

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI OUZOU
FACULTE DU GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du diplôme de Master
En Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique

THEME

**UTILISATION DES ELEMENTS FINIS
ISOGOMETRIQUES DANS L'ECOULEMENT D'UN
FLUIDE DANS UNE CONDUITE DEFORMABLE**

Proposé et Dirigé par :

Mr: F. ASMA

réalisé par :

Mr: GAOUA Mustapha

<< Année 2013 >>

Remerciements

Je remercie mon promoteur Mr F.ASMA pour avoir bien voulu m'encadrer et pour ses précieux conseils et orientations.

Je remercie également tous mes enseignants, les responsables et personnel du département de Génie mécanique.

Je remercie ma famille surtout ma mère qui ma soutenu moralement tout au long de mes études.

J'adresse mes plus vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce travail

A mes chers parents

A mes chères sœurs et mes chers frères

A la mémoire de mes grands parents

A toute la famille

A tous mes amis et camarades

GAOUA

Mustapha

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

NOMENCLATURE

INTRODUCTION GENERALE : 1

CHAPITRE (I) : Etude des phénomènes d’interaction fluide-structure :

I.1. Introduction: 4
I.2. Phénomènes d’interaction fluide-structure: 5
I.3 Différents stratégies de couplage fluide structure: 6
 I.3.1. Procédure partitionnée totalement explicite:..... 6
 I.3.2 Procédure de couplage implicite: 6
 I.3.3. Procédure de calcul monolithique:..... 6

CHAPITRE (II): Modélisation en CAO

II.1.Introduction: 8
 II.1.1.Modèle de Bézier polynomial: 8
 II.1.2. Polynôme de BERNSTEIN : 8
 II.1.2.1 Propriétés des polynômes de Bernstein: 9

 II.2. Courbe de Bézier polynomiale (Non rationnelle): 10
 II.2.1. Propriétés des courbes de Bézier polynomiales : 11

 II.3. Surface de Bézier non rationnelle: 12
 II.3.1Propriétés des surfaces de Bézier: 13

 II.4 Modèle de Bézier rationnel : 14
 II.4.1 Cordonnées homogènes : 14
 II.4.2 Courbes de Bezier rationnelles: 15
 II.4.2.1 Propriétés des courbes de Bézier rationnelles: 16
 II.4.2.2 Influence des poids (wi) sur la courbe de Bézier rationnelle : 16

 II.5. Surfaces de Bézier rationnelles: 18

 II.6. Modèle B-Spline non rationnel : 19
 II.6.1 Introduction : 19
 II.6.2 Nœud et vecteur nodal : 19
 II.6.3. Vecteur nodal-multiplicité: 19
 II.6.4.Les fonctions de bases B-Spline:..... 19
 II.6.4.1 Différents types de fonctions de base B-Splines: 20
 II.6.4.1.1 B-spline uniforme: 20
 II.6.4.1.2 B-spline non uniforme : 21

II.6.4.1.3 Propriétés des fonctions de base:	21
II.6.4.2.1 Courbes B-spline non rationnelles uniformes:	22
II.6.4.2.2 Propriétés des courbes B-spline non rationnelles:	22
II.6.5 Surfaces B-Spline non rationnelles:.....	23
II.6.5.1 Propriétés de la surface B-Spline non rationnelle:	24
II.7 Modèle B-Spline rationnel NURBS:	24
II.7.1 Fonctions de base NURBS:	25
II.7.1.1 Propriétés des fonctions de bases NURBS:	25
II.7.2 Courbe B-Spline Rationnelle (NURBS) :.....	25
II.7.2.1 Propriétés géométriques des courbes NURBS:	26
II.7.2.2 Dérivées des fonctions de bases NURBS:.....	26
II.8 Surfaces rationnelles NURBS:	28
II.8.1 Propriétés des surfaces NURBS:	29
II.9 Modélisation et construction des surfaces particulières par les NURBS:	29
II.9.1 Construction d'une surface réglée:	29
II.9.2 Construction d'une surface d'extrusion:	30
II.9.3 Construction d'une surface de révolution:	32
II.10. Raffinement:	34
II.10.1 h-raffinement:	34
II.10.2 k-raffinement:	36
II.10.3 p-raffinement:.....	38
CHAPITRE (III) Méthode Des Eléments Finis Isogéométrique	
III.1. Rappel sur la méthode élément finis:	41
III.1.1. Introduction:	41
III.1.2. Concepts de base de la méthode des éléments finis:	41
III.1.3. Procédure générale d'une analyse par éléments finis:	43
1) Post préprocesseur:	43
2) Résolution du problème:	43
3) Post processeur :	43
III.1.4. Discrétisation du milieu	44
III.1.4.1. Discrétisation géométrique	44
III.1.5.1. Approximation nodale	44
III.1.5.2. Définition de l'approximation nodale	44
III.1.5.3. Construction de l'approximation nodale	45
III.1.5.4. Les éléments de type Lagrange :	46
1) Eléments à une dimension :	46

III.1.5.5. Construction des fonctions d'interpolation d'un élément à deux dimensions :	47
III.1.5.5.1 Elément triangulaire à deux dimensions:	47
• Approximation linéaire:	47
• Approximation quadratique :	47
III.1.5.5.2 Elément rectangulaire à deux dimensions :	48
• L'approximation bi-linéaire:	48
• Approximation quadratique « Q8 » :	48
III.1.5.6. Quantités élémentaires :	49
III.1.5.6.1 Matrices masse et raideur :	49
III.1.5.6.2. Techniques de calcul au niveau élémentaire:	50
III.1.5.6.3. Matrice jacobienne - transformation des opérateurs de dérivation:..	52
III.1.5.6.4 Calcul numérique d'une intégrale:	52
III.1.5.6.5 Calcul des matrices élémentaires:	52
III.1.5.6.6 Assemblage et conditions aux limites:	53
 III.2 Modélisation éléments finis iso-géométriques:	 54
III.2.1 ANNALYSE ISOGOMETRIQUE :	55
III.2.2 Introduction :	55
III.2.3 Présentation de la méthode:	55
III.2.4 Principe des éléments finis iso géométrique :	55
III.2.5. subdivision de domaine en éléments:	56
III.2.5.1. Cas unidimensionnel:	56
III.2.5.2. Cas bidimensionnel:	57
III.2.5.3 Calcul des matrices élémentaires	57
III.2.5.3.1. Matrice de raideur élémentaire	57
III.2.5.3.2. Analyse isogéométrique en utilisant les NURBS (AIG):	58
III.2.5.3.2 Assemblage et conditions aux limites :	59
 III.3 Description du domaine fluide:	 60
III.3.1 Introduction :	60
III.3.1.1 Méthode de Galerkin :	60
III.3.2 Problème de Stokes généralisé et la formulation mixte en éléments finis:	60
III.3.2.1 Formulation forte :	60
III.3.2.1 Discrétisation en deux dimensions :	60
 Remarque :	 64

CHAPITRE(IV). APPLICATION A L'INTERACTION FLUIDE STRUCTURES

IV.1. Introduction :	66
IV.2. Présentation du modèle structure:	66
IV.3. Calcul du modèle par les deux méthodes:	67
IV .3.1 Méthode des éléments finis classiques:	67
IV .3.1.1 Discrétisation de la géométrie:	67
IV.3.1.2 Calcul au niveau élémentaire:	67
Remarque:	68
IV.3.1.3 Assemblage et résolution :	69
IV .3.2 Méthode des éléments finis iso géométriques:	71
IV .3.2.1. Représentation de la géométrie et discrétisation:	71
IV .3.2.2 Calcul au niveau élémentaire:	72
IV.3.2.3 Assemblage et résolution:	73
IV .4 Calcul du fluide par l'une des deux méthodes:	74
IV .4.1 Méthode des éléments finis classiques:	74
IV .4.1.1 Discrétisation de la géométrie:	74
IV .4.1.2 Calcul au niveau élémentaire:	75
IV 4.1.3 Assemblage et résolution:	76
Remarque:	77
IV.5 Interprétation des résultats :	77

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

LISTE DES FIGURES

Figure (I.1) : Mécanisme de couplage fluide/structure	5
Figure (II.1) : courbes des fonctions de base Bernstein de degré 4	9
Figure (II.2) : courbe de Bézier non rationnelle et son polygone caractéristique	11
Figure (II.3) : Surface de Bézier non rationnelle	13
Figure (II.4) : Illustration de la transformation homogène entre R3 et R2	15
Figure (II.5) : Courbe de Bézier rationnelle avec $w_i=[1 \ 1 \ 1 \ 1]$	16
Figure (II.6) : Influence d'une augmentation d'un poids sur la forme de la courbe ..	17
Figure (II.7) : Influence du changement de signe d'un poids sur la forme de la courbe	17
Figure (II.8) : surface de Bézier rationnelle.	18
Figure (II.9) : fonctions de base d'ordre 0,1et 2 pour le vecteur uniforme $\Xi= [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$	20
Figure (II.10) : courbes des fonctions de base B-spline d'ordre 2 uniformes	20
Figure (II.11) : courbes des fonctions de base B-spline d'ordre 2 non uniformes.....	21
Figure (II.12) : courbe B-spline non rationnelle uniforme	22
Figure (II.13): a)-interpolation de Lagrange b)- interpolation B-spline.	23
Figure (II.14): surface B-Spline non rationnelle	24
Figure (II.15) : Courbe Non Uniform rational -Spline (NURBS).....	26
Figure (II.16): 1 ^{er} et 2 ^{eme} dérivées des fonctions de bases B-Spline et NURBS.	27
Figure (II.17) : surface NURBS de degré 2	28
Figure (II.18): surface réglée NURBS	29
Figure (II.19) : Construction d'un cercle avec les NURBS	30
Figure (II.20) : Reseaux des points de contrôle	31
Figure (II.21) : Surface cylindrique de type NURBS, construite a partir de deux fonctions de base $p=2$ et $q=2$	31
Figure (II.22): définition d'une surface de révolution.....	32
Figure (II.23): Surface de révolution autour de l'axe passant par B et parallèle à \vec{Oz} et son réseaux caractéristique	33
Figure (II.24): le concept de raffinement par insertion de nœud (h-raffinement).....	35
Figure (II.25): Un exemple illustrant le concept de h-raffinement	36
Figure (II.26): Le concept d'élévation k-raffinement	38
Figure (II.27): Le concept d'élévation p-raffinement	39
Figure (III.1.1) : -a- Domaine matériel en deux dimensions. -b- Un élément quadrilatère dans un domaine matériel. -c- Maillage partiel du domaine matériel.	42
Figure (III.1.2): Erreur de discrétisation géométrique	44
Figure (III.1.3): Fonctions de forme à une dimension	46

LISTE DES FIGURES

Figure(III.1.4): Elément de référence « T3 ».....	47
Figure (III.1.5): Fonctions d'interpolation linéaires du triangle	47
Figure (III.1.6): Fonction d'interpolation N_1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation	48
Figure(III.1.7) : Elément de Lagrange biquadratique de type « Q8 ».	48
Figure (III.1.8) : Transformation géométrique linéaire d'un carré	51
Figure (III.1.9) : Transformations géométriques d'éléments à une dimension avec en haut, l'élément réel et en bas, l'élément référence	51
Figure (III.1.10) : Transformations géométriques d'éléments à deux dimensions	51
Figure (III.2.1): Relation entre DAO et AEF dans l'analyse aux éléments finis classique.....	54
Figure (III.2.2) : barre unidimensionnelle subdivisé en sous domaines et la fonction de base associée	56
Figure (III.2.3): Maillages en deux dimensions et ces fonctions de base associée	57
Figure (III.2.4): Transformation d'un maillage dans le domaine physique au domaine paramétrique AIG	59
Figure(IV.1) : Modèle à étudier « L'épaisseur de cylindre »	66
Figure (IV.2): Epaisseur de cylindre discrétisée en 24 éléments par Q4	67
Figure (IV.3) Forme déformée des nœuds de modèle en (2D).....	70
Figure(IV.4): Déplacements suivant xx sur le modèle représenté par des couleurs ..	70
Figure(IV.5) : Déplacements suivant yy sur le modèle représenté par des couleurs .	71
Figure (IV.6) : Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre 1 et L'espace paramétrique associé.	72
Figure(IV.7) : Forme déformée des nœuds de modèle en (2D).	74
Figure (IV.8): Maillage de domaine fluide pour 80 éléments en (2D).....	75
Figure (IV.9): La déformé de domaine fluide en (2D).....	77
Figure(IV.10) : Organigramme d'interaction fluide-structure	79

LISTE DES TABLEAUX

Tableau (III.1) : Dérivées des fonctions de forme « Q4 »	48
Tableau(IV.1): Caractéristiques mécanique de la structure	66
Tableau (IV.2) les valeurs finales des déplacements $\{d\}$	69

$\mathbf{B}_{i,n}$: Polynômes de Bernstein

\mathbf{P}_i : Points de contrôle.

\mathbf{t} : paramètre géométrique

\mathbf{u}, \mathbf{v} : paramètres curviligne

\mathbf{W} : vecteur poids.

$\mathbf{\Xi}, \mathbf{H}$: vecteurs nodaux.

$N_{i,p}, \mathbf{M}_{j,q}$: Fonctions de base B-spline.

\mathbf{p} : Ordre polynômial.

$\mathbf{R}_{i,p}, \mathbf{T}_{j,q}$: Les fonctions de base NURBS.

\mathbf{D} : Domaine continu.

\mathbf{De} : Sous domaine ou domaine élémentaire.

\mathbf{u}^* : Valeur de la fonction approchée en tout point \mathbf{M} de l'élément.

$[\mathbf{N}]$: Matrice des fonctions d'interpolation de l'élément.

$\{\mathbf{Un}\}$: Variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

$\langle \Phi_{(M)} \rangle$: Base d'une fonction polynômiale.

$\mathbf{T3}$: Élément triangulaire à trois nœuds.

$\mathbf{T6}$: Élément triangulaire à six nœuds.

$\mathbf{Q4}$: Élément rectangulaire à quatre nœuds.

$\mathbf{Q8}$: Élément rectangulaire à huit nœuds.

$[\mathbf{B}]$: Matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

\mathbf{Me} : Matrice de masse élémentaire.

μ : viscosité dynamique de fluide

ρ : Densité volumique de la structure.

\mathbf{Ke} : Matrice de rigidité élémentaire.

\mathbf{D} : la matrice caractéristique au comportement élastique du matériau.

\mathbf{F}_{de} : Vecteur force généralisée

$[\mathbf{J}]$: Matrice jacobienne de la transformation.

\mathbf{M} : Matrice de masse globale.

\mathbf{K} : Matrice de raideur globale.

F_i : Force interne

F_d : force dynamique ou externe.

h: hauteur de la structure

D : diamètre externe

D : diamètre interne.

Abréviations :

IFS :interaction fluide structure

DAO : Dessin Assisté par Ordinateur.

CAO : Conception Assisté par Ordinateur.

NURBS : Non Uniforme Rational B-Spline.

AEF : Analyse par Élément Finis.

MEF : Méthode des Eléments Finis.

AIG : Analyse Isogéométrique.

PTV : Principe des Travaux Virtuel.

Introduction générale

Le but de ce travail est d'utiliser les techniques numériques de simulation pour l'étude en vue de l'interaction fluide-structure de l'écoulement d'un fluide incompressible dans une conduite déformable. Il est demandé en plus d'introduire les techniques des éléments finis isogéométriques.

Une cuillère remuant du café dans une tasse, un drapeau flottant au vent, un ventilateur soufflant un air frais ou encore un avion volant dans le ciel et aussi l'écoulement de fluide dans une conduite, des exemples quotidiens sur des phénomènes d'interactions fluide-structure (IFS). Plus généralement, on parle d'interaction fluide-structure lorsqu'un solide est en présence d'un fluide ou du moins lorsque les mouvements de l'un influencent les déplacements de l'autre. Les domaines d'application concernés sont donc extrêmement variés, du monde des transports à celui du génie nucléaire, de l'aéronautique au génie civil et de la biomécanique à la microélectronique et l'hydraulique. C'est pourquoi les problèmes d'interactions fluides-structures suscitent depuis des années un intérêt croissant en ingénierie, deviennent de plus en plus incontournables. On pense notamment au domaine grandissant de la biomécanique avec la modélisation des écoulements internes au corps humain tel que le système sanguin. On pense aussi aux ouvrages d'art du génie civil de plus en plus imposants comme le viaduc de Millau en France, pont à haubans de 2460 m surplombant la vallée à près de 270 m de hauteur, dans le dimensionnement a dû fortement tenir compte des vents environnants. On pense en fin à la construction d'un géant du ciel, l'Airbus A380, pour lequel les phénomènes aéroélastiques sur des ailes de plus de 40 mètres de long provoquent un débattement vertical de 5.5 mètres en bout d'aile.

Ainsi, les phénomènes d'interactions fluides-structures sont de plus en plus des facteurs dimensionnant en ingénierie et notamment dans la mécanique. L'optimisation des géométries, comme un écoulement de fluide dans un cylindre, doit désormais tenir compte des effets couplés de l'écoulement fluide sur la structure et inversement. En effet les performances d'un cylindre déformé seront bien différentes de celles du profil initial.

Les comportements non-linéaires des fluide et des solides complexes soumis à des déplacements ainsi que la déformation des interfaces induisent en effet de nombreuses difficultés à surmonter. De même, une approche classique et efficace d'optimisation nécessite le calcul de la fonction à optimiser et de son gradient par rapport aux paramètres de design. Dans ce contexte, il est clair que la résolution analytique de tels problèmes est quasiment impossible, et l'utilisation des simulations numériques par ordinateur devient indispensable, avec la puissance actuelle des ordinateurs modernes.

On considère plus précisément dans ce mémoire la modélisation de profils d'une conduite cylindrique élastique, subissant des déplacements par écoulement d'un fluide incompressible.

L'analyse des phénomènes d'interactions fluides-structures qu'on retrouve dans ce problème s'appuie donc sur la mécanique des fluides assistée par ordinateur au CFD (Computational Fluid Dynamics) qui a un niveau de maturité considérable. L'analyse par éléments finis des structures a connu ces dernières années une évolution très importante par l'émergence d'une nouvelle génération d'éléments finis.

En effet, les éléments finis iso-géométriques utilisent les mêmes concepts que la CAO (Conception Assistée par Ordinateur), c'est-à-dire que le maillage élément finis habituel est remplacé par la modélisation CAO par des NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) elle consiste à donner une description des objets sous une forme mathématique autorisant les opérations (au sens ensembliste).

Les moyens informatiques actuels qui permettent la mise au point d'outils d'aide à la décision aux ingénieurs changent complètement les procédures de conception de produit. A l'origine, la Conception Assistée par Ordinateur (CAO) ne constituait qu'une forme informatique de la planche à dessin. Depuis, des techniques propres à ces systèmes ont permis l'amélioration et l'augmentation des fonctions de la phase de dessin. Parmi celles-ci, la possibilité de travailler directement sur un objet tridimensionnel est certainement l'avancée la plus marquante. A partir de la définition d'un modèle exact de l'objet à concevoir, elle a permis de développer plusieurs nouvelles fonctions de conception qui auparavant étaient réalisées manuellement et approximativement.

Ce travail est organisé en quatre chapitres:

Le premier chapitre: contient l'étude des phénomènes d'interaction fluide structure.

Le deuxième chapitre: décrit brièvement l'évolution de la modélisation géométrique des courbes et surface, voir les courbes de Bézier et les polynômes de Bernstein en 1962 avec les travaux de PIERRE Bézier et les courbes B-spline puis les NURBS.

Le troisième chapitre: présente la méthode d'analyse isogéométrique et la méthode éléments finis classiques

Le quatrième chapitre: contient les différentes méthodes utilisées. Et suivies par une application, le résultat et discussion, et on termine par une conclusion générale.

I. Etude des phénomènes d'interaction fluide-structure :

I.1 Introduction :

L'interaction fluide-structure vise à étudier un ou plusieurs fluides en contact avec un solide. La réponse du solide peut être fortement affectée par l'action du fluide.

L'étude de ce type d'interaction est motivée par le fait que les phénomènes résultants sont parfois catastrophiques pour les structures mécaniques ou constituent dans la majorité des cas un facteur dimensionnant important.

Le fluide est caractérisé par son champ de vitesse et de pression. Il exerce des forces (aérodynamiques ou hydrodynamiques) sur l'interface du solide qui se déplace et/ou se déforme sous leurs actions.

Le déplacement et/ou la déformation du solide affecte, au moins localement, le champ de l'écoulement et donc les charges aérodynamiques. Ce cycle des interactions entre le fluide et le solide est caractéristique du couplage entre les deux milieux.

Les phénomènes liés au couplage mécanique fluide-structure apparaissent, à des degrés divers d'importance, pour toute structure en contact avec un fluide.

Ce type de couplage *multi-physique* se rencontre dans de nombreuses situations industrielles et l'influence qu'il peut avoir sur le comportement dynamique de systèmes mécaniques est souvent significative.

Sa prise en compte devient un enjeu de première importance dans le dimensionnement de structures, en particulier en raison d'exigences de sécurité associées à leur conception.

Le couplage mécanique entre les deux milieux s'opère dans les deux sens au niveau de leur surface de contact : les déformations de la structure, sous l'effet des efforts imposés par l'écoulement du fluide, modifient la configuration de l'interface fluide/structure, les conditions d'écoulement du fluide en sont affectées, ce qui induit une modification de l'effort exercé sur la structure au niveau de l'interface, bouclant le cycle de l'interaction (voir Fig. I.1).

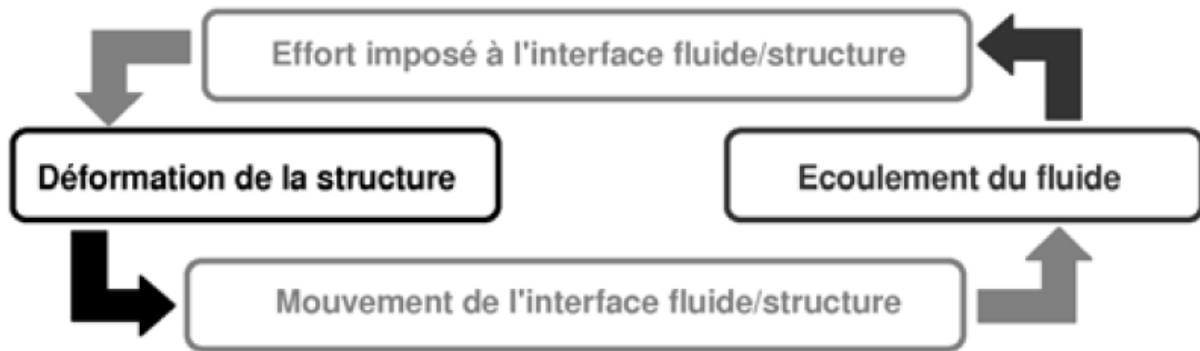


Fig. I.1 : Mécanisme de couplage fluide-structure

I.2 Phénomènes d'interaction fluide-structure

L'interaction fluide-structure est un sujet de recherche en plein essor. Les problèmes abordés dans ce domaine sont très présents dans les applications industrielles impliquant en même temps deux sous domaines, fluide et structure. On s'intéresse aux vibrations des structures solides en présence de fluides. En pratique, on est confronté à ce genre de problème à titre d'exemple dans les situations suivantes [12]:

- Réservoirs partiellement remplis de liquide subissant l'effet de ballonnement de la surface libre du liquide, Réponse vibratoire des structures sous sollicitations hydrodynamiques ;
- Ponts suspendus, gratte-ciel et câbles vibrants sous l'effet du vent ;
- Le flottement des ailes d'avion, la dynamique des gonflements des airbags ;
- Dans le domaine du nucléaire, la rupture des générateurs de vapeur par vibrations induites par l'écoulement d'eau ;
- En biomécanique, la déformation des vaisseaux sanguins sous l'effet du rythme cardiaque.
- Hydrodynamique navale : est un autre champ d'application essentiel. Il s'agit de concevoir et d'optimiser des formes de coques et d'autres éléments sur différents véhicules.

Avant l'avènement du calcul scientifique, les interactions fluides structures étaient étudiées exclusivement de manière expérimentale. Ces méthodes sont très coûteuses à mettre en œuvre en plus dans les cas de tests destructifs, plusieurs maquettes doivent être utilisées.

En matière de modélisation, initialement les modèles utilisés se limitaient à de simples modèles analytiques.

I.3 Différents stratégies de couplage fluide structure

En interaction fluides structures, plusieurs stratégies de couplage sont possibles, on peut citer [12] :

I.3.1 Procédure partitionnée totalement explicite : Dans ce cas, les domaines fluides et solides sont formulés d'une manière indépendante et l'échange entre les deux solveurs des deux sous domaines est réalisé alternativement à chaque instant au niveau des conditions aux limites. L'avantage de cette méthode réside surtout dans sa flexibilité et la possibilité de coupler des codes de calcul déjà existants. Toutefois, le point faible de la présente méthode et ses propriétés de stabilité qui ne sont pas bonnes cette procédure fait l'objet de notre présente étude.

I.3.2 Procédure de couplage implicite : pour cette méthode les deux sous domaines fluides et structures sont formulés d'une manière plus compatible et les termes de couplage sont introduits directement dans le système global des équations à résoudre. Cela permet d'améliorer la stabilité de l'approche numérique.

I.3.3 Procédure de calcul monolithique : Cette procédure de couplage permet la résolution de toutes les inconnues du problème traité simultanément aux mêmes instants. La procédure numérique a de très bonnes propriétés de stabilité et l'assurance de la convergence est optimale.

II.1 Introduction :

La géométrie de la Conception Assistée par Ordinateur est une branche des Mathématiques Appliquées, des logiciels dédiés à la conception de produits industriels, à l'innovation et à l'infographie reposent sur cette nouvelle géométrie.

L'industrie automobile, l'industrie aérospatiale et récemment l'industrie cinématographique ont contribué à exploiter et améliorer ce type de logiciels.

La majeure partie d'entre eux repose sur les représentations des courbes et surfaces de Bézier et leur généralisation aux B-Splines.

Le développement de ces travaux est dû aux interactions entre le progrès des ordinateurs [1].

II.1.1 Modèle de Bézier polynomial :

Le modèle de Bézier (proposé par l'ingénieur français Pierre Bézier en 1962) a été développé dans les bureaux d'études de Renault, il a étudié le problème de conception de surfaces 3D (carrosseries d'automobile,...), pour les premiers programmes de la Conception Assistée par Ordinateur CAO, le but était de trouver un moyen pour définir une courbe de manière précise et simple.

Il s'agit d'un modèle permettant de créer des formes du plan et de l'espace à partir de points de contrôle [2].

