

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.  
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI OUZOU



Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master  
en  
**Mathématiques**  
Option  
**Analyse Mathématique et Applications**

Intitulé

---

**Sur certains problèmes de presque périodicité  
dans diverses métriques.**

---

Réalisé par  
**Yazid DAHMOUN**

Proposé et dirigé par  
**Mme Mannal SMAALI**

Devant le jury

<b>Mme Fazia BEDOUHENE</b>	Professeur	UMMTO	<b>Présidente</b>
<b>Mme Mannal SMAALI</b>	MCA	UMMTO	<b>Rapportrice</b>
<b>Mr Omar MELLAH</b>	MCB	UMMTO	<b>Examineur</b>
<b>Mr Hocine KOURAT</b>	MCB	UMMTO	<b>Examineur</b>

Promotion : 2019/2020.

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser toute ma gratitude à mon encadreur Mme M. SMAALI, à qui j'exprime ma joie et ma fierté d'avoir accompli ce travail sous sa direction. Je la remercie pour sa disponibilité, ses précieux conseils ainsi que son souci du détail, qui ont abouti à la réalisation de ce modeste travail.

Mes remerciements vont également aux Membres du jury, pour l'honneur qu'ils me font en examinant mon travail tout en l'enrichissant par leurs précieuses remarques et propositions.

Je tiens aussi, à remercier le Corps professoral du département de Mathématiques de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, en particulier, les membres de l'équipe de formation Master Analyse Mathématique et Applications qui ont tout de bon contribué à ma formation, et ne m'ont pas lésiné l'aide et les encouragements.

Je remercie profondément, ma famille, mes ami(e)s ainsi que les personnes qui m'ont soutenu de près ou de loin au cours de la réalisation de ce travail.

## Résumé

Les trois types de définitions de la presque périodicité données en termes de critère de Bohr, critère de Bochner et critère d'approximation polynômiale sont examinées dans diverses métriques (Stepanov, Weyl et Besicovitch). L'existence et l'unicité de solutions presque périodiques sont étudiées pour des équations différentielles ordinaires. Ce problème est aussi approché par un problème du point fixe dans des espaces fonctionnels appropriés.

**Mots clés :** Fonctions presque périodiques, métriques de Stepanov, Weyl et Besicovitch, transformée de Bochner, solutions presque périodiques, problème du point fixe.

<b>Introduction</b>		<b>2</b>
<b>1 Préliminaires</b>		<b>6</b>
1.1 Fonctions périodiques . . . . .		6
1.2 Fonctions uniformément presque périodiques . . . . .		8
1.3 Solutions uniformément presque périodiques des équations différentielles . .		11
<b>2 Notion de presque périodicité au sens de Stepanov</b>		<b>19</b>
2.1 Définitions élémentaires . . . . .		19
2.2 Remarques sur les espaces de fonctions Stepanov-presque périodiques . . .		24
2.3 L'approche du problème de presque périodicité comme un problème du point fixe pour des équations différentielles appropriées . . . . .		28
<b>3 Notion de presque périodicité au sens de Weyl</b>		<b>35</b>
3.1 Définitions classiques . . . . .		35
3.2 Solutions équi-Weyl et Weyl-presque périodiques des équations différentielles		46
<b>4 Notion de presque périodicité au sens de Besicovitch</b>		<b>53</b>
4.1 Définitions originales . . . . .		53
4.2 Définitions alternatives . . . . .		56
4.3 Solutions presque périodiques au sens généralisé de Besicovitch des équations différentielles . . . . .		60

<b>Conclusion générale</b>	<b>64</b>
<b>A Éléments d'analyse fonctionnelle</b>	<b>66</b>
A.1 Compacité, relative compacité et précompacité . . . . .	66
A.2 Espaces de Fréchet . . . . .	67
A.3 Théorèmes du point fixe . . . . .	67
A.3.1 Principe de contraction de Banach . . . . .	67
A.3.2 Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov . . . . .	67
<b>B Équations différentielles au sens de Carathéodory</b>	<b>68</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

La notion de presque périodicité a été introduite par des astronomes, en particulier par C. Ptolémée pour expliquer le phénomène de réfraction atmosphérique qui se produit lors de l'observation du soleil ou de la lune, et par E. Elsclangon en 1902 pour généraliser les fonctions périodiques. Un peu plus tard, en 1923, le mathématicien danois H. Bohr s'intéressa à la fonction zêta de Riemann et aux séries de Dirichlet qui ont un comportement régulier mais qui n'est pas aussi fort que la périodicité. Ceci a permis à Bohr de trouver une condition moins restrictive mais suffisante pour avoir une certaine analogie avec les fonctions périodiques.

Depuis ce temps, cette théorie a connu beaucoup de progrès et elle a été généralisée dans diverses extensions, notamment par S. Bochner [Boc] qui a étendu la notion de presque périodicité au cas des fonctions à valeurs dans un espace de Banach, A. S. Besicovitch [Bes], [Bes1] qui a défini la presque périodicité pour des fonctions analytiques, L. Amerio et G. Prouse [AP], C. Corduneanu [C1], [C2], [C3], R. Doss [Dss], [Dss1], A. M. Fink [F], A. S. Kovanko [K], [K1], [K2], B. M. Levitan [L], A. A. Pankov [P], S. Zaidman [Z], ainsi que V. V. Zhirkov [ZL]... ont traité les aspects de base et ont contribué au développement de cette théorie.

Dans la théorie des fonctions presque périodiques, il est utilisé de nombreuses diverses définitions, principalement liées aux noms de H. Bohr, S. Bochner, V. V. Stepanov, H. Weyl et A. S. Besicovitch. D'autre part, il est réellement parfois difficile de reconnaître si ces définitions sont équivalentes ou si l'une découle d'une autre. En fait, il est bien connu que, par exemple, les définitions des fonctions presque périodiques au sens de Bohr (dites aussi uniformément presque périodiques) données en termes de critère de Bohr (densité relative

de l'ensemble des  $\epsilon$ -presque périodes), critère de Bochner (précompacité de l'ensemble de translatées), la fermeture de l'espace de polynômes trigonométriques dans la norme infinie (dit aussi approximation polynômiale), sont équivalentes (voir par exemple [Bes], [C1]). La même chose est vraie pour la classe Stepanov de fonctions presque périodiques (voir par exemple [Bes], [BF], [GKL], [P]). Mais si on veut faire une certaine analogie pour, par exemple, la classe Besicovitch de fonctions presque périodiques, l'équivalence n'est plus vraie. Pour la classe Weyl de fonctions presque périodiques, la situation semble encore plus compliquée, car dans la définition standard (critère de Bohr), la métrique de Stepanov est utilisée, curieusement, au lieu de la métrique de Weyl!

Une contribution importante à l'étude de l'équivalence des différentes définitions des espaces de Stepanov (ou même de type Weyl et Besicovitch), est venue d'A. S. Kovanko.

En raison du fait que les espaces de fonctions presque périodiques au sens de Bohr et au sens de Stepanov sont complets, il est possible d'énoncer le critère de Bochner en termes de compacité au lieu de la précompacité. Étonnamment, les espaces de fonctions presque périodiques au sens de Weyl est incomplet dans la métrique de Weyl. Ce problème majeur, qui fait l'approche et les outils classiques de l'analyse fonctionnelle inapplicable, en particulier, le théorème du point fixe dans les espaces de Banach; contrairement à la classe Stepanov.

Notons que, les applications aux équations différentielles sont d'un immense intérêt. En effet, de nombreux auteurs ont été intéressés au fil du temps à l'étude des problèmes relatifs à l'existence et l'unicité des solutions presque périodiques (dans divers sens) pour différents types d'équations différentielles à coefficients uniformément, Stepanov, Weyl et Besicovitch-presque périodiques.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'oeuvre de J. Andres, A. M. Bersani et K. Lesniak [ABL], dans laquelle ils ont étudié certains problèmes de presque périodicité dans diverses métriques, relatifs aux espaces de fonctions presque périodiques et même aux applications appropriées aux équations différentielles ordinaires. Nous développons une partie de cette oeuvre; à savoir l'étude des solutions de type presque périodique de certaines classes d'équations différentielles dans les métriques de Stepanov et Besicovitch. Un critère de Bochner pour la classe de Weyl est présenté sous une condition d'uniforme continuité dans la métrique associée.

Le mémoire est composé principalement de quatre chapitres organisés comme suit.

Dans le 1<sup>er</sup> chapitre introductif, nous allons définir au début la notion de périodicité des fonctions réelles ainsi que les propriétés essentielles associées, puis nous présenterons les définitions et les propriétés élémentaires de la notion de presque périodicité au sens de Bohr. Des résultats d'existence et d'unicité des solutions uniformément presque périodiques seront démontrés pour des équations différentielles ordinaires à coefficients uniformément presque périodiques.

Le 2<sup>nd</sup> chapitre est dédié à la presque périodicité au sens de Stepanov ; nous y présentons les définitions et propriétés essentielles de cette notion. Une attention particulière sera accordée à l'approche du problème de presque périodicité comme un problème du point fixe pour des équations différentielles appropriées.

Dans le 3<sup>ème</sup> chapitre, nous allons présenter les définitions classiques de la notion de presque périodicité au sens de Weyl. Des résultats de presque périodicité seront prouvés pour des non-homogénéités presque périodiques, sur la base de la représentation intégrale des solutions bornées.

Dans le 4<sup>ème</sup> chapitre, nous allons illustrer les définitions originales et alternatives de la notion de presque périodicité au sens de Besicovitch. Des résultats de presque périodicité seront énoncés particulièrement pour un système différentiel non-autonome.

Dans ce chapitre introductif, nous allons au début rappeler brièvement la notion de périodicité puis, nous introduirons les définitions et les propriétés élémentaires de la notion de presque périodicité au sens de H. Bohr. À la traîne, nous reverrons deux résultats classiques d'existence et d'unicité des solutions uniformément presque périodiques pour des équations différentielles ordinaires à coefficients uniformément presque périodiques.

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons aux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.1 Fonctions périodiques

**Définition 1.1.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite périodique lorsque,  $\exists T > 0$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

*On dit alors que  $T$  est une période de  $f$ .*

Le graphe d'une fonction périodique de période  $T > 0$  reproduit de façon répétitive n'importe quelle portion particulière de longueur une période  $T$ . C'est une propriété dite invariance par translations.

**Exemple 1.1.** La fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x - E[x],$$

où  $E[x]$  désigne la partie entière de  $x$ , est une fonction périodique de période 1.

Certaines propriétés des fonctions périodiques sont résumées ci-dessous.

**Propriétés.**

1. Toute fonction continue périodique est bornée et uniformément continue.
2. L'ensemble de périodes d'une fonction périodique est un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}$ .
3. Toute fonction continue périodique et non-constante admet une plus petite période strictement positive. Le fait que la fonction soit continue est indispensable, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 1.2.** La fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est périodique de période  $r$ ,  $\forall r \in \mathbb{Q}$ . Cependant, il peut être facilement vérifié que l'ensemble de périodes strictement positives de  $f$  est  $\mathbb{Q}_+^*$ , or  $\inf \mathbb{Q}_+^* = 0 \notin \mathbb{Q}_+^*$  !

4. L'ensemble de fonctions continues périodiques de même période est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de fonctions continues. Ce n'est par contre pas le cas pour l'ensemble de toutes les fonctions périodiques continues. Pour s'en convaincre,

**Exemple 1.3.** Considérons la fonction

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}.$$

Les deux fonctions  $e^{ix}$  comme  $e^{i\sqrt{2}x}$ , sont évidemment périodiques de périodes  $2\pi$  et  $\sqrt{2}\pi$ , respectivement. Toutefois,  $f$  est montrée ne pas être périodique.

5. L'ensemble de fonctions continues périodiques n'est pas stable par passage à la limite uniforme. L'exemple suivant affirme cette assertion.

**Exemple 1.4.** La suite de fonctions périodiques

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2^k}\right); n \in \mathbb{N}^*,$$

est  $2^n$ -périodique,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Ensuite, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)$  étant normalement convergente, elle est donc uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ . Toutefois, si on note par  $f$  la somme de la série, on peut montrer qu'il n'existe aucun  $T \neq 0$  pour lequel  $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

6. La dérivée d'une fonction  $T$ -périodique est  $T$ -périodique de moyenne nulle.
7. Une fonction  $f$  continue,  $T$ -périodique admet une fonction primitive  $T$ -périodique si et seulement si  $f$  est de moyenne nulle.

## 1.2 Fonctions uniformément presque périodiques

Nous allons maintenant introduire les définitions et les propriétés essentielles de la notion de presque périodicité au sens de H. Bohr, dite aussi presque périodicité uniforme.

Considérons l'espace  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  de toutes les fonctions continues, définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.2.1.** Un nombre réel  $\tau$  est appelé  $\epsilon$ -presque période (ou encore  $\epsilon$ -translation) de  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  lorsque,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + \tau) - f(t)| \leq \epsilon.$$

L'ensemble des  $\epsilon$ -presque périodes de  $f$  est noté par  $T(f, \epsilon)$  ou encore  $T_\epsilon(f)$ .

**Définition 1.2.2.** Une fonction  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite uniformément presque périodique si,  $\forall \epsilon > 0, \exists k > 0$  tel que tout intervalle de longueur  $k$  contient au moins une  $\epsilon$ -presque période  $\tau$  pour laquelle

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + \tau) - f(t)| \leq \epsilon.$$

Autrement si,  $\forall \epsilon > 0, T(f, \epsilon)$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}$ , i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0 \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{R}, [a, a+k] \cap T(f, \epsilon) \neq \emptyset.$$

Notons  $\mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace de toutes les fonctions uniformément presque périodiques.

**Proposition 1.2.1.** (voir [AP], p. 5, [Bes], p. 2) *Toute fonction uniformément presque périodique est uniformément bornée et uniformément continue.*

**Proposition 1.2.2.** (voir [AP], p. 6, [Bes], p. 3) *Si une suite de fonctions uniformément presque périodiques  $f_n$  converge uniformément dans  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est également uniformément presque périodique.*

En d'autres termes, l'ensemble de fonctions uniformément presque périodiques est fermé par rapport à la convergence uniforme. Comme il est un sous-ensemble fermé de l'espace de Banach  $\mathbf{BC} = \mathbf{C} \cap \mathbf{L}^\infty$  (i.e l'espace de fonctions continues bornées, muni de la norme infinie), il découle que

**Proposition 1.2.3.**  $\mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  *muni de la norme infinie est un espace complet.*

La définition ci-dessus n'est pas vraiment maniable, il est donc souhaitable de donner des critères équivalents.

**Définition 1.2.3.** *Une fonction  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite uniformément normale si, pour toute suite de nombres réels  $(h_n)$ , on peut extraire une sous suite  $(h'_n)$  telle que la suite de fonctions translatées  $\{f(\cdot + h'_n)\}$  soit uniformément convergente.*

*On dit aussi que la fonction  $f$  vérifie le critère de Bochner.*

En d'autres termes,  $f$  est dite uniformément normale si l'ensemble de translatées est précompact dans  $\mathbf{BC}$ .

Rappelons maintenant, la définition d'un polynôme trigonométrique généralisé.

**Définition 1.2.4.** *Un polynôme trigonométrique généralisé est une application notée  $P$  d'éléments de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  définie par*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x}, \text{ où } a_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

Tout polynôme trigonométrique est uniformément presque périodique. Ainsi, en vue de la proposition 1.2.2., toute fonction  $f$  obtenue comme limite d'une suite de polynômes trigonométriques uniformément convergente, est uniformément presque périodique. Il est donc tout à fait naturel d'introduire la définition suivante.

**Définition 1.2.5.** Nous notons  $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  l'espace de Banach obtenu comme la fermeture dans  $\mathbf{BC}$  muni de la norme uniforme de l'espace de tous les polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Autrement,  $f \in \mathbf{C}^0$  si et seulement si,  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$  polynôme trigonométrique tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P_\epsilon(x)| \leq \epsilon.$$

Illustrons un exemple d'une fonction uniformément presque périodique.

