

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE**



UNIVERSITE MOULOU D MAMMARI TIZI-OUZOU

**FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE**

MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Automatique

Option : Automatique des Systèmes Continus et Productique

Présenté par :

M^{elle} BOUSSALEM Chahira

Thème :

***Implémentation de régulateurs fractionnaires
pour la stabilisation d'un pendule inversé***

Le jury d'examen composé de:

**Mr. DJENNOUNE Said
Mr. MANSOURI Rachid
Mr. MAIDI Ahmed
Mr. MELLAH Rabah
Mr. SI-AMMOUR Amar**

**Professeur à l'UMMTO
M.C, classe A à l'UMMTO
M.C. classe A à l'UMMTO
M.C, classe A à l'UMMTO
M.C. classe B à l'UMMTO**

**Président
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur**

Année : 2012

Avant-propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) de l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou (UMMTO).

Je tiens tout d'abord à exprimer mes sincères remerciements à mon promoteur M^r. MANSOURI Rachid, Maître de conférences classe A à l'UMMTO pour la confiance qu'il m'a accordé, sa disponibilité, ses conseils et son aide assez précieuse, tout au long de ma thèse.

Je remercie M^r. DJENNOUNE Said, professeur à l'UMMTO, d'abord pour les conseils qu'il m'a prodigué et d'avoir accepté d'examiner ce travail et de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Mes vifs remerciements vont également à Mr. MELLAH Rabah, Maître de conférences classe A à l'UMMTO, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour avoir accepté de participer au jury de soutenance.

Je remercie très vivement M^r. MAIDI Ahmed, Maître de conférences classe A à l'UMMTO et M^r. SI-AMMOUR Amar, Maître de conférences classe B à l'UMMTO, qui ont accepté d'être membres du jury de soutenance.

Un grand merci à M^{elle} HAMDOUS Ouiza, M^r. TRIKI Ahcène, M^r. HAMMOUCHE Sofiane et M^r. LAHOUAZI Ferhet, pour leur aide et leur précieux soutien.

Enfin, je remercie toute ma famille, et tous mes amis, qui de près ou de loin m'ont supportée, soutenue et encouragée tout au long de ces années.

Introduction générale01

Chapitre 1 : modélisation du pendule inversé

Introduction. 04

1.1 Présentation du pendule inversé04

 1.1.1 Description du banc d'essais. 04

 1.1.2 Dispositif de contrôle et de commande. 05

1.2 Modélisation de l'ensemble chariot_pendule06

 1.2.1 Energie cinétique du système en mouvement 07

 1.2.2 Energie potentielle du système. 08

1.3 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit.09

1.4 Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule13

 1.4.1 Expression de la force F en fonction de la tension d'alimentation du moteur V_c .13

 1.4.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot –pendule.13

 1.4.3 Modèle sous Matlab Simulink et résultats de simulation 15

1.5 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta=0$)18

Conclusion 21

Chapitre 2 : Redressement du pendule inversé par des commandes non linéaires

Introduction23

2.1 Notions sur la stabilité du Lyapunov.23

 2.1.1 Méthode directe de Lyapunov.24

 2.1.2 Théorème d'invariance de LaSalle.26

 2.1.3 Quelques propriétés d'énergie27

2.2 Redressement du pendule inversé30

 2.2.1 Première méthode : Redressement du pendule inversé avec une limitation de la longueur du rail du chariot30

 2.2.1.1 Transformation d'état reliant la tension d'alimentation du moteur à l'accélération du chariot33

 2.2.1.2 Résultats de simulation et expérimentaux. 33

 2.2.1.3 Interprétation des résultats. 36

 2.2.2 Deuxième méthode 37

 2.2.2.1 Résultats de simulation et expérimentaux. 39

 2.2.2.2 Implémentation de la commande de redressement. 40

 2.2.2.3 Interprétation des résultats 42

Conclusion42

Chapitre 3 : Stabilisation du pendule inversé par retour d'état entier

Introduction43

3.1 Stabilisation du pendule par retour d'état.43

3.1.1 Commande linéaire quadratique (LQR).43

3.1.1.1 Choix des matrices de pondération.44

3.1.1.2 Application pour la stabilisation du pendule inversé45

3.1.1.3 Résultat de simulation.47

3.1.1.4 Implémentation de la commande LQR49

3.1.1.5 Interprétation des résultats expérimentaux.51

3.1.2 Commande par retour d'état proportionnel intégral par placement de pôles.52

3.1.2.1 Transformation du modèle sous la forme canonique commandable54

3.1.2.2 Algorithme de calcul par retour d'état proportionnel intégral par placement de pôle57

3.1.2.3 Application pour la stabilisation du pendule inversé57

3.1.2.4 Résultat de simulation.59

3.1.2.5 Implémentation de la commande par retour d'état PI61

3.1.2.6 Interprétation des résultats expérimentaux.63

Conclusion64

Chapitre 4 : Stabilisation du pendule inversé par retour d'état PI fractionnaire

Introduction65

4.1 Systèmes fractionnaires65

4.2 Dérivateur généralisé.66

4.3 Calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier.66

4.4 Stabilité des systèmes non entiers70

4.5 Approximation du dérivateur généralisé.71

4.6 Commande par retour d'état proportionnel et intégral d'ordre fractionnaire par placement de pôles.75

4.6.1 Première méthode75

4.6.2 Deuxième méthode80

4.7 Application pour la stabilisation du pendule inversé.82

4.7.1 Première méthode $\alpha = \frac{1}{2}$ 82

4.7.1.1 Résultat de simulation.84

4.7.1.2 Implémentation de la première méthode de commande par retour d'état PI d'ordre non entier85

4.7.2	Deuxième méthode	87
4.7.2.1	Résultat de simulation	88
4.7.2.2	Implémentation de la deuxième méthode de commande par retour d'état PI d'ordre non entier	90
4.7.2.3	Interprétation des résultats expérimentaux.	93
	Conclusion..	93
	Conclusion générale	94

m :	masse du pendule,
b :	coefficient de frottement des roues du chariot,
M :	masse du chariot,
$x(t)$:	position du chariot,
l :	demi-longueur du pendule,
$\theta(t)$:	angle de rotation du pendule,
$F(t)$:	force exercé sur le chariot,
g :	intensité de la pesanteur,
d :	coefficient de frottement de rotation du pendule.
E_c :	énergie cinétique du système
E_p :	énergie potentielle du système
E_{cM} :	énergie cinétique du chariot
E_{cm} :	énergie cinétique du pendule
L :	Lagrangien du système
v_c :	vitesse de centre de gravité du pendule
$w = \dot{\theta}$:	vitesse angulaire du pendule
r_c :	position du centre de gravité du pendule
\hat{i}, \hat{j} :	vecteurs unitaires du repère x, y
ξ :	degré de liberté
D_f :	énergie dissipée par frottement,
R_a :	résistance de l'induit
L_a :	inductance de l'induit
V_c :	tension d'alimentation de l'induit du moteur ,
$i_a(t)$:	intensité du courant
K_b :	constante électrique du moteur,
K_m :	constante mécanique ,
Φ :	position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie
r :	rayon de la poulie
$\ell(t)$:	fcem,
J_m :	moment d'inertie
$C_r(t)$:	couple résistant,
$C_m(t)$:	couple moteur,
f_m :	coefficient de frottement visqueux,
Ω_m :	vitesse angulaire de l'arbre de moteur,
Z :	vecteur d'état,
A :	matrice d'état du système,
B :	matrice de commande,
C :	matrice de sortie,

Γ :	fonction continue
x_e :	point d'équilibre
\mathcal{D} :	voisinage de l'origine,
$V(z)$:	fonction de Lyapunov
M_d :	ensemble invariant
σ :	ensemble d'annulation de la dérivée de la fonction de Lyapunov
E_m :	energie mécanique du pendule
$\lambda, \Psi > 0$:	deux paramètres de conception.
\mathfrak{S} :	fonction quadratique
$Q(t) \geq 0$:	matrice de pondération
$R > 0$:	matrice de pondération de commande
$\rho(t)$:	solution de l'équation de Riccati.
$T_c (n \times n)$:	matrice de transformation.
$\xi(t) (n \times 1)$:	vecteur de transformation d'état
K :	matrice de gain
$\Delta(s)$:	polynôme caractéristique
$\Delta_d(s)$:	polynôme caractéristique désiré
K_p :	matrice de gain proportionnel
K_I :	matrice de gain intégral
$A_c, B_c,$ et C_c	matrices de commandabilité dans la nouvelle base.
w_c :	matrice de commandabilité du système
k_{p_c} :	matrice de gain proportionnel dans la nouvelle base
k_{i_c} :	matrice de gain intégral dans la nouvelle base
n :	ordre du système
α, β_j :	ordres non entier
D^α :	opérateur de dérivation d'ordre α .
τ :	constante de temps de différentiation,
$\Delta_{ne}(s)$:	polynôme d'ordre non entier
$\Delta_f(s)$:	polynôme fractionnaire
p_i :	racine du polynôme entier $\Delta(p)$
$\arg(p_i)$:	argument de la racine p_i
ω_u :	fréquence au gain unité
ω_{z_k} :	zéro de rang k
ω_{p_k} :	pôle de rang k ,
N :	nombre de cellules nécessaires
δ et η	facteurs récurrents
$D_N(s)$:	dérivateur généralisé idéal
I_α :	opérateur d'intégration fractionnaire.

Introduction générale

Le concept de la dérivation et intégration d'ordre non entier, également appelés la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation des fonctions de dérivation et d'intégration usuelles à un ordre quelconque. Longtemps considéré comme une curiosité mathématique, il n'est devenu populaire que durant ces trois dernières décennies. L'intérêt pratique et théorique de ce nouveau concept est maintenant bien établi puisqu'il est utilisé dans de nombreux domaines de la science et de la technologie. Du point de vue théorique, beaucoup de points restent encore ouverts en particulier les outils mathématiques permettant la manipulation du calcul fractionnaire. Du point du vue application, l'ordre de dérivation introduit par ce concept constitue un degré de liberté supplémentaire permettant une modélisation plus exacte de beaucoup de phénomènes physiques tels que les phénomènes de diffusion, ou encore l'amélioration des méthodes classiques utilisant la dérivation entière notamment dans le domaine de la commande des systèmes. Dans ce dernier, l'objectif est de déterminer le régulateur qui assure au procédé à réguler les performances fixées par le concepteur, conformément à un compromis entre ses exigences et les limites physiques du procédé [29]. Actuellement, des travaux concernant l'implémentation pratique des contrôleurs fractionnaires pour la commande des systèmes réels commencent à être publiés [13-15], c'est dans ce cadre que s'inscrit le premier objectif du travail développé dans ce mémoire. Celui-ci consiste à stabiliser le pendule inversé.

Le pendule inversé a fait l'objet d'une grande discussion tout au long de ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que le problème de la commande du pendule inversé est fondamentalement le même que ceux impliqués dans plusieurs autres systèmes tels que le lancement des fusées, la propulsion des missiles et la stabilisation des satellites [25]. Le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de commande, car il possède plusieurs caractéristiques attrayantes : c'est un système non linéaire, couplé, intrinsèquement instable et il possède plusieurs implications pratiques [27].

L'objectif principal de cette étude est l'implémentation de dérivateurs fractionnaires (PI^α) pour la stabilisation d'un pendule inversé. Dans un premier temps il s'agit de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état proportionnel intégral. Dans une seconde étape, il s'agit de remplacer les fonctions de transfert irrationnelles de dimension infinie de ce régulateur fractionnaire par des fonctions de transferts rationnelles de dimension finie. Après avoir effectué des tests de simulation sous Matlab-Simulink, ces régulateurs seront ensuite

implémentés sur un banc d'essai expérimental, celui-ci consiste en la stabilisation d'un pendule inversé. La commande du pendule inversé consiste en deux phases : redressement et stabilisation.

Le redressement du pendule inversé permet de ramener le pendule de sa position basse * vers sa position haute. Deux méthodes basées sur la quantité d'énergie du système ont été présentées. La première consiste à choisir une fonction de Lyapunov qui est définie comme étant la somme des carrés de l'énergie mécanique du pendule et la vitesse du chariot. Cette fonction contient deux paramètres de conception, en ajustant ces derniers, on peut effectuer le redressement du pendule. La deuxième méthode consiste à choisir une fonction de Lyapunov définie comme étant la différence entre l'énergie mécanique du pendule et l'énergie mécanique désirée. L'évolution de la quantité d'énergie est effectuée par un gain.

Afin de maintenir le pendule à sa position haute, une loi de commande par retour d'état proportionnel et intégral d'ordre non entier a été considérée. Cette commande nécessite la linéarisation du système autour d'un point d'équilibre. Comme dans le cas entier, le principe de la commande par retour d'état linéaire est de déterminer une commande telle que les pôles du système de la fonction de transfert du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfassent des performances de précision, de rapidité, de stabilité etc. La synthèse des paramètres des matrices de gains proportionnel et intégral d'ordre non entier est effectuée par deux méthodes en utilisant la technique de placement de pôles. Le choix des pôles de la première méthode dépend de l'ordre non entier α , par contre il est indépendant de l'ordre non entier α pour la deuxième méthode. D'une manière générale les pôles doivent être réels ou complexes conjugués deux à deux et doivent vérifier la condition de stabilité de Matignon [25] particulièrement pour la première méthode. La simulation du régulateur fractionnaire calculé a été effectuée à partir de la méthode d'Oustaloup [30] qui approxime l'opérateur de dérivation d'ordre non entier par un transfert d'ordre entier dans une bande de fréquences donnée. Afin de montrer l'efficacité des lois de commandes par retour d'état d'ordre entier et non entier dans le domaine pratique, une implémentation sur un banc d'essai a été effectuée pour maintenir la stabilité du pendule inversé dans la position verticale.

Le présent mémoire est organisé en quatre chapitres qui sont résumés comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la description du banc d'essai de pendule inversé ainsi que le dispositif de commande, sa modélisation est aussi abordée. Les modèles ainsi obtenus sont utilisés pour permettre la simulation du système.

Dans le deuxième chapitre, après un rappel sur des notions fondamentales de la stabilité de Lyapunov, ainsi que le théorème d'invariance de LaSalle [7, 27], deux méthodes de commande de redressement du pendule inversé ont été présentées.

Dans le troisième chapitre, nous présentons deux méthodes de synthèse de loi de commande par retour d'état d'ordre entier: LQR (commande linéaire quadratique) [3] et retour d'état proportionnel intégral. Un problème majeur pour la synthèse de la commande LQR réside dans le choix des matrices de pondération permettant d'atteindre les spécifications désirées. Les étapes de calcul des matrices de contre-réaction d'état PI entier sont celles présentées [1-2].

Le dernier chapitre commence par définir un système fractionnaire, et développe ensuite la méthode de calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier et définir la condition de stabilité du système d'ordre commensurable. L'approximation de dérivateur généralisé par la méthode d'Oustaloup sera également présentée. Enfin, le chapitre présente deux méthodes pour le calcul des paramètres des matrices de gain de régulateur proportionnel et intégral d'ordre fractionnaire et son application pour la stabilisation du pendule inversé. Cette partie constitue l'originalité de ce mémoire.

A la fin de la synthèse de chaque type de commande, nous présenterons les résultats de simulation suivis des résultats expérimentaux du système commandé afin de valider et de mettre en évidence les performances des méthodes utilisées.

Chapitre

1

*Modélisation du pendule
inversé.*

Introduction

Quel que soit l'objectif fixé : concevoir, simuler ou commander un système mécanique, il est nécessaire, entre autres, de disposer de modèles du mécanisme. On s'intéresse dans ce 1^{er} chapitre à la modélisation du pendule inversé que nous utiliserons pour illustrer les commandes que nous développerons dans ce mémoire. Ce pendule est celui disponible au laboratoire de conception et conduite des systèmes de production (L2CSP). Il est constitué d'un chariot mobile sur un rail et d'un pendule suspendu sur le chariot. Son principe de fonctionnement est très simple en théorie : Après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre basse à la position verticale haute, il faut le maintenir dans cette position. Pour cela, quand le pendule penche vers la droite, le chariot doit le rattraper en effectuant un mouvement vers la droite, et inversement. Ce système présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes types, il s'agit d'un système SIMO (Single Input Multiple Output), instable décrit par un modèle non linéaire.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord aborder la présentation du banc d'essais du pendule inversé ainsi que le dispositif de contrôle et de commande. Puis, à partir du formalisme d'Euler-Lagrange nous développons son modèle dynamique non linéaire qui pose un problème d'instabilité au point d'équilibre instable $\theta = 0$. Nous développons aussi le modèle du moteur à courant continu. Nous terminons par la linéarisation du modèle du pendule inversé associé au moteur autour du point d'équilibre instable. Des courbes de simulation seront également présentées afin de valider tous les modèles obtenus.

1.1 Présentation du pendule inversé

1.1.1 Description du banc d'essais

Le but de la commande du pendule inversé est de maintenir en équilibre vertical une tige en aluminium à l'extrémité de laquelle est montée une masse de forme cylindrique. Cette tige est fixée par une articulation pivotante sur un chariot qui peut se déplacer en glissant le long d'un rail de guidage horizontale [17]. Le mouvement de rotation d'un moteur électrique est transformé en mouvement de translation du chariot par l'intermédiaire d'une poulie et d'une courroie crantée. Le déplacement du chariot dans un sens ou dans l'autre assure par réaction l'équilibre vertical du bras du pendule. La figure 1.1 montre les éléments mécaniques principaux du dispositif.

Initialement le pendule est en position basse, le but étant de le redresser en position haute et surtout le maintenir dans cette position.

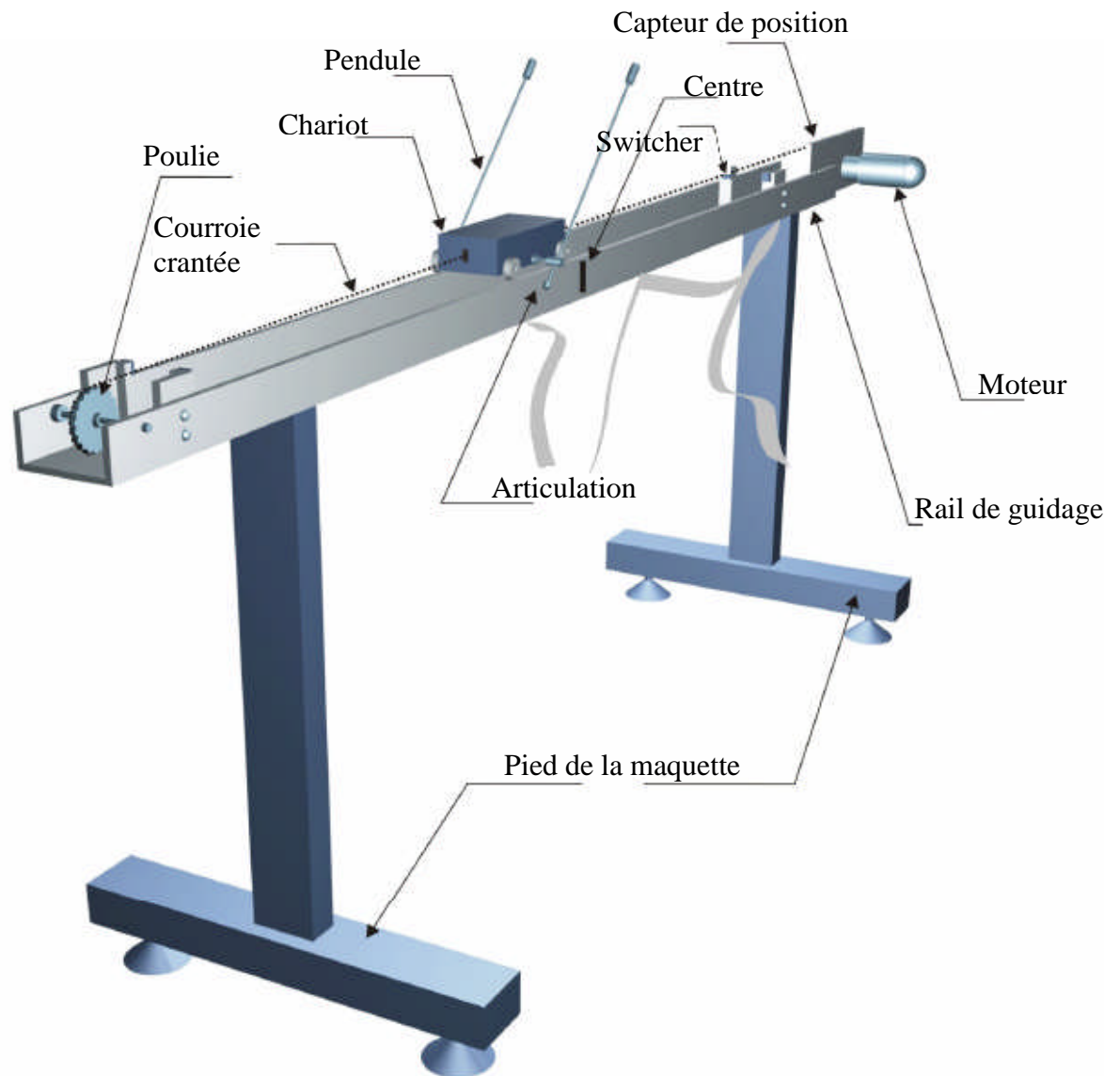


Fig 1.1 : synoptique de banc d'essais du pendule inversé

1.1.2 Dispositif de commande

Un ensemble de capteurs et d'actionneur est installé sur la maquette. Deux capteurs sont disponibles :

- Un capteur de position délivre une image de la position du chariot sur son rail de guidage par rapport au centre de ce dernier. Si le chariot est situé à droite du centre, une valeur positive est mesurée. Le capteur utilisé est un potentiomètre multi-tours solidaire de l'axe du moteur.

- Un capteur de position angulaire fournit l'angle entre le bras du pendule et la verticale, l'angle est égal à zéro lorsque le pendule est en position haute. Si le pendule penche vers la droite, un angle négatif est mesuré. Le capteur est constitué d'un potentiomètre fixé sur le pivot du pendule.

De plus, la course du chariot est limitée respectivement à gauche et à droite par deux butées mécaniques. Deux interrupteurs de fin de course sont placés en avant des butées mécaniques par sécurité pour le moteur d'entraînement du chariot. Le passage du chariot entraîne la fermeture d'un interrupteur provoquant la coupure de l'alimentation du moteur électrique. L'actionneur est un moteur électrique à courant continu et à aimant permanent commandé par l'induit. La commande du moteur est effectuée par un signal variant entre 0 et +5V [17-36].

1.2 Modélisation de l'ensemble chariot-pendule

L'ensemble du chariot-pendule possède deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont respectivement : x pour le déplacement horizontal du chariot et θ pour la rotation du pendule. La direction positive de x est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian (figure 1.2).

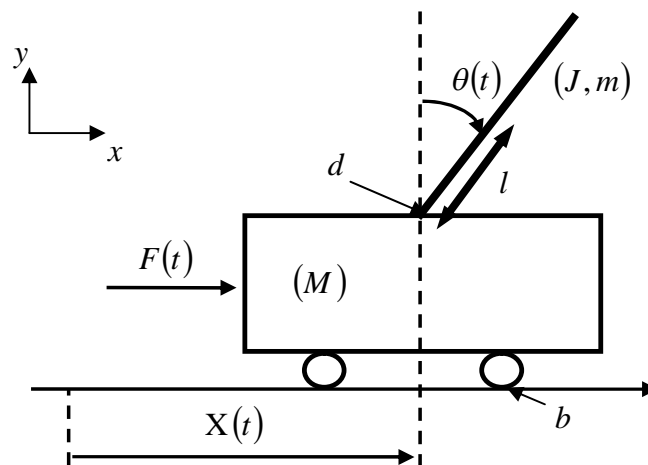


Fig 1.2 : Schémas de l'ensemble chariot et pendule inversé

Les paramètres de l'ensemble pendule-chariot sont :

$m = 0.2Kg$: représente la masse du pendule, $b = 0.00005 Ns/m$: Coefficient de frottement des roues du chariot, $M = 2.3Kg$: Masse du chariot, $x(t)$: Position du chariot (m), $l = 0.3 m$: Demi longueur du pendule, $\theta(t)$: Angle de rotation du pendule(rad), $F(t)$: Force exercée sur le chariot (N), $g = 9.81 m/s^2$: Intensité de la pesanteur, $d = 0.005 Nms/rad$: Coefficient de frottement de rotation du pendule [36].

Les équations du mouvement du pendule sont déterminées par le formalisme d'Euler-Lagrange [17-11] qui est basé sur le principe de la conservation de l'énergie mécanique plutôt que sur le concept de force, comme dans le principe de Newton.

Le Lagrangien est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système, l'avantage de ce formalisme réside dans l'élimination des efforts d'interaction, Il s'exprime par

$$L = E_c - E_p \quad (1.1)$$

1.2.1 Energie cinétique du système en mouvement

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur son axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot en mouvement est donnée par l'équation

$$E_{cM} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (1.2)$$

L'énergie cinétique du pendule est exprimée par l'équation

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1.3)$$

v_c : La vitesse de centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$: La vitesse angulaire du pendule

La position du centre de gravité du pendule, notée r_c à partir de ces coordonnées est donnée par :

$$\mathbf{r}_c = (x + l \sin \theta) \hat{\mathbf{i}} + l \cos \theta \hat{\mathbf{j}} \quad (1.4)$$

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$: étant les vecteurs unitaires du repère x, y

La vitesse du centre de gravité du pendule est donc

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = (\dot{x} + l \cos \theta \dot{\theta}) \hat{\mathbf{i}} - l \sin \theta \dot{\theta} \hat{\mathbf{j}} \quad (1.5)$$

En substituant les équations (1.4) et (1.5) dans l'équation (1.3), l'expression de l'énergie cinétique du pendule devient :

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1.6)$$

qui s'écrit après simplification, du terme $l^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l^2 \dot{\theta}^2$ par:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1.7)$$

Finalement, l'énergie cinétique totale de l'ensemble chariot et pendule est exprimée par

$$E_c = E_{cM} + E_{cm} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2 \dot{x} l \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad (1.8)$$

1.2.2 Energie potentielle du système

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle. L'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par

$$E_p = mgl \cos \theta \quad (1.9)$$

Maintenant que les expressions de l'énergie cinétique E_c de l'ensemble chariot-pendule (Equation 1.8) et l'énergie potentiel du système E_p (Equation 1.9) sont établies, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer les équations de mouvement de l'ensemble chariot-pendule.

En substituant les équations (1.8) et (1.9) dans l'équation (1.1) on trouve

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2\dot{x}l \cos\theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgl \cos\theta \quad (1.10)$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial D_f}{\partial \dot{\xi}_j} = F_j \quad (1.11)$$

où :

ξ : désigne les degrés de liberté. Dans le cas du pendule, ces deux degrés de liberté sont la position du chariot $x(t)$ et l'angle de rotation du pendule $\theta(t)$, D_f : désigne l'énergie dissipée par frottement, F : la force généralisée, L : représente le Lagrangien, il est donné par l'équation (1.1).

On définit donc l'équation de Lagrange pour le pendule inversé comme suit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = F_j \quad (1.12)$$

✓ Pour le degré de liberté $\xi(t) = x(t)$, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F - b \dot{x} \quad (1.13)$$

où F : représente la force exercée sur le chariot

La dérivée partielle du lagrangien suivant \dot{x} et t s'écrit

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m \dot{x} + ml \cos\theta \dot{\theta}) - 0 = F - b \dot{x} \quad (1.14)$$

donc, la première équation de Lagrange est

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos\theta \ddot{\theta} - ml \sin\theta \dot{\theta}^2 = F - b\dot{x} \quad (1.15)$$

✓ Pour le degré de liberté $\xi(t) = \theta(t)$, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (1.16)$$

La dérivée partielle du lagrangien suivant $\dot{\theta}$ et θ s'écrit

$$\frac{d}{dt} (+ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\sin\theta \dot{\theta} + mgl\sin\theta) = -d\dot{\theta} \quad (1.17)$$

donc la deuxième équation de Lagrange est

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\sin\theta \dot{\theta} + ml\dot{x}\sin\theta \dot{\theta} - mgl\sin\theta = -d\dot{\theta} \quad (1.18)$$

Le modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule (Equation 1.17 et 1.18) est donné par le système d'équations

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml \cos\theta \ddot{\theta} - ml \sin\theta \dot{\theta}^2 = F \\ m\ddot{x}\cos\theta + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

Où $h = M + m$, $N = ml^2 + J$

Le système d'équations (1.19) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot \ddot{x} et l'accélération angulaire du pendule $\ddot{\theta}$. Ainsi, lorsque $F = 0$ (pas de force extérieur), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie, il se mettrait alors à osciller et, puisque le pendule est fixé sur le chariot, ce dernier commencera également à se mouvoir.

1.3 Modélisation du moteur électrique à courant continu à aimant permanent commandé par l'induit

Comme le moteur utilisé pour entrainer le chariot est un moteur à courant continu à aimant permanent, le flux inducteur est constant. Le schéma électrique et mécanique équivalent de l'induit est donné par la figure 1.3.

