

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT : MATHEMATIQUES

Mémoire de Magister

SPECIALITE : **Mathématiques**

Option : **Recherche Opérationnelle et Optimisation**

Présenté par

Cherifa BENNANI

Sujet :

Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaires et Applications

Devant le jury d'examen composé de :

Morsli	Mohamed	Professeur	UMMTO	Président
Bedouhene	Fazia	MCA	UMMTO	Rapporteur
Aidène	Mohamed	Professeur	UMMTO	Examineur
Hamadouche	Djamal	Professeur	UMMTO	Examineur
Smaali	Mannal	MCB	UMMTO	Examinatrice
Zemouche	Ali	Professeur	France	Invité

Soutenue le 12/10/2011.

Remerciements

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce projet. Qui m'a ouvert les portes du savoir.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à ma promotrice F. BEDOUHENE pour l'honneur qu'elle m'a fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique, pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce présent mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigué tout au long de ces années de travail m'ont permis de progresser dans mes études. Je vous remercie d'avoir cru en mes capacités et m'avoir fourni d'excellentes conditions me permettant d'aboutir à la production de ce mémoire qui n'aurait vu le jour sans votre confiance et votre générosité. Je vous remercie très chaleureusement de m'avoir continuellement encouragée, pour votre soutien scientifique et humain, pour votre gentillesse et votre hospitalité.

Je voudrais vous remercier très vivement de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche. Je vous suis très reconnaissante pour la confiance que vous m'avez témoigné tout au long de la réalisation de ce mémoire. Merci pour la vivacité et la force de volonté que vous avez su me transmettre. vous avez su me secouer aux moments où j'en ai vraiment besoin.

Je tiens à vous remercier pour tout car vous m'avez appris beaucoup plus que le mathématiques....MERCI Madame de m'avoir pris sous votre aile.

Je remercie vivement Pr M. MORSLI pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire, Je le remercie chaleureusement pour sa participation à ma formation et de m'avoir tracer le chemin.

Mes remerciement s'adressent aussi au Pr M. AIDENE qui est toujours là à répondre à mes questions pour sa contribution à ma formation.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements au Pr D. HAMMADOUCHE, pour sa contribution à ma formation et en acceptant de juger mon travail. Je le remercie vivement autant que directeur du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA), pour m'avoir accueilli et mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour mener ce mémoire à son terme.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. SMAALI pour l'honneur qu'elle me fait en acceptant de juger et d'évaluer mon travail.

Je profite de l'occurrence pour exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à Monsieur ZEMOUCHE. il m'a apporté beaucoup durant son séjour

au sein du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées (LMPA). Mes nombreuses discussions avec lui m'ont été d'un apport considérable. Je le remercie aussi très chaleureusement pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger mon travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation depuis mon premier pas à l'école, qu'ils (elles) trouvent ici l'expression de toute ma gratitude.

Enfin je m'incline respectueusement devant les deux êtres à qui je dois l'existence, mon père et ma mère. Je leur exprime mes hauts et profonds signes de reconnaissances et d'obéissance pour tous les efforts qu'ils ont fournis et tous les sacrifices qu'ils ont généreusement faits, pour que je grandisse dans de parfaites conditions d'amour, de satisfaction et d'épanouissement. Je vous remercie mes chers parents qui sans vous je n'arriverai pas là où je suis actuellement, vous qui m'avez toujours guidés mes pas, c'est donc à vous que je dédie ce fruit de mon travail...MERCI PAPA et MAMAN. Je terminerai cet avant propos en remerciant mon frère RAMDANE qui après mon père c'est lui, Ma soeur KARIMA et son mari SAMIR qui ont été toujours là pour moi, Je voudrais aussi remercier ALICIA, MOKRANE, MELISSA et MEHREZ pour leurs nombreux et chaleureux sourires, pour leurs gestes innocents et leurs demandes qui sont parfois impossible. Je les remercie pour ce qu'ils (elles) sont, des lumières, ou plutôt des têtes d'ampoules sans oublier la femme qui sans elle, ils n'existent pas, SALIHA leurs maman qui est toujours présente. Enfin, je remercie très chaleureusement ma grand mère OUIZA pour sa générosité, son affection et ses précieux conseils.

Je souhaite aussi dire un grand merci à tous mes amies et amis B. Fazia, Dj. Nadia, D. Amina, S. Manel, F. Karima, L. Kahina, T. Hamid, K. ALi, A. Youcef, O. Lynda,...

Cherifa BENNANI

à la mémoire de mon cher PAPA.
à ma très chère MAMAN.

*La musique est une mathématique sonore,
la mathématique est une musique silencieuse.*
Edouard HERRIOT.

Table des matières

Introduction générale	4
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	1
1.1 Systèmes contrôlés	1
1.2 Un énoncé général du problème de Cauchy	2
1.3 Systèmes différentiels linéaires	5
1.4 Applications du théorème de Cauchy-Lipschitz en théorie du contrôle .	7
1.4.1 Systèmes de contrôle généraux	7
1.4.2 Systèmes de contrôle linéaires	8
2 Stabilité et théorie de Lyapunov	9
2.1 Notions de stabilité	10
2.2 Méthode directe de Lyapunov	12
2.2.1 Fonction de Lyapunov	12
2.2.2 Théorème de stabilité locale	14
2.3 Méthode indirecte de Lyapunov	16
2.3.1 Théorème de stabilité globale	18
2.4 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires	20
2.5 Méthode de construction des fonctions de Lyapunov : Méthode de Kra- sovskii [30]	22
2.6 Théorie de Lyapunov dans le cas non autonome	23
2.6.1 Méthode indirecte de Lyapunov pour les systèmes non autonomes	35
2.7 Inégalités matricielles linéaires	37
2.7.1 Programmation semi-définie	38
2.7.2 Les théorèmes classiques	39
3 Contrôlabilité et stabilisation	41
3.1 Contrôlabilité	41
3.1.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires	42
3.1.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	47
3.1.3 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire	49
3.1.4 Application de la contrôlabilité à un problème de contrôle optimal	50
3.2 Stabilisation	52
3.2.1 Stabilisation des systèmes de contrôle linéaires	56
3.2.2 Stabilisation locale d'un système non linéaire	56

4	Observabilité et estimation de l'état des systèmes non linéaires	58
4.1	Observabilité	60
4.1.1	Observabilités des systèmes linéaires	62
4.1.2	Observabilité des systèmes non linéaires	64
4.2	Estimation d'état des systèmes non linéaire	67
4.2.1	Cas des systèmes linéaires autonomes : Observateur asymptotique de Luenberger	67
4.2.2	Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique	69
4.2.3	Application à la stabilisation locale d'un système non linéaire par retour dynamique de sortie	70
4.2.4	Observateurs des systèmes non linéaires	71
4.2.5	Structure générale d'un observateur asymptotique	72
4.3	Observateurs des systèmes non linéaires, un état de l'art	73
5	Application : synthèse d'observateur pour une classe de systèmes non linéaires	85
5.1	Préliminaires et formulation du problème	85
5.2	Synthèse d'observateur	88
	Conclusion et perspectives	95

