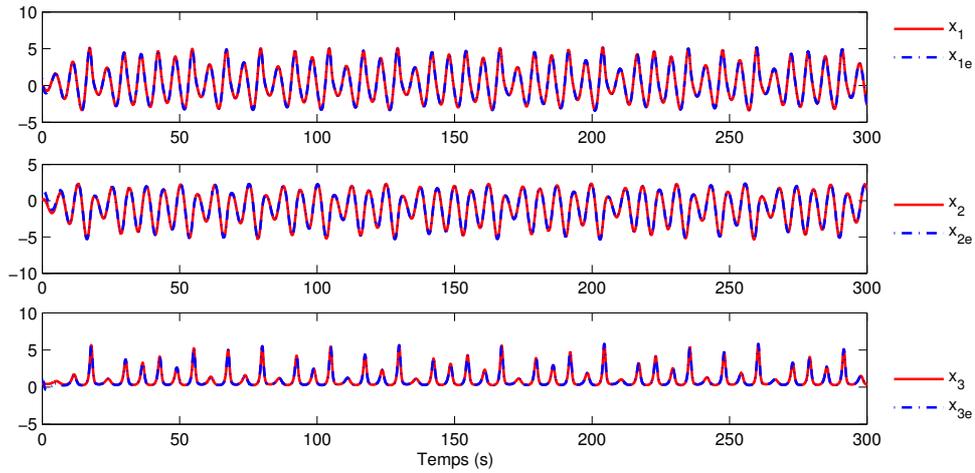


FIGURE 3.7 – Comparaison des états réels et estimés obtenus avec l'observateur de Luenberger.

La matrice symétrique définie positif est :

$$P = \begin{pmatrix} 24.3520 & 10.3456 & -0.4959 \\ 10.3456 & 12.1318 & -0.2838 \\ -0.4959 & -0.2838 & 2.1914 \end{pmatrix}$$

Les matrices gains  $M_i$  sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 22.4699 \\ -5.3576 \\ -44.5658 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 17.5107 \\ 6.6063 \\ 7.4040 \end{pmatrix}$$

Les gains de l'observateur sont déterminés après la résolution de la *LMI* (2.25) avec les solveurs Sedumi Yalmip.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.4094 \\ -2.1182 \\ -20.2924 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0.8229 \\ -0.0741 \\ 3.5554 \end{pmatrix}$$

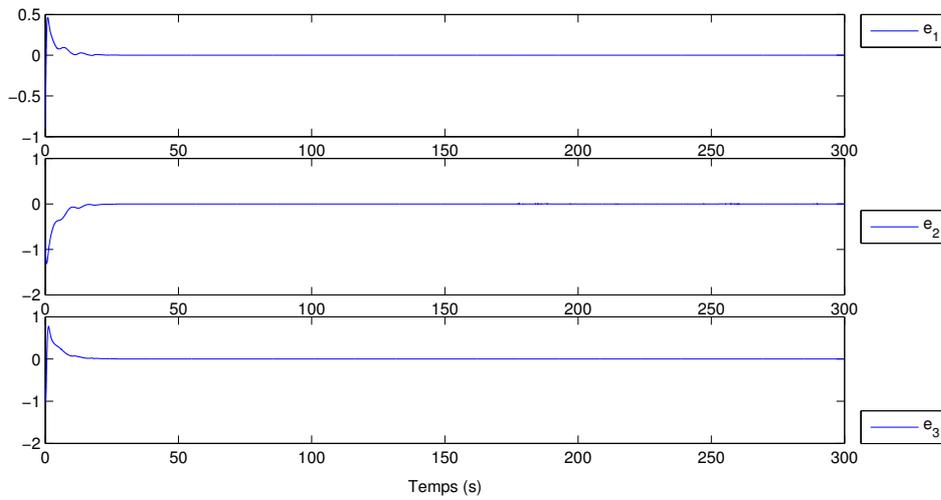


FIGURE 3.8 – Erreurs d'estimation des états avec l'observateur de Luenberger.