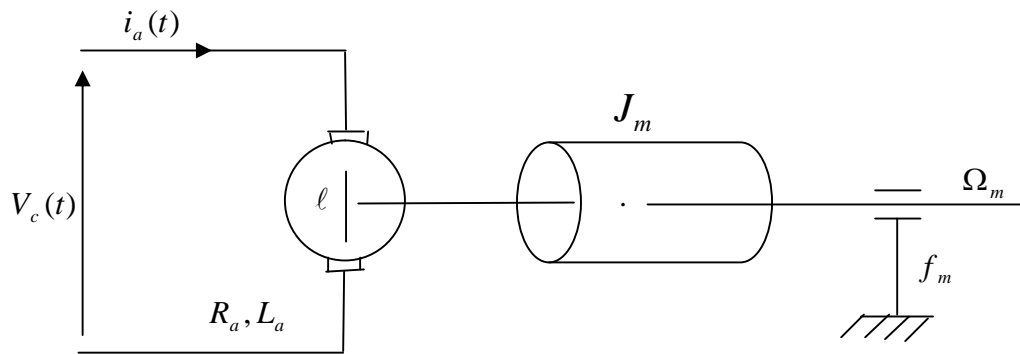


Fig 1.3 : Schéma électrique et mécanique de l'induit

✓ **Les paramètres de la machine sont :**

$R_a = 2.5 \Omega$: Résistance de l'induit, $L_a = 0.0025 H$: Inductance de l'induit, $-2.5 \leq V_c \leq 2.5$: La tension d'alimentation de l'induit du moteur (V), $i_a(t)$: Intensité du courant (A), $K_b = 0.05 N/A$: Constante électrique du moteur, $K_m = 0.05 Nm$: Constante mécanique, $\ell(t)$: fcem, $J_m = 1.4 \times 10^{-5} Kg.m^2$: moment d'inertie, $C_r(t)$: Couple résistant, $C_m(t)$: Couple moteur, $f_m = 10^{-6} Kg.m^2/s$: Coefficient de frottement visqueux, Ω_m : vitesse angulaire de l'arbre de moteur [36].

Les équations régissant le fonctionnement du moteur à courant continu à aimant permanent sont :

✓ **Les équations électriques :**

- Equation de l'induit :

$$V_c(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + \ell(t) \quad (1.20)$$

- Equation de la fcem :

$$\ell(t) = K_b \Omega_m(t) \quad (1.21)$$

✓ Equation mécanique

$$C_m(t) = J_m \frac{d\Omega_m(t)}{dt} + C_r(t) + f_m \Omega_m(t) \quad (1.22)$$

✓ Equation de couple

$$C_m(t) = K_m i_a(t) \quad (1.23)$$

Modèle d'état du moteur

En l'absence du couple résistant ($C_r(t) = 0$), et en considérant la vitesse angulaire de l'arbre de moteur comme sortie, puis en remplaçant l'équation (1.23) dans l'équation (1.22) et l'équation (1.21) dans l'équation (1.20) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_m(t)}{dt} &= \frac{-f_m}{J_m} \Omega_m(t) + \frac{K_m}{J_m} i_a(t) \\ \frac{di_a(t)}{dt} &= \frac{-K_b}{L_a} \Omega_m(t) - \frac{R_a}{L_a} i_a(t) + \frac{1}{L_a} V_c(t) \\ y_m &= \Omega_m \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ces équations, écrites sous la forme matricielle, permettent d'obtenir le modèle d'état de la machine, il est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B V_c \\ y = C z \end{cases} \quad (1.25)$$

avec $z = [\Omega_m, i_a]^T$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-f_m}{J_m} & \frac{K_m}{J_m} \\ \frac{-K_b}{L_a} & \frac{-R_a}{L_a} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \quad (1.26)$$

Si on considère le courant de l'induit comme étant la sortie, l'équation dynamique du modèle reste la même, par contre la matrice de sortie devient :

$$C = [0 \quad 1] \quad (1.27)$$

1.4 Modélisation du système global : moteur-chariot-pendule

Le modèle (1.19) décrit le régime transitoire de l'ensemble pendule-chariot lorsque l'entrée est une force extérieure F . Dans le banc d'essai que nous utilisons, la force F est développée par un moteur à courant continu. Le schéma de la figure 1.4 illustre la relation existante entre le moteur commandé par la tension $V_c(t)$ et la force F permettant l'entraînement du chariot donc le balancement du pendule.

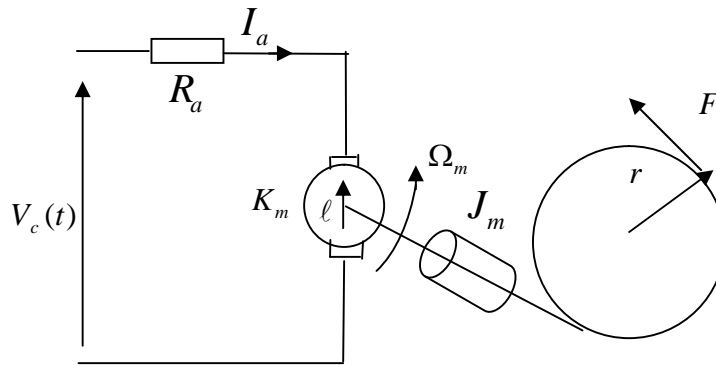


Fig 1.4 : Relation entre la force mécanique F et la tension V_c

1.4.1 Expression de la force F en fonction de la tension d'alimentation du moteur V_c

Pour déterminer cette expression et afin de ne pas rendre plus complexe le modèle global de l'ensemble pendule-chariot-moteur, on néglige la dynamique du moteur, par conséquent, l'équation électrique (1.20) devient en tenant compte de l'équation (1.21) [6-18]:

$$V_c = R_a i_a + K_b \Omega_m \quad (1.28)$$

Et comme $x = r \Phi$. Φ : étant la position angulaire d'un point quelconque située sur le périmètre de la poulie, et $r = 0.0027 \text{ m}$: le rayon de la poulie, on obtient :

$$\frac{d}{dt} x(t) = r \frac{d}{dt} \Phi(t) = r \Omega_m(t) \quad (1.29)$$

La vitesse angulaire du moteur Ω_m s'exprime donc par rapport à la vitesse du chariot \dot{x} par la relation

$$\Omega_m = \dot{x}/r \quad (1.30)$$

En substituant l'équation (1.30) dans l'équation (1.28), l'expression du courant de l'induit I_a s'écrit

$$I_a = \frac{V_c}{R_a} - \frac{K_b}{rR_a} \dot{x} \quad (1.31)$$

Le couple produit à l'arbre du moteur (équation (1.23)) crée une force qui est donnée par

$$F = \frac{C_m}{r} = \frac{K_m I_a}{r} \quad (1.32)$$

En remplaçant l'équation (1.31) dans l'équation (1.32), on obtient finalement:

$$F = \frac{K_m}{rR_a} V_c - \frac{K_m K_b}{r^2 R_a} \dot{x} \quad (1.33)$$

1.4.2 Modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot -pendule

Afin d'obtenir le modèle d'état de l'ensemble moteur-chariot-pendule, on utilise une nouvelle fois le modèle (1.19). Le vecteur d'état est:

$$z = [z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4]^T = \left[x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta} \right]^T \quad (1.34)$$

après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (1.35) où la grandeur de commande est la force F .

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{z}_1 = z_2 \\
\dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \sin z_3 \\
\quad + \frac{mld \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4 + \frac{mlN \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 + \frac{FN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \\
\dot{z}_3 = z_4 \\
\dot{z}_4 = \frac{mgl}{N} \sin z_3 - \frac{d}{N} z_4 + \frac{mlb \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 z_3 \sin z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} \\
\quad - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} z_4 - \frac{m^2 l^2 \cos z_3 \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 - \frac{mlF}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \\
y_1 = z_1 \\
y_2 = z_3
\end{array} \right. \quad (1.35)$$

Lorsque la grandeur de commande du modèle est la tension de commande V_c du moteur, il suffit de substituer dans le modèle (1.35) la force F par son expression (Equation (1.33)) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{z}_1 = z_2 \\
\dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \cos z_3 \sin z_3 \\
\quad + \frac{mld \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4 + \frac{mlN \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 \\
\quad + \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c - \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2 \\
\dot{z}_3 = z_4 \\
\dot{z}_4 = \frac{mgl}{N} \sin z_3 - \frac{d}{N} z_4 + \frac{mlb \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 z_3 \sin z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} \\
\quad - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 z_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3)} z_4 - \frac{m^2 l^2 \cos z_3 \sin z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} z_4^2 - \frac{ml \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m}{R_a r} V_c \\
\quad + \frac{ml \cos z_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 z_3} \frac{K_m K_b}{R_a r^2} z_2 \\
y_1 = z_1 \\
y_2 = z_3
\end{array} \right. \quad (1.36)$$

1.4.3 Modèle sous Matlab Simulink et résultats de simulation

A partir de l'équation (1.36) on a construit le schéma de simulation sous "Matlab-Simulink" de l'ensemble moteur-chariot-pendule, il est présenté par la figure (1.5). les blocs

(1,2,3) de Matlab function représentent les équations qui régissent le fonctionnement du pendule inversé et les entrées constantes des différents intégrateurs CI1, CI2, CI3, CI4 représentent respectivement les conditions initiales $\dot{\theta}_0$, θ_0 , \dot{x}_0 et x_0 ,

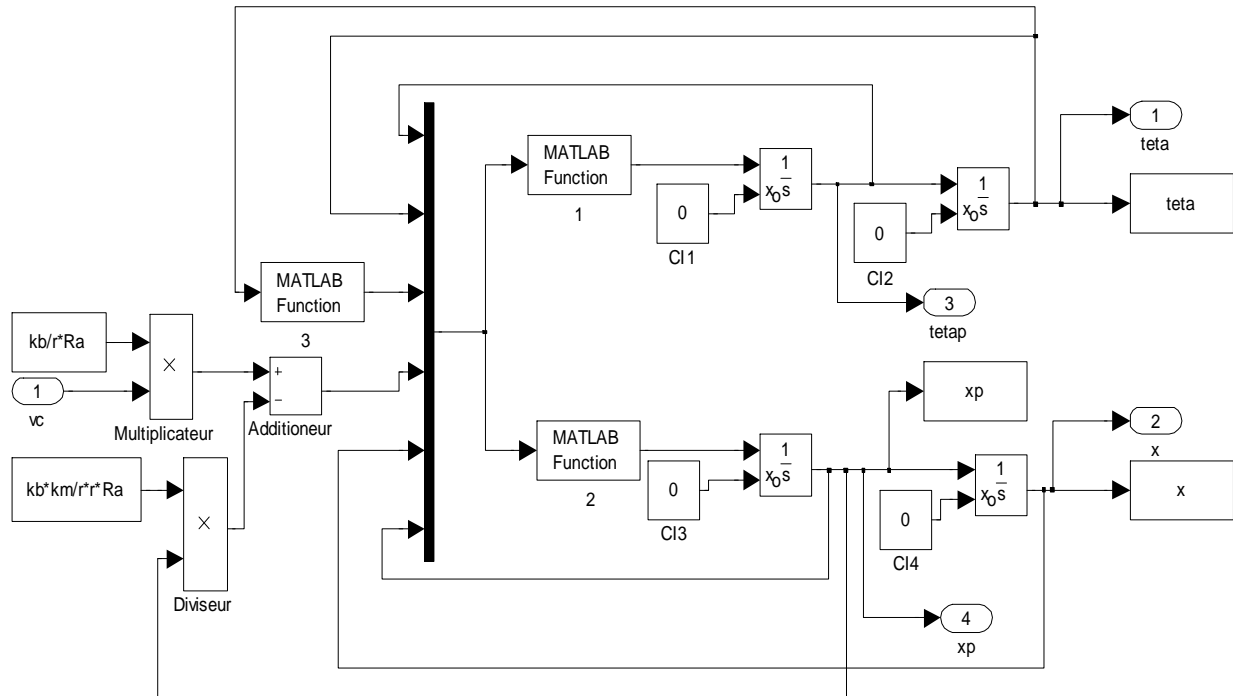


Fig 1.5 : Schéma de simulation du modèle de l'ensemble pendule-chariot-moteur

Les figures (1.6) et (1.7) montrent les résultats de simulation obtenus en appliquant à l'entrée une tension sous forme d'une impulsion d'amplitude 0.01v, de durée 0.1s, pour deux conditions initiales différentes, la première correspond à la position instable du pendule, la seconde à sa position stable.

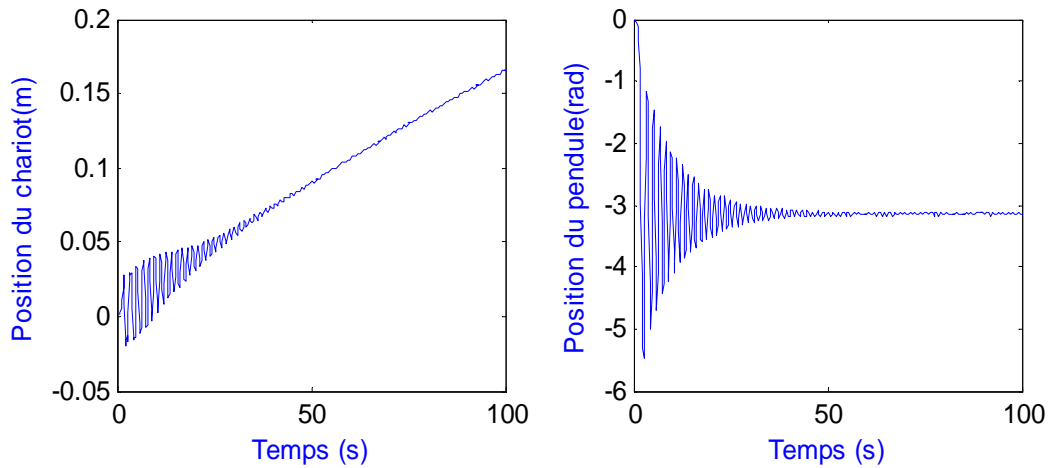


Fig 1.6 : Résultat du simulation du modèle non linéaire , $CI: [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0, 0]$

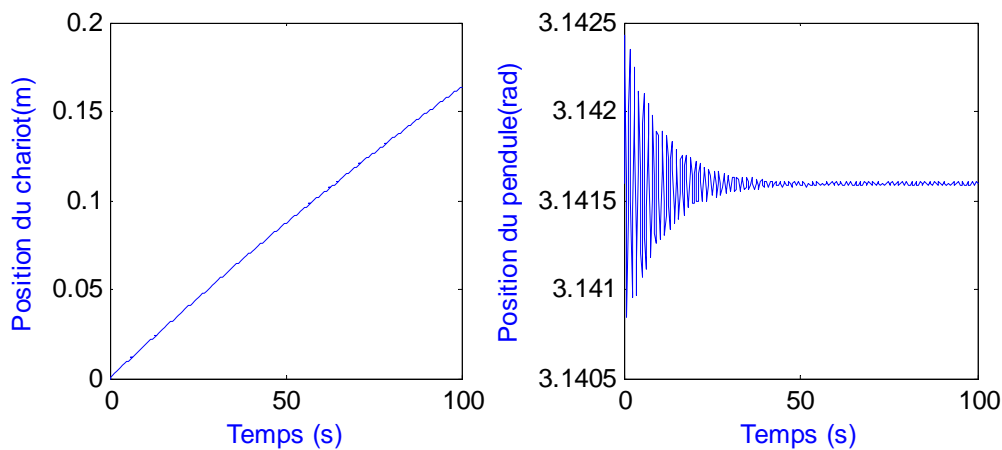


Fig 1.7 : Résultat du simulation du modèle non linéaire , $CI: [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

Ces résultats illustrent la complexité du modèle. La figure 1.6 montre que lorsque le pendule est initialement en position instable haute ($\theta = 0$), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$). La figure (1.7) montre que, lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$), lorsqu'il en est écarté grâce à la tension V_c , il y revient après le régime transitoire. Ces résultats sont conformes à ce que l'on obtient en pratique. Il faut noter également qu'une fois la barre en position $\theta = \pi$, le chariot continue à évoluer dans les deux cas, quelque soit la position initiale du pendule, à cause de l'effet de balancement du pendule.

1.5 Linéarisation du modèle autour du point d'équilibre instable ($\theta = 0$)

Le modèle du pendule inversé est trop complexe et non linéaire, et comme l'objectif de la commande dans le système pendule inversé est d'asservir la position du chariot x et l'angle θ à zéro (position d'équilibre instable), alors une linéarisation autour de cette dernière a été établie [6].

Pour des petites variations de θ autour du point d'équilibre θ_0 on a :

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \varepsilon \\ \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \end{cases} \quad (1.37)$$

On considère que tous les termes d'ordre supérieurs sont nuls

$$\varepsilon^2 \approx 0$$

Le développement en série de Taylor du premier ordre d'une fonction de θ est donné par :

$$f(\theta) \approx f(\theta_0) + \varepsilon \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} \quad (1.38)$$

Si on se limite aux petites variations de θ autour du point de fonctionnement $\theta_0 = 0$ correspondant à la position haute du pendule et on utilisant le développement limité du premier ordre (équations (1.37) et (1.38)) on obtient les approximations suivantes:

$$\begin{cases} \cos\theta \approx \cos(0) + \theta[-\sin(0)] = 1 \\ \sin\theta \approx \sin(0) + \theta[\cos(0)] = \theta \\ \dot{\theta}^2 = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

On substituant les linéarisations (1.39) dans le système d'équation (1.36), on trouve le système d'équation linéarisé du système pendule-chariot-moteur suivant :

$$\begin{cases}
\dot{z}_1 = z_2 \\
\dot{z}_2 = \left(\frac{-bN}{hN - m^2 l^2} - \frac{N}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m K_b}{r^2} \frac{1}{R_a} \right) z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2} z_3 + \frac{mld}{hN - m^2 l^2} z_4 \\
\quad + \frac{N}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m}{R_a r} V_c \\
\dot{z}_3 = z_4 \\
\dot{z}_4 = \left(\frac{mlb}{hN - m^2 l^2} + \frac{ml}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m K_b}{r^2} \frac{1}{R_a} \right) z_2 + \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN - m^2 l^2)} \right) z_3 - \frac{d}{N} z_4 \\
\quad - \frac{m^2 l^2 d}{N(hN - m^2 l^2)} z_4 - \frac{ml}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m}{R_a r} V_c \\
y_1 = z_1 \\
y_2 = z_3
\end{cases} \quad (1.40)$$

Le modèle d'état (1.40) peut être mis sous la forme $\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ Y = Cz \end{cases}$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN - m^2 l^2} - \frac{N}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m K_b}{r^2} & \frac{-gm^2 l^2}{hN - m^2 l^2} & \frac{mld}{hN - m^2 l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN - m^2 l^2} + \frac{ml}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m K_b}{r^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN - m^2 l^2)} & \frac{-d}{N} + \frac{-m^2 l^2 d}{N(hN - m^2 l^2)} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m N}{(hN - m^2 l^2) r R_a} & 0 & \frac{-ml}{hN - m^2 l^2} \frac{K_m}{R_a r} \end{bmatrix}^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Application numérique

En remplaçant les paramètres du modèle linéaire (1.41) par leurs valeurs numériques données dans les paragraphes (1.2) et (1.3), on obtient les valeurs numériques des matrices A, B et C du système pendule-chariot-moteur :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5786 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.2443 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

$$B = [0 \quad 0.3124 \quad 0 \quad -0.6719]^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice A de l'équation (1.42) sont données par $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.5483$, $\lambda_3 = -4.8291$, $\lambda_4 = 4.6093$. Celles-ci montrent que le modèle linéaire autour du point d'équilibre $\theta = 0$ est instable. Cela justifie l'utilisation d'une commande permettant la stabilisation du pendule, c'est le deuxième problème que nous traitons dans ce mémoire.

En substituant les linéarisations (1.39) dans le système d'équation (1.35), on trouve le système d'équation linéarisé du système pendule inversé sans moteur :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2} z_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2} z_3 + \frac{mld}{hN - m^2 l^2} z_4 + \frac{FN}{hN - m^2 l^2} \\ \dot{z}_3 = z_4 \\ \dot{z}_4 = \left(\frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN - m^2 l^2)} \right) z_3 - \left(\frac{d}{N} + \frac{m^2 l^2 d}{N(hN - m^2 l^2)} \right) z_4 + \frac{mlb}{hN - m^2 l^2} z_2 \\ \quad - \frac{mlF}{hN - m^2 l^2} \\ y_1 = z_1 \\ y_2 = z_3 \end{cases} \quad (1.43)$$

Le modèle d'état correspondant est donné par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-bN}{hN - m^2 l^2} & \frac{-gm^2 l^2}{hN - m^2 l^2} & \frac{mld}{hN - m^2 l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlb}{hN - m^2 l^2} & \frac{mgl}{N} + \frac{m^3 l^3 g}{N(hN - m^2 l^2)} & \frac{-d}{N} - \frac{m^2 l^2 d}{N(hN - m^2 l^2)} \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ \frac{0}{(hN - m^2 l^2)} \\ -ml \\ \frac{0}{hN - m^2 l^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Application numérique

En remplaçant les paramètres du modèle linéaire (1.44) par leurs valeurs numériques données dans le paragraphe (1.2), on obtient les valeurs numériques des matrices A, B et C du système pendule-chariot :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

$$, B = [0 \quad 0.4218 \quad 0 \quad -0.9070]^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le modèle linéaire (1.45) sera utilisé dans les chapitres 3 et 4 pour la synthèse des lois de commande par retour d'état d'ordre entier et non entier afin de pouvoir stabiliser le pendule à sa position d'équilibre instable $\theta = 0$ et d'implémenté ensuite ces différentes commandes.

Conclusion

Ce chapitre a été consacré au développement du modèle de l'ensemble pendule chariot-moteur, on a utilisé pour ce faire le formalisme d'Euler-Lagrange.

Le modèle obtenu a permis de mettre en évidence les fortes non linéarités existantes dans le pendule. Une linéarisation du système autour du point d'équilibre instable ainsi que des simulations ont également été établies. La simulation avec une impulsion d'entrée a permis de constater la non linéarité et l'instabilité du système autour de point d'équilibre $(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = (0, 0, 0, 0)$. La complexité de contrôler des systèmes sous-actionnés tel que le pendule inversé, est en grande partie due au fait que l'entrée de commande u apparaît dans la partie actionnée du système ainsi que dans la partie non actionnée d'où l'intérêt d'utiliser une commande par retour d'état.

Chapitre

2

*Redressement du pendule
inversé par des commandes
non linéaires.*

Introduction

Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes dynamiques est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions en régime permanent, ce concept étant directement lié à la stabilité [7]. Dans cette thèse, on s'intéresse à la commande du pendule inversé qui consiste en deux phases: redressement et stabilisation. On présente dans ce chapitre deux méthodes de commande de redressement en utilisant des outils de la commande des systèmes non linéaires, la méthode de Lyapunov en particulier qui permet de balancer le pendule à une position supérieure avant de le maintenir dans sa position verticale instable avec des commandes linéaires qui seront présentées dans les chapitres suivants.

Avant d'aborder la commande de redressement, la première partie de ce chapitre est consacrée à quelques rappels théoriques sur les notions de stabilité de Lyapunov et le théorème d'invariance de LaSalle [7-27] suivie de deux exemples d'applications. Des résultats en simulation et en temps réel obtenus en appliquant les deux commandes de redressement pour balancer le pendule inversé à une position supérieur sont également présentés.

2.1 Notions sur la stabilité de Lyapunov

Puisqu'on s'intéresse à la stabilité des systèmes non linéaires autour d'un point d'équilibre, il est indispensable de définir cette notion. Pour cela, il faut étudier le comportement des solutions dans un petit voisinage du point d'équilibre.

Définition 2.1 : point d'équilibre

Considérons le système autonome stationnaire, décrit par l'équation différentielle non linéaire :

$$\dot{z}(t) = \Gamma(z(t)) \quad (2.1)$$

où : $\Gamma : R^n \rightarrow R^n$ est une fonction continue

L'état particulier $z_e \in R^n$ est un point d'équilibre pour le système (2.1) s'il satisfait la propriété suivante:

$$\Gamma(z_e) = 0 \quad (2.2)$$

Dans ce cas la solution du système (2.1) est donnée par :

$$z(t, z_e) = z_e, \forall t \geq t_0 \quad (2.3)$$

Définition 2.2 : Voisinage de l'origine

Un voisinage de l'origine, \mathcal{G} est tout domaine fermé borné incluant l'origine.

Définition 2.3 : Fonctions définies positives

- Une fonction scalaire $V(z): R^n \rightarrow R$ est localement définie positive dans \mathcal{G} , si:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \forall z \neq 0 \in \mathcal{G} \quad V(z) &> 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

- Une fonction scalaire $V: R^n \rightarrow R$ est globalement définie positive si elle vérifie:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \forall z \neq 0 \in R^n \quad V(z) &> 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Définition 2.4 : Fonctions semi-définies positives

- Une fonction scalaire $V: R^n \rightarrow R$ est localement semi-définie positive dans \mathcal{G} , si :

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \forall z \neq 0 \in \mathcal{G} \quad V(z) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

- Une fonction scalaire $V: R^n \rightarrow R$ est globalement semi-définie positive si elle vérifie:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ \forall z \neq 0 \in R^n \quad V(z) &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.1.1 Méthode directe de Lyapunov

Pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, la méthode la plus classique est basée sur la linéarisation et l'utilisation des valeurs propres du système linéarisé. Lyapunov a proposé une seconde méthode, en s'inspirant de l'idée de l'énergie mécanique de Lagrange qui a formulé le principe de stabilité des systèmes mécaniques qui stipule que :

<<un système qui est dans un état où son énergie potentielle possède un minimum isolé est dans un état d'équilibre stable >>.

Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov, est basée sur la recherche d'une fonction scalaire de signe défini à valeurs réelles. Quand sa dérivée par rapport au temps est définie de signe opposé, la vitesse d'un point p_1 ($p_1 \in R^n$) est toujours dirigée vers l'intérieur, alors ce point finira par arriver à l'origine, dans le cas contraire, le point p_1 s'écartera davantage. Dans quelques classes de systèmes physiques, la fonction du Lyapunov V peut être choisie comme étant l'énergie du système [7].

Définition 2.5 : (Candidat de Lyapunov)

Une fonction définie positive continue notée $V(z)$ est un candidat de Lyapunov [27].

Définition 2.6 : Fonction de Lyapunov

Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue $V(z)$ telle que :

$$\begin{aligned} V(z) &> 0 \quad \forall z \neq 0 \\ V(z) &= 0 \quad z = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ayant en plus la propriété

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq 0 \quad \forall z \neq 0 \\ \dot{V}(z) &= 0 \quad z = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

- **Dérivée de la fonction de Lyapunov**

La dérivée s'écrit,

$$\dot{V}(z) = \left[\frac{\partial V}{\partial z} \right]^T \cdot \frac{dz}{dt} \quad (2.10)$$

où

$$\left[\frac{\partial V}{\partial z} \right] \text{ est le gradient de } V = \left[\frac{\partial V}{\partial z_1}(z) \cdots \frac{\partial V}{\partial z_n}(z) \right]^T$$

- **Théorème de stabilité par la méthode directe**

Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que $\dot{V}(z) < 0, \forall z \neq 0$, alors la stabilité est en plus asymptotique.

Si \dot{V} est localement définie négative dans \mathcal{G} , alors la stabilité est dite localement asymptotique.

2.1.2 Théorème d'invariance de LaSalle

On considère le système dynamique de la forme $\dot{z} = \Gamma(z)$. Il est parfois difficile de trouver une fonction de Lyapunov dont la dérivée est définie négative ($\dot{V} < 0, z \neq 0$), par contre, il est plus aisé de trouver des fonctions dont la dérivée est semi définie négative ($\dot{V} \leq 0$). Par conséquent, on ne peut pas aboutir à la stabilité asymptotique en utilisant le théorème de Lyapunov. LaSalle a remarqué que pour certains cas même si $\dot{V} \leq 0$, alors on peut conclure que le point d'équilibre est asymptotiquement stable d'où le théorème d'invariance de LaSalle [7].

Définition 2.7 : Ensemble invariant

Un ensemble invariant noté M_d , pour un système dynamique $\dot{z} = \Gamma(z)$ est défini comme étant l'ensemble de conditions initiales, tels que la solution $Z(z_0, t)$ reste dans l'ensemble $M_d \forall t$ [7-27], c-à-d :

$$M_d = \{z / z_0 \in M_d \Rightarrow Z(z, t) \in M_d \forall t \geq 0\} \quad (2.11)$$

Définition 2.8 : Ensemble d'annulation de la dérivée de la fonction de Lyapunov

Cette ensemble est noté σ et correspond mathématiquement à

$$\sigma = \{z / \dot{V}(z) = 0\} \quad (2.12)$$

Le théorème de LaSalle est un résultat de nature locale au sens où il nécessite la connaissance d'un ensemble compact pour toutes les conditions initiales [7].

- **Principe d'invariance de LaSalle**

Considérons le système dynamique $\dot{z} = \Gamma(z)$, Γ fonction scalaire continue avec les premières dérivées partielles continues, soit $l > 0$, l'ensemble Ω_l fermé et borné défini par : $\Omega_l = \{z / V(z) \leq l\}$.

La dérivée de la fonction de Lyapunov est semi définie négative ($\dot{V}(z) \leq 0$) pour tout $z \in \Omega_l$. Soit $\sigma \in \Omega_l$ l'ensemble de tous les points pour lesquelles $\dot{V}(z) = 0$, Soit M_d le plus grand ensemble invariant dans σ , alors toute solution $z(t)$ démarrant dans Ω_l tend vers M_d quand $t \rightarrow \infty$ c-à-d :

$$\forall z_0 \in \Omega_l, Z(z_0, t) \rightarrow M_d \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

2.1.3 Quelques propriétés d'énergie

La fonction d'énergie possède deux propriétés essentielles. La première est la qualité d'extremum au point d'équilibre, à savoir s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Le point d'équilibre a tendance à être stable lorsque cet extremum est un minimum.

Si l'énergie totale d'un système est dissipée de manière continue, alors le système (qu'il soit linéaire ou non linéaire), devra rejoindre finalement un point d'équilibre.

On pourra donc conclure à la stabilité d'un système par l'examen d'une seule fonction scalaire qui est l'énergie totale.

- Le point d'énergie mécanique nulle est le point d'équilibre.
- La stabilité asymptotique implique la convergence de l'énergie vers 0.
- L'instabilité est liée à la croissance de l'énergie mécanique.

On considère dans ce qui suit deux exemples simples pour illustrer la notion de stabilité par le théorème d'invariance de LaSalle.