II.1.2 Polynôme de BERNSTEIN:

Pierre Bézier a utilisé des polynômes d'approximation de fonctions pour la description des courbes et des surfaces appelés polynômes de Bernstein $B_{i,n}(t)$.

soit n un entier positif, on définit pour $i \in \{1, \dots, n\}$

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i \times (1-t)^{n-i} \dots\dots\dots (2.1)$$

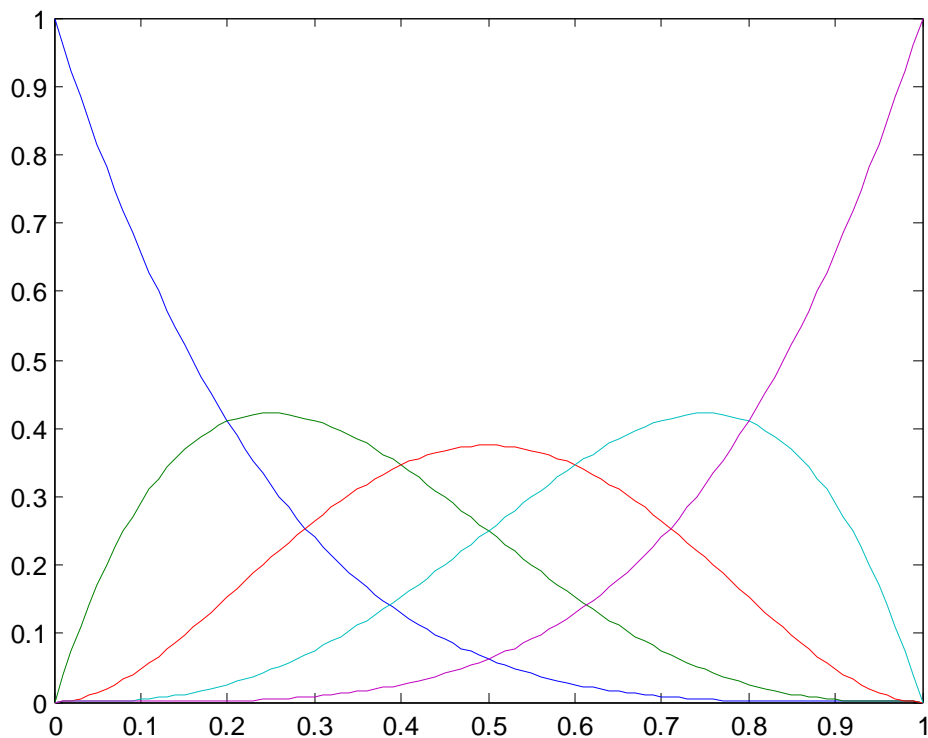
$$\text{tel que: } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \times (n-i)!} \text{ (Binôme de Newton) } \dots\dots\dots (2.2)$$

Exemple1:

Soit $t \in [0, 1]$ et $n=4$, pour calculer les fonctions de Bernstein $N_{i,4}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{0,4} = \binom{4}{0} t^0 \times (1-t)^4 = (1-t)^4 \\ B_{1,4} = \binom{4}{1} t^1 \times (1-t)^3 = 4 \times t \times (1-t)^3 \\ B_{2,4} = \binom{4}{2} t^2 \times (1-t)^2 = 6 \times t^2 \times (1-t)^2 \\ B_{3,4} = \binom{4}{3} t^3 \times (1-t)^1 = 4 \times t^3 \times (1-t)^1 \\ B_{4,4} = \binom{4}{4} t^4 \times (1-t)^0 = t^4 \end{array} \right.$$

Ce qui donne graphiquement avec logiciel **MATLAB**



Figure(II.1) : courbes des fonctions de base Bernstein de degré 4

II.1.2.1 Propriétés des polynômes de Bernstein

- Non négativité : (positivité)

$$\forall i \in \{0, \dots, n\} \text{ et } \forall t \in [0,1]; B_{i,n}(t) \geq 0.$$

Aux extrémités on obtient :

$$\begin{array}{llll} \text{en } t=0 & B_{0,n}(0)=1, & B_{i,n}(0) = 0 & \text{pour tout } i \in \{1 \dots, n\} \\ \text{en } t=1 & B_{n,n}(1)=1, & B_{i,n}(1) = 0 & \text{pour tout } i \in \{1 \dots, n\} \end{array}$$

- Partition unité :(condition de CAUCHY)

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1 \text{ pour tout } t \in [0,1]$$

- Symétrie : les polynômes de Bernstein sont symétriques par rapport à $t = 1/2$,
 $\forall t \in [0,1]; B_{i,n}(t) = B_{n-i}(1 - t)$

- Relation de récurrence :

Une fonction de BERNSTEIN peut s'exprimer à l'aide des fonctions du même type mais de degré inférieur tel que :

$$B_{i,n}(t) = (1 - t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$$

Pour $t \in [0,1]$.

$$B_{0,n}(t)=t.B_{0,n-1}(t) ; \forall i \in \{1,2,\dots,n-1\}$$

$$B_{n,n}(t)=t.B_{n-1,n-1}(t) ;$$

- Integration: il est montré que: $\forall i \in [0, n]; \int_0^1 B_{i,n}(t)dt = \frac{1}{n+1}$
- Extrémum : $B_{i,n}(t)$ atteint exactement un seul maximum à $t=i/n$ c'est-à-dire : $\text{Max } B_{i,n}(t)=B_{i,n}(i/n=t)$.

II .2 Courbe de Bézier polynomiale (Non rationnelle) :

Une courbe de Bézier de degré 4 est caractérisée généralement par 5 points, appelés points de contrôle qui définissent le polygone caractéristique associé à cette courbe. Le premier point et le dernier sont des nœuds. Les trois autres points de contrôle permettent de définir la forme de l'arc (courbe), la courbe ne passant pas en général par ces trois points [2].

Pour définir de manière mathématique une courbe de Bézier de degré n associée au polygone caractéristique (PG) défini par les points de contrôles (P0, P1....., Pn) dans le repère R (O, X, Y), on utilise les polynômes de Bernstein à l'aide de l'équation suivante :

$$C(t)=\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t).p_i \dots\dots\dots (2.3)$$

$B_{i,n}(t)$: polynôme de BERNSTEIN

Avec :

$i = \{1, 2, 3, \dots, n\}$,

$t \in [0, 1]$,

t: coordonnée géométrique

$P_i = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$: coordonnées des points de contrôle qui définissent le polygone caractéristique.

Pour $n=3$ par exemple, à l'aide de MATLAB on retrouve la courbe représentée sur la Figure (II-02) :

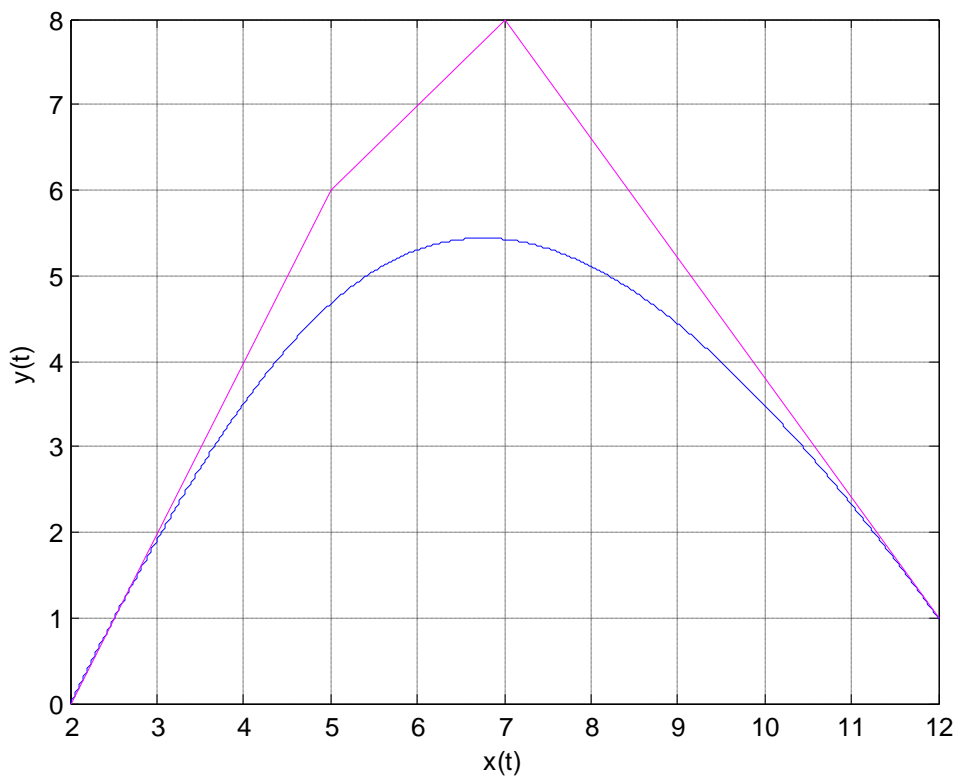


Figure (II-02) : courbe de Bézier non rationnelle et son polygone caractéristique

II .2 .1 Propriétés des courbes de Bézier polynomiales :

1. La courbe ne dépend pas de l'origine, mais uniquement des points de contrôle.

2. La courbe passe par le premier et le dernier pole (voir la figure II-2) :
 $C(t=0) = P_0; C(t=1) = P_1.$
3. La courbe est tangente au polygone au premier et dernier pôle (voir la figure II-2) :
 $C'(0) = n. (P_1 - P_0)$ et $C'(1) = n. (P_n - P_{n-1}).$
4. Propriété du barycentre :
 $\forall t \in [0,1]; C(t)$ est le barycentre des points $P_i.$
5. Continuité : la courbe est C^n fois continue.
6. La courbe est toujours au-dedans du polygone convexe formé par les pôles.

II.3. Surface de Bézier non rationnelle :

Définition : La surface de Bézier est une extension directe de la courbe de Bézier non rationnelle.

La surface de BEZIER est le produit cartésien de deux familles de courbes de BEZIER suivant deux directions avec deux paramètres descripteurs u et v.

On définit la surface de Bézier par :

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u).B_{j,m}(v).P_{i,j} \dots \dots \dots (2.4)$$

$B_{i,n}(u), B_{j,m}(v)$: Les polynômes de Bernstein avec $(u,v) \in [0, 1]. [0, 1]$;

$P_{i,j}$: Les pôles du réseau caractéristique (les points de contrôles) avec :

- $0 \leq i \leq n$
- $0 \leq j \leq m$

L'expression précédente (2.4) peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$S(u,v) = [B_{0,n}(u), B_{1,n}(u), \dots, B_{n,n}(u)] \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,0} & \dots & P_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,m}(v) \\ \vdots \\ B_{m,m}(v) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.6)$$

Avec $u \in [0, 1]$ et $v \in [0, 1]$;

La figure suivante montre une surface de Bézier non rationnelle:

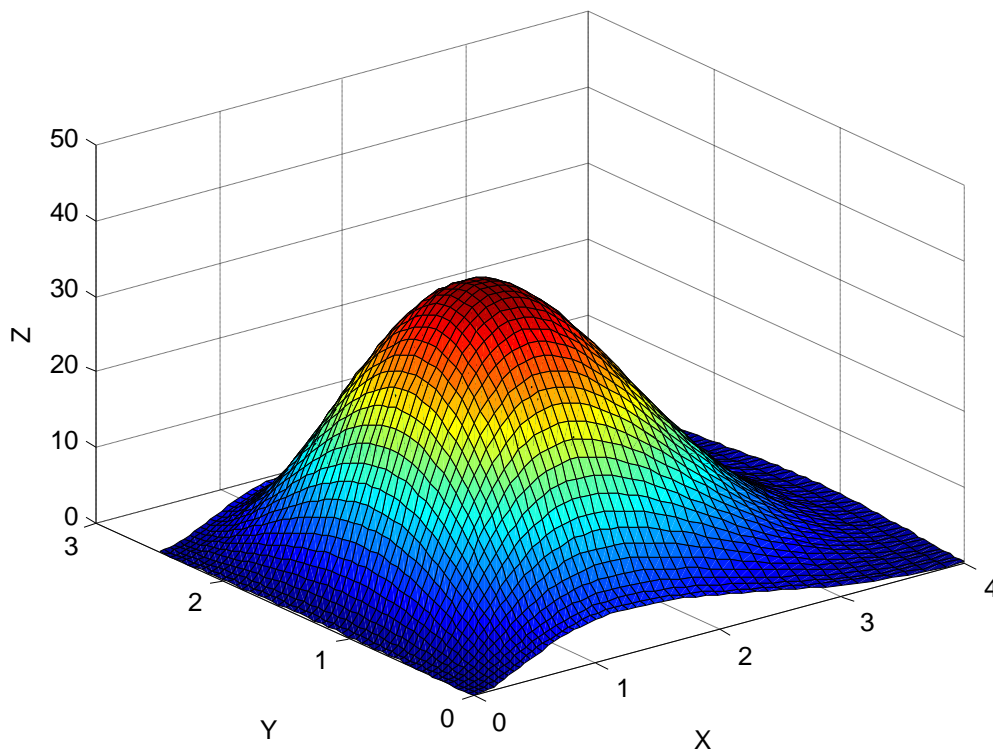


Figure (II-3) : Surface de Bézier non rationnelle

II.3.1 Propriétés des surfaces de Bézier

- non négativité : $B_{i,n}(u)$ et $B_{j,m}(v) \geq 0 \forall i, j, u, v$;
- partition unité : $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) \cdot B_{j,m}(v) = 1 \forall u$ et v ;
- enveloppe convexe : la surface $S(u, v)$ est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle,
- la surface passe par les quatre points extrêmes (interpolation),

II.4 Modèle de Bézier rationnel :

Bien que pratiques et intuitives, les courbes de Bézier souffrent de nombreux problèmes. Le plus important est qu'elles ne permettent pas de tracer des courbes aussi simples que des arcs de cercles, car il n'existe pas de courbe paramétrée polynomiale qui décrit un arc de cercle.

Pour décrire très exactement des courbes comme les arcs des cercles, il faut des degrés de liberté supplémentaires.

L'idée est d'ajouter des poids aux points de contrôle(W_i), Les modèles géométriques rationnels font appel aux concepts des coordonnées homogènes.

II.4.1 Coordonnées homogènes :

Le concept est d'exprimer des points de l'espace \mathbb{R}^n (dimension n) dans un espace \mathbb{R}^{n-1} (dimension $n-1$).

Soit P un point de coordonnées (x, y, w) de \mathbb{R}^3 , sa projection est obtenue comme suit:

Soit $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X/W \\ Y/W \end{pmatrix}$$

La division des deux premières composantes par la troisième, représente géométriquement une projection conique de sommet de l'origine \mathbb{R}^3 , sur le plan $w=1$.

L'emploi des coordonnées homogènes en CAO offre la possibilité de combiner toutes les transformations géométriques courantes (translation, symétrie, rotation,...).

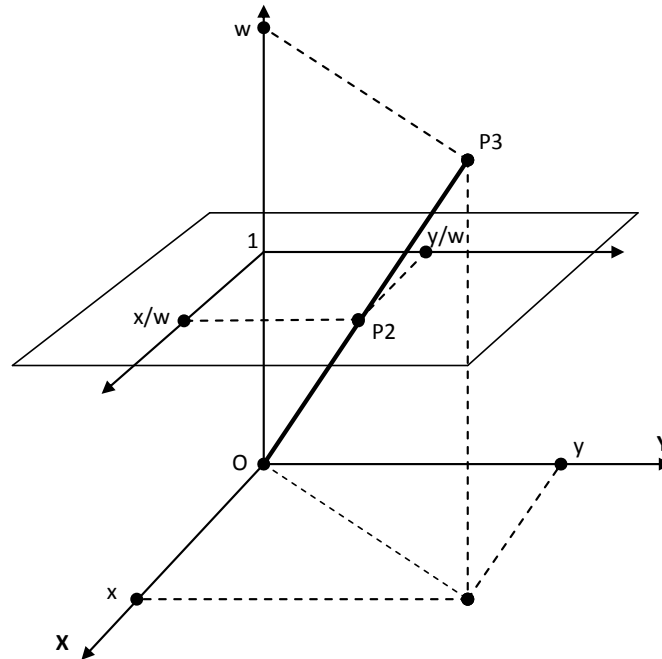


Figure (II-4) : Illustration de la transformation homogène entre R3 et R2

II.4.2 Courbes de Bezier rationnelles:

Pour les pôles (p₀,p₁,. ..,p_n) chargés respectivement par les poids (w₀,w₁,...,w_n), la courbe de Bézier rationnelle est définie par l'équation:

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t) \cdot P_i}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t)} = s_{i,n}(t) \cdot P_i, t \in [0 \quad 1] \dots\dots\dots (2.7)$$

$$S_{i,n}(t) = \frac{w_i \cdot B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot B_{i,n}(t)} \dots\dots\dots (2.8)$$

P_i : Pôles du polygone caractéristique.

s_{i,n} (t): Polynômes de Bernstein rationnels

B_{i,n} (t) : Polynômes de Bernstein

w_i: Les poids associés aux pôles de polygone caractéristique avec w_i>0.

Exemple : courbe de Bézier rationnelle n=3 obtenue avec les points de

contrôle : b₀(0,2), b₁(1,3), b₂(7,4), b₃(8,1) et vecteur des poids w= [1 1 1 1].

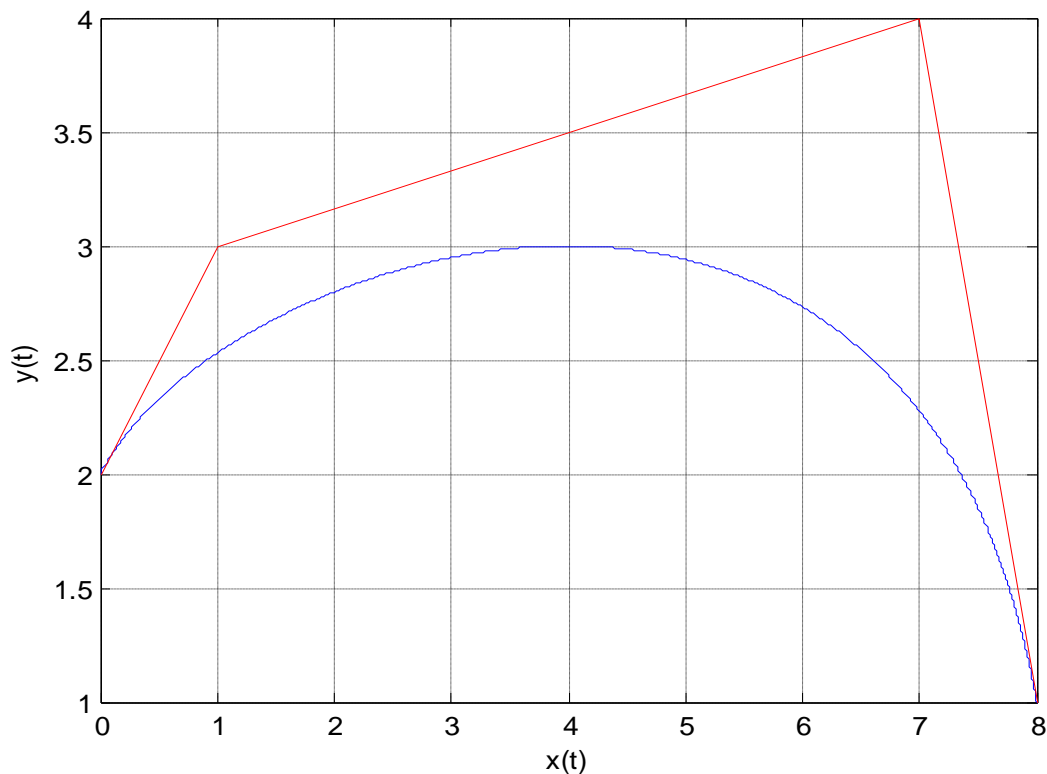


Figure (II-5):Courbe de Bézier rationnelle avec $w_i=[1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

II.4.2.1 : Propriétés des courbes de Bézier rationnelles :

La courbe de Bézier rationnelle présente deux autres propriétés par rapport au modèle de Bézier non rationnel.

1-La première propriété c'est l'invariance projective : si on veut transformer une courbe de Bézier rationnelle par une transformation projective, on a qu'à agir sur le polygone de contrôle en écrivant les poids (w_i) en coordonnées homogènes.

2-La deuxième est la précision linéaire.

II.4.2.2 Influence des poids (w_i) sur la courbe de Bézier rationnelle :

Les poids W_i sont des paramètres de contrôle supplémentaires, aussi offrent une souplesse et une efficacité dans le contrôle de forme de la courbe

- Si on augmente les poids W_2 et W_3 , la courbe se rapproche des points (P_2 et P_3) associés comme le montre la figure (II-6).
- Si $W_2 \leq 0$, la courbe s'éloigne du point (P_1) associé comme le montre la figure (II-7).

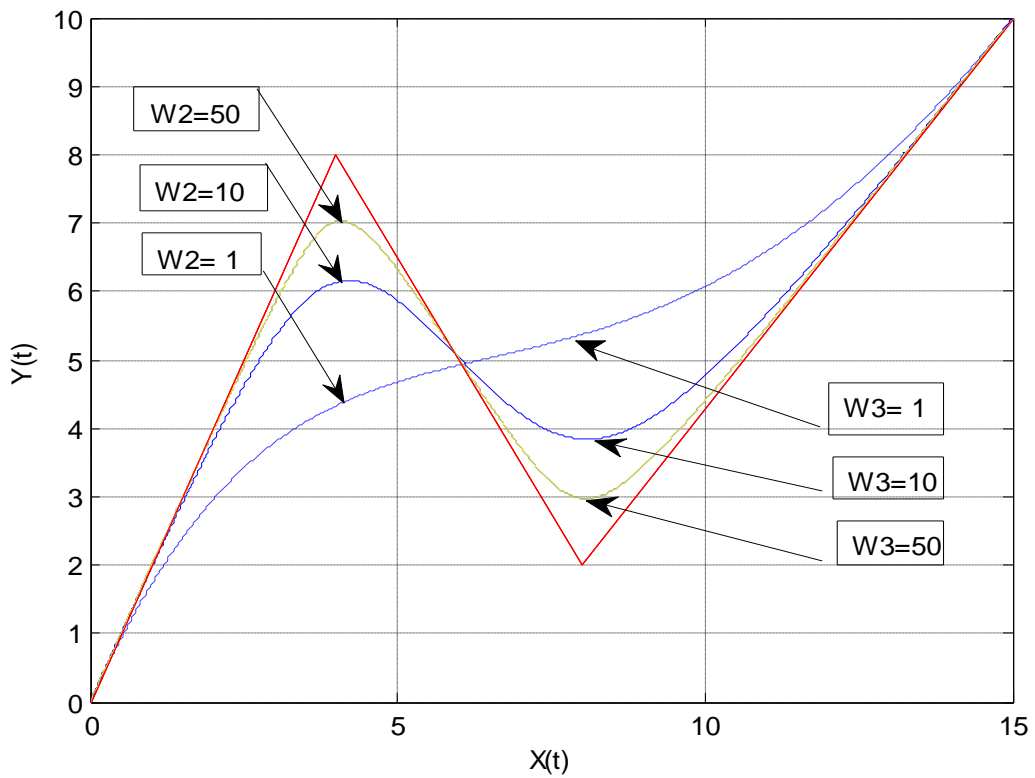


Figure (II-6) : Influence d'une augmentation d'un poids sur la forme de la courbe

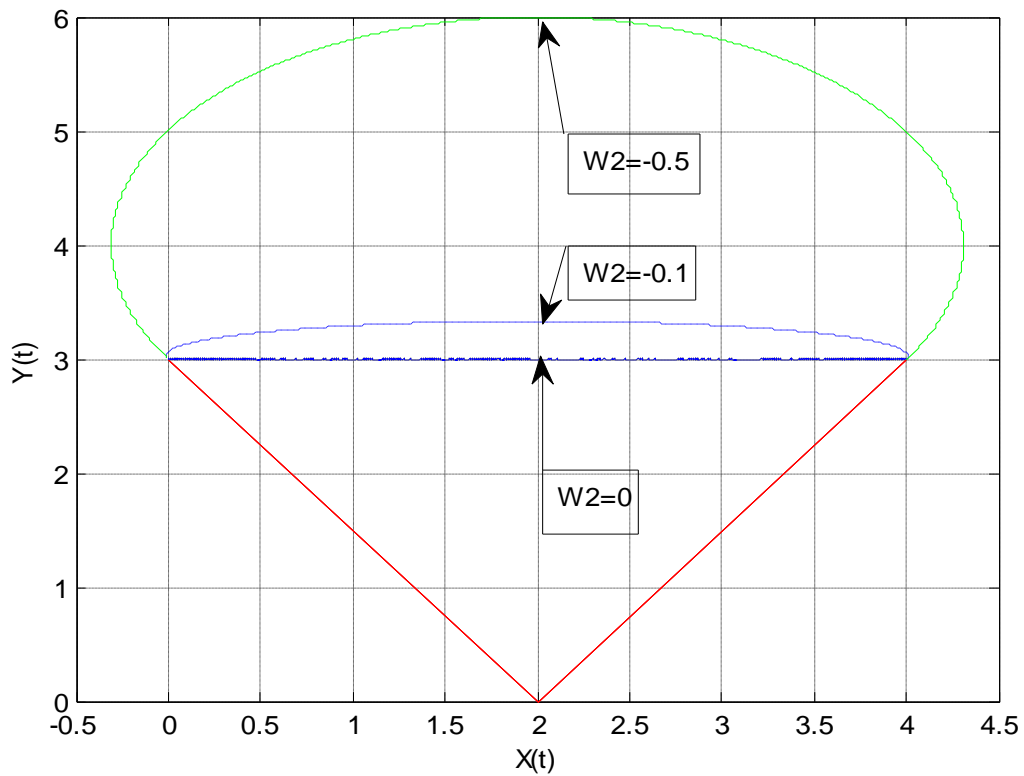


Figure (II-7) : Influence du changement de signe d'un poids sur la forme de la courbe

II.5. Surfaces de Bézier rationnelles

les surfaces rationnelles sont le produit cartésien de deux familles de courbes rationnelles suivant deux directions u et v.

La surface de Bézier rationnelle se construit d'une manière analogue à celle de Bézier non rationnelle (polynômiale) en utilisant la formulation suivante :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} \cdot B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \cdot P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} \cdot B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)} \dots\dots\dots (2.9)$$

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m G_{i,n}(u) G_{j,m}(v) P_{i,j} \dots\dots\dots (2.10)$$

$P_{i,j}$: les points de contrôles avec $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$.

$B_{i,n}(u)$ et $B_{j,m}(v)$ Les polynômes de Bernstein avec : $u, v \in [0,1]^2$.

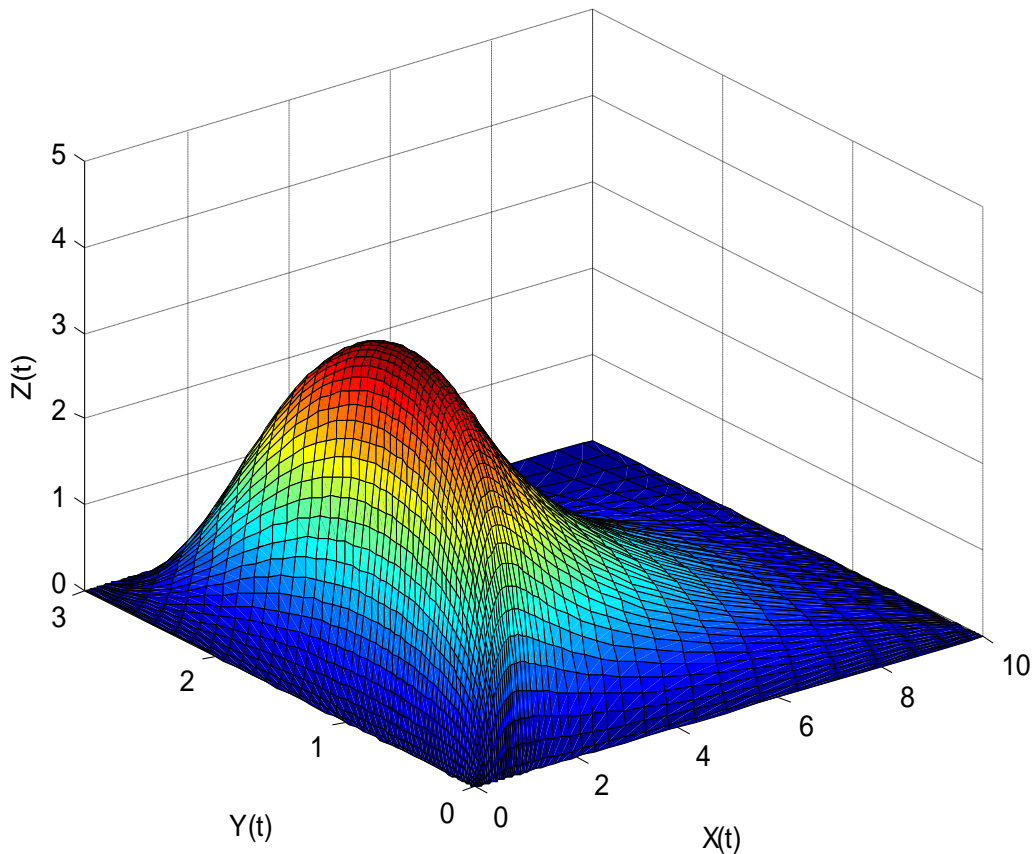


Figure (II-8) : surface de Bézier rationnelle

II.6. Modèle B-Spline non rationnel :

II.6.1 Introduction :

Les fonctions B-spline permettent de décrire des courbes et des surfaces polynomiales par morceaux qui vérifient une continuité paramétrique à un certain ordre. A la différence des représentations étudiées précédemment, une représentation B-spline concerne donc l'ensemble d'une courbe ou d'une surface et non plus un seul segment de courbe ou carreau de surface.