Pour plus de détails, la simulation est donné par la figure (3.9)

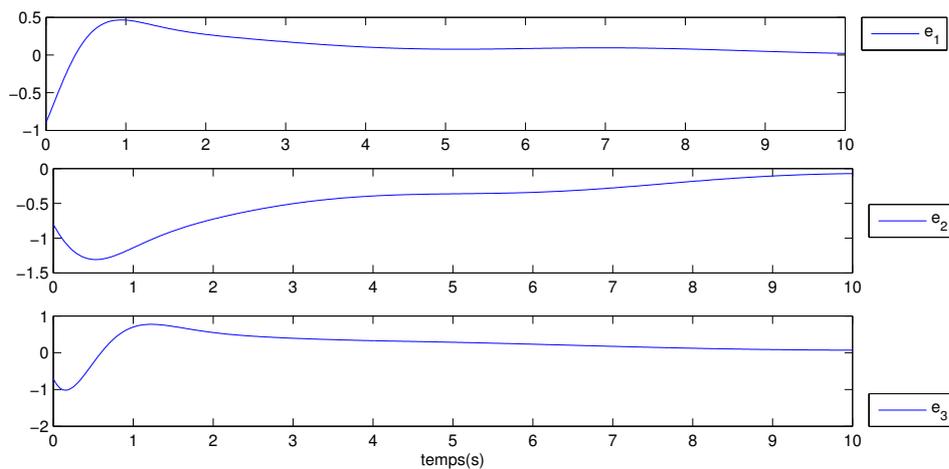


FIGURE 3.9 – Erreurs d'estimation des états avec l'observateur de Luenberger au bout de 10s.

### 3.6.2 Observateur TS pour le système de Rössler représenté par un TS à VDNM

Un observateur de Luenberger par atténuation de perturbations pour le système de Rössler est construit suivant l'approche  $L_2$  proposé dans le chapitre 2 est le suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^2 \omega_i(\hat{x}_3(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3.13)$$

Les estimations de l'observateur par atténuation de perturbation sont comparées aux états du système Rössler, les résultats de simulations sont données en figure (3.10) et figure(3.11)

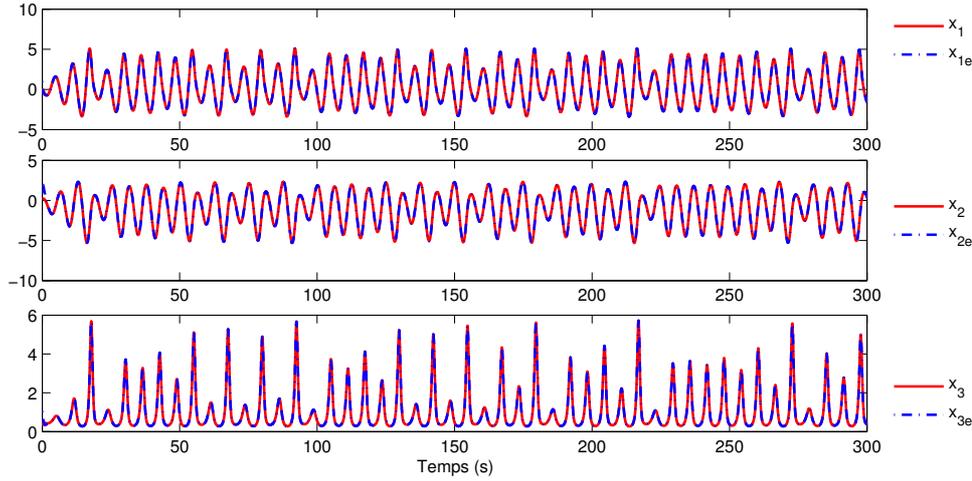


FIGURE 3.10 – Comparaison des états réels et estimés obtenus avec l'observateur  $L_2$

La matrice symétrique défini positif est :

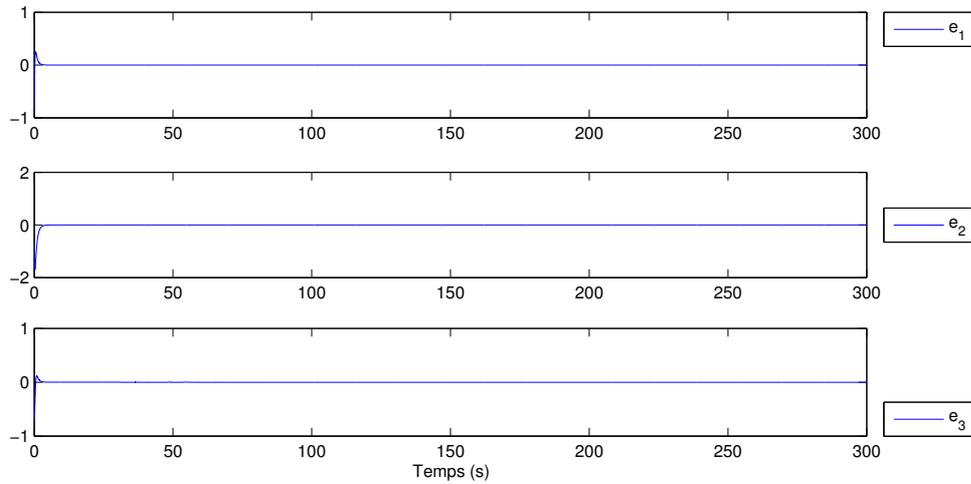
$$P = \begin{pmatrix} 15.143 & 1.3571 & -1.8020 \\ 1.3571 & 1.1355 & -0.1009 \\ -1.8020 & -0.1009 & 4.8679 \end{pmatrix}$$