Exemple 1

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -h_1(z_1) - h_2(z_2) \end{cases} \quad (2.13)$$

Où

$$h_i(0) = 0, \quad y h_i(y) > 0, \quad \forall y \neq 0 \quad \text{et} \quad y \in (-a, a) \quad (2.14)$$

On choisit comme fonction de Lyapunov l'énergie du système, elle est donnée par

$$V(z) = \int_0^{z_1} h_1(y) dy + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (2.15)$$

Soit l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid -a < z_1 < a\}$, $V(z)$ est définie positive dans D .

La dérivée de la fonction de Lyapunov V par rapport au temps s'écrit

$$\dot{V}(z) = h_1(z_1)z_2 + z_2[-h_1(z_1) - h_2(z_2)] = -z_2 h_2(z_2) \leq 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{dV}{dt} \leq 0 \quad (\text{semi définie négative}).$$

Ensemble d'annulation de la dérivée de Lyapunov

$$\sigma = \{z / \dot{V}(z) = 0\} \quad (2.17)$$

$$\dot{V}(z) = 0 \Rightarrow z_2 h_2(z_2) = 0 \Rightarrow z_2 = 0 \quad \text{pour} \quad -a < z_2 < a$$

Par conséquent l'ensemble σ est donnée par :

$$\sigma = \{z / z_2 = 0\} \quad (2.18)$$

$$\text{Puisque } z_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{z}_2(t) = 0 \Rightarrow h_1(z_1(t)) = 0 \Rightarrow z_1(t) = 0$$

Donc, la seule solution qui peut rester dans σ c-à-d le plus grand ensemble invariant est

$$z(t) = 0. \quad \text{L'origine est donc asymptotiquement stable}$$

Exemple 2: le pendule simple

On considère un simple pendule [16] qui consiste en une masse m_{ps} reliée par une tige de longueur unitaire à son axe de rotation. Il est soumis à un frottement visqueux proportionnel à la vitesse du pendule autour de son axe.

L'équation de mouvement du pendule est donnée par

$$m_{ps}\ddot{\theta}_{ps} + m_{ps}g_{ps}\sin\theta_{ps} = -b_{ps}\dot{\theta}_{ps} \quad (2.19)$$

C'est une équation différentielle du second ordre qui se met sous la forme d'état (avec $z_1 = \theta_{ps}$ et $z_2 = \dot{\theta}_{ps}$) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -g_{ps}\sin z_1 - \frac{b_{ps}}{m_{ps}}z_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

Afin de déduire la stabilité asymptotique de ce pendule simple, on considère comme fonction de Lyapunov son énergie complète, elle est donnée par :

$$V = E_m = \frac{1}{2}m_{ps}\dot{\theta}_{ps}^2 + m_{ps}g_{ps}(1 - \cos\theta_{ps}) \quad (2.21)$$

Cette fonction est positive tant que $\dot{\theta}_{ps}$ et le second terme ne s'annulent pas simultanément.

Par conséquent, V est nul pour

$$(\theta_{ps}, \dot{\theta}_{ps}) = (2k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.22)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V par rapport au temps s'écrit

$$\frac{dV}{dt} = m_{ps}\dot{\theta}_{ps} \left(-g_{ps}\sin\theta_{ps} - \frac{b_{ps}}{m_{ps}}\dot{\theta}_{ps} \right) + m_{ps}g_{ps}\sin\theta_{ps}\dot{\theta}_{ps} = -b_{ps}\dot{\theta}_{ps}^2 \leq 0 \quad (2.23)$$

Dans un voisinage de l'origine, les conditions de stabilités définies par

$$\begin{cases} V(x) = 0, x = 0 \\ V(x) > 0, x \neq 0 \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{cases}$$

sont satisfaites. Le système est donc localement stable.

Toutefois, le théorème de Lyapunov n'est pas conclusif quant à la stabilité locale asymptotique, étant donné que V n'est pas strictement décroissante et que V ne s'annule pas uniquement au point $(0,0)$. Toutefois, nous pouvons examiner l'ensemble σ pour lequel $\dot{V} = 0$.

Comme $\dot{V} = -b_{ps} \dot{\theta}_{ps}^2 = -b_{ps} z_2^2$, alors l'ensemble $\sigma = \{z_1, z_2 / z_2 = 0\}$ est une droite horizontale passant par l'origine.

Or si $z_2 = 0 \Rightarrow \dot{z}_1 = 0 \Rightarrow z_1 = \text{constante}$

et $\dot{z}_2 = -g_{ps} \sin z_1 = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_{ps} = 0, \theta_{ps} = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

La condition $g_{ps} \sin z_1 = 0$, conduisant à une multitudes de points d'équilibre $\dot{\theta}_{ps} = 0, \theta_{ps} = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, mais en réalité $\dot{V}(z)$ ne s'annule qu'à l'origine.

Ensemble invariant :

En considérant l'ensemble $\Omega_{m_{ps} g_{ps} - \varepsilon} = \{\theta_{ps}, \dot{\theta}_{ps} / V(\theta_{ps}, \dot{\theta}_{ps}) \leq m_{ps} g_{ps} - \varepsilon, \theta_{ps} \in]-\pi, \pi[\}$ est compact, invariant (parce que $\dot{V} \leq 0$), et l'ensemble $\sigma \cap m_{ps} g_{ps} - \varepsilon$ ne comporte qu'un seul point qui est l'origine 0. L'origine est donc asymptotiquement stable.

2.2 Redressement du pendule inversé

2.2.1 Première méthode : Redressement du pendule inversé avec une limitation de la longueur du rail du chariot :

Étant donnée la restriction de la longueur du rail, la stratégie de redressement utilisée est basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov qui va permettre de faire converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute. La fonction de Lyapunov utilisée est définie comme étant la somme des carrés de l'énergie mécanique du pendule et la vitesse du chariot $V = \frac{1}{2} (E_m^2 + m l \lambda \dot{x}^2)$. La stratégie de redressement est basée sur deux

paramètres de conception, en les ajustant, nous pouvons effectuer le redressement du pendule avec la contrainte de restriction de la longueur du rail. Une transformation d'état est également introduite pour obtenir la tension d'alimentation du moteur qui permet de générer l'accélération du chariot obtenue à partir de la commande de redressement.

Pour développer la solution, le coefficient de frottement d du pendule est négligé. Reprenant le modèle dynamique du pendule inversé (équation (1.19)), en remplaçant la force F par son expression donnée par l'équation (1.33) on obtient:

$$h \ddot{x} + b \dot{x} + m l \cos \theta \ddot{\theta} - m l \sin \theta \dot{\theta}^2 = \frac{K_m}{R_a r} V_c - \frac{K_m K_b}{r^2} \frac{1}{R_a} \dot{x} \quad (2.24)$$

$$m l \ddot{x} \cos \theta + N \ddot{\theta} - m g l \sin \theta = 0 \quad (2.25)$$

Le problème de redressement correspondant est de trouver la fonction de Lyapunov dont la dérivée est semi définie négative afin de conclure sur la stabilité asymptotique du point d'équilibre instable en utilisant le théorème d'invariance de LaSalle.

Puisque on s'intéresse au redressement du pendule, alors on considère son énergie mécanique qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, elle est donnée par

$$E_m = \frac{1}{2} N \dot{\theta}^2 + m g l (\cos \theta - 1) \quad (2.26)$$

D'après l'équation (2.26), en position haute $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ l'énergie mécanique du système est nulle et dans la position basse $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm \pi, 0)$ l'énergie mécanique E_m vaut $-2mgl$.

On considère la fonction de Lyapunov suivante [14]

$$V = \frac{1}{2} (E_m^2 + m l \lambda \dot{x}^2) \quad (2.27)$$

Où $\lambda > 0$ est un paramètre de conception.

La dérivée de la fonction de Lyapunov V par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = E_m \dot{E}_m + ml\lambda \dot{x} \ddot{x} = E_m [N \dot{\theta} \ddot{\theta} - mgl \sin \theta \dot{\theta}] + ml\lambda \dot{x} \ddot{x} \quad (2.28)$$

De (2.25) on a :

$$N\ddot{\theta} = -m l \cos \theta \ddot{x} + m g l \sin \theta \quad (2.29)$$

En remplaçant cette expression de $N\ddot{\theta}$ dans l'équation (2.28) on obtient:

$$\frac{dV}{dt} = -E_m m l \cos \theta \dot{\theta} \ddot{x} + ml\lambda \dot{x} \ddot{x} = -\ddot{x} m l (E_m \cos \theta \dot{\theta} - \lambda \dot{x}) \quad (2.30)$$

On considère l'accélération du chariot comme variable de commande, c à d $u = \ddot{x}$ [14] et on pose :

$$u = \ddot{x} = \Psi (E_m \cos \theta \dot{\theta} - \lambda \dot{x}) \quad (2.31)$$

où $\Psi > 0$ est un paramètre de conception.

L'équation (2.30) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{dV}{dt} = -m l \Psi (E_m \cos \theta \dot{\theta} - \lambda \dot{x})^2 \quad (2.32)$$

Le terme $(E_m \cos \theta \dot{\theta} - \lambda \dot{x})$ prend la valeur zéro dans certains cas donc $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

D'après le théorème d'invariance de LaSalle, le plus grand ensemble invariant M_d est l'orbite représentée par $E_m = 0$ avec $\dot{x} = 0$, donc on peut conclure que le point d'équilibre $(\theta, \dot{\theta}, \dot{x}) = (0, 0, 0)$ est asymptotiquement stable (une démonstration sur la stabilité asymptotique peut être trouvée dans [14]).

2.2.1.1 Transformation d'état reliant la tension d'alimentation du moteur à l'accélération du chariot :

Pour augmenter l'énergie du pendule, on agit sur l'accélération du chariot. Néanmoins, puisque la grandeur disponible pour agir sur le système pendule-chariot-moteur est la tension d'alimentation V_c du moteur, on doit déterminer la transformation qui donne la relation qui existe entre la tension d'alimentation du moteur V_c et la commande $u = \ddot{x}$. On utilise pour cela une nouvelle fois l'équation (2.25).

$$\ddot{\theta} = \frac{mgl \sin \theta - ml \ddot{x} \cos \theta}{N} \quad (2.33)$$

On remplace ensuite l'équation (2.33) dans l'équation (2.24) pour déterminer l'expression de \ddot{x} donc de u , on obtient :

$$\ddot{x} = \frac{NK_m r V_c - (K_m K_b N + bN r^2 R_a) \dot{x} - r^2 R_a m^2 l^2 g \cos \theta \sin \theta + mlN r^2 R_a \sin \theta \dot{\theta}^2}{(hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta) r^2 R_a} \quad (2.34)$$

Et comme $u = \ddot{x}$, l'expression de la tension V_c du moteur en fonction de l'accélération est :

$$V_c = \frac{u (hN - m^2 l^2 \cos^2 \theta) r R_a}{NK_m} + \frac{br^2 R_a + K_m K_b}{K_m r} \dot{x} + \frac{r R_a m^2 l^2 g \cos \theta \sin \theta}{NK_m} - \frac{mlr R_a \sin \theta \dot{\theta}^2}{K_m} \quad (2.35)$$

2.2.1.2 Résultats de simulation et expérimentaux:

Pour illustrer l'efficacité théorique de la commande proposée, des simulations ont été effectuées sur Matlab simulink. On suppose qu'initialement le pendule est immobile dans sa position d'équilibre stable $\theta = \pi$ et que le chariot est à l'arrêt au milieu des rails et toutes les vitesses sont choisies égales à zéro. La figure (2.1) représente le schéma bloc de simulation qui permet de réaliser la commande de redressement. Ce schéma contient trois entrées, la première est utilisée pour limiter la longueur du rail du chariot à 0.4 m. La deuxième est utilisée comme une référence de la valeur finale de l'angle θ . En effet, lorsque le pendule est situé dans la zone $\pm 0.2rad$ autour de la position d'équilibre instable $\theta = 0$, la commande de redressement est alors arrêtée et remplacée par la commande de stabilisation qui permet de le

maintenir dans cette position. La troisième entrée représente l'impulsion qui s'ajoute avec la tension V_c pour donner plus d'énergie au système et pour accélérer la convergence vers la position d'équilibre instable, l'impulsion choisie est d'amplitude $0.6V$ et de durée $0.1s$. Le bloc saturation limite la commande c'est-à-dire la tension du moteur entre $\pm 2.5V$ et cela pour protéger le moteur contre l'effort de commande.

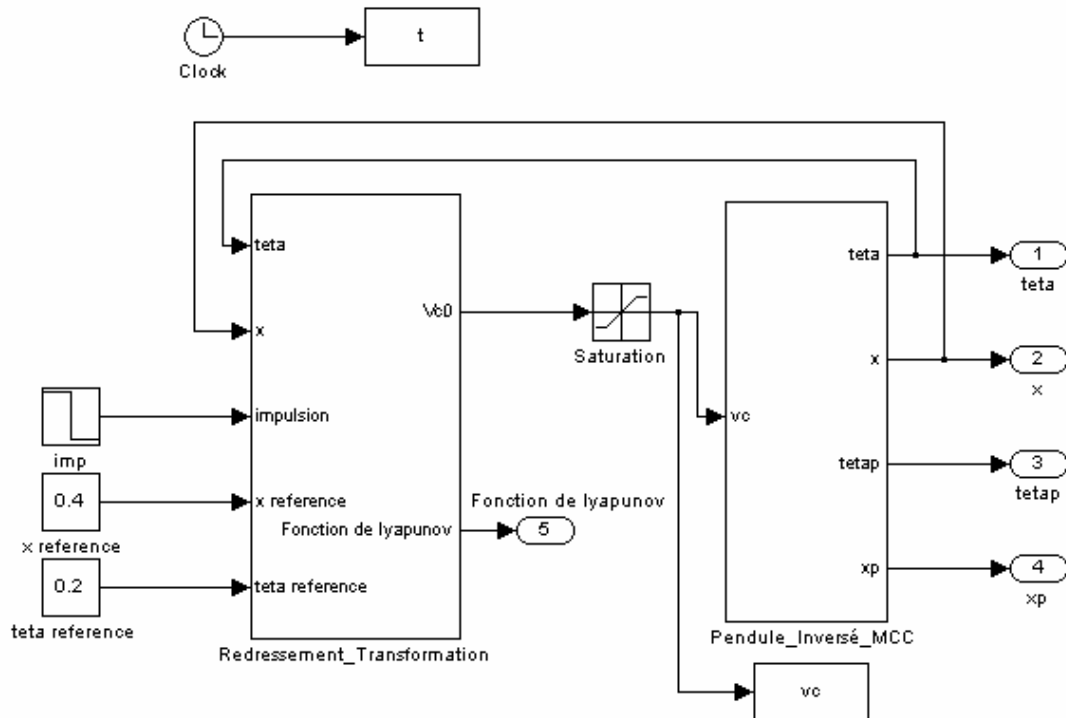


Fig 2.1 : schéma de simulation de la commande de redressement

Le bloc redressement, transformation est constitué de deux blocs :

Un bloc de redressement qui permet de redresser le pendule depuis sa position d'équilibre $\theta = \pi$ à la position verticale $\theta = 0$. Ce redressement se fait en deux étapes :

La première étape consiste à mettre le pendule dans la zone $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ puis la seconde étape permet d'ammener le pendule dans la zone $[-0.2, 0.2]$ autour de $\theta = 0$. Ce bloc de redressement permet de calculer la loi de commande u donnée par l'équation (2.31).

Le bloc transformation permet de déterminer la tension V_c de l'alimentation du moteur en fonction de la commande u . Il réalise l'équation (2.35).

La figure (2.2) montre le contenu du bloc redressement-transformation.

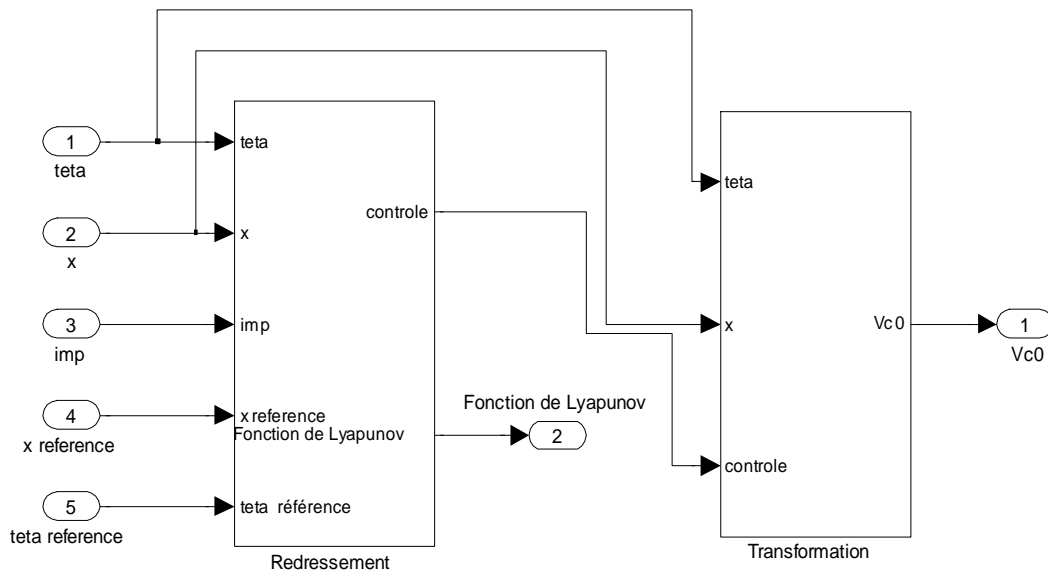


Fig 2.2 : Schéma interne du bloc redressement _transformation

Les figures (2.3) et (2.4) représentent les résultats de simulation obtenus pour deux valeurs différentes de Ψ et λ

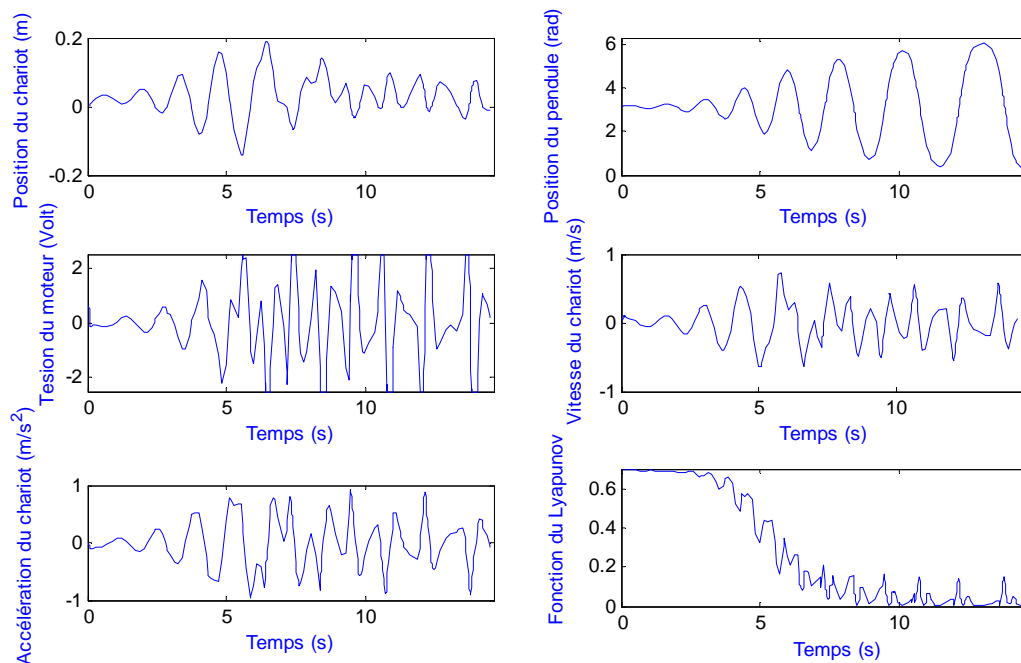


Fig 2.3 : Résultats de simulation de redressement du pendule inversé pour $\Psi = 0.1$, et $\lambda = 12.9$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

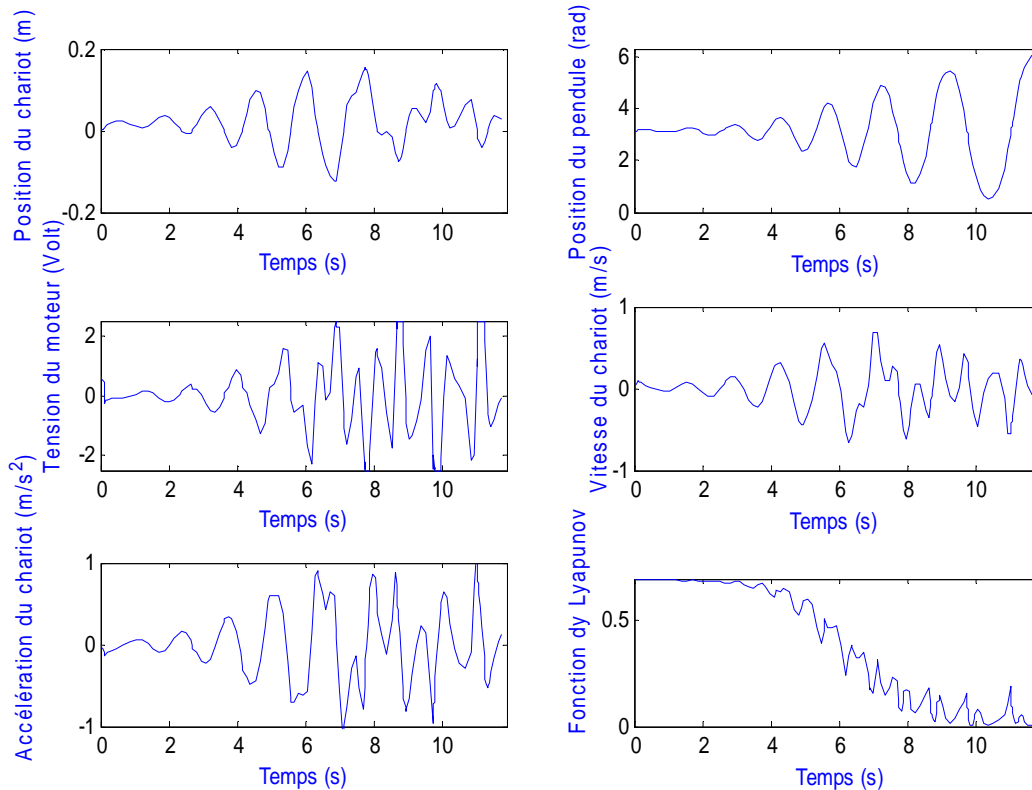


Fig 2.4 : Résultat de simulation de redressement du pendule inversé pour $\Psi = 0.1$, et $\lambda = 14.9$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

2.2.1.3 Interprétation des résultats :

La commande assurant le balancement est composée de deux paramètres Ψ et λ , un choix de ces derniers tel que $\Psi = 0.1$ et $\lambda = 14.9$, ou bien $\Psi = 0.1$ et $\lambda = 12.9$ assure un niveau d'énergie désiré du système ($E_m = 0$), ainsi que la restriction de la longueur de rail du chariot (le chariot se déplace entre ± 0.2 m), donc la convergence de pendule vers la zone $[-0.2, 0.2]$ autour de $\theta = 0$, qui correspond à sa position haute $[\theta = 6.08, \theta = 0]$ avec un temps de $[14.6$ s, 11.86 s] respectivement. Une fois ce niveau d'énergie atteint, simultanément avec $\dot{x} = 0$, la fonction de Lyapunov atteint zéro et le contrôleur assurant le balancement est déconnecté. La commande oscille entre ± 2.5 V du fait de sa limitation. Donc, le réglage du niveau d'énergie, les paramètres de la commande Ψ , λ et les paramètres de la trajectoire de référence est crucial pour le succès du balancement.

Nous n'avons pas pu implémenter cette première méthode de redressement car elle nécessite un modèle très précis. On présente dans ce qui suit une deuxième méthode de redressement qui est également basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov.

2.2.2 Deuxième méthode

Cette méthode est également basée sur le théorème de stabilité de Lyapunov et va permettre de faire converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute. Dans cette méthode, le pendule inversé est commandé par la force F . Pour que cette commande fonctionne en tension, on rajoute un gain g_i qui permet de convertir la force F en tension V_c . La fonction de Lyapunov utilisée dans ce cas représente la différence d'énergie mécanique du pendule et l'énergie mécanique désirée $E^* = 0$ est $V = (E - E^*)$. Le redressement est effectué à l'aide de la commande $u = K_i \dot{\theta} \cos \theta$. Celle-ci permet de converger l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute [8-11].

Dans cette méthode on considère le pendule tout seul, et on néglige le coefficient de frottement de rotation du pendule d . Son modèle dynamique s'écrit dans ce cas :

$$m l \ddot{x} \cos \theta + J \ddot{\theta} - m g l \sin \theta = 0 \quad (2.36)$$

L'énergie mécanique simplifiée du pendule est donnée par

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (2.37)$$

D'après cette définition de l'énergie, dans la position basse qui correspond à la position d'équilibre stable $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm \pi, 0)$, l'énergie mécanique E vaut $E_0 = -2mgl$ et dans la position haute $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$, elle vaut 0.

Pour déterminer la loi de commande permettant de redresser le pendule, on considère la fonction de Lyapunov

$$V = (E - E^*) = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (2.38)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov V par rapport au temps s'écrit

$$\dot{V} = -mgl \sin \theta \dot{\theta} + J \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad (2.39)$$

De (2.36) on a

$$J\ddot{\theta} = -m l \ddot{x} \cos \theta + m g l \sin \theta \quad (2.40)$$

En remplaçant l'équation (2.40) dans l'équation (2.39) on obtient:

$$\dot{V} = -\ddot{x}ml\dot{\theta} \cos \theta \quad (2.41)$$

En prenant comme commande :

$$u = \ddot{x} = K_l \dot{\theta} \cos \theta, \quad K_l > 0 \quad (2.42)$$

Finalement, la dérivée de la fonction de Lyapunov \dot{V} est exprimée par

$$\dot{V} = -K_l ml (\dot{\theta} \cos \theta)^2 \quad (2.43)$$

Le terme $(\dot{\theta} \cos \theta)$ prend la valeur zéro dans certains cas donc $\frac{dV}{dt} \leq 0$.

D'après le théorème d'invariance de LaSalle, le point $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable. Donc cette commande permet de faire converger l'énergie E vers la valeur $E^* = 0$, ce qui permet donc de redresser le pendule à la position haute.

Afin de maintenir la stabilité du pendule inversé, la commande de redressement est associée à d'autre commande de stabilisation et on utilise une loi de commutation appropriée entre les deux commandes (redressement, stabilisation), dans notre cas on applique la commutation quand la valeur absolue de l'angle est au voisinage de $\pm 20^\circ$.

Pour que cette commande fonctionne en tension, il faut rajouter un gain g_t car la commande calculée fourni directement la force F . Donc le gain g_t permet de convertir la force F en tension V_c . D'après les données du constructeur Feedback Ltd, le maximum de

tension du moteur est 2.5 Volt qui correspond au maximum de force à 20N. La dynamique entre la tension et la force est négligée et suppose qu'elles ont une relation linéaire $F = g_t V_c$.

2.2.2.1 Résultats de simulation et expérimentaux:

La figure 2.5 représente le schéma de simulation de la commande de redressement par la deuxième méthode.

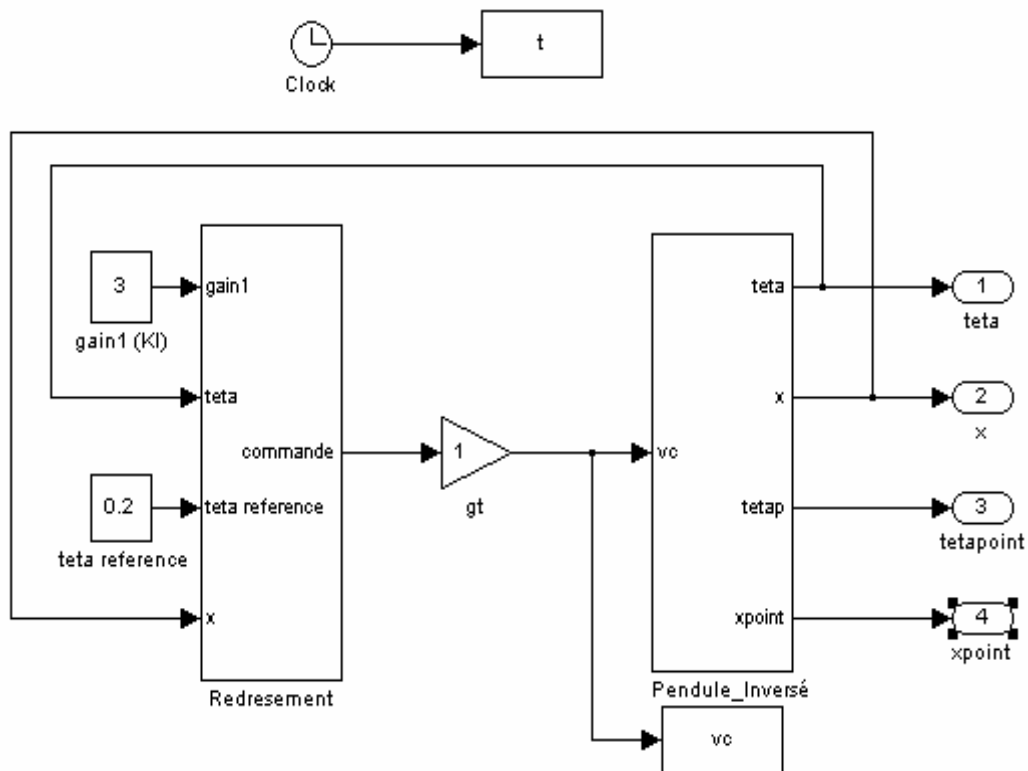


Fig 2.5 : schéma de simulation de la commande de redressement

La figure (2.6) montre que la commande qui permet de converger l'énergie du système vers 0, et donc de redresser le pendule vers la position haute $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ ainsi qu'une limitation de la longueur de rail du chariot entre $\pm 0.5 m$, nécessite un gain $K_l = 3$ pendant un temps de $15.83s$. Ce gain engendre un dépassement dans les valeurs limites de la tension du moteur.