La définition de courbes polynomiales par morceau (B-spline) permet de répondre aux insuffisances du modèle de Bézier, car elle offre une grande flexibilité et une grande précision. Les B-splines (basis spline) ont été proposées par De Boor (1972) et utilisées pour la première fois par Riesenfeld dans des applications CAO en 1973.

Les courbes B-spline sont définies à partir d'une combinaison linéaire des fonctions polynomiales (fonctions de base) [3].

II.6.2 Nœud et vecteur nodal :

Le vecteur nodal est une suite de valeurs $m+1$, telle que cette suite soit croissante ($\xi_{i-1} \leq \xi_i$) Ces valeurs sont appelées **nœuds** et l'élément $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m\}$ est appelé un vecteur nœud.

Il existe deux types de vecteurs nodaux :

- **Vecteur non uniforme:** si l'espacement entre ses nœuds n'est pas régulier $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$.
- **Vecteur uniforme :** si l'espacement entre ses nœuds est régulier $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$.

II.6.3. Vecteur nodal-multiplicité :

L'ordre de multiplicité d'un nœud caractérise le nombre de fois qu'un nœud de valeur numérique U apparaît dans une même séquence nodale $\Xi = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$.

La multiplicité de 0 est égale à 2, la multiplicité de 1 est égale à 1 et la multiplicité de 2 est égale à 3.

II.6.4. Les fonctions de base B-Spline :

Les fonctions de base sont définies par récurrence suivant la formule :

$$N_{i,m}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+m} - \xi_i} N_{i,m-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+m+1} - \xi}{\xi_{i+m+1} - \xi_i} N_{i+1,m-1}(\xi) \quad (2.11)$$

Pour l'ordre $m=0$:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Pour $m=1, 2, 3, \dots, n$ elles sont définies par la formule récursive de Cox-De Boor.

On convient, dans cette définition, que si le numérateur et le dénominateur sont nuls

Ou le dénominateur est nul en présence des nœuds répétés, alors par convention $\frac{0}{0}=0$ et aussi quand $\xi_{i+m+1} = \xi_{i+1} \rightarrow \frac{x}{0}=0$.

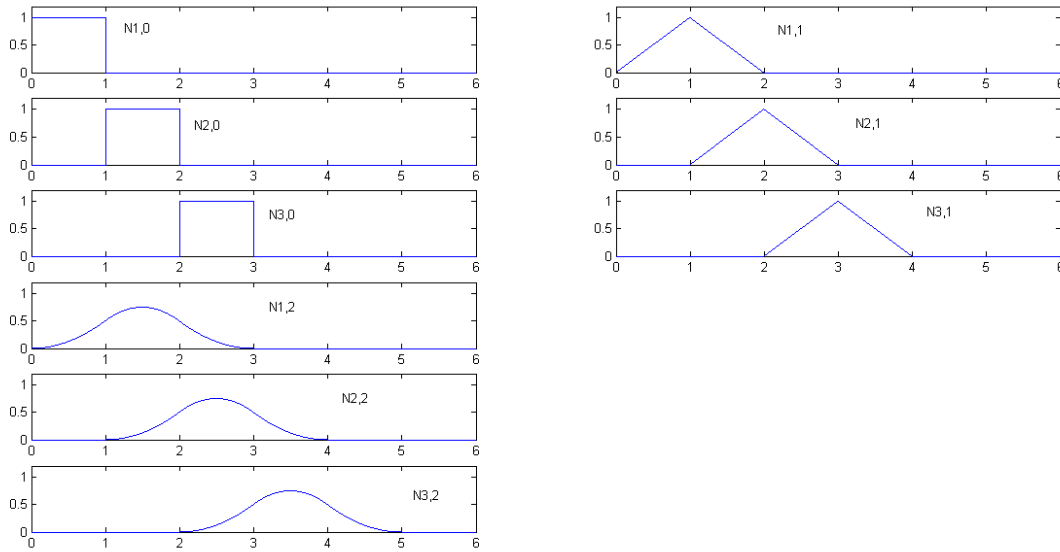


Figure (II-9) : fonctions de base d'ordre 0,1 et 2 pour le vecteur uniforme $\Xi = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$.

II.6.4.1 Différents types de fonctions de base B-Splines

II.6.4.1.1 B-spline uniforme :

On appelle B-spline uniforme que leur courbe construite à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds est constant et $m=2$ suivant exemple ci dessous :

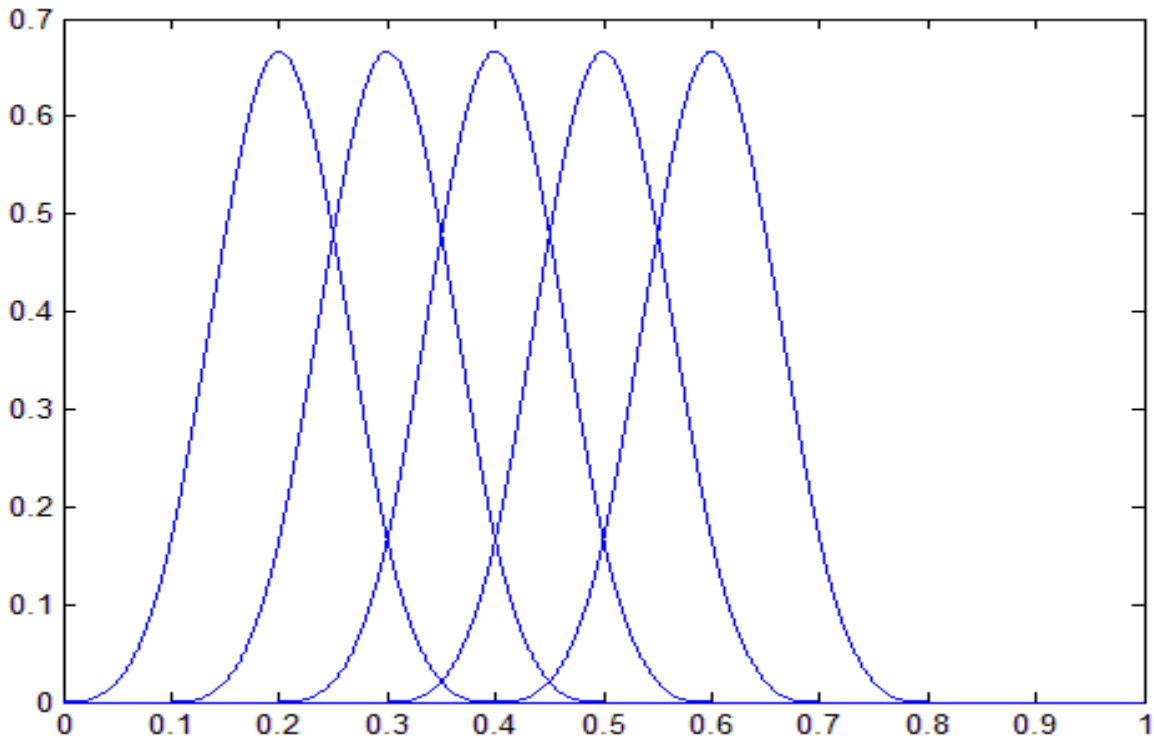


Figure (II-10) : courbes des fonctions de base B-spline d'ordre 2 uniformes

II.6.4.1.2 B-spline non uniforme :

On appelle B-spline non uniforme les fonctions de base et leurs courbes construites à l'aide d'un vecteur nodal où l'intervalle entre deux nœuds successifs n'est pas constant.

Exemple : le vecteur nœud $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 5 \ 5]$

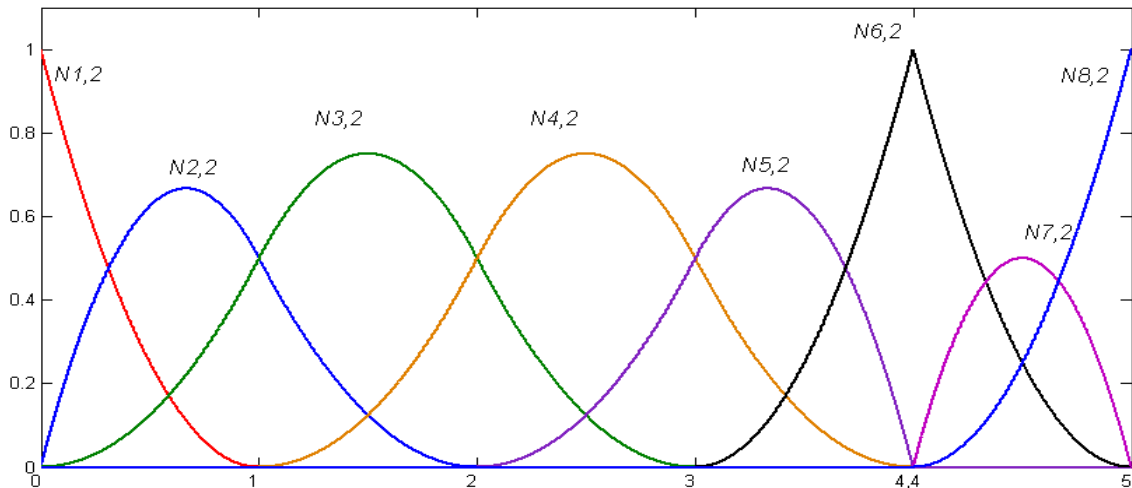


Figure (II-11) : courbes des fonctions de base B-spline d'ordre 2 non uniformes

II.6.4.1.3 Propriétés des fonctions de base

- La base constitue une partition unité : $\forall \xi, \sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi) = 1$.
- La non négativité : $N_{i,m}(\xi) \geq 0$ quand $i=1,2,3,\dots,n$ Cela implique que tous les éléments de la matrice de masse seront positifs.
- Chaque intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ définit un arc de courbe délimité par les points $P(\xi_i)$ et $P(\xi_{i+1})$.
- La fonction $N_{i,m}(\xi)$ s'annule en dehors de l'intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ce qu'on appelle support local.
- Dérivabilité et continuité :
Si dans l'intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ tous les nœuds sont de multiplicité **1**, la fonction $N_{i,m}(\xi)$ est continûment dérivable jusqu'à l'ordre $m-1$.par contre s'il existe un nœud ξ_i de multiplicité **p** dans cet intervalle, $N_{i,m}(\xi)$ est **m-p** fois continûment dérivable en ce nœud ξ_i .
- Le vecteur des nœuds influence principalement sur les propriétés de continuité et de dérivabilité.

II.6.4.2.1 Courbes B-spline non rationnelles uniformes :

Une courbe B-spline non rationnelle de degré m et de séquence nodale ξ est définie par l'expression :

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(\xi) P_i \dots\dots\dots (2-13)$$

Avec :

P_i : les pôles du polygone de contrôle

$N_{i,m}(\xi)$ ou $N_{i,m}(t)$: Fonctions de base de degré m

Exemple : pour $m=2$ la courbe B-spline est de degré 2

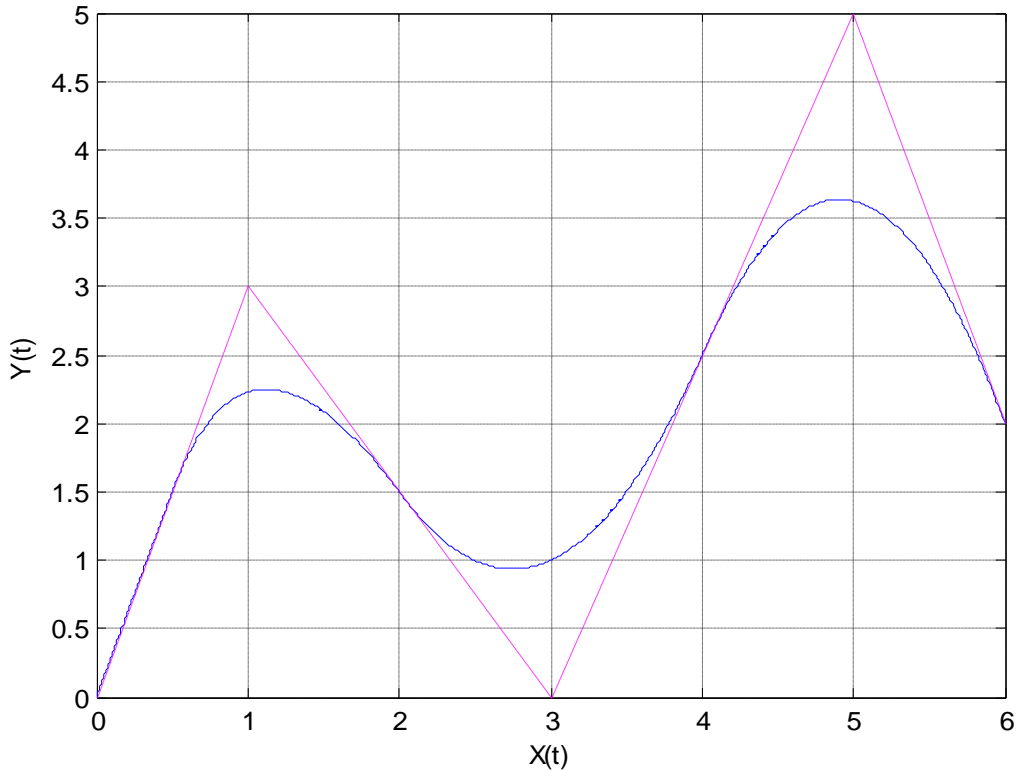


Figure (II.12): courbe B-spline non rationnelle uniforme

II.6.4.2.2 Propriétés des courbes B-spline non rationnelles :

- Enveloppe convexe : la courbe est contenue dans une enveloppe convexe des pôles.
- Contrôle local : le déplacement d'un pôle engendre une déformation locale de la courbe.
- Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la courbe si elle est appliquée au polygone caractéristique.
- La courbe B-spline non rationnelle coïncide avec son polygone caractéristique au premier et au dernier point de contrôle.
- La courbe B-spline et p fois continument dérivable ($p=m-k$).
- La multiplicité $(m+1)$ des nœuds extrêmes engendre des conditions aux extrémités de la courbe : $C(0)=P_0, C(1)=P_n$

Avec : $u \times v \in [\xi_0; \xi_{n+p+1}] \times [\eta_0; \eta_{m+q+1}]$

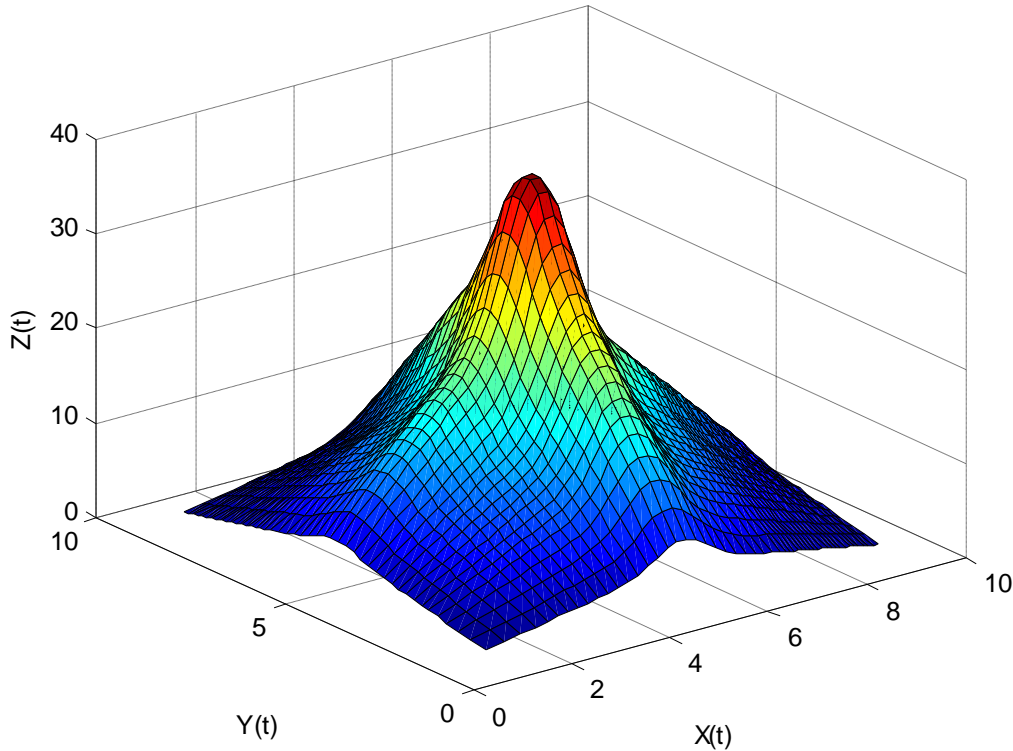


Figure (II -14) : surface B-Spline non rationnelle

II.6.5.1. Propriétés de la surface B-Spline non rationnelle :

- non négativité : $N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) \geq 0 \forall i, j, \xi, \eta$
- partition unité : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta) = 1 \forall \xi \text{ et } \eta$
- enveloppe convexe : la surface $S(\xi, \eta)$ est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle.
- Invariance affine : une transformation affine est appliquée à la surface si elle est appliquée aux pôles.
- Modification locale : si on change les coordonnées d'un point $P_{i,j}$ seulement le Rectangle $[\xi_i; \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j; \eta_{j+q+1}]$ qui sera modifié.

II.8. Modèle B-Spline rationnel NURBS :

Les NURBS (Non Uniform Rational B-Spline) correspondent à une généralisation des B-Splines car ces fonctions sont définies avec des points en coordonnées homogènes. Il existe un certain nombre de types de courbes et de surfaces importantes qui ne peuvent pas être représentées précisément à l'aide de polynômes, par exemple:

- Les coniques (cercles, ellipses, hyperboles, cônes),
- Les sphères et les surfaces de révolution,

On sait cependant que les coniques peuvent être représentées à l'aide de fonctions rationnelles.

II.7.1 Fonctions de base NURBS

Les fonctions de base B-Spline rationnelle (NURBS) sont définies par la formule mathématique suivante:

$$R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi)w_i} \dots \dots \dots (2.15)$$

Avec :

$N_{i,m}(\xi)$:fonctions de base B-spline et W_i :les poids.

II.7.1.1 Propriétés des fonctions de bases NURBS

Les propriétés suivantes peuvent être déduites de la définition des fonctions

1. Non négativité: $R_{i,m}(\xi) \geq 0 \forall i, m \text{ et } \xi \in [0, 1]$
2. Partition de l'unité : $\sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi) = 1 \forall \xi \in [\zeta_{\min}, \zeta_{\max}]$
3. Si $W_1=W_2=\dots=W_n$, les NURBS deviennent les B-spline
4. Les courbes NURBS sont invariantes sous une transformation affine, incluant la projection (projeter les points de contrôle ou la courbe est équivalent).
5. Dérivabilité : toutes les dérivées des fonctions $R_{i,m}(\xi)$ existent, pour un nœud de multiplicité k elles sont (m-k) fois continument dérivables.

II.7.2 Courbe B-Spline Rationnelle (NURBS)

Le modèle B-spline rationnelle non uniforme ou Non Uniforme B-spline (NURBS) est actuellement une des formes mathématique les plus générales employée au sein des modeleurs géométrique.

Soit Ξ un vecteur nœud, soit P un polygone de contrôle dans \mathbf{R}^n et W des poids attachés à chaque point de contrôle P_i . On suppose que les poids ne sont pas tous nuls. La courbe B-Spline rationnelle (NURBS) de degré m associée est :

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi)P_i \dots \dots \dots (2.16)$$

Avec : $R_{i,m}(\xi) = \frac{N_{i,m}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,m}(\xi)w_i}$ les fonctions NURBS
 m : est le degré des fonctions.

P_i : Les points de contrôle.
 W_i : sont des poids associés aux pôles.

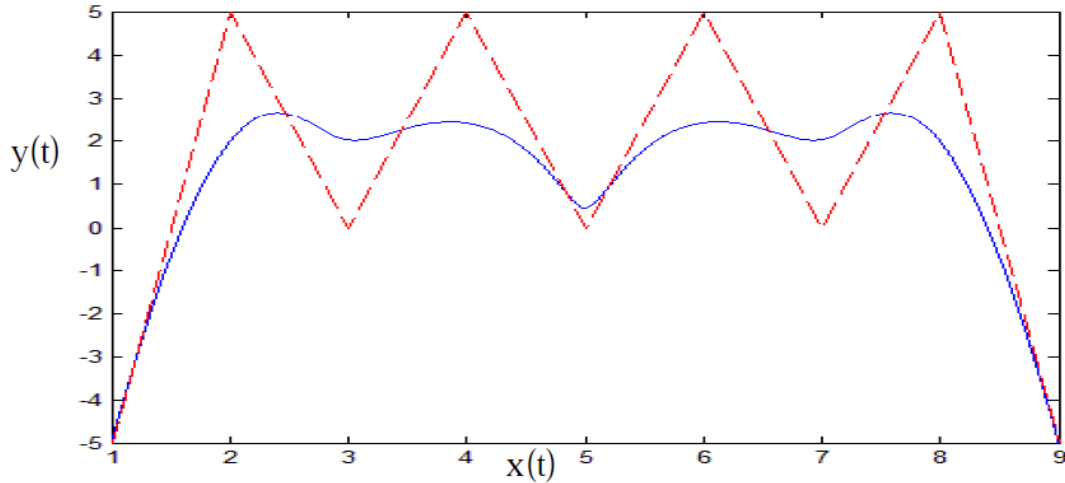


Figure (II.15) : Courbe Non Uniform rational -Spline (NURBS)

II.7.2.1 Propriétés géométriques des courbes NURBS

1. Les courbes NURBS peuvent représenter exactement toutes les formes coniques usuelles de conception.
2. L'influence de la variation des poids W_i sur les pôles P_i est analogue à celle de Bézier rationnelle sauf que la variation dans le cas des NURBS est locale.
3. Invariance projective : contrairement aux courbes B-Spline l'image d'une courbe NURBS par une projection est la courbe NURBS passant par la projection des points (Les poids doivent être recalculés en fonction de la matrice de projection).
4. Invariance affine : la transformée affine d'une courbe NURBS est la courbe passant par la transformée des points de contrôle.
5. Dérivation et continuité : pour tout ζ qui n'est pas une valeur nodale, $C(\zeta)$ est infiniment dérivable, si ζ est égale à une valeur nodale de multiplicité k alors $C(\zeta)$ est $(m-k)$ fois dérivable ($C(\zeta)$ n'est pas nécessairement continue).

II.7.2.2 Dérivées des fonctions de bases NURBS

Première dérivée des fonctions de base NURBS :

$$W(t) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(t)w_i, \dots\dots\dots (2.17)$$

$$\frac{d}{dt} R_{i,m}(t) = w_i \frac{W(t)N'_{i,m}(\xi) - W'(t)N_{i,m}(\xi)}{(W(t))^2} \dots\dots\dots (2.18)$$

Avec :

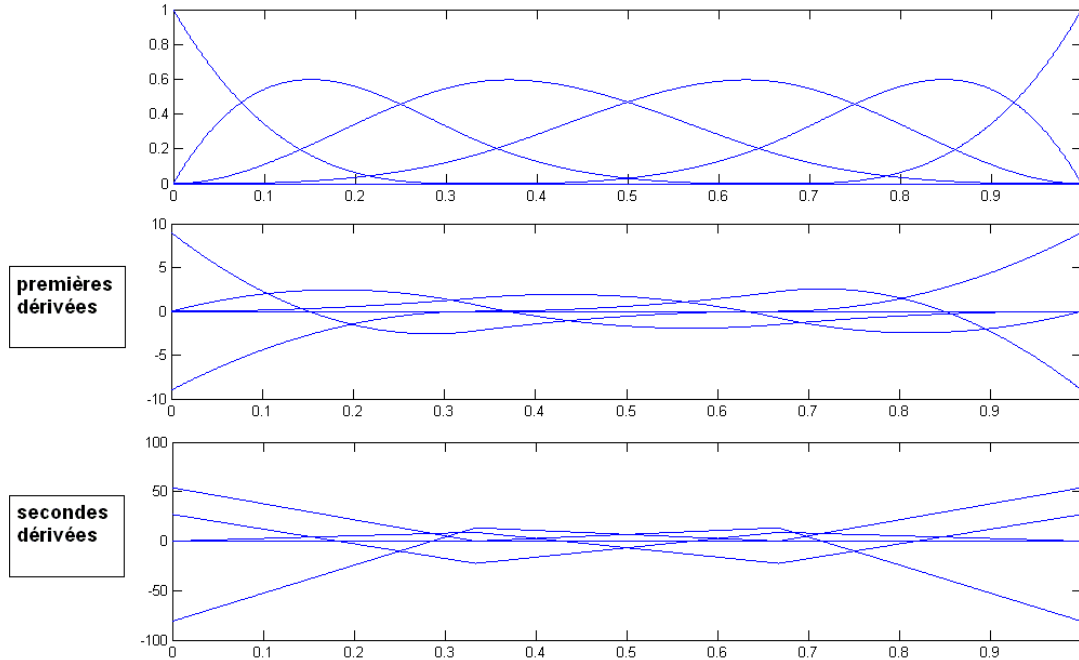
$$W'(t) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(t)w_i \text{ et } t = \xi$$

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,m}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+m} - \xi_i} N_{i,m-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+m+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,m-1}(\xi) \dots\dots\dots (2.19)$$

La relation (2.19) peut être généralisée pour les dérivées d'ordre k-ème des fonctions de base B-spline

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,m}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+m} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,m-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+m+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,m-1}(\xi) \right).$$

a)- fonctions de base B-Spline avec la 1^{er} dérivée et 2^{ème} dérivée



b)- fonctions de base NURBS avec la 1^{er} dérivée et 2^{ème} dérivée

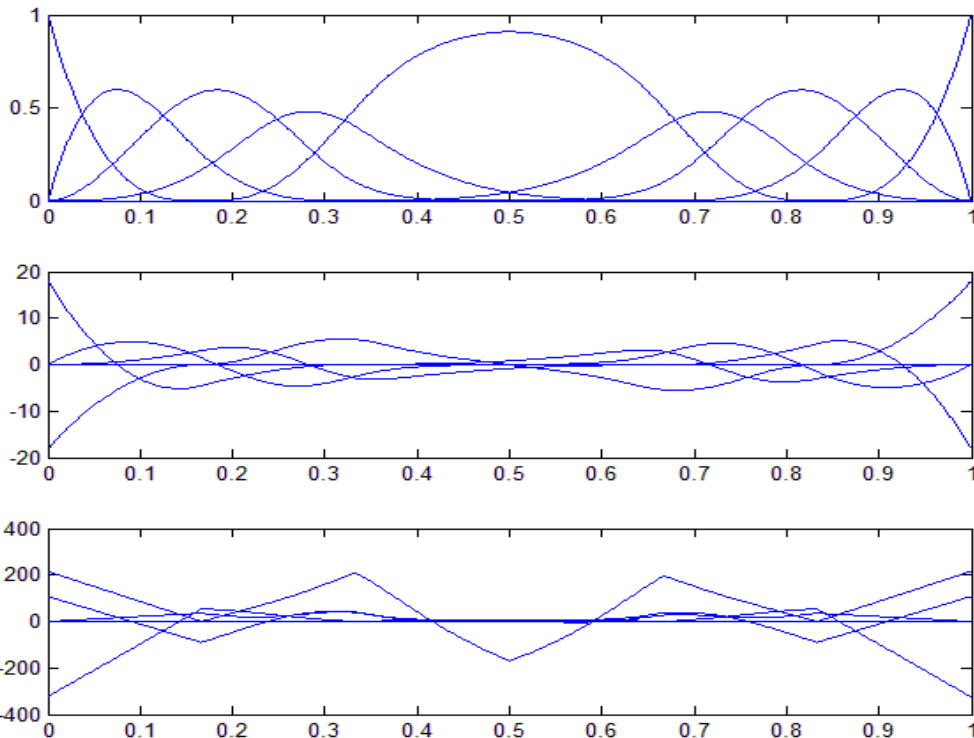


Figure (II.16) : 1^{er} et 2^{ème} dérivées des fonctions de bases B-Spline et NURBS

II.8. Surfaces rationnelles NURBS

Comme pour les surfaces polynomiales, la surface NURBS est donnée par le produit tensoriel, une surface NURBS de degré (p, q) est définie par

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad \text{et } 0 \leq (\xi, \eta) \leq 1 \dots \dots \dots (2.20)$$

On pose: $S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m T_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j}$

$T_{i,j}(\xi, \eta)$: Fonctions de base NURBS
 $w_{i,j}$: les poids associés aux points de contrôle

$P_{i,j}$: points de contrôle à deux direction

Exemple :

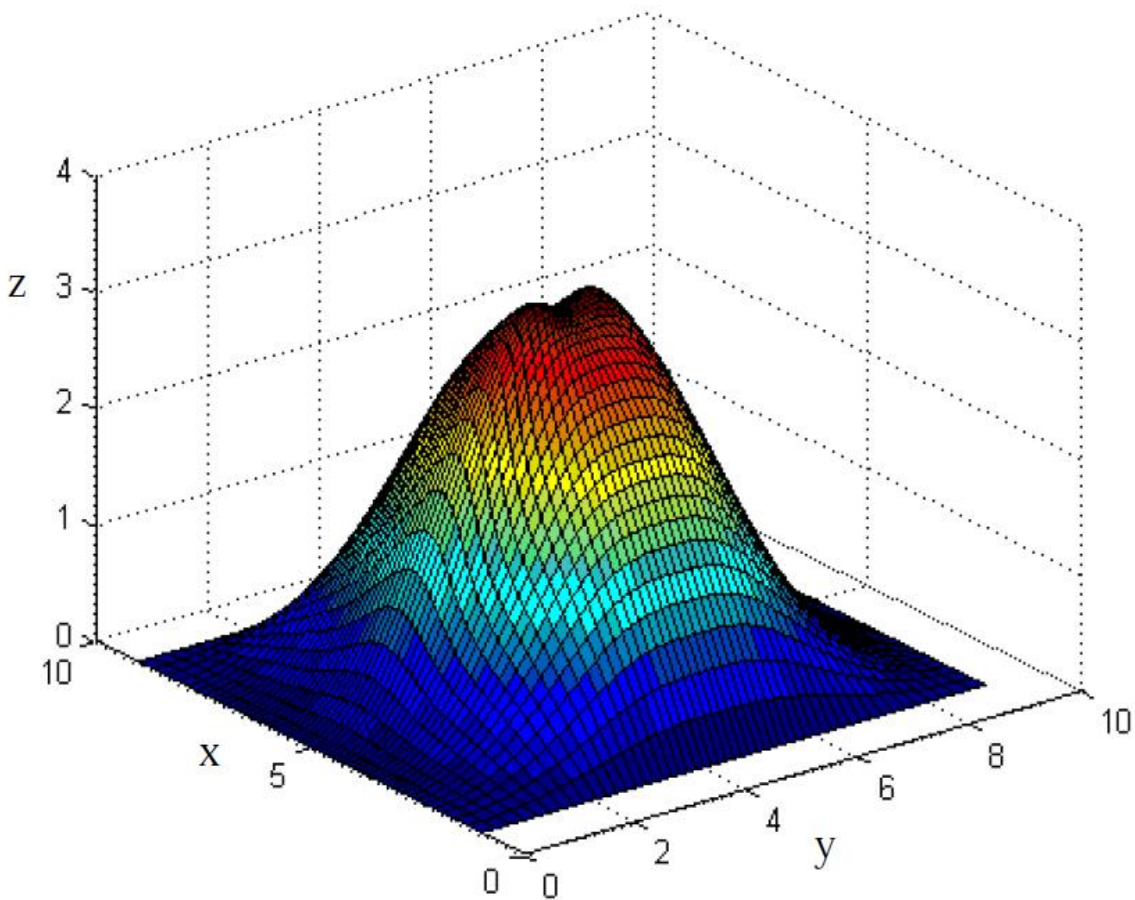


Figure (II.17) : surface NURBS de degré 2

II.8.1 Propriété des surfaces NURBS

La continuité des fonctions et le support local qui découlent directement du vecteur nodal, exactement comme avant. La base constitue toujours une partition de l'unité et elle est positive en tout point.