**Exemple 1.5.** La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sin(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}x),$$

n'est pas périodique toutefois, elle est uniformément presque périodique comme polynôme trigonométrique.

Les trois définitions 1.2.2., 1.2.3. et 1.2.5. sont montrées pour être équivalentes.

**Théorème 1.2.1.** (voir [AP], p. 4, [Bes], p. 11-12, [L], p. 23-27) Une fonction  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est uniformément presque périodique si et seulement si elle est uniformément normale.

**Théorème 1.2.2.** (voir [BB], p. 226) Une fonction  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est uniformément presque périodique si et seulement si elle appartient à  $\mathbf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .

Pour montrer l'équivalence entre les définitions 1.2.2., 1.2.3. et 1.2.5., dans son livre [C1], p. 15-23, C. Corduneanu suit une autre façon; il montre en fait que

Définition 1.2.5.  $\Rightarrow$  Définition 1.2.3.  $\Rightarrow$  Définition 1.2.2.  $\Rightarrow$  Définition 1.2.5.

L. A. Lusternik a étudié la condition nécessaire et suffisante afin de garantir qu'une famille de fonctions uniformément presque périodiques soit précompacte, en introduisant la notion d'équi-presque périodicité.

**Théorème 1.2.3.** (voir [ABG], p. 126-127, [C1], p. 143, [LZ], p. 7) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions  $f \in \mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  soit précompacte est que,

i)  $\mathcal{F}$  est équi-continue, i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \text{ si } |x_1 - x_2| < \delta, \forall f \in \mathcal{F}.$$

ii)  $\mathcal{F}$  est *équi-presque périodique*, i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $l > 0$  tel que

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

iii)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de valeurs  $f(x)$  de toutes les fonctions  $f \in \mathcal{F}$  est *précompact*.

**Remarque 1.1.** La condition iii) coïncide avec ce qui suit.

iii')  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de valeurs  $f(x)$  de toutes les fonctions  $f \in \mathcal{F}$  est uniformément borné.

Certaines propriétés essentielles des fonctions uniformément presque périodiques sont collectées ci-dessous.

**Propriétés.** Soit  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  une fonction uniformément presque périodique.

1. Supposons que  $f$  est dérivable. Si de plus,  $f'$  est uniformément continue alors  $f'$  est uniformément presque périodique.
2. Soit  $F$  une fonction primitive de  $f$ . Alors,  $F$  est uniformément presque périodique si et seulement si l'image de  $F$  est relativement compacte dans  $\mathbb{R}^n$  (Autrement,  $F$  est bornée).
3.  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $f(ax)$ ,  $f(x + a)$  et  $af(x)$  sont également uniformément presque périodiques.
4. Soit  $g$  une fonction uniformément presque périodique alors,  $f+g$  et  $f.g$  sont également uniformément presque périodiques.

## 1.3 Solutions uniformément presque périodiques des équations différentielles

Dans cette section, nous étudions le problème d'existence et d'unicité des solutions uniformément presque périodiques du système différentiel

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \tag{1.1}$$

où  $A$  est une matrice réelle et  $F(t)$  une fonction vectorielle.

Commençons par l'étude d'existence d'une solution uniformément presque périodique pour le système ci-dessus. On a le résultat suivant.

**Théorème 1.3.1.** *Si pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la fonction composante  $f_i$  est uniformément presque périodique (i.e  $F$  est uniformément presque périodique) alors toute solution bornée du système (1.1) est uniformément presque périodique.*

Pour démontrer ce théorème, on fait appel à la proposition suivante.

**Proposition 1.3.1.** *Si  $f$  est uniformément presque périodique alors toute solution bornée de l'équation différentielle scalaire*

$$x'(t) = ax(t) + f(t), a \in \mathbb{R},$$

*est uniformément presque périodique.*

On va d'abord démontrer la proposition énoncée ci-dessus.

*Démonstration.* Une solution générale de l'équation différentielle en dimension une prend la forme

$$x(t) = e^{at} \left( c + \int_0^t e^{-as} f(s) ds \right), c \in \mathbb{R}.$$

On peut distinguer trois cas selon le signe de la constante  $a$ .

**Premier cas :** Si  $a > 0$ , on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at}| = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} = +\infty.$$

Il est donc nécessaire d'avoir

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( c + \int_0^t e^{-as} f(s) ds \right) = 0.$$

On prend alors

$$c = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-as} f(s) ds = - \int_0^{+\infty} e^{-as} f(s) ds.$$

La quantité  $c$  est finie car

$$|e^{-as}f(s)| \leq \|f\|_{\infty}e^{-as} < +\infty.$$

Par conséquent, le seul candidat borné est

$$x(t) = -e^{at} \int_t^{+\infty} e^{-as} f(s) ds,$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$x(t) = - \int_t^{+\infty} e^{-a(s-t)} f(s) ds.$$

Reste donc à vérifier que cette solution est uniformément presque périodique.

En posant  $u = s - t$ , on obtient

$$x(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+t) du.$$

Alors  $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |x(t+\tau) - x(t)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+t+\tau) du - \int_0^{+\infty} e^{-au} f(u+t) du \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-au} [f(u+t+\tau) - f(u+t)] du \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-au} |f(u+t+\tau) - f(u+t)| du \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \cdot \int_0^{+\infty} e^{-au} du \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| \cdot \left[ \frac{-1}{a} e^{-au} \right]_0^{+\infty} \\ &\leq \frac{1}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)|. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\tau$  une  $a\epsilon$ -presque période de  $f$ . Alors,  $\tau$  est une  $\epsilon$ -presque période de  $x$ .

**Deuxième cas :** Si  $a < 0$ , on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{at}| = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{at} = +\infty.$$

D'une manière analogue au cas où  $a > 0$ , on déduit que l'unique candidat borné est

$$x(t) = e^{at} \int_{-\infty}^t e^{-as} f(s) ds.$$

En réécrivant cette solution sous la forme

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-a(s-t)} f(s) ds,$$

et en posant  $u = s - t$ , on montre de même que  $x$  est uniformément presque périodique.

**Troisième cas :** Si  $a = 0$ , l'équation devient

$$x'(t) = f(t).$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$  arbitraire, on obtient la solution

$$x(t) = c + \int_0^t f(s) ds.$$

La solution  $x$  est supposée être bornée, alors nécessairement  $\int_0^t f(s) ds$  est bornée.

De plus,  $f$  étant uniformément presque périodique, il vient que  $\int_0^t f(s) ds$  est aussi uniformément presque périodique, d'où  $x$  est uniformément presque périodique.

□

On est désormais en mesure de démontrer le théorème 1.3.1.

*Démonstration.* Sans perte de généralités, on peut supposer en fait que la matrice  $A$  est triangulaire supérieure. En effet, on peut trouver une matrice  $P$  non singulière (invertible) et une matrice  $T$  triangulaire supérieure telles que  $A = P^{-1}TP$ .

On montre à présent le résultat pour une matrice  $T$  triangulaire supérieure auquel cas

$$X'(t) = TX(t) + F(t); t_{ij} = 0, \forall i > j.$$

On a

$$X'(t) = TX(t) + F(t) \Leftrightarrow x'_i(t) = \sum_{j=i}^{j=n} t_{ij}x_j(t) + f_i(t), \forall i = 1, \dots, n.$$

De la  $n^{\text{ième}}$  équation, et d'après la proposition 1.3.1., on déduit que  $x_n$  est uniformément presque périodique.

Maintenant, on considère la  $(n - 1)^{\text{ième}}$  équation

$$x'_{n-1}(t) = t_{n-1,n-1}x_{n-1}(t) + (t_{n-1,n}x_n(t) + f_{n-1}(t)).$$

En appliquant à nouveau la proposition 1.3.1., on peut affirmer à nouveau que  $x_{n-1}$  est uniformément presque périodique.

On continue ce procédé en considérant successivement les  $(n - i)^{\text{ièmes}}$  équations pour tout  $i \leq 2$ , on confirme à chaque fois grâce à la proposition 1.3.1. que  $x_{n-i}$  est uniformément presque périodique, jusqu'à ce qu'on atteigne la 1<sup>ère</sup> équation (i.e pour  $i = n - 1$ ), afin de conclure que la solution de l'équation initiale  $X'(t) = TX(t) + F(t)$  est uniformément presque périodique.

On revient maintenant au cas général où  $A = P^{-1}TP$ , avec  $T$  triangulaire supérieure.

On a

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) + F(t) &\Leftrightarrow X'(t) = (P^{-1}TP) X(t) + F(t) \\ &\Leftrightarrow PX'(t) = (TP) X(t) + PF(t) \\ &\Leftrightarrow Z'(t) = TZ(t) + G(t), \end{aligned}$$

où  $Z(t) = PX(t)$  et  $G(t) = PF(t)$ .

$F$  étant uniformément presque périodique,  $G$  l'est aussi. Ainsi,  $X$  étant bornée donc  $Z$  l'est également.

Par conséquent, comme  $T$  est triangulaire supérieure, on déduit que  $Z$  est uniformément presque périodique comme solution du système différentiel  $Z'(t) = TZ(t) + G(t)$ .

Or  $Z(t) = PX(t)$ , équivaut à  $X(t) = P^{-1}Z(t)$ , d'où  $X$  est uniformément presque périodique. □

Maintenant, on étudie la condition suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution uniformément presque périodique pour toujours le même système différentiel.

**Théorème 1.3.2.** *Si pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la fonction composante  $f_i$  est uniformément presque périodique, et si la matrice  $A$  ne possède aucune valeur propre de partie réelle nulle, alors le système (1.1) admet une unique solution bornée uniformément presque périodique.*

*De plus, si  $M = \sup_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty$  alors,  $\|X\|_\infty \leq K.M$  où  $K$  ne dépend que de  $A$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralités, on peut supposer à nouveau que la matrice  $A$  est triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale.

On montre le résultat par récurrence sur la dimension du système.

- D'après toujours la proposition 1.3.1., le résultat est vrai en dimension une.
- On suppose que le résultat est vrai en dimension  $n$ , et on montre qu'il reste encore vrai en dimension supérieure  $n + 1$ .

Pour ce faire, on considère le système à  $(n + 1)$  équations

$$x'_i(t) = \sum_{j=i}^{j=n+1} t_{ij}x_j(t) + f_i(t), \forall i = 1, \dots, n + 1.$$

Ce système est équivalent au système décomposé

$$\begin{cases} x'_i(t) = \sum_{j=i}^{j=n} t_{ij}x_j(t) + f_i(t), \forall i = 1, \dots, n \\ x'_{n+1}(t) = t_{n+1,n+1}x_{n+1}(t) + f_{n+1}(t) \end{cases}$$

La  $(n + 1)^{\text{ième}}$  équation admet d'après la proposition 1.3.1., une unique solution bornée uniformément presque périodique. De plus, par hypothèse, le système à  $n$  équations

$$X'(t) = TX(t) + F(t),$$

admet aussi une unique solution bornée uniformément presque périodique.

On déduit donc que le résultat reste vrai en dimension  $n + 1$ .

Dans le cas général où  $A = P^{-1}TP$  avec  $T$  triangulaire supérieure, il suffit de montrer le résultat pour le système

$$Z'(t) = TZ(t) + G(t),$$

où  $Z(t) = PX(t)$  et  $G(t) = PF(t)$  pour lequel le résultat est déjà démontré ci-dessus, afin d'affirmer le résultat pour le système initial.

On pose maintenant  $M = \sup_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|_\infty$  et on montre que  $\|X\|_\infty \leq K.M$ . On a,

$$\|X\|_\infty \leq K.M \Leftrightarrow \|x_i\|_\infty \leq K.M, \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq K.M, \forall i = 1, \dots, n.$$

On considère à présent le système avec  $T$  triangulaire supérieure

$$X'(t) = TX(t) + F(t) \Leftrightarrow x'_i(t) = \sum_{j=i}^{j=n} t_{ij}x_j(t) + f_i(t), \forall i = 1, \dots, n.$$

Soit à l'instant la  $n^{\text{ième}}$  équation

$$x'_n(t) = t_{n,n}x_n(t) + f_n(t).$$

En supposant que  $t_{n,n} > 0$ , l'unique solution bornée est donnée par

$$x_n(t) = -e^{t_{n,n}t} \int_t^{+\infty} e^{-t_{n,n}s} f_n(s) ds,$$

il s'en suit

$$\begin{aligned} |x_n(t)| &\leq \int_t^{+\infty} e^{t_{n,n}(t-s)} |f_n(s)| ds \\ &\leq \|f_n\|_\infty \int_t^{+\infty} e^{t_{n,n}(t-s)} ds \\ &\leq M \left[ \frac{1}{t_{n,n}} e^{t_{n,n}(t-s)} \right]_t^{+\infty} \\ &\leq \frac{M}{t_{n,n}}. \end{aligned}$$

On considère ensuite la  $(n-1)^{\text{ième}}$  équation

$$x'_{n-1}(t) = t_{n-1,n-1}x_{n-1}(t) + t_{n-1,n}x_n(t) + f_{n-1}(t).$$

L'unique solution bornée est désormais donnée par

$$x_{n-1}(t) = e^{t_{n-1,n-1}t} \int_t^{+\infty} e^{-t_{n-1,n-1}s} (t_{n-1,n}x_n(s) + f_{n-1}(s)) ds,$$

il s'en suit

$$\begin{aligned}
|x_{n-1}(t)| &\leq \int_t^{+\infty} e^{t_{n-1,n-1}(t-s)} |t_{n-1,n}x_n(s) + f_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \|t_{n-1,n}x_n + f_{n-1}\|_{\infty} \int_t^{+\infty} e^{t_{n-1,n-1}(t-s)} ds \\
&\leq \left( |t_{n-1,n}| \frac{M}{t_{n,n}} + M \right) \frac{1}{t_{n-1,n-1}} \\
&\leq \frac{M}{t_{n-1,n-1}} \left( 1 + \frac{|t_{n-1,n}|}{t_{n,n}} \right).
\end{aligned}$$

On pose à présent  $K_n = \frac{1}{t_{n,n}}$  et  $K_{n-1} = \frac{1}{t_{n-1,n-1}} \left( 1 + \frac{|t_{n-1,n}|}{t_{n,n}} \right)$ .

En procédant successivement presque de la même manière pour les autres équations, et en posant  $K = \max_{1 \leq j \leq n} K_j$ , on aura

$$|x_i| \leq K.M, \forall i = 1, \dots, n$$

où  $K$  ne dépend que de  $A$ , comme désiré.

On considère maintenant le cas général où  $A = P^{-1}TP$ , avec  $T$  triangulaire supérieure.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
X'(t) = AX(t) + F(t) &\Leftrightarrow X'(t) = (P^{-1}TP)X(t) + F(t) \\
&\Leftrightarrow PX'(t) = TPX(t) + PF(t) \\
&\Leftrightarrow Z'(t) = TZ(t) + G(t),
\end{aligned}$$

où  $Z(t) = PX(t)$  et  $G(t) = PF(t)$ .

Or on sait que

$$|z_i| \leq K.M, \forall i = 1, \dots, n$$

où  $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|g_i\|_{\infty}$  et  $K = \max_{1 \leq i \leq n} K_j$ .

Maintenant, comme  $Z(t) = PX(t)$  alors  $X(t) = P^{-1}Z(t)$ , on aura finalement

$$\|X\|_{\infty} = \|P^{-1}Z\|_{\infty} \leq \|P^{-1}\|_{\infty} \|Z\|_{\infty} \leq \|P^{-1}\|_{\infty} K.M,$$

ce qui achève la démonstration. □

## CHAPITRE 2

### Notion de presque périodicité au sens de Stepanov

Ce chapitre est dédié à la presque périodicité au sens général de V.V. Stepanov ; nous y présentons les définitions et les propriétés essentielles de cette notion. Nous illustrons entre autre, des résultats en ce qui concerne la presque périodicité au sens de Bohr qui en fait se transfèrent au cas Stepanov grâce à la transformée de Bochner que nous définirons ultérieurement. Une attention particulière sera accordée à l'approche du problème de presque périodicité comme un problème du point fixe pour des équations différentielles appropriées.