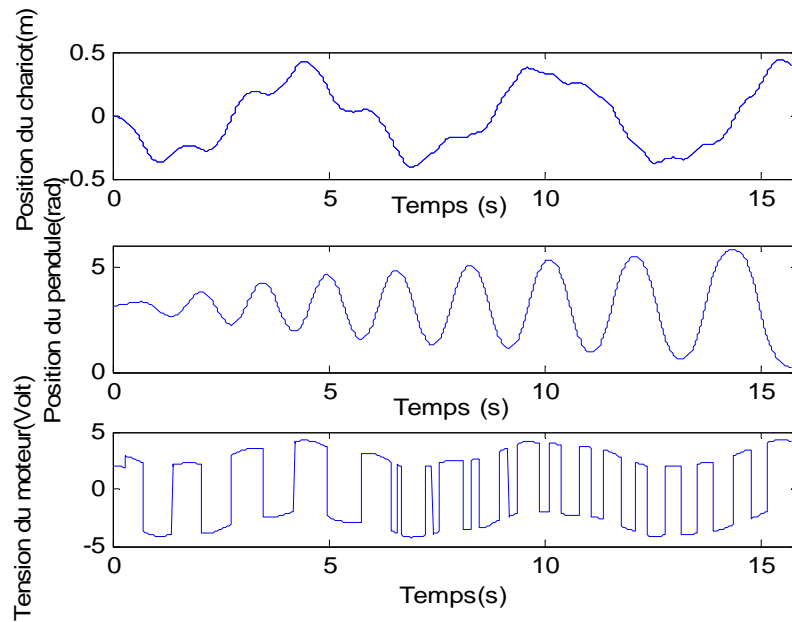


Fig 2.6: Résultat de simulation de redressement, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$
pour $K_l = 3$

2.2.2.2 Implémentation de la commande de redressement

Nous avons procédé à la vérification des simulations et le test de la commande développée en expérimentation au système pendule inversé. La loi de commande est implémentée à l'aide d'un PC pentium IV à 1GHz et le logiciel Matlab 7.2. La période d'échantillonnage est fixée à 0.001s, et on introduit un bloc de saturation entre ± 2.5 volt pour protéger le moteur contre l'effort de commande.

Les figures (2.7) et (2.8) représentent l'évolution des trois grandeurs (x, θ, V_c) pour le même valeur de gain K_l .

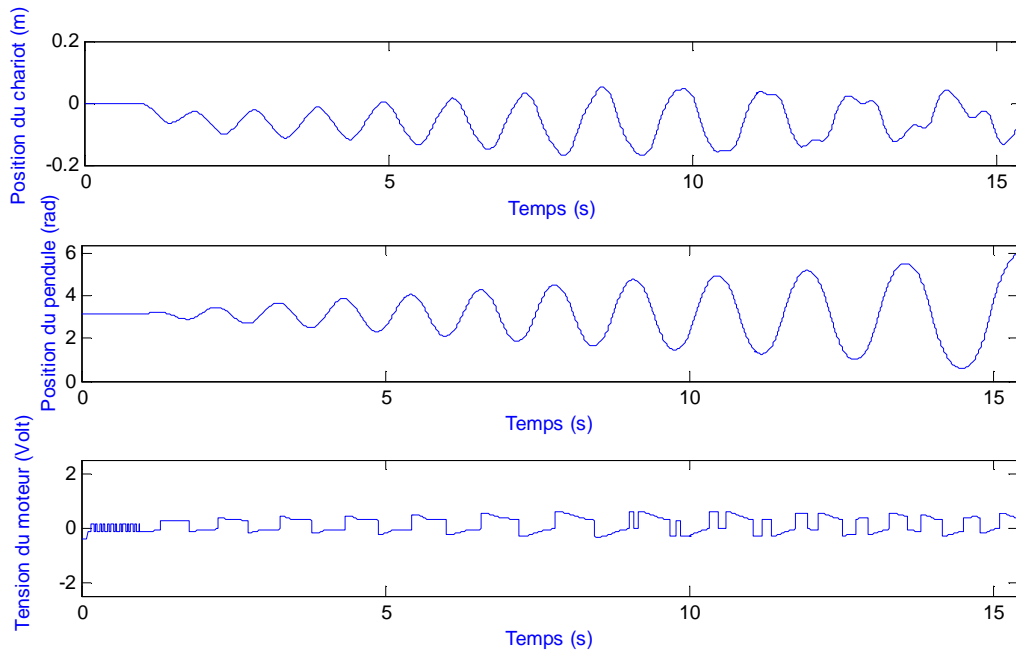


Fig 2.7: Résultats expérimentaux pour $K_l = 0.15$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$, $\theta_{fin} \approx 2\pi$

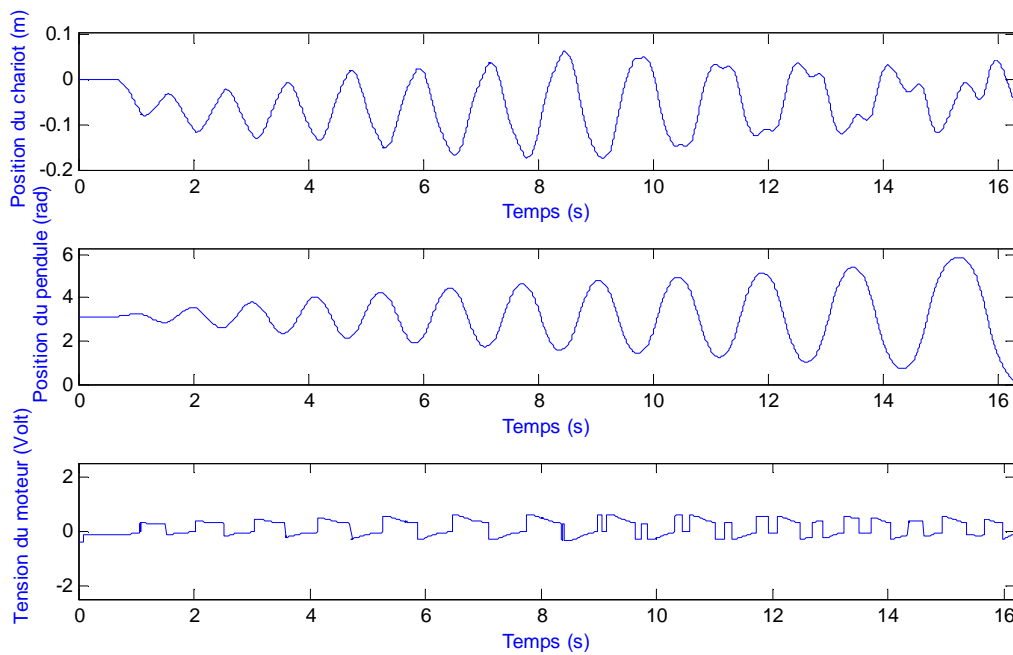


Fig 2.8 : Résultats expérimentaux pour $K_l = 0.15$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$, $\theta_{fin} \approx 0$

2.2.2.3 Interprétation des résultats

Les résultats obtenus lors de l'implémentation de cette commande (figures 2.7 et 2.8), montrent que un gain $K_l = 0.15$ suffit pour ramener le pendule de sa position d'équilibre stable $\theta = \pi$ vers la position d'équilibre instable $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ suivant la direction positive ou négative de θ respectivement, en respectant les limites de la longueur du rail, ainsi que les valeurs limites de la commande $\pm 2.5 V$.

Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation théorique de deux commandes de redressement de pendule inversé. Elles sont basées sur le théorème de stabilité de Lyapunov et le théorème d'invariance de LaSalle.

Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier la validité des deux méthodes développées. Pour l'implémentation seule la deuxième méthode a été implémentée et c'est celle qui sera utilisée dans la suite de mémoire.

Chapitre

3

*Stabilisation du pendule
inversé par retour d'état
entier.*

Introduction

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. Une perte de stabilité entraîne au mieux un comportement oscillatoire et donc une incapacité à réguler ou poursuivre, au pire la génération de signaux de grande énergie qui vont endommager ou détruire le système [5]. On présente dans ce chapitre deux méthodes de commande de stabilisation par retour d'état d'ordre entier permettant de maintenir le pendule dans sa position verticale instable. La première commande proposée est la commande linéaire quadratique. Quant à la deuxième c'est la commande par retour d'état proportionnel intégral.

On présente dans ce qui suit le détail de calcul des paramètres des matrices gains de la loi de commande LQR, et les matrices gains de la commande par retour d'état PI d'ordre entier. Des résultats de simulations et expérimentaux sont également présentés.

3.1 Stabilisation du pendule par retour d'état

Puisque la commande de redressement n'est utilisée que pour redresser le pendule à une position verticale, elle ne permet pas de maintenir sa stabilité dans sa position d'équilibre instable. Le problème de stabilisation est le deuxième problème qu'il faut résoudre lorsqu'on commande le pendule inversé. Dans ce travail on utilise les techniques de commande par retour d'état.

De nombreuses méthodes de commande des processus utilisent le principe du retour d'état (commande optimale, placement de pôles, . . .). Le principe de cette commande est de déterminer une commande telle que les pôles du système bouclé soient convenablement placés dans le plan complexe et satisfasse des performances de précision, de rapidité, de stabilité. Les pôles du système étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

3.1.1 Commande linéaire quadratique (LQR)

On considère le système linéaire continu, invariant dans le temps, régi par les équations suivantes

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = C z(t) \end{cases}, \quad z(t_0) = z_0 \quad (3.1)$$

Où $z(t) \in R^n$ désigne le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ le vecteur de commande, $y(t) \in R^q$ le vecteur de sortie, et z_0 désigne l'état initial à l'instant initial $t=0$, A est la matrice d'évolution ou d'état, B la matrice de commande ou d'entrée, C la matrice de sortie ou de mesure.

La synthèse linéaire quadratique dénommée LQ ou LQR (Linéaire Quadratique Regulator) [19, 24, 30] consiste en la recherche d'une matrice gain K , telle que la commande par retour d'état $u(t) = -Kz(t)$ stabilise le système et minimise le critère quadratique

$$\mathfrak{J} = \int_0^{\infty} (z^T Q z + u^T R u) dt \quad (3.2)$$

Où les matrices de pondérations Q et R satisfont

$$Q = Q^T \geq 0, R = R^T > 0 \quad (3.3)$$

La matrice gain K optimale est donnée par

$$K = -R^{-1} B^T \rho_0 \quad (3.4)$$

Où ρ_0 est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$\rho_0 A + A^T \rho_0 - \rho_0 B R^{-1} B^T \rho_0 + Q = 0 \quad (3.5)$$

L'obtention du gain K passe donc par la recherche de la solution ρ_0 symétrique définie positive de l'équation de Riccati qui reportée dans l'équation (3.4), fournit la matrice gain K .

3.1.1.1 Choix des matrices de pondération

La synthèse des matrices de gain du contrôleur optimal, repose directement sur les matrices de pondération Q et R . On peut trouver dans la littérature deux méthodes pour les choisir. La première méthode est la règle de Bryson [33] qui suggère de choisir des matrices

de pondération diagonales, dont les coefficients diagonaux sont égaux au carré de l'inverse de l'écart maximum souhaité sur la variable correspondante. Bryson [33] indique également que cette règle ne fournit que des valeurs initiales, que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives. La règle de Bryson donne :

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ et } R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) \quad (3.6)$$

Avec

$$r_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(u_i)} \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ et } q_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(y_i)} \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

Dans la deuxième méthode [20] les matrices de pondération Q et R peuvent être choisies symétriques, diagonales. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant.

3.1.1.2 Application pour la stabilisation du pendule inversé

Pour la synthèse de cette loi de commande, on utilise le modèle d'état (1.45) de la page 21 du pendule inversé linéarisé au voisinage de $\theta_0 = 0$. Ce modèle est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, \quad B = [0 \quad 0.4218 \quad 0 \quad -0.9070]^T, \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre d'état du modèle étant égal à $n = 4$ et le nombre d'entrées de commande étant $m = 1$, on choisit les matrices de pondération suivantes:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad R = 0.05 \quad (3.8)$$

Puisque les valeurs maximales de la commande V_c , la position x et l'angle θ sont connues alors pour le choix des matrices de pondération de ces variables la règle de Bryson est utilisée (Equation (3.6), (3.7)) et l'absence des valeurs maximales de la vitesse du chariot et la position du pendule nous a obligé d'utiliser la deuxième méthode. Au départ, les paramètres de la diagonale correspondants à \dot{x} et $\dot{\theta}$ sont choisis égaux à 1, et sont ensuite améliorés par simulations successives jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant.

Une fois les coefficients de pondération Q et R obtenus, la matrice de gain K qui minimise la fonction quadratique \mathfrak{J} est calculée en utilisant la fonction 'lqr' de Matlab, on trouve :

$$K = [-6.3246 \quad -9.6771 \quad -89.3960 \quad -19.8176] \quad (3.9)$$

Les pôles de la boucle fermée, sont dans ce cas :

$$P_1 = -8.8112, P_2 = -2.9646, P_3 = -1.15634 + j 0.907, P_4 = -1.1534 - j 0.907 \quad (3.10)$$

3.1.1.3 Résultats de simulation:

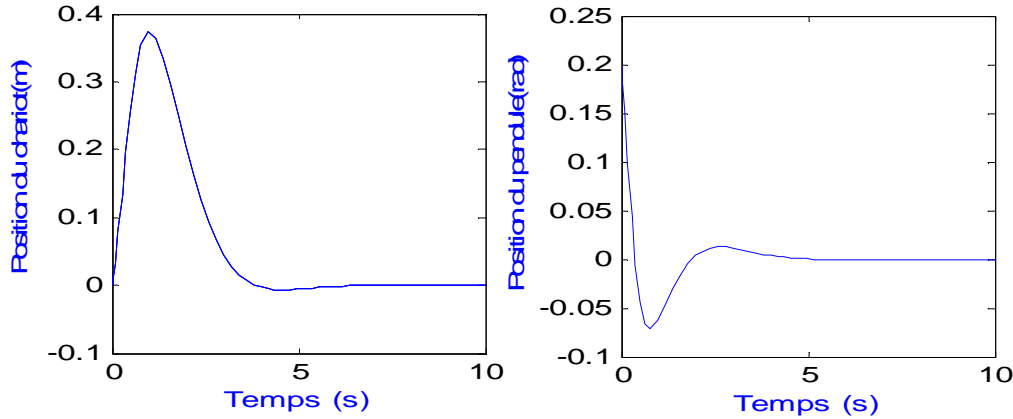


Fig 3.1: Résultat de simulation du modèle linéaire avec le régulateur d'état LQR,

$$CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$$

La figure 3.1 montre que le système pendule inversé linéaire se stabilise au bout de 5 s tout en respectant les contraintes imposées. En effet le déplacement du chariot ne dépasse pas les limites physiques du rail.

La figure (3.2) représente le schéma de simulation du modèle non linéaire avec une combinaison de la commande de redressement et la commande de stabilisation LQR. Dans cette figure, le bloc commande LQR contient les paramètres de la matrice de gain K , ainsi qu'un signal d'horloge qui donne l'information sur la zone atteinte par l'angle θ . Si le pendule atteint la zone $[-0.2, 0.2]$, le contrôleur assurant le balancement est déconnecté et on le remplace par la commande de stabilisation grâce à un bloc de commutation.

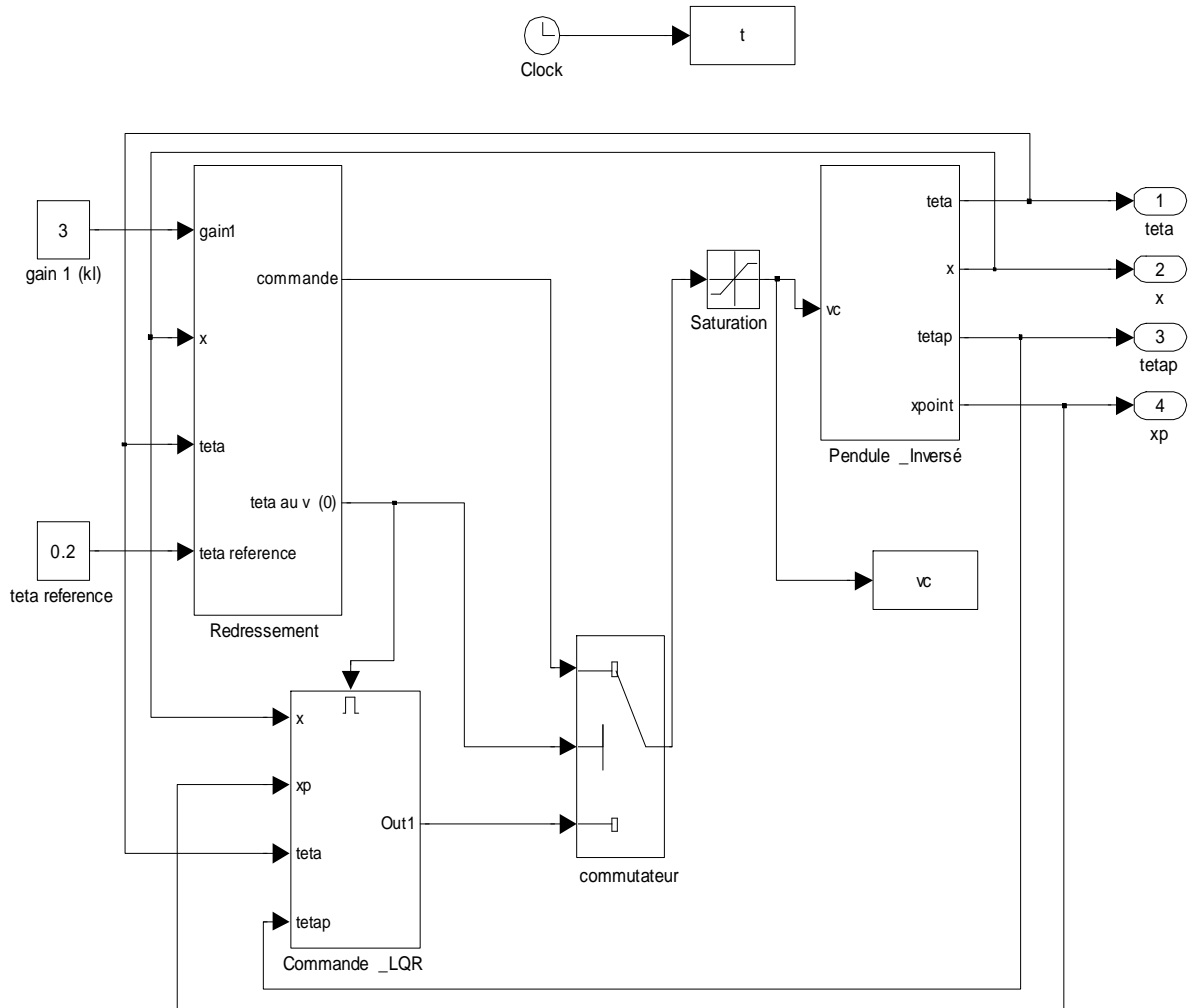


Fig 3.2 : Schéma de simulations de redressement et de stabilisation du pendule inversé par le régulateur LQR

L'application de la matrice gain du régulateur LQR (3.9) calculée à partir du modèle linéaire sur le modèle non linéaire engendre un petit dépassement dans les valeurs limites de la longueur du rail du chariot. Les paramètres de cette matrice sont alors retouchés. On obtient la matrice gain suivante:

$$K = [-6.3246 \quad -9.6771 \quad -78 \quad -12] \tag{3.11}$$

Les résultats de simulation obtenu avec ces valeur de K sont représentés sur la figure 3.3.

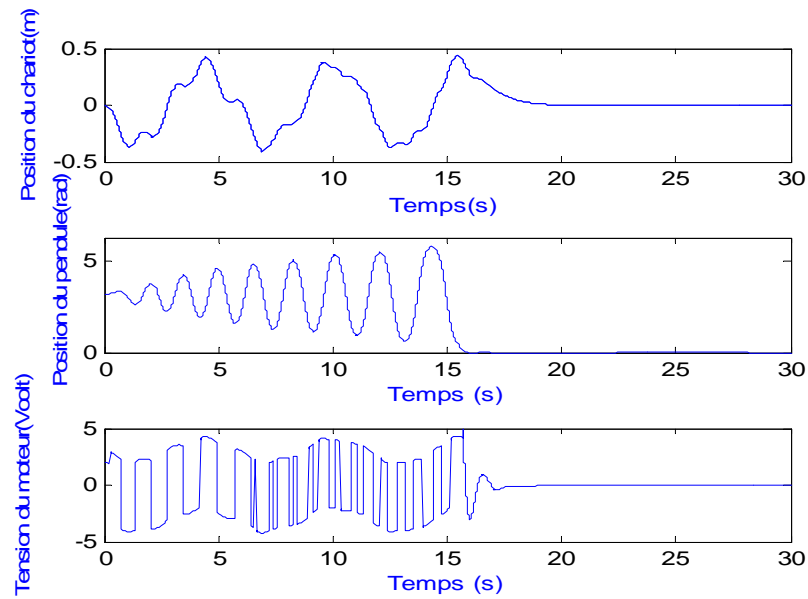


Fig 3.3: Résultats de simulation de redressement et stabilisation du pendule par le régulateur

$$\text{LQR, } CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$$

Les courbes de la figure (3.3) montre qu'après avoir ramené le pendule de sa position d'équilibre stable vers la position d'équilibre instable par une commande non linéaire, la commande linéaire quadratique LQR permet de le maintenir à cette position avec un déplacement maximal de 0.46m. On constate l'efficacité du contrôleur LQR en termes de précision et de stabilité.

3.1.1.4 Implémentation de la commande LQR

Après plusieurs essais sur la maquette expérimentale, les paramètres de la matrice gain sont données par

$$K = g_t, [-6.3246 \quad -9.6771 \quad -78 \quad -12] \quad (3.12)$$

où $g_t = 0.4$: représente le gain qui permet de convertir la force F en tension V_c

Il faut noter que sur le banc d'essai, seule la position du chariot (représentée par la variable x) et la position du pendule (représentée par la variable θ) sont mesurées. Pour mettre en œuvre la commande par retour d'état, nous avons besoin aussi de mesurer les grandeurs \dot{x} et $\dot{\theta}$ représentant respectivement la vitesse linéaire du chariot et la vitesse

angulaire du pendule. Cette mesure n'étant pas possible. Nous avons mis en œuvre un dérivateur suivi d'un filtre passe bas.

Le filtre passe bas utilisé est celui donné par le constructeur. Il est donné par :

$$G_{fx}(s) = G_{fleta} = \frac{10^4}{s^2 + 70.7s + 10^4} \quad (3.13)$$

Les figures (3.4), (3.5) et (3.6) donnent respectivement les résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par la commande LQR en absence de perturbations, en présence de perturbations externes sous forme de forces appliquées sur le pendule et en présence d'une perturbation paramétrique au niveau de la masse du chariot.

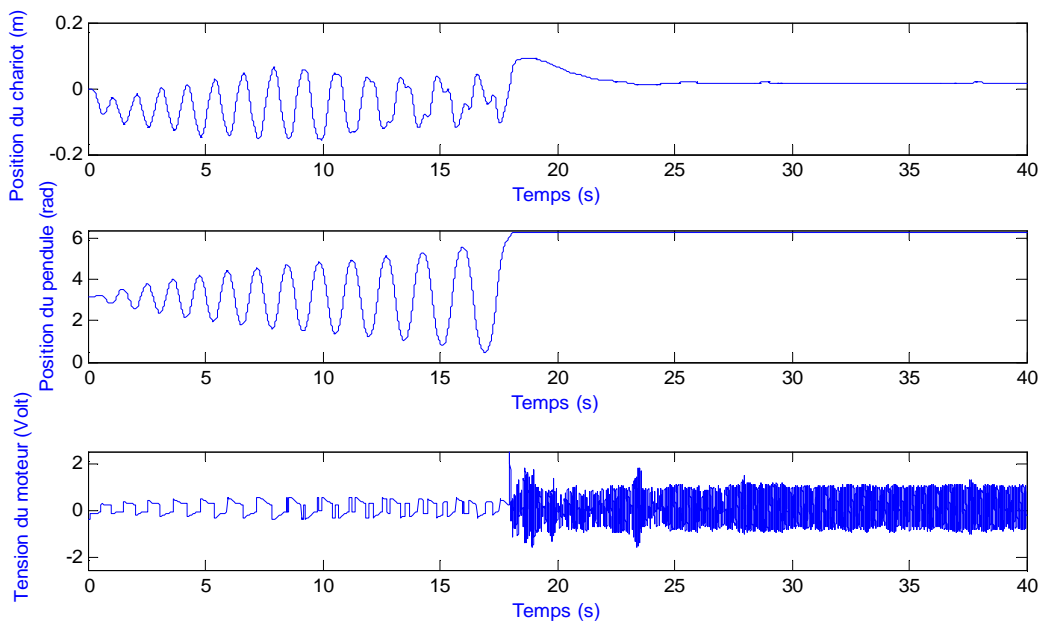


Fig 3.4 : Résultats expérimentaux pour redressement et stabilisation par le régulateur LQR,

$$CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$$

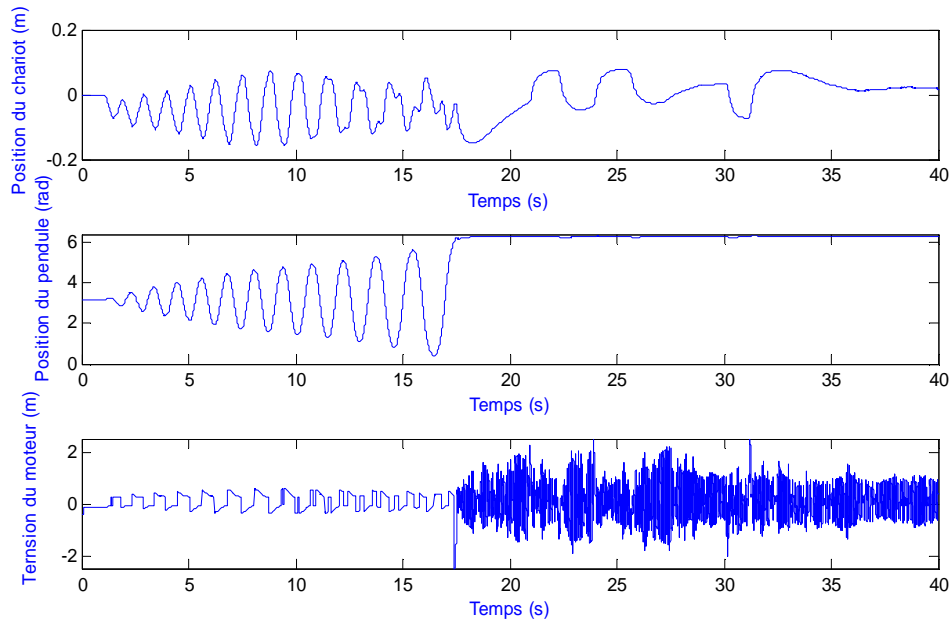


Fig 3.5: Résultats expérimentaux avec trois perturbations externes à partir de l'instant $t=23s$, $t=24s$, $t=30s$

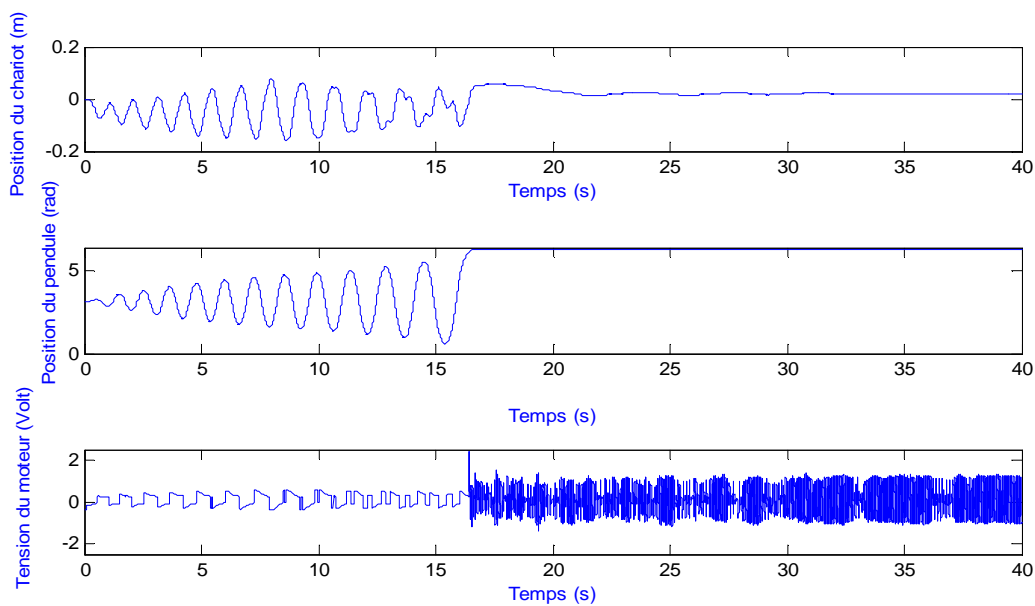


Fig 3.6 : Résultats expérimentaux pour une variation paramétrique M de 40 % à partir de l'instant $t=18s$

3.1.1.5 Interprétation des résultats expérimentaux

La figure (3.4) montre que la commande basée sur le principe de la seconde méthode de Lyapunov et donc sur le minimum d'énergie permet de ramener le pendule depuis sa position d'équilibre stable ($\theta = \pi$) vers la position instable ($\theta = 0$) et à partir de la commande

LQR la stabilité est maintenue à cette position avec un léger pic en tension qui respecte le cahier des charges. En outre elle permet de stabiliser le déplacement du chariot en le ramenant à la position 0.02 au lieu de 0 à cause de présence des bruits de mesure au niveau des capteurs qui corrompent l'estimation de la valeur courante de la position x .