Les poids jouent un rôle important dans la définition de la base, mais ils ne sont associés à aucune interprétation géométrique explicite dans ce cadre, et nous sommes libres de choisir les points de contrôle indépendamment de leur poids associés, ainsi, les B-Splines ne sont qu'un cas particulier de NURBS.

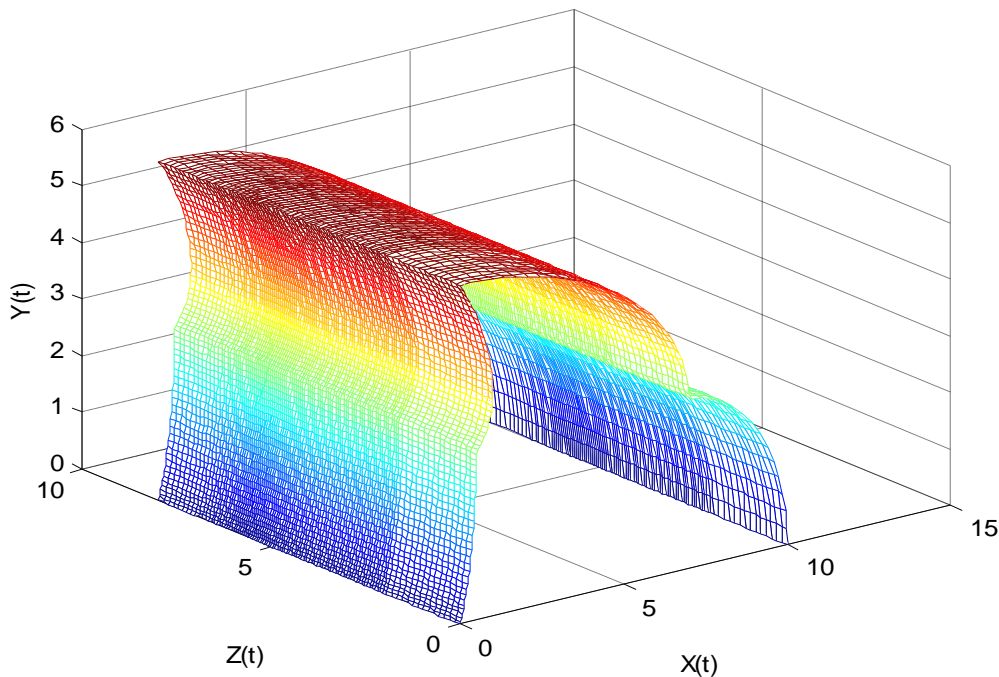
II.9 Modélisation et construction des surfaces particulières par les NURBS

II.9.1 Construction d'une surface réglée

Une surface est **réglée** si et seulement si est engendrée à partir d'une droite appelée « règle » glissant le long de deux courbes, elle est donnée par la relation suivant :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^2 R_{i,p}(\xi) \cdot R_{j,1}(\eta) \cdot P_{ij} \quad (2.21)$$

Tel que : $R_{i,p}(\xi)$ et $R_{j,1}$ sont des fonctions de base NURBS



Figure(II.18) : surface réglée NURBS

II.9.2 Construction d'une surface d'extrusion

Une surface d'extrusion est générée par une courbe généralement plane glissant le long d'une trajectoire rectiligne ou non, la courbe initiale reste parallèle à elle-même (translation pure), l'extrusion d'une surface cylindrique se fait par la translation d'une esquisse génératrice qui est un cercle

Etant donné un vecteur \mathbf{d} de longueur unité et $C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,m}(\xi)P_i$ est une courbe NURBS de degré m , La surface d'extrusion $S(\zeta,\eta)$ est obtenue par translation de la courbe $C(\xi)$ le long du vecteur \mathbf{d} .

La surface d'extrusion est obtenue par la formule suivante

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 R_{i,p}(\xi) \cdot R_{j,1}(\eta) \cdot P_{ij} \tag{2.22}$$

a)Construction d'un cercle :

soit $P \{(4,2);(4,0);(2,0);(0,0);(0,2);(0,4);(2,4);(4,4);(4,2)\}$ le réseau caractéristique et $w\{1 \ 1/\sqrt{2} \ 1 \ 1/\sqrt{2} \ 1 \ 1/\sqrt{2} \ 1 \ 1/\sqrt{2} \ 1\}$

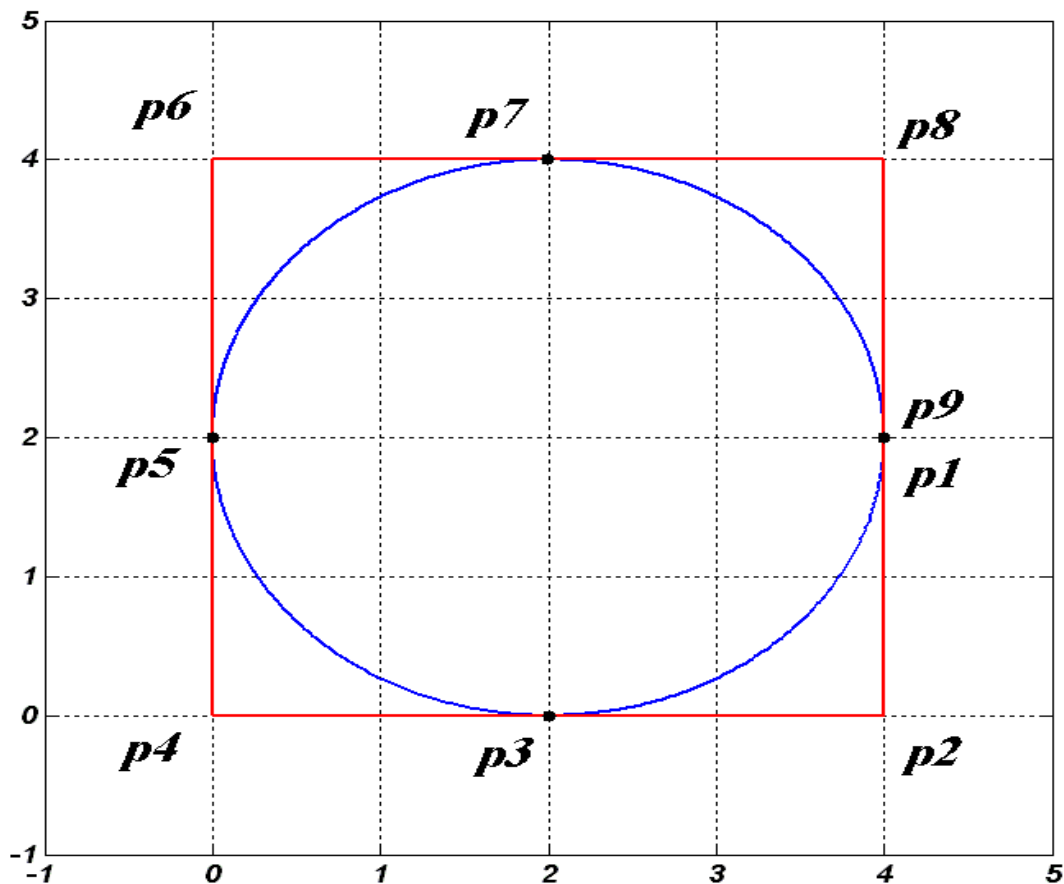


Figure (II.19): Construction d'un cercle avec les NURBS

b) Construction d'une surface d'extrusion (surface cylindrique) :

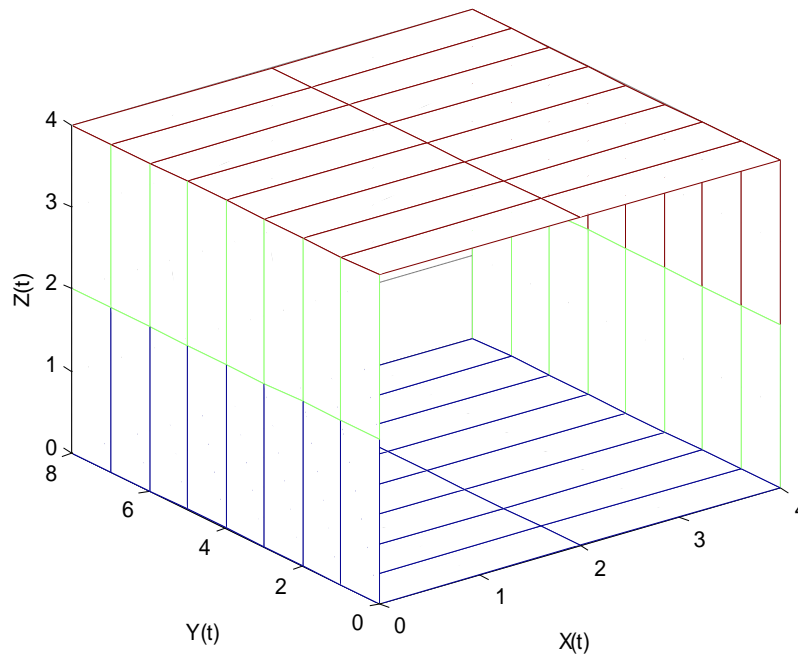
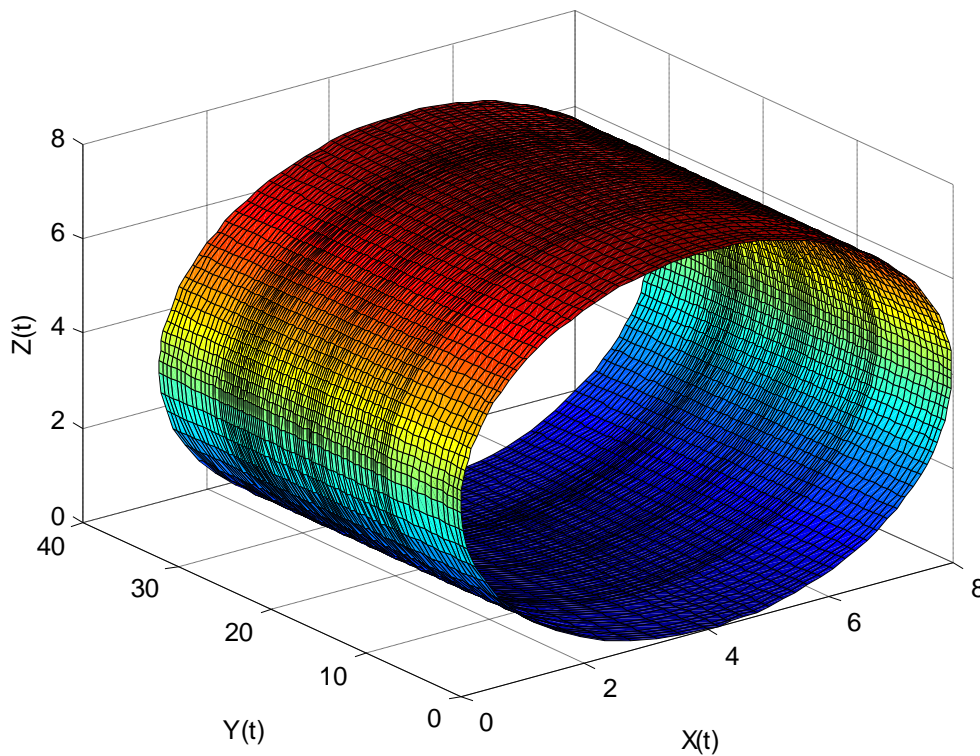


Figure (II.20) Reseaux des points de contrôle.



Figure(II.21):surface cylindrique de type NURBS, construite a partir de deux fonctions de base $p=2$ et $q=2$

II.9.3 Construction d'une surface de révolution

Une surface de révolution est une surface possédant un axe de symétrie, pour modéliser ce genre d'objets la figure suivante montre le principe

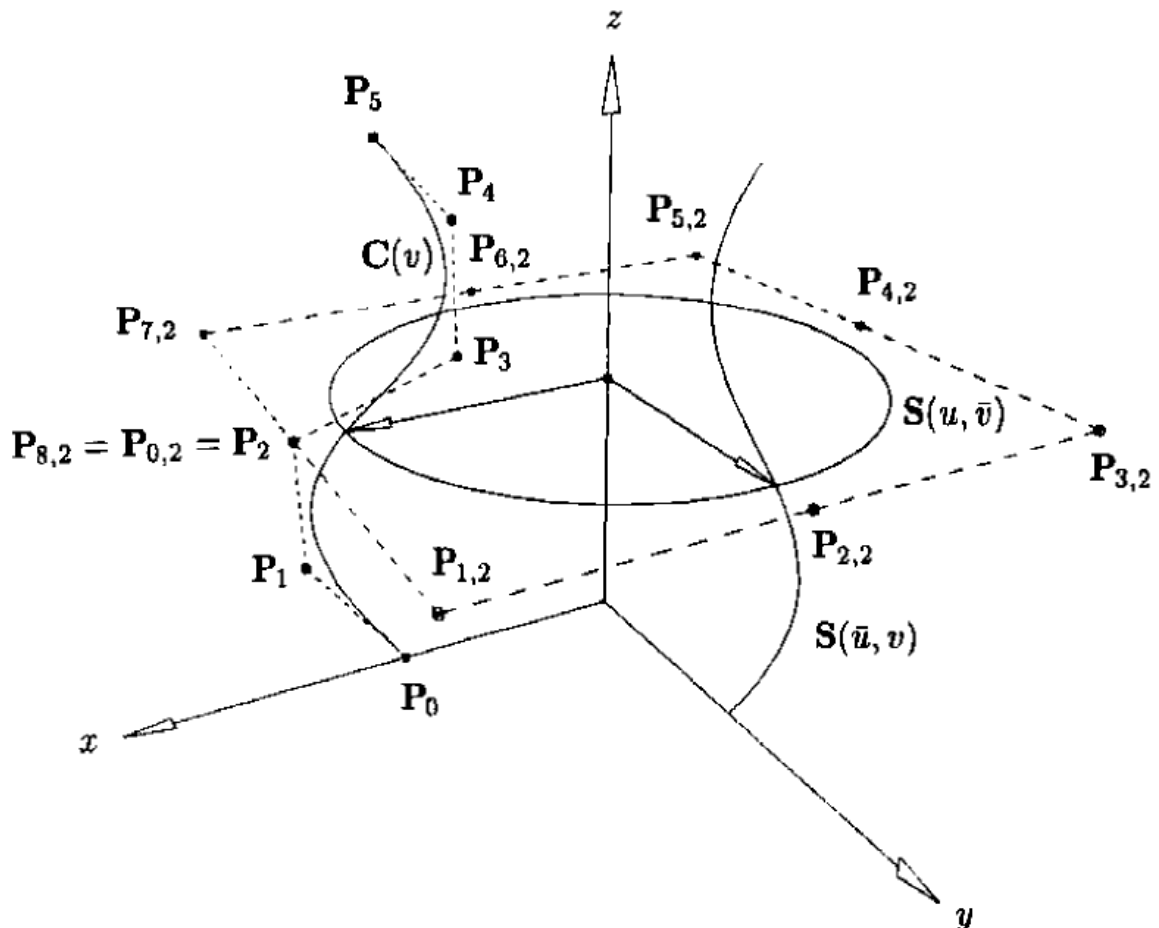


Figure (II.22) : définition d'une surface de révolution

L'une des méthodes pour la construction d'une surface de révolution de type NURBS. La surface est donnée par l'équation :

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^m R_{i,2}(\xi) \cdot R_{j,n}(\eta) \cdot P_{ij} \dots\dots\dots (2.23)$$

$R_{i,2}$ et $R_{j,n}$ sont des fonctions de base NURBS d'ordres respectifs **2** et **n**. Afin d'assurer la révolution circulaire, on peut choisir les poids de la base quadratique $R_{i,2}$, comme suit : $w_i = \left\{ 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right\}$. et son vecteur nodal :

$$\Xi = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1 \right\}$$

L'exemple suivant illustre une surface de révolution autour de l'axe passant par le point $B(3, 2, 0)$ et parallèle à l'axe \overrightarrow{Oz} .

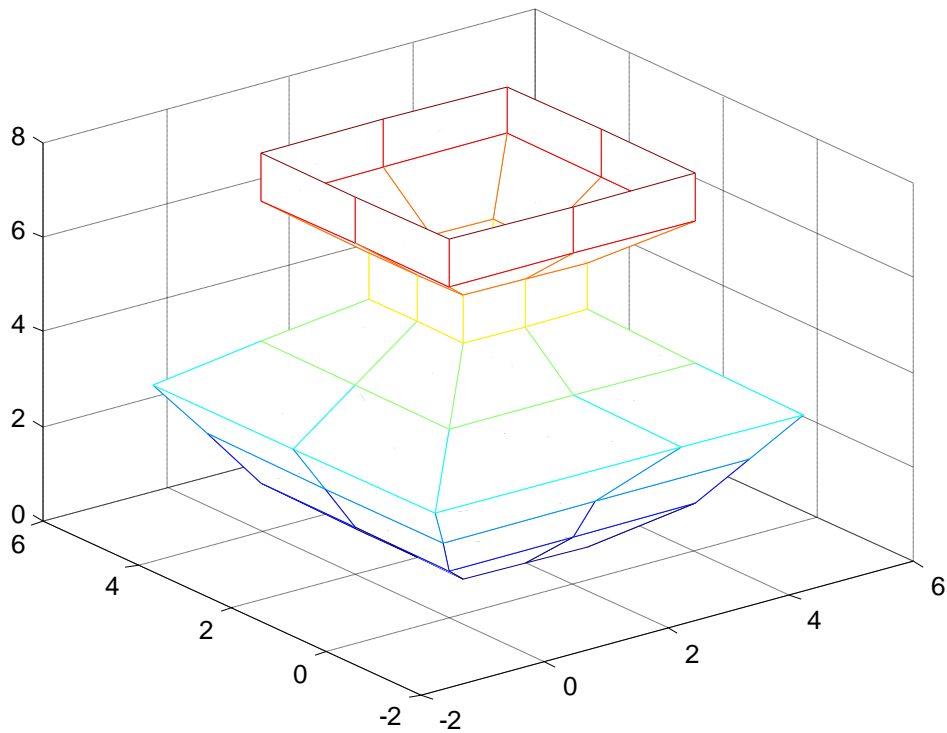
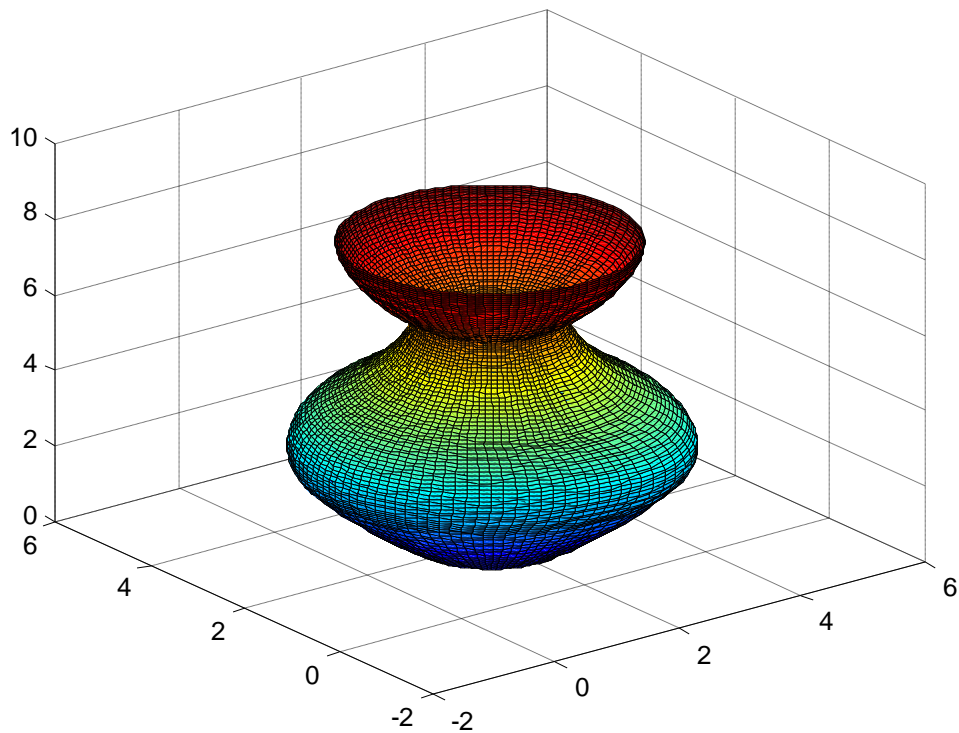


Figure (II.23) Surface de révolution autour de l'axe passant par B et parallèle à \vec{Oz} et son réseaux caractéristique.

II.10 Raffinement

L'un des plus intéressants aspects des B-Spline est la multitude de voies à travers lesquelles la base peut être enrichie tout en gardant intact la géométrie en question et ses paramètres **h**, **p** et **k** raffinement [4]. Ces techniques sont présentées ici afin de les utiliser dans le chapitre suivant qui traite des éléments finis isogéométrique qui utilise ces techniques.

II.10.1 h-raffinement [4]

L'analyse iso géométrique est basé sur l'insertion de nœud. Des nœuds peuvent être insérés sans changer la géométrie de la courbe, étant donné un vecteur nodal $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, on introduit le nouveau vecteur nodal $\bar{\Xi} = \{\bar{\xi}_1 = \xi_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}\}$, tel que $\Xi \subset \bar{\Xi}$. La nouvelle base est construite à partir de (2.10) et (2.11), maintenant, en appliquant le nouveau vecteur nodal $\bar{\Xi}$, Les points de contrôle, $\bar{P} = \{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n\}^T$, sont construits par une combinaison linéaire des points de contrôle originaux, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}^T$, sont obtenue par:

$$\bar{P}_i = \beta_i P_i + (1 - \beta_i) P_{i-1} \dots \dots \dots (2.24)$$

$$\text{Ou } \begin{cases} 1 \\ (t - t_i)/(t_{i+1} - t_i) \\ 0 \end{cases} \quad \text{si } \begin{cases} 1 \leq i \leq k - p \\ k - p + 1 \leq i \leq k \\ k + 1 \leq i \leq n + p + 2 \end{cases} \dots \dots \dots (2.25)$$

Les valeurs nodales déjà présentes dans le vecteur peuvent être répétées à travers cette voie, leur multiplicité est ainsi élevée, mais dans ce cas là, leur continuité serait réduite. Cependant, la continuité des courbes est préservée en choisissant des points de contrôle.

