

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT D'ÉLECTROTECHNIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

Filière : **ÉLECTROTECHNIQUE**

Spécialité : **Modélisation et conception des Systèmes Electromagnétiques**

Présentée par

BERKACHE Azouaou

**Développement de méthodes de réduction de systèmes et application au calcul
électromagnétique stochastique**

Thèse soutenue publiquement le 23 Octobre 2019 devant le jury composé de:

M. Mohammed EL Hadi	LATRECHE	Professeur Université Constantine2	Président
M. Hassane	MOHELLEBI	Professeur Université de Tizi-Ouzou	Encadreur
M. Abdelhalim	ZAOUI	Professeur EMP Alger	Examineur
M. Mustapha	ZAOUIA	MCA Université de Tizi-Ouzou	Examineur
M. Jinyi	LEE	Professeur Université de Chosun,	Invité

Corée du sud

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma gratitude envers M. Mohammed EL Hadi LATRECHE, M. Abdelhalim ZAOUI, M. Mustapha ZAOUIA et M. Jinyi Lee, qui me font l'honneur d'être membres de mon jury de thèse. Je suis très heureux que M. Mohammed EL Hadi LATRECHE, recteur de l'université Canstantine 2, ait pu se dégager de ses obligations et de me faire l'honneur d'être président de mon jury de thèse, et d'avoir accepté de juger mes travaux.

Je tiens aussi à remercier M. Jinyi Lee pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant mon invitation.

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, le Professeur Hassane Mohellebi (Université Mouloud Mammeri). Je lui suis très reconnaissant de m'avoir transmis ses précieux conseils sur le plan technique et scientifique. Je le remercie également pour sa responsabilité, sa disponibilité, son haut niveau de compétence, sa patience et l'enthousiasme dont il a fait preuve durant mes quatre années de thèse. Ce que j'ai pu accomplir n'aurait pas été possible sans sa présence. Merci d'avoir cru en moi.

Un grand merci à Madame Oudni Zehor, pour son soutien, ces conseils avisés et son encouragement pour l'aboutissement de mon travail.

Je tiens à remercier chaleureusement le personnel du laboratoire SIMaP, plus particulièrement M. Yves Du Terrail pour son accueil et ses échanges enrichissants durant mon stage à Grenoble, Sans oublier mon très chère ami Ahmed Nouri qui a été en postdoc lors de mon séjour, je suis très reconnaissant Ahmed pour ton soutien, tes conseils et ton amitié merci encore.

Une pensée très particulière va à tous les membres du centre de recherche en contrôle non destructif de l'université de Chosun pour m'avoir accueilli aussi chaleureusement durant mon stage, professionnellement et personnellement et avec toute la bonne humeur qui les caractérise. Je tiens à témoigner ma reconnaissance envers M. Jinyi Lee pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et les démarches qu'il a entreprises pour que je puisse venir effectuer mon stage et pour sa grande générosité pour son don de matériels qu'il nous a remis. Je le remercie également pour les discussions, les conseils et sa disponibilité lors de mes différentes sollicitations.

Un grand merci pour le professeur M. Heejong Lee et le professeur Hoyong Lee pour leur échanges très enrichissants.

Il ne peut pas manquer un remerciement particulier aux doctorants Park Juhyeon, Sim Sunbo, Kim Sejin, Choe Eunho, Wang Dabin et Seo Heejunent de m'avoir aidé à réaliser les différents montages expérimentaux. Je les remercie en tant qu'amis, pour les discussions et les moments agréables passés ensemble.

Je remercie également Madame Park Haeyoung d'avoir faciliter mes démarches administrative.

Merci à mes amis, que je ne cite pas ici nominativement, par peur d'un oubli qui pourrait réduire leur nombre. Un grand merci à tous les thésards, post-docs, stagiaires que j'ai rencontré lors de mes déplacements en France et en Corée du sud.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe de notre laboratoire ainsi que l'ensemble du personnel du rectorat de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, la faculté de Génie Electrique et d'Informatique et le département d'électrotechnique.

DEDICACES

Mes meilleurs reconnaissances et dédicaces envers ma grand-mère, mes parents, ma fiancé et mes frères Youcef et Ahcene qui m'ont encouragé et m'ont réservé les meilleures conditions pour travailler tout au long de mes études.

Résumé

Développement de méthodes de réduction de systèmes et application au calcul électromagnétique stochastique

La méthode des éléments finis stochastiques SFEM est une extension de l'approche déterministe classique pour la solution de problèmes stochastiques. Elle a fait l'objet d'une attention considérable en raison du développement rapide de la simulation informatique, de la modélisation mathématique et du calcul scientifique pour prédire et comprendre le comportement des dispositifs électromagnétiques d'une manière générale.

Ce travail comporte deux axes principaux, le premier porte sur la recherche de certaines caractéristiques de la structure d'études, en considérant une propriété physique aléatoire qui suit l'évolution d'une loi normale telles que les grandeurs physiques et géométriques représentées par des variables aléatoires, par un traitement statistique en se fiant aux grandeurs statistiques.

Le deuxième concerne la mise en œuvre de modèles exploitant la réduction de matrice et son application dans l'évaluation de grandeurs électromagnétiques dans les structures à couches minces, par l'introduction du calcul stochastique dans le modèle de réduction.

Mots-clés: Éléments fins stochastiques, réduction de matrices, systèmes électromagnétiques, couches minces, variables aléatoires, contrôle non destructif, grandeurs statistiques, calcul stochastique, dégradation de propriétés physiques, loi normale.

Abstract

Development of systems reduction methods and application to stochastic electromagnetic computation

The stochastic finite element method SFEM is an extension of the classical deterministic approach to the solution of stochastic problems. It has received considerable attention because of the rapid development of computer simulation, mathematical modeling and scientific computing to predict and understand the behavior of electromagnetic devices in general.

This work has two main axes. The first one deals with the search for certain characteristics of the structure of studies by considering a random physical property that follows the evolution of normal law such as the physical and geometrical quantities represented by random variables, by a statistical treatment by relying on statistical magnitudes.

The second concerns the implementation of matrix reduction modeling and its application in the evaluation of electromagnetic magnitude in thin-film structures, through the introduction of stochastic calculus in the reduction model.

Key-words: Stochastic finite element, matrix reduction, electromagnetic systems, thin films, random variables, non-destructive testing, statistical magnitudes, stochastic calculus, degradation of physical properties, normal distribution.

TABLE DES MATIERES

Remerciements

Résumé

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction générale

Sommaire

Chapitre 1 : Les modèles numériques régis par les équations aux dérivées partielles...17

1.2. Equations et lois de la physique	18
1.2.1. Equations de Maxwell	18
1.2.1.1. Forme différentielle :	18
1.2.1.2. Forme intégrale	20
1.2.2. Lois de comportement du milieu	21
1.2.2.1. Loi d'Ohm.....	22
1.2.2.3. Relation diélectrique	22
1.2.3. Condition de transmission entre deux milieux	22
1.2.4. Condition aux limites.....	24
1.2.4.1. Condition aux limites de Dirichlet.....	24
1.2.4.2. Condition aux limites de Neumann.....	24
1.2.5. Formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique.....	24
1.2.5.1. Modèle magnétostatique	25
1.2.5.2. Modèle magnétodynamique.....	25
1.3. Méthodes numériques	26
1.3.1. Les différences finies "DF"	27
1.3.2. Méthodes des volumes finis	29
1.3.3. Méthodes des éléments finis "MEF"	29
1.3.3.1.1 Formulation variationnelle.....	31
1.3.3.1.2 Méthode des résidus pondérés	31

1.3.3.1.2.1	La méthode de collation par point.....	32
1.3.3.1.2.2	La méthode de Galerkin.....	32
1.3.3.1.	Discretisation géométrique.....	32
1.3.4.	Formulation éléments finis des équations électromagnétiques.....	33
1.3.5.	Avantages et limites de la MEF.....	35
1.3.5.1	Avantages.....	35
1.3.5.2	Limites.....	36
1.4.	Conclusion.....	36
1.5.	Bibliographie.....	37

Chapitre 2 : Développement des méthodes stochastiques et leur application au calcul électromagnétique39

2.1.	Introduction.....	40
2.2.	Généralités sur la théorie de probabilités.....	40
2.2.1.	Rappels et définition.....	40
2.2.2.	Variable aléatoire.....	41
2.2.3.	Vecteur aléatoire.....	42
2.2.4.	Champs aléatoire.....	43
2.2.5.	Processus stochastique.....	43
2.3.	Quelques lois de probabilité usuelles.....	43
2.3.1	Loi Log-normale.....	45
2.3.2.	Loi de Weibull.....	45
2.3.3.	Loi normale.....	46
2.4.	Les méthodes stochastiques.....	47
2.4.1.	La méthode des éléments finis stochastique spectraux.....	47
2.4.2.	Méthode non paramétrique.....	48
2.4.3.	Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées.....	48
2.4.4.	Simulation de Monté-Carlo.....	49
2.4.4.1.	Principe.....	49
2.4.4.2.	Technique de simulation.....	50
2.4.4.3.	L'avantage des simulations de Monté-Carlo.....	50
2.4.4.4.	Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires (PRNG).....	51
2.4.5	Comparaison des méthodes stochastiques.....	51

2.5. Conclusion.....	52
2.6. Bibliographie.....	54
Chapitre 3: Les méthodes de réduction de systèmes et leur applications.....	59
3.1 Introduction	60
3.2 Calcul haute performance et calcul parallèle	60
3.2.1. Terminologie (HPC) et du parallélisme.....	60
3.2.1.1 Tâche et tâche parallèle	60
3.2.1.2. Processus et thread.....	61
3.2.1.3. Mémoire partagée et distribuée.....	61
3.2.1.4. Accélération et Scalabilité	61
3.2.2. Quelques architectures parallèles	62
3.2.2.1. Multi-cœurs.....	62
3.2.2.2. Cluster de calcul.....	62
3.2.2.3. Processeurs Graphiques (GPU).....	63
3.2.3. Limites et coût du parallélisme.....	63
3.2.4. Evolution des ordinateurs de bureau	65
3.3. Compression matricielle.....	65
3.3.1. Matrices de rang faible et rk -matrices	65
3.3.1.1. Rang d'une matrice.....	65
3.3.1.2. Rk -Matrices.....	66
3.3.1.3. Décomposition en valeurs singulières.....	67
3.3.2. Méthodes usuelles de compression matricielle	68
3.3.2.1. Nécessité des méthodes de compression.....	68
3.3.2.2. Méthode Multipôle Rapide Multiniveau (MLFMM).....	68
3.3.2.3. Adaptative Cross Approximation	69
3.3.2.3. 1. Pivotage total.....	69
3.3.2.3. 2. Pivotage partiel.....	71
3.4. Conclusion.....	71
3.5. Bibliographie.....	72

Chapitre 4 : Expérimentation et Simulation.....	74
4.1. Introduction	75
4.2. Partie 1: Description de l'ensemble du matériels utilisé.....	76
4.2.4. Appareillages utilisés.....	77
4.3. Partie 2 : Etude du problème posé.....	79
4.3.1. Description de la structure étudiée	79
4.3.1.1. Caractéristiques physiques	80
4.3.1.2 Domaine de résolution et conditions aux limites	80
4.3.1.3. Mise en equation	80
4.3.1.4 Formes différentielles dans les différentes régions du domaine	81
4.3.2. Paramètres globaux.....	81
4.3.2.1 Calcul d'impédance.....	81
4.3.2. Tension de Hall	82
4.3.3 Résultats de simulation.....	82
4.3.3.1 Loi normale.....	84
4.3.4. Montage expérimentale	86
4.3.5 Résultats expérimentaux et discussions	88
4.3.6 Validation 2D par MEFS.....	91
4.4. Partie 3 : Evaluation	92
4.5. Résumé de la procédure de calcul	94
4.6. Partie 4 : Modele de réduction	94
4.7. Conclusion.....	98
4.8. Bibliographie	99
Conclusion générale.....	100

LISTE DES TABLEAUX

Tableau. 2. 1 : Caractéristiques des méthodes stochastiques.

Tableau. 4. 1 : Caractéristiques des matériaux utilisés.

Tableau. 4. 2 : Paramètre de l'expérience.

Tableau. 4. 3 : Taille des échantillons simulés.

LISTE DES FIGURES

- Fig. 1. 1 : Processus d'analyse d'un modèle numérique.
- Fig. 1. 2 : Maillage différences finies.
- Fig. 1. 3 : Vue synthétique des méthodes d'approximation.
- Fig. 2. 1 : Courbe de Monté-Carlo.
- Fig. 3.1 : Loi d'Amdhal, accélération en fonction du nombre de processeurs pour différentes proportions de programme séquentiel.
- Fig. 3.2 : Loi de Gustafson, accélération en fonction du nombre de processeurs pour différentes proportions de programme séquentiel. Erreur relative induite par la compression ACA
- Fig. 4. 1 : Nortek 500.
- Fig. 4. 2 : LCR mètre.
- Fig. 4. 3 : Géométrie du problème étudié
- Fig. 4. 4 : Domaine de résolution et conditions aux limites
- Fig. 4. 5 : Maillage du domaine d'étude
- Fig. 4. 6 : Maillage de la zone du défaut et du capteur
- Fig. 4. 7 : Distribution aléatoire de la conductivité dans la zone du défaut
- Fig. 4. 8 : Densité de probabilité de la conductivité électrique obtenue avec un seul tirage.
- Fig. 4. 9 : Densité de probabilité de la moyenne des conductivités électriques obtenues par l'ensemble des tirages
- Fig. 4. 10 : Allure du potentiel vecteur magnétique dans la zone du défaut
- Fig. 4. 11 : Ligne du potentiel vecteur magnétique
- Fig. 4. 12 : Variation du courant en fonction de la position du scan.
- Fig. 4. 13 : Variation de l'impédance en fonction de la position du capteur.
- Fig. 4. 14 : Schéma explicatif de la deuxième expérience.
- Fig. 4. 15 : Photographie de la deuxième installation expérimentale.
- Fig. 4. 16 : Plaque d'Inconel 600 inspectée.
- Fig. 4. 17 : La variation d'impédance en fonction de la position du scan en valeur relative obtenue expérimentalement à 100 kHz.

- Fig. 4. 18 : Tension de sortie du capteur de Hall en fonction de la position du scan sur la largeur du défaut obtenue expérimentalement à 10 kHz.
- Fig. 4. 19 : Tension de sortie du capteur de Hall en fonction de la position sur la longueur du défaut obtenu expérimentalement à 1 kHz
- Fig. 4. 20 : Plan d'impédance
- Fig. 4. 21 : Le plan d'impédance obtenu avec LabVIEW.
- Fig. 4. 22 : Comparaison entre l'impédance numérique et expérimentale en fonction de la position du scan en valeur relative à 100 kHz.
- Fig. 4. 23 : Corrélation entre la moyenne des valeurs d'impédances et la taille des défauts.
- Fig. 4. 24 : Corrélation entre la variance de la moyenne des valeurs d'impédances et la taille des défauts.
- Fig. 4. 25 : Corrélation entre l'écart type de la moyenne des valeurs d'impédance et la taille des défauts.
- Fig.4.26 : Organigramme de synthèse sous Matlab

Motivation

La modélisation numérique constitue une étape incontournable dans la conception et la simulation des systèmes électromagnétiques qui ne cessent de s'accroître et qui occupent une place de plus en plus importante dans la société d'aujourd'hui, ces derniers requièrent une modélisation et une simulation d'avantage plus fine afin d'appréhender aux mieux les phénomènes qu'ils mettent en œuvre. L'intérêt majeur de la modélisation numérique est de disposer d'un modèle virtuel qui reflète un modèle réel et c'est grâce à l'avènement de l'outil informatique à partir des années cinquante et son accessibilité à la communauté scientifique que cela est rendu possible, actuellement on parle de conception et du dessin assisté par ordinateur. De ce fait il est primordial de disposer des outils de simulation et de modélisation nécessaires afin de répondre aux besoins de ces modèles à concevoir. Le recours à la simulation est devenu primordiale dans le milieu industriel, bureaux d'études et notamment dans les laboratoire de recherche vu qu'elle permet de réduire les coûts de conception et de fabrication en terme de temps et d'investissement. De plus, elle permet d'explorer des solutions innovantes.

Plusieurs logiciels commerciaux ou de laboratoire sont utilisés, on citera d'une part le logiciel Comsol et Ansys Maxwell pour le traitement des problèmes électromagnétiques de nature différente, ce dernier est utilisé beaucoup plus dans l'industrie pour la conception et l'analyse des dispositifs électromécaniques, d'autre part on citera le logiciel Matlab qui est utilisé dans le cadre de notre travail ainsi que LabVIEW pour générer l'application en temps réel et surveiller le signal de sortie. Ces moyens de calculs modernes, permettent avec une large flexibilité, l'utilisation de modèles numériques en particulier les modèles éléments finis de plus en plus performants qui sont largement utilisés dans le domaine de l'électrotechnique sous différentes approches.

La matière première initiale utilisée lors du processus de fabrication des matériaux des dispositifs électromagnétiques subie des transformations, donc sont soumis à divers effets de natures différentes telles que la pression, la température, les imperfections de fabrications ou simplement leur utilisation au fil du temps ainsi que les contraintes environnementales qui se traduisent par la corrosion, la fatigue, le manque de matière, d'une manière générale c'est la dégradation des propriétés physiques de ces matériaux. Ceci peut affecter leur durée de vie en diminuant progressivement l'aptitude du système à assurer ses fonctions par conséquent un enjeu industriel important.

INTRODUCTION GENERALE

Mettre en évidence l'influence de cette dégradation sur les dispositifs électromagnétiques dans un modèle numérique s'avère d'une importance capitale et d'une complexité non négligeable. Pour parvenir à modéliser cette aléa, il existe un ensemble de techniques regroupés autour du thème Méthodes des Element Finis Stochastique (MEFS), notant que cette méthode est utilisée beaucoup plus dans le domaine du génie civil pour la fiabilité des structure et en mécanique pour le traitement des modèles non linéaire et récemment dans le magnétisme, cette méthode enlace deux approches intrusive et non intrusive qui présentent plusieurs avantages.

En effet, la simulation numérique d'applications scientifiques et industrielles de résolution des problèmes de plus en plus vastes tout en requérant une plus grande précision en un délai plus court. Ces applications sont souvent stochastiques est d'autant plus coûteuse en temps de calcul et en espace de stockage mémoire que le modèle à étudier sollicite beaucoup le code de calcul utilisé, crée une demande insatiable en ressource de calculs. C'est pourquoi depuis quelques années l'utilisation du calcul parallèle, le calcul à haute performance et les techniques de réduction de systèmes attendent le développement car elles permettent de garantir un bon compromis entre le temps de calcul et la taille du dispositif à simuler.

L'apport de cette thèse s'articule autour de quatre objectifs:

1. Modéliser et prendre en compte l'effet de la dégradation dans un modèle numérique sous Matlab constitue une approche sophistiquée dans la simulation numérique en magnétisme, en réalisant un couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode Monté-Carlo basée sur la loi des grands nombres pour générer de façon aléatoire la distribution (de type Gaussienne) de la conductivité électrique. Le choix du mariage des deux méthodes repose sur le fait que la simulation Monté-Carlo est compatible et ne nécessite aucune modification spécifique dans le code éléments finis, de plus elle est simple à comprendre et à mettre en œuvre.
2. Application du modèle élaboré à des cas de fonctionnement en contrôle non destructif par courants de Foucault et capteur à effet Hall pour la détection et la caractérisation de l'état d'intégrité des structures à étudier.

3. Recherches de certaines caractéristiques de la structure d'études telles que les grandeurs géométriques (estimation de la taille des anomalies) par traitement statistique en se fiant aux grandeurs statistiques.
4. Mise en œuvre de modèles rapides en exploitant les méthodes de réduction de grands systèmes (Adaptive Cross Approximation) et application au premier et au deuxième objectif développé précédemment, vu qu'ils engendrent un coût de calcul prohibitif dû à la taille de la structure et le nombre de tirages de conductivités.

Structuration de la thèse en quatre chapitres

Le premier chapitre présente un état de l'art des relations et des équations fondamentales de la physique ainsi que les modèles numériques de résolution des phénomènes électromagnétiques. La méthode des éléments finis est développée pour la résolution de l'équation électromagnétique en 2D, puis nous citons quelques avantages et limites de la méthode.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation et au développement des méthodes stochastiques les plus rencontrés et leur applications. Nous focalisons sur la méthode de Monté-Carlo ainsi que la génération des nombres aléatoires qui sont présentés en détails en vue de leurs usages au dernier chapitre, à la fin du chapitre une comparaison entre ces méthodes stochastiques à été faite selon certains critères de classification.

Le troisième chapitre décrit les moyens et les méthodes utilisées pour accélérer les temps de calcul à savoir le calcul parallèle, le calcul à haute performance et les méthodes de réduction de grands systèmes.

Le dernier chapitre est dédié à la description des dispositifs expérimentaux ainsi que de l'ensemble du matériel utilisé. L'application du modèle éléments finis stochastique décrivant l'effet du vieillissement sur un matériau conducteur à la fois pour le problème direct et l'évaluation du problème inverse avec la même méthode. Une confrontation des résultats de simulation avec ceux issus de l'expérimentale afin de valider le modèle stochastique proposé. Un autre aspect abordé est celui de développer un modèle de réduction de matrices et son application au calcul électromagnétique stochastique (Adaptive Cross Approximation) propre à notre besoin.

Chapitre 1

Modèles numériques régis par les équations aux dérivées partielles

Sommaire

1.2.	Equations et lois de la physique	18
1.2.1.	Equations de Maxwell	18
1.2.1.1.	Forme différentielle :	18
1.2.1.2.	Forme intégrale	20
1.2.2.	Lois de comportement du milieu	21
1.2.2.1.	Loi d'Ohm	22
1.2.2.3.	Relation diélectrique	22
1.2.3.	Condition de transmission entre deux milieux	22
1.2.4.	Condition aux limites	24
1.2.4.1.	Condition aux limites de Dirichlet	24
1.2.4.2.	Condition aux limites de Neumann	24
1.2.5.	Formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique	24
1.2.5.1.	Modèle magnétostatique	25
1.2.5.2.	Modèle magnétodynamique	25
1.3.	Méthodes numériques	26
1.3.1.	Les différences finies "DF"	27
1.3.2.	Méthodes des volumes finis	29
1.3.3.	Méthodes des éléments finis "MEF"	29
1.3.3.1.1	Formulation variationnelle	31
1.3.3.1.2	Méthode des résidus pondérés	31
1.3.3.1.2.1	La méthode de collation par point	32
1.3.3.1.2.2	La méthode de Galerkin	32
1.3.3.1.	Discretisation géométrique	32
1.3.4.	Formulation éléments finis des équations électromagnétiques	33
1.3.5.	Avantages et limites de la MEF	35
1.3.5.1	Avantages	35
1.3.5.2	Limites	36
1.4.	Conclusion	36
1.5.	Bibliographie	37

1.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter un résumé relatif aux équations générales de l'électromagnétisme, les lois de comportement du milieu et les conditions d'interfaces associés intervenant dans le cadre de notre application dédiée au contrôle non destructif.

Les formulations traitant les problèmes magnétostatiques et magnétodynamiques sont présentés en introduisant le potentiel vecteur magnétique A dans le cas d'un problème cartésien et le type de conditions aux limites considéré.

Nous présentons également les modèles et les méthodes numériques de résolutions des équations aux dérivées partielles les plus rencontrés dans ce domaine objet d'investigations.

1.2. Equations et lois de la physique

1.2.1. Equations de Maxwell

Les lois fondamentales de l'électromagnétisme sont énoncées à l'aide d'équations de Maxwell, ces équations sont des postulats de base de cette théorie. Elles sont locales et valables dans n'importe quel système d'axes. Nous les retrouverons sous formes équivalentes qui sont : différentielle et intégrale [1, 2, 3, 4, 5].

1.2.1.1. Forme différentielle :

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$\vec{J}[A/m^2]$ et $\rho[C/m^3]$: Densités de courant de conduction et de charge électrique.

$\vec{E}[V/m]$ et $\vec{H}[A/m]$: Champ électrique et magnétique.

$\vec{D}[As/m]$ et $\vec{B}[T]$: Induction électrique et magnétique.

Les relations (1.2) et (1.4) expriment le couplage entre les grandeurs électriques et magnétiques et les relations (1.1) et (1.3) représentent respectivement la conservation de la charge électrique et du flux magnétique.