Les figures (3.5) et (3.6) montrent la robustesse de cette commande en termes de rejet de perturbations. En effet, Lorsqu'on a soumis le système à des perturbations externes avec introduction d'une variation paramétrique au niveau du chariot (M) de +40% (figures (3.6)), ou en soumettant le pendule à plusieurs perturbations, sous forme de forces appliquées sur le pendule (figure (3.5)), celui-ci reste toujours stable en position haute et le chariot rejoint la position 0.02m comme dans le cas de simulation sans présence de perturbations.

3.1.2 Commande par retour d'état proportionnel intégral par placement de pôles

La commande LQ est de type proportionnel. Dans le but d'améliorer les performances en régulation en présence de perturbations constantes, il est souhaitable d'ajouter un effet intégral [35]. En effet, au lieu que la loi de commande par contre réaction d'états soit du type $u(t) = K z(t)$, elle devient :

$$u(t) = k_p z(t) + k_I \int_0^t z(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Où, $k_p, k_I \in R^{n \times m}$ sont les matrices de gain conçues pour imposer le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée.

Le schéma général qui permet d'obtenir un retour d'état proportionnel intégral est

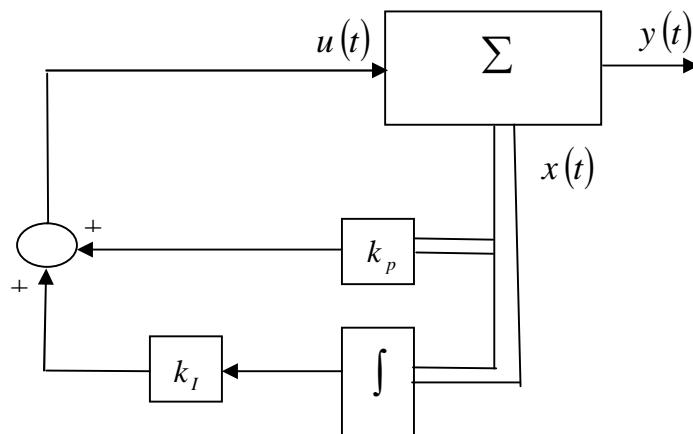


Fig 3.7 : Schéma de commande par retour d'état proportionnel intégral

Lorsque le modèle d'état du système linéaire donné par

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = C z \end{cases}, \quad z(t_0) = z_0 \quad (3.15)$$

le comportement dynamique du système est fixé par le polynôme caractéristique $\Delta(s)$ donné par

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3.16)$$

Où

$$a_0 = \det(-A) = (-1)^n \cdot \det(A) \text{ et } a_{n-1} = -\text{trace}(-A) \quad (3.17)$$

et le modèle d'état du système en boucle fermée est dans ce cas donné par :

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + B k_p z + B k_I \int_0^t z(\tau) d\tau \\ y = C z \end{cases} \quad (3.18)$$

dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$\Delta_{BF}(s) = \det \left[sI - A - B k_p - \frac{B k_I}{s} \right] = 0 \quad (3.19)$$

Le problème est alors de trouver un moyen de déterminer les vecteurs k_p et k_I de sorte à imposer le polynôme caractéristique du système en boucle fermée [19].

Soit $\Delta_d(s)$ le polynôme caractéristique imposé tel que :

$$\Delta_d(s) = \mu_0 + \mu_1 s + \dots + \mu_{n-1} s^{n-1} + \mu_n s^n + \mu_{n+1} s^{n+1} \quad (3.20)$$

La détermination des coefficients de la matrice de retour d'état est grandement simplifiée si le système considéré est représenté sous la forme canonique commandable. Cette forme existe si et seulement si le système est commandable.

3.1.2.1 Transformation du modèle sous la forme canonique commandable

Puisque tous les états du système sont supposés commandables, il existe donc une transformation linéaire T_c qui permet d'obtenir un autre modèle du système ayant la forme particulière canonique commandable.

On effectue le changement de base :

$$\xi = T_c z \Rightarrow z = T_c^{-1} \xi \quad (3.21)$$

Où $\xi \in R^{n \times 1}$ et $T_c \in R^{n \times n}$ est la matrice de transformation

Le modèle d'état dans la nouvelle base s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c u \\ y = C_c \xi \end{cases} \quad (3.22)$$

avec

$$A_c = T_c A T_c^{-1}, B_c = T_c B, C_c = C T_c^{-1} \quad (3.23)$$

La matrice de transformation T_c est donnée par :

$$T_c = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{bmatrix}, \text{ et } q_1 (1 \times n) = e_n^T w_c^{-1} \quad (3.24)$$

w_c est la matrice de commandabilité du système qui peut être obtenue par :

$$w_c = [B \quad AB \quad A^2 B \quad \cdots \quad A^{n-1} B] \quad (3.25)$$

Et $e_n (1 \times n) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^T$ est un vecteur unitaire.

Après le changement de base effectué on obtient la forme canonique commandable suivant :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

La loi de commande obtenue dans la nouvelle base s'écrit :

$$u = k_p T_c^{-1} \xi + k_I T_c^{-1} \int_0^t \xi(\tau) d\tau \quad (3.27)$$

Le modèle d'état du système en boucle fermée dans la nouvelle base est donné par:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c \left(k_p T_c^{-1} \xi + k_I T_c^{-1} \int \xi(\tau) d\tau \right) \\ y = C_c^T \xi \end{cases} \quad (3.28)$$

Soit $k_{pc} = k_p T_c^{-1} = [k_{pc_1} \cdots k_{pc_n}]$, et $k_{Ic} = k_I T_c^{-1} = [k_{Ic_1} \cdots k_{Ic_n}]$

L'équation caractéristique dans ce cas est donné par :

$$\Delta_{BF}(s) = \det \left[sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{B_c k_{Ic}}{s} \right] = 0 \quad (3.29)$$

Les matrices $B_c k_{pc}$ et $B_c k_{Ic}$ sont respectivement données par :

$$B_c k_{pc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{pc_1} & k_{pc_2} & \cdots & \cdots & k_{pc_n} \end{bmatrix}, B_c k_{Ic} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ k_{Ic_1} & k_{Ic_2} & \cdots & \cdots & k_{Ic_n} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Donc la matrice $sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{B_c k_{Ic}}{s}$ a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ a_0 - k_{pc_1} \frac{k_{Ic_1}}{s} & a_1 - k_{pc_2} \frac{k_{Ic_2}}{s} & \cdots & \cdots & s + a_{n-1} - k_{pc_n} \frac{k_{Ic_n}}{s} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Le polynôme caractéristique correspondant est donné par :

$$\Delta_{BF}(s) = -k_{Ic_1} + (a_0 - k_{pc_1} - k_{Ic_2})s + \cdots + (a_{n-2} - k_{pc_{n-1}} - k_{Ic_n})s^{n-1} + (a_{n-1} - k_{pc_n})s^n + s^{n+1} \quad (3.32)$$

Le polynôme caractéristique, que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée, étant $\Delta_d(p)$ donné par l'équation (3.20).

En égalisant l'équation (3.32) au polynôme caractéristique désiré ($\Delta_d(s) = \Delta_{BF}(s)$), on obtient les relations suivantes [35] :

$$\begin{aligned} -k_{Ic_1} &= \mu_0 \\ a_0 - k_{pc_1} - k_{Ic_2} &= \mu_1 \\ &\vdots \\ a_{n-2} - k_{pc_{n-1}} - k_{Ic_n} &= \mu_{n-1} \\ a_{n-1} - k_{pc_n} &= \mu_n \\ 1 &= \mu_{n+1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pour déterminer les coefficients, k_{pc} , k_{Ic} , les coefficients k_{pc} sont choisis pour compenser les coefficients a_i du polynôme caractéristique du système et les coefficients k_{Ic} sont déterminés pour imposer les coefficients du polynôme caractéristique de la boucle fermée, on obtient ainsi:

$$\begin{aligned} k_{pc} &= [a_0 \ : \ a_1 \ : \ a_2 \ : \ \cdots \ : \ a_{n-1} - \mu_n] \\ k_{Ic} &= [-\mu_0 \ : \ -\mu_1 \ : \ -\mu_2 \ : \ \cdots \ : \ -\mu_{n-1}] \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le placement de pôles stable du système en boucle fermée dans la base originale peut être réalisé en utilisant les vecteurs gain proportionnel et intégral suivants:

$$\begin{aligned} k_p &= [a_0 \ : a_1 \ : a_2 \ : \dots \ : a_{n-1} - \mu_n] \cdot T_c \\ k_I &= [-\mu_0 \ : -\mu_1 \ : -\mu_2 \ : \dots \ : -\mu_{n-1}] \cdot T_c \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.1.2.2 Algorithme de calcul par retour d'état proportionnel intégral par placement de pôle

Etape 1 : Calculer le polynôme caractéristique du système original selon l'équation (3.16).

Etape 2 : Calculer la matrice T_c permettant d'obtenir la forme canonique comandaible.

Etape 3 : Spécifier les $n+1$ pôles à imposer à la boucle fermée.

- Pour que la commande soit physiquement réalisable, les valeurs propres choisies doivent être réelles ou complexes conjuguées deux à deux (ce qui garantit un polynôme caractéristique à coefficients réels).

- La stabilité étant la première qualité à assurer pour la boucle fermée, les valeurs propres doivent être à partie réelle strictement négative.

Etape 4 : Calculer les coefficients du polynôme caractéristique désiré.

Etape 5 : Calculer les matrices de gain (équation (3.34) et (3.35)) [35].

3.1.2.3 Application pour la stabilisation du pendule inversé

On rappelle dans ce qui suit le modèle d'état du pendule inversé linéarisé au voisinage de $\theta_0 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$, B = [0 \ 0.4218 \ 0 \ -0.9070]^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de commandabilité est donnée par:

$$w_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.4218 & -0.0041 & 0.485 \\ 0.4218 & -0.0041 & 0.485 & -0.1832 \\ 0 & -0.907 & 0.1714 & -20.2092 \\ -0.9070 & 0.1714 & -20.2092 & 7.632 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Puisque la matrice de commandabilité w_c est de rang plein, cela signifie que tous les états du système sont commandables, alors les matrices A , B peuvent être mises sous la forme commandable, la matrice de transformation T_c est donnée par:

$$T_c = \begin{bmatrix} -0.1124 & -0.0010 & -0.0523 & -0.0004 \\ 0 & -0.1124 & -0.0094 & -0.0523 \\ 0 & 0 & -1.1025 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.1025 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Les pôles à imposer au système en boucle fermée sont choisis tels que:

$$s_1 = -2, s_2 = -12, s_3 = -10, s_4 = -2.5, s_5 = -20 \quad (3.39)$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est dans ce cas donné par:

$$\Delta_d(s) = s^5 + 46.5s^4 + 754s^3 + 5130s^2 + 13600s + 12000 = 0 \quad (3.40)$$

L'étape 5 de l'algorithme permet de calculer les matrices de gain proportionnel et intégral dans la nouvelle base k_{pc} et k_{Ic} respectivement

$$\begin{aligned} k_{pc} &= [0 \quad -0.0004 \quad -22.2449 \quad -46.3110] \\ k_{Ic} &= [-12000 \quad -13600 \quad -5130 \quad -754] \end{aligned} \quad (3.41)$$

Par conséquent, les matrices de gain proportionnel et intégral dans la base originale sont données par

$$k_p = [0 \quad 0 \quad 24.5250 \quad 51.0579]$$

$$k_I = [1348 \ .6 \quad 1539 \ .9 \quad 6411 \ .3 \quad 1547 \ .3]$$
(3.42)

3.1.2.4 Résultats de simulation:

La figure (3.8) représente le résultat de simulation de la commande par retour d'état proportionnel intégral appliquée pour la stabilisation de pendule inversé linéarisé autour de $\theta = 0$ avec les conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$. Cette figure montre que le système pendule inversé linéaire se stabilise au bout de 4 sec. Elle montre également que dans le régime transitoire, la position du chariot ne dépasse pas les limites physiques du rail.

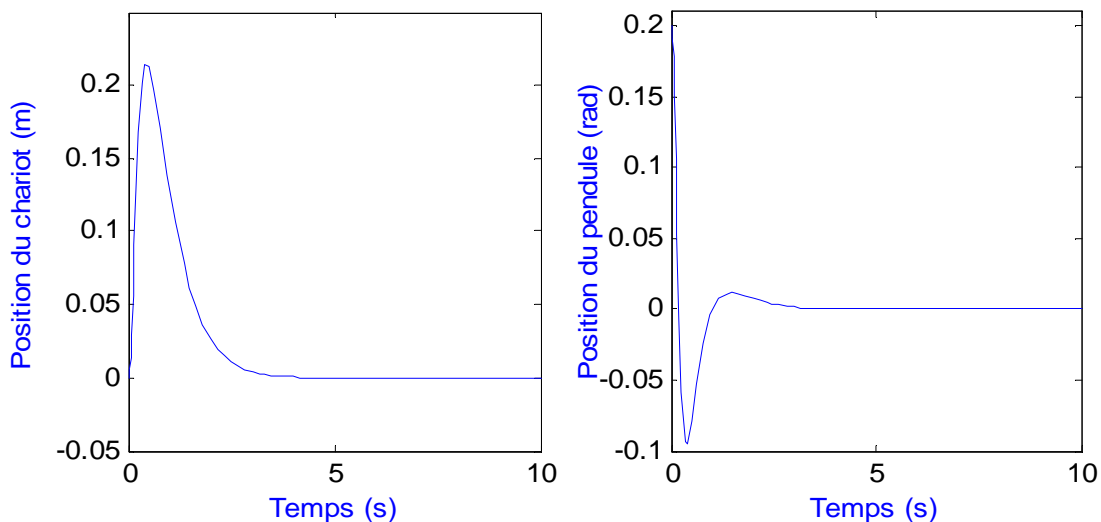


Fig 3.8 : Résultat de simulation de stabilisation du pendule inversé linéarisé,
 $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$

La figure (3.9) représente le schéma de simulation du modèle non linéaire avec une combinaison de la commande de redressement et la commande de stabilisation par retour d'état proportionnel intégral appliqué pour stabiliser le pendule. Dans cette figure, les blocs commande-proportionnelle, commande-intégrale contiennent les paramètres des matrices gains proportionnel et intégral respectivement, ainsi qu'un signal d'horloge qui donne

l'information sur la zone atteinte par l'angle θ . Si le pendule atteint la zone $[-0.2, 0.2]$, le contrôleur assurant le balancement est déconnecté et on le remplace par la commande de stabilisation grâce à un bloc de commutation. Le bloc saturation limite la tension du moteur entre $\pm 2.5 V$,

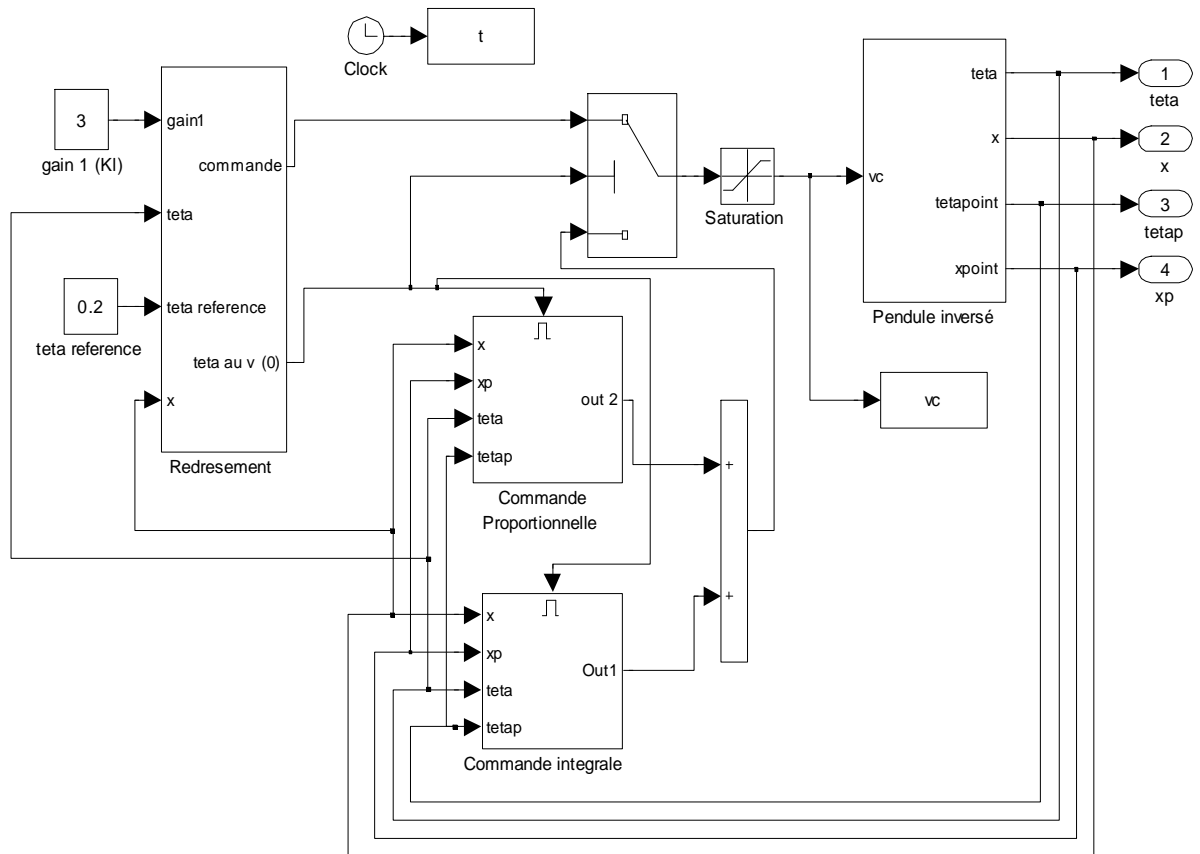


Fig 3.9 : Schéma de simulation de stabilisation et redressement du pendule inversé non linéaire

L'application des matrices gains obtenus au système non linéaire donne les résultats de simulation de la figure (3.10).

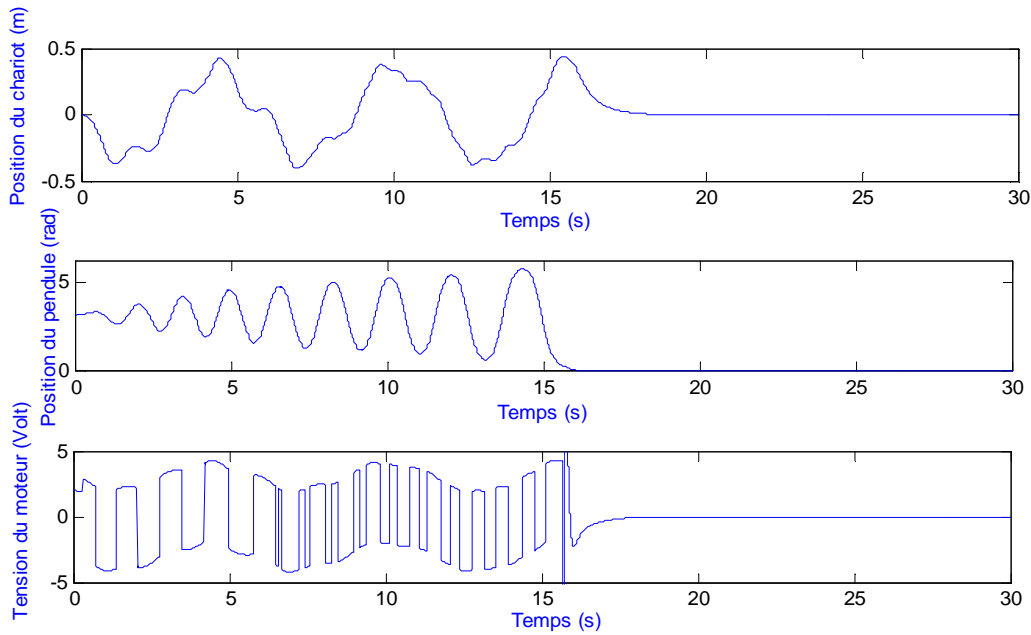


Fig 3.10 : Résultats de simulation de redressement et de stabilisation du système pendule inversé non linéaire, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

Les résultats de simulation de la figure (3.10) montrent l'efficacité de contrôleur proportionnel intégral. En effet il permet de maintenir la stabilité du pendule à la position d'équilibre instable et d'asservir la position du chariot à 0 avec un déplacement maximal inférieur à $0.5m$

3.1.2.5 Implémentation de la commande par retour d'état PI

Après plusieurs essais sur le banc d'essai, les paramètres des matrices gain PI sont ajustés aux valeurs suivantes

$$\begin{aligned} k_p &= g_t \cdot [0 \quad 0 \quad 24.5250 \quad 51.0579] \\ k_I &= g_t \cdot [1348.6 \quad 1539.9 \quad 6411.3 \quad 1547.3] \end{aligned} \quad (3.43)$$

où , $g_t = 0.2$: représente le gain qui permet de convertir la force F en tension V_c

Les filtres passe bas utilisés pour chacune des variables non mesurables $\dot{\theta}$ et \dot{x} , sont donnés par

$$G_{fx} = \frac{2 \cdot 10^4}{p^2 + 70.5p + 10^4}, \quad G_{f\theta} = \frac{0.9 \cdot 10^4}{p^2 + 70.5p + 10^4} \quad (3.44)$$

Les figures (3.11), (3.12) et (3.13) montrent respectivement les résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par retour d'état proportionnel intégral en absence de perturbations, en présence de perturbations externes sous forme de forces appliquées sur le pendule et en présence d'une perturbation paramétrique au niveau de la masse du chariot.

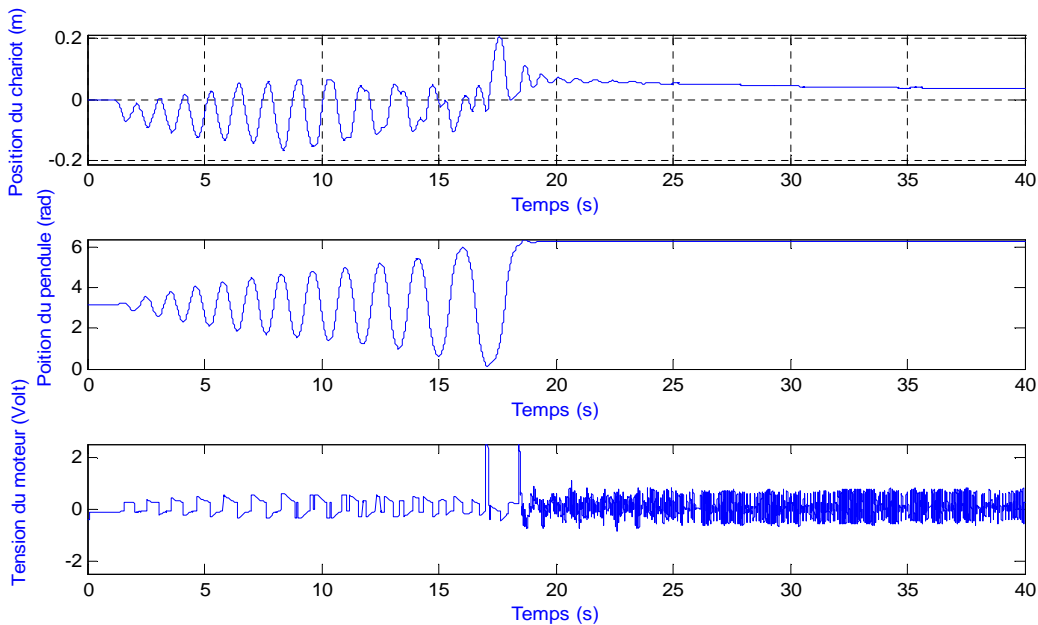


Fig 3.11 : Résultats expérimentaux obtenus en utilisant la contre réaction d'état d'ordre entier, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$

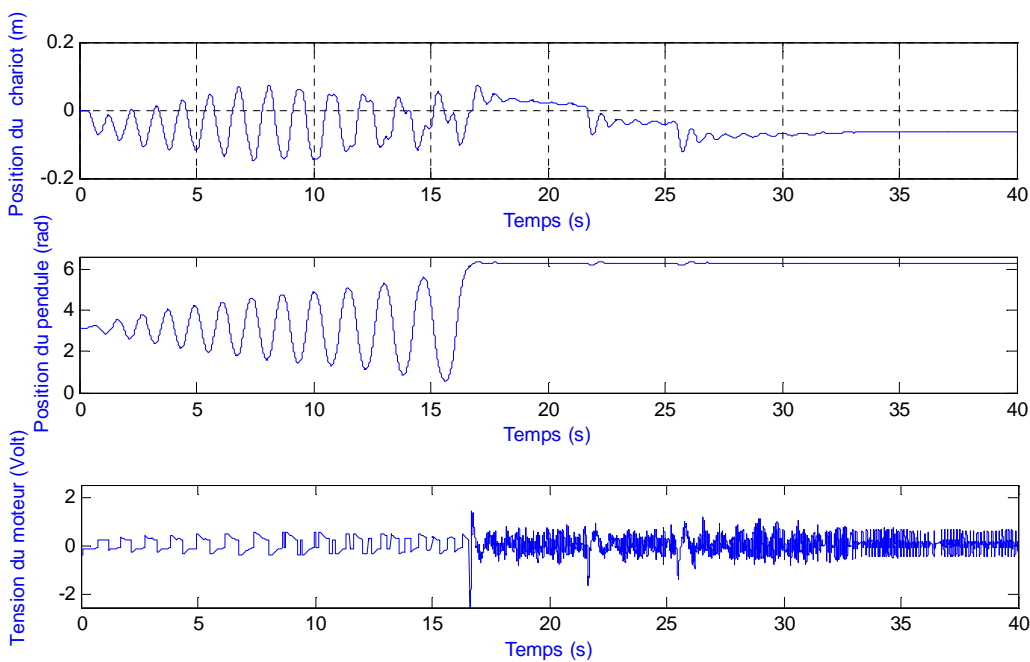


Fig 3.12: Résultats expérimentaux avec deux perturbations externes à partir de l'instant $t=21.5s$, $t=25.5s$

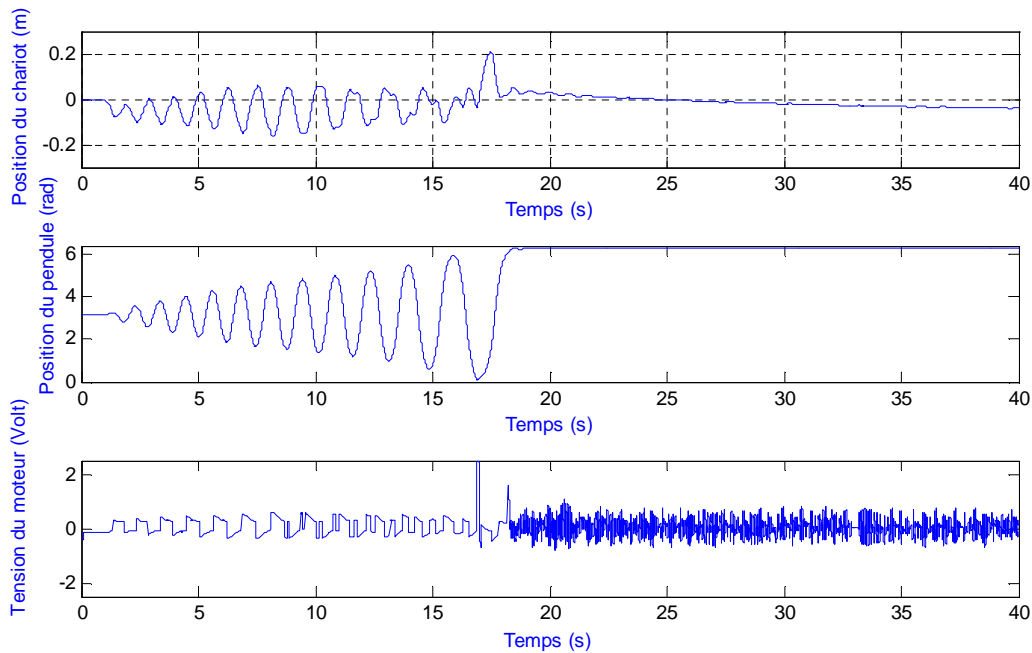


Fig 3.13 : Résultats expérimentaux pour une variation paramétrique M de 40 % à partir de l'instant $t=21s$

3.1.2.6 Interprétation des résultats expérimentaux

A l'instant où le pendule atteint la position d'équilibre instable ($\theta = 0$), grâce à la commande de redressement, la commande de stabilisation par un retour d'état PI permet de le maintenir dans cette position comme le montre la figure (3.11).

Dans la figure (3.12) le cas d'application de deux perturbations externes sous forme de forces appliquées sur le pendule, à partir de l'instant $t= 21.5$ sec et 25.5 sec, le système répond avec des oscillations très faibles et négligeables du pendule. Le régulateur réagit et corrige cette perturbation avec une énergie tolérable et stabilise le système après 5s à la disparition de la perturbation. Le chariot se stabilise à 0.05m au lieu de 0 à cause de présence des bruits de mesure au niveau des capteurs.

La figure (3.13) montre la robustesse de la commande par retour d'état PI vis-à-vis des perturbations. Malgré la variation paramétrique de +40% au niveaux de la masse du chariot (M), nous n'avons observé aucun changement qui mérite d'être signalé cela montre la robustesse de cet méthode vis à vis de la variation paramétrique de la masse du pendule.

Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons vu les notions de base concernant la commande linéaire quadratique (LQR), ensuite, nous avons présenté les résultats de simulations et expérimentaux qu'a donnée cette commande.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté la commande par retour d'état proportionnel intégral, ensuite nous avons donné les résultats de simulations et expérimentaux obtenus en utilisant cette méthode pour stabiliser le pendule inversé. L'intérêt de ces approches réside dans la simplicité de la mise en œuvre de ces lois de commande.

Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier la validité des deux méthodes développées. Les bons résultats expérimentaux obtenus prouvent l'intérêt des deux méthodes, et montrent la robustesse des deux commandes vis-à-vis des perturbations externes.

La synthèse du régulateur par retour d'état proportionnel intégral d'ordre non entier fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre

4

*Stabilisation du pendule
inversé par retour d'état
fractionnaire.*

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter une nouvelle méthode de synthèse d'une loi de commande par retour d'état proportionnel intégral (PI) d'ordre non entier. Cette méthode constitue l'originalité principale de ce mémoire. La synthèse des paramètres des matrices gains de cette loi de commande est effectuée par deux méthodes qui utilisent le principe de placement des pôles. Le choix des pôles dépend de l'ordre non entier α pour la première méthode et indépendant de ce dernier pour la deuxième méthode.

L'autre objectif de ce chapitre est l'implémentation de cette loi de commande fractionnaire pour la stabilisation du pendule inversé.

Mais avant d'aborder la loi de commande par retour d'état PI fractionnaire et son application pour stabiliser le pendule inversé, la première partie de ce chapitre est consacrée à quelques notions de base de la dérivation non entière.

4.1 Systèmes fractionnaires

Un système est dit fractionnaire lorsqu'il est décrit par une équation différentielle impliquant des dérivées fractionnaires.

Dans le cas général, un système fractionnaire (ordre non entier) monovarié, linéaire à temps invariant est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) + a_0 y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) + b_0 u(t) \quad (4.1)$$

dans laquelle les coefficients a_i et b_j ainsi que les ordres de dérivation α_i et β_j sont des variables réels. $u(t) \in R$, et $y(t) \in R$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. D^α désigne l'opérateur de dérivation d'ordre α . En appliquant la transformée de Laplace de chaque membre de l'équation (4.1), on obtient, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la fonction de transfert du système :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (4.2)$$

Lorsque les ordres de dérivation α_i et β_j sont quelconques le système est appelé système fractionnaire généralisé (non commensurable), lorsqu'ils sont multiples d'un même nombre non entier α , on parle d'un système d'ordre commensurable [30]. Dans ce cas la fonction de transfert de l'équation (4.2) devient :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=1}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (4.3)$$

Le système non entier décrit par l'équation différentielle (4.2) est strictement propre lorsque $\beta_m < \alpha_n$. Lorsque $\beta_m = \alpha_n$ le système est juste propre.

4.2 Dérivateur généralisé

Un dérivateur d'ordre α quelconque, appelé dérivateur généralisé, est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ est égale à la dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ de sa grandeur d'entrée $u(t)$ [30] soit :

$$y(t) = \tau^\alpha u^{(\alpha)}(t) = \tau^\alpha D^\alpha u(t) \quad (4.4)$$

où $D = d/dt$ et α est un entier ou non entier, réel ou complexe. τ désigne la constante de temps de différentiation, réelle et positive. Lorsque $\alpha > 0$, on parle d'un dérivateur et lorsque $\alpha < 0$ on parle d'un intégrateur. Souvent, on préfère l'appeler simplement le dérivateur généralisé [30].

4.3 Calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier

Comme dans le cas des systèmes entiers, un système fractionnaire est stable lorsque les racines de son polynôme caractéristique sont réelles ou complexes à partie réelle négative. On présente dans ce qui suit une méthode permettant de calculer approximativement les racines d'un polynôme d'ordre non entier.

Soit un polynôme d'ordre non entier $\Delta_{ne}(s)$ donné par :

$$\Delta_{ne}(s) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 = 0 \quad (4.5)$$

avec : $a_i \in R$, $\alpha_i \in R^+$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Actuellement, il n'existe pas de méthode permettant de calculer exactement les racines d'un tel polynôme, la méthode utilisée est celle développée par Oustaloup [30] dont le principe consiste à remplacer les puissances non entière α_i par des nombres rationnels de la forme :

$$\alpha_i = \frac{r_i}{q} + e_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.6)$$

où r_i/q et e_i représentent respectivement la puissance rationnelle et l'erreur de rationalisation de même rang.

L'entier q est calculé de sorte que la somme des erreurs de rationalisation e_i soit minimale.

En effectuant la procédure d'approximation (4.6), le polynôme non entier $\Delta_{ne}(s)$ de l'équation (4.5) devient un polynôme fractionnaire, il est donné par :

$$\Delta_f(s) = a_n s^{r_n/q} + a_{n-1} s^{r_{n-1}/q} + \dots + a_1 s^{r_1/q} + a_0 = 0 \quad (4.7)$$

En raison de l'approximation (4.6), il est clair que les racines du polynôme fractionnaire (4.7) ne sont que les approximations du polynôme non entier (4.5).

Soit alors le changement de variable :

$$p = s^{1/q} \quad (4.8)$$

Le changement de variable (4.8) permet de transformer le polynôme fractionnaire (4.7) en un polynôme d'ordre entier donné par

$$\Delta(p) = a_n p^{r_n} + a_{n-1} p^{r_{n-1}} + \dots + a_1 p^{r_1} + a_0 = 0 \quad (4.9)$$

Connaissant les r_n racines simples ou multiples de polynôme (4.9), on peut, grâce au changement de variable (4.8), déduire les racines du polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$ de l'équation (4.7) qui sont les approximations des racines du polynôme non entier (4.5).

Soit p_i une racine du polynôme entier $\Delta(p)$, elle peut être écrite sous la forme :

$$p_i = |p_i| e^{\arg(p_i)} \text{ où } -\pi < \arg(p_i) \leq \pi, \quad (i = 1, \dots, r_n) \quad (4.10)$$

Avec $|p_i|$ et $\arg(p_i)$ sont respectivement le module et l'argument de la racine p_i .

Soit s un zéro de polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$. Si la variable complexe s est écrite sous la forme $s = |s|e^{j\Phi}$ avec $\Phi = \Phi_0 + 2k\pi$, il est possible d'exprimer une quelconque puissance de s , par :

$$s^{\alpha_i} = \left(|s| e^{j(\Phi_0 + 2k\pi)}\right)^{\alpha_i} = |s|^{\alpha_i} e^{j\alpha_i\Phi_0} e^{j2\alpha_i k\pi} \quad (4.11)$$

Lorsque α_i est un nombre entier, $e^{j2\alpha_i k\pi} = 1 \quad \forall k$, ce qui exprime que s^{α_i} a un seul sens, traduisant ainsi l'uniformité du polynôme (4.5), dans ce cas entier.

Dans le cas où α_i est non entier, le terme $e^{j2\alpha_i k\pi}$ dépend de k , exprimant que s^{α_i} a plusieurs sens et traduit ainsi la multiformité du polynôme non entier (4.5).

Pour rendre cette équation uniforme, il faut éviter que l'argument de s décrive un tour complet, ce qui est possible en effectuant une coupure du plan complexe [30]. Cependant, une telle coupure doit être effectuée suivant l'axe R^- pour répondre au caractère indéfini de s^{α_i} pour $s \in R^-$ et $\alpha_i \in R - Z$. La coupure ainsi définie impose la détermination $]-\pi, \pi[$ pour l'argument de s et est bien conforme à la condition sur s , soit $s \in C - R^-$ (figure 4.1).

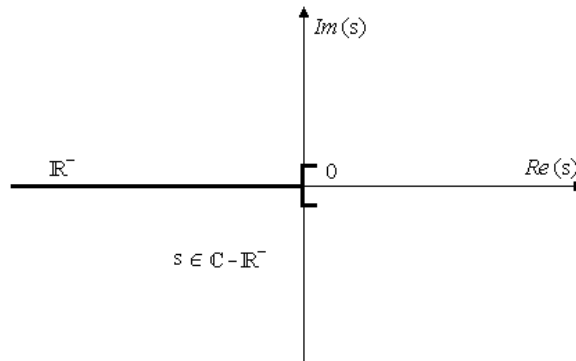


Fig. 4.1: Coupure du plan complexe suivant l'axe R^-

Les racines du polynôme fractionnaire $\Delta_f(s)$ sont données par [29] :

$$\begin{cases} |s| = |p_i|^q \\ \arg(s) = q \arg(p_i) + 2qk\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \frac{-1}{2q} - \frac{\arg(p_i)}{2\pi} < k < \frac{1}{2q} - \frac{\arg(p_i)}{2\pi} \end{cases} \quad (4.12)$$

Exemple

Soit à résoudre le polynôme non entier :

$$\Delta_{ne}(s) = s^{1.51} - 3s^{0.55} + 2 = 0 \quad (4.13)$$

Il faut remarquer que ce polynôme est fractionnaire d'ordre $1/100$ puisque $1.51 = 151/100$ et $0.55 = 55/100$, dans ce cas il faut résoudre un polynôme entier d'ordre 151 puis vérifier pour chacune de ces racines celle qui annule le polynôme (4.13). Mais dans ce qui suit, on le considère comme étant non commensurable pour illustrer la méthode précédente.

En approximant les ordres non entiers 1.55 et 0.55 par

$$\begin{cases} 1.51 = \frac{3}{2} \Rightarrow e_1 = 0.01 \\ 0.55 = \frac{1}{2} \Rightarrow e_2 = 0.05 \\ e = e_1 + e_2 = 0.06 \end{cases} \quad (4.14)$$

Le polynôme fractionnaire correspondant est dans ce cas donné par :

$$\Delta_f(s) = s^{3/2} - 3s^{1/2} + 2 = 0 \quad (4.15)$$

à l'aide du changement de variable $p = s^{1/2}$, celui-ci devient entier et s'écrit sous la forme :

$$\Delta(p) = p^3 - 3p + 2 = 0 \quad (4.16)$$

dont les racines sont respectivement :

$$p_{1,2} = 1 = e^{j0} : \text{solution double}, \quad p_3 = -2 = 2e^{j\pi} : \text{solution simple}$$

La condition d'existence des racines du polynôme fractionnaire s'exprime dans ce cas par :

$$\begin{cases} \text{Pour } p_1 \text{ et } p_2 & -0.25 < k < 0.25 \Rightarrow k = 0 \\ \text{Pour } p_3 & -0.75 < k < -0.25 \Rightarrow k \text{ n'existe pas} \end{cases} \quad (4.17)$$

Avec k devant être un entier.

La racine $p = -2$, ne peut pas engendrer de racine du polynôme $\Delta_f(s)$ puisqu'elle appartient à l'axe R^- . C'est ce qu'on appelle un multimode aperiodique.

Par conséquent, seul les racines p_1 et p_2 du polynôme entier (4.16) engendrent des racines du polynôme fractionnaire (4.15), et donc du polynôme non entier (4.13).

Finalement les racines du $\Delta_f(s)$ sont :

$$s_{1,2} = 1 \quad (4.18)$$

4.4 Stabilité des systèmes non entiers

Comme dans le cas entier, la condition de stabilité d'un système non entier d'ordre commensurable, est que l'équation caractéristique du système n'admet aucune racine à partie réelle positive ou nulle.

Néanmoins et comme on vient de le voir, la vérification de cette condition de stabilité par le calcul des racines de l'équation caractéristique s'avère très difficile en raison de la complexité de leur calcul. Au lieu de raisonner sur les racines du polynôme caractéristique en s , Matignon [25] a établi une condition de stabilité en raisonnant sur le polynôme entier correspondant, de variable complexe p , obtenu à partir de l'équation caractéristique, de variable s , par le changement de variable $p = s^\alpha$. Cette condition ne peut de ce fait être appliquée qu'aux systèmes non entiers d'ordre commensurable.

Théorème 1 Un système non entier d'ordre commensurable α est BIBO stable, si et seulement si, les racines du polynôme entier, de la variable p , obtenu à partir de l'équation caractéristique du système, de variable s , par le changement de variable $p = s^\alpha$ vérifient la condition [29] :

$$|\arg(p_i)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.19)$$

Où n est le nombre de racines du polynôme entier, p_i , ($i = 1, \dots, n$) sont les racines du polynôme entier, $\arg(p_i)$ est l'argument de la racine p_i , le domaine de stabilité est représenté par la Figure (4.2).

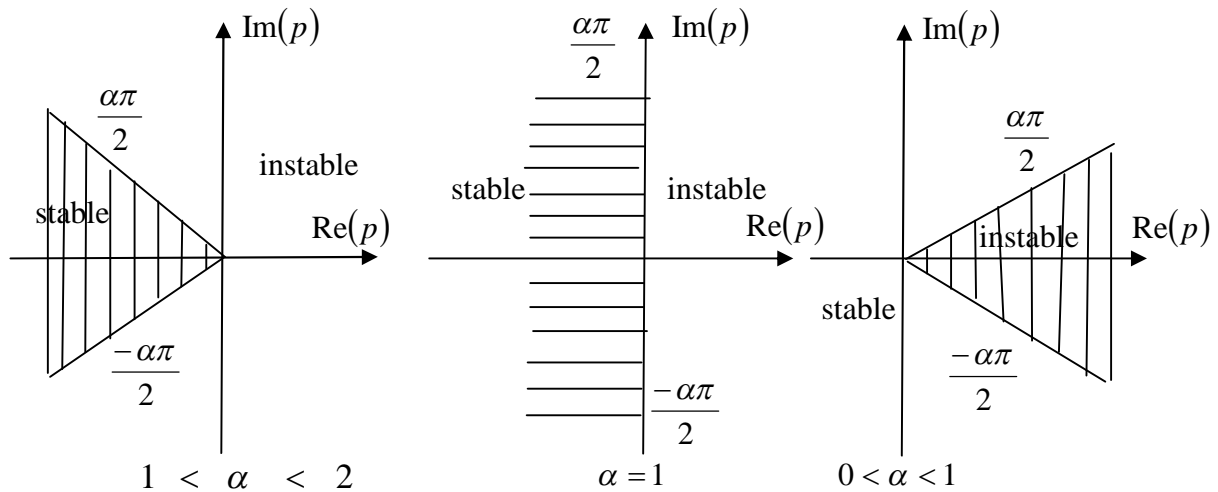


Fig 4.2: Domaine de stabilité des systèmes commensurables dans le plan complexe $p = s^\alpha$

4.5 Approximation du dérivateur généralisé

L'absence d'outils mathématiques et numériques adéquats permettant l'analyse, la simulation et la réalisation du dérivateur généralisé qui constitue l'élément principal pour la synthèse des systèmes non entiers implique son approximation par une transmittance d'ordre entier. Plusieurs méthodes d'approximation ont été proposées. Dans le cas continu, Oustaloup [30, 31, 32] et Charef [12] déterminent les zéros et les pôles du transfert d'ordre entier en se basant sur le critère de récursivité des fréquences transitionnelles, qui sont obtenues au moyen de simples calculs géométriques.

Dans ce qui suit, on présente la méthode d'Oustaloup (approximation CRONE) qui consiste à approximer, dans une première étape, le dérivateur généralisé par un dérivateur borné en fréquences. Puis dans une seconde étape, approximer ce dernier par un modèle rationnel dont les pôles et les zéros sont particulièrement distribués dans la même bande de fréquences. Le dérivateur généralisé est ainsi remplacé par un transfert entier [29].

étant donnée la fonction de transfert du dérivateur généralisé (équation (4.4)). La transformation de Laplace de cette équation donne :

$$Y(s) = \tau^\alpha s^\alpha U(s) \quad (4.20)$$

de laquelle se déduit la transmittance ou la fonction de transfert du dérivateur généralisé :

$$D_{gen}(s) = (\tau s)^\alpha \quad (4.21)$$

La réponse en fréquences de dérivateur généralisé s'écrit:

$$D_{gen}(j\omega) = (j\tau \omega)^\alpha = \left(j \frac{\omega}{\omega_u} \right)^\alpha \quad (4.22)$$

Où $\omega_u = 1/\tau$ représente la fréquence au gain unité ou fréquence de transition.

Une troncature à la fois du côté des basses et des hautes fréquences consiste à limiter à un intervalle fréquentiel $[\omega_A, \omega_B]$ le transfert de différentiation $\frac{s}{\omega_u}$. En fait, la troncature sera réellement effectuée, sur un intervalle de fréquence plus large $[\omega_b, \omega_h]$ tel que :

$$\omega_b \ll \omega_A, \quad \omega_h \ll \omega_B \quad (4.23)$$

L'algorithme suivant résume les opérations à effectuer afin de réaliser l'approximation du dérivateur généralisé selon la méthode d'Oustaloup [4] :

- Pour ω_u et α donnés, choisir les fréquences ω_A , ω_B , ω_b et ω_h suivant la taille

$\frac{\omega_A}{\omega_b}$, en décade, de l'intervalle d'approximation exacte $[\omega_A, \omega_B]$ centré géométriquement en

ω_u sur l'échelle logarithmique, soit :

$$\begin{cases} \omega_u^2 = \omega_A \omega_B = \omega_A^2 \frac{\omega_B}{\omega_A} \\ \omega_u^2 = \omega_A \omega_B = \omega_B^2 \frac{\omega_A}{\omega_B} \end{cases} \quad (4.24)$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases} \omega_A = \frac{\omega_u}{(\omega_B/\omega_A)^{1/2}} \\ \omega_B = \omega_u (\omega_B/\omega_A)^{1/2} \end{cases} \quad (4.25)$$

compte tenu des conditions sur ω_b et ω_h (relation (4.23)), ces fréquences se déterminent généralement par :

$$\omega_b = \omega_A/10 \text{ et } \omega_h = 10\omega_B \quad (4.26)$$

- Fixer a priori la valeur du produit $\delta\eta$, Oustaloup propose de la fixer initialement à 5, et calculer le nombre total des fréquences transitionnelles N donné par

$$2N + 1 = \text{arrondi} \left[\frac{\log(\omega_h/\omega_b)}{\log((\delta\eta)_{\text{initial}})} + 0.5 \right] \quad (4.27)$$

- Calculer les fréquences transitionnelles au moyen des relations

$$\omega_{z_k} = (\delta\eta)^{k+N+1/2-n/2} \omega_b \quad \text{et} \quad \omega_{p_k} = (\delta\eta)^{k+N+1/2+n/2} \omega_b \quad (4.28)$$

Où

$$\omega_{z_k} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+1/2-n/2}{2N+1}} \omega_b \quad \text{et} \quad \omega_{p_k} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{k+N+2/2+n/2}{2N+1}} \omega_b \quad (4.29)$$

- Calculer D_0 à l'aide de la relation

$$D_0 = \frac{\omega_b}{\omega_u} = \frac{\omega_u}{\omega_h} \quad (4.30)$$

- Disposant des zéros ω_{z_k} , des pôles ω_{p_k} , de D_0 et de N : construire l'approximation d'Oustaloup donnée par la relation

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^\alpha \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z_k}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p_k}}} \quad (4.31)$$

Remarque

L'approximation de l'opérateur d'intégration d'ordre non entier $s^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), peut simplement être obtenue en inversant le transfert entier qui approxime l'opérateur de dérivation non entier s^α .

Exemple

Soit à approximer l'intégrateur fractionnaire

$$D_i(s) = 1/(s)^\alpha \quad (4.32)$$

L'approximation est effectuée pour un ordre d'intégration $\alpha = 0.5$ et un intervalle fréquentiel $[\omega_b, \omega_h] = [10^{-5}, 10^5]$ et pour une fréquence de coupure $\omega_u = 1 \text{ rad} / \text{s}$.

La figure 3.4 représente le diagramme de Bode de l'approximation obtenue.

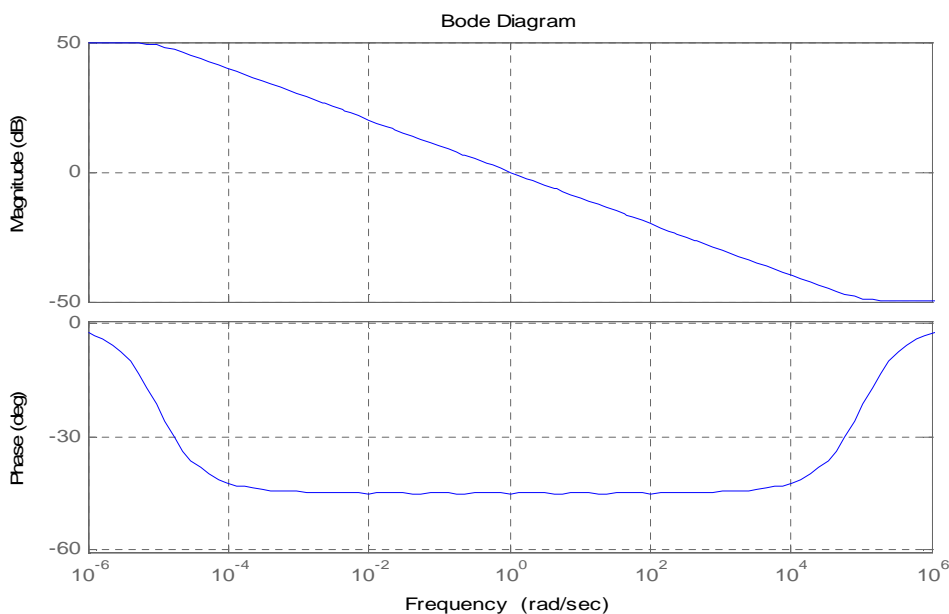


Fig 4.3: Diagramme de Bode de l'approximation de l'intégrateur fractionnaire d'ordre 0.5

La figure (4.3) montre que la pente de la fonction d'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire d'ordre 0.5 à une pente de $-10 \text{ dB} / \text{dec} \approx -20 \alpha$, et une phase de $45.18 \approx \alpha \frac{\pi}{2}$, ce qui implique la justesse de l'approximation. Par contre en dehors de la bande

de fréquence (ω_b, ω_h) , l'approximation est fautive. C'est pourquoi, il faut bien choisir la bande de fréquence où doit être effectuée cette approximation.

4.6 Commande par retour d'état proportionnel et intégral d'ordre fractionnaire par placement de pôles

4.6.1 Première méthode

Reprenons le modèle d'état du système linéaire donné par l'équation (3.1).

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz \end{cases}, \quad z(t_0) = z_0 \quad (4.33)$$

On effectue le changement de base :

$$\xi = T_c z \Rightarrow z = T_c^{-1} \xi \quad (4.34)$$

Et à partir des équations (3.23), (3.24) et (3.25), les matrices A , B sont mises sous la forme commandable

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Le polynôme caractéristique est donné par

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0 \quad (4.36)$$

Soit maintenant à commander le système par la loi de commande :

$$u = k_p z(t) + k_I I_\alpha(z(t)) \quad (4.37)$$

Où, $k_p, k_I \in R^n$ sont les matrices de gain conçues pour imposer le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée. I_α : représente l'opérateur d'intégration fractionnaire.

Le schéma général qui permet d'obtenir un retour d'état proportionnel intégral d'ordre fractionnaire est :

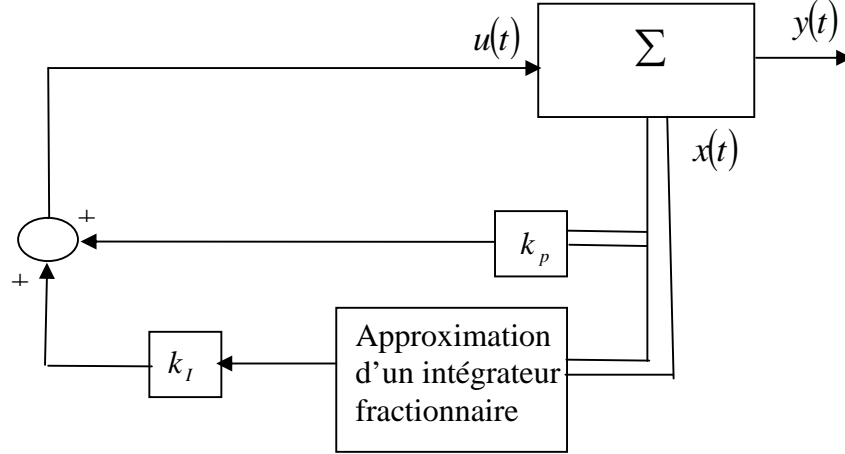


Fig 4.4 : Schéma de commande par retour d'état proportionnel intégral d'ordre fractionnaire

Le modèle d'état du système en boucle fermée dans la nouvelle base s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_c \xi + B_c (k_p T_c^{-1} \xi + k_I T_c^{-1} I_\alpha(\xi)) \\ y = C^T \xi \end{cases} \quad (4.38)$$

Soit $k_{pc} = k_p T_c^{-1}$, et $k_{Ic} = k_I T_c^{-1}$

L'équation caractéristique dans ce cas est donnée par [22]:

$$\Delta_{BF}(s) = \det \left[sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{B_c k_{Ic}}{s^\alpha} \right] = 0 \quad (4.39)$$

Les matrices $B_c k_{pc}$ et $B_c \frac{k_{Ic}}{s^\alpha}$ sont respectivement données par :

$$B_c k_{pc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{pc_1} & k_{pc_2} & k_{pc_3} & \dots & k_{pc_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{B_c k_{Ic}}{s^\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k_{Ic_1}}{s^\alpha} & \frac{k_{Ic_2}}{s^\alpha} & \frac{k_{Ic_3}}{s^\alpha} & \dots & \frac{k_{Ic_n}}{s^\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Dans ce cas, la matrice $sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{Bk_{Ic}}{s^\alpha}$ a la forme

$$\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ a_0 - k_{pc_1} - \frac{k_{Ic_1}}{s^\alpha} & a_1 - k_{pc_2} - \frac{k_{Ic_2}}{s^\alpha} & \dots & a_{n-2} - k_{pc_{n-1}} - \frac{k_{Ic_{n-1}}}{s^\alpha} & s + a_{n-1} - k_{pc_n} - \frac{k_{Ic_n}}{s^\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Le polynôme caractéristique correspondant est donné par [22] :

$$\begin{aligned} \Delta_{BF}(s) &= \det \left(sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{Bk_{Ic}}{s^\alpha} \right) = 0 \\ &= \left(a_0 - k_{pc_1} - \frac{k_{Ic_1}}{s^\alpha} \right) + \left(a_1 - k_{pc_2} - \frac{k_{Ic_2}}{s^\alpha} \right) s + \dots + \left(a_{n-1} - k_{pc_n} - \frac{k_{Ic_n}}{s^\alpha} \right) s^{n-1} + s^n \\ &= \frac{(a_0 - k_{pc_1})s^\alpha - k_{Ic_1}}{s^\alpha} + \frac{(a_1 - k_{pc_2})s^\alpha - k_{Ic_2}}{s^\alpha} s + \dots + \frac{(a_{n-1} - k_{pc_n})s^\alpha - k_{Ic_n}}{s^\alpha} s^{n-1} + s^n \\ &= s^{n+\alpha} + (a_{n-1} - k_{pc_n})s^{n-1+\alpha} - k_{Ic_n} s^{n-1} + (a_{n-2} - k_{pc_{n-1}})s^{n-2+\alpha} - k_{Ic_{n-1}} s^{n-2} \\ &\quad + \dots + (a_0 - k_{pc_1})s^\alpha - k_{Ic_1} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Le polynôme contient ainsi $2n + 2$ termes

Soit alors le polynôme que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée.

$$\Delta_d(s) = s^{n+\alpha} + B_1 s^{n-1+\alpha} + B_2 s^{n-1} + B_3 s^{n-2+\alpha} + B_4 s^{n-2} + \dots + B_{2n-1} s^\alpha + B_{2n} \quad (4.43)$$

Par identification terme à terme des polynômes $\Delta_d(s)$ et $\Delta_{BF}(s)$ on obtient :

$$\begin{cases} a_{n-1} - k_{pc_n} = B_1 \\ a_{n-2} - k_{pc_{n-1}} = B_3 \\ \vdots \\ a_1 - k_{pc_2} = B_{2n-3} \\ a_0 - k_{pc_1} = B_{2n-1} \end{cases}, \begin{cases} -k_{Ic_n} = B_2 \\ -k_{Ic_{n-1}} = B_4 \\ \vdots \\ -k_{Ic_2} = B_{2n-2} \\ -k_{Ic_1} = B_{2n} \end{cases} \quad (4.44)$$

Par conséquent, les coefficients des vecteurs k_{pc} et k_{lc} sont calculés par les coefficients suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{pc_1} = a_0 - B_{2n-1} \\ k_{pc_2} = a_1 - B_{2n-3} \\ \vdots \\ k_{pc_{n-1}} = a_{n-2} - B_3 \\ k_{pc_n} = a_{n-1} - B_1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} k_{lc_1} = -B_{2n} \\ k_{lc_2} = -B_{2n-2} \\ \vdots \\ k_{lc_{n-1}} = -B_4 \\ k_{lc_n} = -B_2 \end{array} \right\} \quad (4.45)$$

On obtient les vecteurs gains proportionnel et intégral respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{pc} = [(a_0 - B_{2n-1}) \quad (a_1 - B_{2n-3}) \cdots (a_{n-2} - B_3) \quad (a_{n-1} - B_1)] \\ k_{lc} = [-B_{2n} \quad -B_{2n-2} \quad \cdots \quad -B_4 \quad -B_2] \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

Le placement de pôles stable du système en boucle fermée dans la base originale peut être réalisé en utilisant les vecteurs gains proportionnel et intégral suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_p = [(a_0 - B_{2n-1}) \quad (a_1 - B_{2n-3}) \cdots (a_{n-2} - B_3) \quad (a_{n-1} - B_1)] \cdot T_c \\ k_I = [-B_{2n} \quad -B_{2n-2} \quad \cdots \quad -B_4 \quad -B_2] \cdot T_c \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Il faut noter que seuls les coefficients du vecteur K_p dépendent des paramètres a_i du polynôme caractéristique du système, les coefficients du vecteur k_I ne dépendent que des coefficients du polynôme imposé à la boucle fermée. Tout le problème revient donc à choisir les coefficients du polynôme à imposer au système en boucle fermée, donc à choisir ses racines.