Un exemple d'insertion de nœuds pour un simple élément quadratique (d'ordre 2) est présenté dans la figure (II.24) le vecteur nodal de la courbe d'origine est $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$. les points de contrôle, maillage et fonctions de base de la courbe d'origine sont présentés à gauche. Un nouveau nœud inséré $\bar{\xi} = 0.5$

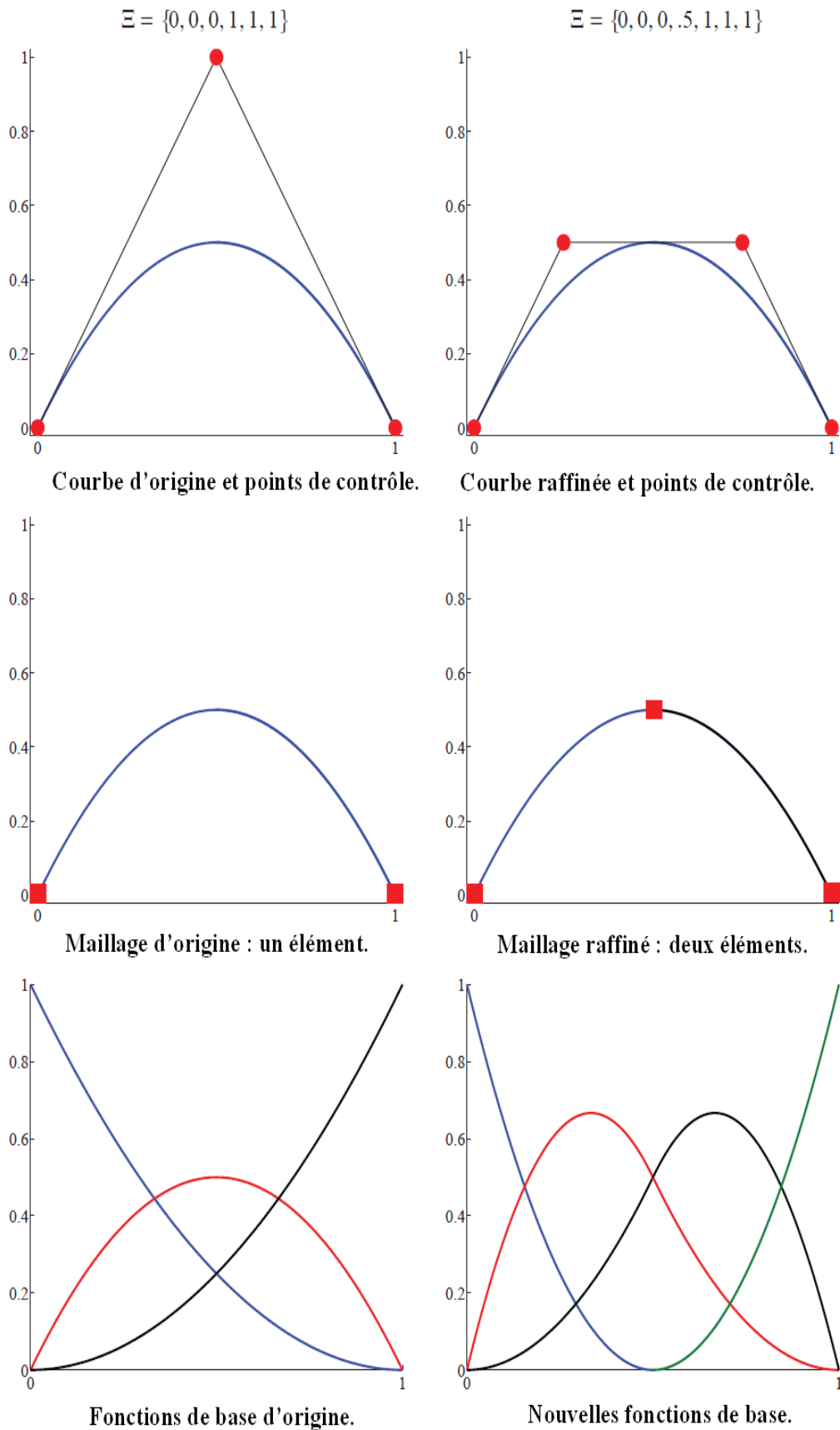
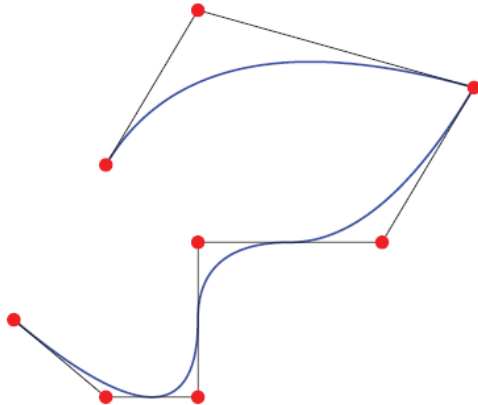


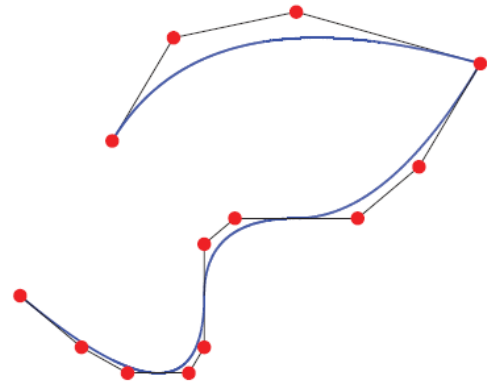
Figure (II.24) le concept de raffinement par insertion de nœud (h-raffinement)

$$\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$$



Courbe et points de contrôle d'origine.

$$\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$$



Courbe et points de contrôle raffinés.

Figure (II-25) Un exemple illustrant le concept de h-raffinement

II.10.2 k-raffinement [4]

k-raffinement : ordre élevée et une continuité élevée.

Si on insert une valeur de nœud $\bar{\xi}$ entre deux nœuds dans la courbe d'ordre m , les fonctions de base auront un nombre de $m-1$ dérivées continues au nœud $\bar{\xi}$, et si nous élevons l'ordre des fonctions de base à q la multiplicité de chaque nœud augmente y compris celui inséré et le nombre de dérivées continues ne changent pas (discontinuité à la $n^{\text{ième}}$ dérivée).

Mais si on commence par une élévation d'ordre des fonctions de base à q , ensuite on insert la valeur du nœud $\bar{\xi}$ cette fois-ci les fonctions de base auront $q-1$ dérivées continues au nœud $\bar{\xi}$, ce procédé est appelé **k-raffinement**.

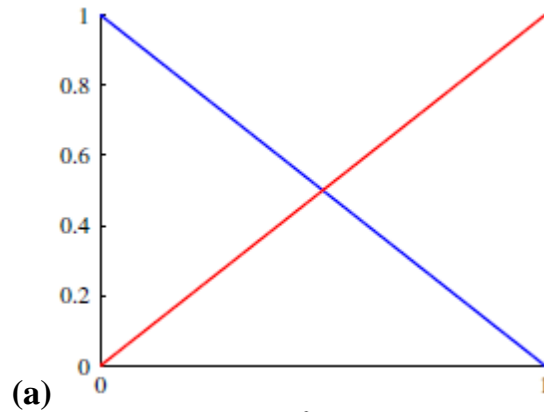
Le concept du k-raffinement est très important parce que l'analyse Iso géométrique est fondamentalement une approche évoluée. Dans le p-raffinement traditionnel il y a une non homogénéité dans la structure dû à la différence des fonctions de base liées à la surface, au sommet, et aux nœuds intérieurs. En outre, la continuité C^0 maintenue pendant le processus de raffinement implique une multiplication dans le nombre de nœuds. Dans le k-raffinement, il y a une homogénéité de la structure et la croissance du nombre de variables de contrôles est limitée.

Un exemple de k-raffinement et une comparaison avec le traditionnel p-raffinement est donné dans la **figure (II-26)**, cet exemple montre que le k-raffinement produit peu de fonctions et d'une continuité plus élevée, ainsi peu de variables de contrôle ou degrés de liberté. En commençant avec $p+1$ fonctions de base, insérant $n-(p+1)$ nœuds (cela afin d'obtenir n fonctions de base), suivi d'une élévation d'ordre jusqu'à r , nous obtenons $(r+1) n-rp$ fonctions de base de continuité C^{p-1} .

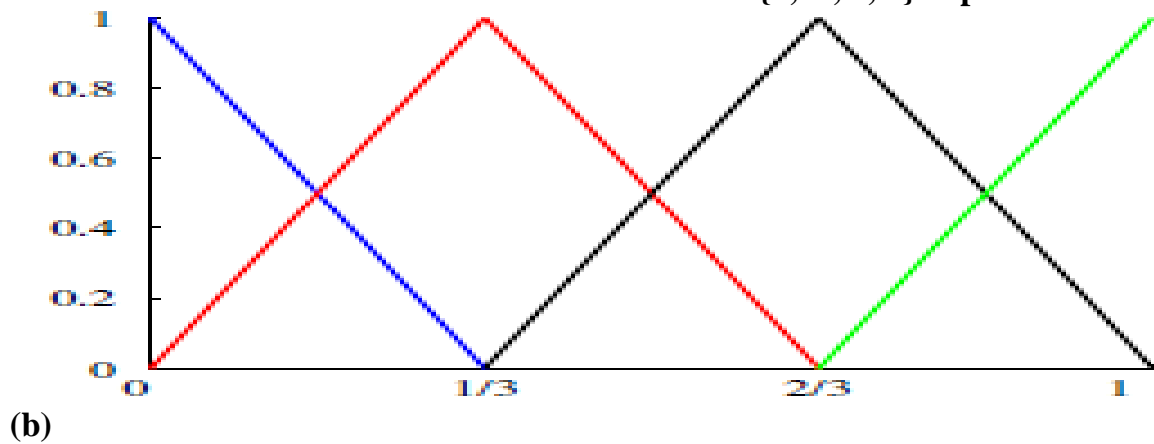
En utilisant le k-raffinement et commençant avec $p+1$ fonctions, appliquant un ordre d'élévation r , suivi d'insertion de $n-(p+1)$ nœuds, nous obtenons $n+r$ fonctions de base

de continuité C^{r+p-1} . Il est clair que le k-raffinement produit moins d'inconnues que le p-raffinement, et cela pour un même maillage et un même ordre d'approximation.

Dans la méthode du k-raffinement pour un maillage fixe, des nœuds sont ajoutés aux valeurs limites, croissant leur multiplicité, sans des nœuds intérieurs ajoutés.



Deux fonctions de bases de C^0 avec $\Xi=\{0, 0, 1, 1\}$ et $p=1$

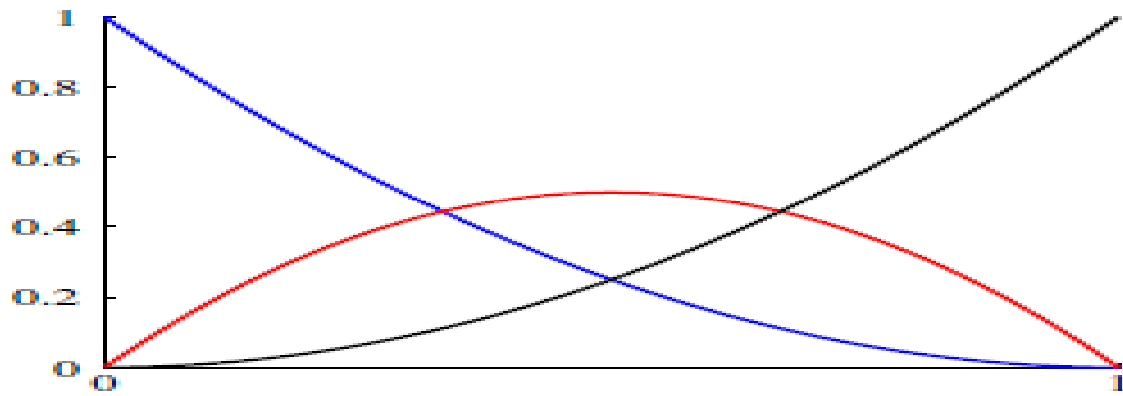


Insertion de nœud $\bar{\xi}=1/3, 2/3$ avec $\Xi=\{0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1\}$ et $p=1$



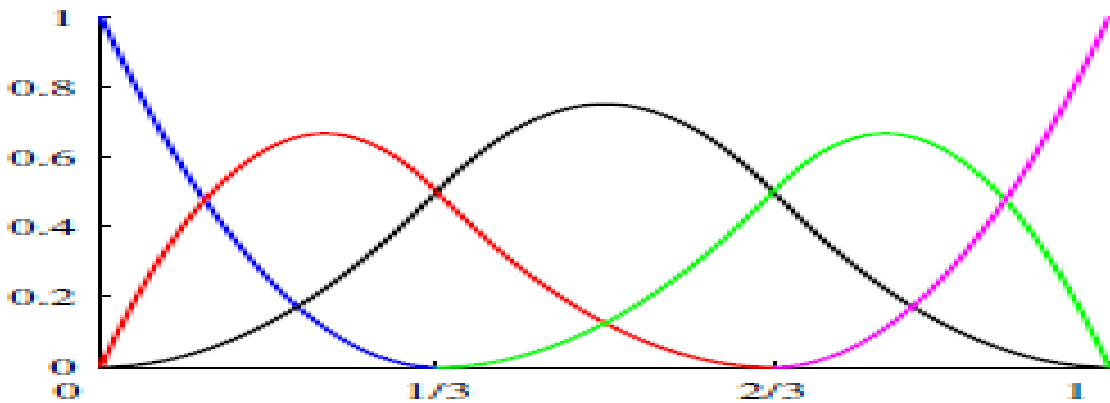
Elévation d'ordre $p=1$ à $p=2$ et $\Xi=\{0, 0, 0, 1/3, 1/3, 2/3, 2/3, 1, 1, 1\}$

Pour p-raffinement : sept fonctions de base quadratique de C^0



Elévation d'ordre $p=1$ à $p=2$ et $\Xi = \{0,0,0,1, 1,1\}$

(c)

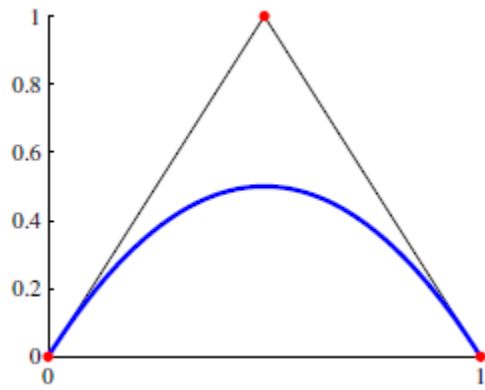


Insertion de nœud $\bar{\xi} = 1/3, 2/3$ avec $\Xi = \{0,0,0,1/3,2/3,1,1,1\}$ et $p=2$
 Pour k-raffinement cinq fonctions de base quadratique de C^1

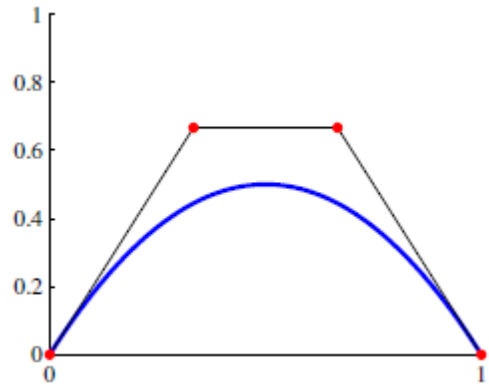
Figure (II-26) Le concept d'élévation k-raffinement

II.10.3 P-raffinement [4]

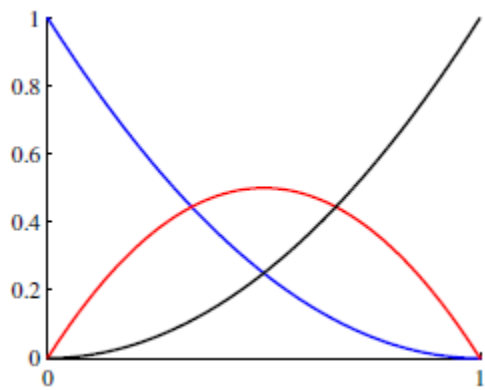
Le p-raffinement est l'élévation d'ordre, l'ordre du polynôme des fonctions de base peut être augmenté sans changer la courbe paramétrique. Noter que chaque valeur unique de nœud dans Ξ doit être répétée afin de préserver des discontinuités dans la *n-ème* dérivée de la courbe. Le nombre de nouveaux points de contrôle dépend des multiplicités des nœuds existants. Comme l'insertion de nœud, l'espace parcouru par la base élevée contient l'espace parcouru par la base originale, ainsi on peut augmenter l'ordre sans changer la géométrie de la courbe B-spline. La figure suivante montre un exemple de p-raffinement.



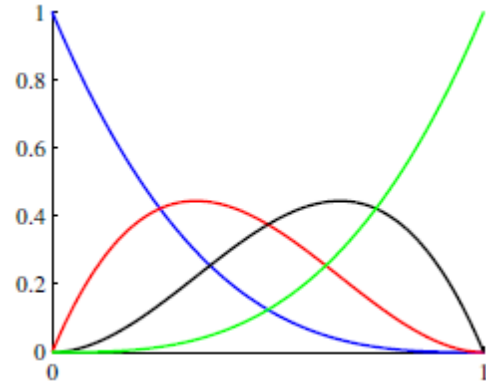
a) courbe originale avec $\Xi=\{0,0,0,1,1,1\}$



b) courbe raffinée avec $\Xi=\{0,0,0,0,1,1,1,1\}$



c) Fonction de base originale



a) nouvelle fonction de base

Figure (II-27) Le concept d'élévation p-raffinement

III.1 Rappel sur la méthode des éléments finis:

III .1.1 Introduction :

La méthode des éléments finis (MEF) ou analyse aux éléments finis (AEF), permet de fragmenter un problème continu complexe en une multitude de cellules simples dont le comportement physique est connu par des lois élémentaires. Elle permet de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles et donc représenter la physique de plusieurs phénomènes [5].

La méthode des éléments finis a connu plusieurs développements depuis son apparition en 1956, plus exactement après les publications de Turner, Clough, Martin et Topp qui ont introduit le concept d'élément fini et le travail de Argyris, et Kesly qui systématisa l'utilisation de la notion d'énergie dans l'analyse des structures.

Dés 1960 cette méthode subit un développement rapide dans plusieurs directions :

- la méthode des éléments finis est reconnue comme un outil général de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non stationnaires, non linéaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines.
- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle.
- La méthode est reformulée, à partir des considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale de résidus pondérés.

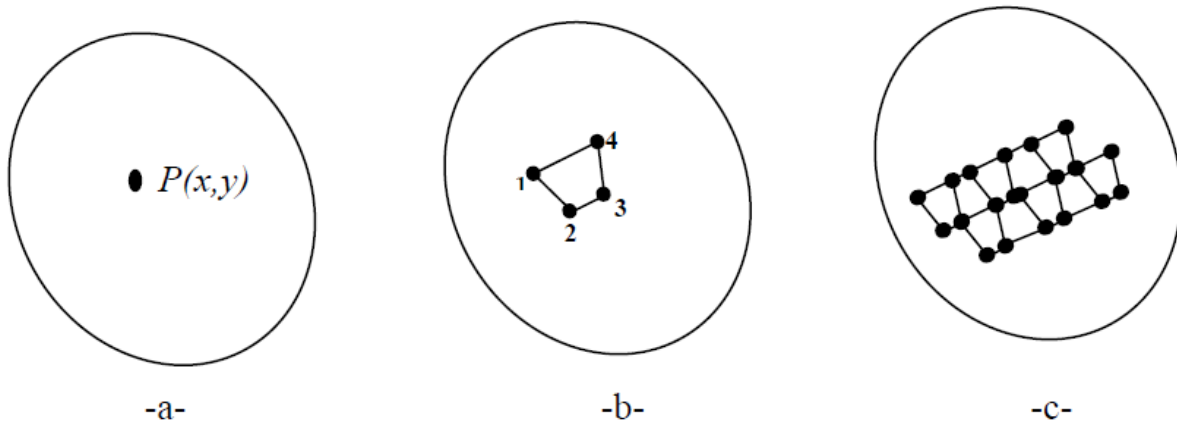
L'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions [6].

III.1.2 Concepts de base de la méthode des éléments finis

La procédure de résolution d'un problème de milieu continu par éléments finis se résume comme suit :

- Le milieu continu est divisé par des lignes ou des surfaces imaginaires à un nombre fini d'éléments.
- Les éléments sont considérés comme interconnectés à un nombre discret de points que l'on nomme les nœuds situés sur leurs frontières et occasionnellement à l'intérieur des éléments.
- Un ensemble de fonctions est choisi afin de définir de façon unique l'évolution du phénomène étudié à l'intérieur de chaque élément et sur ses frontières en fonction de ses paramètres nodaux.

- La résolution du système complet considéré comme un assemblage de ses éléments suit précisément les mêmes étapes que celles suivies pour la résolution des systèmes discrets.



Figure(III.1.1): -a- Domaine matériel en deux dimensions. -b- Un élément quadrilatère dans un domaine matériel. -c- Maillage partiel du domaine matériel.

Soit la figure (III.1.1.a) représentant un domaine matériel avec des propriétés physiques connues. On considère que le domaine est en deux dimensions et qu'un seul champ de variable $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est à déterminer sachant que des équations différentielles connues doivent être vérifiées à chaque point $\mathbf{P}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Sur la figure (III.1.1.b) est représenté un élément quadrilatère entourant un sous-domaine de taille finie de l'ensemble du domaine d'intérêt. Les sommets de l'élément de forme quadrilatère sont numérotés pour indiquer que ces points sont des nœuds. Le nœud est un point spécifique où la valeur du champ de variable doit être calculée explicitement. Les nœuds extérieurs sont situés sur les frontières de l'élément et peuvent être utilisés pour connecter un élément à un élément voisin. Les valeurs du champ de variable aux nœuds sont utilisées afin d'approximer les valeurs du champ à d'autres points non nodaux par interpolation. Pour l'élément quadrilatère, le champ de variable à tout point de l'élément est approximé par la relation suivante :

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})=N_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Phi_1+N_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Phi_2+N_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Phi_3+N_4(\mathbf{x},\mathbf{y}) \Phi_4 \dots\dots\dots(3.1.1)$$

N_1, N_2, N_3, N_4 : Sont les fonctions d'interpolation ou bien dite aussi fonctions de forme. Dans la méthode des éléments finis, les valeurs nodales du champ de variable sont traitées comme étant des constantes inconnues qui sont à déterminer. Les fonctions d'interpolation sont souvent de forme polynomiale des variables indépendantes, devant satisfaire certaines conditions. Il est important de noter que les fonctions d'interpolation sont prédéterminées. Ces dernières décrivent la variation du champ de variable à l'intérieur de l'élément.

Comme le représente la figure (III.1.1.c), chaque élément est connecté au niveau de ses nœuds extérieurs à d'autres éléments. La méthode des éléments finis est formulée telle qu'à chaque connexion nodale, les valeurs du champ de variable sont les mêmes pour chaque élément connecté au nœud. Donc la continuité du champ de variable est assurée aux nœuds. De ce fait, la méthode des éléments finis assure la continuité entre les éléments, ce qui évite l'obtention de résultats physiquement inacceptables. Par contre, la continuité du gradient du champ de variable n'est généralement pas vérifiée entre les éléments. Cependant, la magnitude de cette discontinuité des dérivées peut être utilisée afin d'augmenter la précision et d'assurer la stabilité de la méthode quand on augmente le nombre des éléments du maillage [7].

III .1.3 Procédure générale d'une analyse par éléments finis

Certaines étapes sont les mêmes pour tous les problèmes physiques abordés par la méthode des éléments finis. Ces étapes sont résumées comme suit :

1) Post préprocesseur

Dans cette phase on définit :

- La géométrie du domaine d'étude.
- Le type d'élément à utiliser.
- Les propriétés physiques du domaine.
- Le maillage du domaine de calcul.
- Les conditions aux limites.
- Les chargements extérieurs.

2) Résolution du problème

Durant cette phase, les codes de calcul basés sur la méthode des éléments finis assemblent les équations algébriques gouvernant le problème en question en une forme matricielle et calcule les valeurs inconnues du champ des variables dans le domaine d'étude.

3) Post processeur

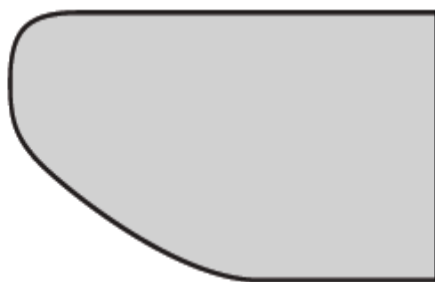
Dans cette phase, on procède à l'analyse et à l'évaluation des résultats trouvés. Une large gamme de logiciels spécialisés est disponible afin de sortir, d'imprimer et de dessiner des résultats sélectionnés. Ce qui permet de donner un jugement sur la qualité des résultats trouvés.

III.1.4 Discrétisation du milieu :

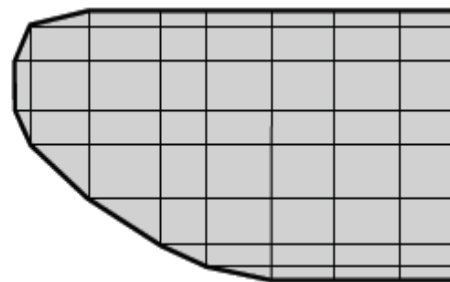
III.1.4.1 Discrétisation géométrique :

La discrétisation géométrique consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines.

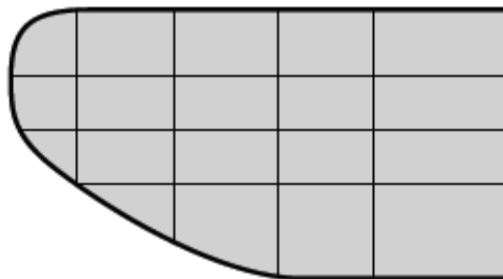
Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, il faut la minimiser en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la **figure (III.1.2)** Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution [6].



a) pièce à étudier et présentant des congés de raccordement



b) modifier la taille des éléments et raffiner au niveau des courbures



c) utiliser des éléments à frontière courbe

Figure (III.1.2) Erreur de discrétisation géométrique

III.1.5.1 Approximation nodale :

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation \mathbf{u}^* du champ des variables \mathbf{u} par sous-domaines. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré. On parle plus simplement d'approximation nodale.

III.1.5.2 Définition de l'approximation nodale :

Les éléments finis utilisent une approximation nodale par sous-domaine ne faisant intervenir que des variables nodales du domaine élémentaire \mathbf{D}_e .

$$\forall M \in D_e \quad \mathbf{u}^*(M) = [N(M)] \mathbf{U}_n \dots\dots\dots(3.1.2)$$

\mathbf{u}^* valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément et $[N]$, la matrice ligne des fonctions de forme de l'élément \mathbf{U}_n variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

III.1.5.3 Construction de l'approximation nodale

L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale

$$\forall M, \mathbf{u}^*_{(M)} = \Phi_{(M)} \cdot \mathbf{a} \dots\dots\dots(3.1.3)$$

$\Phi_{(M)}$ est une base de fonctions connues indépendantes (en général une base polynomiale) et \mathbf{a} , est le vecteur des paramètres de l'approximation aussi dit paramètres généralisés, l'approximation \mathbf{u}^* est identifiée à la valeur du champ de variables \mathbf{u} .

$$\{\mathbf{U}_n\} = \mathbf{u}^*_{(M)} = \Phi_{(M)} \cdot \{\mathbf{a}\} \dots\dots\dots(3.1.4)$$

Inversons ces relations pour exprimer les paramètres généralisés $\{\mathbf{a}\}$ en fonction des variables nodales \mathbf{U}_n .

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{U}_n\} \text{ avec } [\mathbf{T}] = \left[\Phi(\mathbf{M}_i) \right]^{-1} \dots\dots\dots(3.1.5)$$

En reportant ce résultat dans l'approximation, nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation.

$$\langle \mathbf{N}_{(M)} \rangle = \langle \Phi_{(M)} \rangle [\mathbf{T}] \dots\dots\dots(3.1.6)$$

Qui satisfont la propriété suivante $\forall M_i \quad N_j(M_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Remarque :

- Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple (frontières rectilignes, bords de longueur unité). Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique [8].

Les éléments de référence sont construits sur une base polynomiale de degrés **1** ou **2**. Le nombre de variables nodales à identifier étant égal à la dimension de la base.

Bases polynomiales complètes:

- 1D: linéaire [1, x] → 2 variables
- Quadratique [1, x, x²] → 3 variables
- 2D: linéaire [1, x, y] → 3 variables
- Quadratique [1, x, y, x², xy, y²] → 6 variables
- 3D: linéaire [1, x, y, z] → 4 variables
- Quadratique [1, x, y, z, x², xy, y², xz, z², yz] → 10 variables

Bases polynomiales incomplètes:

- 2D: "bi - linéaire" [1, x, y, xy] → 4 variables
- 3D: "tri - linéaire" [1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz] → 8 variables

Deux grandes familles d'éléments sont présentées

1) Les éléments de type Lagrange

On augmente le nombre de nœuds en conservant une seule variable nodale de champ.