## 2.1 Définitions élémentaires

Les diverses extensions de la définition des fonctions presque périodiques impliqueront les fonctions discontinues, au moyen d'intégrales sur des intervalles bornés, il est donc tout à fait naturel de travailler avec des fonctions localement intégrables, i.e  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  (avec  $p \geq 1$ ,  $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{K}, \mathbb{R}^n)$  pour tout compact  $\mathbf{K}$  de  $\mathbb{R}$ ).

Tout d'abord, introduisons les normes et distances de Stepanov

$$\|f\|_{S_l^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} ;$$

$$D_{S_l^p}^p(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Comme  $l$  est un nombre positif fixé, nous pouvons nous attendre à des normes de Stepanov infinies, mais il peut être vu que

$$\forall l_1, l_2 \in \mathbb{R}^+, \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S_{l_1}^p} \leq \|f\|_{S_{l_2}^p} \leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right) \|f\|_{S_{l_1}^p}.$$

Autrement, toutes les normes de Stepanov sont équivalentes.

En raison de cette équivalence, nous pouvons désormais remplacer  $l$  par un nombre arbitraire positif. En particulier, nous pouvons considérer la norme, où  $l = 1$ .

**Définition 2.1.1.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite presque périodique au sens de Stepanov si,  $\forall \epsilon > 0, \exists k > 0$  tel que tout intervalle de longueur  $k$  contient au moins un réel  $\tau$  tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \int_x^{x+k} |f(t+\tau) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$\tau$  est dit,  $\epsilon$ -Stepanov-presque période (ou encore  $\epsilon$ -Stepanov translation de  $f$ ).

Notons  $\mathbf{S}_{pp}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace de toutes les fonctions Stepanov-presque périodiques.

**Proposition 2.1.1.** (voir [ABG], p. 133, [L], p. 201) Toute fonction Stepanov-presque périodique est  $S^p$ -bornée et  $S^p$ -uniformément continue.

**Définition 2.1.2.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est désormais dite  $S^p$ -normale si la famille de translatées  $\{f(\cdot + h) \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $S^p$ -précompacte.

Introduisons l'espace de Banach

$$\mathbf{BS}^p = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{S^p} < \infty\}.$$

**Définition 2.1.3.** Nous notons par  $\mathbf{S}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace obtenu comme la fermeture dans  $\mathbf{BS}^p$  de l'espace de tous les polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  par rapport à la norme de Stepanov. Autrement,  $f \in \mathbf{S}^p$  si et seulement si,  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$  polynôme trigonométrique tel que

$$D_{S^p}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon.$$

De de la proposition 2.1.1. et de la définition 2.1.3., il vient que  $\mathbf{S}_{pp}^p \subset \mathbf{BS}^p, \mathbf{S}^p \subset \mathbf{BS}^p$ .

**Exemple 2.1.** (voir [L], p. 209-210) Soit  $f \in \mathbf{C}_{pp}$ . Alors la fonction définie par

$$F(x) = \text{sign}(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0, \\ -1 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

est Stepanov-presque périodique.

**Théorème 2.1.1.** voir [ABG], p. 133 *Les trois espaces définis au moyen des définitions 2.1.1., 2.1.2. et 2.1.3. sont équivalents.*

**Théorème 2.1.2.** (voir [BF], p. 51-53, [GKL], Th. 6, p. 189) *Les espaces de fonctions Stepanov-presque périodiques  $\mathbf{S}_{pp}^p$  sont  $S_l^p$ -complets.*

A. S. Kovanko dans son livre [K], a étudié la condition nécessaire et suffisante afin de garantir la précompacité d'une famille de fonctions Stepanov-presque périodiques, au moyen d'un théorème de Lusternik, introduisant la notion d'équi- $S^p$ -presque périodicité.

**Définition 2.1.4.** (voir [ABG], p. 134) *Soit  $E \subset \mathbb{R}$  un ensemble mesurable et, pour tout intervalle fermé  $[a, b]$ , soit  $E(a, b) = E \cap [a, b]$ .*

*Compte tenu de deux fonctions mesurables  $f$  et  $g$ , on définit, pour tout  $a \geq 0$ ,*

$$E_a = \{x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| \geq a\},$$

$$\delta_{[a,b]}(E) = \frac{\mu[E(a, b)]}{b - a},$$

$$\delta_S^l(E) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{\mu[E(x, x+l)]}{l} \right],$$

où  $\mu(X)$  désigne la mesure usuelle de Lebesgue d'un ensemble  $X$  ;

$$D_{S_l^p}^E(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_{E(x, x+l)} |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\mathcal{D}_S^l(f, g) = \inf_{0 < a < +\infty} [a + \delta_S^l(E_a)] ; \overline{f_l}(x) = \frac{1}{l} \int_x^{x+l} f(t) dt.$$

**Théorème 2.1.3.** (voir [ABG], p. 134) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille  $\mathcal{F}$  de fonctions  $f \in \mathbf{S}_{pp}^p$ , soit  $S^p$ -précompacte pour tout  $l$  est que,  $\forall \epsilon > 0, l > 0$ ,*

i)  $\exists \sigma = \sigma(\epsilon, l) > 0$  tel que

$$D_{S_l^p}^E(f, 0) < \epsilon \text{ si } \delta_S^l(E) < \sigma, \forall f \in \mathcal{F}.$$

ii)  $\exists \rho = \rho(\epsilon, l) > 0$  tel que

$$D_{S_l^p}(f, \overline{f^h}) < \epsilon, \forall 0 < h < \rho, \forall f \in \mathcal{F}.$$

iii) *Il existe un ensemble de  $S^p$ -presque périodes  $\{\tau(\epsilon, l)\}$  relativement dense, commun pour tous les éléments de  $\mathcal{F}$ , i.e*

$$D_{S_l^p}(f, f^\tau) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

**Remarque 2.1.** Les conditions ii) et iii) peuvent être respectivement remplacées par

ii') Pour tout  $\epsilon > 0, l > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon, l)$  tel que

$$\mathcal{D}_S^l(f, f^h) < \epsilon, \forall 0 < h < \delta, \forall f \in \mathcal{F}.$$

iii') Il existe un ensemble de presque périodes  $\{\tau(\epsilon, l)\}$ ,  $\mathcal{D}_S^l$ -relativement dense commun pour tous les éléments de  $\mathcal{F}$ , i.e

$$\mathcal{D}_S^l(f, f^\tau) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Comme nous le verrons plus tard, la théorie des fonctions Stepanov-presque périodiques peut être incluse dans la théorie des fonctions uniformément presque périodiques avec les valeurs dans un espace de Banach à l'aide de la transformée de Bochner que nous introduirons dans la prochaine section.

**Remarque 2.2.** (voir [Bes], [BF]) La définition de la Stepanov-presque périodicité est plus générale que celle de Bohr mais, uniquement en dehors de la classe des fonctions uniformément continues sur  $\mathbb{R}$ . Plus précisément,

1. Pour toute  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  et pour tous  $p, q \geq 1$ , avec  $q < p$ ,

$$\|f\|_\infty \geq \|f\|_{S^p} \geq \|f\|_{S^q} \geq \|f\|_{S^1}.$$

En conséquence,

$$\mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{S}_{pp}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{S}_{pp}^q(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \subseteq \mathbf{S}_{pp}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

2. Pour tout  $p \geq 1$ ,

$$\mathbf{S}_{pp}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \cap \mathbf{C}_u(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

où  $\mathbf{C}_u(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  désigne l'espace de fonctions uniformément continues.

Un exemple de fonctions presque périodiques au sens de Stepanov qui ne sont pas presque périodiques au sens de Bohr est le suivant.

**Exemple 2.2.** (voir [L], p. 212-213) Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que  $\frac{1}{\alpha\beta}$  est irrationnel.

On considère les deux fonctions  $f_{\alpha,\beta}$  et  $g_{\alpha,\beta}$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \sin\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x)}\right),$$

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \cos\left(\frac{1}{2 + \cos(\alpha x) + \cos(\beta x)}\right).$$

B. M. Levitan a montré que  $f_{\alpha,\beta}$  et  $g_{\alpha,\beta}$  sont presque périodiques au sens de Stepanov, mais pas au sens de Bohr, car elles ne sont pas uniformément continues.

## 2.2 Remarques sur les espaces de fonctions Stepanov-presque périodiques

Nous illustrons dans cette section, certains résultats importants introduits dans [ABL] qui seront utiles dans la prochaine section.

Comme nous venons tout juste de le voir, Bohr a défini les fonctions uniformément presque périodiques  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  comme suit

$$\forall \epsilon > 0, \exists k > 0, \forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + k] \|f(t + \tau) - f(t)\|_\infty < \epsilon.$$

Il est bien connu que l'espace des fonctions uniformément presque périodiques muni de la norme infinie est un espace de Banach. D'autre part, la complétude est perdue quand cet espace est muni uniquement de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ . Néanmoins, dans [ABL], ils ont montré qu'un sous-ensemble bien choisi peut devenir fermé et par la suite complet car  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Fréchet dans une telle topologie.

On définit alors, pour une fonction uniformément presque périodique  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$$\Omega_f = \{(\epsilon, k, a, \tau) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall t \in \mathbb{R}, \tau \in [a, a + k] \text{ et } |f(t + \tau) - f(t)| < \epsilon\};$$

$$M_f = \{g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid (\epsilon, k, a, \tau) \in \Omega_f \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |g(t + \tau) - g(t)| < \epsilon\}.$$

**Proposition 2.2.1.**  *$M_f$  est un ensemble convexe.*

*Démonstration.* Pour ce faire, soient  $g, h \in M_f$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $(\epsilon, k, a, \tau) \in \Omega_f$ .

On a alors,

$$\begin{cases} g \in M_f \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |g(t + \tau) - g(t)| < \epsilon, \\ h \in M_f \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |h(t + \tau) - h(t)| < \epsilon. \end{cases}$$

Ainsi  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & |(\lambda g + (1 - \lambda)h)(t + \tau) - (\lambda g + (1 - \lambda)h)(t)| \\ & \leq \lambda |g(t + \tau) - g(t)| + (1 - \lambda) |h(t + \tau) - h(t)| \\ & \leq \lambda \epsilon + (1 - \lambda) \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.2.2.** *Soit l'espace  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ . Alors,  $M_f$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Pour ce faire, on considère la suite de fonctions  $g_l$  d'éléments de l'ensemble  $M_f$  localement convergente dans  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  vers  $g$ , et on suppose  $(\epsilon, k, a, \tau) \in \Omega_f, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Ainsi, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $l_0$  tel que  $\forall l > l_0$ ,

$$\begin{aligned} |g(t + \tau) - g(t)| &= |g(t + \tau) - g_l(t + \tau) + g_l(t + \tau) - g_l(t) + g_l(t) - g(t)| \\ &\leq |g(t + \tau) - g_l(t + \tau)| + |g_l(t + \tau) - g_l(t)| + |g_l(t) - g(t)| \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \epsilon + \frac{\delta}{2} = \delta + \epsilon. \end{aligned}$$

Comme  $\delta$  est quelconque, il peut donc être choisi arbitrairement petit de sorte à avoir

$$|g(t + \tau) - g(t)| < \epsilon,$$

ce qui montre que  $g \in M_f$ . □

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $g_l$  une suite de fonctions d'éléments de l'ensemble  $M_f$  localement convergente vers  $g$ . Alors,  $g_l$  converge uniformément vers  $g$ .*

*Démonstration.* On veut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists l_0 \in \mathbb{R}, \forall l > l_0, \forall a \in \mathbb{R} : |g_l(a) - g(a)| < \epsilon.$$

Pour cela, on fixe  $\epsilon > 0$ .

Comme  $g_l, g \in M_f$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , il existe un nombre  $k > 0$  tel que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + k], \forall t \in \mathbb{R}, \forall l \in \mathbb{N} : |g_l(t + \tau) - g_l(t)| < \epsilon; |g(t + \tau) - g(t)| < \epsilon.$$

En particulier,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [a, a + k], \forall t \in \mathbb{R}, \forall l \in \mathbb{N} : |g_l(t + \tau) - g_l(t)| \leq \frac{\epsilon}{4}; |g(t + \tau) - g(t)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Soit  $l_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall l > l_0$ ,

$$\forall t \in [-k, k], |g_l(t) - g(t)| \leq \frac{\epsilon}{4}.$$

Ainsi, pour tout  $a \in \mathbb{R}, l > l_0$ ,

$$\begin{aligned}
|g(a) - g_l(a)| &= |g(a) - g(a + \tau) + g(a + \tau) - g_l(a + \tau) + g_l(a + \tau) - g_l(a)| \\
&\leq |g(a) - g(a + \tau)| + |g(a + \tau) - g_l(a + \tau)| + |g_l(a + \tau) - g_l(a)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui montre finalement que  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists l_0 \in \mathbb{R}$  tel que,  $\forall l > l_0$ ,

$$|g(a) - g_l(a)| < \epsilon.$$

□

Maintenant, tournons-nous vers les fonctions Stepanov-presque périodiques.

Afin de tirer un résultat analogue à la proposition 2.2.2., réintroduisons l'espace

$$\mathbf{BS}^p = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{S^p} < \infty\}.$$

La théorie des espaces de Stepanov  $\mathbf{S}_{pp}^p$  peut être incluse dans la théorie des espaces de fonctions uniformément presque périodiques  $\mathbf{C}_{pp}$  avec les valeurs dans un espace de Banach (voir [AP], p. 7, 76-78, [C1], p. 137, [P], p. 24-28, [ZL], p. 33-34), au moyen de la transformée de Bochner définie ci-dessous.

**Définition 2.2.1.** (voir [ABG], p. 135) *La transformée de Bochner*

$$f^b(x) = f(x + \eta), \quad \eta \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R},$$

associe, à tout  $x \in \mathbb{R}$ , une fonction définie sur  $[0, 1]$ .

**Proposition 2.2.4.** (voir [ABL], p. 38) *Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  alors  $f^b \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))$ .*

*Par conséquent,*

$$\mathbf{BS}^p(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid f^b \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))\}.$$

Ceci découle du fait que,

$$\|f^b\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f^b\|_{\mathbf{L}^p([0,1])} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left[ \int_0^1 |f(t+\eta)|^p d\eta \right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{S^p}^p.$$

**Proposition 2.2.5.** (voir [ABL], p. 38) *Si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  alors  $f^b \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))$ .*

*Par conséquent,*

$$\mathbf{BS}^p(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | f^b \in \mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))\}.$$

S. Bochner a montré le résultat suivant (voir [AP], p. 76-78).

**Théorème 2.2.1.**  $\mathbf{S}_{pp}^p(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | f^b \in \mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))\}.$

Il vient que  $f_n \rightarrow f$  dans  $\mathbf{S}_{pp}^p \Leftrightarrow f_n^b \rightarrow f^b$  dans  $\mathbf{BC}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))$ .

Comme  $\mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est un espace de Fréchet ( $\mathbf{S}_{pp}^p \subset \mathbf{BS}^p \subset \mathbf{L}_{loc}^p$ ), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts  $\mathbf{K}$  de  $\mathbb{R}$ , à savoir

$$\|f\|_{S_{loc}^p} = \sup_{t \in \mathbf{K}} \left[ \int_t^{t+1} |f(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \mathbf{K} \subset \mathbb{R},$$

on a donc (voir [P], p. 25)

$f_n \rightarrow f$  dans  $\mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \Leftrightarrow f_n^b \rightarrow f^b$  dans  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))$  uniformément sur les compacts.

À ce stade, on est désormais en mesure de formuler un résultat analogue à la proposition 2.2.2. introduit dans [ABL], p. 39. On prend donc cette fois-ci

$$\tilde{\Omega}_f = \{(\epsilon, k, a, \tau) \in \mathbb{R}^4 | \forall t \in \mathbb{R}, \tau \in [a, a+k] \text{ et } \|f^b(t+\tau) - f^b(t)\| < \epsilon\};$$

$$\tilde{M}_f = \left\{g \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) | (\epsilon, k, a, \tau) \in \tilde{\Omega}_f \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|g^b(t+\tau) - g^b(t)\| < \epsilon\right\}.$$

En réalisant que  $g \in \tilde{M}_f$  implique que  $g \in \mathbf{S}_{pp}^p(\mathbb{R})$ , on peut énoncer le résultat suivant.