Les matrices gains  $M_i$  sont :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 97.5166 \\ -0.4923 \\ -73.9811 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 61.4774 \\ -2.5095 \\ 23.3779 \end{pmatrix}$$

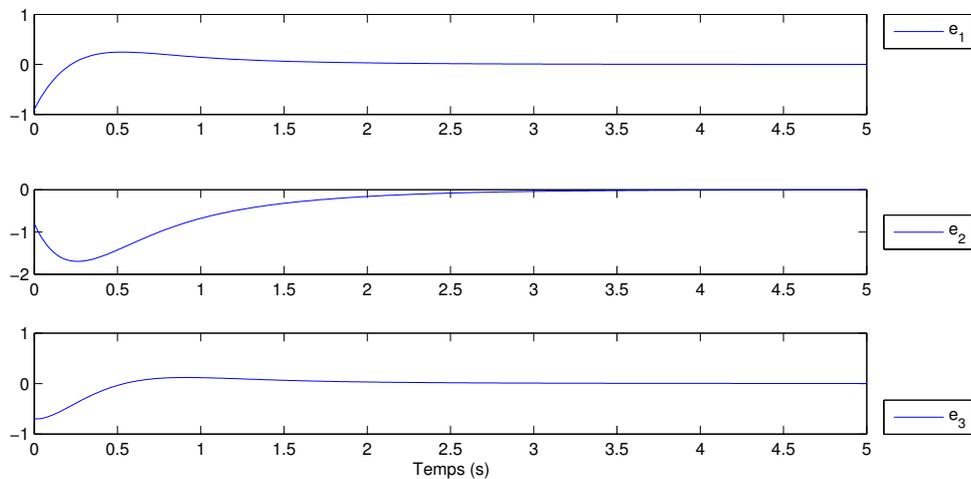
Les gains de l'observateur sont déterminés après résolution du problème d'optimisation du Théorème 2.4 avec les solveurs Sedumi Yalmip.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 5.6022 \\ -8.3100 \\ -13.2960 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 5.6022 \\ -8.3100 \\ 6.7040 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.11 – Erreurs d'estimation des états avec l'observateur  $L_2$ .

Le taux d'atténuation est :  $\gamma = 1.8881$

Pour plus de détails, la simulation est donné par la figure (3.12)

FIGURE 3.12 – Erreurs d'estimation des états avec l'observateur  $L_2$  au bout de 5s.

Nous remarquons que les estimations correspondent bien aux états réels, cela est dû au fait que l'observateur construit soit basé sur un modèle TS exacte qui représente exactement le modèle non linéaire initial. De plus, le caractère robuste induit par le taux d'atténuation du transfert de la perturbation vers l'erreur d'estimation permet de rejeter la perturbation ce qui garantit une bonne précision de l'estimation.

## **3.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions élémentaires sur les systèmes chaotiques en générale et Rossler en particularité pour mieux comprendre le chaos.

Afin d'estimer le vecteur d'état de système chaotique de Rossler, un observateur de Luenberger à été utilisé dans le cas de variable de décision mesurable et Luenberger par atténuation de perturbation selon la technique  $L_2$  est proposé dans le cas de variable de prémise non mesurable. Les résultats de simulations montrent bien la validité de modèle TS utilisé ainsi que la convergence assuré par l'observateur de Luenberger et la robustesse de l'observateur  $L_2$  pour rejeter les perturbations assuré sur l'erreur d'estimation.