2) Les éléments de type Hermite

Les variables nodales concernent le champ et ses dérivées

III.1.5.4 Les éléments de type Lagrange et de type Hermite

1) **Éléments à une dimension**

La base des fonctions linéaires illustrée sur la figure (III.1.3.a) s'écrit avec $s \in [0, 1]$:

$$N1(s) = L1 = 1 - s, N2(s) = L2 = s \dots\dots\dots (3.1.7)$$

Cette base est utilisée pour les éléments barres et génère une discontinuité au niveau des champs de déformations et de contraintes au passage d'un élément à son voisin. Une base un peu plus riche, constituée de polynômes d'ordre 2 peu aussi être utilisée :

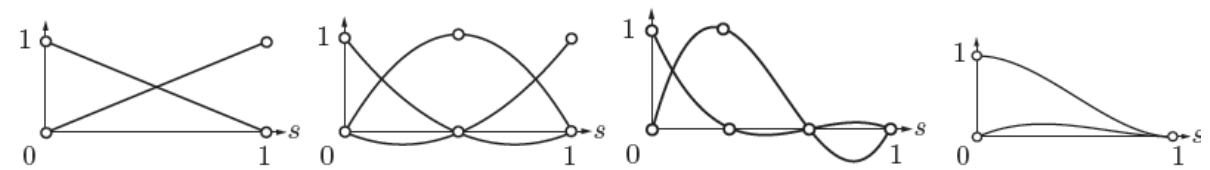
$$N1(s) = L1(2L1 - 1), N2(s) = 4L1L2, N3(s) = L2(2L2 - 1) \dots\dots\dots (3.1.8)$$

Ces fonctions de forme sont schématisées sur la figure(III.1.3.b). Le passage à l'ordre supérieur donne la base de la figure (III.1.3.c) où seules $N1$ et $N2$ sont illustrées, les deux autres fonctions $N3$ et $N4$ sont respectivement les symétriques de $N1$ et $N2$ par rapport à $s = 1/2$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(s) = L_1/2(3L_1-1)(3L_1-2) \\ N_2(s) = 9/2(L_1L_2(3L_1-1)) \\ N_3(s) = 9/2(L_1L_2(3L_2-1)) \dots\dots\dots (3.1.9) \\ N_4(s) = L_2/2(3L_2-1)(3L_2-2) \end{array} \right.$$

L'élément associé est construit avec deux nœuds et une variable par nœud. Il est possible, avec la même base polynomiale, de construire un élément à deux nœuds ayant deux variables par nœud, c'est un élément de type **Hermite** illustré sur la figure (III.1.3.d) pour $N1$ et $N2$: de la même manière que précédemment, les fonctions $N3$ et $N4$ se trouvent par symétrie. Si nous utilisons comme variables nodales le champ et sa dérivée première, nous obtenons les fonctions d'interpolation de l'élément poutre [6].

$$\begin{array}{ll} N1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 & N2(s) = s - 2s^2 + s^3 \\ N3(s) = 3s^2 - 2s^3 & N4(s) = -s^2 + s^3 \end{array}$$



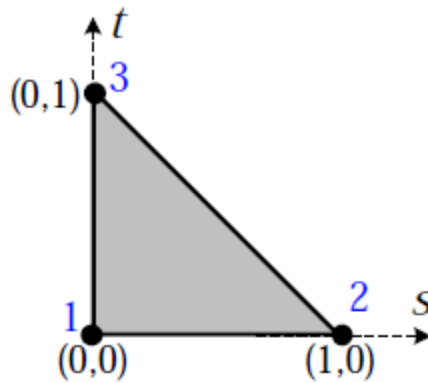
(a) élément à deux nœuds : base linéaire $(1, s)$ (b) élément à trois nœuds : base quadratique $(1, s, s^2)$ (c) élément à quatre nœuds : base cubique $(1, s, s^2, s^3)$ (d) élément d'Hermite : deux nœuds et deux inconnues par nœud

Figure (III.1.3) Fonctions de forme à une dimension

III.1.5.5 Construction des fonctions d'interpolation d'un élément à deux dimensions

III.1.5.5.1 Elément triangulaires à deux dimensions

- **Elément triangulaire** : C'est un triangle rectangle de coté unité. Les variables de référence sont $s \in [0, 1]$ et $t \in [0, 1-s]$



Figure(III.1.4) Elément de référence « T3 »

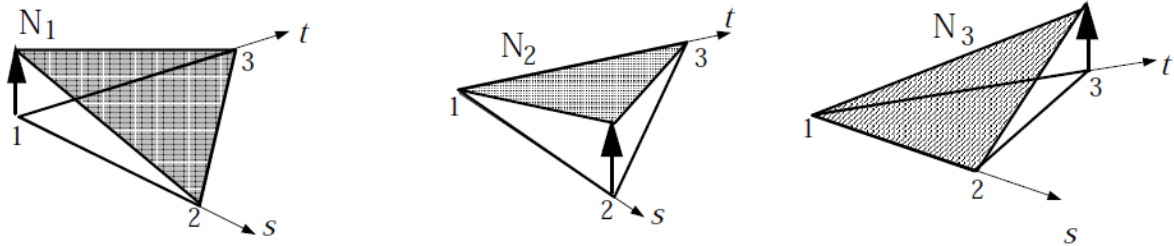
- **Approximation linéaire**

Approximation $(1, s, t) \rightarrow$ élément à 3 nœuds, triangle de type "T3".
Les fonctions d'interpolation sont :

$$N_1 = 1 - s - t$$

$$N_2 = s$$

$$N_3 = t$$



Figure(III.1.5) Fonctions d'interpolation linéaires du triangle

- **Approximation quadratique** : elle utilise la base $(1, s, t, s^2, st, t^2)$. L'élément de référence est un triangle rectangle à six nœuds de type « T6 »

Posons $L_1 = 1 - s - t$, $L_2 = s$ et $L_3 = t$. Pour :

1) les trois nœuds sommet $i = 1, 2, 3$: les fonctions de forme s'écrivent :

$$N_i = L_i(2L_i - 1)$$

2) les trois nœuds d'interface $i = 1, 2, 3$:

$$N_{i+3} = 4L_j L_k \rightarrow \text{pour } j \neq i \quad k \neq i, j$$

III.1.5.5.2 Élément rectangulaire à deux dimensions

• **Éléments rectangulaires plans**

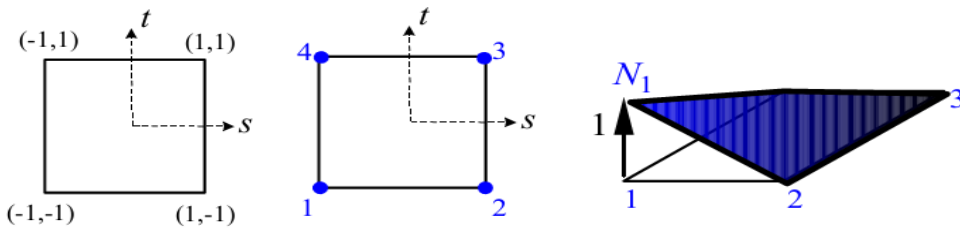
L'élément de référence est un carré à quatre nœuds(Q4)

Les variables de référence sont $(s, t) \in [-1, 1]$ [8].

• **L'approximation bi-linéaire:** Est déduite de la base polynomiale $(1, s, t, st)$

Les fonctions d'interpolation sont :

$$\begin{aligned}
 N1 &= 1/4*(1 - s)*(1 - t) \\
 N2 &= 1/4*(1 + s)*(1 - t) \\
 N3 &= 1/4*(1 + s)*(1 + t) \dots\dots\dots (3.1.10) \\
 N4 &= 1/4*(1 - s)*(1 + t)
 \end{aligned}$$



Figure(III.1.6): Fonction d'interpolation N_1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation

Et les premières dérivées $\frac{dN_i}{ds}; \frac{dN_i}{dt}$ sont représentés dans le tableau ci-dessous:

$\frac{dN_i}{ds}$	$\frac{dN_i}{dt}$
$\frac{dN1}{ds} = -1/4*(1 - t);$	$\frac{dN1}{dt} = -1/4*(1-s);$
$\frac{dN2}{ds} = 1/4*(1 - t);$	$\frac{dN2}{dt} = -1/4*(1+s);$
$\frac{dN3}{ds} = 1/4*(1 + t);$	$\frac{dN3}{dt} = 1/4*(1+s);$
$\frac{dN4}{ds} = -1/4 * (1 + t);$	$\frac{dN4}{dt} = 1/4*(1-s);$

Tableau (III.1) : Dérivées des fonctions de forme « Q4 »

• **Approximation quadratique « Q8 » :** $(1, s, t, st, s^2, t^2, s^2t, t^2s)$

Pour éviter d'avoir des nœuds internes, on utilise des bases polynomiales incomplètes mais symétriques contenant tous les monômes d'un même degré.

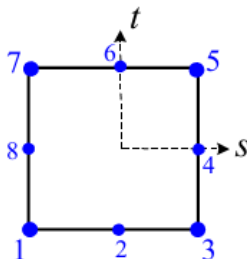


Figure (III.1.7): Élément de Lagrange biquadratique de type « Q8 »

Nous avons donné les fonctions d'interpolation des éléments les plus simples pour lesquels il est possible de faire un certain nombre de calculs analytiquement

III.1.5.6 Quantités élémentaires :

Afin de présenter la démarche générale utilisée pour construire les formes matricielles et vectorielles sur chaque élément, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du Principe des Travaux Virtuels associée à un problème de mécanique des structures. Cette forme intégrale est de même type que celles pouvant être déduites des méthodes variationnelles et la généralisation à des problèmes de physique est donc simple [6].

III.1.5.6.1 Matrices masse et raideur

La forme intégrale du PTV est [6] :

$$\forall \delta \vec{u}, \int_D \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, dV = - \int_D \bar{\sigma} : \bar{\delta \epsilon} \, dV + \int_D \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_D \vec{T} \delta \vec{u} \, dS \dots\dots (3.1.11)$$

Sur chaque élément nous utilisons l'approximation nodale pour exprimer le champ des déplacements \vec{u} et le champ des déplacements virtuels $\delta \vec{u}$. Ainsi le produit scalaire s'écrit maintenant :

Pour chaque élément $\forall M \in D_e$

L'approximation nodale des déplacements :

$$\{\vec{u}(M)\} = [N(M)]\{Ue\} \dots\dots\dots (3.1.12)$$

Le champ des déformations

$$\{\epsilon(M)\} = [B(M)]\{Ue\} \text{ avec } [B(M)] = [L][N(M)] \dots\dots\dots (3.1.13)$$

[B] : matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation

Le champ des contraintes

$$\{\sigma(M)\} = [D(M)]\{\epsilon(M)\} \dots\dots\dots (3.1.14)$$

D'où le premier terme :

$$\int_{D_e} \rho \vec{u} \cdot \delta \vec{u} \, dV = \{\delta Ue\}^T [Me]\{Ue\} \dots\dots\dots (3.1.15)$$

Avec [Me] = $\int_{D_e} [N(M)]^T \rho [N(M)] \, dV$ matrice de masse élémentaire.

Le second terme :

$$\int_D \bar{\sigma} : \bar{\delta \epsilon} \, dV = \{\delta Ue\}^T [Ke]\{Ue\} \dots\dots\dots (3.1.16)$$

$$[Ke] = \int_{D_e} [B(M)]^T [D][B(M)] \, dV \text{ matrice de raideur élémentaire}$$

Le travail virtuel des champs de force donnés sur l'élément :

$$\delta Tde = \int_{D_e} \vec{f} \cdot \delta \vec{u} \, dV + \int_{D_e} \vec{T} \delta \vec{u} \, dS \dots\dots\dots (3.1.17)$$

$$\delta T_{de} = \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\} \dots\dots\dots (3.1.18)$$

Avec $\{F_{de}\} = \int_{D_e} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{f}\} dV + \int_{D_e} \langle N(M) \rangle^T \{\vec{Td}\} dS \dots\dots\dots (3.1.19)$

En pratique les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré. On y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et éventuellement pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

Comme nous le verrons lors de l'assemblage des équations, les nœuds internes non chargés sont des systèmes mécaniques en équilibre, ce qui entraîne que le torseur des actions mécaniques de tous les efforts élémentaires des éléments connectés à un même nœud est nul. Reportons dans la forme intégrale les résultats obtenus pour chaque élément, nous obtenons une équation matricielle de la forme [9] :

$$\text{Le PTV : } \forall D_e \quad [Me]\{\ddot{u}_n\} + [Ke]\{u_n\} = \{F_{de}\} + \{F_{ie}\} \dots\dots\dots (3.1.20)$$

III.1.5.6.2 Techniques de calcul au niveau élémentaire

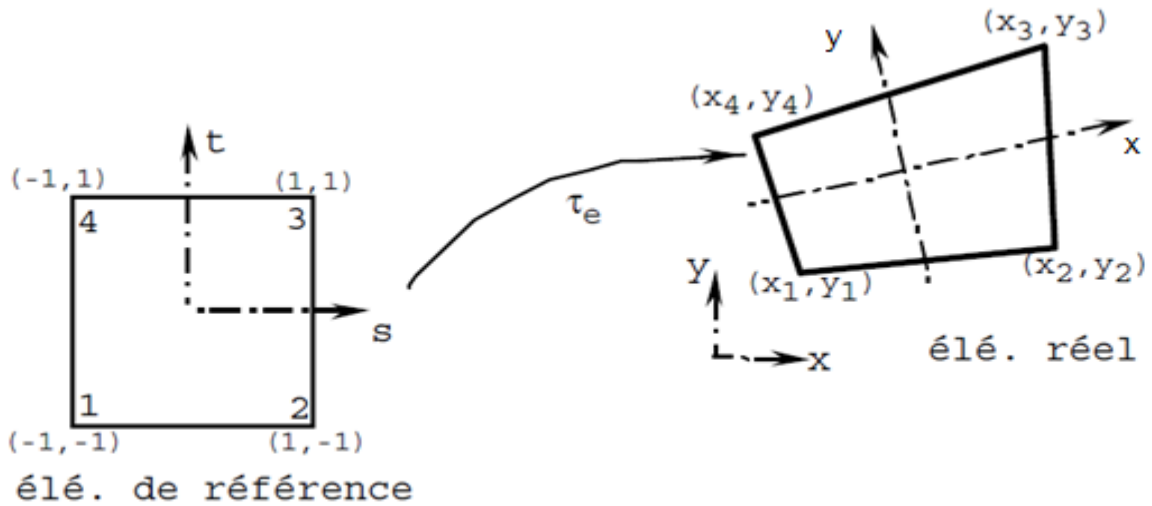
Ce paragraphe plus technique présente quelques aspects du calcul numérique des formes intégrales présentées précédemment. Ces calculs sont basés sur l'intégration numérique sur des éléments de référence et l'utilisation de la transformation géométrique pour définir les éléments réels à partir d'éléments de référence.

Transformation géométrique

Tout élément réel peut être défini comme l'image par une transformation géométrique d'un élément parent dit de référence pour lequel les fonctions d'interpolation sont connues. A l'image de la figure (III.1.7) la transformation géométrique définit les coordonnées (x, y) de tout point de l'élément réel à partir des coordonnées (s, t) du point correspondant de l'élément de référence soit :

$$\begin{matrix} D_{\text{Référence}} & \xrightarrow{-\tau_e} & D_{\text{Réel}} \\ (s, t) & & (x, y) \end{matrix}$$

Un même élément de référence permettra de générer une classe d'éléments réels, à chaque élément réel correspond une transformation géométrique différente, cette transformation devant être une bijection. Chaque transformation géométrique dépend des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel. Pour les éléments les plus simples, la transformation est identique pour chaque coordonnée, et utilise une base de fonctions polynomiales [8].



Figure(III.1.8) : Transformation géométrique linéaire d'un carré

Exemples d'éléments de référence classiques

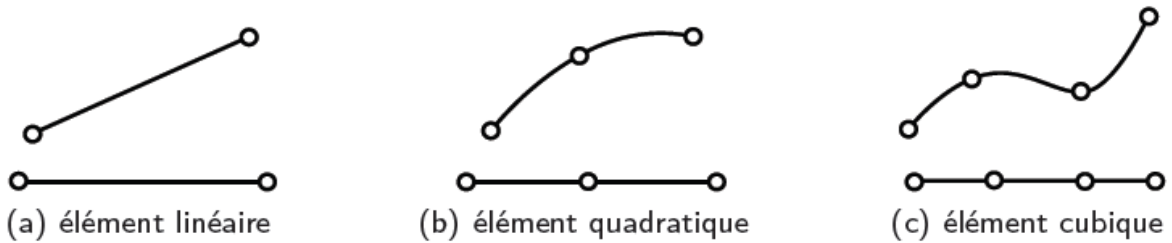


Figure (III.1.9) - Transformations géométriques d'éléments à une dimension avec en haut, l'élément réel et en bas, l'élément référence

Éléments à deux dimensions

Pour des éléments à deux dimensions les transformations géométriques conduisent respectivement à des frontières linéaires, quadratiques ou cubiques. La figure (III.1.8) donne la position des nœuds pour les classes d'éléments triangulaires et quadrangulaires

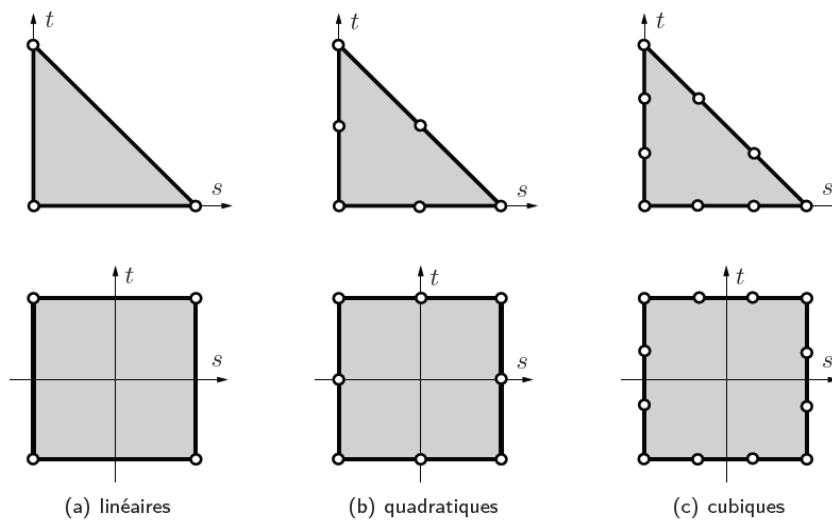


Figure (III.1.10): Transformations géométriques d'éléments à deux dimensions

III.1.5.6.3 Matrice jacobienne - transformation des opérateurs de dérivation

Les expressions des matrices élémentaires font apparaître des opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation. Or, en pratique, nous connaissons les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées de l'élément de référence (s, t, u). Il faut donc exprimer les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport aux coordonnées réelles (x, y, z). Posons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta s} & \frac{\delta y}{\delta s} & \frac{\delta z}{\delta s} \\ \frac{\delta x}{\delta t} & \frac{\delta y}{\delta t} & \frac{\delta z}{\delta t} \\ \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.1.21)$$

[J] est la matrice jacobienne

Pour chaque élément, cette matrice s'exprime en fonction des dérivées des fonctions de la transformation géométrique et des coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel.

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.1.22)$$

III.1.5.6.4 Calcul numérique d'une intégrale

Le jacobien de la transformation géométrique permet de passer de l'intégration d'une fonction *f* définie sur l'élément réel à l'intégration sur l'élément de référence [8] :

$$\int_{D_e} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D_{ref}} f(s, t, u) |\det[\mathbf{J}]| ds dt du \dots\dots\dots (3.1.23)$$

III.1.5.6.5 Calcul des matrices élémentaire

Nous avons trois calculs à effectuer au niveau élémentaire (calcul des structures)

Matrice masse élémentaire: $[\mathbf{M}_e] = \int_{D_{ref}} \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon}) |\det[\mathbf{J}]| d\mathbf{v}_{ref} \dots\dots\dots (3.1.24)$

Matrice raideur élémentaire: $[\mathbf{K}_e] = \int_{D_{ref}} \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon}) |\det[\mathbf{J}]| d\mathbf{v}_{ref} \dots\dots\dots (3.1.25)$

Force généralisée : $\{\mathbf{F}_{de}\} = \int_{D_{ref}} \mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon})^T \vec{f}_d |\det[\mathbf{J}]| d\mathbf{v}_{ref} \dots\dots\dots (3.1.26)$

III.1.5.6.6 Assemblage et conditions aux limites :

Les règles d'assemblage sont définies par la relation : $D \cong \sum_{e=1}^{Ne} D_e$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [M_e] \{\ddot{U}_e\} = \{\delta U\}^T [M] \{\ddot{U}\} \dots\dots\dots(3.1.27)$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T [K_e] \{U_e\} = \{\delta U\}^T [K] \{U\} \dots\dots\dots(3.1.28)$$

$$\sum_{e=1}^{Ne} \{\delta U_e\}^T \{F_{de}\} = \{\delta U\}^T \{F_d\} \dots\dots\dots(3.1.29)$$

Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F_d\} + \{F_i\} \dots\dots\dots(3.1.30)$$

A cette étape on peut appliquer les conditions aux limites, en supprimant ligne colonne sur la matrice globale de rigidité et de masse, la ou les degrés de liberté son supprimés et même sur le vecteur force, on supprime les lignes concerné et on ajoute des forces extérieures si il y a lieu.

Cas statique :

$$[K] \{U\} = \{F\} \dots\dots\dots(3.1.31)$$

- {F}:forces généralisées
- [K]:matrice de rigidité global
- {U}:vecteur déplacement inconnu

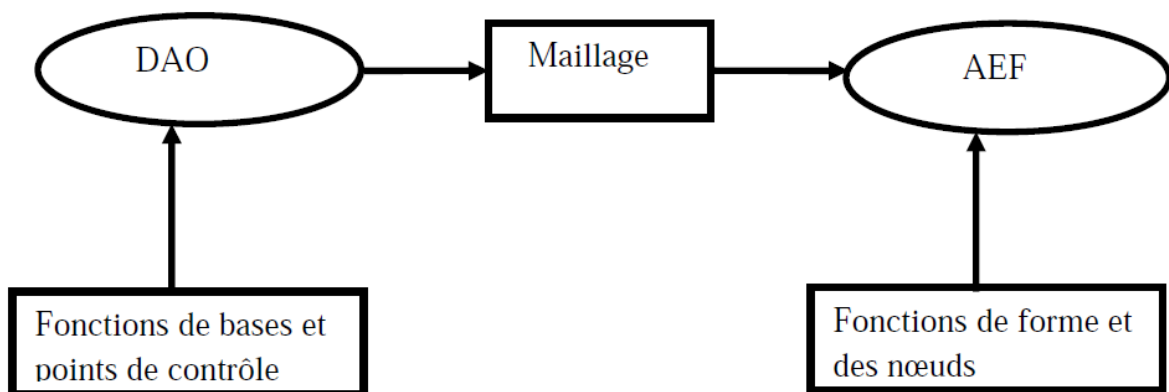
III.2 Modélisation éléments finis iso-géométriques

L'analyse et l'optimisation de sensibilité de conception de forme complexe est développée en utilisant la méthode d'analyse iso-géométrique avec des fonctions de base de NURBS. Dans la méthode d'analyse iso-géométrique, une fonction de base NURBS est adoptée directement dans la géométrie à réaliser, qui permet la description exacte d'un modèle géométrique.

La conception de forme, en utilisant les éléments finis classiques a éprouvé certains problèmes, c'est-à-dire, la frontière des éléments finis devrait être paramétrées pour la variation sans heurt en utilisant un modèle géométrique séparé, tel qu'un système réalisé par le DAO.

En outre, le modèle de conception devrait être transformé, pour exprimer la grande perturbation d'un domaine par éléments finis. Dans l'approche iso-géométrique, la fonction de base NURBS qui est employée dans la représentation du modèle géométrique du système, est directement employée dans l'analyse de réponse du système, et la frontière de conception est exprimée par la même fonction de NURBS

L'analyse iso géométrique, introduite récemment par T.J.R.Hughes, permet de faire le lien entre le DAO (Dessin Assistée par Ordinateur) et AEF. Le nom de l'analyse iso géométrique signifie que les mêmes fonctions de base peuvent être employées dans le DAO et l'AEF. La figure (III.2.1) montre la relation entre DAO et AEF dans l'analyse iso géométrique [10].



Figure(III.2.1) Relation entre DAO et AEF dans l'analyse aux éléments finis classique

III.2.1 Analyse iso-géométrique

III.2.2 Définition

L'analyse iso géométrique est une méthode utilisant les fonctions de base NURBS, qui servaient habituellement comme modèle de représentation géométrique en dessin assisté par ordinateur (DAO). Le principal avantage des NURBS par rapport aux fonctions de forme polynomiales utilisées en MEF est que ces dernières ne font qu'approcher la géométrie d'origine, alors que les NURBS décrivent la géométrie exacte du modèle ce qui donne des résultats beaucoup plus précis, Pour une meilleure qualité de solution, des techniques d'amélioration des résultats qui sont h-raffinement, et P-raffinement et k-raffinement, des exemples analytiques et leurs formulations détaillées sont donnés pour le cas bidimensionnel [4].

III.2.3 Présentation de la méthode

Dans analyse isogéométrique, la géométrie du modèle $C(\xi)$ est exprimée par une combinaison linéaire de fonctions de base NURBS R_i et de points de contrôles P_i , tel que la fonction suivante:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi)P_i \dots\dots\dots(3.2.1)$$

$$\text{Avec } R_{i,p} = \frac{N_{i,p}w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \dots\dots\dots(3.2.2)$$

$R_{i,p}$: Les fonctions de base NURBS

$N_{i,p}$: fonctions de base B-Spline

W_i : Les poids associés aux pôles

p : est le degré de la fonction.

Pour une géométrie bidimensionnelle on a besoin deux fonctions de bases NURBS, tel que :

$$C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)p_{i,j} \dots\dots\dots(3.2.3)$$

$N_{i,p}, M_{j,q}$: Les fonctions de base NURBS.

III.2.4 Principe des éléments finis iso géométrique :

Les éléments finis iso géométrique sont basés principalement sur les fonctions NURBS (non uniforme rational b-spline) pour représenter la géométrie et comme fonctions de forme. Un des avantages principaux des ces fonctions est leur continuité qui est supérieure à celle utilisées dans les éléments finis classiques.

La procédure du calcul des éléments finis isogométriques est la même que dans les éléments finis classiques la différence est dans la façon de représenter la géométrie.

- Représentation de la géométrie par des fonctions NURBS.
- L'espace inter-nodal subdivise le domaine en éléments.
- calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- assemblage des matrices élémentaires.
- prise en compte des conditions aux limites.
- résolution du système d'équations.

III.2.5. subdivision de domaine en éléments :

Le maillage par les NURBS est défini par le produit des vecteurs nœuds. Pour une structure unidimensionnelle par le vecteur nodal Ξ , et par le produit vectoriel $\Xi \times H$. pour une structure bidimensionnelle, et l'espace inter-nodal définit le domaine élémentaire.