**Proposition 2.2.6.** *Soit  $\mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ . Alors,  $\tilde{M}_f$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Pour ce faire, on considère la suite de fonctions  $g_l$  d'éléments de l'ensemble  $\tilde{M}_f$  localement convergente vers  $g$ , et on suppose que  $(\epsilon, k, a, \tau) \in \tilde{\Omega}_f, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Ainsi pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $l_0$  tel que  $\forall l > l_0$ ,

$$\begin{aligned}
& \|g^b(t + \tau) - g^b(t)\| \\
&= \|g^b(t + \tau) - g_l^b(t + \tau) + g_l^b(t + \tau) - g_l^b(t) + g_l^b(t) - g^b(t)\| \\
&\leq \|g^b(t + \tau) - g_l^b(t + \tau)\| + \|g_l^b(t + \tau) - g_l^b(t)\| + \|g_l^b(t) - g^b(t)\| \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \epsilon + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta + \epsilon.
\end{aligned}$$

Comme  $\delta$  est quelconque, il peut donc être choisi arbitrairement petit de sorte à avoir

$$\|g^b(t + \tau) - g^b(t)\| < \epsilon,$$

ce qui montre que  $g \in \widetilde{M}_f$ . □

La possibilité de relier les espaces  $\mathbf{S}_{pp}^p$  aux espaces  $\mathbf{C}_{pp}(\mathbb{R}, \mathbf{L}^p([0, 1]))$  nous permet en fait d'expliquer la similarité des résultats obtenus pour  $\mathbf{S}_{pp}^p$  et  $\mathbf{C}_{pp}$ , en particulier, pour l'équivalence des trois définitions de presque périodicité.

## 2.3 L'approche du problème de presque périodicité comme un problème du point fixe pour des équations différentielles appropriées

Sous une entrée Stepanov-presque périodique, les solutions presque périodiques sont étudiées non traditionnellement comme un problème du point fixe (voir [ABL], p. 39-42). Cette approche plutôt inhabituelle est basée soit sur le principe de contraction de Banach, soit sur le théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov dont les conditions géométriques sur l'espace et/ou les applications jouent un rôle crucial. Les solutions presque périodiques doivent dans ce cas correspondre aux points fixes des opérateurs associés dans des espaces fonctionnels appropriés. Ainsi, les résultats qui seront présentés sont dans le cadre au moins d'un espace métrique, habituellement d'un espace de Banach.

Considérons le système linéaire

$$X' + AX = P(t), \quad (2.1)$$

où  $A$  est une matrice constante hyperbolique (i.e elle n'a pas de valeurs propres purement imaginaires), et  $P \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est essentiellement bornée et Stepanov-presque périodique.

Il découle du théorème de Bohr-Neugebauer (voir [C2] et [C3]) que le système (2.1) possède sous les hypothèses ci-dessus, une unique solution entièrement bornée  $X(t)$  qui est uniformément presque périodique. La démonstration de ce résultat est basée sur la transformation de Bochner (voir [AK]).

Cette solution prend la forme

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)P(s)ds, \quad (2.2)$$

où  $G(t) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  est une fonction  $n \times n$ -matricielle appropriée avec

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)P(s)ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{ess}|P(t)| \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)|ds \right) \\ &\leq C(A) \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{ess}|P(t)| \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $C(A)$  est une constante réelle dépendant uniquement de  $A$ .

### Remarque 2.3.

1. La matrice  $A$  peut être écrite sous la forme matricielle  $S(\mathcal{P}, \mathcal{N})S^{-1}$ , où  $S$  est une matrice régulière et  $(\mathcal{P}, \mathcal{N})$  est un bloc matriciel diagonal, ayant la forme canonique de Jordan, sachant que les valeurs propres de  $A$  à parties réelles positives forment la diagonale de  $\mathcal{P}$  et celles à parties réelles négatives forment la diagonale de  $\mathcal{N}$ .
2. La fonction matricielle  $G(t)$  prend la forme (voir [De])

$$G(t) = \begin{cases} -S(e^{\mathcal{P}t}, 0)S^{-1} & \text{si } t < 0, \\ S(0, e^{\mathcal{N}t})S^{-1} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On considère maintenant une famille de systèmes linéaires à un paramètre

$$X' + AX = f(q(t)) + p(t), q \in \mathbf{Q}, \quad (2.4)$$

où  $A$  est la même matrice que ci-dessus,  $f \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  a au plus une croissance linéaire,  $p \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est essentiellement bornée et Stepanov-presque périodique, et  $\mathbf{Q}$  un sous-ensemble de l'espace de fonctions Stepanov-presque périodiques.

Comme la composée  $f(q(t))$  devient, pour chaque  $q \in \mathbf{Q}$ , Stepanov-presque périodique (voir [D]), le système (2.4) possède sous les hypothèses précédentes, une unique solution uniformément presque périodique de la forme

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(q(s)) + p(s)]ds,$$

avec

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |X(t)| &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(q(s)) + p(s)]ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{ess}|f(q(t)) + p(t)| \left( \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)|ds \right) \\ &\leq C(A) \sup_{t \in \mathbb{R}} \text{ess}|f(q(t)) + p(t)|, \end{aligned}$$

où  $C(A)$  est une constante réelle dépendant uniquement de  $A$ .

Par conséquent, en notant (voir [ABL], p. 40)

$$T(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(q(s)) + p(s)]ds, q \in \mathbf{Q}; \quad (2.5)$$

on peut désormais discuter de la possibilité d'appliquer le théorème du point fixe.

Pour le principe de Banach, il est exigé que

- (i)  $\mathbf{Q}$  soit complet.
- (ii)  $T : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$  soit contractante.

En conséquence, en prenant  $\mathbf{Q}$  comme espace de Banach de fonctions uniformément presque périodiques (Stepanov-presque périodiques uniformément continues), seulement l'hypothèse (ii) qui reste à vérifier.

*Démonstration.* Pour cela, soient  $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ , et montrons que

$$\|T(q_1) - T(q_2)\|_\infty \leq L_1 \|q_1 - q_2\|_\infty; 0 \leq L_1 < 1.$$

En supposant en outre que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $L_2 > 0$ , on obtient pour toutes  $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \|T(q_1) - T(q_2)\|_\infty &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)| |f(q_1(s)) - f(q_2(s))| ds \\ &\leq L_2 \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)| |q_1(s) - q_2(s)| ds \\ &\leq L_2 C(A) \|q_1 - q_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Évidemment, pour  $L_2$  suffisamment petit, plus précisément pour  $L_2 < \frac{1}{C(A)}$ , on obtient la contraction désirée  $L_1 := L_2 C(A) < 1$ .  $\square$

Finalement, les hypothèses (i) et (ii) du principe de contraction de Banach sont bien vérifiées et donc,  $T$  admet un et un unique point fixe  $q^* \in \mathbf{Q}$  pour lequel

$$T(q^*) = q^* = X^*(t).$$

L'assertion suivante est principalement basée sur l'application de théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov (voir [A]).

**Proposition 2.3.1.** (voir [ABL], p. 41) *On considère le système*

$$X' + AX = f(X) + p(t), X \in \mathbf{Q}, \tag{2.6}$$

où  $A, f, p$  sont comme ci-dessus, mais  $\mathbf{Q}$  est supposé être un sous-ensemble fermé, borné et convexe de l'espace de Fréchet  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les sous-intervalles compacts de  $\mathbb{R}$ .

Si le système associé (2.4), pour toute  $q \in \mathbf{Q}$  admet une unique solution  $X(t) \in \mathbf{Q}$ , alors le problème (2.6) est soluble.

Il résulte des résultats vus ci-dessus que la proposition 2.3.1. s'applique de la manière souhaitée lorsque,

- (i).  $\mathbf{Q}$  avec les propriétés ci-dessus est aussi un sous-ensemble de l'espace de Banach de fonctions Stepanov (ou en particulier, uniformément) presque périodiques.
- (ii).  $T(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$ , pour  $T$  définie comme en (2.5).

On définit ainsi, pour une fonction uniformément presque périodique  $\xi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , les ensembles (pour  $\Delta \gg 1$ )

$$\Omega_\xi = \left\{ (\epsilon, k, a, \tau) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall t \in \mathbb{R}, \tau \in [a, a+k] \text{ et } |\xi(t+\tau) - \xi(t)| < \frac{\epsilon}{\Delta} \right\};$$

$$M_\xi = \{ \varphi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid (\epsilon, k, a, \tau) \in \Omega_\xi \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, |\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \epsilon \}.$$

Réalisons que toute  $\varphi \in M_\xi$  doit être une fonction uniformément presque périodique.

Comme  $M_\xi$  a été déjà prouvé d'être un sous-ensemble fermé et convexe ( dans une telle topologie ) de  $\mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Ceci reste vrai pour  $M_\xi \cap \mathbf{Q}_C$ , où

$$\mathbf{Q}_C = \left\{ \varphi \in \mathbf{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq C \right\},$$

car pour tout  $\alpha \in [-1, 1]$ , et  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha M_\xi + \beta \subset M_\xi$ .

Par conséquent, en prenant cette fois-ci  $\mathbf{Q} = M_\xi \cap \mathbf{Q}_C$ , il reste à vérifier uniquement l'hypothèse (ii). Plus précisément, comme l'inclusion  $T(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}_C$  peut être immédiatement obtenue avec un  $C$  approprié, à condition que le coefficient de ( au plus ) croissance linéaire de  $f$  soit suffisamment petit ( voir [A1, AK] ), il suffit de montrer que  $T(\mathbf{Q}) \subset M_\xi$ .

*Démonstration.* (voir [ABL], p. 42)

Soit donc  $\xi(t)$  l'unique solution uniformément presque périodique de l'équation

$$X' + AX = p(t),$$

avec une  $\tau_\xi$ -presque période ( pour un  $\frac{\epsilon}{\Delta}$  donné,  $\Delta \gg 1$  ).

En supposant en outre la lipschitzianité de  $f$  avec un rapport suffisamment petit  $L > 0$ , on obtient pour une unique solution uniformément presque périodique  $X(t)$  de (2.4) que

$$\begin{aligned}
|X(t + \tau_\xi) - X(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)[f(q(s + \tau_\xi)) - f(q(s))]ds + [\xi(t + \tau_\xi) - \xi(t)] \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)[f(q(s + \tau_\xi)) - f(q(s))]| ds + |\xi(t + \tau_\xi) - \xi(t)| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)||f(q(s + \tau_\xi)) - f(q(s))| ds + \frac{\epsilon}{\Delta} \\
&\leq L \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-s)||q(s + \tau_\xi) - q(s)| ds + \frac{\epsilon}{\Delta} \\
&\leq L \sup_{t \in \mathbb{R}} |q(t + \tau_\xi) - q(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)| dt + \frac{\epsilon}{\Delta} \\
&\leq \epsilon LC(A) + \frac{\epsilon}{\Delta} = \epsilon \left( \frac{1}{\Delta} + LC(A) \right).
\end{aligned}$$

Si  $L$  est suffisamment petit, plus précisément  $L < \frac{1}{C(A)}$ , on aura

$$\forall t \in \mathbb{R}, |X(t + \tau_\xi) - X(t)| \leq \epsilon \left( \frac{1}{\Delta} + LC(A) \right) < \epsilon.$$

□

**Remarque 2.4.** La même chose peut être reformulée en termes de la transformée de Bochner à l'aide de la proposition 2.2.6. En effet, définissons pour une fonction Stepanov-presque périodique  $\xi \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , les ensembles ( $\Delta \gg 1$ )

$$\tilde{\Omega}_\xi = \left\{ (\epsilon, k, a, \tau) \in \mathbb{R}^4 \mid \forall t \in \mathbb{R}, \tau \in [a, a + k] \text{ et } \|\xi^b(t + \tau) - \xi^b(t)\| < \frac{\epsilon}{\Delta} \right\};$$

$$\tilde{M}_\xi = \left\{ \varphi \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid (\epsilon, k, a, \tau) \in \tilde{\Omega}_\xi \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|\varphi^b(t + \tau) - \varphi^b(t)\| < \epsilon \right\}.$$

Réalisons que toute  $\varphi \in \tilde{M}_\xi$  doit être une fonction Stepanov-presque périodique.

Comme  $\tilde{M}_\xi$  a été déjà prouvé qu'il doit être également un sous-ensemble fermé ( dans une telle topologie ) de  $\mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , ceci reste vrai pour  $\tilde{M}_\xi \cap \tilde{Q}_C$ , où

$$\tilde{Q}_C = \{ \varphi \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\|_{S^p} \leq C \},$$

car pour tout  $\alpha \in [-1, 1]$ , et  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \tilde{M}_\xi + \beta \subset \tilde{M}_\xi$ .

Par conséquent, en choisissant cette fois-ci  $Q = \widetilde{M}_\xi \cap \widetilde{Q}_C$ , il reste à vérifier uniquement l'hypothèse (ii). Plus précisément, comme l'inclusion  $T(\mathbf{Q}) \subset \widetilde{Q}_C$  peut être immédiatement obtenue avec un  $C$  approprié, il suffit de montrer que  $T(Q) \subset \widetilde{M}_\xi$ , comme précédemment.

**Important !** Comme on vient de le voir, sous une entrée Stepanov-presque périodique, les solutions presque périodiques étudiées non traditionnellement comme un problème de point fixe, sont non purement Stepanov-presque périodiques ; c'est en fait une propriété plus forte !

## CHAPITRE 3

### Notion de presque périodicité au sens de Weyl

Dans ce chapitre, nous présenterons les définitions classiques de deux notions de presque périodicité ; l'équi-Weyl-presque périodicité et la Weyl-presque périodicité. Un critère de Bochner pour les fonctions Weyl-presque périodiques est formulé pour la sous-classe de fonctions uniformément continues dans la métrique associée. Ainsi, des résultats de presque périodicité seront prouvés pour des non-homogénéités presque périodiques dans la métrique de Weyl pour un système différentiel linéaire, sur la base de la représentation intégrale des solutions entièrement bornées.

### 3.1 Définitions classiques

Bien que les définitions des espaces  $\mathbf{C}_{pp}$  et  $\mathbf{S}_{pp}^p$  sont en fait liées aux mêmes normes (respectivement la norme infinie et la norme de Stepanov), les définitions classiques des espaces de Weyl utilisent deux normes différentes ; la norme de Stepanov définie dans le chapitre précédent et la norme de Weyl

$$\|f\|_{W^p} = \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \|f\|_{S_l^p},$$

induite par la distance

$$D_{W^p}(f, g) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} = \lim_{l \rightarrow \infty} D_{S_l^p}(f, g).$$

Introduisons les six définitions suivantes.

**Définition 3.1.1.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite *équi-presque périodique* au sens de Weyl si, pour tout  $\epsilon > 0, \exists k, l_\epsilon > 0$ , tels que tout intervalle de longueur  $k$ , contient au moins un réel  $\tau$  pour lequel

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t + \tau) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \forall l \geq l_\epsilon.$$

$\tau$  est dit, une *équi-Weyl  $\epsilon$ -presque période* (ou *équi-Weyl  $\epsilon$ -translation*) de  $f$ .

Notons  $e - \mathbf{W}_{pp}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace de toutes les fonctions *équi-Weyl-presque périodiques*.

**Définition 3.1.2.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite *équi- $W^p$ -normale* si la famille de fonctions *translatées*  $\{f(\cdot + h) \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $S_l^p$ -*précompacte* pour un  $l$  suffisamment grand.