– **Notations**

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

- \mathbb{R} : ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- $[a, b]$: intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $]a, b[$: intervalle ouvert de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $N_n = \{1, \dots, n\}$: ensembles des n premiers nombres entiers positifs.
- $C^1(\mathbb{R}^n)$: ensemble des fonctions continûment différentiables.
- $|\cdot|$: valeur absolue ou module.
- $\|\cdot\|$: norme sur \mathbb{R}^n .
- $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état.
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: dérivée temporelle.
- $x^{(i)}$: ième dérivée.
- x^T : transposé du vecteur x .
- $\|x\|$: norme euclidienne de x .
- $[a_{ij}]$: matrice dont le coefficient de la ième ligne et jème colonne est a_{ij} .
- M^T : transposé de la matrice A .
- $M > 0$ ($M \geq 0$) : signifie que M est une matrice symétrique définie (resp. semi-définie) positive.
- $M < 0$ (*resp* $M \leq 0$) : signifie que M est une matrice symétrique définie (resp. semi-définie) négative.
- $\|A\|$: norme euclidienne de A .
- Id : matrice identité $\mathbb{R}^n \times n$.
- M^{-1} : inverse de la matrice.
- $\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (*) & M_{22} \end{pmatrix}$: Matrice symétrique, le symbole $(*)$ représente M_{12}^T .
- $\lambda_{min}(M)$ (*resp.* $\lambda_{max}(M)$) : valeur propre minimale (resp. maximale) de M .
- $\sigma_{min}(M)$: valeur singulière minimale de M .
- det : déterminant.
- tr : trace.
- rg ou *rang* : rang.
- $\exp(A)$, ou e^A : exponentielle de la matrice A .
- $L_{loc}^p(\omega, K)$: ensemble des applications mesurables de ω dans K , de puissance p intégrable.
- $Acc(x_0, T)$: ensemble accessible en temps T depuis le point x_0 .
- $B(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| \leq \rho\}$ la boule de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\rho > 0$.
- $S(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| = \rho\}$ la sphère de centre $a \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $\rho > 0$.
- $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\}$ la boule de centre $0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$.
- $Co(a, b)$: L'enveloppe convexe de l'ensemble (a, b) .

– **Acronymes**

- *EKF* : Filtre de Kalman Etendu (Extended Kalman Filter).
- *LMI* : Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequalities).
- *LPV* : Linéaire à Paramètres Variants (Linear Parameter Varying).
- *LTI* : Linéaire Temps Invariant (Linear Time Invariant).
- *SISO* : Mono-entrée Mono sortie (Single Input-Single Out put).

- *MIMO* : Entrée multiple-Sortie multiple (Multiple Input-Multiple Output).
- *OLG* : Observateur de Luenberger généralisé.
- *DMVT* : Théorème des accroissements finis (Differential Mean Value Theorem).

Introduction générale

On part d'un système dynamique paramétré

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

qu'on notera par abus d'écriture

$$\dot{x} = f(x, u)$$

où

- $t \in [0, +\infty[$.
- Le vecteur $x(t)$ décrit l'état du système et appartient à l'espace d'état M , qui est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n , ou bien une variété différentiable de dimension n ,
- $u(t) \in U$ ouvert de \mathbb{R}^m ,
- f un champ de vecteurs sur M , paramétré par u , suffisamment régulier (par exemple de classe \mathcal{C}^∞).

La théorie du contrôle ne se contente toute fois pas d'étudier le comportement des solutions pour les différentes valeurs du paramètre, mais on fait varier ce dernier dans le temps. On applique ce qu'on appelle le "jargon" de la théorie du contrôle une "entrée", ou un "contrôle", ou encore une "commande", c'est à dire une fonction

$$t \longmapsto u(t)$$

de $[0, +\infty[$ dans U . Une fois l'entrée choisie, on obtient une équation différentielle dépendant du temps

$$\dot{x} = f(x, u(t)). \tag{1}$$

Le choix de l'entrée se fait dans l'ensemble des entrées admissibles \mathcal{U} , qui peut être l'ensemble des fonctions constantes, des fonctions continues par morceaux, des fonctions \mathcal{C}^r , $r \geq 0$, des fonctions L^∞ , etc ...

L'application $t \longmapsto (x(t), u(t))$ est dite trajectoire du système (1) si pour tout $t \in J$, avec J intervalle de $[0, +\infty[$, $x(t)$ et $u(t)$ vérifient le système (1).

La description d'un système de contrôle est complétée par la donnée du système

$$y = g(x, u) \tag{2}$$

où $y \in \mathbb{R}^p$ ($p < n$) est la sortie ou la mesure du système et g un champs de vecteurs suffisamment régulier de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^p .

Le problème typique de la théorie du contrôle, et plus particulièrement de l'automatique est le suivant : à partir d'un état de départ donné, on veut amener le système à un

nouvel état en un temps assez bref, ce qui suppose de pouvoir calculer une commande appropriée (contrôlabilité). Lorsque le système est contrôlable, on dispose, en générale, d'une infinité de trajectoires et donc de commandes pour réaliser cette transition.

Se pose alors le problème du choix entre ces diverses trajectoires : c'est l'objet de la commande optimale qui sélectionne la trajectoire qui minimise un certain critère. Citons par exemple le temps minimum pour aller d'une position de repos (un point d'équilibre) à une autre position de repos (un autre point d'équilibre) sachant que la commande reste bornée ($u(\cdot) \in L^\infty$). On en déduit ainsi une trajectoire de référence du système.

Une fois le système amené en un point d'équilibre, on souhaite l'y maintenir c'est le problème de stabilisation. Son principe est le suivant :

Dans l'équation (1) on peut remplacer u par une fonction G de x . Autrement dit, on applique l'entrée $u(t) = G(x(t))$ qui dépend de l'état initial $x(0)$. La fonction $x \mapsto G(x)$ s'appelle un bouclage (ou retour d'état, ou encore feedback en anglais). Le problème de la stabilisation par bouclage est le suivant : supposons que $f(x^0, u^0) = 0$. Existe-t-il un bouclage G , avec $G(x^0) = u^0$ tel que x^0 soit un point d'équilibre (asymptotique) stable du système bouclé

$$\dot{x} = f(x, G(x))?$$

Le calcul de tels bouclages nécessite la connaissance à chaque instant de l'état x . Il est fréquent que seule une partie de l'état soit directement accessible à la mesure. Aussi on est confronté au problème suivant : Connaissons les équations du système (1), les relations entre les mesures y et l'état x (donc l'équation (2)), les entrées $t \mapsto u(t)$ et les sorties $t \mapsto y(t)$, estimer x . L'unicité de la solution correspond à l'observabilité.

La théorie de l'estimation tient une place de plus en plus importante en automatique. La connaissance de l'état du système étudié est nécessaire dans de nombreuses stratégies, notamment de détection de défauts, de diagnostic, de commande. Lorsqu'il n'est pas possible de mesurer directement l'état, et ce pour des raisons physiques ou financières, on a recours à un système dynamique auxiliaire, appelé observateur, qui est chargé d'estimer l'état du système. La construction d'un observateur se décompose en deux phases, à savoir

1. une phase de synthèse, ou de conception, qui consiste à choisir la dynamique de l'observateur,
2. une phase d'analyse de la convergence de l'état de l'observateur vers l'état du système.

La synthèse de l'observateur exploite les informations disponibles, à savoir le modèle dynamique du système étudié, ses entrées et ses sorties mesurées. Lorsqu'une partie (ou la totalité) des entrées n'est pas disponible, l'observateur est dit à entrées inconnues. Le problème à résoudre devient alors plus complexe, puisqu'il s'agit soit d'estimer l'état du système, malgré la présence des entrées qui interviennent effectivement dans la dynamique du système mais que l'on ne peut pas inclure dans la dynamique de l'observateur, soit d'estimer l'état et les entrées inconnues également.

Le problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été entièrement résolu dans les années 1960-1970. Une solution optimale a été développée par Luenberger

dans le cadre déterministe et Kalman dans un contexte stochastique. En dépit d'une littérature surabondante sur le sujet, principalement dans le cas temps-continue, le problème de la synthèse d'observateur pour les systèmes non linéaires reste un sujet de recherche largement ouvert, et très actif.

L'objectif de ce mémoire est de développer les divers points évoqués ci-dessus. une attention particulière sera accordée à l'étude de la stabilisation par retour d'état statique et dynamique et l'estimation de l'état des systèmes linéaires et non linéaires.