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ou bien \vec{J}_D exprime la vitesse de variation de l'induction électrique appelée densité de courant de déplacement introduite par Maxwell et \vec{J} exprime la densité de courant de conduction \vec{J}_C

L'expression détaillée de densités de courants :

$$\vec{J} = \vec{J}_S + \vec{J}_{ind} \quad (1.5)$$

Avec \vec{J}_S et \vec{J}_{ind} [A/m^2] sont respectivement les densités de courant source et courant induit. Dans le cas d'un milieu conducteur en mouvement le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{E}'$$

\vec{E}' étant le champ électromoteur donné par :

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$v[m/s]$ est la vitesse de déplacement du milieu

En appliquant la loi d'Ohm on obtient :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_t = \sigma (\vec{E} + \vec{E}') = \sigma \vec{E} + \sigma \vec{E}' \quad (1.6)$$

Avec :

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_{ind} \quad (1.7)$$

\vec{E}_S [V/m] et \vec{E}_{ind} [V/m] représentent respectivement le champ électrique source et le champ électrique induit

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_S + \sigma \vec{E}_{ind} + \sigma \vec{E}' \quad (1.8)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}_S + \sigma \vec{E}_{ind} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.9)$$

Ce qui fait que

$$\vec{J}_S = \sigma \vec{E}_S \quad (1.10)$$

$$\vec{J}_{ind} = \sigma \vec{E}_{ind} + \sigma (\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.11)$$

Le terme $\sigma \vec{E}_{ind}$ est la densité de courant résultant du champ \vec{E}_{ind} électrique par contre le terme $\sigma (\vec{v} \wedge \vec{B})$ représente la densité de courant résultant du mouvement. L'expression de la quatrième équation de Maxwell telle qu'elle est écrite correspond à la forme la plus

rencontrée dans la littérature mais si toute fois nous sommes en présence d'un milieu magnétique en plus, ce qui voudrait dire (en présence d'un milieu conducteur, diélectrique et magnétique) à la fois, l'expression détaillée de l'équation sera exprimée de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_t = \vec{J} \quad (1.12)$$

\vec{J} exprime la densité de courant totale

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D + \vec{J}_M \quad (1.13)$$

Avec :

\vec{H}_t représente le vecteur champ magnétique total.

\vec{J}_M représente la densité de courant en présence d'un milieu magnétique qui est donnée par :

$$\vec{J}_M = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \quad (1.14)$$

Avec \vec{M} vecteur aimantation du milieu magnétique.

Donc l'équation (4) devient

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_t = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \quad (1.15)$$

Et en posant $\vec{H}_t - \vec{M} = \vec{H}$

Nous retrouvons l'équation (1.4) dans ce cas le terme \vec{H} représente le champ magnétique d'excitation.

1.2.1.2. Forme intégrale

- La première équation de Maxwell traduit le théorème de Gauss :

$$\iiint_V \text{div} \vec{D} dV = \iiint_V \rho dV \quad (1.16)$$

Ou encore en appliquant le théorème d'Ostrogradsky-Gauss nous obtenons la forme suivante :

$$\oiint_S \vec{D} ds = q \quad (1.17)$$

$\rho[C/m^3]$: est la charge totale contenue dans le volume V délimité par la surface S

dV Volume élémentaire

q : Somme algébrique des charges à l'intérieures à cette surface

- La deuxième équation de Maxwell est donnée sous forme intégrale par application du théorème de Stokes

$$\oint_S \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \vec{B} ds \right) \quad (1.18)$$

Avec :

$$\iint_S \vec{B} ds = \phi \quad (1.19)$$

dl : Élément de longueur

ϕ : Flux magnétique à travers toute la surface s'appuyant sur le contour

- La troisième équation de Maxwell est celle de la conservation du flux magnétique donnée par :

$$\iint_S \vec{B} ds = 0 \quad (1.20)$$

Le flux d'induction magnétique à travers une surface fermée quelconque est toujours nul

- La quatrième équation de Maxwell est donnée sous forme intégrale par application du théorème de Stokes

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I \quad (1.21)$$

Avec $I = \sum_{i=1}^n I_i$

I_i : Le courant total enlacé par le contour fermé l

Elle montre que la circulation de l'intensité du champ magnétique le long le long d'un contour quelconque l est égale à la somme des courants enlacés par la courbe.

1.2.2. Lois de comportement du milieu

Les champs vectoriels précédemment $(\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D})$ sont reliés entre eux par les lois de comportement qui expriment les propriétés du milieu dont ils baignent, ainsi pour les milieux isotropes et homogènes on aura [1,4] :

1.2.2.1. Loi d'Ohm

La loi d'Ohm est donnée en chacun des points du domaine par l'expression :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.22)$$

$\sigma[S/m]$: La conductivité électrique du milieu

La relation entre le vecteur d'induction \vec{B} et le vecteur champ magnétique \vec{H} est donnée par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.23)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$\mu[H/m]$: est la perméabilité magnétique absolue

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H/m$: est la perméabilité magnétique du vide.

μ_r : est la perméabilité magnétique relative

1.2.2.3. Relation diélectrique

La relation entre le vecteur d'induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} est donnée par la relation :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.24)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$\varepsilon[F/m]$: est la permittivité électrique absolue.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 C^2} = \frac{10^{-9}}{36\pi} F/m$: est la permittivité électrique du vide.

ε_r : est la permittivité électrique relative du milieu considéré.

$C=3.10^8 m/s$: est la célérité (vitesse de la lumière).

1.2.3. Condition de transmission entre deux milieux

Dans la plupart des problèmes d'électromagnétisme, plusieurs milieux avec des propriétés physiques différentes sont présents. L'application des équations de Maxwell sous

forme intégrale a permis d'établir toute une série de relations qui régissent les composantes normales et tangentielles des vecteurs du champ sur la surface de séparation de deux milieux. Pour étudier ces champs au voisinage immédiat de ces surfaces les égalités ci-dessus doivent être satisfaites [6] :

a.1. Composante normale

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n} = \rho_s \quad (1.25)$$

$$\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\vec{n} = 0 \quad (1.26)$$

$$\vec{n}\vec{J}_1 - \vec{n}\vec{J}_2 = 0 \quad (1.27)$$

a.2. Composante tangentielle

$$\left(\vec{E}_1 \wedge \vec{n}\right) - \left(\vec{E}_2 \wedge \vec{n}\right) = 0 \quad (1.28)$$

$$\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\vec{n} = k_s \quad (1.29)$$

\vec{n} : est le vecteur normal à la surface de séparation entre le milieu (1) et le milieu (2).

k_s et ρ_s sont respectivement la densité de courant surfaciques et la densité de charge superficielle.

Les relations (1.26), (1.27) et (1.28) montrent respectivement la continuité :

- de la composante normale \vec{B}_n de l'induction magnétique \vec{B} ,
- de la composante normale \vec{J}_n de la densité de courant \vec{J} ,
- et la composante tangentielle \vec{E}_T du champ électrique \vec{E}

Les relations (1.25) et (1.29) montrent respectivement la discontinuité :

- de la composante normale \vec{D}_T de la densité de courant de déplacement \vec{D} .
- de la composante tangentielle \vec{H}_T du champ magnétique \vec{H} relative à la présence d'un courant sur la surface de séparation des deux milieux.

1.2.4. Condition aux limites

Il est important de noter que, grâce aux conditions aux limites nous disposons d'une certaine information sur la nature du champ qui est nécessaire pour trouver les solutions des équations différentielles de Maxwell.

1.2.4.1. Condition aux limites de Dirichlet

La condition nous renseigne sur la valeur exacte de l'inconnue sur la frontière extérieure du domaine de résolution (limite)

$$\phi(s) = \phi_0 \quad (1.30)$$

$\phi(s)$: est l'inconnue du problème

ϕ_0 : représente la valeur de l'inconnue sur la frontière (constante).

1.2.4.2. Condition aux limites de Neumann

Cette condition nous renseigne sur la valeur de la composante normale de l'inconnue sur la limite du domaine étudié. Elle nous renseigne sur l'existence d'un plan de symétrie dans le domaine d'étude lorsque la valeur de cette dernière est nulle.

$$\frac{\partial \phi(s)}{\partial n} = \phi_1 \quad (1.31)$$

ϕ_1 : Constante

n : La normale

1.2.5. Formulations utilisant le potentiel vecteur magnétique

Les équations de Maxwell telles qu'elles sont posées se prêtent mal à une résolution numérique. Pour les problèmes de symétrie de révolution on utilise généralement une formulation en potentiel vecteur magnétique [7,8].

1.2.5.1. Modèle magnétostatique

En magnétostatique $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$, le champ est produit par des sources de courant indépendantes du temps. L'équation (1.3) nous permet d'écrire :

$\text{div}\vec{B} = 0$ Il existe un potentiel vecteur magnétique \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$

Nous avons la relation $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ce qui nous permet d'écrire $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$, en combinant l'équation

(1.4) on trouve, $\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \vec{J}_s$. En rajoutant l'équation $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, on déduit l'équation

magnétostatique en termes de potentiel vecteur magnétique \vec{A} .

$$\text{rot}\left(\frac{\text{rot}\vec{A}}{\mu}\right) = \vec{J}_s \quad (1.32)$$

1.2.5.2. Modèle magnétodynamique

En magnétodynamique le terme $\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq 0\right)$, il y'a couplage des deux champs magnétique et

électrique. Remplaçant \vec{B} par l'expression $\text{rot}\vec{A}$ on aura $\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

Cette relation nous permet de déduire l'existence d'un potentiel électrique scalaire V tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}V \quad (1.33)$$

$$\text{D'où } \vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{Avec : } \vec{E}_{ind} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E}_s = \text{grad}V$$

Pour un milieu en mouvement on introduit le terme de vitesse à travers la notion du champ électromoteur

$$\vec{J} = \vec{J}_s - \sigma \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.34)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_s - \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (v \wedge \vec{B}) \right) \quad (1.35)$$

Avec : $\vec{J}_s = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}V}$

$$\vec{J}_{ind} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (v \wedge \vec{B}) \right) \quad (1.36)$$

L'expression de l'équation (36) devient

$$\vec{J} = \vec{J}_s - \sigma \frac{D\vec{A}}{Dt} \quad (1.37)$$

Avec :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - (v \wedge \vec{B}) \quad (1.38)$$

En remplaçant l'expression de \vec{J} dans l'équation (24) on aura l'équation magnétodynamique en potentiel vecteur magnétique A donnée par :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{1}{\mu} \left(\overrightarrow{\text{rot}} A \right) \right) + \sigma \frac{D\vec{A}}{Dt} = \vec{J} \quad (1.39)$$

1.3. Méthodes numériques

Les phénomènes physiques sont généralement complexes à étudier, ils sont souvent régis par un grand nombre de paramètres interagissant entre eux. La représentation d'un tel phénomène physique sous forme d'un modèle mathématique utilise souvent des équations aux dérivées partielles non linéaires. Cela conduit à des formulations n'ayant pas de solution analytique. Ils faut alors faire appel à l'une des grandes familles de méthodes de discrétisations des EDP [9] pour résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un domaine de résolution choisi (la discrétisation du problème dépend du choix du modèle numérique à utiliser).

La figure 1.1 illustre le processus d'analyse d'un modèle numérique [10]

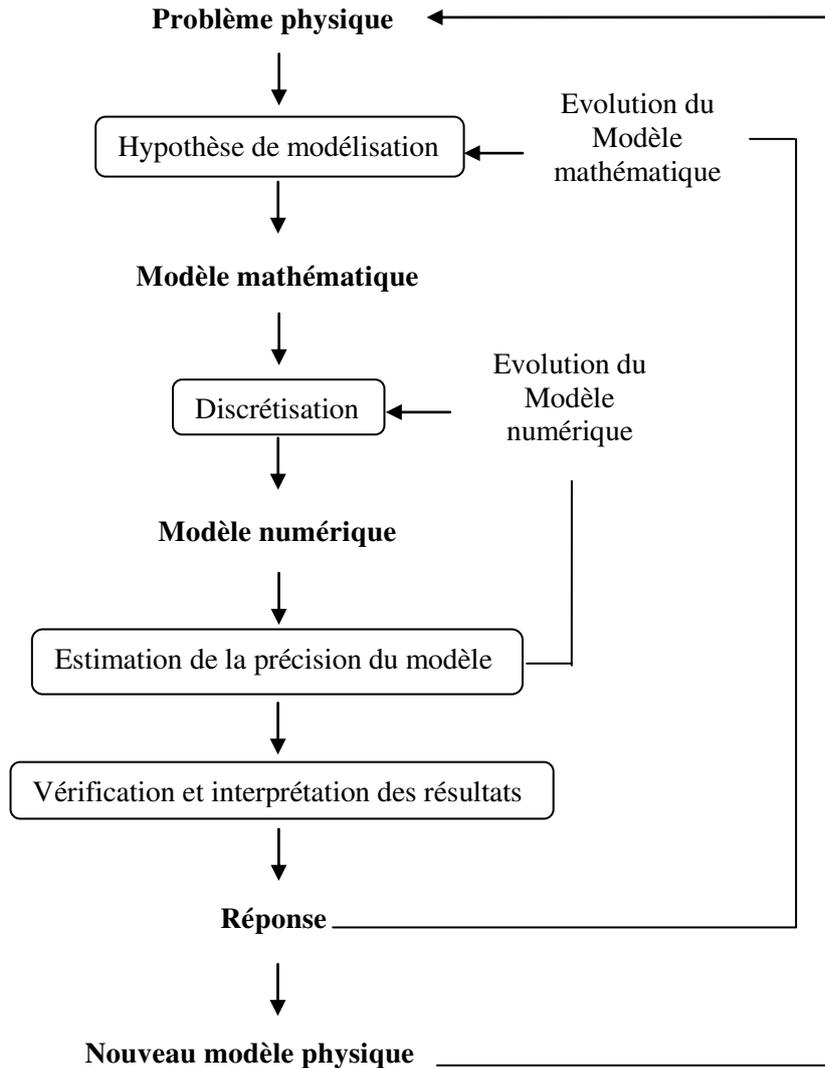


Fig. 1. 1 Processus d'analyse d'un modèle numérique.

1.3.1. Les différences finies "DF"

La méthode des différences finies est l'une des premières méthodes utilisée dans le magnétisme, elle a été rendue populaire grâce à l'avènement de l'ordinateur. Elle consiste à approximer les dérivées des équations de la physique au moyen des développements de Taylor. Basée sur la transformation de l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences où chaque dérivée est approchée par une différence de valeurs de l'inconnue aux nœuds du domaine de résolution [11].

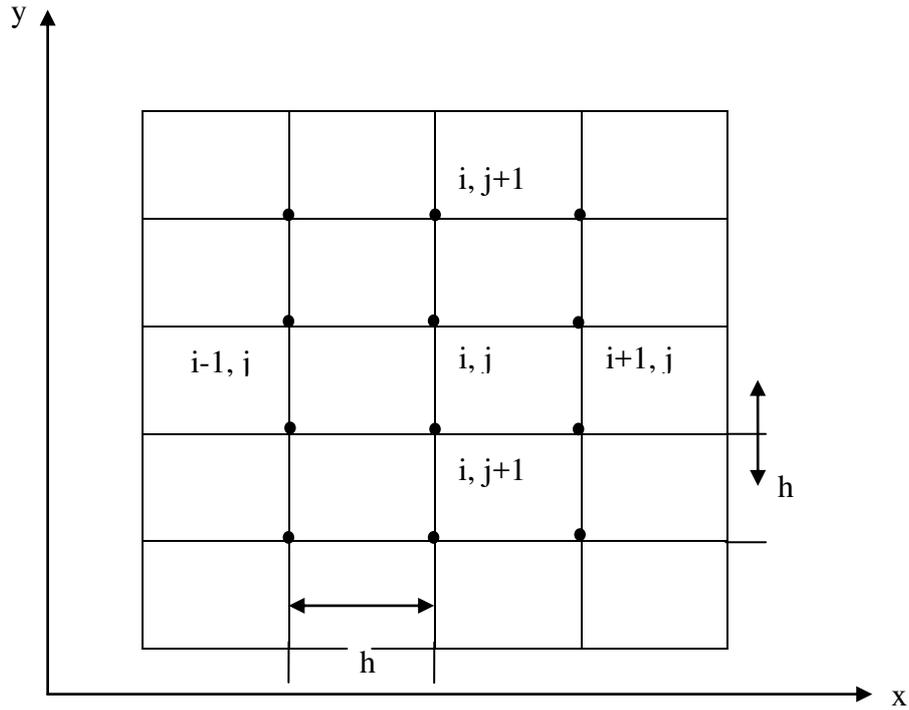


Fig. 1. 2 Maillage différences finies.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} \tag{1.40}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2h} \tag{1.41}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h^2} \tag{1.42}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{h^2} \tag{1.43}$$

Ce qui permet de déduire l'expression suivante (Laplacien)

$$(\Delta \phi)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{h^2} \tag{1.44}$$

$$(\Delta \phi)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 4\phi_{i,j}}{h^2} \tag{1.45}$$

i, j : varient de 1 à n

n : Nombre de points inconnus du domaine.

La méthode des différences finis est réputée par sa simplicité néanmoins elle est limitée à des géométries simples [12] ; une faible qualité d'approximation des variables et la difficulté de prendre en compte des conditions aux limites de type Neumann.

1.3.2. Méthodes des volumes finis

La méthode des volumes finis (MVF) est basée sur le calcul de la forme intégrale de l'équation aux dérivées partielles (EDP), sur des volumes élémentaires. Elle a été initialement développée et mise au point pour des lois de conservation hyperboliques, elle est introduite dans le traitement 2D de problèmes de la mécanique des fluides [13] ; ainsi que les problèmes d'écoulements [14]. C'est une méthode utilisée dans le traitement des géométries complexes puisque elle permet l'utilisation des volumes de différentes formes (rectangles en 2D ou des parallélépipèdes en 3D).

La discrétisation par la méthode des volumes finis conduit à des systèmes linéaires. La matrice du système global est construite par arrête.

1.3.3. Méthodes des éléments finis "MEF"

La méthode des éléments finis est une méthode numérique de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles et de leurs conditions aux limites. Elle permet aussi de traiter les problèmes représentés par des fonctionnelles d'énergie. Cette méthode a été utilisée initialement pour l'analyse des structures (mécanique, génie civil). Elle fut introduite pour la première fois en électromagnétisme par P.SILVESTER et M.V CHARI en 1970, son champ d'application couvre les domaines suivants :

- Contrainte et déformation.
- Mécanique des fluides.
- Problèmes thermiques.
- Electromagnétisme

Plus récemment les problèmes couplés :

Magnéto-thermique (\vec{A}, T) et Magnéto-mécanique (\vec{A}, F)

La méthode des éléments finis consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent, la discrétisation se fait en subdivisant le domaine en sous domaines de géométries simples interconnectés appelés éléments [2,15] ; on retrouve des triangles ou des quadrilatères pour les problèmes 2D et tétraèdres ou des hexaèdres pour les problèmes 3D. Ensuite, le potentiel vecteur magnétique sur chaque nœud d'un élément est calculé, en supposant, que ce même potentiel varie dans l'élément d'une façon prédéfini (linéaire ou quadratique par exemple)

La solution finale s'obtient en résolvant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine de résolution, dont la précision dépend du nombre d'éléments du maillage de celui-ci [16].

1.3.3.1. Formulation éléments finis

La méthode des éléments finis est définie comme une méthode de discrétisation des formes intégrales de type Galerkin : elle remplace la forme intégrale globale par la somme de formes intégrales élémentaires puis discrétiser celles-ci en utilisant une approximation par éléments finis. Parmi les formulations intégrales utilisées, on retrouve l'approche projective et l'approche variationnelle illustré par la figure 1.3. [17].

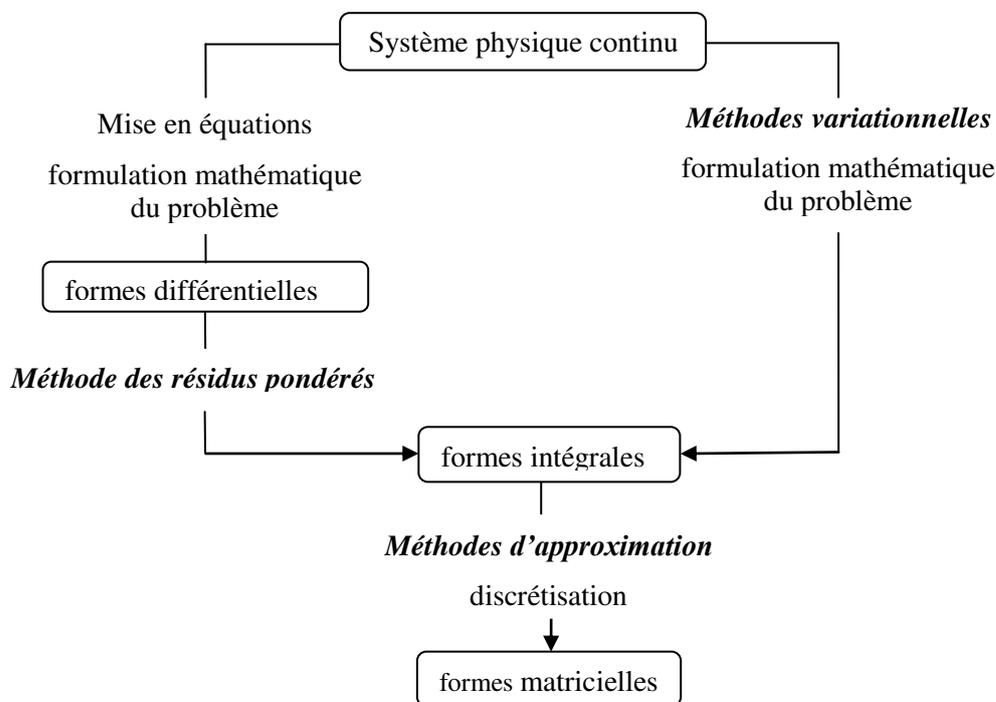


Fig. 1. 3 Vue synthétique des méthodes d'approximation.

1.3.3.1.1 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système à étudier. Cette fonctionnelle d'énergie est déterminé à partir du principe de l'action Hamiltonnienne qui stipule l'existence d'une fonctionnelle de type intégrale définie par :

$$F(A) = \int_{\Omega} L d\Omega \quad (1.46)$$

L : fonction de Lagrange qui résulte de la coénergie du système de type cinétique et de son énergie potentielle.

Ω : domaine de résolution

La résolution du problème variationnelle défini par la fonctionnel d'énergie $F(A)$ revient à minimiser cette fonctionnelle.

1.3.3.1.2 Méthode des résidus pondérés

Les méthodes des résidus pondérés (dite projectives) sont des méthodes numériques permettant de résoudre un système d'équation aux dérivées partielles en approximant la solution exacte par une solution approchée. Le principe fondamental des méthodes projectives est basé sur un théorème applicable dans un espace de "Hilbert", qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace. Si on prend comme fonctions de pondération les fonctions de forme, on tombe sur la méthode de Petrov-Galerkine, ce choix est préféré, puisqu'il nous permet d'avoir une matrice symétrique donc de meilleurs résultats [16].

La détermination du résidu est donné par :

$$R = L(A) - f_v \quad (1.47)$$

R : Représente le résidu de l'approximation

$L(A)$: Opérateur différentiel

f_v : Fonction définie sur le domaine d'étude Ω

A : L'inconnue du problème

A l'aide de fonctions de pondération bien choisies, on impose à l'intégrale du résidu de s'annuler en n points du domaine Ω :

$$\int_{\Omega} R_i \phi_i d\Omega = 0 \quad (1.48)$$

Pour $i = 1, \dots, n$

Les fonctions de pondération sont indépendantes et leurs nombres doit être égale au nombre de paramètres de l'approximation. Leur choix conduit à plusieurs méthodes [7, 10, 17] :

1.3.3.1.2.1 La méthode de collation par point

Cette méthode consiste à utiliser comme fonctions pondération des fonctions de Dirac. Ce qui revient à annuler l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine. L'intérêt est évident : c'est la simplicité de mise en œuvre, à savoir le calcul de l'intégrale sur le domaine est évité. Par contre, les résultats sont très sensibles au choix des points de collocation, et les matrices obtenues sont quelconques

1.3.3.1.2.2 La méthode de Galerkin

Cette méthode consiste à utiliser comme fonctions de pondération les fonctions de forme. L'inconvénient réside dans le calcul de l'intégrale sur le domaine. Par contre, si les opérateurs sont symétriques, les matrices le sont également, de plus, si le problème est bien posé, nous sommes assurés de la régularité du système. Cette régularité du modèle mathématique assure des propriétés de convergence de la solution cherchée.

1.3.3.1. Discrétisation géométrique

Cela consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines : Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple.