**Définition 3.1.3.** Nous notons par  $e - \mathbf{W}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  l'espace obtenu comme la fermeture dans  $\mathbf{BS}^p$  de l'espace de tous les polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  par rapport à la norme de Stepanov pour un  $l$  suffisamment grand. Autrement,  $f \in e - \mathbf{W}^p$  si et seulement si,  $\forall \epsilon > 0, \exists l_\epsilon$  et un polynôme trigonométrique  $P_\epsilon$  tels que

$$D_{S_l^p}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon, \forall l \geq l_\epsilon.$$

**Définition 3.1.4.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite *presque périodique* au sens de Weyl si, pour tout  $\epsilon > 0, \exists k > 0$ , tel que tout intervalle de longueur  $k$  contient au moins un réel  $\tau$  pour lequel

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t + \tau) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$\tau$  est dit, une *Weyl  $\epsilon$ -presque période* (ou une *Weyl  $\epsilon$ -translation*) de  $f$ .

Notons  $\mathbf{W}_{pp}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace de toutes les fonctions *Weyl-presque périodiques*.

**Définition 3.1.5.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite  *$W^p$ -normale* si la famille de fonctions *translatées*  $\{f(\cdot + h) \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $W^p$ -*précompacte*.

D'une manière analogue aux espaces de Stepanov, on peut introduire l'espace

$$\mathbf{BW}^p = \{f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{W^p} < \infty\}.$$

Les ensembles  $\mathbf{BS}^p$  et  $\mathbf{BW}^p$  coïncident (voir [BF], p. 37). Mais, la différence des normes implique une grande différence entre les deux espaces. En fait, bien que  $\mathbf{BS}^p$  est complet par rapport à la norme de Stepanov (voir [BF], p. 51-53), l'espace  $\mathbf{BW}^p$  est incomplet par rapport à la norme de Weyl (voir [BF], p. 58-61).

**Définition 3.1.6.** *Nous notons par  $\mathbf{W}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  l'espace obtenu comme la fermeture dans  $\mathbf{BW}^p$  de l'espace de tous les polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  par rapport à la norme de Weyl. Autrement,  $f \in \mathbf{W}^p$  si et seulement si,  $\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon$  polynôme trigonométrique tel que*

$$D_{W^p}(f, P_\epsilon) \leq \epsilon.$$

Il peut être vu que l'espace  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$  est un espace intermédiaire entre les deux espaces  $\mathbf{S}_{pp}^p$  et  $\mathbf{W}_{pp}^p$  et les inclusions sont strictes (voir [ABG]).

**Exemple 3.1.** (Exemple d'une fonction  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$  qui n'appartient pas à  $\mathbf{S}_{pp}^p$ )

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0 : \frac{1}{2}[; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout  $l, \tau \in \mathbb{R}, l \geq 1$ , on a

$$\int_x^{x+l} |f(t + \tau) - f(t)| dt \leq 1.$$

Ainsi,

$$D_{S_l}(f, f^\tau) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(t + \tau) - f(t)| dt \right] \leq \frac{1}{l}.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $l \geq 1$ , tel que

$$D_{S_l}(f, f^\tau) \leq \epsilon, \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,  $f \in e - \mathbf{W}_{pp}^p$ .

D'autre part, il existe toujours  $x \in \mathbb{R}$  tel que, pour tout  $\tau > \epsilon$ , où  $\epsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ , on a ( $l = 1$ )

$$\int_x^{x+l} |f(t + \tau) - f(t)| dt > \epsilon.$$

De plus, si  $\epsilon < \frac{1}{2}$ , alors ( $l = 1$ )

$$D_{S_l}(f, f^\tau) > \epsilon, \forall \tau > \epsilon.$$

Pour  $\tau \geq l - \frac{1}{2}$ , on a aussi

$$D_{S_l}(f, f^\tau) \geq \frac{1}{2l},$$

ce qui montre que  $f \notin \mathbf{S}_{pp}^p$ .

**Exemple 3.2.** (voir [ABL]) (Exemple d'une fonction  $\mathbf{W}_{pp}^p$  qui n'appartient pas à  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$ )  
On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme suit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Pour que l'ensemble  $\{\tau | D_{S_l}(f, f^\tau) < \epsilon\}$  soit relativement dense, il est nécessaire que les valeurs arbitraires de  $\tau$  soient aussi importantes dans cet ensemble (on peut extraire quelques suites de  $\tau_n \rightarrow \infty$  avec  $n \rightarrow \infty$ ).

Si on exige que  $l$  soit (peut être grand mais) constant pour tous les  $\tau$  (nous fixons  $\epsilon$ ), alors pour la plupart d'entre eux, on obtient  $\tau > l$ , et par la suite

$$D_{S_l}(f, f^\tau) = \frac{1}{l} \times l = 1 = cst.$$

Ainsi, l'inégalité souhaitée  $D_{S_l}(f, f^\tau) < \epsilon$ , est impossible à réaliser pour tous les  $\tau$ , simultanément. Par lequel,  $f \notin e - \mathbf{W}_{pp}^p$ .

D'autre part, on a

$$D_W(f, f^\tau) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \times \tau = 0,$$

comme  $l \rightarrow \infty$ , on peut supposer que  $\tau < l$ . Par lequel,  $f \in \mathbf{W}_{pp}^p$ .

Collectons ci-dessous certaines propriétés importantes.

### Propriétés.

1. Toute fonction  $f$  équi-Weyl-presque périodique est  $W^p$ -bornée (voir [L], p. 222-223). Or, comme l'ensemble de fonctions  $S^p$ -bornées coïncide avec l'ensemble de fonctions  $W^p$ -bornées, toute fonction équi-Weyl-presque périodique est également  $S^p$ -bornée et équi- $W^p$ -bornée.
2. Toute fonction équi-Weyl-presque périodique est équi- $W^p$ -uniformément continue (voir [Bes], p. 84). Autrement, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe deux nombres  $l_\epsilon$  et  $\delta$  tels que, si  $|h| < \delta$ , alors

$$D_{S_l^p}(f, f^h) < \epsilon, \forall l \geq l_\epsilon.$$

3. Les espaces  $e - \mathbf{W}^p$  coïncident avec les espaces  $\mathbf{S}_{pp}^p$ . En effet, en raison de l'équivalence de toutes les normes de Stepanov  $S_l^p$ , l'existence d'un nombre  $l_1$  pour lequel, au moyen de la définition 3.1.3., une suite de polynômes converge dans la norme  $S_{l_1}^p$  implique que la suite converge dans chaque norme  $S_l^p$ .
4. Les espaces  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$  coïncident avec les espaces  $\mathbf{W}^p$  (voir [Bes]).
5. Les espaces  $e - W^p$ -normale coïncident avec les espaces  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$  (voir [ABG]).
6. Toute fonction de  $\mathbf{W}^p$  est équi- $W^p$ -normale et  $W^p$ -normale. L'inverse est en général pas vrai, comme le montrent ces deux exemples.

**Exemple 3.3.** Dans [Str], p. 20-21, ils ont montré que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \frac{1}{2}[, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

est équi- $W^1$ -normale mais pas une  $\mathbf{W}^1$ -fonction.

**Exemple 3.4.** Dans [Str], p. 48, ils ont montré que la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

est  $W^1$ -normale mais pas une  $\mathbf{W}^1$ -fonction.

A.S. Kovanko dans [K], [K1] et [K2] a donné une caractérisation de l'équi-Weyl-presque périodicité via la relative compacité de l'ensemble de translatées obtenue par rapport à la convergence équi- $W^p$  uniforme introduite ci-dessous, au moyen d'un théorème de Lusternik.

**Définition 3.1.7.** *Une suite de fonctions  $f_n$ ,  $W^p$ -bornées est dite,*

i). *Équi- $W^p$ -uniformément de Cauchy, si  $\forall \epsilon > 0, \exists l_\epsilon$  tel que*

$$\limsup_{m,n \rightarrow \infty} D_{S_l^p}(f_m, f_n) < \epsilon, \forall l \geq l_\epsilon.$$

ii). *Équi- $W^p$ -uniformément convergente s'il existe  $f \in \mathbf{BW}^p$  telle que,  $\forall \epsilon > 0, \exists l_\epsilon$  tel que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D_{S_l^p}(f, f_n) < \epsilon, \forall l \geq l_\epsilon.$$

**Théorème 3.1.1.** (voir [K1]) *Une suite de fonctions d'éléments de  $\mathbf{BW}^p$  est équi- $W^p$ -uniformément de Cauchy si et seulement si elle est équi- $W^p$ -uniformément convergente.*

Cela signifie que l'espace  $\mathbf{BW}^p$ , muni de la norme de la convergence équi- $W^p$ -uniforme est complet.

**Théorème 3.1.2.** (voir [ABG], p. 142, [K2]) *Un ensemble  $\mathcal{M}$  de fonctions équi-Weyl-presque périodiques est compact, par rapport à la convergence équi- $W^p$ -uniforme si, pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

i).  *$\exists \sigma > 0, T_1 > 0$  tels que*

$$D_{S_T^E}^E(f, 0) < \epsilon \text{ si } \delta_S^T(E) < \sigma, \forall T \geq T_1, \forall f \in \mathcal{M}.$$

ii). *(Équi- $e - W^p$ -continuité)  $\exists \eta > 0, T_2 > 0$  tels que*

$$D_{S_T^p}(f, f^h) < \epsilon \text{ si } |h| < \eta, \forall T \geq T_2, \forall f \in \mathcal{M}.$$

iii). *(Équi- $e - W^p$ -presque périodicité)  $\exists T_3 > 0$  et un ensemble de nombres réels  $\{\tau_\epsilon\}$  relativement dense tels que*

$$D_{S_T^p}(f, f^\tau) < \epsilon \text{ si } \tau \in \{\tau_\epsilon\}, \forall T \geq T_3, \forall f \in \mathcal{M}.$$

Avec  $\delta_S^T(E)$ ,  $D_{S_T^p}$  et  $D_{S_T^p}^E$  sont respectivement données par

$$\begin{aligned}\delta_S^T(E) &= \|f\|_{S_T^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{T} \int_x^{x+T} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \\ D_{S_T^p}(f, g) &= \|f - g\|_{S_T^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{T} \int_x^{x+T} |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \\ D_{S_T^p}^E &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[ \frac{\mu[E(x, x+T)]}{T} \right],\end{aligned}$$

où  $E$  représente un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  et, pour tout intervalle fermé  $[x, x+T]$ ,  $E(x, x+T) = E \cap [x, x+T]$ , ainsi  $\mu$  désigne la mesure usuelle de Lebesgue.

Après tout, on est enfin prêt à énoncer le théorème suivant.

**Théorème 3.1.3.** (voir [K2]) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $f$  soit équi-Weyl-presque périodique est que, l'ensemble de toutes les translatées  $\{f^\tau\}$  soit relativement compact par rapport à la convergence équi- $W^p$ -uniforme.*

Pour voir le second théorème sur la normalité, on a besoin également de quelques définitions introductives.

**Définition 3.1.8.** *Soient  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble Lebesgue-mesurable,  $E(a, b) = E \cap [a, b]$ , pour tout intervalle  $[a, b]$  et  $|E(a, b)|$  sa mesure de Lebesgue.*

Notons ainsi,

$$\delta_W(E) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[ \frac{|E(a-T, a+T)|}{2T} \right] \right].$$

**Définition 3.1.9.** *Pour toute  $f, g \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , introduisons la distance*

$$D_{W^p}^E(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \sup_{a \in \mathbb{R}} \left[ \frac{1}{2T} \int_{E(a-T, a+T)} |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \right].$$

Cette distance, quand  $E \equiv \mathbb{R}$ , coïncide avec la distance de Weyl  $D_{W^p}(f, g)$ .

On est alors prêt à énoncer le théorème de Lusternik suivant.

**Théorème 3.1.4.** (voir [K]) *La condition nécessaire et suffisante pour la compacité relative dans la norme de Weyl d'une classe  $\mathcal{M}$  de fonctions  $f \in \mathbf{W}_{pp}^p$  est que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

i).  $\exists \sigma > 0$  tel que

$$D_{W^p}^E(f, 0) < \epsilon \text{ si } \delta_W(E) < \sigma, \forall f \in \mathcal{M}.$$

ii). (Équi- $W^p$ -continuité)  $\exists \eta > 0$  tel que

$$D_{W^p}(f, f^h) < \epsilon \text{ si } |h| < \eta, \forall f \in \mathcal{M}.$$

iii). (Équi- $W^p$ -presque périodicité) *il existe un ensemble de presque périodes réelles  $\{\tau_\epsilon\}$  relativement dense tel que*

$$D_{W^p}(f, f^\tau) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{M}.$$

Notons qu'en raison du fait que les espaces  $\mathbf{C}_{pp}$  et  $\mathbf{S}_{pp}^p$  sont complets, il était possible d'énoncer le critère de Bochner en termes de compacité au lieu de la précompacité. Or étonnamment, les espaces  $\mathbf{BW}^p$  et  $\mathbf{W}^p$  ne sont pas complets par rapport à la norme de Weyl (voir [BF], [K], [L]).

Dans [ABL], ils ont formulé le critère de Bochner en termes de précompacité. Pour ce, on introduit la définition suivante (voir [ABL]).

**Définition 3.1.10.** *À une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , on associe la translatée  $f^h \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  définie comme suit*

$$f^h(t) = f(t + h), \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Ainsi, on obtient l'opérateur de translation, qu'on notera par  $\mathcal{T}_f$*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \\ h &\mapsto f^h \end{aligned}$$

Il peut être vu que si  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est Weyl-presque périodique, alors  $f^h - f$  l'est également pour tout  $h \in \mathbb{R}$ . Si de plus  $D_{W^p}(f) = D_{W^p}(f, 0) < \infty$ , alors

$$D_{W^p}(f^h - f) \leq D_{W^p}(f^h) + D_{W^p}(f) = 2D_{W^p}(f) < \infty.$$

Évidemment, toute fonction essentiellement bornée  $f$  satisfait  $D_{W^p}(f) < \infty$ .

Alors, on peut prouver la  $D_{W^p}$ -continuité de l'opérateur de translation  $\mathcal{T}_f$  défini en haut sous l'hypothèse suivante (voir [ABL]).

**Hyp.**  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  une fonction  $D_{W^p}$ -bornée et uniformément continue en moyenne.  
i.e

$$\forall 0 \leq l \leq +\infty, \forall \frac{\epsilon}{3} > 0, \exists \delta > 0, \forall |h| < \delta : \left( \frac{1}{l} \int_0^l |f^h(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{3}.$$

**Proposition 3.1.1.** Soit  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  une fonction Weyl-presque périodique satisfaisant l'Hyp. Alors, l'opérateur de translation  $h \xrightarrow{\mathcal{T}_f} f^h$  est  $D_{W^p}$ -continue.

*Démonstration.* On considère l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} D_{W^p}(f^h, f) &\leq D_{W^p}(f^h, f^{h+\tau}) + D_{W^p}(f^{h+\tau}, f^\tau) + D_{W^p}(f^\tau, f) \\ &= 2D_{W^p}(f, f^\tau) + D_{W^p}(f^{h+\tau}, f^\tau) \end{aligned} \quad (3.1)$$

On fixe  $\epsilon > 0$ . Comme  $f$  est Weyl-presque périodique, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in [-a, -a+k] \mid D_{W^p}(f, f^\tau) < \frac{\epsilon}{3}, \quad (3.2)$$

où  $k$  est la constante de la densité relative pour l'ensemble  $\{\tau : D_{W^p}(f, f^\tau) < \frac{\epsilon}{3}\}$ .

Si  $\tau \in [-a, -a+k], a \leq t \leq a+l$ , alors  $0 \leq a+\tau \leq t+\tau \leq a+\tau+l \leq k+l$ .