# Conclusion générale

L'objectif visé dans ce mémoire est de proposer un observateur pour l'estimation des variables non disponibles à la mesure d'un système chaotique. Pour illustrer cela, nous avons choisi le système chaotique de Rössler. Ce système est réécrit telle une représentation quasi linéaire à paramètre variant (q-Lpv) appelé aussi Takagi-Sugeno (TS) qui tient en compte de son comportement fortement non linéaire.

Dans le premier chapitre, on a traité la stabilité, l'observabilité et l'estimation d'état des systèmes LTI en utilisant l'observateur de Luenberger ainsi que les différents observateurs pour les systèmes non linéaire. Afin de valider l'observateur de Luenberger et sa convergence, un exemple d'application a été étudié.

Afin d'exploiter la précision de la représentation non linéaire, une forme plus maniable est proposée en utilisant le formalisme polytopique Takagi-Sugeno (TS) via les transformations par secteurs non linéaires qui est une représentation exacte du système initial.

Le dernier chapitre illustre l'application des résultats évoqués dans les chapitres 1 et 2 au système chaotique de Rössler. Les résultats de simulation obtenus sont satisfaisants ce qui permet de valider la représentation TS ainsi que la robustesse de l'observateur  $L_2$  utilisé.

Les résultats proposés ouvrent de nombreuses perspectives pour des travaux futurs :

Dans ce mémoire, seule la stabilité quadratique a été étudiée. Il serait intéressant d'étudier la stabilité en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques ou polyquadratiques qui relaxent les conditions de stabilité.

Un premier travail a été mené dans ce mémoire sur l'estimation d'état du système chaotique de Rössler présenté sous forme Takagi-Sugeno à variable de décision non mesurable

dans lequel la perturbation est l'incertitude sur la variable de prémise. La perturbation est rejetée à l'aide de l'observateur par atténuation de perturbation. Il serait intéressant de compléter ces travaux en utilisant des entrées inconnues externes avec d'autres types d'observateurs comme le proportionnel intégral (PI) et le proportionnel multi intégrales (PMI).

Il serait aussi intéressant d'utiliser les systèmes chaotiques et les observateurs pour le cryptage c'est à dire que le récepteur qui est un observateur qui reconstruit les états de l'émetteur (système chaotique) à partir du signal transmis considéré comme la sortie du système à observer et ensuite de récupérer le message crypté considéré comme une entrée inconnue.

# Annexe A

## Notions générales

### A.1 Placement de pôles

Les performances d'un système linéaire (réponse temporelle) sont liées à la position des pôles dans le plan complexe. Ces pôles influencent la vitesse de convergence des modes associés (temps d'établissement, caractère dominant des modes) à travers leurs parties réelles. Quant à la partie imaginaire, elle influence la présence d'oscillations sur la réponse temporelle, se répercutant sur la rapidité de celle-ci. Afin de garantir de bonnes performances pour les contrôleurs et observateurs (convergence, rapidité, présence d'oscillations,...), il est intéressant de placer les pôles du système bouclé dans une région spécifique du plan complexe ayant des propriétés intéressantes, appelée région LMIs [32].

### A.2 Inégalités Matricielles Linéaires : LMIs

Une large catégorie de problèmes de la théorie de contrôle peut être formulée par des problèmes d'optimisation convexes (ou quasi-convexes) décrits par des LMIs [6].

Ainsi, le choix d'utiliser les LMIs pour exprimer le problème de synthèse d'un observateur, d'un système de contrôle . . . , offre un avantage de taille notamment pour l'étude de la stabilité, la formulation des contraintes qui agissent sur le système, l'analyse et détermination des ensembles invariants minimal et maximal, aussi bien que pour la synthèse d'observateurs et de contrôleurs sous formes de problèmes d'optimisation convexes [32].

#### A.2.1 Ensembles et fonctions convexes

**Définition A.1 (Ensemble convexe)** Un ensemble  $A$  est dit convexe si la condition suivante est vérifiée pour tous ses points [32] :

$$\gamma x + (1 - \gamma) y \in A, \gamma \in [0, 1] \quad (\text{A.1})$$

Ce qui signifie que chaque segment de droite réunissant deux points de l'ensemble  $A$ , appartient à cet ensemble, figure A.1. De plus, l'intersection de deux ensembles convexes est aussi un ensemble convexe.