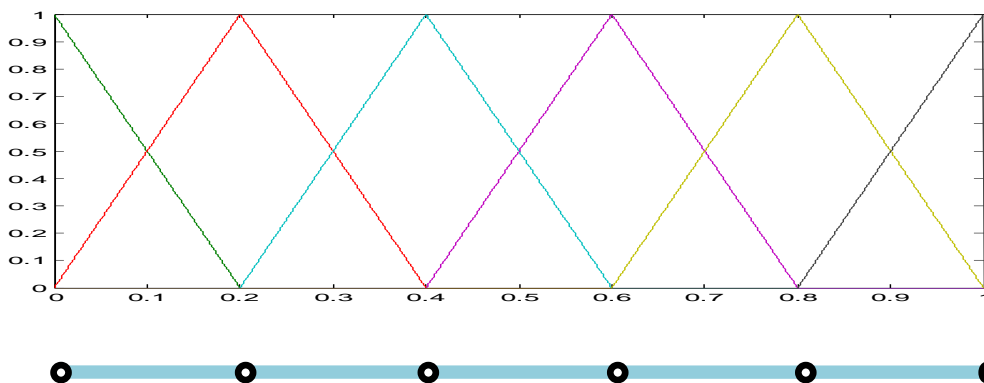
III.2.5.1. Cas unidimensionnel :

Une poutre de longueur L représentée par une simple droite, la fonction NURBS utilisé pour générer le maillage est d'ordre 1 et de vecteur nœud :

$$\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$$

L'espace entre les nœuds de vecteur Ξ représente un élément de la poutre

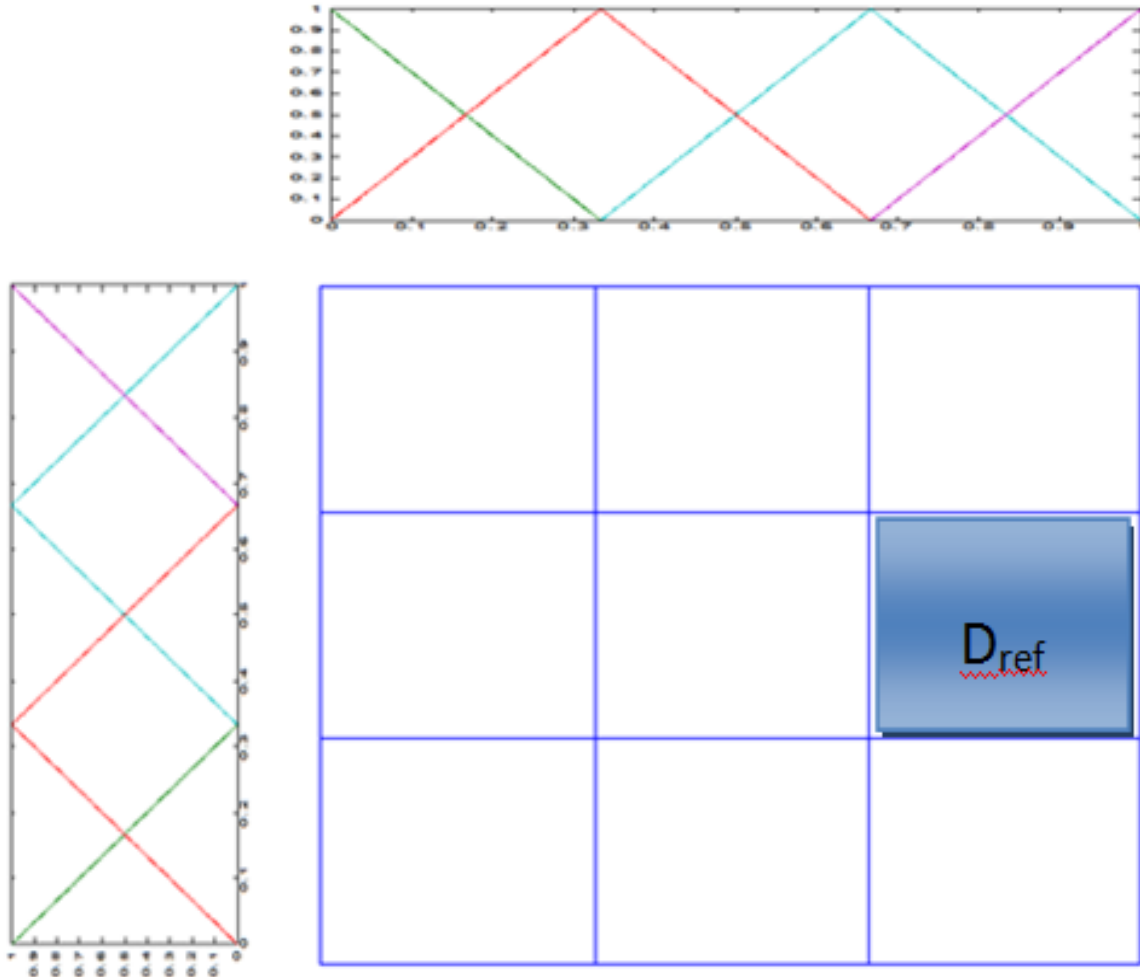
La **figure (III.2.2)** représente la poutre subdivisée en en cinq éléments et la fonction de base NURBS associée :



Figure(III.2.2) : barre unidimensionnelle subdivisé en sous domaines et la fonction de base associée

III.2.5.2 Cas bidimensionnel :

Le maillage sera défini par deux fonctions de base NURBS la figure (III.2.3) représente un maillage 2D par des fonction NURBS d'ordre 1 et de vecteurs nœuds ; $\Xi=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$ et $H=[0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$.



Figure(III.2.3) : Maillages en deux dimensions et ces fonctions de base associée

III.2.5.3. Calcul des matrices élémentaires :

III.2.5.3.1. Matrice de raideur élémentaire:

Dans l'étape précédente on a déduit à partir du principe des travaux virtuels que la matrice de raideur élémentaire est de la forme :

$$K_e = \int_{D_{ref}} B(\varepsilon, n)^T D B(\varepsilon, n) |\det[J]| dv_{ref} \dots\dots\dots (3.2.4)$$

D : la matrice caractéristique au comportement élastique du matériau.

Pour le cas d'élasticité plane que nous utilisons dans notre travail

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.2.5)$$

B: définissant l'opérateur des déformations linéaires dont la notation matricielle est donnée par :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{dR_{1,1}}{dx} & 0 & \frac{dR_{2,1}}{dx} & 0 & \dots & \frac{dR_{n,m}}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dR_{1,1}}{dy} & 0 & \frac{dR_{2,1}}{dy} & \dots & 0 & \frac{dR_{n,m}}{dy} \\ \frac{dR_{1,1}}{dy} & \frac{dR_{1,1}}{dx} & \frac{dR_{2,1}}{dy} & \frac{dR_{2,1}}{dx} & \dots & \frac{dR_{n,m}}{dy} & \frac{dR_{n,m}}{dx} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.2.6)$$

La transformation entre le système de coordonnées physiques et les coordonnées paramétriques des NURBS est donnée par la matrice Jacobienne qui est définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta}{\delta n} \\ \frac{\delta}{\delta u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \epsilon} & \frac{\delta y}{\delta \epsilon} & \frac{\delta z}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta x}{\delta n} & \frac{\delta y}{\delta n} & \frac{\delta z}{\delta n} \\ \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta u} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta z} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.2.7)$$

[J] est la matrice jacobienne de la transformation.

Pour le cas de deux dimensions :

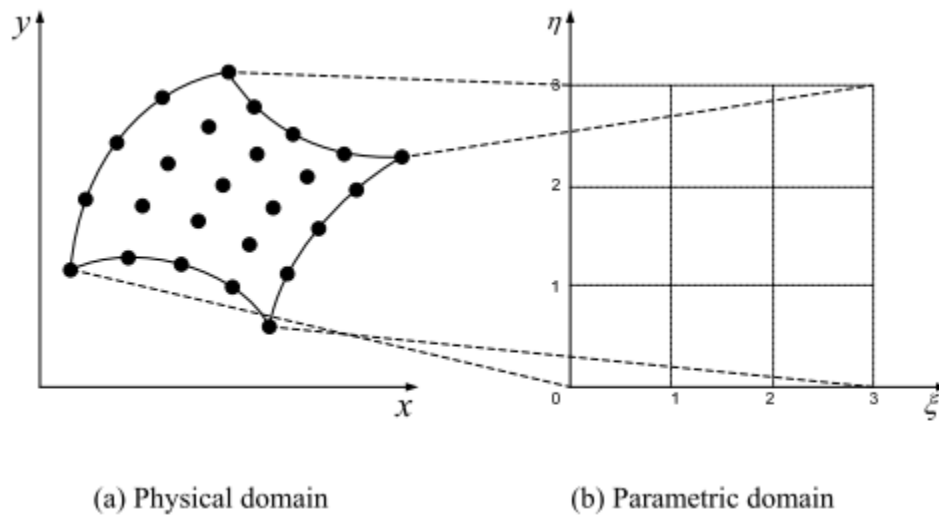
$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta}{\delta n} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta x}{\delta \epsilon} & \frac{\delta y}{\delta \epsilon} \\ \frac{\delta x}{\delta n} & \frac{\delta y}{\delta n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.2.8)$$

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta s} \\ \frac{\delta}{\delta t} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.2.9)$$

III.2.5.3.2 Analyse isogéométrique en utilisant les NURBS (AIG)

La méthode d'analyse iso géométrique comme la méthode des éléments finis, utilise le concept iso paramétrique. Dans l'analyse iso géométrique, c'est tous le domaine physique qui est transformé en un domaine paramétrique, illustré par la figure(III.2.4) [11].



Figure(III.2.4) Transformation d'un maillage dans le domaine physique au domaine paramétrique AIG

Remarque :

Vu la complexité analytique des fonctions de base NURBS, une intégration numérique s'impose, pour cela plusieurs méthodes peuvent être employées, telles que la quadrature de Simpson, la méthode du point milieu, la méthode des trapèzes, et la quadrature de gauss, cette dernière sera employée dans l'application accompagnant ce présent mémoire.

III.2.5.3.3. assemblage et conditions aux limites :

Cette étape consiste à assembler dans une matrice globale les termes des matrices élémentaires, comme nous l'avons expliqué précédemment, nous obtenons la même forme matricielle.

Cas statique :

$$[K]\{U\} = \{F_{de}\} \dots\dots\dots(3.2.10)$$

Et avant résolution du système d'équations, on doit appliquer les conditions aux limites s'il y a lieu (encastrement, forces extérieurs,...).

III.3 Description du domaine fluide

III.3.1 Introduction

Après une brève présentation de la méthode des éléments finis, nous allons souligner les difficultés les plus importantes spécifiques de la simulation des écoulements de fluides incompressibles par la méthode des éléments finis. La première difficulté est liée au couplage des deux champs de pression et des vitesses. En utilisant une formulation mixte, le système algébrique du problème discrétisé par la méthode de Galerkin [7].

III.3.1.1 Méthode de Galerkin :

Dans la méthode des résidus pondérés de Galerkin, les fonctions de pondération sont choisies identiques aux fonctions d'approximations. Cela implique que :

$$W_i = N_i \quad i=1, n$$

Donc, les paramètres inconnus sont déterminés par :

$$\int W_i R dV = \int N_i R dV = 0 \quad i=1, n \dots\dots\dots (3.3.1)$$

De cette façon résulte un système d'équations algébriques permettant d'évaluer les paramètres inconnus.

III.3.2 Problème de Stokes généralisé et la formulation mixte en éléments finis

III.3.2.1 Formulation forte

Pour les écoulements de fluide où les vitesses sont nettement faibles, le terme du transport convectif de quantité de mouvement dans les équations de Navier-Stokes peut être négligé comparé à l'effet du transport visqueux. Ce type d'écoulement est appelé écoulement de Stokes et on le rencontre fréquemment quand on a des fluides de viscosité élevée. En négligeant le terme d'inertie, la formulation forte du problème de Stokes stationnaire en termes de vitesse et de pression s'écrit comme suit [7]:

$$-\mu \nabla^2 U + \nabla P = F_b \quad \text{dans } \Omega_f \dots\dots\dots (3.3.2.a)$$

$$\nabla U = 0 \quad \text{dans } \Omega_f \dots\dots\dots (3.3.2.b)$$

Où U, μ , P et F_b : sont respectivement le vecteur du champ des vitesses, la viscosité dynamique du fluide, le champ de pression et le champ de force par unité de volume.

III.3.2.1 Discrétisation en deux dimensions

Dans un système de coordonnées cartésiennes de deux dimensions, le système d'équations (3.3.2.a) et (3.3.2.b) s'écrit :

$$-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = F_{bx} \dots\dots\dots (3.3.3.a)$$

$$-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} = F_{by} \dots\dots\dots (3.3.3.b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (3.3.3.c)$$

Le système d'équations (3.3.3) est composé de trois équations à trois inconnues, qui sont: $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les deux composantes de vitesses ainsi que le champ de pression $P(x, y)$. Dans ce cas, une formulation par éléments finis inclut trois variables nodales de la façon suivante:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i = [N]\{u\}$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) v_i = [N]\{v\} \dots\dots\dots (3.3.4)$$

$$P(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^p(x, y) P_i = [N]\{P\}$$

Où $N_i(x, y)$ et $N_i^p(x, y)$ sont respectivement les fonctions d'interpolation des deux champs des vitesses et de la pression.

En appliquant la méthode de Galerkin au système (3.3.3), on trouve la forme intégrale suivante:

Pour $i=1, n$

$$\int_{A^{(e)}} N_i \left(-\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} - F_{bx} \right) dA = 0$$

$$\int_{A^{(e)}} N_i \left(-\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial P}{\partial x} - F_{by} \right) dA = 0 \quad i = 1, n \quad (3.3.5)$$

$$\int_{A^{(e)}} N_i^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA = 0$$

En premier lieu, on s'intéresse au terme contenant la dérivée spatiale seconde des composantes des vitesses qu'on peut traiter par intégration par parties comme suit:

$$-\mu \int_{A^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA = -\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA$$

$$+\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA \quad i = 1, n \quad (3.3.6)$$

En appliquant le théorème de Green-Gauss, on trouve que :

$$-\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dA = - \int_{S^{(e)}} \mu N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \quad (3.3.7)$$

Où $S^{(e)}$ est la frontière de l'élément et (n_x, n_y) sont les composantes du vecteur normal aux frontières. On trouve donc :

$$\begin{aligned} -\mu \int_{A^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dA &= - \int_{S^{(e)}} \mu N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \\ +\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dA & \quad i = 1, n \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Le premier terme de la partie droite de l'équation (3.3.8) représente un effort aux frontières de l'élément dû à l'effet de cisaillement. Ce terme s'annule au niveau de l'interface entre les éléments et ne doit être considéré que sur les frontières globales du problème étudié. Sous forme matricielle l'équation (3.3.8) devient :

$$\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] dA \{u\} = [K_{u\mu}] \{u\} \quad (3.3.9)$$

$K_{u\mu}$: Une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse suivant l'axe des abscisses et l'effet de la viscosité.

De la même façon, on trouve pour la composante des vitesses suivant l'axe des ordonnées la relation suivante:

$$\mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial [N]^T}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right] dA \{v\} = [K_{v\mu}] \{v\} \quad (3.3.10)$$

$K_{v\mu}$: Une portion de matrice globale reliant la composante de vitesse v et l'effet de la viscosité.

Concernant le terme de gradient de pression suivant l'axe des abscisses, on trouve la forme matricielle suivante :

$$\int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial x} dA \{P\} = [K_{px}] \{P\} \quad (3.3.11)$$

Et de façon similaire on trouve suivant l'axe des ordonnées :

$$\int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial y} dA \{P\} = [K_{py}] \{P\} \quad (3.3.12)$$

La contribution nodale des efforts de volume est donnée par :

$$\{f_{bx}\} = \int_{A^{(e)}} [N]^T F_{bx} dA \quad (3.3.13. a)$$

$$\{f_{by}\} = \int_{A^{(e)}} [N]^T F_{by} dA \quad (3.3.13. b)$$

En combinant les équations (3.3.9), (3.3.10), (3.3.11), (3.3.12) et (3.3.13) résulte le système d'équations suivant:

$$[K_{u\mu}] \{u\} + [K_{px}] \{P\} = \{f_{bx}\} \quad (3.3.14. a)$$

$$[K_{v\mu}] \{v\} + [K_{py}] \{P\} = \{f_{by}\} \quad (3.3.14. b)$$

Finalement, l'équation de continuité discrétisée est exprimée sous forme matricielle comme suit :

$$\int_{A^{(e)}} [N^p]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} dA \{u\} + \int_{A^{(e)}} [N^p]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} dA \{v\} = [K_u] \{u\} + [K_v] \{v\} \quad (3.3.15)$$

On remarque que, si les fonctions d'interpolation du champ des vitesses et de pression sont identiques donc: $[N^p] = [N]$

Cela implique que :

$$[K_u] = [K_{px}] = \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial x} dA \{u\} \quad (3.3.16)$$

$$[K_v] = [K_{py}] = \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N]}{\partial y} dA \{v\} \quad (3.3.17)$$

La forme discrétisée de l'équation de Stokes en formulation mixte (vitesse et pression) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [K_{u\mu}] & [0] & [K_{px}] \\ [0] & [K_{v\mu}] & [K_{py}] \\ [K_u] & [K_v] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{P\} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{bx}\} \\ \{f_{by}\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \Rightarrow [K^e] \{\delta^e\} = \{f^e\} \quad (3.3.18)$$

$[K^e]$: Représente la matrice de rigidité élémentaire. Il est important de noter que cette dernière n'est pas symétrique.

Remarque : le succès de la formulation mixte dépend du choix judicieux de l'interpolation de la pression et de la vitesse. Par ce que le gradient de pression n'apparaît pas dans la formulation faible, la condition de continuité du champ de pression n'est pas nécessaire à l'interface entre les éléments. Par contre, elle est impérative pour le champ des vitesses.

Pour résoudre ce type de problème, on pensait qu'utiliser la même interpolation pour les vitesses et la pression avec le même nombre de nœuds est faisable. Cependant, des études [13] ont montré que de meilleurs résultats sont obtenus quand les composantes de vitesses sont approximées avec un plus grand nombre de nœuds que la pression.

IV Application à l'interaction fluide-structure

IV.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on a expliqué le principe et la procédure de calcul de chacune de ces méthodes analytiques.

Ce chapitre est consacré aux applications test numériques. Les cas test de simulation sont exécutés avec le logiciel MATLAB sur un modèle cylindrique en deux dimensions avec une épaisseur « e » sous pression interne, en statique.

IV.2 Présentation du model structure

La structure est une conduite cylindrique déformable avec une épaisseur, et ces caractéristiques mécaniques représentées dans le tableau ci-dessous [14].

Caractéristiques mécaniques	
Module d'Young	$88 \cdot 10^3 \text{pa}$
Hauteur	H=80mm
Diamètres	d=200mm D=260mm

Tableau IV.1 Caractéristiques mécaniques de la structure

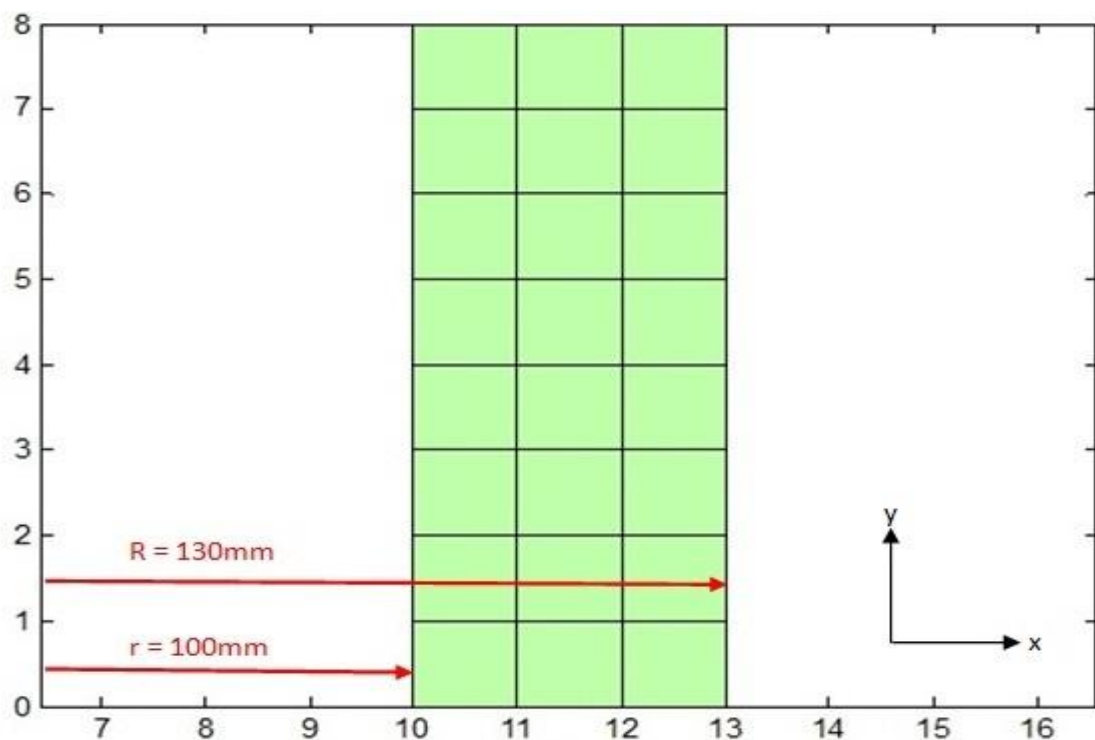


Figure IV.1 Modèle à étudier « L'épaisseur du cylindre »

IV .3 Calcul du modèle par les deux méthodes

IV .3.1 Méthode des éléments finis classiques

IV .3.1.1 Discrétisation de la géométrie

Les fonctions de formes utilisées pour la discrétisation sont celles de l'élément rectangulaire, celle vue dans le chapitre (III), pour notre cas on utilise l'élément de Lagrange Q4 qui représente l'ordre 1 pour le polynôme de Lagrange, et pour la raison de symétrie on prend l'épaisseur de cylindre.

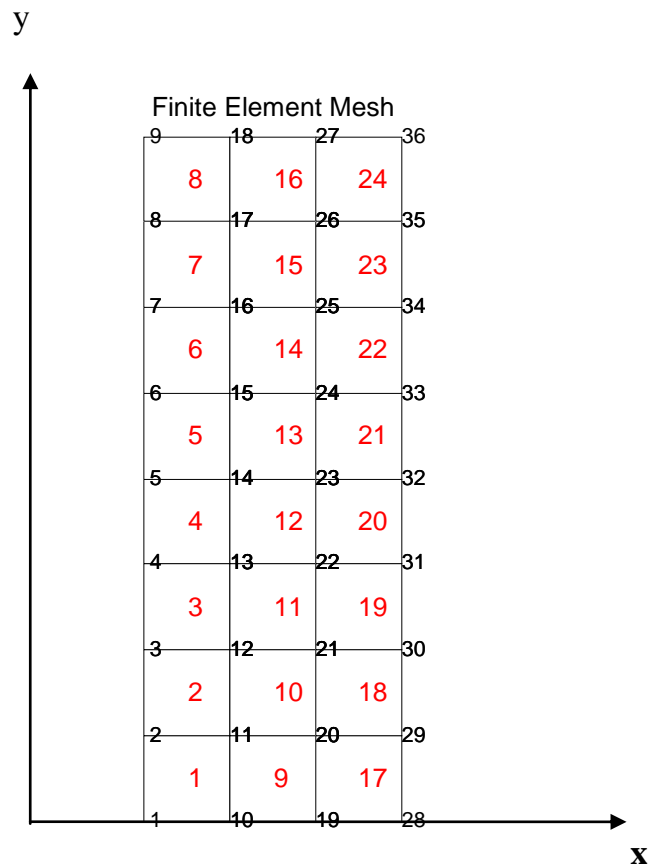


Figure (IV.2) : Epaisseur de cylindre discrétisée en 24 éléments par Q4

IV.3.1.2 Calcul au niveau élémentaire

La structure élastique à symétrie cylindrique, nous utilisons le système de coordonnées cylindriques(r, θ, z).

La matrice de raideur élémentaire est obtenue à partir de la forme intégrale suivante :

$$\mathbf{K}_e = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n})^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) |\det[\mathbf{J}]| r d\boldsymbol{\varepsilon} dn \dots \dots \dots (4.1)$$

Pour l'élément Q4:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)*(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (n-1) & 0 & (1-n) & 0 & (1+n) & 0 & (-1-n) & 0 \\ \frac{N1}{r} & 0 & \frac{N2}{r} & 0 & \frac{N3}{r} & 0 & \frac{N4}{r} & 0 \\ 0 & (\varepsilon-1) & 0 & (-1-\varepsilon) & 0 & (1+\varepsilon) & 0 & (1-\varepsilon) \\ (\varepsilon-1) & (n-1) & (-1-\varepsilon) & (1-n) & (1+\varepsilon) & (1+n) & (1-\varepsilon) & (-1-n) \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (1-n) * (1-\varepsilon) & 0 & (1+n) * (1-\varepsilon) & 0 \\ 0 & (1-n) * (1-\varepsilon) & 0 & (1+n) * (1-\varepsilon) \\ (1+n) * (1+\varepsilon) & 0 & (1-n) * (1+\varepsilon) & 0 \\ 0 & (1+n) * (1+\varepsilon) & 0 & (1-n) * (1+\varepsilon) \end{bmatrix}$$

La matrice Jacobienne pour un élément est obtenue comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} (n-1) & (1-n) & (1+n) & (-1-n) \\ (\varepsilon-1) & (-1-\varepsilon) & (1+\varepsilon) & (1-\varepsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

Et $f=2^6$ jusqu'à 4^6 avec un pas de 0.1^6

$$F = 2\pi r * f \text{ (Pa)}$$

Remarque :

Vue la complexité des fonctions, on a utilisé une méthode analytique qui est la quadrature de gauss pour calculer l'intégrale.

IV.3.1.3 Assemblage et résolution :

Après avoir obtenu la matrice de raideur de chaque élément, on les range dans la matrice de raideur globale, aussi on applique les conditions au limites (la structure est encadrée dans la partie inferieur et supérieur).Après assemblage, on procède à la résolution.

Les valeurs des déplacements (u, v) du modèle sont obtenues par la résolution de l'équation :

$$[K]\{d\} = \{F\} \dots\dots\dots (4.2)$$

nœuds	u (mm)	v (mm)	nœuds	u (mm)	v (mm)
1	0	0	19	0	0
2	1.848	0.851	20	1.163	-0.068
3	3.103	0.928	21	2.458	-0.127
4	3.981	0.571	22	3.371	-0.084
5	4.291	0.000	23	3.6961	0.000
6	3.981	-0.571	24	3.371	0.084
7	3.103	-0.928	25	2.458	0.127
8	1.848	-0.851	26	1.163	0.068
9	0	0	27	0	0
10	0	0	28	0	0
11	1.345	0.098	29	1.199	-0.680
12	2.723	0.225	30	2.314	-0.768
13	3.651	0.160	31	3.129	-0.477
14	3.981	0.000	32	3.423	0.000
15	3.651	-0.160	33	3.129	0.477
16	2.723	-0.225	34	2.314	0.768
17	1.345	-0.098	35	1.199	0.680
18	0	0	36	0	0

Tableau IV.2 les valeurs finales des déplacements {d}

Dans le cas de révolution, la solution est complètement axisymétrique. D’où les relations déformations-déplacements:

$$\epsilon = B * \{d\} \dots\dots\dots (4.3)$$

Le matériau est isotrope, les équations de Hooke peuvent se mètrent sous la forme suivante:

$$\sigma = D * \epsilon \dots\dots\dots (4.4)$$

La déformation de notre modèle pour le cas < Q4 > est représentée sur les figures ci-dessous:

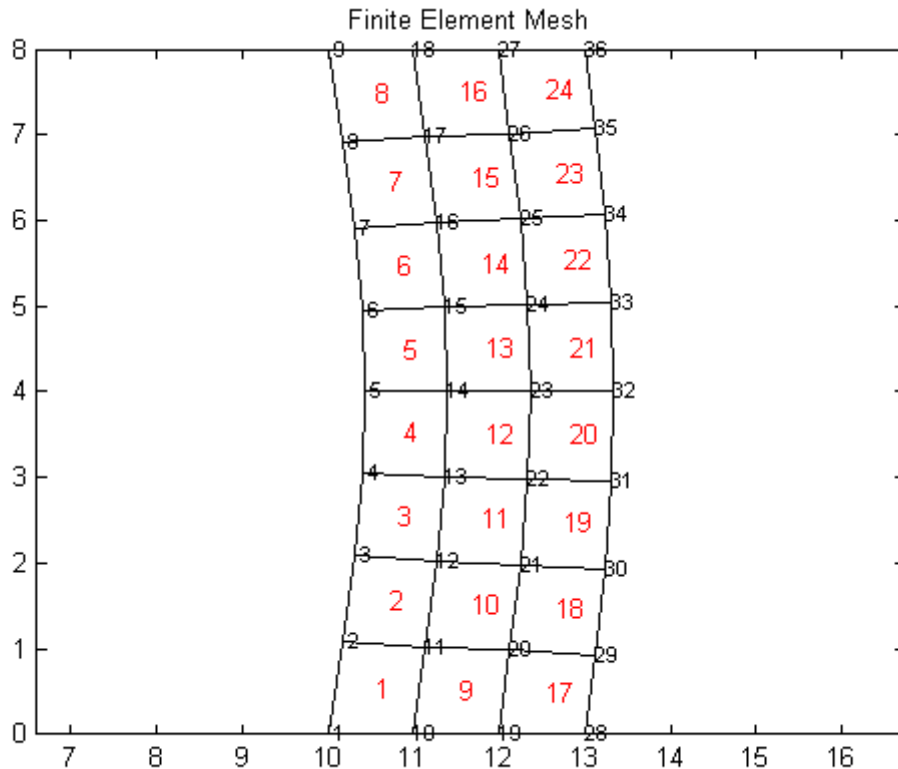


Figure (IV.3): Forme déformée des nœuds de modèle en (2D)

Les vecteurs déplacements de notre modèle dans les deux directions (XX, YY) avec couleurs différents des déplacements Minimums jusqu'aux Maximums sont représentés sur les figures ci-dessous :

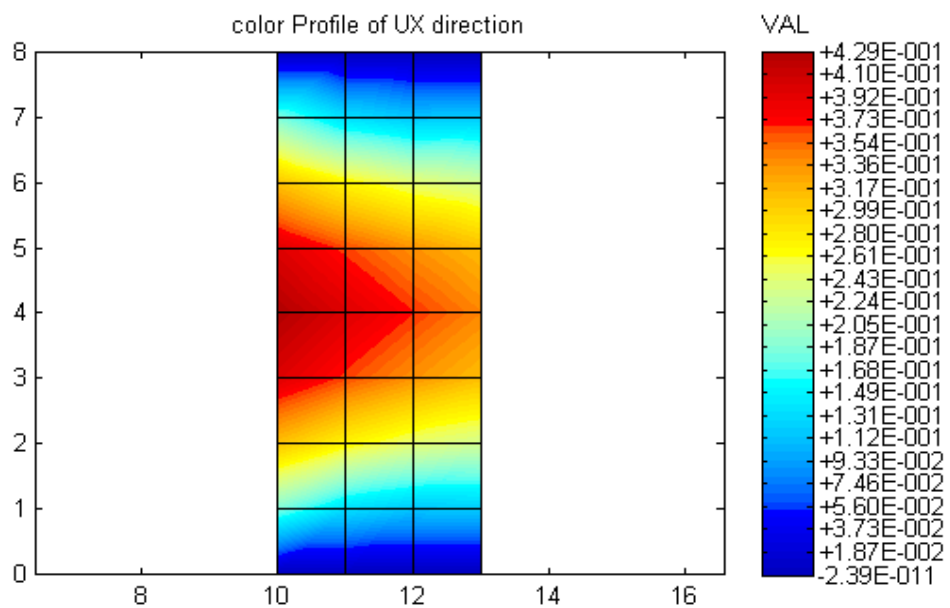


Figure (IV.4): Déplacements suivant xx sur le modèle représenté par des couleurs

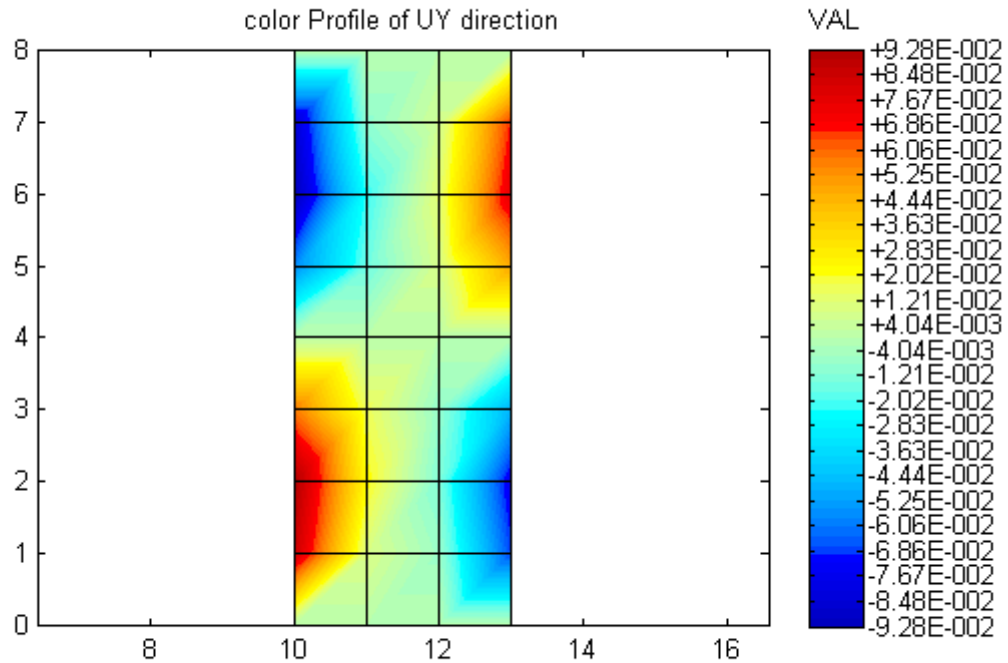


Figure (IV.5): Déplacements suivant yy sur le modèle représenté par des couleurs

IV .3.2 Méthode des éléments finis iso géométrique

IV .3.2.1.Représentation de la géométrie et discrétisation

La géométrie du modèle est exprimée par une combinaison linéaire de fonctions de base NURBS R_i et de points de contrôles $p_{i,j}$:

$$C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) p_{i,j} \dots \dots \dots (4.5)$$

$N_{i,p}, M_{j,q}$: Les fonctions de base NURBS.