Par conséquent,  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( \frac{1}{l} \int_a^{a+l} |f^{h+\tau}(t) - f^\tau(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \frac{1}{l} \int_0^{k+l} |f^h(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ensuite

$$\sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{l} \int_a^{a+l} |f^{h+\tau}(t) - f^\tau(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \frac{1}{l} \int_0^{k+l} |f^h(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} D_{W^p}(f^{h+\tau}, f^\tau) &= \limsup_{l \rightarrow \infty} \sup_{a \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{l} \int_a^{a+l} |f^{h+\tau}(t) - f^\tau(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{l} \int_0^{k+l} |f^h(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En outre, par hypothèse,

$$\exists \delta > 0, \forall |h| < \delta : \limsup_{l \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{l} \int_0^{k+l} |f^h(t) - f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (3.4)$$

Autrement,

$$\exists \delta > 0, \forall |h| < \delta : D_{W^p}(f^h, f) < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

□

En omettant cette fois-ci le problème de complétude des espaces de fonctions Weyl-presque périodiques, dans [ABL], ils ont tout de bon formulé le critère de Bochner en termes de précompacité. Un résultat similaire au théorème que nous allons présenter, a été développé par A. S. Kovanko dans [K]. La preuve est donc effectuée par un  $\epsilon$ -réseau.

**Théorème 3.1.5.** *Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  satisfaisant l'Hyp est Weyl-presque périodique si et seulement si la famille de fonctions translatées  $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $D_{W^p}$ -précompacte.*

Notons que la démonstration ci-dessous est basée en partie sur [L], p. 219-220 et [S].

*Démonstration.* On doit donc démontrer l'assertion ci-dessus dans les deux sens.

**Suffisance :** On suppose que la famille de translatées  $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $D_{W^p}$ -précompacte et on montre que  $f$  est Weyl-presque périodique.

On fixe  $\epsilon > 0$ . Comme  $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $D_{W^p}$ -précompacte, alors il existe une suite de translatées  $(f^{h_j})_{j \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \exists j = 1, \dots, n : D_{W^p}(f^{h-h_j}, f) = D_{W^p}(f^{h_j}, f^h) < \epsilon. \quad (3.5)$$

Ainsi, les nombres  $\tau = h - h_j$  pour  $j = 1, \dots, n$  sont des  $D_{W^p}$ ,  $\epsilon$ -presque périodes.

On montre ensuite la densité relative de l'ensemble

$$\{\tau \mid \tau = h - h_j, h \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n; D_{W^p}(f^{h_j}, f^h) < \epsilon\}. \quad (3.6)$$

Pour ce faire, soient  $a \in \mathbb{R}$  arbitraire et

$$k = \max_{j=1, \dots, n} |h_j| \quad (3.7)$$

Si  $h = a + k$  et  $h_j$  satisfait (3.5), on obtient en vue de (3.7) que  $h - h_j \in [a, a + 2k]$ .

Ceci est équivalent à dire que tout intervalle de longueur  $2k$  contient une  $D_{W^p}$ ,  $\epsilon$ -presque période de  $f$ . Autrement,  $2k$  est une constante de densité relative pour l'ensemble (3.6), ce qui montre que  $f$  est Weyl-presque périodique.

**Nécessité :** Cette fois-ci, on suppose que  $f$  est Weyl-presque périodique et on montre que la famille de translatées  $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$  est  $D_{W^p}$ -précompacte.

On fixe  $\epsilon > 0$ . L'opérateur  $\mathcal{T}_f$  étant  $D_{W^p}$ -continue (voir Proposition 3.1.2), on a

$$\exists \delta > 0, \forall |\omega| < \delta : D_{W^p}(f, f^\omega) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.8)$$

Soit  $k$  une constante de densité relative pour l'ensemble  $\{\tau : D_{W^p}(f, f^\tau) < \frac{\epsilon}{2}\}$ , i.e

$$\forall I, |I| = k, \exists \tau \in I : D_{W^p}(f, f^\tau) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.9)$$

À ce  $k$  et  $\delta$ , on associe un entier positif  $n$  tel que

$$n\delta \leq k \leq (n+1)\delta \quad (3.10)$$

et on pose  $h_j = j\delta$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

Soit  $h \in \mathbb{R}$ . Dans l'intervalle  $[-h, -h + k]$  de longueur  $k$ , on trouve en vue de (3.9) une  $D_{W^p}$ ,  $\frac{\epsilon}{2}$ -presque période  $\tau$ , i.e

$$D_{W^p}(f^\tau, f) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.11)$$

Par ailleurs, on somme  $h$  et  $\tau$  avec  $j = 1, \dots, n$ , de sorte à avoir

$$|h + \tau - h_j| < \delta. \quad (3.12)$$

Ceci est possible en vue de (3.10) et du fait que  $\tau \in [-h, -h + k]$ .

Au moyen de (3.8),(3.11) et (3.12), il vient que

$$\begin{aligned}
D_{W^p}(f^h, f^{h_j}) &\leq D_{W^p}(f^h, f^{h+\tau}) + D_{W^p}(f^{h+\tau}, f^{h_j}) \\
&= D_{W^p}(f, f^\tau) + D_{W^p}(f^{h+\tau-h_j}, f) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ceci montre que  $\{f^{h_j} : j = 1, \dots, n\}$  est un  $\epsilon$ -réseau fini pour  $\{f^h \mid h \in \mathbb{R}\}$ , par rapport à la métrique de Weyl. □

Il découle de la démonstration que, bien que, une fonction  $W^p$ -normale est Weyl-presque périodique sans aucune hypothèse supplémentaire, une fonction Weyl-presque périodique est  $W^p$ -normale sous l'hypothèse de continuité de l'opérateur de translation par rapport à la métrique de Weyl. L'exemple suivant montre un exemple d'une fonction Weyl-presque périodique (de degré 1) qui n'est pas  $W^1$ -normale.

**Exemple 3.5.** Dans [Str], p. 42-47, ils ont montré que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0], \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } x \in ]n-2, n-1], n = 2, 4, 6, \dots \\ -\sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } x \in ]n-1, n], n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

est Weyl-presque périodique (de degré 1) mais pas  $W^1$ -normale.

## 3.2 Solutions équi-Weyl et Weyl-presque périodiques des équations différentielles

Dans cette section, les résultats de presque périodicité seront prouvés pour des non-homogénéités presque périodiques dans la métrique de Weyl, sur la base de la représentation intégrale des solutions entièrement bornées.

On considère à présent l'équation scalaire

$$x' + ax = f(t), \tag{3.13}$$

où  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est essentiellement bornée.

**Théorème 3.2.1.** *Si  $f$  est essentiellement bornée et équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) alors toute solution bornée  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de (3.13) est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement).*

La démonstration de ce théorème est basée sur le résultat suivant (voir [R]).

**Proposition 3.2.1.** *Si l'intégrale  $F(t) = \int_0^t f(s)ds$ , où  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) est bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors elle est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement).*

*Démonstration.* Une solution générale de l'équation prend la forme (voir [C1])

$$x(t) = e^{at} \left( x(0) + \int_0^t f(s)e^{-as} ds \right).$$

On peut distinguer trois cas possibles selon le signe de la constante  $a$ .

**i) Si  $a > 0$ ,** afin d'avoir une solution bornée pour  $t \rightarrow +\infty$ , on doit prendre

$$x(0) = - \int_0^{+\infty} f(s)e^{-as} ds.$$

Autrement, une solution particulière de l'équation (3.13) est

$$x(t) = -e^{at} \int_t^{+\infty} f(s)e^{-as} ds. \tag{3.14}$$

Soit donc  $f$  être équi-Weyl-presque périodique ou Weyl-presque périodique.

On suppose  $x(t)$  une solution de (3.13) bornée sur  $\mathbb{R}$  (par la suite  $x(t)$  est  $W^p$ -bornée).

À présent, on veut prouver la presque périodicité de la solution. On a évidemment

$$x(t + \tau) = -e^{a(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{+\infty} f(s)e^{-as} ds.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
|x(t + \tau) - x(t)| &= \left| e^{a(t+\tau)} \int_{t+\tau}^{+\infty} f(s) e^{-as} ds - e^{at} \int_t^{+\infty} f(s) e^{-as} ds \right| \\
&= \left| e^{a(t+\tau)} \int_t^{+\infty} f(s + \tau) e^{-a(s+\tau)} ds - e^{at} \int_t^{+\infty} f(s) e^{-as} ds \right| \\
&= \left| e^{at} \int_t^{+\infty} (f(s + \tau) - f(s)) e^{-as} ds \right|.
\end{aligned}$$

De plus, on a besoin de l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} |x(t + \tau) - x(t)| dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \left| e^{at} \int_t^{+\infty} (f(s + \tau) - f(s)) e^{-as} ds \right| dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left| e^{at} \int_0^{+\infty} (f(s + t + \tau) - f(s + t)) e^{-a(s+t)} ds \right| dt \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left| \int_0^{+\infty} (f(s + t + \tau) - f(s + t)) e^{-as} ds \right| dt \\
&\leq \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{+\infty} |(f(s + t + \tau) - f(s + t)) e^{-as}| ds dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} |(f(s + t + \tau) - f(s + t)) e^{-as}| dt ds \\
&= \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left( \int_{\alpha}^{\beta} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds.
\end{aligned}$$

Pour le cas équi-Weyl, on peut obtenir pour  $\alpha = u$  et  $\beta = u + l$ ,

$$\begin{aligned}
&\sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |x(t + \tau) - x(t)| dt \\
&\leq \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left( \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds \\
&= \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds \\
&< \tilde{\epsilon} \int_0^{+\infty} e^{-as} ds = \frac{\tilde{\epsilon}}{a} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui implique l'équi-Weyl-presque périodicité de la solution  $x$ .

Pour le cas Weyl, en utilisant l'estimation introduite ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
& \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |x(t + \tau) - x(t)| dt \right) \\
& \leq \int_0^{+\infty} |e^{-as}| \left( \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) \right) ds \\
& < \tilde{\epsilon} \int_0^{+\infty} e^{-as} ds = \frac{\tilde{\epsilon}}{a} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui implique la Weyl-presque périodicité de la solution  $x$ .

ii) Si  $a < 0$ , on prend la condition initiale

$$x(0) = \int_{-\infty}^0 f(s) e^{-as} ds.$$

Plutôt que (3.14), la solution particulière de l'équation (3.13) peut être écrite aussi

$$x(t) = e^{at} \int_{-\infty}^t f(s) e^{-as} ds.$$

Ainsi, d'une manière similaire on peut écrire

$$\begin{aligned}
|x(t + \tau) - x(t)| &= \left| e^{at} \int_{-\infty}^t (f(s + \tau) - f(s)) e^{-as} ds \right| \\
\int_{\alpha}^{\beta} |x(t + \tau) - x(t)| dt &\leq \int_{-\infty}^0 |e^{-as}| \left( \int_{\alpha}^{\beta} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds
\end{aligned}$$

Pour le cas équi-Weyl, on obtient pour  $\alpha = u$  et  $\beta = u + l$ ,

$$\begin{aligned}
& \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |x(t + \tau) - x(t)| dt \\
& \leq \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_{-\infty}^0 |e^{-as}| \left( \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds \\
& = \int_{-\infty}^0 |e^{-as}| \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) ds \\
& < \tilde{\epsilon} \int_{-\infty}^0 e^{-as} ds = \frac{\tilde{\epsilon}}{a} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui implique l'équi-Weyl-presque périodicité de la solution  $x$ .

Pour le cas Weyl, en utilisant la seconde estimation, on obtient

$$\begin{aligned}
& \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |x(t + \tau) - x(t)| dt \right) \\
& \leq \int_{-\infty}^0 |e^{-as}| \left( \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(s + t + \tau) - f(s + t)| dt \right) \right) ds \\
& < \tilde{\epsilon} \int_{-\infty}^0 e^{-as} ds = \frac{\tilde{\epsilon}}{a} = \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui implique la Weyl-presque périodicité de la solution  $x$ .

iii) Si  $a = 0$ , l'équation devient

$$x'(t) = f(t).$$

Pour  $t \in \mathbb{R}$  arbitraire, on obtient la solution

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) ds.$$

De la proposition 3.2.1., l'équi-Weyl-presque périodicité (ou la Weyl-presque périodicité, respectivement) de la solution  $x$ , proviennent donc de la bornitude de  $x$  et de l'équi-Weyl-presque périodicité (ou la Weyl-presque périodicité, respectivement) de  $f$ .

□

On considère maintenant le système

$$X' = AX + F(t), \tag{3.15}$$

où  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  et la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est mesurable et essentiellement bornée.

Observons que si une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) alors chacune de ses composantes est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement). L'implication inverse n'a pas besoin de tenir pour les fonctions Weyl-presque périodiques vectorielles, car les espaces de fonctions Weyl-presque périodiques ne semblent pas être linéaires. En fait, une somme de deux fonctions Weyl-presque périodiques peut ne pas être Weyl-presque périodique !

Afin de garantir au moins qu'une fonction dans la somme soit Weyl-presque périodique, il suffit de supposer sa  $W^p$ -continuité uniforme, comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 3.2.2.** (voir [R]) *La somme d'une fonction  $f_1$  Weyl-presque périodique et uniformément  $W^p$ -continue et d'une fonction  $f_2$  Weyl-presque périodique est Weyl-presque périodique.*

Comme les solutions de Carathéodory bornées d'équations différentielles sont comprises d'être localement absolument continues et donc, en raison de l'essentielle bornitude des non-homogénéités, elles deviennent uniformément continues. Par conséquent, elles seront également uniformément  $W^p$ -continues.

Dans ce qui suit,  $\tilde{W}^p$  désignera l'espace de toutes les fonctions Weyl-presque périodiques uniformément  $W^p$ -continues.

On réécrit le système (3.15) sous la forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

**Théorème 3.2.2.** *Si  $F$  est essentiellement bornée et équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) alors toute solution bornée  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (3.15) est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement).*

*Démonstration.* On suit les idées dans [C1], [De].

Pour la matrice  $A$ , il existe une matrice  $B$  telle qu'en posant  $Y = BX$ , on obtient

$$Y' = CY + G(t), \tag{3.16}$$

où  $C = BAB^{-1} = [I_{q_1}(\lambda_1), I_{q_2}(\lambda_2), \dots, I_{q_p}(\lambda_p)]$  est la matrice constante,  $\lambda_j, j = 1, \dots, p$ , sont les valeurs propres de la matrice  $A$  et  $G(t) = BF(t)$  est le vecteur de fonctions équi-Weyl-presque périodiques ou Weyl-presque périodiques. Les indices  $q_i$  satisfont l'égalité  $\sum_{i=1}^p q_i = n$  et  $I_{q_i}(\lambda_i)$  désigne la matrice de type  $q_i \times q_i$  de la forme

$$I_{q_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

En partant de l'équation scalaire de la dernière ligne du système différentiel (3.16), qui satisfait les hypothèses du théorème 3.2.1, on a sa solution équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement). En substituant cette solution à l'équation sur la ligne au dessus, on obtient à nouveau l'équation scalaire dont la non-homogénéité se compose d'une  $\tilde{W}^p$ -fonction (celle après la substitution) et une fonction Weyl-presque périodique ou deux fonctions équi-Weyl-presque périodiques, respectivement. Ainsi, (voir la proposition 3.2.2.), la même conclusion suit. En répétant cette procédure, on obtient une solution  $Y$  de (3.16) qui est équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) en chacune de ses composantes. Bien que, pour le vecteur de composantes équi-Weyl-presque périodiques, l'équi-Weyl-presque périodicité du vecteur se déduit tout de bon vu que, l'espace de fonctions équi-Weyl-presque périodiques est linéaire, pour le vecteur de composantes Weyl-presque périodiques, vu que les solutions sont uniformément  $W^p$ -continues, elles deviennent  $W^p$ -normales. Il s'en suit que, comme l'espace de fonctions  $W^p$ -normales est linéaire, on déduit la  $W^p$ -normalité du vecteur de solutions  $Y$ , qui implique forcément la Weyl-presque périodicité du même vecteur. En appliquant la transformation inverse et selon la proposition 3.2.2., il vient que  $X$  est la solution équi-Weyl-presque périodique (ou Weyl-presque périodique, respectivement) du système (3.15).

□

## CHAPITRE 4

### Notion de presque périodicité au sens de Besicovitch

Dans ce chapitre, nous présenterons les définitions originales et alternatives de la notion de presque périodicité au sens de A. S. Besicovitch. Des résultats de presque périodicité au sens généralisé de Besicovitch seront prouvés pour un système différentiel non-autonome.