Le mémoire que nous présentons est rédigé comme suit : Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques rappels sur les systèmes dynamiques, nous y énoncerons le problème de Cauchy-Lipschitz dans sa forme générale, nous l'appliquerons ensuite à un système de contrôle linéaire et non-linéaire.

Le problème de la stabilisation et de l'estimation de l'état se ramène à l'analyse de la stabilité d'un certain système, nous dédions donc le deuxième chapitre à une présentation détaillée de la théorie de Lyapunov. Nous exposerons les différents concepts et critères de stabilité de Lyapunov d'un système linéaire (et non-linéaire), autonome et non autonome.

Les théorèmes issus des techniques de Lyapunov conduisent en général à des Inégalités Linéaires Matricielles (LMI). Nous achevons ce chapitre par une brève présentation du problème des LMIs.

Le chapitre trois porte sur les problèmes de contrôlabilité et stabilisation par retour statique d'un système linéaire et non linéaire.

Dans le quatrième chapitre, on procède à l'étude des notion d'observabilité et de l'estimation de l'état du système linéaire et non linéaire. Nous poursuivons ce chapitre par le problème de stabilisation par retour d'état dynamique. On le terminera par une revue bibliographique sur les différentes techniques d'estimation non linéaire.

Ce mémoire s'achève par une application qui consiste en l'estimation de l'état d'une classe de système non-linéaire. Nous développons la méthode présentée par A.Zemouche et al dans leur article [46]. Nous implémentons sous Matlab les conditions de synthèse de l'observateur proposé par les auteurs et nous faisons dérouler le programme sur un exemple numérique.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels sur les systèmes dynamiques. Nous fournissons au début de ce chapitre un rappel sur la résolution des systèmes différentiels en se rappelant de la version générale du théorème de Cauchy-Lipschitz, adaptée à la théorie du contrôle, qui établit sous certaines conditions l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation différentielle.

1.1 Systèmes contrôlés

Un système non linéaire contrôlé (ou commandé) est un système différentiel de la forme

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad t \in [0, +\infty[, \quad x(t) \in M, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad (1.1)$$

En général, le vecteur des états $x(t)$ appartient à une variété différentielle M de dimension n (on supposera ici que M est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n), les contrôles $u(\cdot)$ appartiennent à un ensemble admissibles \mathcal{U} , qui est un ensemble de fonctions localement intégrables définies sur $[0, +\infty)$ à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$, et $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ est une fonction non linéaire à valeur dans \mathbb{R}^n (qu'on supposera suffisamment régulière, on précisera cette régularité ultérieurement). L'entier naturel n est l'ordre du système. Un cas particulier de tels systèmes est le système linéaire de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1.2)$$

avec $A(t)$ une fonction matricielle de dimension $n \times n$, appelée matrice d'état, et $B(t)$ une fonction matricielle de dimension $n \times m$, appelée matrice de commande.

Nous n'expliquerons pas dans ce mémoire comment obtenir le modèle (1.1), étant donné qu'il serait alors nécessaire de couvrir un très grand nombre de disciplines connexes : chimie, physique, mécanique du solide, électrotechnique, etc., chacune ayant une théorie de la modélisation propre conduisant à des équations différentielles ordinaires susmentionnées.

On peut faire une première classification entre les systèmes qui ne dépendent pas explicitement du temps et ceux qui en dépendent :

Définition 1.1 *Le système (1.1) est dit autonome si f ne dépend pas explicitement de t . Dans ce cas, on l'écrit*

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1.3)$$

Dans le cas contraire, on dira qu'il est non autonome.

On peut noter qu'un système autonome peut devenir non autonome si le contrôle dépend explicitement du temps, c'est à dire si par exemple $u = g(x, t)$. Dans le cas où l'on peut écrire la commande comme une fonction de l'état, soit $u = g(x)$, le système (1.3) se ramène en un système autonome,

$$\dot{x} = f(x, g(x))$$

que nous écrivons par abus d'écriture

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.4)$$

1.2 Un énoncé général du problème de Cauchy

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et V un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle problème de Cauchy, le problème

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où f est une fonction de $I \times V$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que :

$$f(., x) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ est mesurable pour chaque } x \text{ fixé.} \quad (\text{H1})$$

et

$$f(t, .) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ est continue pour chaque } t \text{ fixé.} \quad (\text{H2})$$

Ces deux conditions assurent la mesurabilité de l'application $t \longrightarrow f(t, \xi(t))$, pourvu que la fonction $t \longrightarrow \xi(t)$ soit continue. En effet, si ξ est une fonction étagée

sur I , càd, $\xi(t) = \sum_{i=1}^k x_i \chi_i(t)$, où χ_i est la fonction indicatrice de l'intervalle I_i , et $(I_i)_{1 \leq i \leq k}$ une partition de I , alors

$$f(t, \xi(t)) = \sum_{i=1}^k f(t, x_i) \chi_i(t)$$

f est donc mesurable comme somme et produit de fonctions mesurables.

Si maintenant ξ est continue, il existe une suite $(\xi_n)_n$ de fonctions étagées convergente simplement vers ξ (uniformément sur les parties compactes de I), comme f est continue par rapport à sa deuxième composante (hypothèse (H2)), on obtient la convergence simple de $(f(\cdot, \xi_n(\cdot)))_n$ vers $f(\cdot, \xi(\cdot))$. D'où la mesurabilité de $t \rightarrow f(t, \xi(t))$. Cette dernière conclusion justifie l'existence de l'intégrale donnée dans la formule (1.6).

Le théorème de Cauchy Lipschitz usuel affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale à condition que f soit continue et localement Lipschitzienne par rapport à x . Mais en théorie de contrôle ces conditions doivent être affaiblies car on est amené à considérer des contrôles non continus (au mieux, continus par morceaux) et par conséquent la continuité du second membre n'est plus assurée. En particulier la solution si elle existe, n'est pas en général dérivable partout et il faut redéfinir de manière adéquate le concept de solutions, c'est l'objet du paragraphe suivant :

Définition 1.2 (Absolue continuité) Soit $A = [a, b]$ un intervalle. On dit que la fonction F est absolument continue sur A si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute suite $([a_n, b_n])_n$ de sous intervalles de A d'intérieurs disjoints

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) \leq \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |F(b_n) - F(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Nous avons la caractérisation suivante de l'absolue continuité : F est absolument continue sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement s'il existe une fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur l'intervalle $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt.$$

Autrement dit, F est absolument continue si et seulement s'il existe une fonction f (Lebesgue intégrable) qui soit presque partout égale à la dérivée de F .

Définition 1.3 (Solution du problème (1.5)) On appelle solution du problème (1.5) tout couple $(J, x(\cdot))$, où J est un intervalle de I contenant t_0 , $x(\cdot)$ est une fonction

absolument continue de J dans V vérifiant, pour tout $t \in J$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.6)$$

ou, de façon équivalente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \quad \text{p.p. sur } J \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Une solution $(J, x(\cdot))$ est dite maximale si, pour toute autre solution $(\bar{J}, \bar{x}(\cdot))$, nous avons $\bar{J} \subset J$ et $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ sur \bar{J} .

On a le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Théorème de Cauchy Lipschitz) On suppose que la fonction :

$$f : I \times V \longrightarrow V$$

vérifie les deux hypothèses suivantes :

1. f est localement lipschitzienne par rapport à x au sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall x \in V; \exists r > 0, B(x, r) \subset V; \exists \alpha \in L_{loc}^1(I, \mathbb{R}^+) \\ \forall t \in I; \forall y, z \in B(x, r) \quad \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|. \end{aligned}$$

2. f est localement intégrable par rapport à t , i.e. :

$$\forall x \in V; \exists \beta \in L_{loc}^1(I, \mathbb{R}^+); \quad \forall t \in I; \quad \|f(t, x)\| \leq \beta(t).$$

Alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times V$, il existe une unique solution maximale $(J, x(\cdot))$ du problème de Cauchy (1.5).