- **Élément à une dimension**



Linéaire (02 nœuds)



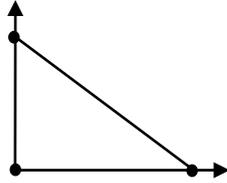
Quadratique (03 nœuds)



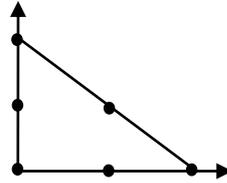
Cubique (04 nœuds)

- **Élément à deux dimensions**

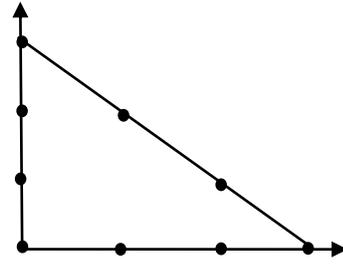
- **Élément triangulaire**



Linéaire (03 nœuds)

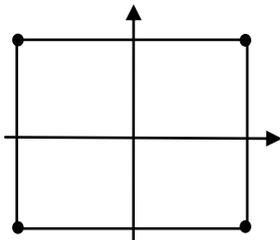


Quadratique (06 nœuds)

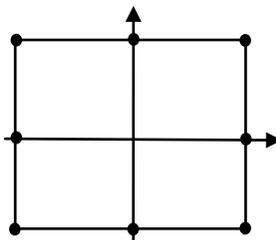


Cubique (09 nœuds)

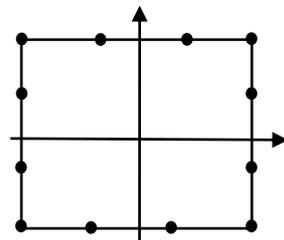
- **Élément carré**



Linéaire (04 nœuds)

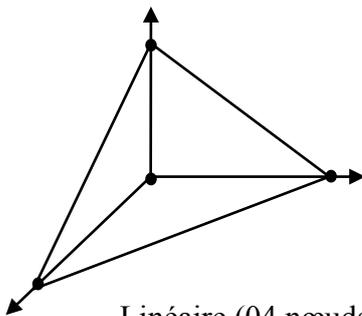


Quadratique (08 nœuds)

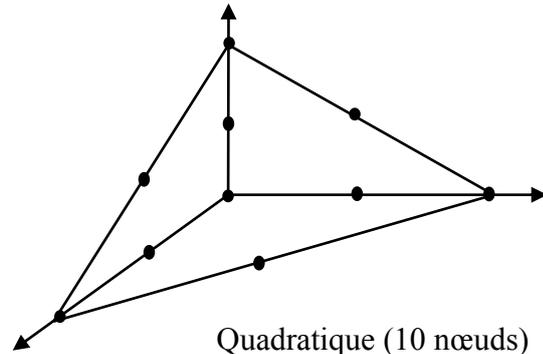


Cubique (12 nœuds)

- **Élément à trois dimensions**



Linéaire (04 nœuds)



Quadratique (10 nœuds)

1.3.4. Formulation éléments finis des équations électromagnétiques

L'équation magnétodynamique en coordonnées cartésiennes est donnée sous la forme suivante [17, 18, 19, 20] :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\sigma\omega A_z = J_{sz} \quad (1.48)$$

En appliquant la méthode de Galerkin à l'équation (1.48), la formulation aura la forme :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \alpha_i dx dy = - \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy \quad (1.49)$$

C'est la forme forte de la formulation éléments finis de l'équation magnétodynamique.

L'intégration par partie des dérivées d'ordre deux génère la forme faible de cette formulation, par application du théorème de Green, on obtient :

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) \alpha_i dx dy = - \iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla} A_z \overrightarrow{\nabla} \alpha_i dx dy + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i d\Gamma \quad (1.50)$$

Remplaçant dans l'équation (1.49) on aura :

$$\iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla} A_z \overrightarrow{\nabla} \alpha_i dx dy - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \alpha_i d\Gamma + \iint_{\Omega} \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} \alpha_i dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_i dx dy \quad (1.51)$$

Le terme sur la frontière $\frac{\partial A}{\partial n}$ est nul vu que dans notre cas on applique les conditions aux limites de types Dirichlet ou Neumann Homogènes.

n : vecteur unitaire normal au point considéré de la frontière.

Donc l'équation devient (1.51) :

$$\iint_{\Omega} \nu \overrightarrow{\nabla} \alpha_j \overrightarrow{\nabla} A_z dx dy + j\omega \iint_{\Omega} \sigma \alpha_j A_z dx dy = \iint_{\Omega} J_{sz} \alpha_j dx dy \quad (1.52)$$

L'interpolation nodale d'un élément est effectuée

Dans l'approximation nodale

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{nn} \alpha_j(x, y) A_j \quad (1.53)$$

$A(x, y)$: Inconnue,

$\alpha_i(x, y)$: Fonction de forme au nœud i

nn : Nombre de nœuds du domaine subdivisé

A_j : Valeur de l'inconnue au nœud j

Le système d'équation algébrique à résoudre après discrétisation et assemblage est donné sous la forme suivante :

$$([M] + j\omega[K])[A] = [F] \quad (1.54)$$

Avec :

$$M_{ij} = \iint_{\Omega} \nu \vec{\nabla} \alpha_i \cdot \vec{\nabla} \alpha_j dx dy \quad (1.55)$$

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \alpha_i \alpha_j dx dy \quad (1.56)$$

$$F_i = \iint_{\Omega} \alpha_i J_s dx dy \quad (1.57)$$

Avec :

[M] – matrice de raideur.

[K] – matrice dynamique.

[A] – vecteur des inconnues.

[F] – vecteur source.

1.3.5. Avantages et limites de la MEF

1.3.5.1 Avantages

La méthode des éléments finis est considérée comme la plus adaptée pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques en raison de [22,23] :

- Le principale avantage de la MEF est la diversité dans le choix de l'élément de maillage donne une flexibilité importante à la méthode, le chercheur peut choisir de façon arbitraire, la position et le nombre de nœuds et donc le nombre, la forme et la répartition des domaines élémentaires.
- Sa souplesse d'adaptation à des configurations géométries complexes.
- Amélioration de la précision de calcul par la prise en compte de différents types de fonctions d'interpolations des variables et nombreux résultats théoriques sur la convergence.

1.3.5.2 Limites

Malgré la réputation de la méthode néanmoins elle présente quelques limites

- L'inconvénient principale de la méthode des éléments finis est lié à la difficulté de programmation (longue car elle est complexe).

La MEF est imprécise au moins dans les trois cas suivant :

- Lorsque le domaine d'étude présente des singularités
- Lorsque le domaine d'étude est infini.
- Prise en compte des pièces en mouvement.

1.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté, à partir des équations de Maxwell la résolution d'un problème électromagnétique à deux dimensions en tenant compte des conditions aux limites. Les grandeurs électromagnétiques peuvent être réduites à une variable d'état, qui peut être soit le potentiel vecteur magnétique, le flux magnétique, l'induction magnétique ou bien le courant électrique. A chaque variable correspond une formulation de calcul de grandeur physique, dans le quatrième chapitre nous avons exploité l'impédance et la tension de Hall d'un capteur en fonction de ces variables d'état citées précédemment.

Parmi les méthodes numériques existantes nous avons passé en revue quelques'une, la méthode des éléments finis à été présentée ainsi que les différentes étapes de sa résolution. Elle à été choisie dans la suite de notre travail vu qu'elle est largement utilisée dans la modélisation numérique et implémentée dans de nombreux logiciels de simulation grâce à ses nombreux avantages. Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les méthodes stochastiques.

1.5. Bibliographie

- [1] P. Lorrain and D. R. Corson, “Electromagnetic Fields and Waves Including Electric Circuits Third Edition,” 1988.
- [2] P.P. Silvester and R.L.Ferrari, “Finite Element Method for Electrical Engineers,” Cambridge University Press, 2nd Edition, 1990, Reprinted 1991.
- [3] E.Boridy " Electromagnetiques theorie et application", 1992.
- [4] H. Mohellebi, “Elaboration de modèles 2D analytico-numériques pour l’étude de systèmes électromagnétique comportant des pièces en mouvement,” Thèse de doctorat d’état Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2001.
- [5] R. Raimond Grimberg, “Electromagnetic Nondestructive Evaluation: Present and Future,” *Strojniški vestnik-Journal Mech. Eng.*, vol. 57, pp. 204–217, 2011.
- [6] J. HAGGBLAD, “Boundary and Interface Conditions for Electromagnetic Wave Propagation using FDTD”. 2010.
- [7] K. SRAIRI, “Modélisation D'actionneur Electromagnétiques Alimentés en Régimes Transitoire,” Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1997, France.
- [8] N. Ida, K. Betzold, and W. Lord, “Finite element modeling of absolute eddy current probe signals,” *J. Nondestruct. Eval*, vol. 3, no. 3, pp. 147–154, 1982.
- [9] A. Peterson, S. Ray, R. Mitta, “Computation Methods for Electromagnetic,” *IEEE Press Series On Electromagnetic Waves*, 1997.
- [10] H. Oudin, “Méthode des éléments finis. École d’ingénieur,” Nantes, France. 20011.
- [11] A. Kennane, “ Méthode des éléments finis,” office des publications universitaires, OPU, 1995.
- [12] H. Mansir, “Contrôle non destructif : modélisation des phénomènes électromagnétiques caractérisation des défauts et optimisation des capteurs,” Thèse de doctorat, Spécialité électrotechnique, Ecole centrale de Lyon, 1986.

- [13] S. Depeyre, “Etude de schémas d’ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d’Euler et aux écoulements diphasiques dispersés”, Thèse de doctorat, Spécialité mathématiques appliquées, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [14] M. Vohralik, “Méthodes numériques pour des équations elliptiques et paraboliques non linéaires application à des problèmes d’écoulement en milieux poreux et fracturés”, Thèse de doctorat, Université Paris XI, 2004.
- [15] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, “La méthode des éléments finis : formulations de base et problèmes linéaires”, AFNOR 1991.
- [16] G. Datt, G. Tazout, “Une présentation de la méthode des éléments finis”, Maloine S.A Editeur Paris, Deuxième édition 1984.
- [17] A. Ayad, F. Benhamida, Bendaoud A, Y. Le Bihan, M. Bensetti, “Solution of Inverse Problems in Electromagnetic NDT Using Neural Networks,” *Przegląd Elektrotechniczny* (Electrical Review), R. 87 NR 9a (2011), ISSN 0033-2097
- [18] Z. Oudni, M. Feliachi, H. Mohellebi, Assessment of the Probability of Failure for EC Nondestructive Testing Based on Intrusive Spectral Stochastic Finite Element Method, *Eur. Phys. J. Appl. Phys*, 66 (2014), No.5, 133-137
- [19] H. Mehaddene, H. Mohellebi, A. Berkache, “Eddy Currents Non Destructive Testing and Evaluation of Ferromagnetic Medium, *Przegląd Elektrotechniczny*,” R. 95 NR 2/2019 ISSN 0033-2097, 112-116
- [20] A. Berkache, Z. Oudni, H. Mehaddene, H. Mohellebi and J. Lee, “Inspection and characterization of random physical property defects by stochastic finite element method,” *Przegląd Elektrotechniczny*, R. 95 NR 8/2019 ISSN 0033-2097, 101-106.
- [21] J.-P. Nougier and Impr. Boudin), *Méthodes de calcul numérique*. Masson, 1987.

Chapitre **2**

Développement des méthodes stochastiques et leurs applications au calcul électromagnétique

Sommaire

2.1. Introduction	40
2.2. Généralités sur la théorie de probabilités	40
2.2.1. Rappels et définition.....	40
2.2.2. Variable aléatoire	41
2.2.3. Vecteur aléatoire	42
2.2.4. Champs aléatoire	43
2.2.5. Processus stochastique	43
2.3. Quelques lois de probabilité usuelles	44
2.3.1 Loi Log-normale	45
2.3.2. Loi de Weibull.....	45
2.3.3. Loi normale	46
2.4. Les méthodes stochastiques	47
2.4.1. La méthode des éléments finis stochastique spectraux	47
2.4.2. Méthode non paramétrique.....	48
2.4.3. Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées.....	48
2.4.4. Simulation de Monté-Carlo	49
2.4.4.1. Principe.....	49
2.4.4.2. Technique de simulation	50
2.4.4.3. L'avantage des simulations de Monté-Carlo.....	51
2.4.4.4. Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires (PRNG).....	51
2.4.5 Comparaison des méthodes stochastiques.....	52
2.5. Conclusion.....	53
2.6. Bibliographie	54

2.1. Introduction

Ce chapitre est réparti en trois sections, dans la première section nous rappelons des généralités sur les probabilités, ensuite nous introduisons les lois de probabilités usuelles.

Dans la deuxième section nous présentons un aperçu sur les méthodes stochastiques de résolutions des problèmes stochastiques, prenant en compte l'incertitude (l'alea) sous forme de variable aléatoire. La simulation Monte-Carlo est présentée en détails, l'objectif est de ne se référer qu'aux résultats qui seront utilisés dans la suite du travail. On s'efforcera d'établir et de faire saisir les idées importantes.

Enfin nous finissons par une comparaison entre ces méthodes, nous tirons des conclusions et choisissons la méthode la plus adéquate pour la suite de notre travail.

2.2. Généralités sur la théorie de probabilités

Nous rappelons ici des notions de bases sur la théorie des probabilités utiles pour la suite, définition d'un événement aléatoire, des probabilités discrètes ou continues, et des probabilités conditionnelles. Celles-ci sont présentées dans tout ouvrage de probabilités.

Il existe divers notations dans la littérature, L'ensemble des notations présentées sont des plus rencontrées en théories [1, 2, 3, 4, 5 ,6].

2.2.1. Rappels et définition

Une épreuve est une expérience dont l'issue est aléatoire. L'ensemble de toutes les réalisations possibles d'une épreuve constitue l'univers de cette expérience aléatoire qui peut être (finie ou infinie) dénombrable qui sera notée Ω . Un événement E est défini comme étant une partie de l'ensemble des résultats possibles de l'expérience ou bien un sous ensemble de Ω , l'ensemble de Ω lui-même est toujours un événement (l'événement certain) ainsi que \emptyset (l'événement impossible). La théorie des probabilités consiste en l'association de nombres aux événements (probabilité d'occurrence). Cette mesure de probabilité est notée P , associée à Ω l'ensemble de tous les événements possibles ayant une probabilité est appelé σ additivité associé Ω à, et est noté (\mathcal{F}) . Finalement le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) est alors appelé espace probabilisé.

2.2.2. Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle X est variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} ou une partie de \mathbb{R} , définie depuis l'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire, dont il faut pouvoir arriver à déterminer la probabilité qu'elle prenne tel que $X : (\Omega, \mathcal{F}, P)$. On distingue deux types de variables aléatoires : continues et discrètes, ce deuxième type de variable sera présenté et exploité dans la partie résultats de ce travail. Chaque variable aléatoire X est associée à la probabilité d'obtenir un tirage inférieur ou égale à x défini par sa fonction de répartition notée $F_x(x)$ et donnée par :

$$F_x(x) = P(X \leq x) \quad (2.1)$$

Si la variable aléatoire réelle X est discrète, la fonction $F_x(x)$ est continue par morceau. Si la variable aléatoire réelle X est continue, dérivable. La densité de probabilité d'une variable aléatoire continue notée $f_x(x)$ est définie par :

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad (2.2)$$

Cette loi décrit en détail la répartition des valeurs de cette variable qui contient toutes les informations nécessaires pour calculer son espérance et plus généralement ses moments. Dans le cas d'une variable aléatoire à densité d'ordre n de X . On utilise la notation $X(\theta)$ pour souligner le caractère aléatoire de X . Les variables aléatoires Gaussiennes sont incontournables dans la théorie des probabilités, nous allons décrire par la suite en détaille cette loi.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire noté $E(X)$ correspond à la moyenne pondérée des valeurs que l'on s'attend à trouver en moyenne si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience.

$$\mu \equiv E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_x(x)dx \quad (2.3)$$

La variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles notée $Var(X)$, est définie par :

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) \quad (2.4)$$

Si cette espérance est bien définie ; sinon $\text{Var}(X) = +\infty$

La variance d'une variable aléatoire à valeurs réelles, de variance finie. Alors les espérances de X et de X^2 sont bien définies:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (2.5)$$

La deuxième définition de la variance est l'expression de la formule de (Koenig-Huygens)

En introduisant la densité de probabilité, l'équation (2.5) peut se réécrire

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx \quad (2.6)$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.7)$$

2.2.3. Vecteur aléatoire

Un vecteur aléatoire X de dimension n un n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ où chaque X_i est une variable aléatoire réelle. Une fonction intégrale $f : R^n \longrightarrow [0, \infty[$ est une densité si elle satisfait :

$$\int_{R^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (2.8)$$

On dit qu'un vecteur aléatoire définit précédemment admet la densité de probabilité conjointe f si

$$P\{X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n\} = \int_{]-\infty, a_1] \times \dots \times]-\infty, a_n]} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Pour tout choix de $a_1, \dots, a_n \in R$

La covariance entre deux variables aléatoires X et Y est un nombre permettant de quantifier leur écart conjoints par rapport à leur espérance est définie par :

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.9)$$

En introduisant la densité de probabilité conjointe $f_{X,Y}(x, y)$ de ces variables, l'équation peut se réécrire :

$$Cov[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.10)$$

Le coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires réelles X et Y ayant chacune une variance finies σ_X et σ_Y sont respectivement les écarts-types de ces deux variables

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.11)$$

2.2.4. Champs aléatoire

Les champs stochastiques représentent de manière bien plus réaliste des paramètres incertains, pour les quels la prise en compte de la variabilité spatiale est nécessaire.

Un champ aléatoire peut se voir comme un ensemble infini de variables aléatoires associées à chaque point de l'espace. Soit un domaine $D \subset R^d$ un champ aléatoire indexé par un paramètre aléatoire continu $x \in D$ à valeurs dans R^n où D décrit la géométrie du domaine considéré. Un champ aléatoire R^n est un ensemble de variables aléatoires dépendant d'un paramètre d'indexation $x \in D$. Pour un point x_0 fixé, $H(x_0, \omega)$ est une variable aléatoire. Pour un aléa fixé ω_0 , $H(x, \omega_0)$ est une réalisation du champ aléatoire. Si $d = 1$ alors le champ est unidimensionnel ou (processus stochastique) sinon il est multidimensionnel.

Un champ aléatoire Gaussien est défini par sa moyenne, sa variance et sa fonction d'auto covariance définie par

$$C(x, x') = Cov[H(x), H(x')] \quad (2.12)$$

$$\rho(x, x') = \frac{C(x, x')}{\sigma(x)\sigma(x')} \quad (2.13)$$

2.2.5. Processus stochastique

Un processus stochastique $X = (x_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t , indexée par un ensemble T .

En général $T = R$ ou R_+ et on considère que le processus est indexé par le temps t . Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = N$ alors le processus est une suite de variables aléatoires.

Plus généralement quand $T \subset Z$, le processus est dit discret. Pour $T \subset R^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \rightarrow X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) .

Pour $\omega \in \Omega$ fixe, $t \in T \rightarrow X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Deux processus X et Y sont dits équivalents s'ils ont la même loi (égalité de toutes les lois fini dimensionnelles). On écrira $X = Y$.

On dira que Y est une version du processus X si pour tout $t \in T$, $P(X_t = Y_t) = 1$. On parle encore d'équivalence au sens fort.

Deux processus X et Y sont dit in distinguables si $P(X_t = Y_t, \forall t \in T) = 1$. Il est facile de voir que pour deux processus stochastiques X et Y :

L'équivalence forte définit une relation d'équivalence pour les processus stochastiques : deux processus fortement équivalents sont équivalents pour cette relation.

2.3. Quelques lois de probabilité usuelles

Il y a de nombreuses lois de probabilité certaines sont plus courantes, plus utiles dans les applications pratiques ou plus importantes dans la théorie. En fiabilité, de nombreuses lois statistiques sont utilisées pour analyser les données de vie [7, 8, 9], quantifier ces lois statistiques d'usuelles donc les plus fréquemment utilisées et les plus connues de tous et non qu'elles seraient les seules qu'on puisse rencontrer.

Les paramètres incertains d'entrée sont représentés par des variables ou champs aléatoires et ils suivent des lois statistiques pouvant refléter des données observées.

2.3.1 Loi Log-normale

La loi Log-normale [10] (parfois appelé loi de Galton) est souvent utilisée pour représenter la distribution des durées de vie d'un phénomène de fatigue mécanique. Une variable aléatoire continue et positive x suit une loi Log-normale si son logarithme népérien est distribué selon une loi normale tel que $Y = \ln(x)$. La fonction de densité d'une loi Log-normale de moyenne μ et d'écart-type σ admet pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x > 0 \quad (2.14)$$

La fonction de répartition de la loi Log-normale s'écrit :

$$F(x) = \phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2.15)$$

Avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale standard.

2.3.2. Loi de Weibull

La loi de Weibull est un cas spécial de loi d'extremum généralisée des lois les plus populaires dans de nombreux domaines : grâce à sa flexibilité, elle permet de représenter une infinité de lois de probabilité. La variable aléatoire x suivant une loi de Weibull de paramètres β , η et γ a pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.16)$$

Où : β est le paramètre de forme ($\beta > 0$)

η est le paramètre d'échelle ($\eta > 0$)

γ est le paramètre de position

La fonction de répartition s'écrit :

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.17)$$

2.3.3. Loi normale

Loi normale (ou Gaussienne) [11, 12] est le modèle probabiliste le plus utilisé, le plus important et le plus adapté pour décrire et modéliser des phénomènes naturels. La particularité de cette loi en comparant par rapport aux autres lois de probabilité réside dans la propriété du théorème central limite, en effet elle correspond au comportement d'une suite d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'expériences est très élevé. Cette particularité lui permet d'approcher d'autres lois. Nous avons fait appel à cette loi dans la partie résultats de ce travail.

Une variable aléatoire x suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ strictement positif admet pour densité de probabilité :

$$f(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.18)$$

Avec ϕ la fonction de densité de la loi normale centrée réduite (loi normale standard, $\mu = 0$ et $\sigma = 1$).

La fonction de répartition de la loi normale s'écrit :

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^x \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2.19)$$

Propriétés

L'espérance mathématique est μ et correspond au moment d'ordre 1. La variance est l'écart-type au carré [$E(x) = \mu$; $Var(x) = \sigma^2$]. Ces deux caractéristiques sont notamment intéressantes du fait de leur facilité d'estimation (respectivement la moyenne empirique et la moyenne des carrés des écarts à la moyenne) et de leur représentativité physique.

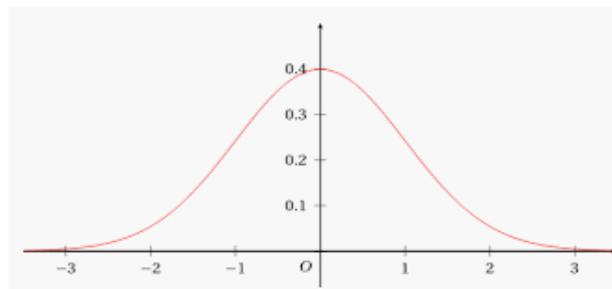


Fig.2.1 Courbe de la loi normale

2.4. Les méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques ont été développées depuis plusieurs décennies afin de prendre en compte l'aléa dans les problèmes mécaniques et récemment des problèmes en magnétismes. Ces méthodes regroupent différentes méthodes qui n'ont pas forcément les mêmes origines. Après avoir modélisé les paramètres incertains par des variables ou champs aléatoires, l'analyse probabiliste nécessite le choix d'une méthode stochastique pour propager les incertitudes et donc évaluer la réponse du modèle probabiliste. Pour l'analyse probabiliste d'une structure modélisée par éléments finis, des méthodes éléments finis stochastiques (SFEM) sont développées. Un état de l'art du développement de ces méthodes peut être trouvé dans de nombreuses références [13,14]. Les principales méthodes stochastiques sont maintenant présentées.

2.4.1. La méthode des éléments finis stochastique spectraux

La méthode spectrale des éléments finis stochastiques (SSFEM) a été proposée par Ghanem et Spanos [15, 16, 17]. C'est une extension de la méthode déterministe d'éléments finis

Pour les problèmes de valeur limite impliquant des propriétés matérielles aléatoires. Elle présente l'avantage d'une indépendance entre la discrétisation par éléments finis et la représentation de l'aléa mais elle nécessite une modification du code de calcul élément finis. Cette approche s'applique à des problèmes linéaires, elle conduit à la résolution d'un système linéaire d'une taille plus importante que lors d'un calcul déterministe par élément finis.