#### 4.1 Définitions originales

Afin d'introduire les définitions originales de la notion de presque périodicité au sens de Besicovitch, on considère les espaces de Marcinkiewicz (voir [ABG], p. 153, [M])

$$\mathcal{M}^p(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}, \forall p \geq 1.$$

Pour le cas  $p = +\infty$ , on a

$$\mathcal{M}^\infty(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \|f\|_\infty = \|f\|_{\mathbf{L}^\infty} < +\infty \}.$$

$\mathcal{M}^p$ , muni de la semi-norme

$$\|f\|_{B^p} = \begin{cases} \limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}, & \text{si } p = +\infty \end{cases} \quad (4.1)$$

est un espace semi-normé.

**Théorème 4.1.1.** (voir [ABG], p. 153)  $\mathcal{M}^p$  est un espace topologique semi-normé complet.

Afin d'obtenir un espace normé, on considère le noyau de la semi-norme (4.1)

$$K_p = \{f \in \mathcal{M}^p : \|f\|_{B^p} = 0\}.$$

On considère ainsi la relation d'équivalence

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_{B^p} = 0; f, g \in \mathcal{M}^p, \quad (4.2)$$

et l'espace quotient

$$M^p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}^p / K_p,$$

et on note par  $\tilde{f}$ , l'élément appartenant à  $M^p$ , correspondant à la fonction  $f$ .

Comme  $\mathcal{M}^p$  est un espace semi-normé et  $K_p$  est un sous-espace, alors (4.1) représente une norme dans  $M^p$ . Ainsi, comme  $\mathcal{M}^p$  est complet, alors  $M^p$  est un espace de Banach.

On considère de plus, la classe (voir [ABG], p. 154)

$$\mathcal{W}^p = \left\{ f \in M^p : \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \text{ existe} \right\} \subset M^p,$$

qui est un espace non linéaire, vu qu'il n'est pas fermé par rapport à l'addition, comme le montre l'exemple 5.4 dans [ABG].

**Définition 4.1.1.** Nous notons par  $\mathbf{B}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , l'espace obtenu comme la fermeture dans  $M^p$  de l'espace de tous les polynômes trigonométriques  $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . Autrement, un élément de  $\mathbf{B}^p$  peut être représenté par une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telle que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $P_\epsilon \in \mathcal{P}$  tel que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t) - P_\epsilon(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

**Proposition 4.1.1.** (voir [ABG], p. 156)  $\mathbf{B}^p$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{W}^p$ .

Il vient que, comme  $\mathbf{B}^p$  est un sous-ensemble fermé de l'espace complet  $M^p$ , il est aussi complet.

Dans [ABI], ils ont introduit un autre espace comme la fermeture de l'espace  $\mathcal{P}$ .

**Définition 4.1.2.** Nous notons par  $\mathcal{B}^p$ , l'espace obtenu comme la fermeture abstraite de l'espace  $\mathcal{P}$  par rapport à la norme

$$\|P\|_{\mathcal{B}^p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |P(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}; P \in \mathcal{P}. \quad (4.3)$$

Par définition,  $\mathcal{B}^p$  est un espace de Banach et ses éléments sont les classes de suites de Cauchy de polynômes trigonométriques par rapport à la norme (4.3).

**Théorème 4.1.2.** (voir [ABG], p. 156-157)  $\mathbf{B}^p \equiv \mathcal{B}^p$ .

La définition 4.1.1. est obtenue comme une définition d'approximation. Il est possible de voir que cette définition est équivalente à une de type Bohr, à condition d'introduire une nouvelle propriété des ensembles numériques.

**Définition 4.1.3.** Un ensemble  $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$  est dit *satisfaisamment uniforme*, s'il existe un nombre  $l > 0$  sachant que le rapport  $r$  du nombre maximal d'éléments de  $\mathbf{X}$  compris dans un intervalle de longueur  $l$  au nombre minimal est inférieur à 2.

**Proposition 4.1.2.** (voir [ABG], p. 157) *Tout ensemble satisfaisamment uniforme est relativement dense. L'inverse est en général pas vrai, comme le montre l'exemple suivant.*

**Exemple 4.1.** (voir [ABG], p. 157) Bien que, l'ensemble  $\mathbb{Z}$  est relativement dense et satisfaisamment uniforme, l'ensemble  $\mathbb{Z} \cup \left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  est relativement dense, mais il n'est pas satisfaisamment uniforme.

**Définition 4.1.4.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite *Besicovitch-presque périodique* si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il correspond un ensemble  $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  ( $\tau_j < \tau_i$  si  $j < i$ ) satisfaisamment uniforme tel que, pour chaque  $i$ ,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \tau_i) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \quad (4.4)$$

et, pour tout  $c > 0$ ,

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{i=n} \frac{1}{c} \int_t^{t+c} |f(x + \tau_i) - f(x)|^p dx \right] dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \quad (4.5)$$

Notons  $\mathcal{B}_{pp}^p$ , l'espace de toutes les fonctions Besicovitch-presque périodiques.

**Théorème 4.1.3.** (voir [ABG], p. 158)  $\mathcal{B}_{pp}^p \equiv \mathbf{B}^p$ .

**Remarque 4.1.** La définition 4.1.4. est assez lourde, même sa forme simplifiée, obtenue en substituant les conditions (4.4) et (4.5) par la condition plus simple (voir [ABG], p. 158)

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{i=n} |f(t + \tau_i) - f(t)|^p \right] dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon. \quad (4.6)$$

## 4.2 Définitions alternatives

En raison de la difficulté des définitions originales, plusieurs auteurs ont étudié des définitions alternatives (et même simples) des espaces de Besicovitch, chacune d'elles basée sur le critère de Bohr ou celui de Bochner dans la norme de Besicovitch.

Pour ce, on a besoin d'introduire certaines définitions en termes de la norme (4.1).

**Définition 4.2.1.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite Doss-presque périodique si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il correspond un ensemble  $\{\tau\}_\epsilon$  relativement dense tel que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \tau) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon, \forall \tau \in \{\tau\}_\epsilon.$$

Un tel nombre  $\tau \in \{\tau\}_\epsilon$  est appelé une  $\epsilon$ - $B^p$  presque période de  $f$ .

Notons  $\mathbf{B}_{pp}^p$ , l'espace de toutes les fonctions Doss-presque périodiques.

**Définition 4.2.2.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite  $B^p$ -normale si, de toute suite  $\{h_i\}$  de nombres réels, on peut extraire une sous-suite  $\{h_{n_i}\}$  telle que la suite de fonctions  $\{f(\cdot + h_{n_i})\}$  soit  $B^p$ -convergente.

**Définition 4.2.3.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite  $B^p$ -continue si,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \tau) - f(t)|^p dt = 0.$$

Notons  $\mathbf{B}_c^p$ , l'espace de toutes les fonctions  $B^p$ -continues.

**Définition 4.2.4.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  est dite  $B^p$ -régulière si, pour tout  $l \in \mathbb{R}$ ,

$$\limsup_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2T} \int_{T-l}^T |f(t)|^p dt = 0. \quad (4.7)$$

Notons  $\mathbf{B}_r^p$ , l'espace de toutes les fonctions  $B^p$ -régulières.

**Remarque 4.2.**  $\mathbf{B}_c^p$  et  $\mathbf{B}_r^p$  sont des sous-espaces complets de  $\mathcal{M}^p$  (voir [ABG], p. 159).

R. Doss a étudié les conditions nécessaires et suffisantes pour garantir qu'une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  soit dans  $\mathbf{B}^p$  (voir [ABG], p. 160).

**Théorème 4.2.1.** Une fonction  $f \in \mathbf{L}_{loc}^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  appartient à  $\mathbf{B}^p$  si et seulement si,

- 1)  $f$  est  $B^p$ -bornée, i.e elle appartient à l'espace  $\mathcal{M}^p$ .
- 2)  $f$  est  $B^p$ -continue.
- 3)  $f$  est  $B^p$ -normale.
- 4) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \left| \frac{1}{l} \int_t^{t+l} f(x) e^{i\lambda x} dx - \frac{1}{l} \int_0^l f(x) e^{i\lambda x} dx \right| dt = 0.$$

**Remarque 4.3.** Il vient que, sous les conditions 1), 2) et 4), une fonction est  $B^p$ -normale si et seulement si elle est Doss-presque périodique.

Dans [B], J. P. Bertrandias a limité son analyse aux fonctions appartenant à l'espace  $\mathbf{B}_c^p$ , en montrant l'équivalence des différentes définitions.

**Définition 4.2.5.** Une fonction  $f \in \mathbf{B}_c^p$  est désormais dite  $\mathcal{M}^p$ -presque périodique si,  $\forall \epsilon > 0$ , il existe un ensemble  $\{\tau_\epsilon\}$  relativement dense tel que

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \tau) - f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \epsilon; \forall \tau \in \{\tau_\epsilon\}.$$

Notons  $\mathcal{M}_{pp}^p$ , l'espace de toutes les fonctions  $\mathcal{M}^p$ -presque périodiques.

**Définition 4.2.6.** Une fonction  $f \in \mathbf{B}_c^p$  est dite  $\mathcal{M}^p$ -normale si l'ensemble  $\{f^\tau\}$  de ses translatées est  $B^p$ -précompact.

**Théorème 4.2.2.** (voir [ABG], p. 161) *Les définitions 4.2.5. et 4.2.6. sont équivalentes.*

Afin de voir l'équivalence avec le troisième type de définition, on introduit les deux définitions suivantes.

**Définition 4.2.7.** *Une fonction  $B^p$ -bornée est dite  $B^p$ -constante si, pour tout nombre réel  $\tau$ ,*

$$\|f^\tau - f\|_{B^p} = 0.$$

**Définition 4.2.8.** *On considère la famille  $\{k_\lambda(x)\}$  de fonctions  $B^p$ -constantes. On appelle par un polynôme trigonométrique généralisé à coefficients  $B^p$ -constants, la fonction définie par*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R}^n} k_\lambda(x) e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

*Notons  $\mathbf{P}^p$ , la classe de tous les polynômes trigonométriques à coefficients  $B^p$ -constants.*

**Remarque 4.4.** La classe  $\mathbf{P}^p$  est un sous-espace linéaire de  $\mathbf{B}_c^p$ . Évidemment, l'espace  $\mathcal{P}$  est un sous-espace de  $\mathbf{P}^p$ .

**Théorème 4.2.3.** (voir [ABG], p. 161) *Une fonction  $f \in \mathbf{B}_c^p$  est  $\mathcal{M}_{pp}^p$  si et seulement si elle est la  $B^p$ -limite d'une suite de polynômes trigonométriques généralisés à coefficients  $B^p$ -constants. Autrement,  $\mathcal{M}_{pp}^p$  est la fermeture, par rapport à la norme de Besicovitch, de l'espace  $\mathbf{P}^p$ .*

Collectons ci-dessous certaines propriétés importantes.

### Propriétés.

1.  $\mathcal{M}_{pp}^p$  est un sous-espace complet de  $\mathbf{B}_c^p$ , comme de  $\mathbf{B}_r^p$ .
2.  $\mathbf{B}^p$  est un sous-espace complet de  $\mathcal{M}_{pp}^p$ .
3. La condition 4) du théorème 4.2.1. est la condition nécessaire et suffisante afin qu'une fonction  $\mathcal{M}_{pp}^p$  soit dans  $\mathbf{B}^p$ .
4. Toute fonction dans  $\mathbf{B}^p$  est  $B^p$ -normale. L'inverse n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.2.** Dans [ABG], p. 163, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0], \\ \sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } x \in ]n-2, n-1], n = 2, 4, 6, \dots \\ -\sqrt{\frac{n}{2}} & \text{si } x \in ]n-1, n], n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

est montrée être  $B^p$ -normale, mais pas dans  $\mathbf{B}^p$ .

5. Toute fonction  $B^p$ -normale appartient à  $\mathbf{B}_{pp}^p$ . L'inverse n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.3.** Dans [ABG], p. 165, la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

est montrée être dans  $\mathbf{B}_{pp}^p$ , mais pas  $B^p$ -normale.

6.  $\forall p \geq 1$ ,  $\mathbf{W}_{pp}^p \subseteq \mathbf{B}_{pp}^p$  et l'inclusion est stricte, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.4.** Dans [ABG], p. 172-173, la fonction ( $p \in \mathbb{R}, p > 1$  et  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ )

$$f(x) = \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}} & \text{si } n^2 \leq x < n^2 + \sqrt{n}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

est montrée être dans  $\mathbf{B}_{pp}^p$ , mais pas dans  $\mathbf{W}_{pp}^p$ .

G. Bruno et F. R. Grande ont prouvé un théorème de type Lusternik, très similaire au théorème correspondant au cas des fonctions uniformément presque périodiques.

**Théorème 4.2.4.** (voir [ABG], p. 163) *Soit  $\mathcal{F}$  une famille d'éléments de l'espace  $\mathbf{B}_{pp}^p$  fermée et bornée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

i).  $\mathcal{F}$  est compacte dans la norme  $B^p$ .

ii).  $\mathcal{F}$  est  $B^p$ -équi-continue, i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  tel que, si  $|h| < \delta$  alors,

$$D_{B^p}(f, f^h) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}$$

et  $B^p$ -équi-presque périodique, i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $l = l(\epsilon) > 0$  tel que tout intervalle de longueur  $l$  contient une commune  $\epsilon$ -presque période  $\xi$  pour toute  $f \in \mathcal{F}$ , i.e

$$D_{B^p}(f, f^\xi) < \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}.$$

### 4.3 Solutions presque périodiques au sens généralisé de Besicovitch des équations différentielles

Les conditions suffisantes pour l'existence de solutions presque périodiques au sens de Besicovitch pour les équations différentielles de type  $X' + AX = f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  où  $A$  est une matrice réelle et  $f$  est mesurable, essentiellement bornée et presque périodique au sens de Besicovitch ont été établit dans [R] par L. Radová et qui sont similaires à ceux présentés dans le chapitre précédent pour la classe Weyl. Toutefois, dans [ABL] se sont intéressé donc, à établir les conditions suffisantes pour l'existence de solutions presque périodiques au sens généralisé de Besicovitch pour les systèmes de Carathéodory

$$X' + AX = f(t, X), \tag{4.8}$$

où  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et dont les solutions  $X(t)$  sont comprises au sens de C. Carathéodory, à savoir  $\mathbf{AC}_{loc}(\mathbb{R})$  satisfaisant (4.8).

Dans le but de voir le résultat de presque périodicité pour les équations différentielles dites de C. Carathéodory, introduisons la définition de presque périodicité au sens généralisé de Besicovitch pour les fonctions de Carathéodory.