Remarque 1.1 On n'a pas forcément $J = I$; considérons, par exemple, le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation homogène $\dot{x}(t) = x^2$ est donnée par $x(t) = \frac{-1}{t+c}$, l'unique solution vérifiant la condition initiale est $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$, définie sur des intervalles ne contenant pas $\frac{1}{x_0}$ (dans le cas où $x_0 \neq 0$). L'intervalle J est donné en fonction du signe de x_0 :

- Si $x_0 = 0$, on a $J = \mathbb{R}$ et $x(\cdot) \equiv 0$.

- Si $x_0 > 0$, on a $J =] - \infty, \frac{1}{x_0}[$ et $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$.
- Si $x_0 < 0$, on a $J =] \frac{1}{x_0}, +\infty[$ et $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$.

Remarque 1.2 Si f est seulement continue, on n'a pas unicité de la solution en général, par exemple considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \sqrt{|x|} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

avec $J = \mathbb{R}$. La fonction identiquement nulle est solution, ainsi que

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^2}{4} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Une version globale du théorème de Cauchy-Lipschitz est donnée par le théorème ci-dessous :

Théorème 1.2 ([42]) *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, on suppose de plus que $V = \mathbb{R}^n$ et que f est globalement lipschitzienne par rapport à x , i.e.*

$$\exists \alpha \in L^1_{loc}(I, \mathbb{R}^+), \forall t \in I; \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \alpha(t) \|y - z\|.$$

Alors $J = I$.

1.3 Systèmes différentiels linéaires

Considérons le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

où les applications

$$\begin{aligned} t &\longmapsto A(t) \in M_n(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto B(t) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

sont localement intégrables sur l'intervalle I considéré.

Définition 1.4 On appelle *résolvante* du problème (1.7), la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t, t_0) &= A(t)R(t, t_0) \\ R(t_0, t_0) &= Id \end{cases}$$

où $R(t, t_0) \in M_n(\mathbb{R})$.

La résolvante possède les propriétés suivantes :

1. $R(t_2, t_0) = R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)$.
2. Si $\Delta(t, t_0) = \det R(t, t_0)$, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial t}(t, t_0) = \operatorname{tr} A(t)\Delta(t, t_0) \\ \Delta(t_0, t_0) = 1 \end{cases}$$

3. La solution du problème de Cauchy (1.7) est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s)ds.$$

obtenue via la méthode de la variation de la constante.

4. Lorsque $t_0 = 0$, on note plutôt $M(t) = R(t, 0)$. La solution du problème de Cauchy (1.7) se reformule de la façon suivante :

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)ds.$$

Remarque 1.3 Dans le cas des systèmes autonomes, le problème de Cauchy dans \mathbb{R}^n est de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors, dans ce cas, la résolvante est l'application $M : t \mapsto \exp(tA)$, et la solution de ce problème est

$$x(t) = \exp(tA)x_0.$$

L'exponentielle $\exp(tA)$ est défini par la série

$$\exp(tA) = Id + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots$$

Cette série est normalement convergente dans l'espace de Banach $M_n(\mathbb{C})$, vu que

$$\left\| \sum_{n=p}^{n=q} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=p}^{n=q} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n \leq \exp \|tA\|.$$

Exemple 1.1 Considérons l'équation autonome

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

Comme les valeurs propres $\mp i$ de la matrice A sont distinctes, A est diagonalisable, de plus,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(it) & 0 \\ 0 & \exp(-it) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et la solution du système est donnée par

$$x(t) = (\exp(tA))x_0$$

Pour toute donnée initiale $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

1.4 Applications du théorème de Cauchy-Lipschitz en théorie du contrôle

1.4.1 Systèmes de contrôle généraux

Considérons le système de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où f est une fonction de $I \times V \times U$; I un intervalle de \mathbb{R} , V un ouvert de \mathbb{R}^n , U un ouvert de \mathbb{R}^m .

Pour rester dans le cadre général, il suffit de supposer que pour chaque contrôle u considéré, la fonction :

$$F : (t, x) \mapsto f(t, x, u(t))$$

vérifie les hypothèses du théorème (1.1). Bien entendu en fonction de la classe de contrôle considérée, ces hypothèses peuvent être plus au moins difficiles à vérifier.

On peut donner des hypothèses certes moins générales, mais qui suffisent dans la grande majorité des cas. Ces hypothèses sont :

1. L'ensemble des contrôles considérés est inclus dans $L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$.
2. La fonction f est de classe C^1 sur $I \times V \times U$.

Il est facile de montrer qu'alors les hypothèses du théorème (1.1) sont vérifiées, et donc que pour chaque contrôle fixé, il existe une unique solution maximale $(J, x(\cdot))$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. sur } J \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Définition 1.5 (trajectoire) Une fonction $(x, u) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ telle que

- $u \in L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$,
 - x est solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, p.p. $t \in I$.
- est dite trajectoire du système de contrôle (1.8).

1.4.2 Systèmes de contrôle linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + \gamma(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

Les hypothèses du théorème (1.1) sont clairement vérifiées si les applications :

$$\begin{aligned} t &\longmapsto A(t), \\ t &\longmapsto B(t)u(t), \\ t &\longmapsto \gamma(t), \end{aligned}$$

sont localement intégrables sur l'intervalle I considéré.

Supposons :

- $A(\cdot) \in L_{loc}^1(I, M_n(\mathbb{R}))$.

- $\gamma(\cdot) \in L_{loc}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Par ailleurs les hypothèses assurant l'intégrabilité locale de $B(\cdot)u(\cdot)$ dépendent de l'ensemble des contrôles considérés.

- Si $u(\cdot) \in L_{loc}^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ alors on suppose que $B(\cdot) \in L_{loc}^1(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$.

- Si $u(\cdot) \in L_{loc}^2(I, \mathbb{R}^m)$ alors on suppose que $B(\cdot) \in L_{loc}^2(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$.

De manière générale si $u(\cdot) \in L_{loc}^p(I, \mathbb{R}^m)$ alors on suppose que $B(\cdot) \in L_{loc}^q(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$

où :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

- Si les contrôles sont des fonctions mesurables à valeurs dans un compact $\Omega \in \mathbb{R}^m$, alors on suppose que $B(\cdot) \in L_{loc}^1(I, M_{n,m}(\mathbb{R}))$.

Chapitre 2

Stabilité et théorie de Lyapunov

La notion de stabilité correspond à l'idée d'un comportement qui dure dans le temps et permet de formaliser la question suivante : supposons que l'on initialise le système dynamique

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

en un point voisin d'un point d'équilibre x_0 , qu'advient-il de la trajectoire solution ? Cette question est d'importance car dans la pratique les conditions initiales présentent des incertitudes ; il serait souhaitable que deux conditions initiales voisines conduisent à des trajectoires solutions voisines pour tout temps et ceci même pour des temps infiniment longs. Une manière naturelle d'aborder cette question consisterait à résoudre l'équation différentielle et à examiner le comportement des solutions. Cependant, en général, on ne sait pas résoudre les équations différentielles.

La réponse à la question nécessite donc une description qualitative des trajectoires du système. C'est le mathématicien russe Lyapunov¹ qui a établi en 1892, dans son mémoire intitulé "Problème général de la stabilité du mouvement" les fondements de la théorie moderne de la stabilité. Les démonstrations utilisent des fonctions auxiliaires appelées aujourd'hui fonction de Lyapunov.