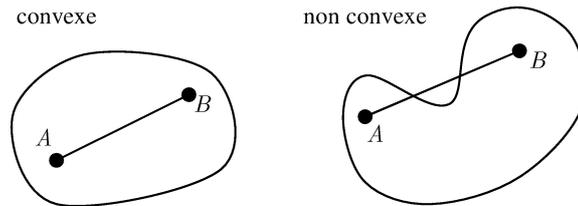


FIGURE A.1 – Ensemble convexe

**Définition A.2 (Fonction convexe)** Une fonction (réelle d'une variable réelle) définie sur un ensemble convexe  $I$  est dite convexe si pour tous points  $x$  et  $y$  définis dans  $I$  et pour tout  $\gamma \in [0, 1]$  on a : [32]

$$f(\gamma x + (1 - \gamma) y) \leq \gamma f(x) + (1 - \gamma) f(y) \quad (\text{A.2})$$

Cela signifie que quels que soient deux points  $c_1$  et  $c_2$  du graphe de la fonction  $f$ , le segment de droite  $[c_1 c_2]$  est entièrement situé au-dessus du graphe ou encore la courbe représentative de  $f$  est au dessus de toutes ses tangentes.

## A.2.2 Résolution des LMI

L'introduction de la méthode d'optimisation convexe dite "méthode du point intérieur" a permis le développement de plusieurs algorithmes de résolution de problèmes LMIs. Afin de faciliter l'utilisation des solvers basés sur ces algorithmes, quelques boîtes à outils ont été développées pour permettre d'écrire et de résoudre ces problèmes de manière simple. On peut citer la boîte à outils LMI toolbox de Mathworks, la LMI-tools développée par Laurent El-Ghaoui et l'interface SeDuMi développée au Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes (LAAS) par Dimitri Peaucelle.[13] Toutes les LMIs des exemples présentés dans ce mémoire ont été résolues avec la méthode SeDuMi ainsi que l'interface YALMIP.

## A.3 Dérivée de Lie

**Définition A.3** Considérons  $h$  une fonction  $C^\infty$  de  $R^n$  dans  $R$ . On définit la dérivée de Lie de  $h$  dans la direction de  $f$ , notée  $L_f h$ , la dérivée de  $h$  le long de la courbe intégrale de  $f$  en  $t = 0$  [11] :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i(x)} \quad (\text{A.3})$$

Par définition, on écrit  $L_f^0 h = h$  et  $L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h)$

## A.4 Systèmes linéaires à paramètres variants : LPV

Un système linéaire à paramètres variants (LPV) se présente sous la forme d'un système linéaire LTI où les matrices le composant  $A, B, C$  et  $D$  dépendent de paramètres variants de façon affine ou linéaire [32] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\xi(t)) x(t) + B(\xi(t)) u(t) \\ y(t) = C(\xi(t)) x(t) + D(\xi(t)) u(t) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état et  $u(t)$  l'entrée et les matrices  $A(\xi(t)), B(\xi(t)), C(\xi(t)), D(\xi(t))$  sont de dimensions appropriées.

Le vecteur des paramètres  $\xi(\cdot) = \begin{pmatrix} \xi_{1(\cdot)} \\ \vdots \\ \xi_{N(\cdot)} \end{pmatrix}$  prend ses valeurs dans un espace convexe où chaque paramètre variant est borné  $\xi_i \in [\underline{\xi}_i \bar{\xi}_i]$ .

Plusieurs classes de systèmes LPV peuvent être considérées :

- $\xi(\cdot) = \xi$  : Le système est dans ce cas LTI.
- $\xi(\cdot) = \xi(t)$  : Le paramètre variant dépend du temps. Le système est dit Linéaire à Temps Variants LTV.
- $\xi(\cdot) = \xi(x(t))$  : Le paramètre variant dépend de l'état du système  $x$ . Dans ce cas la, le système est appelé quasi-Linéaire à Paramètres Variants  $q$ -LPV.

Un système LPV peut se réécrire sous forme d'une combinaison convexe de systèmes LTI définis aux sommets d'un polytope englobant la variation des paramètres.

Chaque paramètre variant étant borné  $\xi_i \in [\underline{\xi}_i \bar{\xi}_i]$  il est possible de définir la variation

maximale (et minimale) contenue dans un polytope défini grâce aux bornes des paramètres variants.

Dans ce mémoire, nous avons considéré des systèmes non linéaires que nous avons représenté sous forme polytopiques en utilisant le formalisme Takagi-Sugeno ainsi que des systèmes  $q - LPV$ .