Le produit de ces fonction de base nous donne l'espace paramétrique, subdivisé en sous domaines appelés éléments de référence.

On utilise des fonctions de base d'ordre 1 et de vecteurs nœuds: $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1]$ et $H = [0 \ 0 \ 0 \ 1/8 \ 2/8 \ 3/8 \ 4/8 \ 5/8 \ 6/8 \ 7/8 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Le premier vecteur nœud utilisé comporte trois espaces inter-nodaux et le deuxième vecteur, huit espace inter-nodaux et le modèle est subdivisé en 24 éléments, comme dans le cas précédent (éléments finis classiques). La figure ci-dessous illustre la géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS et l'espace paramétrique associé.

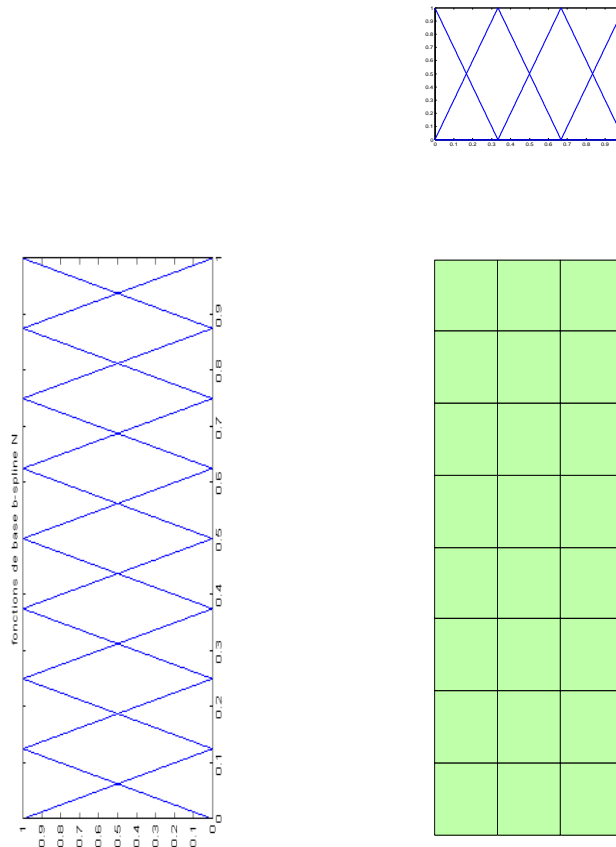


Figure (IV.6): Géométrie du modèle obtenue par les fonctions NURBS d'ordre 1 et l'espace paramétrique associé

IV .3.2.2 Calcul au niveau élémentaire :

La matrice de raideur est obtenue à partir de la forme intégrale suivante :

$$\mathbf{K}_e = 2\pi \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n})^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{n}) |\det[\mathbf{J}]| \mathbf{r} d\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{n} \dots \dots (4.6)$$

Pour l'ordre 1:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} * \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (n-1) & 0 & (1-n) & 0 & n & 0 & -n & 0 \\ \frac{N1}{r} & 0 & \frac{N2}{r} & 0 & \frac{N3}{r} & 0 & \frac{N4}{r} & 0 \\ 0 & (\varepsilon-1) & 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 & (1-\varepsilon) \\ (\varepsilon-1) & (n-1) & -\varepsilon & (1-n) & \varepsilon & n & (1-\varepsilon) & -n \end{bmatrix}$$

$$N = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (1-n) * (1-\varepsilon) & 0 & (1-n) * \varepsilon & 0 \\ 0 & (1-n) * (1-\varepsilon) & 0 & (1-n) * \varepsilon \\ n * \varepsilon & 0 & n * (1-\varepsilon) & 0 \\ 0 & n * \varepsilon & 0 & n * (1-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

La matrice jacobienne pour un élément est obtenue comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} (n-1) & (1-n) & n & -n \\ (\varepsilon-1) & -\varepsilon & \varepsilon & (1-\varepsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{pmatrix}$$

La matrice élémentaire Ke sera de dimension (8,8), huit lignes et huit colonnes, et on utilise la quadrature de gauss comme dans le cas des éléments finis classiques pour le calcul de l'intégrale.

IV.3.2.3 Assemblage et résolution

Après assemblage, on procède à la résolution. Les valeurs des déplacements (u, v) du modèle pour l'ordre p=1 sont les mêmes que celles obtenues par la méthode éléments finis classiques.

L'équation est:

$$[K]\{d\} = \{F\} \dots\dots\dots (4.7)$$

D'ou les relations déformations-déplacements:

$$\epsilon = B * \{d\} \dots\dots\dots (4.8)$$

Le matériau est isotrope, les équations de Hooke peuvent se mettre sous la forme suivante.

$$\sigma = D * \epsilon \dots\dots\dots (4.9)$$

La déformation de notre modèle pour le cas p=1 est représentée sur les figures ci-dessous :

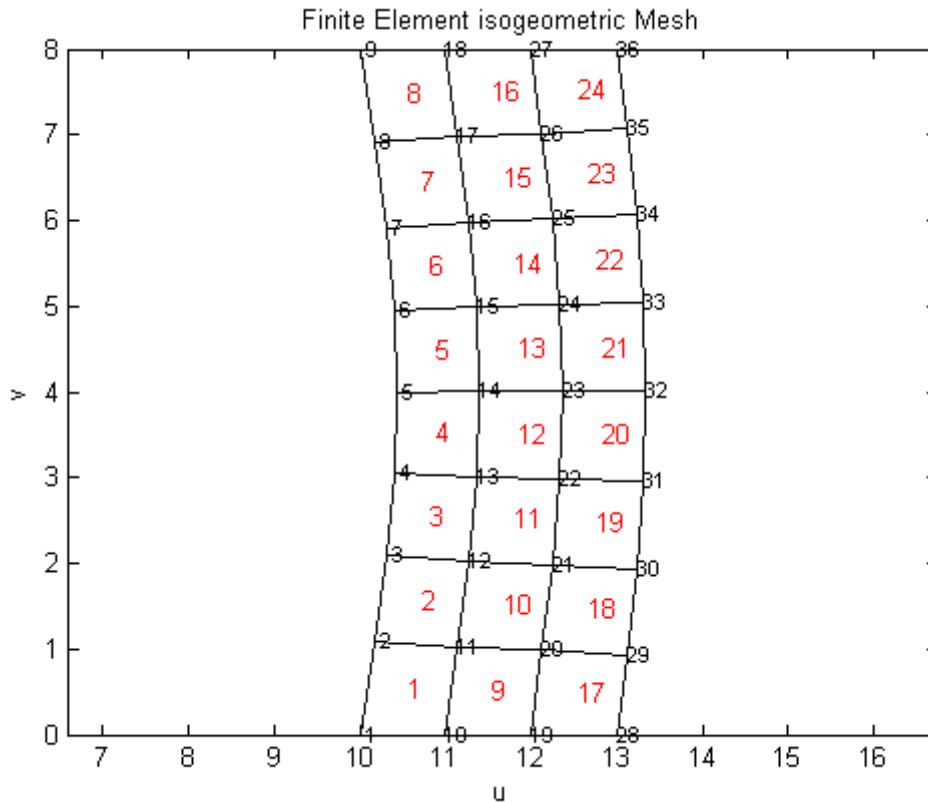


Figure (IV.7): Forme déformée des nœuds de modèle en (2D)

IV .4 Calcul du fluide par l'une des deux méthodes

IV .4.1 Méthode des éléments finis classiques

IV .4.1.1 Discrétisation de la géométrie

Les fonctions de formes utilisées pour la discrétisation sont celles de l'élément rectangulaire, celles vues dans le chapitre (III), pour notre cas on utilise l'élément de Lagrange Q4 qui représente l'ordre 1 pour le polynôme de Lagrange, et pour la raison de symétrie de domaine fluide newtonien incompressible en formulation forte et la viscosité dynamique $\mu=0.2$ avec un diamètre $d=200\text{mm}$ et $h=80\text{mm}$, la géométrie est discrétisée ci dessous.

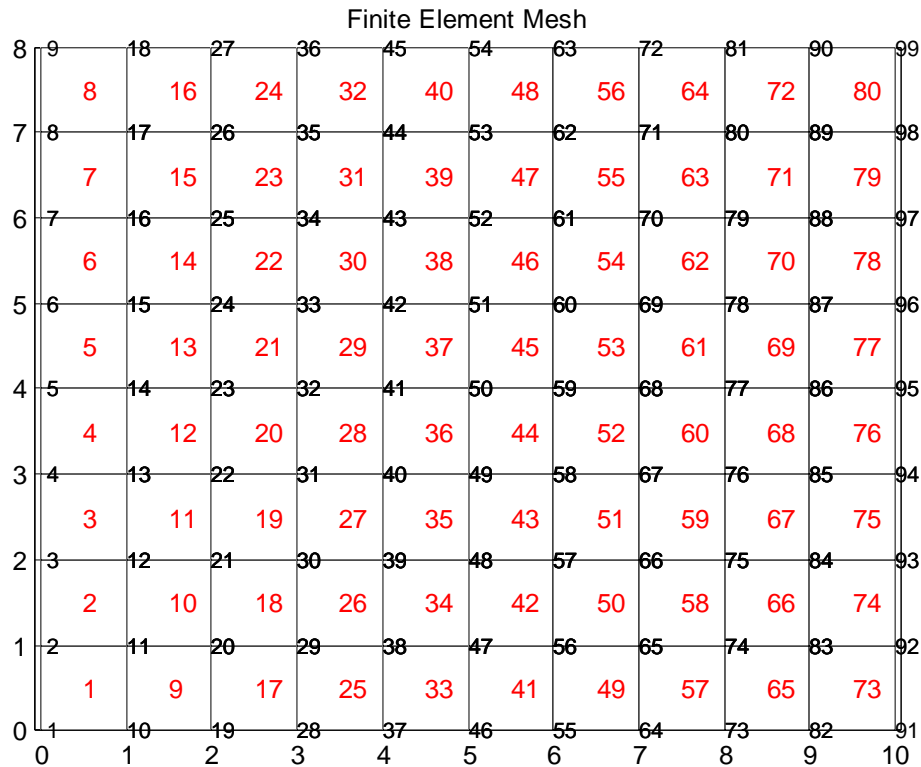


Figure (IV.8): Maillage de domaine fluide pour 80 éléments en (2D)

IV .4.1.2 Calcul au niveau élémentaire

La matrice de raideur élémentaire est obtenue à partir des formes intégrales suivant :

$$[K_{u\mu}] = \mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right] dA$$

$$[K_{u\mu}] = \mu * 2\pi \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right] r dx dy \dots (4.10)$$

$$[K_{v\mu}] = \mu \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right] dA$$

$$[K_{v\mu}] = \mu * 2\pi \int_{A^{(e)}} \left[\frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right] r dx dy \dots (4.11)$$

$$[K_{px}] = \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial[N^p]}{\partial x} dA$$

$$[K_u] = [K_{px}] = 2\pi \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial x} r dx dy \dots (4.12)$$

$$[K_{py}] = \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial y} dA$$

$$[K_v] = [K_{py}] = 2\pi \int_{A^{(e)}} [N]^T \frac{\partial [N^p]}{\partial y} r dx dy \dots (4.13)$$

Pour l'élément Q4:

$$N = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1+n) * (1-\epsilon) & 0 \\ 0 & (1-n) * (1-\epsilon) & 0 & (1+n) * (1-\epsilon) \\ (1+n) * (1+\epsilon) & 0 & (1-n) * (1+\epsilon) & 0 \\ 0 & (1+n) * (1+\epsilon) & 0 & (1-n) * (1+\epsilon) \end{bmatrix}$$

La matrice Jacobienne pour un élément est obtenue comme suit :

$$J = \begin{pmatrix} (n-1) & (1-n) & (1+n) & (-1-n) \\ (\epsilon-1) & (-1-\epsilon) & (1+\epsilon) & (1-\epsilon) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_x = \int_{-1}^1 N F_{bx} dx dy \\ f_y = \int_{-1}^1 N F_{by} dx dy \end{cases} \quad \text{et } F_{bx} = -20, F_{by} = 20(\text{Mpa}) \dots \dots \dots (4.14)$$

Remarque :

On note qu'on a trois degrés de liberté ,2ddl pour les vitesses et 1ddl pour la pression

IV.4.1.3 Assemblage et résolution :

Après avoir obtenu la matrice de raideur Ke(12,12) de chaque élément, on les range dans la matrice de raideur globale. Aussi, on applique les conditions aux limites sur les frontières. Après assemblage, on procède à la résolution.

Les valeurs des déplacements (u, v) et les pressions (p) du fluide sont obtenues par la résolution de l'équation :

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \dots\dots\dots(4.15)$$

L'écoulement de fluide subit des déformations de maillage pour le cas de Q4 est représenté sur la figure ci-dessous :

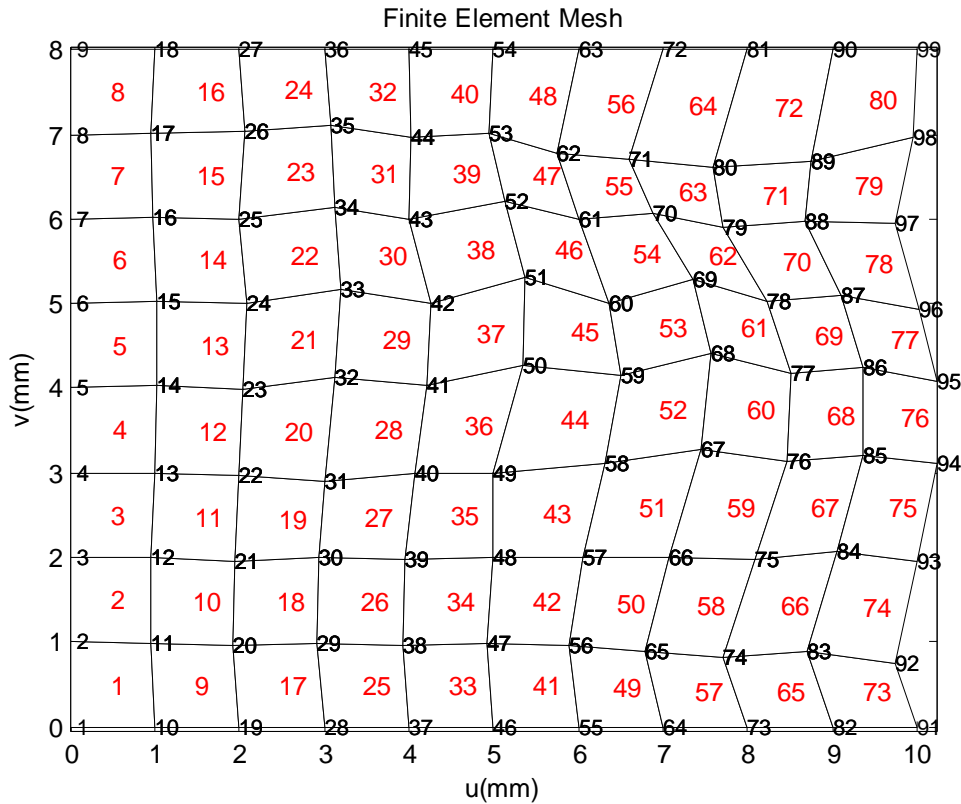


Figure (IV.9): La déformé de domaine fluide en (2D)

Remarque :

On remarque bien que la structure se déforme par l'écoulement de fluide dans une conduite déformable, la variation des forces de volume de fluide subit à l'interface un changement de forme de modèle (épaisseur de cylindre).

La déformation est suivant les deux directions, car on avait exercé un chargement variable réparti sur les deux directions $x=u$ et $y=v$. En plus la hauteur reste inchangée.

IV.5 Interprétation des résultats :

Les résultats obtenus montrent bien que l'analyse par élément finis isogométriques et la MEF classique sont les mêmes pour l'ordre 1.

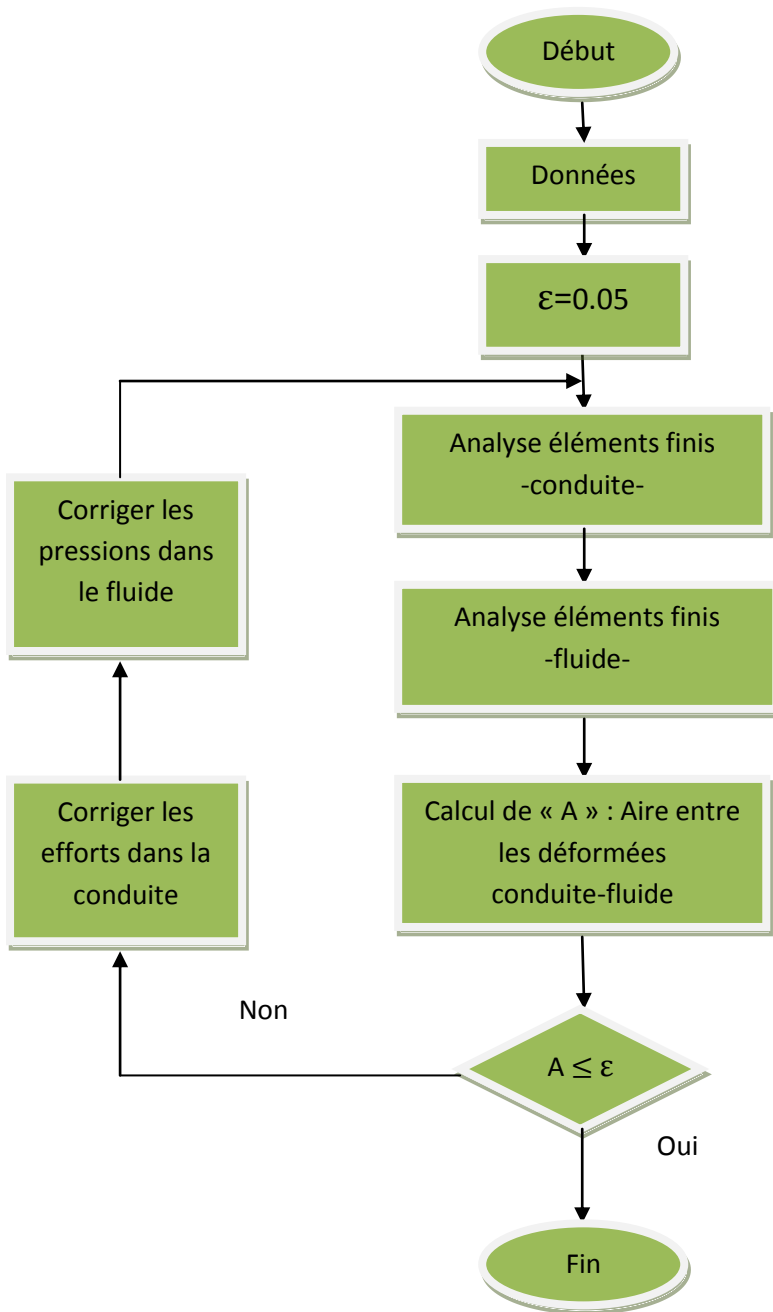
Au milieu de modèle conduite, les nœuds (5, 14, 23, 32) qui ont des grands déplacements ou bien les plus sollicités par l'écoulement du fluide, aussi il ya une symétrie sur la répartition des couleurs sur le modèle dans les deux directions.

La méthode d'analyse iso-géométrique est une méthode qui permet d'avoir des résultats de haute précision car les fonctions NURBS et les fonctions B-spline, et leurs dérivées partielles recouvrent toutes la surface délimitée des points de contrôle.

On peut voir aussi qu'avec ces deux méthodes on détermine les déformations avec 24 éléments sur l'épaisseur de la conduite et sur le fluide avec 80 éléments.

La déformée du fluide et de l'épaisseur de la conduite sont approximativement épousées à l'interface.

Nous proposons pour la résolution du problème d'interaction fluide-structure de corriger les efforts sur la conduite et les pressions dans le fluide jusqu'à ce que l'interface des deux déformés soient confondues, c'est à dire le vecteur nœud fluide [91 92 93 94 95 96 97 98 99] soit confondu avec le vecteur nœud conduite [1 2 3 4 5 6 7 8 9] respectivement.



Figure(IV.10) : Organigramme d'interaction fluide-structure

Conclusion générale

Dans ce travail on a vu tout d'abord les différents phénomènes d'interaction fluide-structure et les domaines d'applications. Ce qui caractérise le plus l'étude des phénomènes des interactions fluides-structures, c'est son aspect interdisciplinaire. Afin de pouvoir résoudre le problème en sa globalité, nous devons utiliser à la fois un modèle géométrique régissant l'écoulement du fluide et un autre traduisant l'évolution dans le temps et la réponse de la structure solide. Le véritable couplage des deux sous-domaines prend naissance à travers l'interface fluide-structure. C'est par cette dernière qu'auront lieu les échanges énergétiques entre les deux milieux mis en jeu.

On a vu aussi la modélisation géométrique en utilisant les différents modèles de modélisation en DAO, comme le modèle de Bézier qui utilise les fonctions de base de Bernstein ensuite le modèle B-spline défini avec les fonctions de base.

On a aussi récapitulé le modèle aux éléments finis classique et le nouveau modèle d'analyse basé sur les NURBS intitulé (analyse isogéométrique) et application de ces deux méthodes d'analyse sur le premier modèle (épaisseur de la conduite) et deuxièmement sur le fluide.

De même, cette étude nous a permis d'élargir nos connaissances dans le domaine de la CAO et le calcul des structures, ainsi que dans le domaine de la modélisation par éléments finis iso-géométriques, et l'utilisation de l'outil informatique pour la programmation sur le logiciel MATLAB.

Après une présentation des différentes procédures de résolution numérique des problèmes d'interactions fluide-structure, on a entrepris l'étude d'un cas test qui concerne le comportement d'une conduite. Pour cela, on a utilisé une approche partitionnée totalement implicite fortement couplée. Les résultats numériques obtenus par les deux méthodes sont concordance qu'avec l'accord des résultats expérimentaux. Le test montre les potentialités de la simulation numérique en engineering à la phase de conception.

D'après le résultat, on peut dire que la méthode d'analyse iso-géométrique élaborée par le professeur Hughes, permet d'avoir des résultats avec exactitude en particulier avec ces fonctions de bases NURBS, mais par contre elle prend un temps important, du fait qu'il y a toute une analyse à faire pour chaque structure à étudier, et puis cette étude est coûteuse car c'est de nouvelles notions qui sont en cours de recherche.

En fin ce travail a permis d'enrichir nos connaissances et de comprendre l'étendue du problème posé, et de comprendre aussi les différentes étapes de l'analyse isogéométrique et les éléments finis comme outil d'analyse.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

- [1] **Bézier P.**, Courbes et surfaces. Collection Mathématiques et CAO, tome 4, Éd. Hermès (1987).
- [2] **Mrs. BOUARIF.K et HAMOUR.M**, conception et usinage des formes complexes, mémoire d'ingénieur (UMMTO), 2005.
- [3] **Les piegl Wayne Tiller**, The NURBS book 2nd edition, 1996.
- [4] **T.J.R. Hughes , J.A. Cottrell, Y. Bazilevs**<<Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement>>Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194 (2005) 4135–4195.
- [5] **Yijun Liu**, Introduction to Finite Element Method.1999, University of Cincinnati.
- [6] **G. DHATT AND G. TOUZOT**, Une présentation de la méthode des éléments finis. Les presses de l'Université Laval, Québec, 1981.
- [7] **DAVID V.HUTTON**, Fundamentals of Finite Element Analysis. The McGraw–Hill Companies, 2004,ISBN 0-07-112231-1.
- [8]**BATOZ J.L. AND DHATT G.** Modélisation des structures par éléments finis. Hermès, 1990. Volume 1 : Solides élastiques.
- [9] **Alaa CHATEAUNEUF** : Comprendre les éléments finis, Elipses Edition Marketing S.A, 2010, ISBN 978-2-7298-5430-0.
- [10] **Jingang Li**, Isogeometric finite element analysis using T-Spline, THESIS, Brigham Young University, December 2009.
- [11]**Seung-Hyun H**, Isogeometric Shape Design Optimization Using NURBS Basis Functions , Thesis SEOUL National University, February 2010.
- [12] **Rassim Belakroum**, CONTRIBUTION A LA MODELISATION DES INTERACTIONS FLUIDES-STRUCTURES ; THESE EN CO-TUTELLE Université de Reims Champagne-Ardenne (France) en 2011.
- [13]**A. J., Baker**. Finite Element Computational Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1983.
- [14] **Wikipédia**. caractéristiques mécaniques des matériaux (module de Young pour PEHD).