Dans un premier temps, nous allons considérer la stabilité des systèmes autonomes décrits par (2.1). Nous présenterons les deux méthodes de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes autonomes (méthodes directes et méthodes indirectes). Ensuite, nous étendrons cette étude au cas des systèmes non autonomes.

On suppose que pour toute condition initiale x_0 , il existe une unique solution définie

¹Alexander Mikhaïlovich Liapounov, mathématicien et physicien russe. Après des études à l'université de Saint-Pétersbourg (où il est élève de P.L. Tchebychev), il est assistant puis professeur à l'université de Kharkov. En 1902, il est nommé professeur à l'université de Saint-Pétersbourg.

sur \mathbb{R} du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Nous noterons indifféremment $x(t, x_0)$ ou $x(t)$ cette solution.

2.1 Notions de stabilité

Une notion qui est primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion du point d'équilibre.

Définition 2.1 *L'état x_e est appelé état d'équilibre ou point d'équilibre pour le système (2.2) si lorsque $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq t_0$. En d'autres termes, x_e vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.*

Remarque 2.1 ([23]) *On peut toujours se ramener au cas où le point d'équilibre est l'origine 0 puisque si x_e vérifie $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$, la dérivée de z est donnée par*

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \stackrel{\text{déf}}{=} g(z), \quad \text{et } g(0) = 0.$$

l'origine est bien un point d'équilibre du système $\dot{z} = g(z)$.

Définition 2.2 ([23]) *Le point d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \rho > 0$, il existe $r(\rho) > 0$ tel que*

$$\text{si } \|x_0 - x_e\| \leq r \text{ alors } \|x(t) - x_e\| \leq \rho, \quad \forall t \geq 0.$$

Si ce n'est pas le cas, le point d'équilibre est dit instable.

Cette définition signifie que, quelle que soit la boule d'exigence de rayon ρ , il est toujours possible de choisir une certaine sous-boule de rayon r telle que pour toute condition initiale comprise dans cette sous-boule, la trajectoire résultante sera, en tout temps, comprise dans la boule d'exigence de rayon ρ .

Dans un langage plus imagé, un petit déséquilibre initial n'entraîne qu'un petit déséquilibre au cours du temps, déséquilibre qui peut très bien être permanent.

Il existe plusieurs notions de stabilité :

- Stabilité asymptotique.
- Stabilité exponentielle.
- Stabilité locale et globale.

La stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage de l'équilibre tel que toute trajectoire ayant pour condition initiale un point de ce voisinage converge vers le point d'équilibre.

Définition 2.3 (Stabilité asymptotique) *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif, i.e., s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(x_e, r)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.*

Définition 2.4 (Stabilité exponentielle) *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs k et α tels que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\| < k \|x_0\| \exp(-\alpha t)$$

dans une boule $B(r)$ autour de l'origine.

Exemple 2.1 *Considérons le système décrit par*

$$\dot{x} = -(1 + \sin(x^2))x.$$

Il est clair que $x_e = 0$ est un point d'équilibre.

La solution du système est donnée par

$$x(t) = x(0) \exp \int_0^t - (1 + \sin(x^2(s))) ds.$$

On a $\forall t \geq 0, |x(t)| < k |x(0)| \exp(-t)$. D'où la stabilité exponentielle du système en question.

Remarque 2.2 – *Dans chacune des définitions précédentes, la stabilité est définie de manière locale puisque reliée à la notion de voisinage. En utilisant les définitions précédentes, il n'est pas possible à priori de prédire le comportement du système pour une condition initiale prise loin du point d'équilibre.*

Définition 2.5 *Si un système est stable asymptotiquement (exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans \mathbb{R}^n , on dira que le point d'équilibre $x_e = 0$ est asymptotiquement (exponentiellement) stable au sens large. On dira aussi qu'il est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.*

Remarque 2.3 – *Pour un système linéaire $\dot{x}(t) = Ax(t)$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$, on rappelle que l'origine est un point d'équilibre et la stabilité locale est équivalente à la stabilité globale. C'est une conséquence directe du théorème ci-dessous caractérisant la stabilité des systèmes linéaires autonomes.*

Théorème 2.1 ([23]) – *S'il existe une valeur propre λ de A telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors le point d'équilibre 0 est instable.*

- *Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.*
- *Le point d'équilibre 0 est stable si et seulement si toute valeur propre de A est à partie réelle négative ou nulle, et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.*

La définition de la stabilité présente certains désavantages importants :

- Il est nécessaire de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.
- Le maniement de la définition est fastidieux.

Par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans devoir intégrer les équations différentielles seraient les bienvenues.

2.2 Méthode directe de Lyapunov

2.2.1 Fonction de Lyapunov

La notion de fonction de Lyapunov constitue d'une certaine manière une généralisation de l'énergie. Etant donnée une fonction définie positive, l'idée directrice des théorèmes de Lyapunov consiste à évaluer l'évolution de cette fonction sur les trajectoires du système afin de conclure à la décroissance de l'énergie.

Illustrons son origine mécanique par l'étude de l'équilibre de l'oscillateur harmonique avec frottement visqueux.

Si $d(\dot{x})$ représente le frottement visqueux, supposé être une fonction impaire de la vitesse \dot{x} , alors le principe fondamental de la dynamique fournit

$$m\ddot{x} = -kx - d(\dot{x}).$$

Posons $z_1 = x$ et $z_2 = \dot{x}$ on obtient

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{k}{m}z_1 - \frac{d}{m}z_2. \end{cases}$$

Ce système physique possède l'énergie totale E , comme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$E = \frac{1}{2}mz_2^2 + \frac{1}{2}kz_1^2 = V(z_1, z_2).$$

Étudions l'évolution de l'énergie au cours du temps. Si $(x(t), \dot{x}(t))$ est une solution alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \right) = m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + kx(t) = -\dot{x}(t)d(\dot{x}(t)) \leq 0,$$

car d est une fonction impaire. On observe donc que l'énergie décroît le long des trajectoires du mouvement.

Nous allons maintenant introduire la notion de dérivation d'une fonction le long des trajectoires du système.

On considère le système (2.2), pour simplifier l'écriture on supposera que l'origine est un point d'équilibre.

Soit V une fonction de classe C^1 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine, $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto V(x)$. On notera \dot{V} la fonction définie par

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x(t))|_{t=0} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

c'est la dérivée de $V(x)$ le long des trajectoires du système (2.2).

Définition 2.6 – V est dite définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans un voisinage de 0 pour tout $x \neq 0$.

- V est dite définie négative si : $-V$ est définie positive.
- V est dite semi-définie positive si : $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage de 0.
- V est non définie si : $V(0) = 0$ et $V(x)$ change de signe dans tout voisinage de 0.

Exemple 2.2 – $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ définie positive dans \mathbb{R}^3 .

- $V(x) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$ est semi-définie positive dans \mathbb{R}^3 .
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive dans \mathbb{R}^2 mais semi-définie positive dans \mathbb{R}^3 .
- $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$ est définie positive à l'intérieur du cercle unité.
- La forme quadratique $V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j$, où P est une matrice réelle symétrique, est définie positive ssi toutes les valeurs propres de P sont strictement positives, autrement dit, V est définie positive si et seulement si la matrice P est symétrique définie positive. Rappelons le principe de Rayleigh : si P est une matrice symétrique (ou plus généralement une matrice hermitienne), alors toutes ses valeurs propres sont réelles, de plus,

$$\lambda_{\min}(P) x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) x^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour vérifier qu'une matrice symétrique est définie positive, on peut utiliser le critère de Sylvester : P est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont positifs.

Définition 2.7 (Fonction de Lyapunov) Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(x) = 0 \quad x = 0,$$

ayant la propriété

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0, \quad \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Le résultat fondamental de la stabilité de Lyapunov affirme que si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable. Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est à dire $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \neq 0$, alors la stabilité est en plus asymptotique. Nous précisons mieux ce résultat dans les sections qui suivent.