Considérant un problème décrit par un modèle éléments finis, qui dépend d'un paramètre aléatoire y . Soit $z = f(y)$, le vecteur des déplacements nodaux, *i.e.* la réponse de ce modèle. Le paramètre y modélisé par un champ aléatoire Gaussien stationnaire Y . Ce champ fait l'objet d'une discrétisation par la méthode de karhunen-Loève. La v.a modélisant la réponse du modèle, est ensuite projetée sur une famille de polynômes d'Hermite. Les développements du champ d'entrée et de la v.a de sortie sont alors tronqués pour des raisons pratiques. La minimisation de l'erreur de troncature, par la méthode de Galerkin, conduit à un système linéaire, dont les coefficients du développement de la v.a de sortie.

Divers améliorations et applications de la MEFSS existent, mais elle reste limitée à des problèmes linéaires. Dans [18] des moyens d'utiliser le calcul parallèle pour mettre en œuvre la MEFSS, calcul systématique des moments de la réponse sans recours au calcul formel.

Ils existent divers applications de la MEFSS mais elle reste limitée à des problèmes linéaires. Elle a été largement utilisée pour quantifier l'effet des incertitudes sur les données d'entrée sur les sorties de modèles à éléments finis, Cependant, les performances de la méthode stochastique spectrale dépendent de la dimensionnalité, soit une croissance exponentielle du coût de calcul avec l'augmentation du nombre de paramètres incertains, un solveur itératif de bloc permet de réduire le coût de calcul [19], applications sur des structures. Récemment, la méthode stochastique spectrale est appliquée pour l'analyse probabiliste de structures composites. Le coefficient de corrélation des contraintes d'un panneau composite en flexion est étudié par Chung [20]. Dans [21] Ngah et Young évaluent la variabilité des contraintes et des déformations pour un panneau composite en traction avec des propriétés matériaux incertaines. La méthode stochastique spectrale est également développée pour l'analyse probabiliste du comportement dynamique d'une plaque orthotrope avec le module d'élasticité incertain par [22] et d'une plaque composite avec l'orientation des fibres incertaine par [23].

2.4.2. Méthode non paramétrique

Une méthode non paramétrique est proposée dans [24] pour l'analyse probabiliste en dynamique. Cette approche permet de prendre en compte les incertitudes provenant des paramètres structurels, mais aussi des incertitudes de modélisation numérique et mécanique. Le choix de modélisation peut avoir en effet une forte influence sur la variabilité de sortie pour des systèmes complexes. L'incertitude est introduite dans les matrices caractéristiques du système mécanique, qui est résolu à l'aide de la théorie des matrices aléatoires [25, 26]. La méthode non paramétrique est comparée à des approches paramétriques et elle est appliquée à divers exemples en dynamique : assemblages de plaques [27], panneaux composites de type sandwich [28] et structures aérospatiales [29].

2.4.3. Méthode fondée sur une discrétisation aléatoire par Intégrales Pondérées

La technique des intégrales pondérées, basée sur une discrétisation aléatoire par intégrales pondérées, peut également être utilisée pour représenter le champ aléatoire. Cette technique est développée dans [30, 31, 32, 33], dans le cadre des éléments finis stochastiques. Associée à une méthode de perturbation, elle est appliquée pour différents types de structures

[34, 35]. Pour des structures élastiques linéaires, cette technique considère que les matrices de rigidité élémentaires sont les quantités aléatoires de base.

Cette technique, appelée dans la littérature "méthode des intégrales pondérées (MIP)" (weighted integrals method) est à l'origine d'une technique de discrétisation de champs aléatoires. Par extension, les auteurs précités et les états de l'art ont appelés : Méthode des Intégrales Pondérées la MEFS incluant cette technique de discrétisation originale, associée à une technique d'estimation de moments statistiques. La MIP a fait l'objet de diverses applications dans le cadre des techniques de discrétisation des champs (fondation au module d'élasticité longitudinal variable et soumise à une sollicitation aléatoire [36] ; plaque en flexion [37] ; coque dont les coefficients de lame et éventuellement l'épaisseur sont variables [38]).

2.4.4. Simulation de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo et les manières de générer des nombres aléatoires. C'est une approche statistique, car l'évaluation des caractéristiques stochastiques de la réponse du système considéré passe par le calcul d'un grand nombre de problèmes déterministes, l'utilisation de cette technique nécessite de générer des réalisations des paramètres aléatoires du modèle utilisé. Une simulation de Monte-Carlo évalue une expression mathématique à partir d'expériences avec des nombres aléatoires. Très souvent elle permet d'approcher la valeur d'une intégrale de dimension supérieure à 1 ou à estimer une intégrale.

Elles sont généralement utilisées afin de résoudre un problème difficile comme par exemple un système d'équation, l'analyse probabiliste de structures homogènes [39, 40]. Elle est également développée par [41, 42, 43, 44], pour prédire la fiabilité de structures composites avec propriétés ou chargements incertains. La variabilité des contraintes pour une plaque composite perforée en membrane est évaluée dans [45]. En dynamique, la méthode MCS directe est appliquée pour étudier la variabilité de la réponse de treillis composite [46] et de poutres composites par [47]. Cette méthode est également utilisée pour prédire les propriétés matériaux de structures composites par [48, 49].

2.4.4.1. Principe

L'idée de base de la méthode de Monte-Carlo est de calculer une grandeur, définie comme l'espérance d'une variable aléatoire elle-même issue d'un processus aléatoire [50, 51,

52] ; ou l'expression d'une intégrale en simulant n fois ce processus, à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires. Un ordinateur opère, numériquement, n fois le processus et les n réalisations du processus doivent être indépendantes, on calcule à chaque fois une valeur pour la variable aléatoire, et à la fin on ressort avec la moyenne de toutes les valeurs calculés : cette moyenne est une estimation de la grandeur recherchée.

On cherche à connaître l'espérance q d'une grandeur $w(\vec{X})$ issue d'un processus aléatoire, dont toute instance (c'est-à-dire toute réalisation) est caractérisée par un vecteur d'état \vec{X} . On écrit par convention « $q = E(w(\vec{X}))$ » pour signifier « q est l'espérance de $w(\vec{X})$ », ce qui signifie par définition de l'espérance que :

$$q = \int_{u_{\vec{X}}} p_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x} w(\vec{x}) \quad (2.20)$$

Où on note que $u_{\vec{X}}$ l'ensemble des valeurs possibles de \vec{X} (appelé univers de \vec{X}) et $p_{\vec{X}}$

La densité de probabilité de \vec{X} , $p_{\vec{X}}$ est définie par :

$$\forall \Omega \subset u_{\vec{X}}, \Pr(\vec{X} \in \Omega) = \int_{\Omega} p_{\vec{X}}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (2.21)$$

Où \Pr dénote la probabilité.

Dans les écritures précédentes \vec{X} et $w(\vec{X})$ sont des variables aléatoires (VA).

$w(\vec{X})$ est une fonction. On a implicitement posé que $w(\vec{X})$ est la variable aléatoire dont la valeur est l'image par w de la valeur de \vec{X} .

2.4.4.2. Technique de simulation

Les différentes phases de simulation de la méthode Monte-Carlo sont :

- Définition du problème en termes de variables aléatoires.
- Génération des valeurs aléatoires des variables recherchées.
- Evaluation du problème déterministe pour chaque ensemble de réalisation ou tirages de toutes les variables aléatoires.
- Récupération de l'information probabiliste de l'ensemble des réalisations et déterminer les grandeurs statistiques de sortie du problème
- Déterminer l'efficacité et la stabilité de la simulation.

2.4.4.3. L'avantage des simulations de Monte-Carlo permet de mener successivement plusieurs calculs déterministes, une fois que les tirages ont été tirés. Néanmoins cet avantage constitue l'inconvénient majeur de la méthode car le nombre de tirage effectués est grand (n tirages) dépendant de la structure à étudier, pour que l'étude statistiques de la réponse converge

2.4.4.4. Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires (PRNG)

Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires produisent des nombres qui semblent aléatoires mais qui en réalité ne le sont pas. En effet, ce sont des algorithmes déterministes qui, à partir d'une graine (un terme initial), génèrent des suites de nombres dont les propriétés statistiques respectent ce qui est attendu de vrais nombres aléatoires. Pour chaque graine, on aura une nouvelle suite, une même graine produit les mêmes nombres. Cependant, il est possible que certaines graines permettent d'obtenir une suite plus aléatoire que d'autres.

De plus, ils sont important pour des applications en simulation vu leurs rapidités [53], le NIST (National Institute of Standards and Technology) présente ses recommandations pour l'utilisation d'un PRNG.

On distingue les générateurs linéaires congruentiels qui ont été introduits par Lehmer [54] et qui sont toujours très populaires. En effet, il s'agit d'une suite dont chaque terme dépend du précédent, ce type de générateurs nécessitant peu d'opérations et la production rapide des nombres selon la formule :

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m \quad (2.22)$$

Où a est le multiplicateur, c l'incrément et m le module.

La séquence est périodique, il est préférable que la période soit la plus longue possible

Le terme initial est appelé la graine (*seed* en anglais). C'est elle qui va permettre de générer une suite aléatoire. Pour chaque graine, on aura une nouvelle suite. Cependant, il est possible que certaines graines permettent d'obtenir une suite plus aléatoire que d'autres. Un choix judicieux de a , c et m permet de maximiser cette période. Il existe des tables recensant les valeurs de ces paramètres qui maximisent la période [55].

2.4.5 Comparaison des méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques précédentes présentent des avantages et des inconvénients. La méthode MCS directe est robuste mais nécessite un grand nombre de tirages, ce qui la rend difficilement utilisable pour des problèmes de grande taille, par exemple des applications industrielles [56]. La méthode MCS associée aux méthodes de surface de réponse et aux plans d'expériences nécessite un certain nombre de calculs pour atteindre une bonne précision, mais le nombre de variables aléatoires doit être petit. La méthode de perturbation est plus performante en temps de calcul, mais elle est limitée à des problèmes à faible niveau de variabilité d'entrée, sinon elle n'est plus robuste [57]. De plus, une analyse de sensibilité sur des systèmes impliquant un grand nombre de variables aléatoires peut devenir rapidement coûteuse en temps de calcul. La méthode stochastique spectrale est intéressante quand les variables sont de type Gaussiennes mais le coût de calcul augmente exponentiellement avec le nombre de variables aléatoires [58]. La méthode non paramétrique permet de prendre en compte des incertitudes de modélisation numérique et mécanique, mais elle est intrusive et une reformulation de la théorie des éléments finis est donc nécessaire.

Tableau. 2. 1 : Caractéristiques des méthodes stochastiques.

Méthodes stochastiques	Grand nombre de variables aléatoires	Grand niveau de variabilité d'entrée	Bonne compatibilité avec logiciels éléments finis	Modèle de grande taille
MEFSS	-	+	+/-	+/-
Non paramétrique	+	+	-	+
MIP	+	-	+/-	+
MCS	+	+	+	-

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques des méthodes présentées. Les symboles +, - et +/- respectivement un avantage, un inconvénient et l'un ou l'autre suivant le cas. Il peut être observé que les méthodes décrites ne satisfont pas en même temps tous les critères proposés.

Dans la suite de notre travail, nous portons notre attention à la méthode Monte-Carlo, d'après la comparaison faite elle présente un inconvénient lorsque la taille du problème à traiter est importante.

2.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé des généralités sur la théorie des probabilités ainsi que les lois de probabilité usuelles utilisant des variables aléatoires. La deuxième partie a consisté en la présentation des méthodes stochastiques qui regroupe un ensemble de techniques faisant encore l'objet de recherche. La popularité et le succès des méthodes viennent du fait qu'elles reposent sur la théorie, dont l'utilisation s'impose naturellement lorsqu'il s'agit de modéliser l'effet du hasard. Les différents domaines d'applications de ces méthodes peuvent conduire à des critères de classifications différents, on distingue les méthodes intrusives qui nécessitent une modification ou une reformulation de la théorie des éléments finis utilisée, par contre les méthodes non intrusives ne nécessitent aucune modification du code éléments finis utilisé. Un autre critère de classification est relatif à la précision et au temps de calcul qui varie d'une méthode à l'autre, ce dernier est lié directement au nombre d'appel au modèle EF.

Nous focalisons dans la suite de ce travail sur la méthode de Monté Carlo qui fait appel aux nombres aléatoire, elle a été développée durant la deuxième guerre mondiale. De nombreuses applications dans des domaines très différents. Une utilisation populaire de ces nombres intervient dans les jeux de hasard : tirages de dés, de cartes, roulette, loterie, etc. Ceci a amené à appeler les méthodes utilisant des nombres aléatoires les méthodes de Monte-Carlo, en référence à ses casinos. Avec l'avènement des ordinateurs nous avons vu arriver de nouvelles techniques pour simuler et prédire le comportement de phénomènes naturels ou de reproduire le fonctionnement de systèmes industriels par exemple dans le nucléaire, l'automobile ou l'aérospatial.

Dans le troisième chapitre nous présentons les moyens et les méthodes de réduction du temps de calcul.

2.6. Bibliographie

- [1] G. Saporta, "Probabilités, analyse des données et statistique. Editions Technip, 1990.
- [2] J.C Radix, "Pratique moderne des probabilités," Lavoisier, 1991.
- [3] R.M. Gray, "Introduction to Statistical Signal Processing," winter 2010–2011.R.M. Gray 2011
<https://web.stanford.edu/class/archive/ee/ee278/ee278.1114/variables13x4.pdf>.
- [4] M Bervellier, "Elément finis stochastiques : Approche intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité", Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal-Clermont II, 2005.
- [5] K. Beddek, Y. Le Menach, S. Clenet, O. Moreau, "Stochastic Spectral Finite Element Method in static electromagnetism using vector potential formulation," *IEEE Trans Magn.* Vol. 47, N°.5, pp 1250-1253, 2010.
- [6] R. Ramarotafika, A. Benabou and S. Clénet," Stochastic Modeling of Soft Magnetic Properties of Electrical Steels:Application to Stators of Electrical Machines," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 48, N°.10, October 2012.
- [7] B. Ayyub, R. McCuen, "Probability, Statistics, and Reliability for Engineers and Scientists, CRC Press, "3ème" edition, 2011.
- [8] M. Nikulin, L. Gerville-Réache, and V. Couallier, "Statistique des essais accélérés. Hermes Science Publications, Paris, 2007.
- [9] A. Birolini, "Quality and reliability of technical systems: theory, practice, management, Springer, 1997.
- [10] R.B. Leipnik, "On lognormal random variables: I-the characteristic function, The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, 32(03) : p. 327-347, 1991.
- [11] Laplace, P.-S. "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres, et sur leur application aux probabilités. PhD thesis, Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, 1809.
- [12] W. Bryc, "The normal distribution: characterizations with applications, Springer Science & Business Media, Vol. 100, 2012.
- [13] A. Keese, "A review of recent developments in the numerical solution of stochastic partial differential equations (stochastic finite elements), Scientific Computing, 2003,

- [14] G.I. Schuëller, H.J. Pradlwarter, “Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches, *Engineering Structures*, 2009, 31(11): p. 2507-2517.
- [15] R. G. Ghanem, P.D. Spanos *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer -Verlag, New York, 1991.
- [16] R. Ghanem, R. Kurger Numerical solution of spectral stochastic finite elements systems *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289-303, 1996.
- [17] R. Ghanem, Ingredients for a general-purpose stochastic finite elements implementation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168: 19-34, 1999.
- [18] B. Sudret, A. DerKiureghian, *Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report*. Report No.UCB/ SEMM-2000 /08, Department of Civil & Engineering University of California, Berkeley, 2000.
- [19] K. Beddek, S. Clénet, O. Moreau, O. LeMenach, Solution of Large Stochastic Finite Element Problems—Application to ECT-NDT, *IEEE Trans. Magn.*, 49, 2013.
- [20] D.B. Chung, M.A. Gutiérrez et R. de Borst, Object-oriented stochastic finite element analysis of fibre metal laminates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, , 12–16: p. 1427-1446, 2005.
- [21] M.F. Ngah, A. Young, Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures, *Composite Structures*, 78(3): p. 447-456. 140, 2007.
- [22] K. Sepahvand, S. Marburg, H.J. Hardtke, Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion, *Journal of Sound and Vibration*, 331 p. 167-179, 2012.
- [23] K. Sepahvand, Spectral stochastic finite element vibration analysis of fiber-reinforced composites with random fiber orientation, *Composite Structures*, 145: p. 119-128, 2016.
- [24] C. Soize, *A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3): p. 277-294, 2000.
- [25] C. Soize, *Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis*, *Journal of Sound and Vibration*, 263(4): p. 893-916, 2003.

- [26] C. Soize, Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12–16): p. 1333-1366, 2005.
- [27] H. Chebli et C. Soize, Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of non-homogeneous uncertainties for dynamical systems, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(2): p. 697-705. 141, 2004.
- [28] C. Chen, D. Duhamel et C. Soize, *Uncertainties in structural dynamics for composite sandwich panels*, International Conference on Modal Analysis, Noise and Vibration Engineering, 2004, Leuven, Belgium: Katholieke Univ Leuven, Dept Werktuigkunde, Celestijnenlaan 300B, Heverlee, B-3001, Belgium.
- [29] E. Capiez-Lernout, M. Pellissitti, H. Pradlwarter, G.I. Schueller et C. Soize, *Data and model uncertainties in complex aerospace engineering systems*, *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5): p. 923-938, 2006.
- [30] G. Deodatis The weighted integral method. I: Stochastic stiffness matrix. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 117(8): 1851-1864, 1991.
- [31] L.L. Graham, G. Deodatis Response and eigenvalues analysis of stochastic finite element systems with multiple correlated material and geometrical properties. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16: 11 -29, 2001.
- [32] T. Takada Weighted integral method in multidimensional stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(4): 158-166, 1990.
- [33] G.Deodatis, M. Shinozuka, Weighted integral method. II: response variability and reliability, *Journal of Engineering Mechanics*, 117(8): p. 1865-1877, 1991.
- [34] H.C. Noh et T. Park, Response variability of laminate composite plates due to spatially random material parameter, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200p.2397-2406, 2011.
- [35] H.C. Noh, Stochastic finite element analysis of composite plates considering spatial randomness of material properties and their correlations, *Steel and Composite Structures*, 11p.115-30, 2011.
- [36] Deodatis G. Stochastic FEM sensitivity analysis of nonlinear dynamic problem s. *Probabilistic Engineering Mech anic s*, 4(3): 135 -141, 1989.
- [37] Graham L.L. and Deodatis G. Vari ability respons e functio ns for stochas tic plate-bending problems. *Structu ral Safety*, 20: 167 -188, 1998.

- [38] Stefanou G., Papadrakakis M. Stochastic finite element analysis of shell with combined random material and geometric properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 139-160, 2004.
- [39] D.C. Charmpis, M. Papadrakakis, Improving the computational efficiency in finite element analysis of shells with uncertain properties, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194p.1447-1478, 2005.
- [40] C.R. Avila, A.T. Beck, New method for efficient Monte Carlo–Neumann solution of linear stochastic systems, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 40 p. 90-96, 2015.
- [41] H.K. Jeong, R.A. Shenoi, Probabilistic strength analysis of rectangular FRP plates using Monte Carlo simulation, *Computers & Structures*, 76 p. 219-235, 2000.
- [42] S. Lin, Buckling failure analysis of random composite laminates subjected to random loads, *International Journal of Solids and Structures*, 37p. 7563-7576, 2000.
- [43] D.M. Frangopol, S. Recek, Reliability of fiber-reinforced composite laminate plates, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18p. 119-137, 2003.
- [44] A.J. Sobey, J.I.R. Blake, R.A. Shenoi, Monte Carlo reliability analysis of tophat stiffened composite plate structures under out of plane loading, *Reliability Engineering & System Safety*, 110: p. 41-49, 2013.
- [45] G. Van Vinckenroy, W.P. de Wilde, The use of Monte Carlo techniques in statistical finite element methods for the determination of the structural behavior of composite materials structural components, *Composite Structures*, 1995.
- [46] G. Allegri, S. Corradi, M. Marchetti, Stochastic analysis of the vibrations of an uncertain composite truss for space applications, *Composites Science and Technology*, 66(2): p. 273-282, 2006.
- [47] M.T. Piovan, J.M. Ramirez et R. Sampaio, Dynamics of thin-walled composite beams: Analysis of parametric uncertainties, *Composite Structures*, 105: p. 14-28, 2013.
- [48] M.M.S. Dwaikat, C. Spitas et V. Spitas, Effect of the stochastic nature of the constituents parameters on the predictability of the elastic properties of fibrous nanocomposites, *Composites Science and Technology*, 72(15): p. 1882-1891, 2012.
- [49] S.P. Lee, J.W. Jin et K.W. Kang, Probabilistic analysis for mechanical properties of glass/epoxy composites using homogenization method and Monte Carlo simulation, *Renewable Energy*, 65: p. 219-226, 2014.

- [50] R-Y Rubinstein, Simulation and the Monte Carlo methods. John Wiley & Sons, 1981.
- [51] A. Gille-Genest, "Utilisation des méthodes numériques probabilistes dans les applications au domaine de la fiabilité des structures," PhD thesis, Université de Paris VI, 1999.
- [52] R-E Melchers, Structural reliability analysis and prediction. John Wiley & Sons, 1999.
- [53] E. Barker, J.Kelsey, Recommendation for random number generation using deterministic random bit generators, 2012.
- [54] D. H. Lehmer, Mathematical methods in large-scale computing units. In Mass.: Harvard University Press Cambridge, editor, Proc. Sec. Symp. On Large-scale Digital Calculating Machinery, pages 141–146, 1951.
- [55] J. Boyar, Inferring sequences produced by pseudo-random number generators. J. ACM, 36:129–141, 1989.
- [56] G. Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 198(9-12): p. 1031-1051, 2009.
- [57] Sudret et A. Der Kiureghian, Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report, 2000: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley, CA.
- [58] G.I. Schuëller et H.J. Pradlwarter, Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches, Engineering Structures, 31(11): p. 2507-2517, 2009.

Chapitre 3

Méthodes de réduction de systèmes et leurs applications

Sommaire

3.1	Introduction	60
3.2	Calcul haute performance et calcul parallèle.....	60
3.2.1.	Terminologie (HPC) et du parallélisme	60
3.2.1.1	Tâche et tâche parallèle	61
3.2.1.2.	Processus et thread	61
3.2.1.3.	Mémoire partagée et distribuée	61
3.2.1.4.	Accélération et Scalabilité.....	61
3.2.2.	Quelques architectures parallèles	62
3.2.2.1.	Multi-cœurs	62
3.2.2.2.	Cluster de calcul	62
3.2.2.3.	Processeurs Graphiques (GPU)	63
3.2.3.	Limites et coût du parallélisme.....	63
3.2.4.	Evolution des ordinateurs de bureau	65
3.3.	Compression matricielle.....	65
3.3.1.	Matrices de rang faible et rk -matrices	65
3.3.1.1.	Rang d'une matrice	65
3.3.1.2.	Rk -Matrices	66
3.3.1.3.	Décomposition en valeurs singulières.....	67
3.3.2.	Méthodes usuelles de compression matricielle	68
3.3.2.1.	Nécessité des méthodes de compression	68
3.3.2.2.	Méthode Multipôle Rapide Multiniveau (MLFMM)	68
3.3.2.3.	Adaptative Cross Approximation	69
3.3.2.3. 1.	Pivotage total.....	69
3.3.2.3. 2.	Pivotage partiel.....	71
3.4.	Conclusion.....	71
1.5.	Bibliographie.....	72

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous passons en revue les méthodes de réductions de systèmes d'une manière générale. Nous débutons par une présentation du calcul haute performance ainsi que le calcul parallèle qui utilise différentes architectures informatiques. Puis une présentation des méthodes de compression de matrices.

3.2 Calcul haute performance et calcul parallèle

Le calcul haute performance (HPC) est un domaine qui rassemble les outils matériels et logiciels nécessaires à l'exécution d'applications et de techniques complexes utilisées dans divers domaines académiques et industriels et les simulations physiques. Le terme HPC est aussi utilisé pour se référer aux différentes architectures parallèles existantes actuellement [1] : les supercalculateurs, les clusters, les grilles de calcul et les processeurs graphiques (GPUs). Le développement des techniques de simulation et de calcul utilisées dans ces domaines a évolué en parallèle avec l'évolution de la puissance de calcul et des architectures parallèles. Ces évolutions ont permis d'atteindre des puissances de calcul jamais espérées auparavant et de résoudre ainsi des problèmes numériques de grande taille en des temps de plus en plus réduits.