**Définition 4.3.1.** *Une fonction de Carathéodory  $f(t, X)$  (i.e mesurable en  $t$ , pour toute  $X \in \mathbb{R}^n$ , et continue en  $X$ , pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ ) est dite presque périodique en  $t$  au sens généralisé de Besicovitch, uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^n$ , si pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $D > 0$ , il existe un nombre positif  $k = k(\epsilon, D)$  tel que, dans chaque intervalle de longueur  $k$ , il existe au moins un nombre  $\tau$  vérifiant (pour  $|X| \leq D$ )*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t + \tau, X) - f(t, X)| dt < \epsilon. \tag{4.9}$$

**Théorème 4.3.1.** *Si les hypothèses suivantes sont satisfaites.*

- i) *A est une  $n \times n$ -matrice constante hyperbolique.*
- ii) *La fonction de Carathéodory  $f(t, X) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est essentiellement bornée en  $t$  et Lipschitzienne-continue en  $X$ , pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ , avec une constante  $L < \frac{\lambda}{2k}$ , où les constantes  $\lambda$  et  $k$  sont spécifiées ci-dessous.*
- iii)  *$f(t, X)$  est presque périodique en  $t$  au sens généralisé de Besicovitch, uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^n$ .*

*Alors, (4.8) admet une solution presque périodique au sens généralisé de Besicovitch.*

*Démonstration.* Il découle des investigations menées dans [A] que les conditions i) et ii) représentent les hypothèses impliquant l'existence d'une solution entièrement bornée  $X(t)$  de l'équation (4.8). Cette solution prend la forme

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s, X(s)) ds, \quad (4.10)$$

où la fonction de Green  $G(t, s)$  satisfait respectivement pour  $t \geq s$  et pour  $t \leq s$ ,

$$|G(t, s)| \leq ke^{-\lambda(t-s)}, t \geq s; |G(t, s)| \leq ke^{-\lambda(s-t)}, t \leq s.$$

Par hypothèses, pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $D > 0$ , il existe un nombre positif  $k = k(\epsilon, D)$  tel que, dans chaque intervalle de longueur  $k$ , il existe au moins un nombre  $\tau$  satisfaisant (4.9), pour  $|X| \leq D$ . Comme pour  $X(t)$  qui prend la forme (4.10), on a aussi

$$X(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t + \tau, s) f(s, X(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s + \tau, X(s + \tau)) ds.$$

On peut explorer

$$\int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt,$$

pour prouver la presque périodicité de  $X(t)$  dans la métrique de Besicovitch utilisée dans (4.9). Par conséquent, en appliquant (bien après plusieurs étapes) le fameux théorème de Fubini et en utilisant la norme  $\|\cdot\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\cdot|$  et des normes vectorielles et matricielles compatibles, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^T |X(t+\tau) - X(t)| dt &= \int_{-T}^T \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) [f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))] ds \right| dt \\
&\leq \int_{-T}^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t,s)| |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds \right] dt \\
&\leq \int_{-T}^T \left[ \int_{-\infty}^t k e^{-\lambda(t-s)} |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_t^{+\infty} k e^{\lambda(t-s)} |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds \right] dt \\
&= k \int_{-\infty}^{-T} \left( |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| \int_{-T}^T e^{-\lambda(t-s)} ds \right) dt + \\
&\quad + k \int_{-T}^T \left( |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| \int_s^T e^{-\lambda(t-s)} ds \right) dt + \\
&\quad + k \int_{-T}^T \left( |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| \int_{-T}^s e^{\lambda(t-s)} ds \right) dt + \\
&\quad + k \int_T^{+\infty} \left( |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| \int_{-T}^T e^{\lambda(t-s)} ds \right) dt \\
&= \frac{k}{\lambda} (e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}) \int_{-\infty}^T e^{\lambda s} |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds + \\
&\quad + \frac{k}{\lambda} \int_{-T}^T (1 - e^{-\lambda(T-s)}) |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds + \\
&\quad + \frac{k}{\lambda} \int_{-T}^T (1 - e^{-\lambda(T+s)}) |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds + \\
&\quad + \frac{k}{\lambda} (e^{\lambda T} - e^{-\lambda T}) \int_T^{+\infty} e^{-\lambda s} |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds \\
&\leq \frac{2k}{\lambda} \int_{-T}^T |f(s+\tau, X(s+\tau)) - f(s, X(s))| ds + \\
&\quad + \frac{2k}{\lambda^2} \|f(t+\tau, X(t+\tau)) - f(t, X(t))\|.
\end{aligned}$$

Comme  $X(t)$  est bornée et par conséquent  $\|f(t, X(t))\| < \infty$ , le dernier terme disparaît dans la métrique de Besicovitch utilisée dans (4.9). Donc, en outre, on obtient au moyen de (4.9) et la propriété de Lipschitz que,

$$\begin{aligned}
& \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right] \\
& \leq \frac{2k}{\lambda} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |f(t + \tau, X(t + \tau)) - f(t, X(t))| dt \right] \\
& \leq \frac{2k}{\lambda} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |f(t + \tau, X(t + \tau)) - f(t, X(t)) + |f(t + \tau, X(t)) - f(t, X(t))| dt \right] \\
& < \frac{2\epsilon k}{\lambda} + 2L \frac{k}{\lambda} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right],
\end{aligned}$$

où  $L$  est suffisamment petit.

On est donc arrivé à

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right] \leq \frac{2\epsilon k}{\lambda} + 2L \frac{k}{\lambda} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right].$$

Autrement,

$$\left( 1 - \frac{2Lk}{\lambda} \right) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right] \leq \frac{2\epsilon k}{\lambda}.$$

Après tout, on arrive à

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[ \int_{-T}^T |X(t + \tau) - X(t)| dt \right] < \frac{2\epsilon k}{\lambda - 2Lk},$$

pour autant que  $L < \frac{\lambda}{2k}$ , qui déjà vérifie la presque périodicité désirée de  $X(t)$ .

□

Dans le cadre de notre étude de l'article [ABL], nous nous sommes intéressés à certains problèmes de presque périodicité dans diverses métriques.

Le tout premier problème qui se posa concernait l'hierarchie des espaces de fonctions presque périodiques. Cela nous a conduit immédiatement à examiner les trois types de définitions de fonctions presque périodiques dans diverses métriques. Pour pouvoir répondre à ce problème, nous étions basés sur l'oeuvre de J. Andres, A. M. Bersani et R. F. Grande [ABL], où ils ont clarifié l'hierarchie désirée. Entre outre, ils ont vu que, bien que pour les espaces  $\mathbf{C}_{pp}$  et  $\mathbf{S}_{pp}^p$ , les trois types de définitions sont équivalentes, pour les espaces restants  $e - \mathbf{W}_{pp}^p$ ,  $\mathbf{W}_{pp}^p$  et  $\mathbf{B}_{pp}^p$ , l'équivalence ne tient plus.

Le second problème portait sur l'approche du problème de presque périodicité comme un problème du point fixe pour les équations différentielles. Cette approche inhabituelle était basée sur le principe de contraction de Banach et, le théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov. Sous une entrée Stepanov-presque périodique, les solutions presque périodiques (montrées tout de bon être non-purement Stepanov-presque périodiques mais, améliorément uniformément presque périodiques) devaient correspondre aux points fixes des opérateurs associés dans des espaces fonctionnels appropriés.

Le troisième problème relevait de la non-complétude des espaces de fonctions Weyl-presque périodiques par rapport à la norme de Weyl. En fait, en raison de la complétude des espaces de fonctions presque périodiques au sens de Bohr et Stepanov, il était possible d'exprimer le critère de Bochner en termes de compacité au lieu de la précompacité. De ce fait, on voulait examiner le critère de Bochner en termes de précompacité pour les fonctions Weyl-presque périodiques, en omettant le problème de complétude; qui était

certainement, une condition moins forte que la compacité stricte. Et d'ici, on avait pu voir que, sous l'hypothèse d'uniforme continuité par rapport à la métrique de Weyl, les espaces de fonctions  $W^p$ -normales et de fonctions Weyl-presque périodiques étaient devenus équivalents.

Le tout dernier problème était relatif à l'existence de solutions presque périodiques au sens généralisé de Besicovitch des systèmes différentiels de Carathéodory

$$X' + AX = f(t, X), \text{ où } f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

dont les solutions étaient comprises au sens de Carathéodory ; où on avait montré que, sous des hypothèses imposées sur la matrice  $A$  et la fonction de Carathéodory  $f(t, X)$  respectivement ; à savoir, l'hyperbolicité de la matrice  $A$ , la bornitude essentielle en  $t$ , la Lipschitzianité-continuité en  $X$ , pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$  avec une constante  $L < \frac{\lambda}{2k}$  et, la presque périodicité au sens généralisé de Besicovitch uniformément par rapport à  $X \in \mathbb{R}^n$  de la fonction  $f(t, X)$ , le système de Carathéodory admettait une solution presque périodique au sens généralisé de Besicovitch.

## A.1 Compacité, relative compacité et précompacité

**Définition A.1.1.** *On dit qu'une partie  $C$  d'un espace métrique  $(\mathbf{E}, d)$  est compacte si de tout recouvrement ouvert par des boules (pas forcément de même rayon), on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement, si de toute suite d'éléments de  $C$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $C$ .*

**Définition A.1.2.** *On dit qu'une partie  $C$  d'un espace métrique  $(\mathbf{E}, d)$  est relativement compacte si  $\overline{C}$  est compacte. Autrement, si et seulement si de toute suite d'éléments de  $C$ , on peut extraire une sous-suite convergente dans  $\mathbf{E}$ .*

**Définition A.1.3.** *On dit qu'une partie  $C$  d'un espace métrique  $(\mathbf{E}, d)$  est précompacte si pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut recouvrir  $C$  par un nombre fini de boules de rayon  $\epsilon$ . Autrement, si de toute suite d'éléments de  $C$ , on peut extraire une sous-suite de Cauchy dans  $C$ .*

La notion de précompacité est donc plus faible que celle de compacité. Toutefois, elles coïncident dans un espace métrique complet.

## A.2 Espaces de Fréchet

**Définition A.2.1.** *Un espace vectoriel topologique réel est dit de Fréchet si'il est à la fois ; localement convexe, métrisable et complet au sens des espaces uniformes.*

## A.3 Théorèmes du point fixe

Dans les deux théorèmes du point fixe suivants, les conditions géométriques sur l'espace et/ou les applications jouent un rôle crucial. Tout de bon, ils sont valables dans le cadre au moins d'un espace métrique, habituellement d'un espace de Banach.

### A.3.1 Principe de contraction de Banach

**Théorème A.3.1.** *Soit  $(\mathbf{E}, d)$  un espace métrique complet.*

*Si l'application  $T : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$  est contractante de rapport  $k < 1$ , alors  $T$  admet un unique point fixe  $x \in \mathbf{E}$  vérifiant  $T(x) = x$ .*

### A.3.2 Théorème du point fixe de Schauder-Tikhonov

**Théorème A.3.2.** *Soit  $(\mathbf{E}, d)$  un espace métrique.*

*Considérons  $C \subset \mathbf{E}$  un convexe fermé non vide et  $T : C \rightarrow C$  une application continue telle que  $\overline{T(C)}$  est compacte dans  $\mathbf{E}$ . Alors  $T$  admet un point fixe  $x \in \mathbf{E}$  vérifiant  $T(x) = x$ .*

## ANNEXE B

### Équations différentielles au sens de Carathéodory

On considère  $X(\cdot)$  et  $f(\cdot, X)$  des fonctions vectorielles telles que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, X) &\mapsto f(t, X), \end{aligned}$$

satisfait les conditions dites de Carathéodory

- i)  $f(t, X)$  mesurable en  $t$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ .
- ii)  $f(t, X)$  continue en  $X$ , pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Alors, l'équation différentielle

$$X' + AX = f(t, X),$$

est dite de Carathéodory où,  $X(\cdot)$  est un vecteur et  $f(\cdot, X)$  satisfait les conditions i) et ii).

$X(\cdot)$  est solution de l'équation différentielle de Carathéodory si elle est localement absolument continue et satisfait pour  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$X(t_0) = X_0 + \int_0^{t_0} f(s, X(s)) ds.$$

Si de plus,  $f(\cdot, X)$  est lipschitzienne alors, la solution  $X(\cdot)$  est unique.

- [A] Andres, J. : Almost-periodic and bounded solutions of Carathéodory differential inclusions, *Differential Integral Equations* **12**(6)(1999), 887-912.
- [ABG] Andres, J., Bersani, A. M., Grande, R. F. : *Hierarchy of almost-periodic function spaces*. Rendiconti Mat. Appl. Ser. VII, 26, 2 (2006), 121-188.
- [ABI] Avantaggiati, A., Bruno, G. and Iannaci, R. : Classical and new results on Besicovitch spaces of almost-periodic functions and their duals. Quaderni del Dipart. Me. Mo. Mat., La Sapienza - Roma, 1993, 1-50.
- [ABL] Andres, J., Bersani, A. M., Lesniak, K. : *On some almost-periodicity problems in various metrics*, Acta Appl. Math., **65** (2001), 35-57.
- [AK] Andres, J. and Krajc, B. : Unified approach to bounded, periodic and almost-periodic solutions of differential systems, *Anal. Math. Silesianae***11**(1997), 39-53.
- [AP] Amerio, L. and Prouse, G. : *Almost-Periodic Functions and Functional Equations*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1971.
- [B] Bertrandias, J.-P. : *Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotiques d'ordre  $p$* , Bull. Soc. Math. France, Mémoire, **5**(1966), 1-106.
- [Bes] Besicovitch, A. S. : *Almost-Periodic Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932; reprinted : Dover, New York, 1954.
- [Bes1] Besicovitch, A. S. : *Analysis of conditions of almost-periodicity*, Acta Math., **58**(1932), 217-230.
- [Boc] Bochner, S. : Abstrakte fastperiodische funktionen, *Acta Math.***61**(1) : 149-184, 1933.
- [BB] Besicovitch, A. S. and Bohr, H. : *Almost-periodicity and general trigonometric series*, Acta Math., **57**(1931), 203-292.

- [BF] Bohr, H. and Foelner, E. : On some types of functional spaces. A contribution to the theory of almost-periodic functions, *Acta Math.* **76**(1945), 31-155.
- [C1] Corduneanu, C. : *Almost-Periodic Functions*, Wiley, New York, 1968, reprinted : Chelsea, New York, 1989.
- [C2] Corduneanu, C. : Two qualitative inequalities, *Differential Equations* **64**(1986), 16-25.
- [C3] Corduneanu, C. : Almost-periodic solutions to differential equations in abstract spaces, *Rev.Roumaine Math. Pures Appl.***42** (9-10)(1997), 756-758.
- [D] Danilov, L. I. : Measure-valued almost-periodic functions and almost-periodic selections of multivalued maps, *Mat. Sb.* **188**(10) (1997), 3-24 (Russian); *Sbornik : Mathematics***188**(10)(1997), 1417-1438.
- [De] Demidovitch, B. P. : *Lectures on the Mathematical Stability Theory*, Nauka, Moscow, 1967 (Russian).
- [Dss] Doss, R. : *On generalized almost-periodic functions*, *Annals of Math.*, **59** n.3 (1954), 477-489.
- [Dss1] Doss, R. : *On generalized almost-periodic functions II*, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 133-140.
- [F] Fink, A. M. : *Almost Periodic Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [GKL] Guter, R. S., Kudryavstev, L. D. and Levitan, B. M. : *Elements of the Theory of Functions*, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [K] Kovanko, A. S. : Sur la compacité des systèmes de fonctions presque périodiques généralisées de H. Weyl, *Comp. Rend. (Doklady) Accad. Sci. URSS* **43**(7) (1944), 275-276 (French translation from the Russian original).
- [K1] Kovanko, A. S. : *On convergence of sequences of functions in the sense of Weyl's metric  $D_{\mathbf{W}_\omega}$* , *Ukrainian Math. J.*, **3** (1951), 465-476 (in Russian).
- [K2] Kovanko, A. S. : *On compactness of systems of generalized almost-periodic functions of Weyl*, *Ukrainian Math. J.*, **5** n.2 (1953), 185-195 (in Russian).
- [L] Levitan, B. M. : *Almost-Periodic Functions*, GIT-TL, Moscow, 1953 (Russian).
- [LZ] Levitan, B. M. and Zhirkov, V. V. : *Almost-Periodic Functions and Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
- [M] Marcinkiewicz, J. : *Une remarque sur les espaces de M. Besicowitch*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **208** (1939), 57-159.
- [P] Pankov, A. A. : *Bounded and Almost-Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.

- [R] Radová, L. : *Theorems of Bohr-Neugebauer-type for almost-periodic differential equations*, *Mathematica Slovaca*, Vol. 54 (2004), No. 2, 191-207.
- [S] Stoinski, S. : On compactness in variation of almost-periodic functions, *Demonstr. Math.* **31**(1)(1998), 131-134.
- [Str] Stryja, J. : *Analysis of Almost-Periodic Functions*, Mgr. Thesis, Palacky University, Olomouc, 2001 (in Czech).
- [Z] Zaidman, S. : An existence result for Stepanoff almost-periodic differential equations. *Canad. Math. Bull.*, **14**(1), 1971.
- [ZL] Zhirkov, V. V. and Levitan, B. M. : *The Favard theory*, *Uspekhi Mat. Nauk* **32**(2) (1977), 123-171 (Russian).