2.2.2 Théorème de stabilité locale

Le premier théorème en relation avec la fonction de Lyapunov est le résultat de stabilité locale autour du point d'équilibre. Nous énonçons le théorème avec précision :

Théorème 2.2 (Lyapunov, 1892) Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (2.2), et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine. S'il existe une fonction de Lyapunov V définie sur D , alors le point d'équilibre $x_e = 0$ est stable. Si en plus, $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in D - \{0\}$, alors $x = 0$ est asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$, choisissons $r \in (0, \varepsilon]$ tel que

$$B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq r\} \subset D.$$

Soit $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$. Alors $\alpha > 0$ (par la première hypothèse du théorème). Choisissons $\beta \in (0, \alpha)$ et soit

$$\Omega_\beta = \{x \in B(r), V(x) \leq \beta\}.$$

Alors Ω_β est dans l'intérieur de $B(r)$, car dans le cas contraire, il existerait $p \in \Omega_\beta$ qui soit au même temps sur la frontière de $B(r)$. En ce point p , on aurait,

$$V(p) \geq \alpha > \beta$$

or, pour tout $x \in \Omega_\beta$, $V(x) \leq \beta$, ce qui constitue une contradiction.

L'ensemble Ω_β a la propriété suivante : n'importe quelle trajectoire dans Ω_β , issue de $t = 0$ reste dans Ω_β pour tout $t \geq 0$. En effet, par la deuxième hypothèse du théorème nous avons

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0.$$

Par la compacité de l'ensemble Ω_β , on conclut que le système (2.2) a une unique solution pour tout $t \geq 0$ dès que $x(0) \in \Omega_\beta$. Comme V est continue et vérifie $V(0) = 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\|x\| \leq \delta \implies V(x) < \beta.$$

Par suite

$$B(\delta) \subset \Omega_\beta \subset B(r)$$

et les implications suivantes sont vérifiées

$$x(0) \in B(\delta) \implies x(0) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in B(r).$$

Par conséquent

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < r \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui signifie que le point d'équilibre $x = 0$ est stable.

Reste donc à montrer la stabilité asymptotique. Pour se faire, supposons donc

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0, \quad x \in D \tag{2.3}$$

et montrons que $x(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, c'est à dire : pour tout $a > 0$, il existe $T = T(a) > 0$ tel que $\|x(t)\| \leq a$, pour tout $t \geq T$. Par les mêmes arguments que précédemment, on sait que pour tout $a > 0$, on peut choisir $b > 0$ tel que $\Omega_\beta \subset B(a)$. Il suffit alors de montrer que

$$V(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Comme $V(x(t))$ est décroissante et minorée par zéro, il vient que

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Pour montrer que $c = 0$, on supposera le contraire ($c > 0$). Par la continuité de $V(x)$, il existe $d > 0$ tel que $B(d) \subset \Omega_c$. La limite $V(x(t)) \rightarrow c > 0$ implique que la trajectoire $x(t)$ reste à l'extérieur de la boule $B(d)$ pour tout $t \geq 0$. Posons

$$-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$$

(γ existe car \dot{V} est continue sur le compact $\{d \leq \|x\| \leq r\}$). Par l'hypothèse (2.3), nous avons $-\gamma < 0$. Il vient donc

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq V(x(0)) - \gamma t \rightarrow -\infty, \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Cette dernière inégalité contredit l'hypothèse $c > 0$. ■

Exemple 2.3 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4(x_1 + x_2) - h(x_1 + x_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement lipschitzienne vérifiant

$$h(0) = 0, \quad xh(x) \geq 0, \quad \forall |x| \leq 1.$$

Considérons la forme quadratique :

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

comme fonction candidate de Lyapunov. La dérivée $\dot{V}(x)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (4x_1 + 2x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2 \\ &= -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2)h(x_1 + x_2) \\ &\leq -2x_1^2 - 6(x_1 + x_2)^2, \quad \forall |x_1 + x_2| \leq 1 \\ &= -x^T \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} x, \quad \forall |x_1 + x_2| \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $\dot{V}(x)$ est définie négative dans l'ensemble

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n, |x_1 + x_2| \leq 1\}.$$

La fonction V est bien une fonction de Lyapunov pour le système (2.4), on conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est localement asymptotiquement stable.

2.3 Méthode indirecte de Lyapunov

Une approximation locale de la dynamique du système autour du point d'équilibre permet, dans certains cas, de déduire la stabilité locale du système complet. Il s'agit de la méthode indirecte de Lyapunov.

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1(D)$ et D une partie de \mathbb{R}^n contenant le point d'équilibre du système, i.e. $f(0) = 0$. Par le théorème de la moyenne, nous avons

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x$$

où z_i est un point du segment joignant x et l'origine. Cette égalité est vraie pour tout $x \in D$ tel le segment joignant x et l'origine reste dans D . Comme $f(0) = 0$, nous pouvons écrire

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

D'où l'on peut déduire que

$$f(x) = Ax + g(x)$$

avec

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad g_i(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x.$$

La fonction g_i ($i = 1, \dots, n$) vérifie

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|$$

et par la continuité de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, on remarque que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Cela signifie que dans un voisinage de zéro suffisamment petit, on peut approcher le système (2.2) par son linéarisé

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{où} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0). \quad (2.5)$$

Le théorème qui suit, connu comme méthode indirecte de Lyapunov, utilise la linéarisation (2.5) du système (2.2) et peut dans certain cas apporter une réponse au problème de la stabilité locale, plus précisément :

Théorème 2.3 ([23]) *Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système*

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $C^1(D)$ et D un voisinage de zéro. Soit

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=0}.$$

Alors,

1. *L'origine est asymptotiquement stable si $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ pour toutes les valeurs propres λ_i de A .*
2. *L'origine est instable si $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ pour au moins une valeur propre λ_i de A .*

Notons que ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système lorsque $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ pour tout i et $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ pour un certain i .

Exemple 2.4 *Considérons le système*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a \sin x_1 - b \sin x_2.\end{aligned}$$

Nous sommes en présence de deux points d'équilibres : $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ et $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$. La matrice jacobienne est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}.$$

Pour étudier la stabilité de l'origine, on calcule la jacobienne au point $x = 0$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}.$$

Pour tout $a, b > 0$, les valeurs propres de A sont purement réelles et sont strictement négatives. On conclut donc que le système est asymptotiquement stable à l'origine.

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$, on calcule la jacobienne en ce point :

$$\tilde{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \Big|_{x_1=\pi, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de \tilde{A} sont

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}.$$

Pour tout $a > 0$ et $b \geq 0$, nous avons $\lambda_1 = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a} > 0$. En vertu du théorème 2.3, le point d'équilibre $(x_1 = \pi, x_2 = 0)$ est instable.

2.3.1 Théorème de stabilité globale

Nous avons vu que la stabilité locale signifie la stabilité pour toute condition initiale x_0 dans un voisinage D du point d'équilibre, et la stabilité globale celle pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La question est de savoir s'il suffit de remplacer D par \mathbb{R}^n et de vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du

système. La réponse est non (cf. [23]), par conséquent il faut une condition supplémentaire : Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclut sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, et d'autre part il faut également que la condition de bornitude radiale existe, c'est-à-dire

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Dans ce cas, on dit que V est radialement non-bornée. Le théorème suivant, dû à Barbashin-Krasovskii, récapitule ces conditions :

Théorème 2.4 *Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système (2.2). Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\begin{aligned} V(x) &> 0 \quad \forall x \neq 0, & V(0) &= 0. \\ \dot{V}(x) &< 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \|x\| &\rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.6}$$

alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Preuve. Soit $p \in \mathbb{R}^n$ un point quelconque. Posons $c = V(p)$, la condition (2.6) implique que pour tout $c > 0$, il existe $r > 0$ tel que $V(x) > c$ chaque fois que $\|x\| > r$. Ainsi, $\Omega_c \subset B_r$, ce qui implique que l'ensemble Ω_c est borné. Le reste de la démonstration est similaire à celle du théorème 2.2. ■

Exemple 2.5 *Considérons le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2 \end{aligned}$$

où $a > 0$, $h(\cdot)$ est localement Lipschitz, $h(0) = 0$, et $yh(y) > 0$ pour tout $y \neq 0$. La fonction de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et radialement non-bornée, sa dérivée

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

est définie négative sur \mathbb{R}^2 pour tout $k \in (0, 1)$. On conclut, grâce au théorème précédent, que l'origine est globalement asymptotiquement stable.