Le calcul parallèle est l'ensemble des techniques logicielles et matérielles permettant l'exécution simultanée de séquences d'instructions indépendantes sur des processeurs et/ou cœurs différents (multi-cœur, multi-CPU, réseau), contrairement à un programme séquentiel qui ne fait qu'une opération à la fois. Ces techniques ont pour but :

- Exécution plus rapide (obtenir des résultats dans des délais de temps raisonnables)
- résoudre des problèmes plus importants grâce au cumul des ressources comme la mémoire vive qui est souvent un facteur limitant.

3.2.1. Terminologie (HPC) et du parallélisme

Sont présentées ici quelques définitions de termes qui sont couramment rencontrés en calcul hautes performances [1, 2].

3.2.1.1 Tâche et tâche parallèle

En informatique, une tâche est une portion d'un travail à effectuer par un ordinateur. Il s'agit typiquement d'un ensemble d'instructions exécutées sur un processeur. Une tâche parallèle est une tâche qui peut s'exécuter sur plusieurs processeurs. Le point d'arrêt dans une tâche qui se débloque lorsque les autres tâches sont arrivées au même niveau s'appelle la synchronisation.

3.2.1.2. Processus et thread

Un processus est un concept ancien. C'est un programme en cours d'exécution, il est créé par le système d'exploitation, il possède son espace mémoire propre, où il stocke ses données et sa pile. Un processus peut créer plusieurs threads, et par défaut tous les threads de ce processus partagent son espace mémoire et ses données. Le thread est apparu plus récemment que le processus. Chaque thread a bien une pile propre, mais il s'exécute dans l'espace mémoire de son processus hôte. En fait, pour le système d'exploitation, passer d'un thread à un autre est plus rapide que de changer de processus (l'espace d'adressage restant notamment le même) et l'on désigne un thread comme étant un processus léger vu qu'il est constitué d'une ou plusieurs tâches.

3.2.1.3. Mémoire partagée et distribuée

La mémoire partagée est une mémoire accessible par toutes les tâches. C'est l'architecture mémoire utilisée dans la programmation multithread, chaque thread partageant la mémoire globale du thread parent. Ce modèle est simple à mettre en œuvre sur une machine multi-cœur qui a pour particularité que toutes les unités de calcul ont accès à la même mémoire RAM, alors que la mémoire distribuée est non commune aux différentes tâches, car elle est physiquement répartie sur plusieurs machines. Elle est accessible via des communications entre les différentes tâches (par fichiers, réseau, etc.).

3.2.1.4. Accélération et Scalabilité

L'accélération d'un programme parallèle représente le gain en rapidité d'exécution obtenu par son exécution sur plusieurs processeurs. Une accélération idéale est le nombre de processeurs utilisés. La scalabilité d'un système parallélisé et sa capacité à fournir une accélération proportionnelle au nombre de processeurs. Elle dépend du matériel (vitesse des bus, etc.), de la capacité de l'algorithme à être parallélisé et également de la programmation.

L'augmentation des performances obtenues lorsque l'on ajoute des processus. Le rapport entre les temps de calcul et les temps de communication est appelé : La granularité.

3.2.2. Quelques architectures parallèles

La programmation parallèle est fortement liée à l'architecture parallèle utilisée. Sont présentés ici les architectures parallèles les plus courantes [3].

3.2.2.1. Multi-cœurs

Les processeurs dits multi-cœurs sont des processeurs qui contiennent plusieurs unités de calcul fonctionnant simultanément, ce terme est employé pour décrire un processeur composé d'au moins deux cœurs. Il existe deux types de processeurs multi-cœurs :

- processeurs multi-cœurs à accès mémoire non uniforme
- Processeurs multi-cœurs à accès mémoire uniforme

Actuellement, il s'agit de l'architecture la plus courante, elle représente le nouveau standard des PCs. Le nombre de cœurs de calcul se situe couramment entre 2 et 8. C'est une architecture à mémoire partagée car tous les cœurs ont accès à la mémoire vive. Pour exploiter cette architecture, il est courant de diviser le problème en n threads, avec n le nombre de cœurs de la machine. Ce partitionnement est assez facile à mettre en œuvre car le nombre de partitions est faible, et de plus, la mémoire est partagée entre les threads.

3.2.2.2. Cluster de calcul

Un cluster de calcul, désigne un ensemble d'ordinateurs reliés en réseau permettant de dépasser les limitations d'une machines en termes de puissance de calcul. Il s'agit d'une architecture à mémoire distribuée, chaque machine n'a pas accès à la mémoire des autres. Les communications se font via un réseau. Pour le développeur de code de calcul parallèle, il lui faudra également gérer les temps de communication réseau qui peuvent devenir un goulot d'étranglement. Il est généralement géré par un serveur qui fait office de gestionnaire de tâches. C'est lui qui va distribuer les tâches sur les machines, gérer les ressources disponibles, ainsi que les pannes des machines. Voici quelques objectifs de l'utilisation des clusters :

- diminution des temps de calculs.
- réduire les coûts (prix / performance) par rapport à celui des supercalculateurs traditionnels.
- réaliser des opérations non réalisables sur un serveur.

3.2.2.3. Processeurs Graphiques (GPU)

Les GPUs (Graphics Processing Units) sont des processeurs massivement parallèles, ils sont traditionnellement utilisés dans les jeux 3D sur ordinateurs. La technologie GPU a évolué de simples processeurs dédiés aux graphismes à de vrais processeurs programmables équipés d'APIs, de langages et d'environnements de programmation (l'environnement CUDA de NVIDIA) pour un usage plus général. Cette nouvelle technologie, communément connue sous le nom GPGPU (General Purpose GPU computing), permet d'atteindre des puissances de calcul jamais atteintes auparavant par un seul processeur. Par exemple, un GPU de la gamme Tesla de NVIDIA peut atteindre des centaines de Gflops pour les opérations en double précision et un Tflops pour les opérations en simple précision. Les machines les plus puissantes sur Top 500 intègrent souvent des GPUs [4].

Le grand avantage des GPGPU, en plus de leur grande puissance de calcul, réside dans leur faible coût d'acquisition et de maintenance comparé aux supercalculateurs. De plus, la généralisation de l'usage des GPGPU dans des stations de travail ordinaires et non encombrantes rend leur adaptation très répandue dans divers domaines notamment pour les applications d'imagerie médicale, les simulations physiques pour l'industrie pétrolière et les biotechnologies. Cependant, le GPGPU convient moins aux applications impliquant le traitement sur GPU de gros volumes de données. Un autre point fort de cette architecture est sa très grande puissance de calcul brute qui est de l'ordre de celle d'un petit cluster de calcul, l'avantage par rapport à un cluster est l'absence de gestion d'un réseau de PCs.

3.2.3. Limites et coût du parallélisme

En architecture informatique, l'accélération d'un programme parallélisé devrait être le nombre de cœurs de calcul utilisé (scalabilité optimale). La réalité n'est malheureusement pas aussi simple car il existe toujours des parties séquentielles qui peuvent représenter un coût non négligeable. La loi d'Amdahl [5] est souvent utilisée pour prédire l'accélération maximale théorique obtenue en utilisant n processeurs (1.1) :

$$Acc(n) = \frac{1}{r_s + \frac{r_p}{n}} \quad (3.1)$$

Où $r_s + r_p = 1$, et r_s et r_p sont respectivement les proportions séquentielles et parallélisable du programme. Ce modèle limite l'accélération que peut apporter la parallélisation. En effet, la limite quand n tend vers l'infini est finie (Figure 1).

Une réévaluation de la loi Amdhal par Gustafson en 1988 [6] car il jugeait cette dernière trop pessimiste (Figure 3.1). La parallélisation ne sert pas uniquement à réduire le temps de calcul d'un problème donné, comme Amdhal le considère, mais surtout à traiter des problèmes plus importants. Dans ce cas, la proportion séquentielle reste plus ou moins constante. Le problème physique à résoudre peut être quant à lui de complexité $N \log N$ s'il s'agit d'éléments finis, ou N^2 s'il s'agit d'une méthode intégrale par exemple. L'augmentation du coût des opérations séquentielles est minime par rapport à celles parallélisables. Elle traduit le fait que l'on peut traiter plus de données dans le même temps en augmentant le nombre de processeurs suivant une loi d'accélération linéaire (3.2) :

$$Acc(n) = r_s + nr_p \quad (3.2)$$

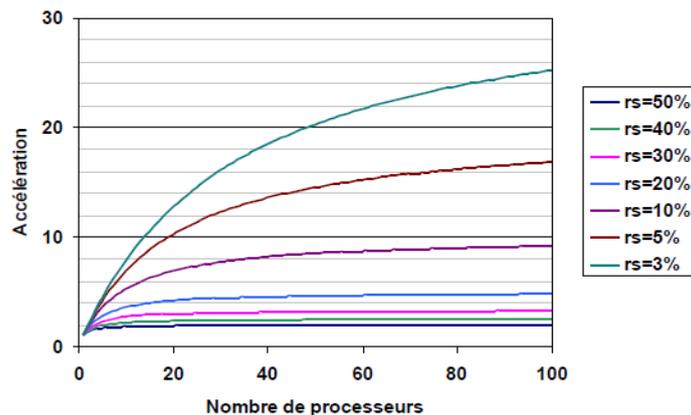


Fig. 3.1. Loi de Amdhal, accélération en fonction du nombre de processeurs pour différentes proportion de programme séquentiel.

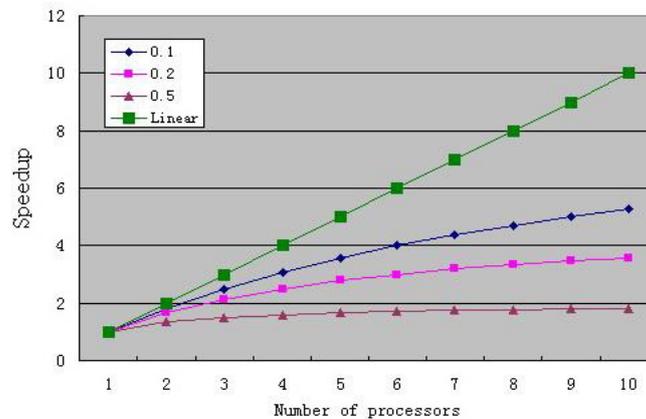


Fig. 3.2. Loi de Gustafson, accélération en fonction du nombre de processeurs pour différentes proportion de programme séquentiel

3.2.4. Evolution des ordinateurs de bureau

- Les premiers ordinateurs exécutaient les instructions d'un programme unique en séquence. Ces ordinateurs ne faisaient pas de traitement parallèle.
- Au début des années 1990, l'exécution des instructions d'un programme se fait en parallèle. Les pipelines d'instructions deviennent un élément de base des ordinateurs personnels.
- Peu après, vers 1993, les microprocesseurs de bureau deviennent superscalaires : des pipelines d'instructions sont exécutés en parallèle.
- Entre 1993 et 2000, l'exploitation du parallélisme entre les instructions d'un programme est maximisée.
- Quand la complexité matérielle requise pour exploiter le parallélisme à l'intérieur d'un seul programme explose, les designs de microprocesseurs changent : un microprocesseur exécute des instructions venant de plusieurs processus (2000-2002, multithreading)
- L'exécution parallèle d'instructions provenant de plusieurs programmes conduit à l'apparition de microprocesseur ayant plusieurs cœurs (2002-aujourd'hui).

3.3. Compression matricielle

3.3.1. Matrices de rang faible et rk -matrices

3.3.1.1. Rang d'une matrice

Rappelons dans un premier temps les définitions des notions élémentaires que sont : L'image directe et le rang d'une matrice.

Définition (Image directe et rang d'une matrice). Soit $M \in C^{m \times n}$, $m, n \in N$. On appelle image directe de A et on note $\text{Im}(A)$ l'ensemble défini par

$$\text{Im}(M) \stackrel{\text{déf}}{=} \{Ax \in C^m, x \in C^n\}. \quad (3.3)$$

Le rang de M , noté $rg(M)$ est alors défini par

$$rg(M) \stackrel{\text{déf}}{=} \dim(\text{Im}(M)). \quad (3.4)$$

On rappelle aussi les relations suivantes

Propriété. Soient $M \in C^{m \times n}$, $A \in C^{m \times n}$ et, $B \in C^{n \times p}$ et $m, n \in N$. Alors :

- $rg(M) \leq \min(m, n)$,
- $rg(M + A) \leq rg(M) + rg(A)$,
- $rg(MB) \leq \min(rg(M), rg(B))$,

Le rang d'une matrice $M \in C^{m \times n}$ indique le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes de M.

3.3.1.2. Rk-Matrices

On suppose dans cette section l'existence d'un critère dont l'entrée est un ensemble d'indices « ligne » σ et un ensemble d'indices « colonne » τ , et renvoyant une décision binaire, basée sur les supports des fonctions de base associées aux éléments de σ et τ . On note de plus $m = |\sigma|$ et $n = |\tau|$.

Dans le cas où un ensemble $\sigma \times \tau$ est admissible (dans un sens que nous précisons ultérieurement, pour l'instant ceci signifie que l'on s'autorise à compresser ce bloc), le sous-bloc matriciel associé $M|_{\sigma \times \tau}$ est représenté sous la forme de deux matrices, A et B (voir figure 3.2, telles que :

$$M|_{\sigma \times \tau} \rightarrow A.B^T \quad (3.5)$$

avec donc $M|_{\sigma \times \tau} \in C^{m \times n}$, et nécessairement $A \in C^{m \times k}$ et $B^T \in C^{k \times n}$ pour assurer la compatibilité du produit.

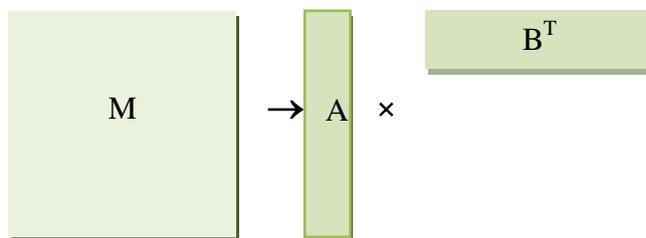


Fig. 3.3. Compression d'un bloc matriciel

La compression du bloc est le problème de la recherche des matrices A et B telles que l'écart en norme entre $A.B^T$ et $M|_{\sigma \times \tau}$ soit le plus faible possible, tout en

assurant $k \leq \min(m, n)$. Cette représentation approchée d'une matrice est appelée Rk -Matrice et son avantage réside dans sa compatibilité avec l'addition et la multiplication matricielle.

La question de l'existence d'une bonne approximation sous cette forme se pose. La décomposition en valeurs singulières apporte une première réponse [7]. Il existe d'autres formes d'approximations souvent plus efficaces en pratique.

Comme nous le verrons dans la suite, les blocs sont compressés suivant divers algorithmes, mais tous mènent au remplacement d'un bloc de matrice par un autre de rang plus faible.

3.3.1.3. Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières (SVD) est une factorisation valable pour toute matrice $M \in C^{m \times n}$ donnée selon le **théorème 2.1**

Théorème 2.1 (Décomposition en valeurs singulières). Soit $M \in C^{m \times n}$. Il existe une factorisation de M de la forme

$$M = U \Sigma V^*$$

avec $U \in C^{m \times m}$ une matrice unitaire, $\Sigma \in C^{m \times n}$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont réels positifs ou nuls et les autres sont nuls (matrice diagonale dans le cas carré) et dont les éléments diagonaux sont appelés valeurs singulières, $V^* \in C^{n \times n}$ la matrice adjointe à V , unitaire.

Remarque (Non unicité). Une convention courante est que les valeurs singulières sont ordonnées par ordre décroissant, la matrice Σ est unique, (mais U et V ne le sont pas).

Plusieurs liens existent entre la SVD et la décomposition en valeurs propres d'un endomorphisme diagonalisable ; par exemple, les valeurs propres de $M^T M$ sont les carrés des valeurs singulières de M . Cette factorisation est particulièrement intéressante du fait de l'approximation obtenue par la troncature de celle-ci, c'est-à-dire en ne conservant que les k plus grandes valeurs singulières et les vecteurs singuliers à gauche et à droite associés. Précisons le sens de « meilleure approximation » de la SVD [7].

La décomposition en valeurs singulières permet de factoriser tout bloc $M|_{\sigma \times \tau} \in C^{m \times n}$ par trois matrices U , Σ et V , et d'approcher celui-ci par la troncature de cette décomposition. L'inconvénient de cette méthode, outre son coût de calcul élevé, est la nécessité de calculer toute la matrice afin de construire son approximation.

3.3.2. Méthodes usuelles de compression matricielle

Il existe ensuite diverses méthodes pour résoudre le système, présentant des avantages et des inconvénients, mais du fait de la taille des problèmes considérés, seule une méthode plus rapide est adaptée aux cas les plus grands.

3.3.2.1. Nécessité des méthodes de compression

La compression matricielle est appelée à prendre un rôle encore plus important aujourd'hui afin de l'associer au calcul numérique. Pour limiter les complexités algorithmiques trop importantes, il est possible d'approcher les matrices denses issues du modèle numérique par des matrices parcimonieuses (ou data sparse). Il existe pour cela plusieurs méthodes de compression, dont certaines sont connues par acommunauté scientifiques. On peut notamment citer les techniques d'interpolation [8], le Panel Clustering [9, 10] ou encore la compression QR [11].

Ces dernières années, deux méthodes semblent tirer leur épingle du jeu, toutes deux associées à une forme de hiérarchisation des matrices à compresser. Il s'agit de la FMM [12] qui est une méthode de compression apparue il y a une trentaine d'années, et d'autre part l'ACA [13], développée et en cours d'améliorations depuis les années 2000. Ces deux méthodes permettent notamment une accélération de la résolution itérative de grands systèmes linéaires. Nous allons entrer un peu plus dans les détails pour ces deux méthodes de compression a priori toujours très populaires.

3.3.2.2. Méthode Multipôle Rapide Multiniveau (MLFMM)

La FMM utilise une expansion multipolaire du noyau de Green G , solution de l'équation de Helmholtz. Ceci a pour conséquence de regrouper les interactions proches et de les considérer comme une seule et même source contenue dans une boîte de calcul [12]. Dans le cas de la FMM simple, toutes les boîtes élémentaires de calcul sont de la même taille. En revanche, la MLFMM permet d'avoir des boîtes élémentaires de diverses tailles selon l'importance des interactions considérées.

En électromagnétisme on utilise la MLFMM pour accélérer la multiplication matrice vecteur, et donc les solveurs itératifs dans la BEM [14]. En traitant les interactions entre des

fonctions très différentes par la MLFMM, il n'est pas nécessaire de stocker les éléments de matrice correspondants, ce qui réduit considérablement le coût mémoire. Si la MLFMM est appliquée de manière hiérarchique [15], elle améliore la complexité algorithmique des produits matrice-vecteur dans un solveur itératif avec une tolérance sur la précision ε_{MLFMM} . La MLFMM a été l'une des premières méthodes permettant de traiter des problèmes électriquement grands avec des temps de calculs et des coûts mémoire raisonnables en utilisant la BEM. En cela elle constitue un tournant dans le domaine des méthodes numériques.

3.3.2.3. Adaptative Cross Approximation

Il existe d'autres méthodes de compression matricielle, telles que le Panel Clustering [9, 10] ou encore la compression QR [11, 16]. Il s'agit cependant de méthodes de compression a posteriori. La technique ACA pallie à ce problème en permettant la construction d'une approximation a priori d'un bloc matriciel. Elle a été introduite par Bebendorf en 2000 [10, 16]. La matrice obtenue par le calcul est séparée en blocs de différentes tailles.

Tout comme dans le cas de la MLFMM, la matrice n'est pas stockée dans sa totalité, mais l'algorithme d'assemblage permet d'en obtenir une approximation par blocs, ce qui réduit également l'espace de stockage. Cette méthode améliore aussi la complexité algorithmique des produits matrice-vecteur, la faisant passer de $o(n^2)$ à $o(n \log(n))$ lorsque l'ACA est associée à une structure de H-matrice.

L'ACA peut notamment être utilisée pour des problèmes de compatibilité électromagnétique [17, 18]. Elle peut également être associée à la Méthode de Décomposition de Domaine pour des calculs de rayonnement d'antennes ou de diffraction par des objets électriquement grands [19]. Dans la suite nous décrivons deux heuristiques donnant une représentation sous forme d'approximation croisée. La première, qualifiée de pivotage total, à une complexité quadratique, et la seconde sera linéaire, pour un rang k de l'approximation fixé.

3.3.2.3. 1. Pivotage total

Dans cette section, on suppose $M|_{\sigma \times \tau}$ connue, c'est-à-dire assemblée (en $o(nm)$ opérations) et on posera $M := M|_{\sigma \times \tau}$ pour alléger la notation. Le principe de l'approximation est la construction d'une approximation squelette de rang 1. Cette approximation est réalisée de la façon suivante :

1. Recherche du pivot δ et détermination des lignes i^* et colonne j^* pivots :

$$\delta = M_{i^*j^*} \quad \text{Avec} \quad M_{i^*j^*} = \max |M_{ij}|$$

$$\text{On pose} \quad a_i^1 = M_{ij^*} \quad \text{et} \quad b_j^1 = M_{i^*j} / \delta$$

et la matrice $R_1 := a^1 (b^1)^T \in C^{m \times n}$ est une matrice de rang 1 sous forme d'approximation squelette, ceci constitue la première étape de l'algorithme.

Pour obtenir l'approximation de rang 2, on soustrait $M|_{\sigma \times \tau}$ à la matrice $a^1 (b^1)^T$ et on reproduit les mêmes étapes. L'algorithme s'arrête si le pivot est nul (ce qui signifie que la matrice mise à jour est nulle) ou si un autre critère d'arrêt est satisfait, au bout de k itérations. La définition suivante précise la construction de l'approximation :

L'approximation ACA avec pivotage total de la matrice $M|_{\sigma \times \tau} \in C^{m \times n}$ est le couple de matrices $(A, B) \in C^{m \times k} \times C^{n \times k}$ avec $k \leq \min(m, n)$.

On définit deux suites d'indices de lignes et colonnes pivots $(i^*)_{v=1, \dots, k}$ et $(j^*)_{v=1, \dots, k}$ avec $i_v^* \in \{1, m\}$ et $j_v^* \in \{1, n\}$ et deux suite de vecteurs $(a^v)_v$ et $(b^v)_v$, avec $a^v \in C^m$ et $b^v \in C^n$.

Les suites d'indices des pivots sont définies par :

$$(i_v^*, j_v^*) := \arg \max_{(i,j) \in \{1,m\} \times \{1,n\}} \left| \left(M - \sum_{l=1}^{v-1} a^l (b^l)^T \right)_{ij} \right| \quad (3.6)$$

la suite des pivots $(\delta_v)_v$ est défini par :

$$\delta_v := \left(M - \sum_{l=1}^{v-1} a^l (b^l)^T \right)_{i_v^* j_v^*}$$

les suites (a^v) et (b^v) sont données par :

$$a_i^v := \left(M - \sum_{l=1}^{v-1} a^l (b^l)^T \right)_{i j_v^*} \quad \text{et} \quad b_j^v := \left(M - \sum_{l=1}^{v-1} a^l (b^l)^T \right)_{i_v^* j}$$

Les matrices vecteurs colonnes pivots $A := (a^v)_{v=1,\dots,k}$ vecteurs $B := (b^v)_{v=1,\dots,k}$ sont l'approximation ACA avec pivotage totale.

3.3.2.3. 2. Pivotage partiel

Cependant, la construction des suites de pivots est itérative. De par la structure de celle-ci, sa connaissance a priori n'est donc pas possible avec cette construction. Néanmoins, en restreignant la recherche du pivot non plus à toute la matrice mais à une partie de celle-ci déjà calculée, nous pouvons conserver toutes ces propriétés et obtenir ainsi un algorithme en $o(k^2(m+n))$, ce qui est le but recherché. C'est cette recherche de pivot restreinte qui donne le nom "pivotage partiel" à cette méthode.

L'initialisation de l'algorithme se fait par une ligne, par exemple la première ligne de M qui n'a pas été pré-calculée. Cette ligne est désignée arbitrairement comme ligne pivot ($i^* = 1$), et on recherche le pivot sur celle-ci, de la même façon que précédemment. Une fois la colonne pivot déterminée, on effectue une itération de l'algorithme 3.1. On fixe ensuite le pivot colonne j^* à la colonne trouvée précédemment, et on cherche la ligne pivot sur cette colonne, et ainsi de suite. L'algorithme fait donc un « tour » dans la matrice en alternant son exploration sur les lignes et les colonnes pour la recherche du prochain pivot. L'avantage de cette approche est clair : dans le cas de la recherche d'un pivot ligne, la colonne parcourue vient d'être évaluée pour l'itération précédente. Ainsi, sous réserve que le pivot ne soit pas nul, sa recherche ne nécessite jamais de calculer une nouvelle ligne ou colonne de la matrice, et l'algorithme ne nécessite l'évaluation que $k(m+n)$ des éléments de la matrice pour k itérations.