# Bibliographie

- [1] A. Akhenak. *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic*. PhD thesis, Ecole doctorale IAEM Lorraine, 2004.
- [2] N. Aouani. *Commande Robuste des systèmes Linéaires continus à Paramètres Variant dans le temps*. PhD thesis, Université Tunis, Carthage, 2006.
- [3] Murat Arcaç and Petar Kokotovic. Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930, December 2001.
- [4] L. Arcese. *Modélisation et commande de microrobots magnétiquement guidés dans le système cardiovasculaire*. PhD thesis, Université d'orléans, 2011.
- [5] P. Bergsten and R. Palm. Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE*, San Antonio, TX, USA, 2000.
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM ed., 1994.
- [7] M. Chadli. *Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèle*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine., 2002.
- [8] E. Cherrier. *Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires*. PhD thesis, INPL, 2006.
- [9] P. Gaspard. Rossler systems. Technical report, Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Code Postal 231, Campus Plaine, B-1050 Bruxssels, Belgium, 2005.
- [10] J.J. Gertler. *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker, 1998.
- [11] H. Hamiche. *Inversion à Gauche des Systèmes Dynamiques Hybrides Chaotiques. Application à la Transmission Sécurisée de Données*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2011.

- [12] M. Hammoudi. *Contribution à la commande et à l'observation dans l'association convertisseurs machine*. PhD thesis, Université Mohamed Khider - Biskra, 2015.
- [13] D. Ichalal. *Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009.
- [14] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. Design of observers for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables : an  $\mathcal{L}_2$  approach. In *IFAC World Congress 2008*,, Seoul, Korea, july 2-5 2008.
- [15] D. Ichalal, B. Marx, J. Ragot, and D. Maquin. Fault tolerant control for Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables by trajectory tracking. In *IEEE International workshop on Industrial Electronics, ISIE'10*, Bari, Italy, July 4-7 2010.
- [16] M. Johansson. *Piecewise linear control systems*. PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1999.
- [17] R. E. KALMAN. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82 : 35-45,1960.
- [18] S. Kawamoto. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *Proceedings of First IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 1*, pp. 1427-1434., 1992.
- [19] H. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hal, New-York, 2002.
- [20] A.J. Krener and A. Isidori. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3 :47–52, 1983.
- [21] A.J. Krener and W. Respondek. Nonlinear observers with linearization error dynamics. *SIAM Journal of Control and optimization*, 23 :197–216, 1985.
- [22] B. Larroque. *Observateurs de systèmes linéaires application à la détection et localisation de fautes*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2008.
- [23] J.P Laval, L. Barbot and C. Letellier. *Sur la synchronisation de systèmes chaotiques bidirectionnellement couplés*. PhD thesis, Saint-Etienne du Rouvray cedex, France, 2013.
- [24] R. Liacu. *Identification de systèmes linéaires à paramètres variant : différentes approches et mises en oeuvre*. PhD thesis, Ecole doctorale STITS, 2014.
- [25] E. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Science, Massachusetts Institute of Technology*, 1962.
- [26] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :596–602, 1971.

- 
- [27] M. Oueder. *Synthèse des observateurs pour les systèmes non linéaires*. PhD thesis, Université de Caen, France, 2012.
- [28] Chen J Patton, R.J and C.J. Lopez-Toribio. Fuzzy observers for non-linear dynamic systems fault diagnosis. In *In 37th IEEE Conférence on Décision and Control, CDC98, Tampa, Florida USA*, 1998.
- [29] ED. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24 :351–359, 1995.
- [30] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [31] A. Thabet. *Estimation de l'état pour la surveillance des systèmes de grandes dimensions. Application aux réseaux électriques*. PhD thesis, Ecole doctorale de Gabés, 2012.
- [32] Z. Yacine. *Observateurs pour l'Estimation de la Dynamique Latérale du véhicule et Application à la Détection de Situations Critiques*. PhD thesis, Université Mouloud Mammeri, 2016.
- [33] Z. Yacine, D. Ichalal, N.A. Oufroukh, S. Mammar, and S. Djennoune. Nonlinear vehicle lateral dynamics estimation with unmeasurable premise variable takagi-sugeno approach. In *Control Automation (MED), 2012 20th Mediterranean Conference on*, pages 1117 –1122, july 2012.
- [34] T. Yang. *Une contribution à l'observation et à l'estimation des systèmes linéaires*. PhD thesis, École Centrale de Lille, décembre 2010.
- [35] A. Zemouche. *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, Université Louis Paster, Strasbourg I, 2007.