2.4 Fonction de Lyapunov pour les systèmes linéaires

Considérons le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \quad (2.7)$$

Lorsque toutes les valeurs propres de A vérifient $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, alors A est dite matrice de **Hurwitz** ou matrice de stabilité. Supposons que la matrice A est inversible, cela, nous garantirait l'unicité du point d'équilibre $x = 0$. Rappelons que l'origine du système (2.7) est asymptotiquement stable si et seulement si la matrice A est de **Hurwitz**. On peut également caractériser la stabilité asymptotique en utilisant la méthode de Lyapunov. Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x) = x^T P x$$

où P est une matrice réelle symétrique définie positive. La dérivée de V au long des trajectoires du système (2.7) est donnée par

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (PA + A^T P) x = -x^T Q x$$

où Q est la matrice symétrique donnée par

$$Q = -(PA + A^T P). \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) est dite équation de Lyapunov.

Le théorème suivant caractérise la stabilité asymptotique de l'origine en terme de solution de l'équation de Lyapunov :

Théorème 2.5 ([23]) *Une matrice A est de Hurwitz si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive Q donnée, il existe une matrice P symétrique définie positive vérifiant l'équation de Lyapunov (2.8). Si de plus A est de Hurwitz, alors P est l'unique solution de l'équation (2.8).*

Preuve. La suffisance découle du théorème 2.2 avec $V(x) = x^T P x$. Pour montrer la nécessité, supposons que toutes les valeurs propres de A vérifient $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, et considérons la matrice P définie par

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt. \quad (2.9)$$

Cette intégrale est bien définie du fait que les éléments à intégrer sont de la forme $t^{k-1} \exp(\lambda_i t)$, avec $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. La matrice P est clairement symétrique. Montrons

qu'elle est définie positive. Supposons le contraire, il existe donc un vecteur $x \neq 0$ tel que $x^T P x = 0$. Comme la matrice $\exp(At)$ est inversible pour tout t , il vient que

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\implies \int_0^{\infty} x^T \exp(A^T t) Q \exp(At) x dt = 0 \\ &\implies \exp(At) x \equiv 0, \forall t \geq 0 \implies x = 0. \end{aligned}$$

Cette contradiction montre que P est définie positive. En remplaçant l'expression de P dans l'équation de Lyapunov, on obtient

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^{\infty} \exp(A^T t) Q \exp(At) A dt + \int_0^{\infty} A^T \exp(A^T t) Q \exp(At) dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \exp(A^T t) Q \exp(At) dt = \exp(A^T t) Q \exp(At) \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$

ce qui montre que P est bien une solution de l'équation de Lyapunov. Pour montrer que c'est l'unique solution, supposons l'existence d'une autre solution $\tilde{P} \neq P$. Donc

$$(P - \tilde{P}) A + A^T (P - \tilde{P}) = 0,$$

il vient que

$$0 = \exp(A^T t) \left[(P - \tilde{P}) A + A^T (P - \tilde{P}) \right] \exp(At) = \frac{d}{dt} \left\{ \exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At) \right\}$$

autrement dit

$$\exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At) \equiv \text{constante pour tout } t.$$

En particulier, comme $\exp(A0) = Id$, nous avons

$$(P - \tilde{P}) = \exp(A^T t) (P - \tilde{P}) \exp(At) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Finalement $P = \tilde{P}$. ■

Remarque 2.4 L'équation (2.8) est une équation linéaire algébrique qui peut se résoudre en la réécrivant sous la forme $Mx = y$, où x et y sont deux vecteurs constitués des éléments de P et Q . Elle peut également être résolue en la considérant comme cas particulier de l'équation de Sylvester $PA + BP + C = 0$. Il existe de nombreuses méthodes numériques efficaces pour la résolution de telles équations (voir [16]). Notons que la plus part des logiciels de programmation des systèmes de contrôle contiennent des commandes pour la résolution de l'équation de Lyapunov.

Exemple 2.6 Soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

L'équation de Lyapunov a la forme suivante

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'unique solution de cette équation est

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \implies P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$$

2.5 Méthode de construction des fonctions de Lyapunov : Méthode de Krasovskii [30]

Il existe plusieurs méthodes de construction de fonctions de Lyapunov, entre autre la méthode de Krasovskii et la méthode du gradient conjuguée. Le trait commun de ces méthodes est de procéder par construction/correction et essais/erreurs. En d'autres termes, il n'y pas de méthode constructive directe à proprement dit. Il s'agit de procéder de manière itérative en alternant entre, d'une part, imposer la première condition de positivité de la fonction de Lyapunov, et, d'autre part, imposer la seconde condition concernant la décroissance le long des solutions de la fonction de Lyapunov. Dans ce qui suit, nous présentons la méthode de Krasovskii. La référence [30] contient une présentation détaillée des autres méthodes.

Théorème 2.6 ([30]) Soit $\dot{x} = f(x)$ tel que $f(0) = 0$. Définissons :

$$A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.10}$$

S'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ contenant l'origine $0 \in \Omega$, et que la matrice $F(x) = A(x) + A(x)^T < 0$ est définie négative dans l'ouvert Ω (i.e. $x^T F(x)x < 0, \forall x \neq 0, x \in \Omega$) alors la fonction

$$V(x) = f(x)^T f(x).$$

est une fonction de Lyapunov et l'origine 0 est localement asymptotiquement stable. Si de plus, $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$, alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Ce théorème admet une certaine généralisation en considérant une équation de Lyapunov pour la matrice $F(x)$.

Théorème 2.7 ([30]) *S'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ainsi que deux matrices définies positive $P > 0$ et $Q > 0$ telles que $\forall x \neq 0, x \in \Omega$ il est vrai que*

$$F(x) = A(x)^T P + P A(x) + Q < 0$$

est une matrice définie négative, alors

$$V(x) = f(x)^T P f(x)$$

est une fonction de Lyapunov, et 0 est localement asymptotiquement stable. Si de plus, $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $V(x) \rightarrow \infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$, alors $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

2.6 Théorie de Lyapunov dans le cas non autonome

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrite par l'équation dynamique

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.11}$$

où $f : [0, \infty[\times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue par rapport à t et localement lipschitzienne par rapport à x sur $[0, \infty[\times D$, et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant l'origine $x = 0$.

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que la solution dépend de l'instant initial t_0 . Nous allons introduire dans ce qui suit la notion d'uniformité qui permet alors de caractériser le comportement d'une classe importante de systèmes non linéaires.

L'origine est un point d'équilibre pour le système (2.11) à l'instant $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme dans le cas autonome, sans perte de généralité, on peut toujours supposer que l'origine est le point d'équilibre. En effet, supposons que $\bar{y}(\tau)$ est une solution du système

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y)$$

définie pour tout $\tau \geq a$. Le changement de variables

$$\begin{aligned} x &= y - \bar{y}(\tau) \\ t &= \tau - a \end{aligned}$$

transforme le système (2.11) en un système équivalent ayant l'origine comme point d'équilibre en $t = 0$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= g(\tau, y) - \dot{\bar{y}}(\tau) = g(t+a, x + \bar{y}(t+a)) - \dot{\bar{y}}(t+a) \\ &= g(t+a, x + \bar{y}(t+a)) - g(t+a, \bar{y}(t+a)) \stackrel{\text{déf}}{=} f(t, x), \quad \forall t \geq 0.\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on notera $x(t, t_0, x_0)$ la solution du système (2.11) à l'instant $t \geq t_0 \geq 0$ initialisé en x_0 à l'instant t_0 .