3.4. Conclusion

Ce chapitre présente une introduction au calcul parallèle et haute performance ainsi que leur terminologie. Dans la deuxième partie nous avons présenté la théorie et la pratique des méthodes de compression matricielle notamment L'ACA. Nous avons illustré les idées directrices de cette méthode, ainsi que son écriture, quant à son implémentation, le chapitre suivant fera l'objet.

La suite de ce document sera largement consacrée à l'ensemble des résultats obtenus

1.5. Bibliographie

- [1] J. Vienne, “ Prédiction de performances d'applications de calcul haute performance sur réseau infiniband,” Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier Grenoble, juin 2010.
- [2] C. Rubeck, “ Calcul hautes performances pour les formulations intégrales en électromagnétisme basses fréquences Intégration, compression matricielle par ondelettes et résolution sur architecture GPGPU,” Thèse de doctorat de l'université Grenoble, décembre 2012,
- [3] Intel, “Intel révèle les détails de la prochaine génération de plateformes haute-performance,” communiqué de presse, nov. 2011.
- [4] Nvidia, “NVIDIA’s Next Generation CUDA™ Compute Architecture: Fermi™ whitepaper,” 2009.
- [5] R. G. Amdahl, “Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities,” *AFIPS spring joint computer conference*, 1967.
- [6] J. Gustafson, “Reevaluating Amdahl’s law,” *Communications of the ACM*, May 1988.
- [7] K. D. Goldberg, “What every computer scientist should know about floating-point arithmetic,” *ACM Comput. Surv.* 23(1):5–48, mars 1991.
- [8] J. Shaeffer, “Direct Solve of Electrically Large Integral Equations for Problem Sizes to 1M Unknown,” In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* p. 2306-2313. 2008.
- [9] W. Hackbusch et Z. P. Nowak, “On the Fast Matrix Multiplication in the Boundary Element Method by Panel Clustering,” *Numerische Mathematik* p. 463-491, 1999.
- [10] S. A. Sauter, “Variable Order Panel Clustering,” *Computing* 64 p. 223-261, 2000.
- [11] J. R. Poirier, “Modélisation électromagnétique des effets de rugosité surfacique,” INSA, Toulouse, France, 2000.
- [12] Vladimir Rokhlin, “Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory,” *Journal of Computational Physics*, p. 187-207, 1983.
- [13] Mario Bebendorf et Sergej Rjasanow, “Matrix Compression for the Radiation Heat Transfer in Exhaust Pipes,” *Multifield Problems Springer*, p. 183-192, 2000.

- [14] Nader Engheta, “The Fast Multipole Method (FMM) for Electromagnetic Scattering Problems,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* P.634-641, 1992.
- [15] D. Brunner, “Comparison of the Fast Multipole Method with Hierarchical Matrices for the Helmholtz-BEM,” *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 58, p. 131-158, 2010.
- [16] A. Breuer, P. Borderies et J. R. Poirier, “A Multilevel Implementation of the QR Compression for Method of Moments,” : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* p. 2520-2522, 2003.
- [17] Kezhong Zhao, Marinos N. Vouvakis et Jin-Fa Lee, “The Adaptive Cross Approximation Algorithm for Accelerated Method of Moments Computations of EMC Problems,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* p.763-773, 2005.
- [18] John Shaeffer, “Direct Solve of Electrically Large Integral Equations for Problem Sizes to 1M Unknowns,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 56 p. 2306-2313, 2008.
- [19] Julien Maurin, “Domain Decomposition Method Using Integral Equations and Adaptive Cross Approximation IE-ACA-DDM for studying Antenna Radiation and Wave Scattering From Large Metallic Platforms,”. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 63 p. 5698-5708, 2015.
- [20] K. Frederix et M. V. Barel, “Solving a large dense linear system by adaptive cross approximation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(11): p 3181 – 3195, 2010.
- [21] S. Rjasanow and L. Weggler, “Matrix valued adaptive cross approximation,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences* doi 10.1002/mma.4174, 2016.

1.5. Bibliographie

- [1] J. Vienne, “ Prédiction de performances d'applications de calcul haute performance sur réseau infiniband,” Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier Grenoble, juin 2010.
- [2] C. Rubeck, “ Calcul hautes performances pour les formulations intégrales en électromagnétisme basses fréquences Intégration, compression matricielle par ondelettes et résolution sur architecture GPGPU,” Thèse de doctorat de l'université Grenoble, décembre 2012,
- [3] Intel, “Intel révèle les détails de la prochaine génération de plateformes haute-performance,” communiqué de presse, nov. 2011.
- [4] Nvidia, “NVIDIA’s Next Generation CUDA™ Compute Architecture: Fermi™ whitepaper,” 2009.
- [5] R. G. Amdahl, “Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities,” *AFIPS spring joint computer conference*, 1967.
- [6] J. Gustafson, “Reevaluating Amdahl’s law,” *Communications of the ACM*, May 1988.
- [7] K. D. Goldberg, “What every computer scientist should know about floating-point arithmetic,” *ACM Comput. Surv.* 23(1):5–48, mars 1991.
- [8] J. Shaeffer, “Direct Solve of Electrically Large Integral Equations for Problem Sizes to 1M Unknown,” In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* p. 2306-2313. 2008.
- [9] W. Hackbusch et Z. P. Nowak, “On the Fast Matrix Multiplication in the Boundary Element Method by Panel Clustering,” *Numerische Mathematik* p. 463-491, 1999.
- [10] S. A. Sauter, “Variable Order Panel Clustering,” *Computing* 64 p. 223-261, 2000.
- [11] J. R. Poirier, “Modélisation électromagnétique des effets de rugosité surfacique,” INSA, Toulouse, France, 2000.
- [12] Vladimir Rokhlin, “Rapid Solution of Integral Equations of Classical Potential Theory,” *Journal of Computational Physics*, p. 187-207, 1983.
- [13] Mario Bebendorf et Sergej Rjasanow, “Matrix Compression for the Radiation Heat Transfer in Exhaust Pipes,” *Multifield Problems Springer*, p. 183-192, 2000.

- [14] Nader Engheta, “The Fast Multipole Method (FMM) for Electromagnetic Scattering Problems,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* P.634-641, 1992.
- [15] D. Brunner, “Comparison of the Fast Multipole Method with Hierarchical Matrices for the Helmholtz-BEM,” *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 58, p. 131-158, 2010.
- [16] A. Breuer, P. Borderies et J. R. Poirier, “A Multilevel Implementation of the QR Compression for Method of Moments,” : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* p. 2520-2522, 2003.
- [17] Kezhong Zhao, Marinos N. Vouvakis et Jin-Fa Lee, “The Adaptive Cross Approximation Algorithm for Accelerated Method of Moments Computations of EMC Problems,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* p.763-773, 2005.
- [18] John Shaeffer, “Direct Solve of Electrically Large Integral Equations for Problem Sizes to 1M Unknowns,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 56 p. 2306-2313, 2008.
- [19] Julien Maurin, “Domain Decomposition Method Using Integral Equations and Adaptive Cross Approximation IE-ACA-DDM for studying Antenna Radiation and Wave Scattering From Large Metallic Platforms,”. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 63 p. 5698-5708, 2015.
- [20] K. Frederix et M. V. Barel, “Solving a large dense linear system by adaptive cross approximation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(11): p 3181 – 3195, 2010.
- [21] S. Rjasanow and L. Weggler, “Matrix valued adaptive cross approximation,” *Mathematical Methods in the Applied Sciences* doi 10.1002/mma.4174, 2016.

Chapitre 4

Expérimentation et Simulation

Sommaire

4.1. Introduction	75
4.2. Partie 1: Description de l'ensemble du matériels utilisé.....	76
4.2.4. Appareillages utilisés.....	77
4.3. Partie 2 : Etude du problème posé.....	79
4.3.1. Description de la structure étudiée	79
4.3.1.1. Caractéristiques physiques	80
4.3.1.2 Domaine de résolution et conditions aux limites	80
4.3.1.3. Mise en equation	80
4.3.1.4 Formes différentielles dans les différentes régions du domaine	81
4.3.2. Paramètres globaux.....	81
4.3.2.1 Calcul d'impédance.....	81
4.3.2. Tension de Hall	82
4.3.3 Résultats de simulation.....	82
4.3.3.1 Loi normale	84
4.3.4. Montage expérimentale	86
4.3.5 Résultats expérimentaux et discussions	88
4.3.6 Validation 2D par MEFS	88
4.4. Partie 3 : Evaluation	88
4.5. Résumé de la procédure de calcul	88
4.6. Partie 4 : Modele de réduction	88
4.7. Conclusion.....	97
4.8. Bibliographie.....	99

4.1. Introduction

Ce chapitre est consacré aux investigations expérimentales ainsi que l'ensemble des résultats obtenus. Une campagne d'expérimentation à été menée tout au long de ce travail de thèse dédiée au contrôle non destructif. L'objectif de cette campagne était principalement la caractérisation des dispositifs proposés en exploitant la méthode des éléments finis stochastiques décrite dans le premier et le troisième chapitre et de faire appel encore une fois à cette même méthode pour l'évaluation du problème inverse par la suite.

Ce chapitre comporte quatre parties :

La première partie est dédiée à la description de l'ensemble du matériel utilisé dans notre travail expérimentale. Quatre expériences ont été réalisées dont deux dispositifs de détection de défauts reliés à un pc portable contenant labVIEW. Ce dernier étant un programme utilisé afin d'automatiser ces expériences, de les rendre plus rapide et plus sophistiquées en termes de mesure, de contrôle et de temps. Le premier dispositif est un appareil de recherche de défauts par courant de Foucault de la série NORTEK 500 et le deuxième est un système de détection (carte qui alimente un capteur à effet hall et une bobine) illustré par les figures (4.1) et (4.15).

La deuxième partie est consacrée à l'ensemble des expériences et les mesures qui ont été effectuées sur des étalons de matériaux conducteurs de nature différentes contenant des défauts de type fissure et dégradation en utilisant deux types de capteurs. Pour une bonne cohérence nous avons préféré associer aux expériences réalisées leurs résultats expérimentaux dans la même partie.

La troisième partie traite de l'évaluation du problème inverse par un modèle probabiliste en exploitant des grandeurs statistiques.

La quatrième partie concerne la mise en œuvre de modèle exploitant la réduction de matrice (Adaptive Cross Approximation) et son application au cas de matrice différences finies.

4.2. Partie 1 : Description de l'ensemble du matériel utilisé

Ce paragraphe sera dédié à la description des dispositifs de contrôle, les matériaux utilisés ainsi que l'appareillage considéré et exploité dans la deuxième partie de ce travail.

4.2.1. Matériaux utilisés

Ce travail porte sur deux type de matériaux qu'on retrouve dans divers applications industrielles l'inconel 600 et le cuivre, leurs caractéristique sont donés dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1. Caractéristiques des matériaux utilisés

Groupe de matière	N° de la matière	Conductivité électrique	Pérmiabilité magnétique relative
Cuivre	2.4816	59,6 MS/m	1
Alliage base Nickel Inconel 600	2.4816	10 ⁶ MS/m	1

4.2.2. Le cuivre

Le cuivre est parmi, les premiers matériaux utilisé et travaillé par l'homme depuis l'âge de Bronze à nos jours. Il est considéré parmi les meilleurs conducteurs de l'électricité et de la chaleur, on le retrouve dans divers applications :

- Les échangeurs de chaleur et les radiateurs.
- Dans le domaine de l'électrotechnique (transformateur, moteur,...).
- Dans le secteur de l'énergie (transport,..)
- Dans les tubes à vide et guide d'onde.
- Les circuits intégrés et les circuits imprimés.

4.2.3. Alliage base Nickel

L'alliage base Nickel connu de son nom comercial Inconel 600, ayant une haute resistance à la corrosion et à l'oxydation en milieu haute température, ajoutant à cela une bonne conductibilité, on le retrouve pricipalement dans:

- Les circuits des réacteurs nucleaires au niveau des tubes des générateurs de vapeur

- L'aéronautique et l'aérospatiale
- Recommandé également pour les outillages de travail à chaud jusqu'à 900°C tels que les outillages verrerie et de filage, pièces de four...
- Equipements de forage de pétrole.
- Distillation de certains composants de l'air à des températures inférieures à -200°C

4.2.4. Appareillages utilisés

Dans notre travail expérimental relatif à la recherche de défauts par courants de Foucault, deux appareils sont utilisés : le Nortek 500 et un LCR mètre.

4.2.5. Nortek 500

Nortek 500 existe sous différentes versions avec des améliorations et des commodités plus sophistiquées d'une génération à une autre. Ces dernières générations permettent la mesure de la conductivité électrique d'un matériau donné ainsi que de travailler en double fréquence. Cet appareil nous offre une large bande passante allant de 50 Hz à 12 MHz ce qui permet de scanner des défauts à différentes profondeurs. Dans notre travail nous avons utilisé une sonde avec une bande passante de 100 kHz à 500 kHz.



Fig. 4.1. Nortek 500

4.2.6 LCR mètre

Le LCR mètre est un appareil de mesure de la résistance, de l'inductance et de la capacité d'un composé donné. Nous avons utilisé LCR-8101G de la firme GN INSTRON avec

une plage de la fréquence allant jusqu'à 1MHz. Le mode graphique de l'instrument permet d'afficher le tracé de l'impédance sur une plage de fréquence ou de la tension de test. Ce qui donne un résultat d'analyse d'impédance par rapport à la fréquence ou l'impédance par rapport à la tension de commande.



Fig. 4.2. LCR mètre

4.2.7 Dispositifs utilisés

Nous présentons ci-après l'ensemble des dispositifs que nous avons exploités durant notre travail de thèse.

Le premier dispositif est réalisé au laboratoire de modélisation et conception des systèmes électromagnétiques à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, requière le matériel suivant décrit précédemment :

- Une plaque en cuivre contenant les défauts (la fissure et la dégradation) dont les dimensions sont donnés dans le tableau I
- Une sonde à noyau d'air
- Un LCR mètre 8101-G du fabricant (GN INSTEK)

Le deuxième dispositif est réalisé au centre de recherche de l'université de Chosun, requière le matériel suivant :

- Une plaque en cuivre
- Une plaque en Inconel 600 comprenant des entailles dont les dimensions et les caractéristiques sont donnés dans les tableaux I et II

- Appareil portable de détection de défauts Nortek 500
- Un robot permettant le déplacement soit de la sonde soit du capteur à effet Hall dans les directions voulues.
- Un PC portable équipé du logiciel labVIEW afin d'automatiser l'ensemble du système.

4.3. Partie 2 : Etude du problème posé

4.3.1. Description de la structure étudiée

La deuxième phase de cette campagne consiste à réaliser l'expérimentation, dans cette partie du chapitre, nous présenterons ces expérimentations avec les résultats obtenus et les premiers résultats de la simulation par MEFS du système considéré.

Considérons la structure étudiée schématisée par la figure (4.3) [2]. Nous proposons d'inspecter une plaque conductrice présentant un défaut, par le contrôle non destructif par courants de Foucault. Un capteur fonctionnant en mode absolu, alimenté par un courant alternatif d'amplitude 0,008 A, se déplace parallèlement à la face de la plaque contenant le défaut. L'aléa de la zone de défaut est assimilé à un changement de la distribution de la conductivité électrique dans cette région. La simulation de Monté Carlo a été exploitée pour générer la conductivité électrique en tant que variable aléatoire, elle est considérée comme étant le principal paramètre de cette étude.

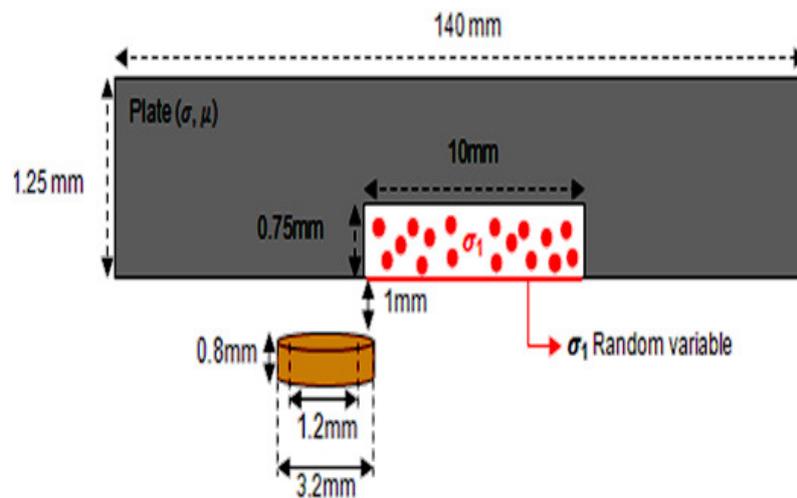


Fig. 4.3. Géométrie du problème étudié

4.3.1.1. Caractéristiques physiques

- **Air**
 Perméabilité magnétique : $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} [H / m]$
- **Inducteur**
 Perméabilité magnétique : $\mu = \mu_r \mu_0 = 4\pi 10^{-7} [H / m]$
 Densité de courante source : $J_s = 10^6 [A / m^2]$
- **Charge**
 Perméabilité magnétique : $\mu = \mu_r \mu_0 = 4\pi 10^{-7} [H / m]$
 Conductivité électrique : σ_1

4.3.1.2. Domaine de résolution et conditions aux limites

Le domaine de résolution concerne toute la structure étudiée, avec des conditions aux limites imposées sur les frontières du domaine d'étude. Le schéma est illustré dans la figure (4.4).

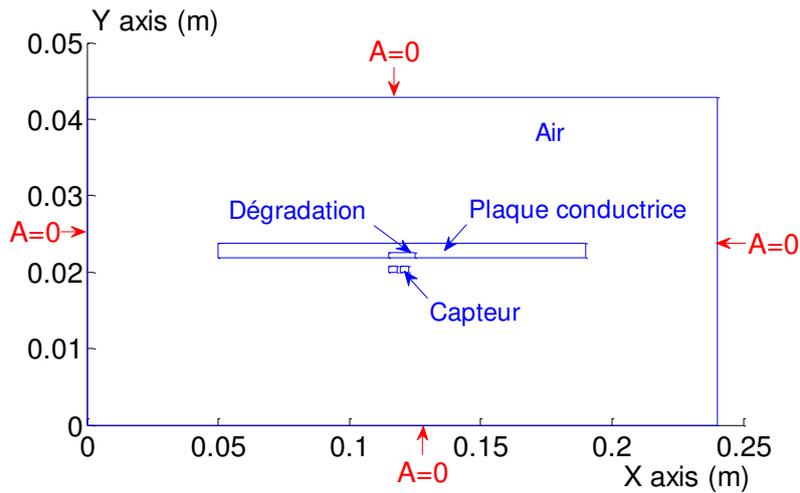


Fig. 4.4. Domaine de résolution et conditions aux limites

4.3.1.3. Mise en équation

Les équations de Maxwell peuvent être finalement dérivées en une équation électromagnétique 2D donnée en coordonnées (x, y) comme suit [3,5,6]:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right) + j\sigma\omega A_z = J_{sz} \quad (4.1)$$

Où: J_{sz} et A_z - sont respectivement les composantes de la densité de courant et du potentiel vecteur magnétique suivant la direction z , $\nu = 1/\mu$, μ - la perméabilité magnétique [$H.m^{-1}$], σ et σ_1 - sont respectivement les conductivités électriques [$\Omega.m$] $^{-1}$ dans la zone saine et dans la zone de défaut, $\omega = 2\pi f$ - la fréquence angulaire, f - représente la fréquence d'alimentation qui est de 100 kHz.

4.3.1.4 Formes différentielles dans les différentes régions du domaine

Dans l'air :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) = 0 \quad (4.2)$$

Dans la plaque conductrice :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) + j\sigma_1\omega A_z = 0 \quad (4.3)$$

Dans l'inducteur :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\right) = J_{sz} \quad (4.4)$$

4.3.2. Paramètres globaux

Dans la première partie, nous avons traité le problème direct du développement d'un modèle mathématique liant les caractéristiques physiques et géométriques du dispositif étudié. Le modèle adopté nous a permis de calculer l'impédance du capteur ECT, et la tension de sortie du capteur à effet Hall.

4.3.2.1 Calcul d'impédance

Plusieurs méthodes existent pour le calcul de l'impédance, la différence réside dans le choix de la variable d'état qui à une relation directe avec la solution issue du modèle numérique et la configuration du dispositif à étudier. Dans notre application le calcul de l'impédance Z est dérivé en utilisant une méthode basée sur l'évaluation du flux magnétique [3, 5, 7]. Les résultats présentés à la figure (4.8) sont obtenus en exploitant les équations indiquées ci-dessous :

$$\operatorname{Re}(z) = -\frac{N^2}{JS^2} \omega \iint_S 2\pi r \operatorname{Im}(A) ds \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Im}(z) = -\frac{N^2}{JS^2} \omega \iint_S 2\pi r \operatorname{Re}(A) ds \quad (4.6)$$

Où: $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ - sont les parties réelles et imaginaires de l'impédance de la bobine respectivement, N - le nombre de spires de la bobine, S - la surface de la bobine, r - le rayon de l'inducteur.

Le courant dans la pièce conductrice est donné par

$$I = \iint_{\Omega} -j\sigma\omega A dx dy \quad (4.7)$$

4.3.2. Tension de Hall

Le champ magnétique produit par les courants de Foucault aux alentours du défaut est déformé et peut être mesuré par un capteur à effet Hall.

$$V_H = I_H (K) B_z \quad (4.8)$$

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V_H(t) dt} \quad (4.9)$$

où : V_H - tension de sortie du capteur de Hall, I_H - courant d'entrée du capteur, K - constante du coefficient du capteur, B_z - induction magnétique suivant la direction z , V_{RMS} - tension quadratique moyenne.

4.3.3 Résultats de simulation

Le maillage du domaine correspondant à la structure étudiée est donné à la figure (4.5) et la figure (4.6) montre un zoom de la partie capteur. La figure (4.7) montre la distribution aléatoire de la conductivité électrique à l'intérieur de la zone de défaut.