En effet, le choix des pôles pour cette méthode est difficile. Pour illustrer cette difficulté, considérons l'exemple simple d'un système du première ordre ($n = 1$).

Dans ce cas le polynôme caractéristique que l'on souhaite imposer au système en boucle fermée $\Delta_d(s)$ est donné par :

$$\Delta_d(s) = s^{1+\alpha} + B_1 s^\alpha + B_2 = 0 \quad (4.48)$$

- Pour $\alpha = 1/2$

$$\Delta_d(s) = s^{3/2} + B_1 s^{1/2} + B_2 = 0 \quad (4.49)$$

En effectuant le changement de variable :

$$p = s^{1/2} \quad (4.50)$$

Le polynôme entier correspondant est donné par

$$\Delta_d(p) = p^3 + B_1 p + B_2 = 0 \quad (4.51)$$

Ce polynôme est d'ordre 3, où le coefficient de p^2 est nul. Donc, il faut choisir trois pôles de sorte que leur somme soit nul.

- Pour $\alpha = 3/4$

$$\Delta_d(s) = s^{7/4} + B_1 s^{3/4} + B_2 = 0 \quad (4.52)$$

En effectuant le changement de variable :

$$p = s^{1/4} \quad (4.53)$$

Le polynôme entier correspondant est donné par

$$\Delta_d(p) = p^7 + B_1 p^3 + B_2 = 0 \quad (4.54)$$

Dans ce cas, le polynôme est d'ordre 7, où les coefficients de p^6, p^5, p^4, p^2, p sont nul. Donc, il faut choisir les pôles de sorte à vérifier ces 5 contraintes.

Cet exemple simple montre que le choix des pôles pour cette méthode est très complexe. En effet, ce choix doit satisfaire un certain nombre des contraintes. Le nombre de ces dernières dépend de la valeur de l'ordre non entier α . Afin de résoudre ce problème, on présente dans ce qui suit une autre méthode de synthèse des paramètres des matrices gain proportionnel et intégral d'ordre non entier où le choix des pôles est indépendant de l'ordre non entier α .

4.6.2 Deuxième méthode

Le polynôme caractéristique en boucle fermée (Equation (4.42)) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta_{BF}(s) = & s^\alpha \left(s^n + (a_{n-1} - k_{pc_n})s^{n-1} + (a_{n-2} - k_{pc_{n-1}})s^{n-2} + \dots + (a_0 - k_{pc_1}) \right) \\ & - k_{Ic_n} \left(s^{n-1} + \frac{k_{Ic_{n-1}}}{k_{Ic_n}} s^{n-2} + \frac{k_{Ic_2}}{k_{Ic_n}} s^{n-3} \dots + \frac{k_{Ic_1}}{k_{Ic_n}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ce polynôme peut ainsi être mis sous la forme

$$\Delta_{BF}(s) = s^\alpha \Delta_{d1}(s) - k_{Ic_n} \Delta_{d2}(s) = 0 \quad (4.57)$$

Les matrices de gain proportionnel intégral sont calculées comme suit : D'abord, on impose que $(a_0 - k_{pc_1} = 0)$, le polynôme $\Delta_{d1}(s)$ devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} \Delta_{d1}(s) = & s^n + (a_{n-1} - k_{pc_n})s^{n-1} + (a_{n-2} - k_{pc_{n-1}})s^{n-2} + \dots + (a_1 - k_{pc_2})s \\ = & s \left(s^{n-1} + (a_{n-1} - k_{pc_n})s^{n-2} + (a_{n-2} - k_{pc_{n-1}})s^{n-3} + \dots + (a_1 - k_{pc_2}) \right) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Qui peut être écrit sous la forme

$$\Delta_{d1}(s) = s \tilde{\Delta}_{d1}(s) \quad (4.59)$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée (Equation (4.57)) s'écrit ainsi :

$$\Delta_{BF}(s) = s^{\alpha+1} \tilde{\Delta}_{d1}(s) - k_{Ic_n} \Delta_{d2}(s) = 0 \quad (4.60)$$

$\tilde{\Delta}_{d1}(s)$ et $\Delta_{d2}(s)$ ont le même ordre $(n-1)$.

Les coefficients k_{p_i} , $(i = 2, \dots, n)$ de k_p et k_{I_i} , $(i = 1, \dots, n-1)$ de k_I sont calculés de sorte que:

$$\tilde{\Delta}_{d1}(s) = \Delta_{d2}(s) = \Delta_d(s) \quad (4.61)$$

Où $\Delta_d(s)$ est un polynôme de degré $(n-1)$ qui permet d'imposer $(n-1)$ pôles du polynôme caractéristique en boucle fermée $\Delta_{BF}(s)$, qui s'écrit donc:

$$\Delta_{BF}(s) = (s^{\alpha+1} + p_f) \Delta_d(s) = 0 \quad (4.62)$$

$\Delta_{BF}(s)$ se compose ainsi de deux polynômes. Un premier entier obtenu à partir de $(n-1)$ pôles entier et le second est un polynôme non entier $(s^{\alpha+1} + p_f)$.

Ainsi $k_{I_n} = -p_f$ est choisi pour imposer la dynamique de la réponse indicielle de la boucle fermée et l'ordre non entier α avec $0 < \alpha < 1$ qui n'est pas nécessairement fractionnaire est choisi pour imposer le dépassement.

Soit donc $\Delta_d(s)$ le polynôme désiré qui contient les $(n-1)$ pôles qui s'écrit

$$\Delta_d(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (s - s_i) = s^{n-1} + \mu_1 s^{n-2} + \mu_2 s^{n-3} + \dots + \mu_{n-2} s + \mu_{n-1} \quad (4.63)$$

L'identification terme à terme des polynômes $\tilde{\Delta}_{d1}(s)$ et $\Delta_{d2}(s)$ d'une part et de polynôme $\Delta_d(s)$ d'autre part donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n-1} - k_{pc_n} = \mu_1 = \frac{k_{Ic_{n-1}}}{k_{Ic_n}} \\ a_{n-2} - k_{pc_{n-1}} = \mu_2 = \frac{k_{Ic_{n-2}}}{k_{Ic_n}} \\ \vdots \\ a_2 - k_{p_3} = \mu_{n-2} = \frac{k_{Ic_2}}{k_{Ic_n}} \\ a_1 - k_{pc_2} = \mu_{n-1} = \frac{k_{Ic_1}}{k_{Ic_n}} \end{array} \right. \quad (4.64)$$

Par conséquent, les coefficients des vecteurs k_{pc} et k_{Ic} sont calculés par les coefficients suivants [22] :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{p_1} = a_0 \\ k_{p_2} = a_1 - \mu_{n-1} \\ \vdots \\ k_{pc_{n-1}} = a_{n-2} - \mu_2 \\ k_{pc_2} = a_{n-1} - \mu_1 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} k_{I_{n-1}} = k_{I_n} \mu_1 \\ k_{I_{n-2}} = k_{I_n} \mu_2 \\ \vdots \\ k_{I_2} = k_{I_n} \mu_{n-2} \\ k_{I_1} = k_{I_n} \mu_{n-1} \end{array} \right. \quad (4.65)$$

On obtient les vecteurs gains proportionnel et intégral respectivement :

$$\begin{cases} k_{pc} = [a_0 & (a_1 - \mu_{n-1}) \cdots (a_{n-2} - \mu_2) & (a_{n-1} - \mu_1)] \\ k_{Ic} = k_{I_n} [\mu_{n-1} & \mu_{n-2} \cdots \mu_2 & \mu_1 & 1] \end{cases} \quad (4.66)$$

Le placement de pôles stable du système en boucle fermée dans la base originale peut être réalisé en utilisant le vecteur gain proportionnel et intégral suivants:

$$\begin{cases} k_p = [a_0 & (a_1 - \mu_{n-1}) \cdots (a_{n-2} - \mu_2) & (a_{n-1} - \mu_1)] \cdot T_c \\ k_I = k_{I_n} [\mu_{n-1} & \mu_{n-2} \cdots \mu_2 & \mu_1 & 1] \cdot T_c \end{cases} \quad (4.67)$$

4.7 Application pour la stabilisation du pendule inversé

4.7.1 Première méthode : $\alpha = \frac{1}{2}$

Le modèle d'état du pendule inversé linéarisé au voisinage de $\theta_0 = 0$ est donné par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5339 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 22.2449 & -0.1890 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

$$, B = [0 \quad 0.4218 \quad 0 \quad -0.9070]^T, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état (4.68) est mis sous la forme commandable (A_c, B_c, C_c).

Comme ($n = 4$) et $\alpha = \frac{1}{2}$, le polynôme caractéristique en boucle fermée est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_{BF}(s) = \det \left(sI - A_c - B_c k_{pc} - \frac{B_c k_{Ic}}{s^\alpha} \right) &= s^{\frac{9}{2}} + (a_3 - k_{pc_4}) s^{\frac{7}{2}} - k_{Ic_4} s^{\frac{6}{2}} \\ &+ (a_2 - k_{pc_3}) s^{\frac{5}{2}} - k_{Ic_3} s^{\frac{4}{2}} + (a_1 - k_{pc_2}) s^{\frac{3}{2}} - k_{Ic_2} s^{\frac{2}{2}} + (a_0 - k_{pc_1}) s^{\frac{1}{2}} - k_{Ic_1} \end{aligned} \quad (4.69)$$

En effectuant le changement de variable $p = s^{1/2}$, le polynôme caractéristique devient:

$$\Delta_{BF}(p) = p^9 + (a_3 - k_{pc_4})p^7 - k_{ic_4} p^6 + (a_2 - k_{pc_3})p^5 - k_{ic_3} p^4 + (a_1 - k_{pc_2})p^3 - k_{ic_2} p^2 + (a_0 - k_{pc_1})p - k_{ic_1} \quad (4.70)$$

Comme ($n = 4$), la méthode consiste à choisir $(2n + 1) = 9$ pôles du système en boucle fermée

- Pour que la commande soit physiquement réalisable, les 9 pôles choisis doivent être réels ou complexes conjugués deux à deux, et pour assurer la stabilité ces derniers doivent vérifier la condition de Matignon $\left(\left| \arg(p_i) \right| > \frac{\pi}{4}, \quad i = 1, \dots, 9 \right)$.

- En plus, comme $\alpha = 1/2$, les 9 pôles doivent vérifier également la contrainte

$$\sum_{i=1}^9 p_i = 0 \quad (4.71)$$

Soit:

$$p_1 = 0.001 - i, \quad p_2 = 0.001 + i, \quad p_3 = 0.002 + 2i, \quad p_4 = 0.002 - 2i, \quad p_5 = 0.05 + i, \\ p_6 = 0.05 - i, \quad p_7 = 0.04 - 3.5i, \quad p_8 = 0.04 + 3.5i, \quad p_9 = -0.186$$

Le polynôme caractéristique désirée du système en boucle fermée dans ce cas est donné par :

$$\Delta_d(p) = p^9 + 18.23p^7 + 1.1p^6 + 82.18p^5 + 7.884p^4 + 113.1p^3 + 15.92p^2 + 48.13p + 9.138 = 0$$

L'identification terme à terme de polynômes $\Delta_d(p)$ et $\Delta_{BF}(p)$ donne les matrices de gain proportionnel et intégral dans la nouvelle base k_{pc} et k_{ic} respectivement

$$k_{pc} = 10^2 \cdot [-0.4813 \quad -1.1308 \quad -1.0442 \quad -0.1804] \\ k_{ic} = [-9.1380 \quad -15.9236 \quad -7.8845 \quad -1.1] \quad (4.72)$$

Par conséquent, les matrices de gain proportionnel et intégral dans la base originale sont données par :

$$k_p = [5.4092 \quad 12.755 \quad 118.7018 \quad 25.8198] \\ k_I = [1.0270 \quad 1.7983 \quad 9.32 \quad 2.0490] \quad (4.73)$$

4.7.1.1 Résultats de simulation

La figure 4.5 représente la position du chariot et du pendule respectivement du système pendule-chariot linéarisé autour de $\theta = 0$ avec les conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$, commandé par un retour d'état proportionnel et intégral d'ordre fractionnaire.

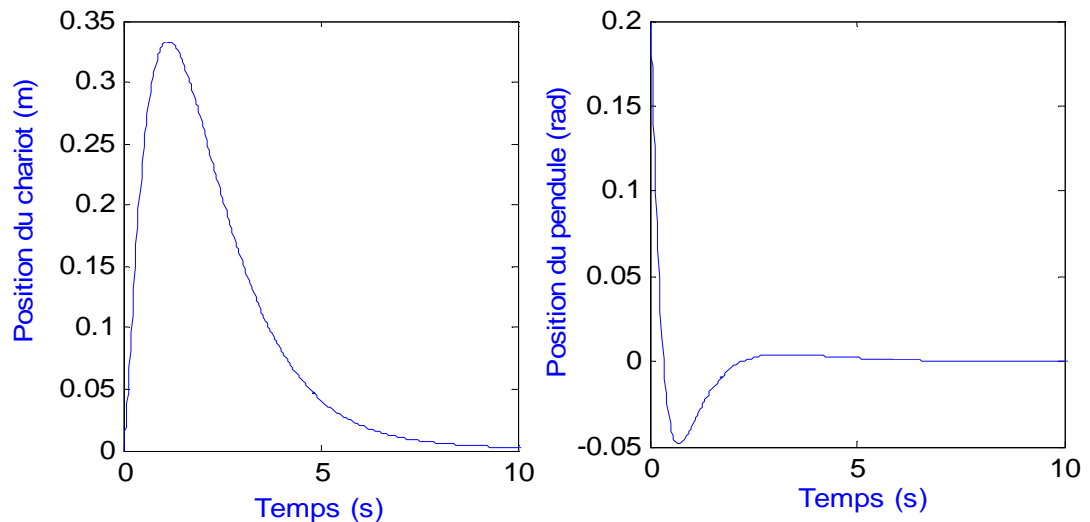


Fig 4.5 : Stabilisation du système pendule-chariot linéarisé autour de $\theta = 0$ par un retour d'état PI d'ordre fractionnaire (1^{ère} méthode)

On remplace dans le schéma de simulation du système pendule inversé non linéaire (figure (3.9)) l'intégrateur entier par une fonction de transfert qui approxime l'intégrateur fractionnaire et on remplace les paramètres des matrices gains PI d'ordre entier par les paramètres des matrices gains PI d'ordre non entier obtenus à partir du système linéaire. La figure (4.6) montre les résultats de simulation de la combinaison de la commande de redressement et la commande de stabilisation par retour d'état PI d'ordre fractionnaire, pour des conditions initiales $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$.

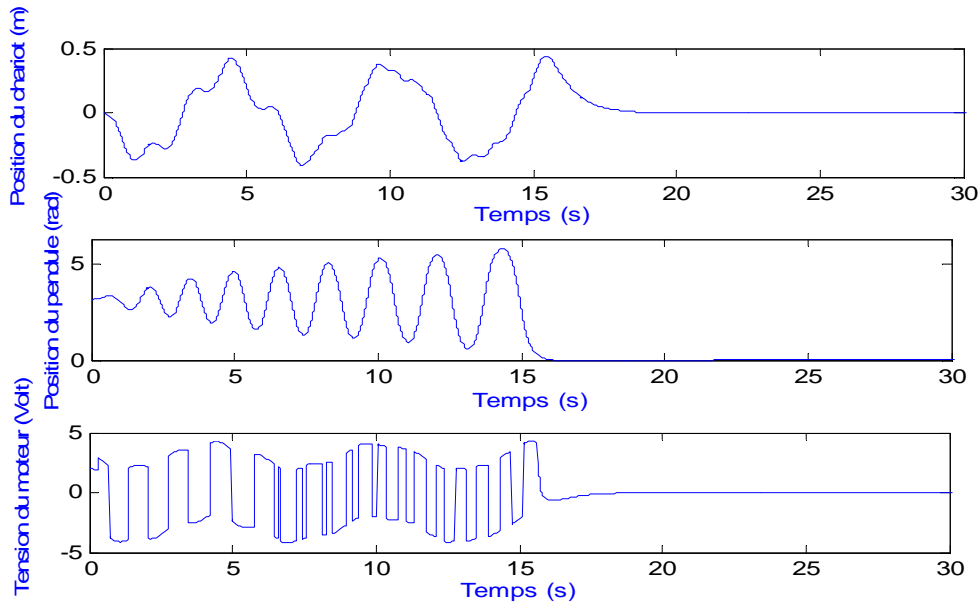


Fig 4.6 : Redressement et stabilisation du pendule inversé non linéaire par retour d'état PI d'ordre fractionnaire (1^{ère} méthode)

Les résultats de simulation montrent l'efficacité et les performances de cette commande puisqu'elle permet de stabiliser le pendule dans les positions désirées.

4.7.1.2 Implémentation de la première méthode de commande par retour d'état PI d'ordre non entier

Après plusieurs essais sur la maquette expérimentale, les paramètres des matrices gain PI sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_p &= g_t \cdot [5.4092 \quad 12.755 \quad 118.7018 \quad 25.8198] \\ k_I &= g_t \cdot [1.0270 \quad 1.7983 \quad 9.32 \quad 2.0490] \end{aligned} \quad (4.74)$$

Où , $g_t = 0.13$: représente le gain qui permet de convertir la force F en tension V_c

Les filtres passe bas introduits pour cette méthode pour chacune des variables non mesurables $\dot{\theta}$ et \dot{x} , sont donnés par

$$G_{fx} = \frac{8 \cdot 10^4}{p^2 + 90p + 10^4}, \quad G_{f\theta} = \frac{2 \cdot 10^4}{p^2 + 90p + 10^4} \quad (4.75)$$

Les figures (4.7), (4.8) et (4.9) représentent respectivement les résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par retour d'état proportionnel intégral fractionnaire en utilisant

la première méthode en absence de perturbations, en présence de perturbations externes sous forme de forces appliquées sur le pendule et en présence d'une perturbation paramétrique au niveau de la masse du chariot.

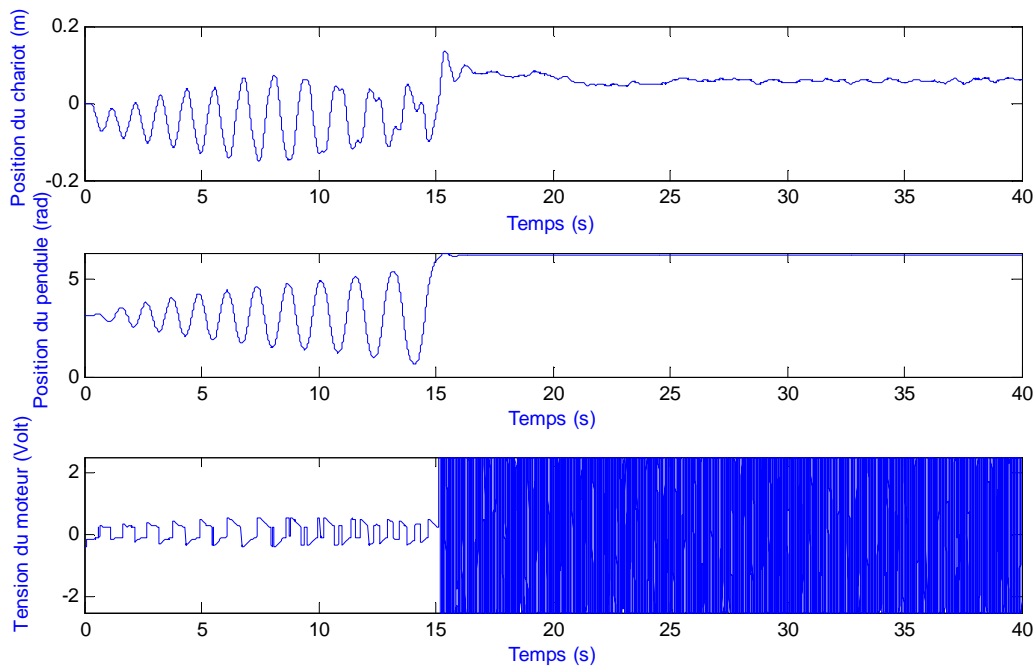


Fig 4.7 : Résultats expérimentaux pour redressement et stabilisation par retour d'état PI d'ordre non entier, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$ (1^{ère} méthode)

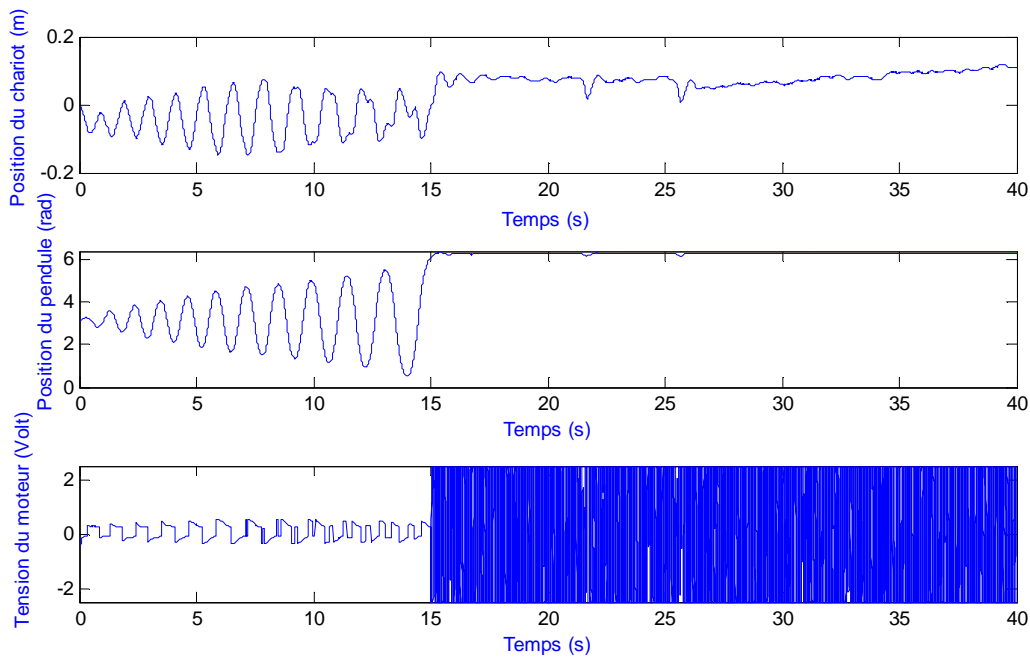


Fig 4.8: Résultats expérimentaux avec deux perturbations externes à partir de l'instant $t=21s$ et $t=25s$ (1^{ère} méthode).

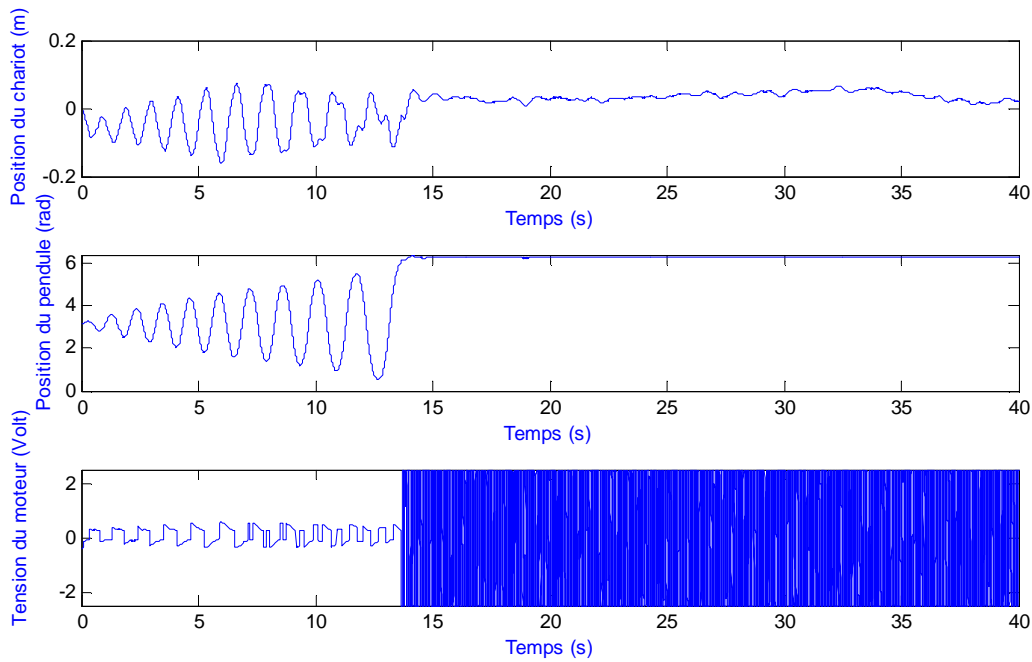


Fig 4.9 : Résultats expérimentaux avec une variation paramétrique M de 40 % à l'instant $t=19s$ (1^{ère} méthode)

Après avoir ramené le pendule inversé de sa position d'équilibre stable (en bas) vers sa position d'équilibre instable (en haut) par la commande basée sur le minimum d'énergie, la commande par retour d'état PI d'ordre fractionnaire permet de le maintenir à cette position. Il faut noter que la commande appliquée oscille avec une fréquence très élevée qui peut être inacceptable.

Les résultats de testes effectués qui sont représentés par les figures (4.8),(4.9) montrent la robustesse de la commande par retour d'état proportionnel intégral d'ordre fractionnaire, car malgré une variation paramétrique de 40% et les fortes perturbations externes, le pendule reste stable.

4.7.2 Deuxième méthode

Soit le modèle d'état du pendule inversé linéarisé au voisinage de $\theta_0 = 0$ (Equation (4.68)), il est mis sous la forme commandable (A_c, B_c, C_c) .

Les 3 pôles imposés au polynôme caractéristique en boucle fermée sont donnés par :

$$p_1 = -1.5, p_2 = -7, p_3 = -5$$

Dans ce cas, le polynôme $\Delta_d(s)$ de degré 3 s'écrit

$$\Delta_d(s) = s^3 + 13.5s^2 + 53s + 52.5 \quad (4.76)$$

Pour voir l'effet de p_f sur la dynamique de système, différentes valeurs de ce dernier ont été considérées ($p_f = -2$, $p_f = -0.35$, $p_f = -0.15$, $p_f = -0.05$).

4.7.2.1 Résultats de simulation

La figure (4.10) représente les résultats de simulation du système pendule-chariot linéarisé autour de $\theta = 0$ avec les conditions initiales $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, 0.2, 0]$, commandé par un retour d'état PI d'ordre non entier $\alpha = 0.5$ et pour différentes valeurs de p_f . On remarque que la position angulaire θ converge rapidement (temps de réponse de 2s), tandis que le déplacement du chariot x prend plus de temps pour arriver à suivre la trajectoire. Le chariot se déplace dans les limites physique du rail $[-0.5 \text{ m}, +0.5 \text{ m}]$ pour les valeurs $p_f = -0.35$ et $p_f = -2$, et un léger dépassement de limites désirées pour $p_f = -0.05$ et $p_f = -0.15$. La commande est oscillatoire et plus importante pour $p_f = -2$, et moins importante pour $p_f = -0.35$, $p_f = -0.15$ et $p_f = -0.05$.

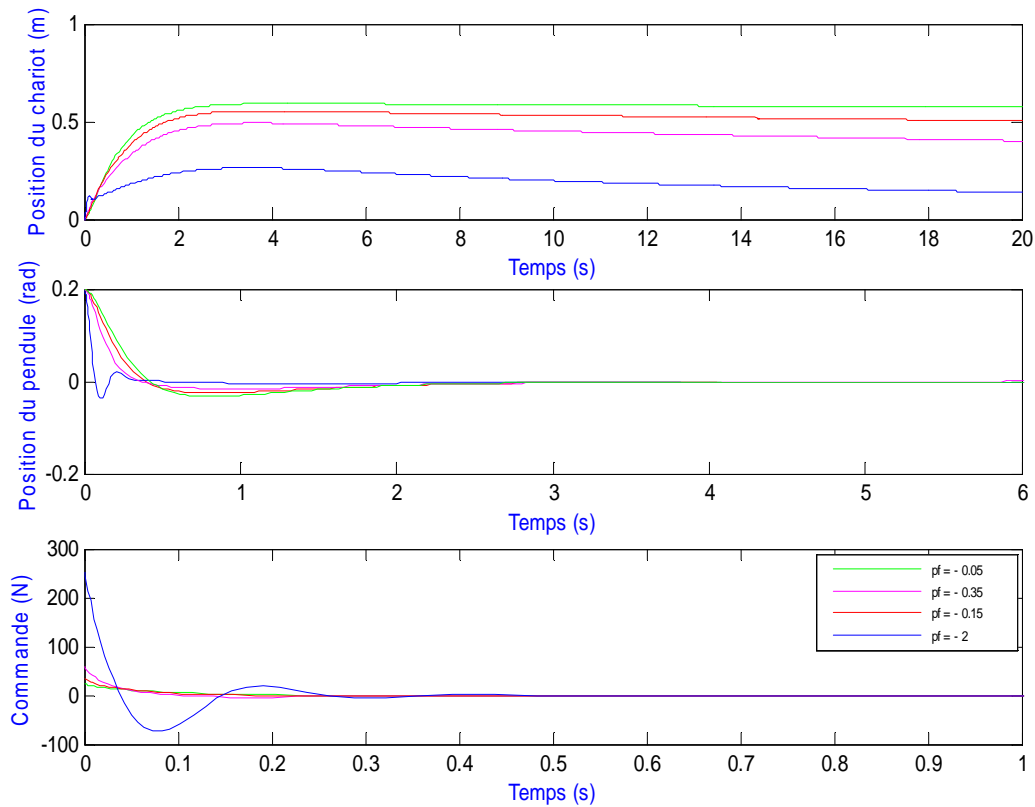


Fig 4.10: Résultats de simulation pour la commande par retour d'état PI d'ordre fractionnaire (2^{ème} méthode)

Pour $p_f = -0.15$ la commande par retour d'état PI d'ordre non entier répond à toutes les restrictions du système, en effet nous notons un bon résultat pour la position du pendule, un léger dépassement de limites désirées du rail et la commande est tolérable et réalisable pratiquement (amplitude maximale 20N). La valeur de p_f choisie pour réaliser la commande PI d'ordre non entier est $p_f = -0.15$.

Dans ce cas, les matrices de gain proportionnel et intégral dans la nouvelle base k_{pc} et k_{ic} sont données par

$$\begin{aligned} k_{pc} &= [0 \quad -52.5004 \quad -75.2449 \quad -13.3110] \\ k_{ic} &= [-2.0250 \quad -7.9500 \quad -7.8750 \quad 0.15] \end{aligned} \quad (4.77)$$

Par conséquent, les matrices de gain proportionnel et intégral dans la base originale sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_p &= [0 \quad 5.9003 \quad 83.4492 \quad 17.4190] \\ k_I &= [0.2276 \quad 0.8954 \quad 8.8626 \quad 0.2510] \end{aligned} \quad (4.78)$$

La figure (4.11) représente la position du chariot, la position du pendule et la tension du moteur respectivement du système non linéaire pour les conditions initiales $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$, différentes valeurs de l'ordre non entier α et $p_f = -0.15$.

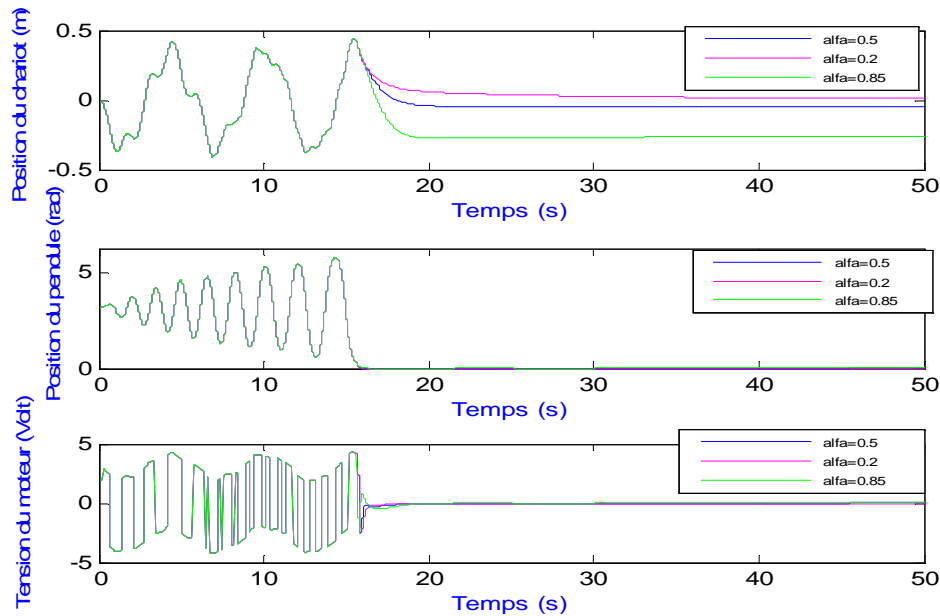


Fig 4.11 : Redressement et stabilisation par retour d'état PI d'ordre fractionnaire du pendule inversé non linéaire (2^{ème} méthode)

La figure (4.11) montre que le pendule s'approche suffisamment de 0 par la commande basée sur le principe de minimum d'énergie, ensuite la commande par retour d'état PI permet de maintenir sa stabilité à sa position d'équilibre instable. Les résultats de simulation montre également que la valeur finale de la position du chariot dépend de l'ordre non entier α .

4.7.2.2 Implémentation de la deuxième méthode de commande par retour d'état PI d'ordre non entier

Après plusieurs essais sur la maquette expérimentale, les paramètres des matrices gain PI sont données par

$$\begin{aligned} k_p &= g_r \cdot [0 \quad 5.9003 \quad 83.4492 \quad 17.4190] \\ k_i &= g_r \cdot [0.2276 \quad 0.8954 \quad 8.8626 \quad 0.2510] \end{aligned} \quad (3.79)$$

Où , $g_t = 0.3$: représente le gain qui permet de convertir la force F en tension V_c

Les filtres passe bas introduisent pour cette méthode pour chacune des variables non mesurables $\dot{\theta}$ et \dot{x} , sont donnés par

$$G_{fx} = \frac{8 \cdot 10^4}{p^2 + 90p + 10^4}, \quad G_{f\theta} = \frac{2 \cdot 10^4}{p^2 + 90p + 10^4} \quad (3.80)$$

Les figures (4.12) et (4.13) donnent les résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par retour d'état PI fractionnaire en utilisant la deuxième méthode pour un gain g_t de 0.3 et 0.15 respectivement en absence de perturbations et les figures (4.14), (4.15) montrent les résultats expérimentaux pour un gain de 0.15 et en présence d'une perturbation externe sous forme de forces appliquées sur le pendule, et la présence d'une perturbation paramétrique (une variation de 40% au niveau de la masse du chariot) respectivement.

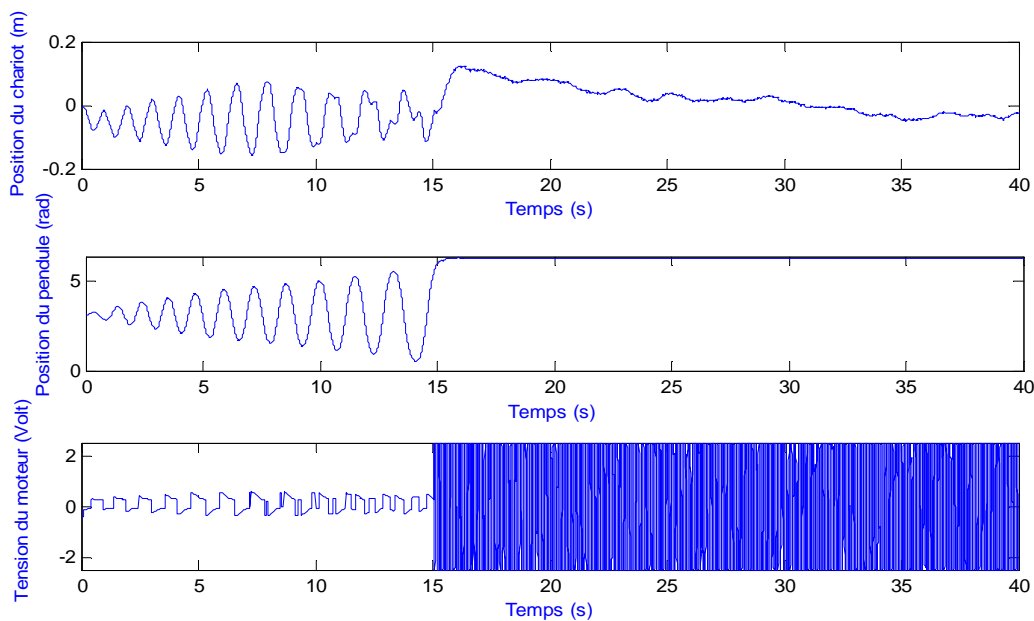


Fig 4.12 : Résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par le régulateur PI d'ordre non entier, $g_t = 0.3$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$ (2^{ème} méthode)

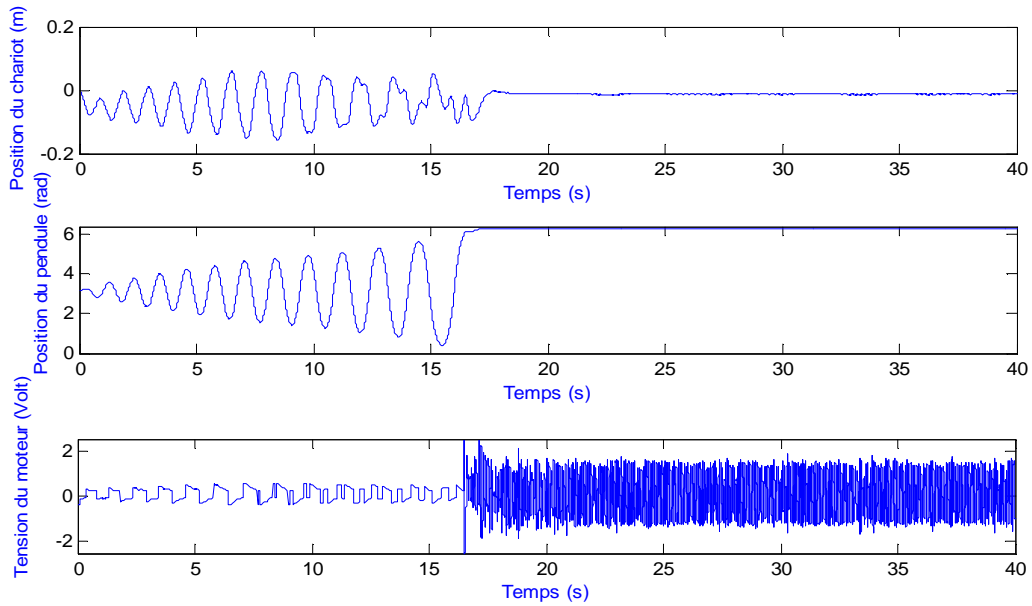


Fig 4.13 : Résultats expérimentaux de redressement et stabilisation par le régulateur PI d'ordre non entier, $g_t = 0.13$, $CI = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0, 0, \pi, 0]$ (2^{ème} méthode)

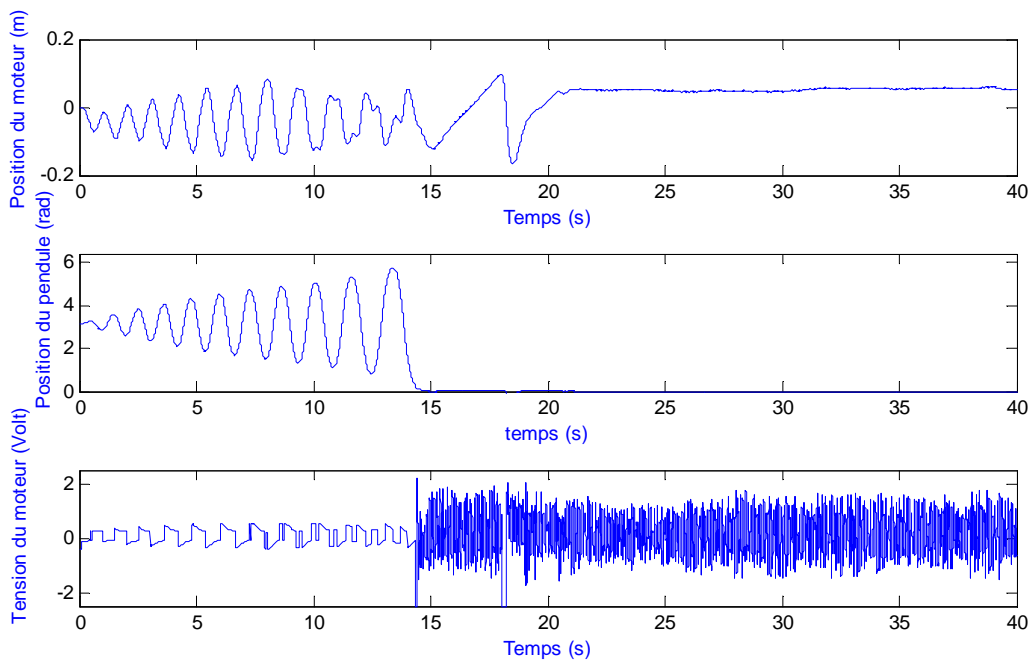


Fig 4.14: Résultats expérimentaux avec une perturbation externe à partir de l'instant $t=18s$ (2^{ème} méthode)

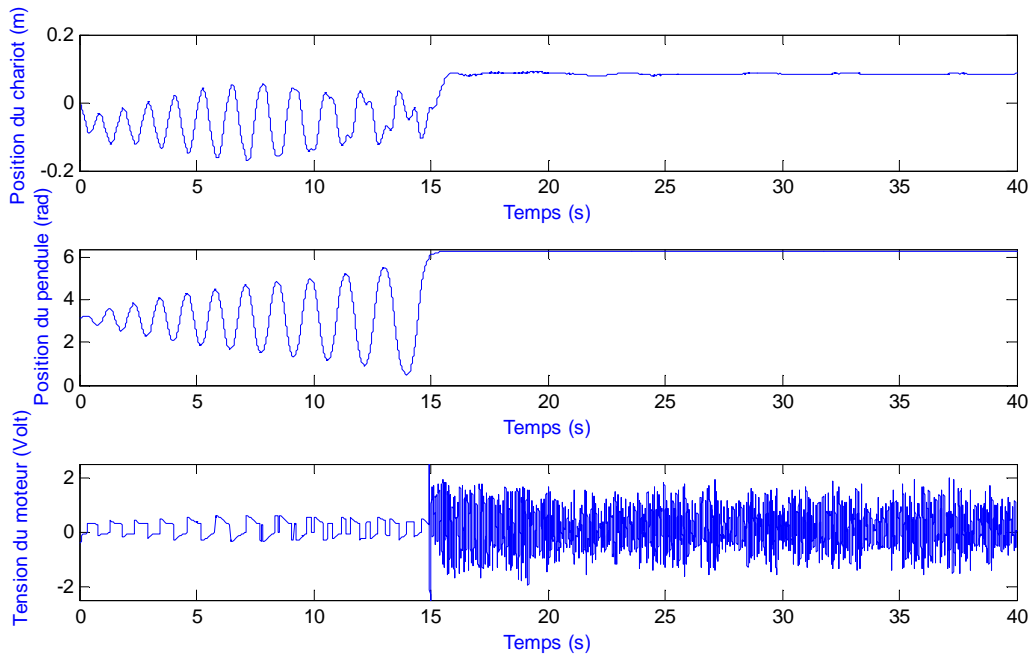


Fig 4.15 : Résultats expérimentaux pour une variation paramétrique M de 40 % à partir de l'instant $t=15.5s$ (2^{ème} méthode)

4.7.2.3 Interprétation des résultats expérimentaux

Les figures (4.12), (4.13) montrent que la commande par retour d'état PI d'ordre non entier permet de maintenir la stabilité du pendule à sa position d'équilibre instable ($\theta = 0$) ainsi que la régulation et la poursuite de la position x du chariot à la position 0.01 au lieu de 0 à cause de présence des bruits de mesure au niveau des capteurs qui corrompent l'estimation de la valeur courante de la position x . Pour un gain $g_t = 0.3$ (figure (4.12)) la commande oscille avec une fréquence élevée. Par contre pour un gain $g_t = 0.13$ (figures (4.13)), la commande est tolérable.

Les figures (4.14), (4.15) montrent la robustesse de la commande par retour d'état PI d'ordre non entier, car malgré une variation paramétrique de 40% et les fortes perturbations externes, le pendule a manifesté un comportement stable.

Conclusion

La première partie de ce chapitre a été consacrée d'abord à la présentation de quelques définitions de base des systèmes non entiers, puis à l'algorithme d'Oustaloup pour l'approximation du dérivateur d'ordre non entier par un modèle entier de dimension finie qui

est actuellement utilisée pour la simulation, la réalisation et l'analyse des caractéristiques dynamiques des systèmes non entier.

La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la synthèse de la loi de commande par retour d'état proportionnel intégral d'ordre non entier pour la stabilisation du pendule inversé. La synthèse des coefficients des matrices de gain proportionnel intégral est effectuée par deux méthodes basées sur le principe de placement des pôles. Le choix des pôles dépend de l'ordre non entier α pour la première méthode et indépendant de ce dernier pour la deuxième méthode. Les différentes simulations effectuées ont permis de vérifier la validité des deux méthodes développées.

L'application de cette commande sur le pendule inversé a permis de donner de bon résultats, notamment en terme de stabilité, rapidité et robustesse.

Nous nous sommes intéressées dans ce mémoire de magister à la synthèse de lois de commande par retour d'état par placement des pôles d'ordre entier et non entier permettant au système bouclé d'avoir un certain nombre de propriétés, et l'application de celles-ci pour la stabilisation d'un système instable, non linéaire, SIMO, sous actionné, qui est le pendule inversé.

Le chapitre 1 a été consacré à l'élaboration de modèle dynamique de pendule inversé. Le modèle obtenu est d'une complexité importante. En effet, c'est un système instable, non linéaire, SIMO, sous actionné. Cette caractéristique le qualifie d'un très bon exemple pour valider les commandes synthétisées.

Le chapitre 2 a été consacré au développement de deux méthodes de la commande de redressement de pendule inversé, cette commande n'est utilisée que pour balancer le pendule à une position supérieure avec le minimum d'énergie. Elles sont basées sur le théorème de stabilité de Lyapunov ainsi que le théorème d'invariance de LaSalle. La différence entre les deux méthodes apparaît dans la structure de la fonction de Lyapunov choisie et la manière d'ajouter de l'énergie au système. En effet, la fonction de Lyapunov utilisée dans la première méthode est définie comme étant la somme des carrés de l'énergie mécanique du pendule et la vitesse du chariot. La convergence de l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute est effectuée à partir de deux paramètres de conception, en ajustant ces dernières, nous pouvons effectuer le redressement du pendule. Quand à la deuxième méthode, la fonction de Lyapunov utilisée est la différence entre l'énergie mécanique du pendule et l'énergie mécanique désirée $E^* = 0$. La convergence de l'énergie du système vers la valeur de l'énergie en position haute est effectuée par un gain.

Dans le chapitre 3, deux méthodes de synthèse de loi de commande par retour d'état d'ordre entier ont été présentées afin de maintenir la stabilité du pendule en position haute. La première est la commande linéaire quadratique LQR. Les paramètres de synthèse de cette loi de commande sont les matrices de pondération Q et R . Ces dernières peuvent être choisies symétriques, diagonales. Au départ, on choisit généralement des pondérations égales aux matrices identité que l'on peut ensuite améliorer par simulations successives jusqu'à obtenir un correcteur satisfaisant le cahier des charges. Une autre méthode d'initialisation de ces matrices est basée sur la règle de Bryson. La deuxième est la commande par retour d'état proportionnel intégral. Les matrices de contre réaction d'état ont été calculées par placement de pôles. En effet, après avoir calculé la forme canonique commandable, la méthode consiste d'abord à choisir un nombre de $n+1$ pôles qui sont imposés à la boucle fermée, ou n

représente l'ordre du système, puis à partir d'une identification entre le polynôme caractéristique de la boucle fermée avec un retour d'état proportionnel intégral et le polynôme caractéristique de la boucle fermée, on détermine les paramètres des matrices gains.

Le chapitre 4 a été consacré à la synthèse de lois de commande par retour d'état proportionnel intégral d'ordre non entier. Comme dans le cas entier les paramètres de la commande sont obtenus par placement de pôles et avec deux méthodes différentes. Le choix des pôles pour la première méthode est très complexe. En effet, ce choix dépend d'un certain nombre de contraintes à satisfaire et de l'ordre non entier α . Par contre, il est simple et indépendant de l'ordre non entier α pour la deuxième méthode. Le choix des paramètres des matrices gain proportionnel et intégral a été réalisé à partir des tests de simulation.

Les différentes techniques de synthèse du régulateur qui ont été exposées dans cette étude se révèlent particulièrement simples et efficaces. Les contrôleurs obtenus ont été testés par simulation et en temps réel sur le modèle non linéaire. La partie simulation permet de comparer les régulateurs sur la base des modèles fournis et de vérifier que les spécifications sont atteintes. La vérification de ces derniers en simulation seule ne garantit pas toujours un comportement satisfaisant en temps réel.

Les différents essais de simulations effectués pour les deux méthodes de redressement ont permis de vérifier la validité et l'efficacité des deux méthodes développées. Les tests de simulation de stabilisation montrent un très bon comportement des contrôleurs (stabilité et précision).

Les paramètres des matrices gains obtenus pour les différentes lois de commande en temps réel sont cohérents avec ceux obtenus en simulation.

L'application des lois de commande obtenus au système non linéaire du pendule inversé a permis la bonne poursuite des consignes ($\theta = 0, x \approx 0$), et de bonne robustesse vis à vis des variations paramétriques et des perturbations externes. Les bons résultats expérimentaux obtenus ainsi que la rapidité de convergence vers la solution prouvent l'intérêt des méthodes utilisées.

Ce travail a permis d'ouvrir les perspectives suivantes :

- problème de poursuite d'une référence dans la commande par retour d'état PI.
- Problème de rejet de perturbation.

- Analyse de la robustesse des lois de commande par retour d'état vis-à-vis des variations des paramètres et l'influence de l'ordre non entier.
- Implémentation d'observateurs d'état pour ne pas utiliser des dérivateurs.

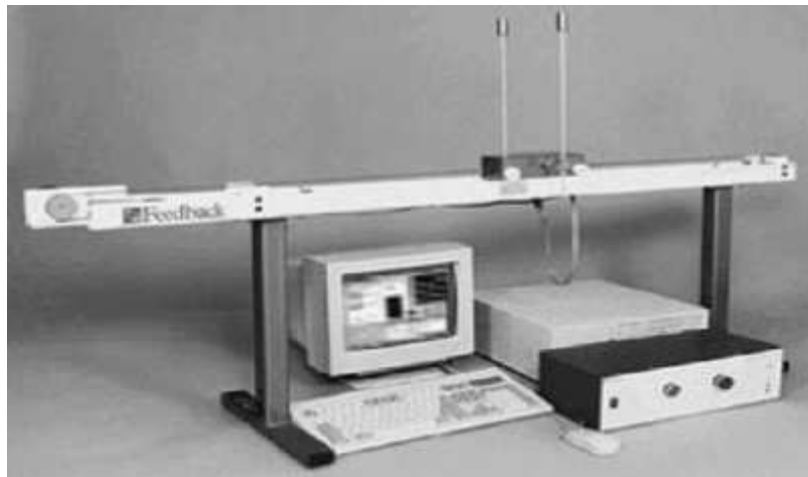


Figure A.1: Vue générale de l'équipement utilisé

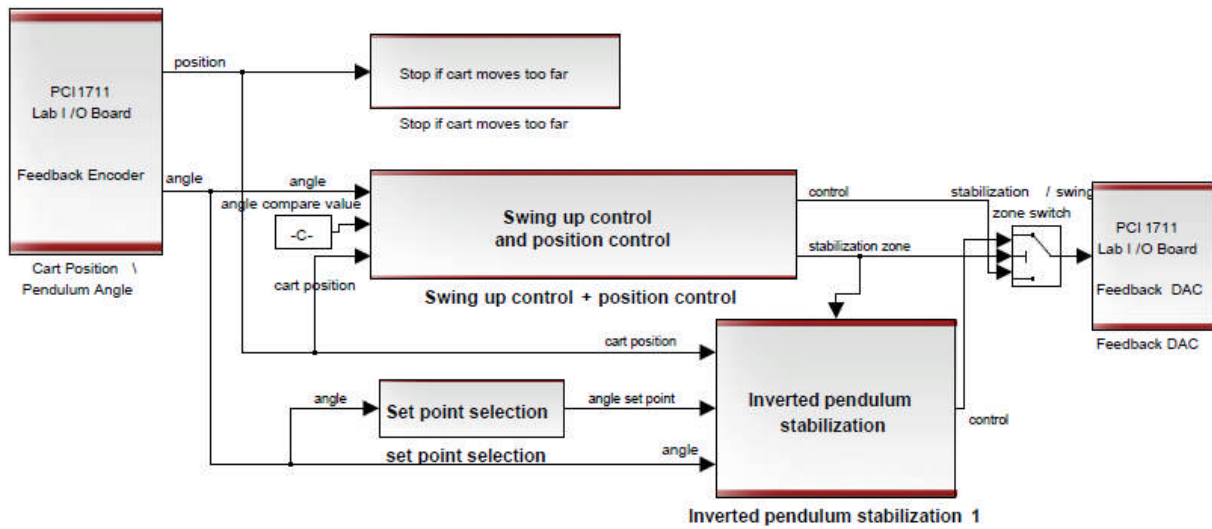


Figure A.2: Complete closed loop control system of an inverted pendulum

- [1] Abdelaziz T H S and Valasek M. "A direct algorithm for pole placement by state derivative feedback for single input linear systems". Acta Polytechnica, Vol.43, no.6, pp. 52-60. 2003.
- [2] Abdelaziz T H S and Valasek M. "Pole-placemetnfor SISO linear systems by state-derivative feedback". IEEE Proceedings Control Theory and Application, Vol.151, pp.377-385. 2004.
- [3] Abdelaziz T H S and Valasek M. "State derivative feedback by LQR for linear time invariant systems". Proceeding of 16th IFAC World Congress, Prague, July 3-8, 2005.
- [4] Ait Messaoud L. "Contribution à la commande des systèmes par des régulateurs d'ordre non entier. Application à la commande de la machine asynchrone". Mémoire de magister UMMTO, Algérie. 2007
- [5] Alazard D, Ghristelle C, Apkarian P, Gauvit M et Ferreres G. "Robustesse et commande optimal". Editions Cépaduès. Paris. 1999.
- [6] Andrew K. "Standup and stabilization of the inverted pendulum. Submitted to the department of mechanical engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Bachelor of Science", Massachusetts Institute of Technology. June 1999.
- [7] Arzelier D. " Notes de cours : Représentation et analyse des systèmes linéaires". Version 5.2. France.
- [8] Astrom K J, Furuta K. "Swinging up a pendulum by energy control," IFAC 13th World Congress, San Francisco, CA, 1996.
- [9] Aström K J, Furuta K. "Swinging up a pendulum by energy control". Automatica. Vol. 36, N°. 2, pp. 287 -295. 2000.
- [10] Bernussou J. "Commande robuste: développements et applications". Editions Hermès. Paris. 1996.
- [11] Bugeja M. "Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system". Eurocon Ljubljana, Slovenia. 2003.
- [12] Charef A., Sun H H., Tsao Y Y, and Onaral B. " Fractal system as represented by singularity function". IEEE transactions on automatic control, vol.37, n°9, pp.1465–1470. 1992.
- [13] Domingues J, Velerio D. and Costa J.S. "Rule based fractional control of irrigation canal". 35th annual conference of IEEE Industrial electronics (IECON 9), Portugal, Novembre3-5. 2009.
- [14] Hyuk Yang J, Yong Shim S, Jung Hun S, and Young Sam L. "Swing-up control for an Inverted Pendulum with restricted cart rail length". International journal of control automation, and systems. Vol.7. n°4, pp.674-680. 2009.

-
- [15] Jesus I.S. and Machado J.A.T. "fractional control of heat diffusion systems". Non linear dynamics. Vol.54. pp.263-282. 2008
- [16] Khalil K H. "Nonlinear Systems", 3ème edition. USA. 2000
- [17] Lahouazi F. "Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé". Mémoire de magister UMMTO, Algérie. 2011
- [18] Lam J. "Control of an inverted pendulum". Dept. of Electrical & Computer Engineering, University of California, U.S.A. 2004.
- [19] Larminat.P. "Automatique : Commande des systèmes linéaires". 2^{ème} édition. Edition Hermès, Paris. 1996.
- [20] Laroche E. "Notes de cours de master Automatique et Robotique : Commande Optimale". Ecole nationale supérieure de physique de Strasbourg. 2010.
- [21] Mansouri R., Bettayeb M, Djama T, and Djennoune S. "System identification in frequency domain by fractional vector fitting algorithm". Second International conference on modelling, simulation and applied optimization, ICMSAO'07, pp.24-27, Abu Dhabi, E.A.U. Mars 2007.
- [22] Mansouri R, Bettayeb M, Djennoune S, Boussalem C. "Fractional PI state feedback control of linear integer systems". Paper accepted 5th IFAC symposium on FDA May 14-17-2012 Nanjing China. L2 CSP UMMTO, Algeria. 2012
- [23] Mansouri R. "Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état". Thèse de Doctorat UMMTO, Algérie. 2008.
- [24] Mammari S. "Notes de cours de master RVSI : Automatique avancée". Université d'Evry Val d'Essonne, France. 2006
- [25] Matignon D. "Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire". PhD Thesis, Université de Paris-Sud, Orsay. 1998.
- [26] Y. MORERE. "Mise en œuvre de lois de Commande pour les Modèles Flous de Type Takagi-Sugeno". Thèse de Doctorat, de l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis. 4 janvier 2001.
- [27] Mullhaupt Ph. "Introduction à l'Analyse et à la commande des systèmes non linéaires". Lausanne, Juin 2007.
- [28] Ould Abdou Taleb M. "Commande par mode de glissement floue avec observateur : Application à différents pendules inversés". Mémoire de magister, Université de Setif. Algérie. 29 juin 2006.
- [29] Oustaloup A. "La Robustesse : analyse et synthèse de commande". Editions Hermes, Paris. 1994.

- [30] Oustaloup A. "La dérivation non entière : Théorie, Synthèse et Applications". Editions Hermes, Paris. 1995.
- [31] Oustaloup A. "La commande CRONE". Editions Hermes, Paris. 1991.
- [32] Oustaloup A., levron F, Mathieu B., and Nanot F. "Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis". IEEE Transactions on Circuits and Systems I, vol.47, n°1, pp.25-39. 2000.
- [33] Olivier M P. " Equipement pour l'eau et l'environnement : Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation". Thèse de Doctorat, Ecole Nationale du génie Rural des Eaux et des Forets. Janvier 1994.
- [34] RIACHY S. " Contribution à l'estimation et à la commande de systèmes mécaniques sous-actionnés". Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Lille. Version 1. 24 Mar 2009.
- [35] Wiboonjaroen W and Sujitjorn S. "Stabilization of an inverted pendulum system via state-PI feedback". International journal of mathematical models and methods in applied. pp763-772. 2011.
- [36] manuel d'installation du pendule inversé. "Feedback instruments limited".