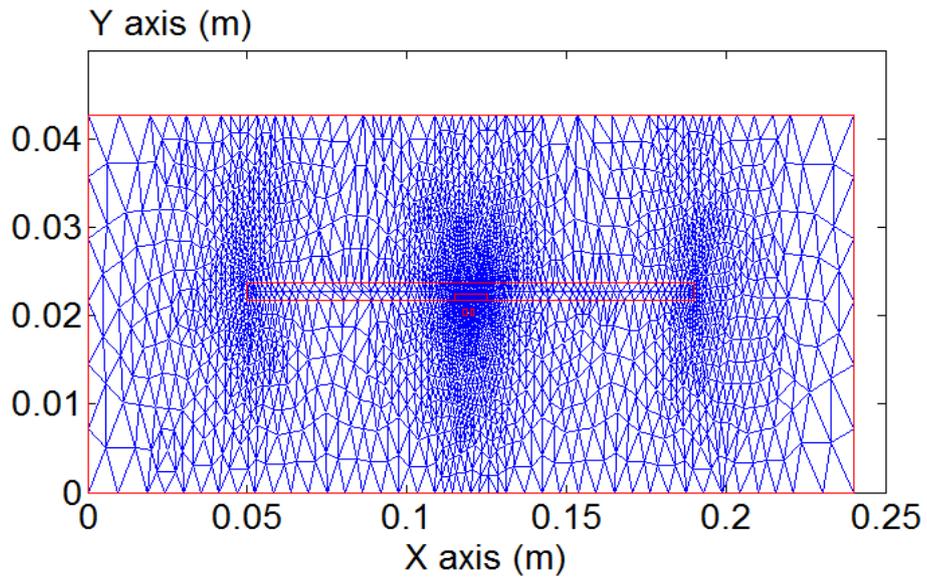


Fig. 4.5. Maillage du domaine d'étude

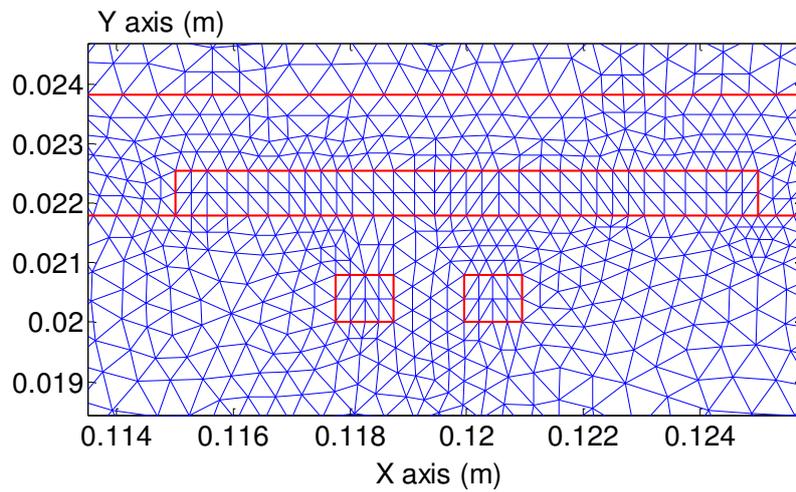


Fig. 4.6. Maillage de la zone du défaut et du capteur

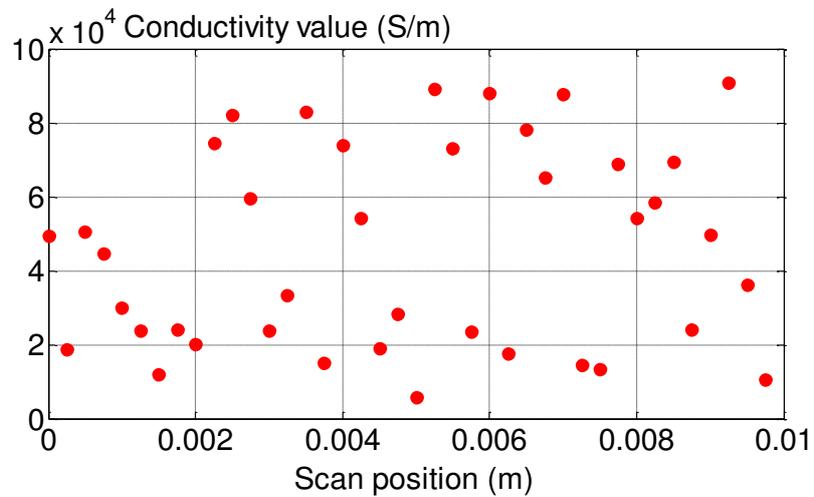


Fig. 4.7. Distribution aléatoire de la conductivité électrique dans la zone du défaut

4.3.3.1 Loi normale

La loi de probabilité que nous avons utilisé dans ce travail, telle qu'exprimée par la relation (4.10), nous permet de décrire de manière théorique le caractère aléatoire de l'expérience que nous avons modélisé. L'étude de la nature stochastique de la propriété physique nous a permis de considérer plusieurs distributions de cette propriété. Cela induit un intérêt trivial pour le comportement physique de la conductivité électrique dans la zone du défaut. La densité de probabilité des valeurs de la conductivité électrique est considérée comme aléatoire et de distribution normale donnée par [5,9]:

$$f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E}{S}\right)^2} \quad (4.10)$$

Avec: x - la variable aléatoire, E - l'espérance ou la moyenne, S - l'écart type.

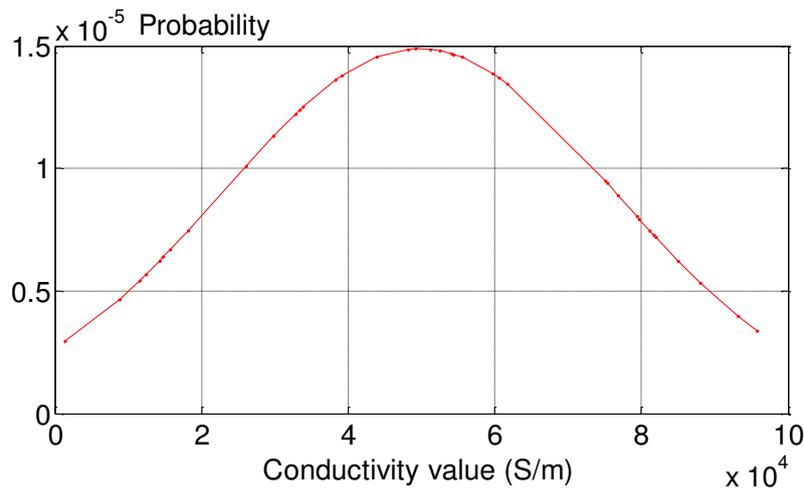


Fig. 4.8. Densité de probabilité de la conductivité électrique obtenue avec un seul tirage

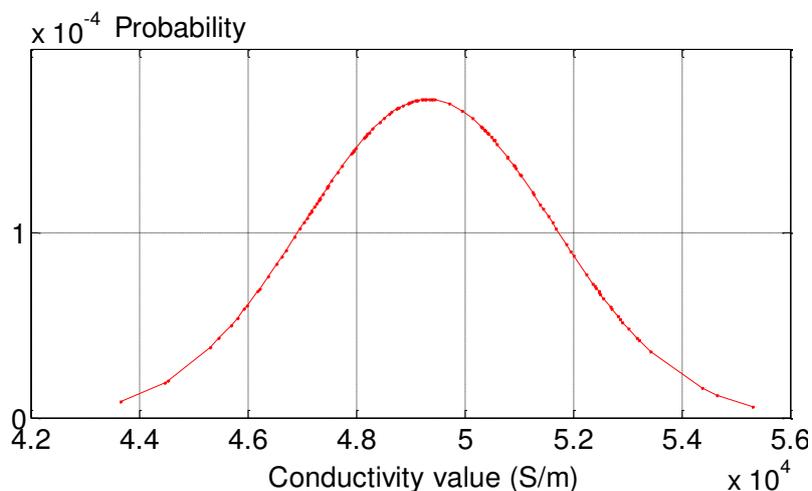


Fig. 4.9. Densité de probabilité de la moyenne des conductivités électriques obtenu par l'ensemble des tirages

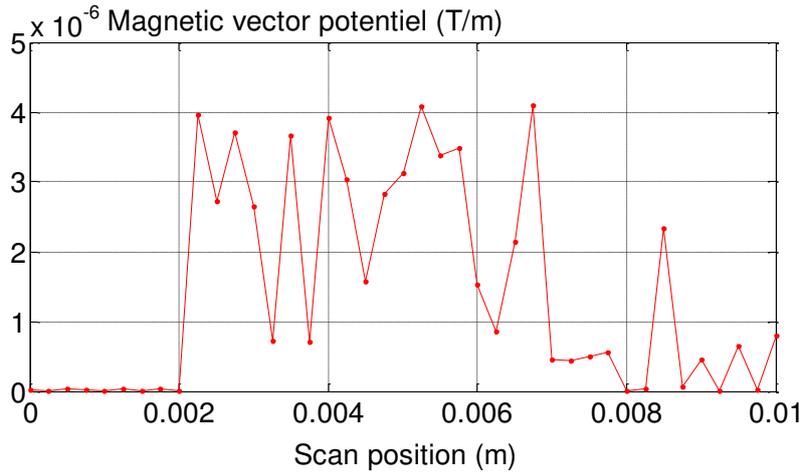


Fig. 4.10. Allure du potentiel vecteur magnétique dans la zone du défaut

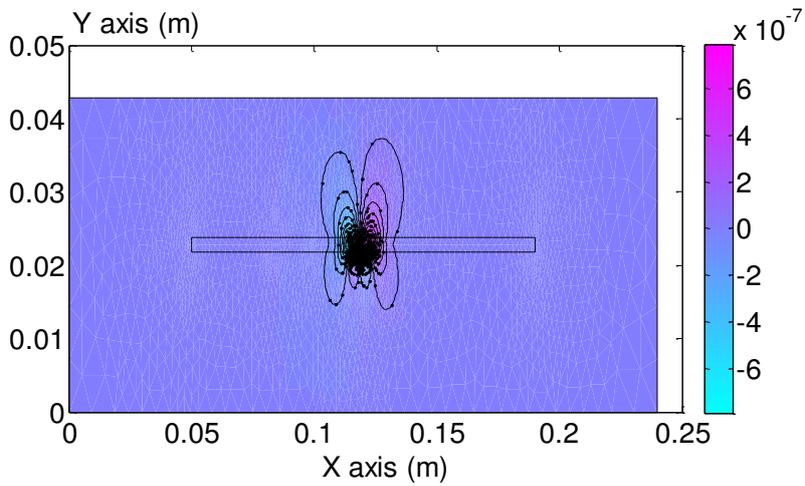


Fig. 4.11. Isovaleurs du potentiel vecteur magnétique

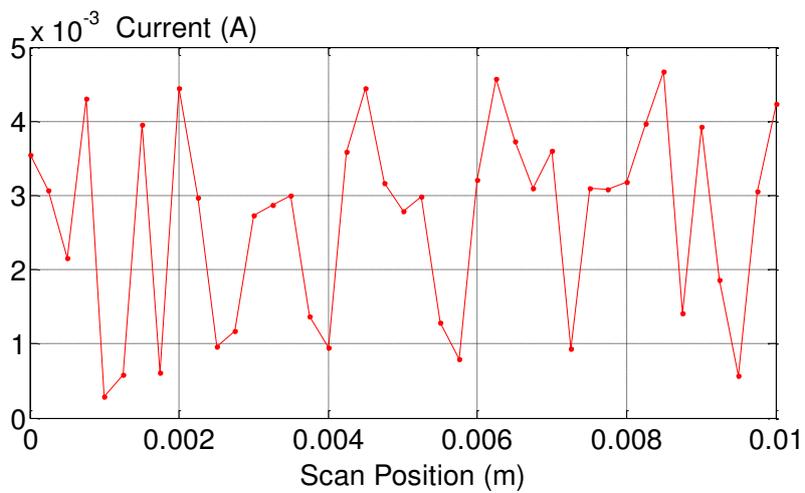


Fig. 4.12. Variation du courant en fonction de la position du scan

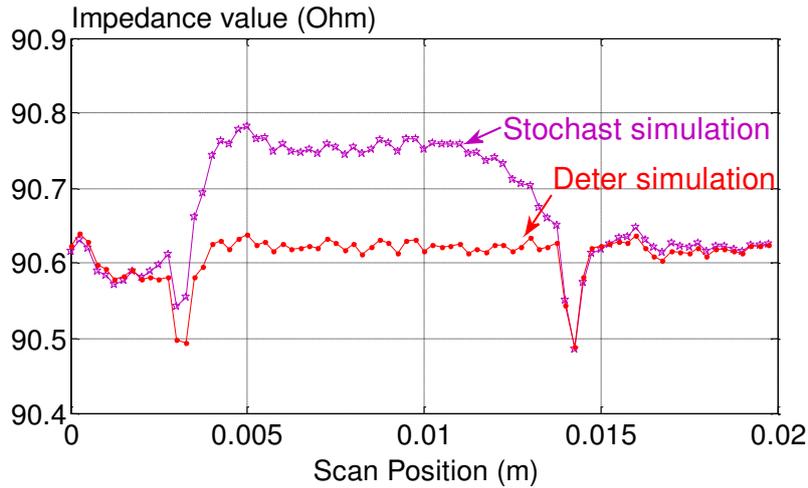


Fig. 4.13. Variation de l'impédance en fonction de la position du capteur

Les fluctuations d'amplitude obtenues dans les cas déterministes sont insignifiantes ou négligeables. En revanche, elles changent dans la zone du défaut en raison de la présence du défaut.

4.3.4. Montage expérimentale

Dans notre configuration expérimentale, deux types de défauts sont étudiés: la fissure et la dégradation. La seconde est considérée comme une impureté. Afin de montrer l'effet de l'incertitude, nous avons utilisé un défaut de dimensions adapté à l'expérience réalisée donnée dans le tableau 1. Quatre expériences différentes sont réalisées.

4.3.4.1 Expérience (1)

La première expérience consiste en un LCR GW-INSTEK 8101G qui produit la tension d'excitation, une bobine type pancake et une plaque conductrice (avec et sans défaut). Cette expérience est caractérisée par les paramètres indiqués dans le tableau 4.2 Le signal d'impédance obtenu à partir de la sonde CF est récupéré et représenté en fonction de la position du capteur. Une comparaison avec le travail de simulation est effectuée.

Tableau. 4. 2 : Paramètres de l'expérience.

Inducteur	Plaque	Défaut
Diamètre intérieur 10 mm	Largeur 2 mm	A/- Crack
Diamètre extérieur 12 mm	Conductivité électrique 58 MS/m	Longueur 10 mm Largeur 2 mm Profondeur 1 mm

Hauteur 6 mm	Relative permeability 1	B/- Degradation	
Nombre de spires 200	Lift-off 1 mm	Longueur	10 mm
		Largeur	2 mm
		Profondeur	0.5 mm

4.3.4.2 Expérience (2)

La deuxième configuration expérimentale est réalisée en utilisant le logiciel LabVIEW pour générer l'application en temps réel et surveiller le signal de sortie. La variation de la tension de sortie est calculée, analysée et stockée en fonction de la position du capteur de Hall. Bobine excitatrice: 310 spires - diamètre intérieur 7,45 mm - diamètre extérieur 9,7 mm hauteur 4 mm et vitesse de scan 10 mm / s.

L'analyse a été effectuée sur le plan x-y de la zone de défaut avec une fréquence de 1 kHz et 10 kHz respectivement. Le signal de sortie du capteur à effet Hall (VH) est traité par des filtres passe-haut / filtres passe-bas (HPF / LPF), des amplificateurs, des circuits à moyenne quadratique (RMS, VRMS), un convertisseur A / N et affiché sur un ordinateur.

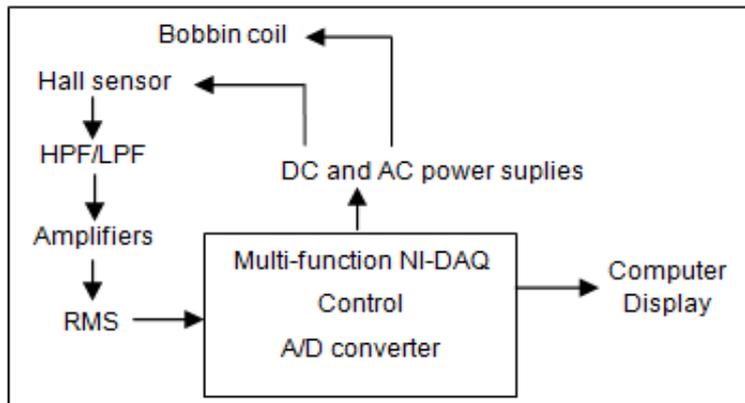


Fig. 4.14. Schema explicatif de la deuxième expérience

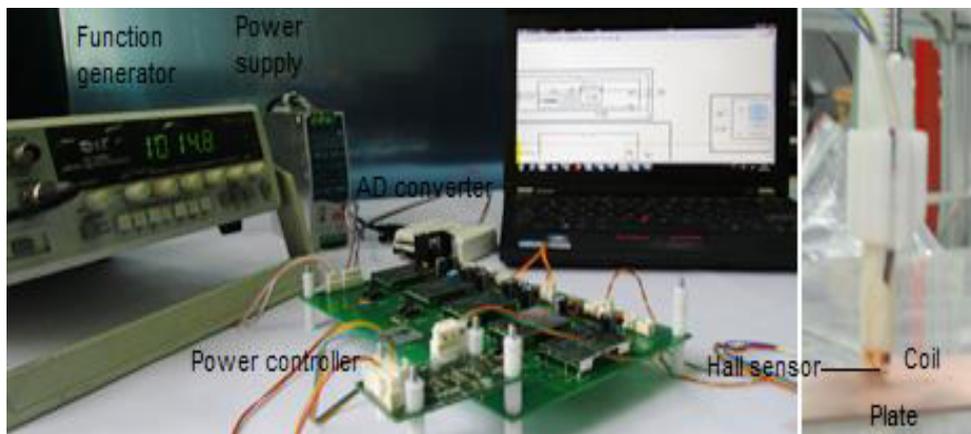


Fig. 4.15. Photographie de la deuxième installation expérimentale

4.3.4.3 Expérience (3)

La troisième expérience est réalisée par un détecteur de défauts à courants de Foucault Nortek 500, une sonde avec une plage de fréquence de 100 kHz à 500 kHz en mode absolu est utilisée.

4.3.4.4 Expérience (4)

Cette expérience porte sur la caractérisation de l'alliage base Nickel, l'expérience permet de récupérer simultanément l'amplitude ainsi que l'angle du Lissajous avec Nortek 500, avec une sonde de fréquence de 100kHz-500kHz par l'intermédiaire de LabVIEW. Ces deux grandeurs ont été exploitées afin d'estimer les dimensions des fissures (la taille est la profondeur).

La plaque de l'Inconel 600 contient des défauts artificiels de formes et de tailles différentes. La profondeur varie de 100% d'air (correspond à 1,15 mm) à 20%.

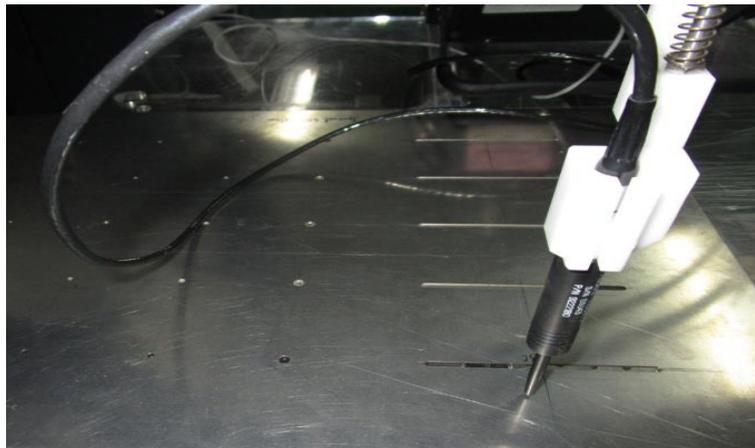


Fig. 4.16. plaque d'Inconel 600 inspectée.

4.3.5 Resultants expérimentaux et discussions

Vu que la mesure des courants de Foucault issue du travail expérimentale n'est exploitée que par la mesure de grandeur connexe, qui se traduit par la mesure de l'impédance, et la mesure de la variation du champ magnétique par effet Hall. Nous avons exploité ces deux grandeurs et les résultats obtenus sont présentés par les figures 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 et 4. 20.

Les figures 4.17, 4.18 et 4.19 montrent une comparaison de la forme du défaut pour distinguer la nature des anomalies obtenues par expérience en utilisant une sonde CF et un capteur à effet Hall, respectivement.

La figure 4.20 donne la signature du matériau en présence ou en l'absence des anomalies sur le plan d'impédance.

La figure 4.21 donne la signature du matériau en utilisant l'outil labVIEW. Le signal d'impédance obtenu à partir de la sonde CF est récupéré et représenté dans le plan d'impédance en terme d'angle et d'amplitude afin de comparer les dimensions réelles des défauts et les dimensions estimées.

Les résultats présentés ci-dessous à la figure 4.22 concernent la validation des résultats expérimentaux liés à la structure de CND étudiée et obtenus avec la sonde CF.

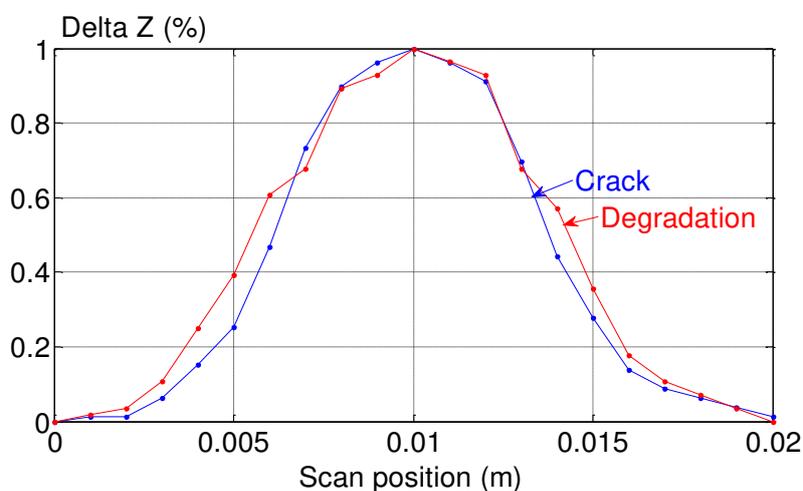


Fig. 4.17. La variation d'impédance en fonction de la position du scan en valeur relative obtenue expérimentalement à 100 kHz

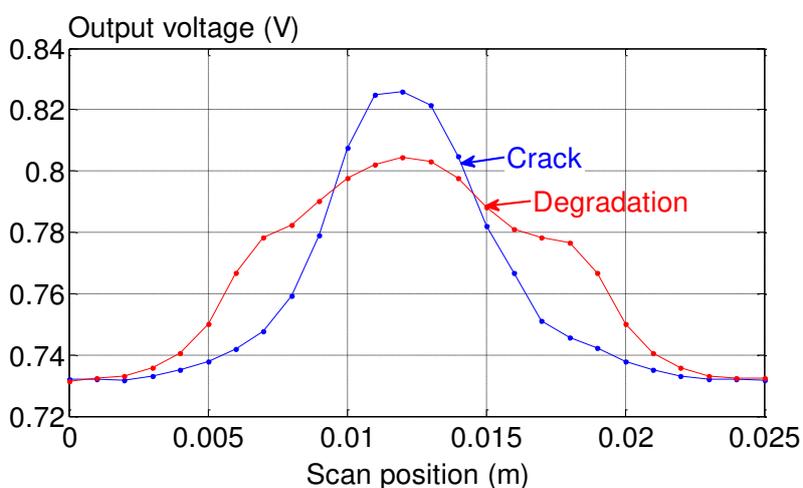


Fig. 4.18. Tension de sortie du capteur de Hall en fonction de la position du scan sur la largeur du défaut obtenue expérimentalement à 10 kHz.

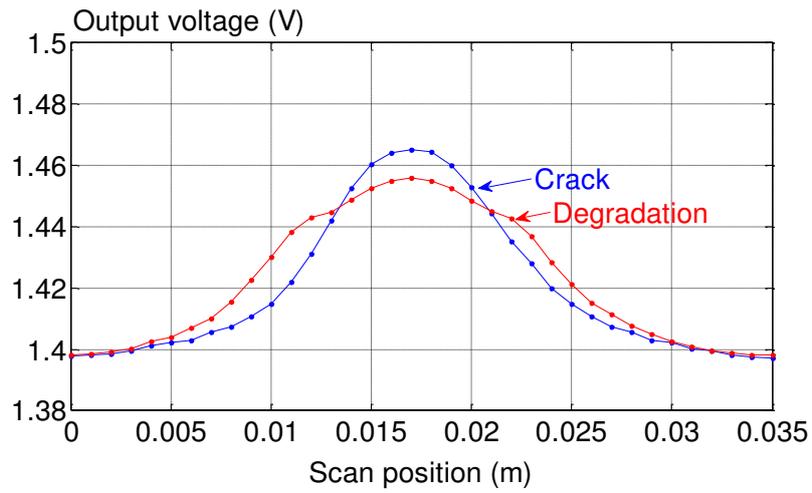


Fig. 4.19. Tension de sortie du capteur de Hall en fonction de la position du scan sur la longueur du défaut obtenue expérimentalement à 1 kHz

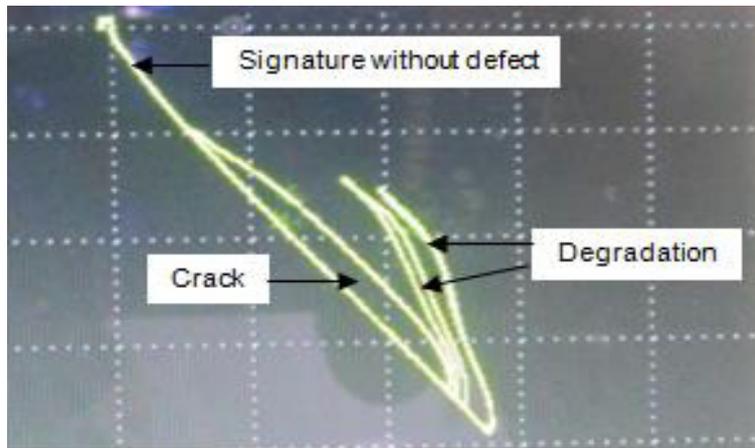
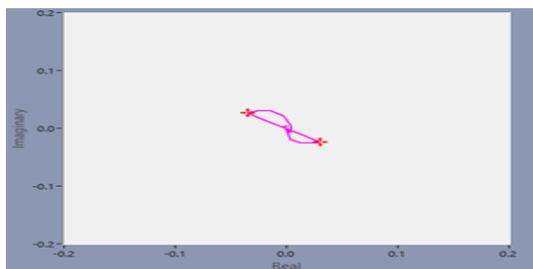
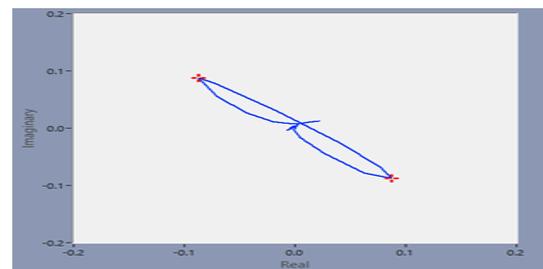


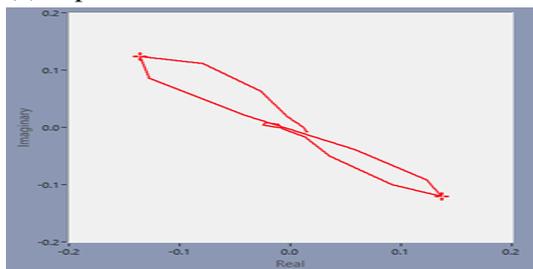
Fig. 4.20. Le plan d'impedance



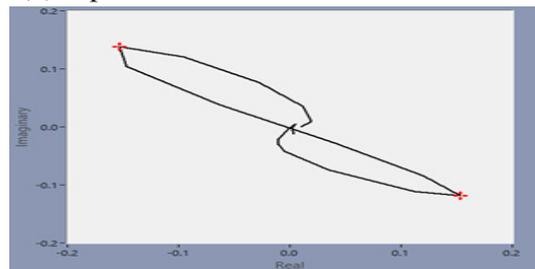
(a) depth 20%



(b) depth 40 %



(c) depth 60%



(d) depth 80

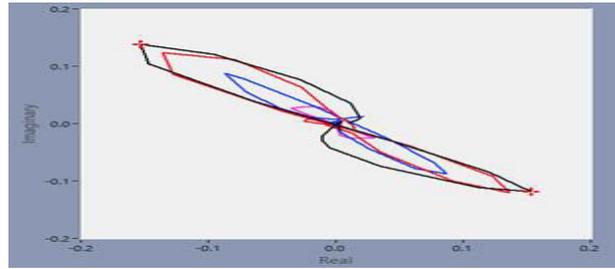


Fig. 4.21. Plan d'impédance obtenu avec labVIEW

4.3.6 Validation 2D par MEFS

La simulation par le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode Monté-Carlo développée a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab en considérant la géométrie réelle de la plaque donnée au tableau 4.1.

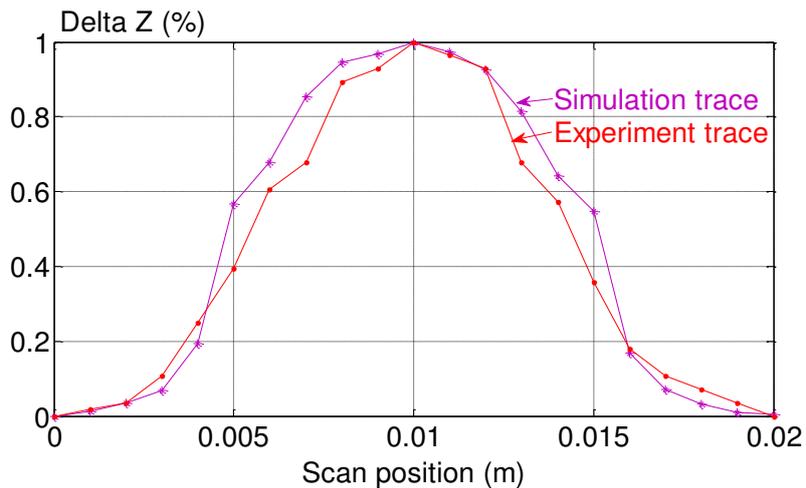


Fig. 4.22. Impédance numérique vs expérimentale en fonction de la position du scan en valeur relative à 100 kHz.

Les résultats de simulation reproduisent la tendance et la forme des signaux expérimentaux. Cependant, on peut observer un écart qui est dû probablement à plusieurs paramètres.

- l'univers de l'expérience étant en 3D alors que la simulation est en 2D
- l'usinage de la plaque
- Un autre facteur d'incertitude provient de la mesure ponctuelle de l'impédance effectuée à la main.

L'objectif était de faire une étude comparable et approchée.

4.4. Partie 3: Evaluation

L'idée de cette section est d'exploiter un traitement statistique ; les données issues de la simulation sont utilisées pour estimer la taille des défauts. C'est ce que nous recherchons dans l'application actuelle en se basant sur l'analyse de données probabilistes telles que la variance, la moyenne et l'écart type du calcul d'impédance donné ci-dessous.

Les dimensions des échantillons simulés sont données dans le tableau 4.3.

$$E(x) = \sum_{i=1}^t x_i p_i \tag{4.11}$$

$$V(x) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t p_i (x_i - m) \tag{4.12}$$

$$S = \sqrt{V(x)} \tag{4.13}$$

Avec: x_i - la variable aléatoire, p_i - la probabilité de x_i , E - l'écart type, V - la variance, S - l'écart type.

Tableau 4.3. Taille des échantillons simulés.

Dimensions des Défauts	Largeur [mm]	Longueur [mm]
défaut 1	1.25	140
défaut 2	1	88.5
défaut 3	0.75	10

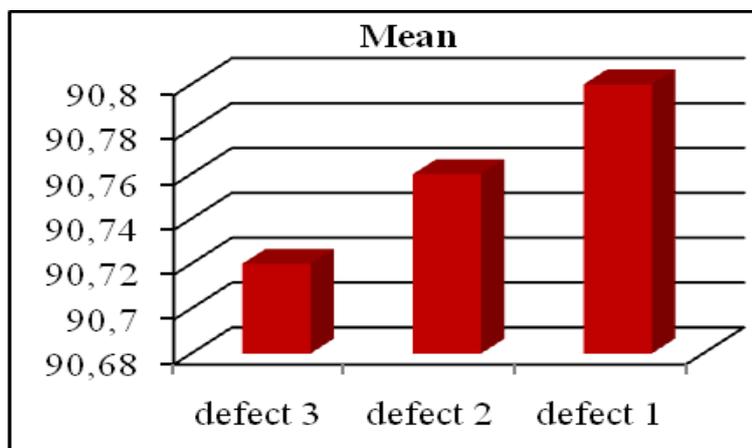


Fig. 4.23. Corrélation entre la moyenne des valeurs d'impédance et la taille des défauts

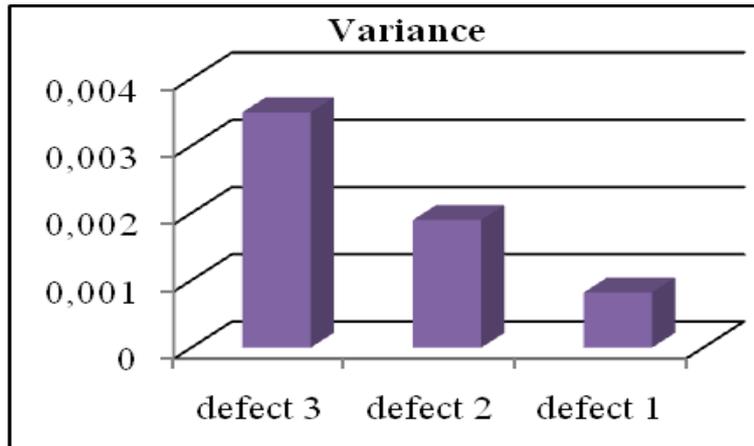


Fig. 4.24. Corrélation entre la variance de la moyenne des valeurs d'impédance et la taille des défaut.

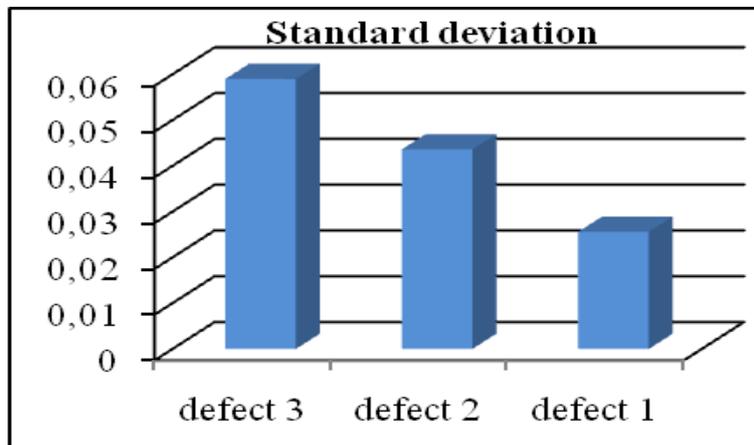


Fig. 4.25. Corrélation entre l'écart type de la moyenne des valeurs d'impédance et la taille des défauts.

La dispersion de l'écart type et la variance obtenue (extraite) de la distribution par rapport à la moyenne sont faibles. Les valeurs ne sont pas très éloignées les unes des autres, ce qui signifie qu'il y a beaucoup de valeurs d'impédance car elles sont très proches. Cela implique que le défaut est important et qu'il correspond au défaut1. Mais pour le défaut3, les valeurs des quantités statistiques sont plus importantes que les deux autres cas. Cela implique qu'il y a peu de valeurs d'impédances, par conséquent, nous récupérons l'information suivante selon laquelle le défaut est petit et correspond au cas présenté dans la figure 4.1. Dans le cas d'un défaut ponctuel, les valeurs sont nulles, il n'y a donc pas de variation des variables statistiques.

4.5. Résumé de la procédure de calcul

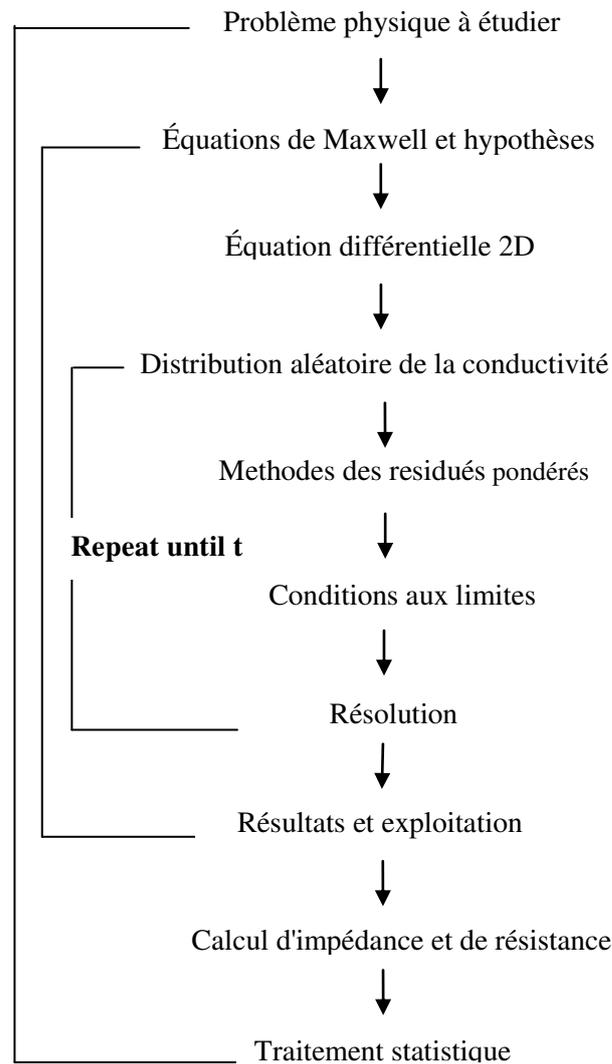


Fig. 4.26. Organigramme de synthèse sous Matlab

4.6. Partie 4 : Modèle de réduction

L'objectif de cette partie est d'appliquer la méthode ACA d'une manière efficace sans avoir recours à l'utilisation des méthodes d'obtention de matrice de faible rang. La méthode développée est propre à la syntaxe que nous utilisons et ne souffre pas de problèmes de robustesse de la résolution. Sachant que cette méthode est purement algébrique, agissant directement au niveau de la matrice.

L'algorithme est itératif et ne s'arrête que si un critère d'arrêt dépendant de la précision ACA souhaitée est vérifié. Il est en effet possible de calculer une estimation de la norme de Frobenius de l'approximation au fur et à mesure de sa construction.

La première version de l'ACA existante dans la théorie repose sur la recherche de pivots totaux à chaque itération, ce qui la rend difficilement applicable aux problèmes de diffraction. En effet elle nécessite l'évaluation d'une matrice dite de résidu, de même taille que la matrice originale afin de déterminer le pivot total maximal, ce qui augmente considérablement le coût de la méthode et nécessite une connaissance totale de la matrice. C'est pourquoi nous avons préféré d'implémenter l'ACA avec recherche de pivot partiel, proposée par Rjasanow [10]. L'objectif est d'avoir une bonne approximation de la matrice sans avoir à manipuler toute la matrice mais uniquement les lignes et colonnes du pivot ce qui réduit énormément l'espace de stockage ainsi que le temps de résolution.

L'application de la méthode ACA dans notre travail est dédiée dans un premier temps à une matrice issue d'un calcul par la méthode des différences finies.

L'objectif qui est derrière cette application est la résolution d'un système linéaire sous la forme suivante

$$Ax = b \tag{4.14}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la dernière itération on retrouve la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les méthodes du futur seront sans doute s'adapter à la nature des données à compresser et utiliseront l'intelligence artificielle.

4.7. Conclusion

Nous avons présenté l'ensemble des résultats obtenus durant notre travail de thèse, un certain nombre de ces résultats avait été présenté lors des participations à des manifestations scientifiques nationales et internationales.

Le modèle développé est validé par une confrontation et qui montre une concordance satisfaisante et en bon accord avec les résultats expérimentaux, obtenus à partir d'une campagne expérimentale réalisée aux laboratoires de modélisation et conception des systèmes électromagnétiques à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou et le centre de recherche de l'université de Chosun "Research Center for Real Time NDT" en corée du sud.

La méthode des éléments finis stochastiques que nous avons développée et exploitée, tout au long de notre travail de thèse, nous a permis de répondre à la problématique de modélisation du vieillissement et de la dégradation des propriétés physiques d'une plaque conductrice, traiter le problème direct ainsi que l'évaluation des dimensions des défauts considérés avec la méthode stochastique en exploitant un traitement statistique.

La confrontation des résultats obtenus sur la plaque d'inconel 600 contenant des défauts artificiels et une comparaison entre la taille réelle et la taille estimée de ces défauts a été satisfaisante et encourageante pour les travaux futurs.

La méthode ACA développée pour les besoins de l'étude a été appliquée en partie à une matrice issue de l'application d'une méthode de discrétisation numérique d'un problème à équation aux dérivées partielles.

4.8. Bibliographie

- [1] A. Berkache, Z. Oudni, H. Mehaddene, H. Mohellebi and J. Lee, "Inspection and characterization of random physical property defects by stochastic finite element method," *Przeegląd Elektrotechniczny*, R. 95 NR 8/2019 ISSN 0033-2097, 101-106.
- [2] P. Burrascano, E. Cardelli, A. Faba, S. Fiori, and A. Massinelli, "Numerical Analysis of Eddy Current Non-Destructive Testing (JSAEM Benchmark Problem # 6- Cracks with Different Shapes)," pp. 0–8, 2011.
- [3] H. Mehaddene, H. Mohellebi, A. Berkache., Eddy Currents Non Destructive Testing and Evaluation of Ferromagnetic Medium, *Przeegląd Elektrotechniczny*, R. 95 NR 2/2019 ISSN 0033-2097, 112-116
- [4] J. Lee, J. Hwang, J. Jun, S. Choi, Nondestructive Testing and Crack Evaluation of Ferromagnetic Material by Using Integrated Hall Sensor Array, *J. Mech. Sci. Technol*, 22 (2008), No.12, 2310-2317.
- [5] Z. Oudni, M. Feliachi, H. Mohellebi, Assessment of the Probability of Failure for EC Nondestructive Testing Based on Intrusive Spectral Stochastic Finite Element Method, *Eur. Phys. J. Appl. Phys*, 66 (2014), No.5, 133-137.
- [6] A.Ayad, Benhamida F., Bendaoud A., Le Bihan Y., Bensetti M., Solution of Inverse Problems in Electromagnetic NDT Using Neural Networks, *Przeegląd Elektrotechniczny* (Electrical Review), R. 87 NR 9a(2011), ISSN 0033-2097.
- [7] J.L. Thomas, Simplified Modeling of Eddy Current Control of Steam Generator Tubes Report of internship ESA IGELEC, 1998, University of Nantes, France.
- [8] J. Kim, M. Le M, J. Lee, Y.H. Hwang, Eddy current Testing and Evaluation of Far-Side Corrosion Around Rivet in Jet-Engine of Aging Supersonic Aircraft, *J. Nondestruct. Eval*, 33 (2014), No.4, 471-480.
- [9] M. Loeve, Probability Theory I, fourth edition, *Springer-Verlag Inc*, 45 (1977), DOI 10.1007/978-1-4684-9464-8.
- [10] S. Rjasanow and O. Steinbach. The Fast Solution of Boundary Integral Equations. Springer, 2007.

Conclusion générale

L'ensemble des résultats obtenus durant notre travail de thèse ont été présenté, un certain nombre de ces résultats avait été présenté lors des participations à des manifestations scientifiques nationales et internationales. L'ensemble des données sont obtenues à partir d'une campagne expérimentale réalisée aux deux laboratoires "laboratoire de modélisation numérique des phénomènes électromagnétiques et composants" à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou et au centre de recherche de l'université de Chosun "Research Center for Real Time NDT" en Corée du Sud. Ces travaux de recherche présentent d'une part, le développement et l'application de la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS), qui a été exploitée pour la détection et l'évaluation de l'incertitude de la zone de défaut et d'autre part l'introduction du modèle de réduction dans le calcul stochastique. Ces travaux de thèse ont pour objectifs de mettre en œuvre un modèle éléments finis stochastiques capable de traiter à la fois le problème direct et inverse appliqué au domaine du CND. De plus, mettre en œuvre un modèle exploitant la réduction de matrice issue de grands systèmes.

Le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode Monté-Carlo développée, au cours de ce travail de thèse, nous a permis de répondre à la problématique de modélisation de la dégradation des propriétés physiques du matériau et la recherche de grandeurs géométriques via la même méthode stochastique. La simulation de Monté Carlo a été exploitée pour générer la conductivité électrique en tant que variable aléatoire, elle est considérée comme étant le principal paramètre de cette étude, appliquée au problème des essais non destructifs. Dans ce cas, la moyenne de toutes ces distributions est représentée par une fonction de densité de probabilité qui a le même comportement que celui rencontré en théorie.

Quatre configurations expérimentales différentes ont été réalisées dans le cadre de notre travail et qui sont dédiées au contrôle non destructif. L'outil LabVIEW programme est utilisé afin d'automatiser les expériences en les rendant plus rapides et plus sophistiquées en terme de mesure, de contrôle et de temps. Deux types de défauts sont étudiés : la fissure et la dégradation des propriétés physiques du matériau en utilisant un capteur à courant de Foucault et un capteur à effet Hall.

Le premier objectif de ce travail a été de concrétiser la détection du défaut, il en résulte que l'impédance et la tension du capteur à effet Hall permettent de visualiser la nature de l'anomalie (fissure ou bien dégradation). On retrouve la même allure du signal avec les deux capteurs. Afin de valider le modèle éléments finis stochastiques, les résultats de modélisation numérique sont comparés à ceux de l'application, l'évolution de l'impédance dans la zone du défaut obtenu par le modèle EFS est en bonne concordance avec celle issue de la procédure expérimentale. Le deuxième objectif, après la validation du modèle, concerne l'évaluation du problème inverse toujours avec la même approche en exploitant des grandeurs statistiques telles que la variance, la moyenne et l'écart type.

Concernant le coût numérique de calcul haute performance et le calcul parallèle, les méthodes de réduction de systèmes rendent les méthodes stochastiques très avantageuses ; vu que le couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode Monté-Carlo est performante en termes de résultats mais le temps de calcul est peu coûteux. Le troisième objectif concerne la mise en œuvre de modèle exploitant la réduction de matrice et son application au calcul stochastique, par l'introduction du calcul stochastique dans le modèle de réduction. Pour cela nous avons développé un algorithme de nature algébrique "Adaptive Cross Approximation" propre à la syntaxe du logiciel Matlab utilisé tout au long de ce travail de recherche et au type de matrice stochastique obtenue. L'application a été faite dans un premier temps sur une matrice différences finies.

Comme perspectives à ces travaux, nous estimons

- Améliorer d'avantage le modèle de réduction de matrice sur la diminution des coûts de calcul de la MEFS, en vue de leurs applications à des problèmes de taille encore plus importante.
- Amélioration du modèle probabiliste dans la caractérisation des problèmes inverses par les grandeurs statistiques.
- Le modèle développé des défauts considérant la conductivité aléatoire. Il serait intéressant d'inclure la perméabilité et la géométrie aléatoire afin de disposer d'une charge contenant des porosités (avoir un modèle virtuel reflétant un modèle réel).
- Introduire la non-linéarité dans le modèle stochastique.
- Extension de l'étude en 3D

Publications

- [1] **A. Berkache**, Z. Oudni, H. Mehaddene, H. Mohellebi and J. Lee, “Inspection and characterization of random physical property defects by stochastic finite element method ,” *Przeegląd Elektrotechniczny*, R. 95 NR 8/2019 ISSN 0033-2097, 101-106.
- [2] H. Mehaddene, H. Mohellebi, **A. Berkache.**, Eddy Currents Non Destructive Testing and Evaluation of Ferromagnetic Medium, *Przeegląd Elektrotechniczny*, R. 95 NR 2/2019 ISSN 0033-2097, 112-116.

Communications Nationales et Internationales

- [1] **A. Berkache**, Z. Oudni, H. Mehaddene, H. Mohellebi and A.Taib Brahimi, “Non-intrusive stochastic finite elements method applied for non-destructives NDT problems” ’7th African Conference on Non Destructive Testing (ACNDT 2016) and the 5th International Conference On Welding, Non Destructive Testing and Materials and Alloys Industry (IC-WNDT-MI’16)”, November 26 to 28 2016, Oran, ALGERIA.
- [2] **A. Berkache**, Z. Oudni, H. Mehaddene, A.Taib Brahimi and H. Mohellebi, “Detection of random physical property defect and characterization exploiting the non-intrusive finite elements method” les 13 et 14 décembre 2017 à Oran, Algérie.
- [3] H. Mehaddene, H. Mohellebi, **A. Berkache**, “Eddy Current Non Destructive Testing to Distinguish a Conductor Medium from Ferromagnetic” les 13 et 14 décembre 2017 à Oran, Algérie.

Résumé

La méthode des éléments finis stochastiques SFEM est une extension de l'approche déterministe classique pour la solution de problèmes stochastiques. Elle a fait l'objet d'une attention considérable en raison du développement rapide de la simulation informatique, de la modélisation mathématique et du calcul scientifique pour prédire et comprendre le comportement des dispositifs électromagnétiques d'une manière générale.

Ce travail comporte deux axes principaux, la première porte sur la recherche de certaines caractéristiques de la structure d'études, en considérant une propriété physique aléatoire qui suit l'évolution d'une loi normale telles que les grandeurs physiques et géométriques représentées par des variables aléatoires, par un traitement statistique en se fiant aux grandeurs statistiques.

Le deuxième concerne la mise en œuvre de modèles exploitant la réduction de matrice et son application dans l'évaluation de grandeurs électromagnétiques dans les structures à couches minces, par l'introduction du calcul stochastique dans le modèle de réduction.

Mots-clés : Eléments fins stochastiques, réduction de matrices, systèmes électromagnétiques, couches minces, variables aléatoires, contrôle non destructif, grandeurs statistiques, calcul stochastique, dégradation de propriétés physiques, loi normale.

Abstract

The stochastic finite element method SFEM is an extension of the classical deterministic approach to the solution of stochastic problems. It has received considerable attention because of the rapid development of computer simulation, mathematical modeling and scientific computing to predict and understand the behavior of electromagnetic devices in general.

This work has two main axes. The first one deals with the search for certain characteristics of the structure of studies by considering a random physical property that follows the evolution of normal law such as the physical and geometrical quantities represented by random variables, by a statistical treatment by relying on statistical magnitudes.

The second concerns the implementation of matrix reduction modeling and its application in the evaluation of electromagnetic magnitude in thin-film structures, through the introduction of stochastic calculus in the reduction model.

Key-words: Stochastic fine element, matrix reduction, electromagnetic systems, thin films, random variables, non-destructive testing, statistical magnitudes, stochastic calculus, degradation of physical properties, normal distribution.