Définition 2.8 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2.11) est dit*

- *stable si, $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que*

$$\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon, t_0) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

On dit que l'origine est instable dans le cas contraire.

- *uniformément stable si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon)$ tel que*

$$\forall t_0 \geq 0, \quad \|x_0\| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

- *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe une constante $c = c(t_0)$ telle que*

$$\|x_0\| < c \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

- *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et il existe une constante c (indépendante de t_0) telle que*

$$\|x_0\| < c \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0, \quad \text{uniformément par rapport à } t_0$$

c'est à dire : $\forall \eta > 0, \exists T = T(\eta) > 0$ tel que

$$\|x_0\| < c \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta).$$

- *globalement uniformément stable s'il est uniformément stable, $\delta(\varepsilon)$ peut être choisi de manière à avoir $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$, et pour tout $\eta > 0, c > 0$, il existe $T = T(\eta, c) > 0$ tel que*

$$\|x_0\| < c \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \eta, \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, c).$$

Avant d'énoncer les principaux théorèmes permettant d'étudier les différents concepts de stabilité de Lyapunov pour les systèmes non autonomes, nous allons d'abord introduire des classes de fonctions dites \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ et \mathcal{KL} . Ces classes jouent un rôle primordiale dans l'analyse de la stabilité.

Définition 2.9 ([37]) Une fonction $\varphi : [0, a[\rightarrow [0, \infty[$ dite de classe \mathcal{K} si φ est continue, strictement croissante et vérifie $\varphi(0) = 0$. Elle est dite de classe \mathcal{K}_∞ si de plus $a = +\infty$ et $\varphi(r) \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow +\infty$.

On peut montrer (cf. [18]) qu'une fonction V est définie positive dans une boule $B(R)$ si et seulement si on peut définir deux fonctions φ_1 et φ_2 de classe \mathcal{K} telles que

$$\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|), \quad \forall x \in B(R).$$

On notera également \mathcal{KL} la classe des fonctions $\beta : [0, a[\times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ telles que pour chaque s fixé, la fonction $r \rightarrow \beta(r, s)$ est de classe \mathcal{K} , et pour chaque r fixé, la fonction $s \rightarrow \beta(r, s)$ est décroissante et vérifie

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0.$$

On précisera mieux dans la section suivante le rôle de la classe \mathcal{KL} dans l'analyse de la stabilité des systèmes non autonomes.

Exemple 2.7 Si V est une fonction définie positive homogène de degré k , (i.e. $V(\lambda x) = \lambda^k V(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$), alors

$$V(x) = V\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^k V\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad \forall x \neq 0.$$

On pose alors

$$\begin{aligned} a_1 &= \sup V(y), \quad \|y\| = 1, \\ a_2 &= \inf V(y), \quad \|y\| = 1, \end{aligned}$$

et on a

$$a_2 \|x\|^k \leq V(x) \leq a_1 \|x\|^k.$$

- $\alpha(r) = \tan^{-1}(r)$ est strictement croissante car $\alpha'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0$. Elle appartient donc à la classe \mathcal{K} , mais elle n'est pas de classe \mathcal{K}_∞ car $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \frac{\pi}{2} < \infty$.
- $\alpha(r) = r^c$, $c > 0$, est strictement croissante, de plus, $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, elle est donc de classe \mathcal{K}_∞ .
- $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr + 1}$, $k > 0$, est strictement croissante par rapport à r , et est strictement décroissante par rapport à s , de plus, $\beta(r, s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, elle est donc de classe \mathcal{KL} .

Le Lemme suivant résume certaines propriétés des classes \mathcal{K} et \mathcal{KL} qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

Lemme 2.1 ([37]) Soient α_1, α_2 deux fonctions de classe \mathcal{K} sur $[0, a)$, α_3, α_4 deux fonctions de classe \mathcal{K}_∞ et β une fonction de classe \mathcal{KL} . On note par α_i^{-1} l'inverse de α_i . Alors

- α_1^{-1} est définie sur $[0, \alpha_1(a))$, de plus est elle de classe \mathcal{K} .
- α_3^{-1} est définie sur $[0, \infty)$, de plus est elle de classe \mathcal{K}_∞ .
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$ est de classe \mathcal{K} .
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$ est de classe \mathcal{K}_∞ .
- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$ est de classe \mathcal{KL} .

Les classes \mathcal{K} et \mathcal{KL} interviennent dans l'analyse de la stabilité de Lyapunov à travers les deux lemmes suivants :

Lemme 2.2 ([37]) Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur le domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'origine, continue et définie positive. Soit $B_r \subset D$ avec $r > 0$. Alors, il existe des fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K} , définies sur $[0, r]$, telles que :

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

pour tout $x \in B_r$. Si $D = \mathbb{R}^n$, les fonctions α_1 et α_2 seront définies sur $[0, \infty)$ et l'inégalité précédente a lieu pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Par ailleurs, si $V(x)$ est radialement non bornée, alors α_1 et α_2 peuvent être choisies dans la classe \mathcal{K}_∞ .

Preuve. Définissons la fonction $\psi(s)$ par :

$$\psi(s) = \inf_{s \leq \|x\| \leq r} V(x) \text{ pour } 0 \leq s \leq r.$$

La fonction $\psi(\cdot)$ est continue, définie positive et croissante. Par ailleurs, $V(x) \geq \psi(\|x\|)$ pour $0 \leq \|x\| \leq r$. Soit $\alpha_1(s)$ une fonction de classe \mathcal{K} telle que $\alpha_1(s) \leq k\psi(s)$ avec $0 < k < 1$. Nous avons alors,

$$V(x) \geq \psi(\|x\|) \geq \alpha_1(\|x\|) \text{ pour } \|x\| \leq r$$

D'autre part, on définit $\phi(s)$ par :

$$\phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x) \text{ pour } 0 \leq s \leq r$$

La fonction ϕ est continue, définie positive et croissante. Elle vérifie de plus

$$V(x) \leq \phi(\|x\|) \text{ pour } \|x\| \leq r.$$

Soit $\alpha_2(s)$ une fonction de classe \mathcal{K} telle que $\alpha_2(s) \geq k\phi(s)$ avec $k > 1$. Alors,

$$V(x) \leq \phi(\|x\|) \leq \alpha_2(\|x\|) \text{ pour } \|x\| \leq r.$$

D'où

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|).$$

Si $D = \mathbb{R}^n$, on définit $\psi(s)$ et $\phi(s)$ par :

$$\psi(s) = \inf_{\|x\| \geq s} V(x), \quad \phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x) \quad \text{pour } 0 \leq s$$

Les fonctions $\psi(s)$ et $\phi(s)$ sont continues, définies positives, croissantes et

$$\psi(\|x\|) \leq V(x) \leq \phi(\|x\|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions α_1 et α_2 peuvent être choisies comme précédemment. Si $V(x)$ est radialement non-bornée, $\psi(s)$ et $\phi(s)$ tendent vers $+\infty$ quand s tend vers $+\infty$. D'où l'on peut choisir α_1 et α_2 dans la classe \mathcal{K}_∞ . ■

Remarque 2.5 *Pour une forme quadratique définie positive $V(x) = x^T P x$, le lemme précédent est une conséquence directe des inégalités*

$$\lambda_{\min}(P)\|x\| < x^T P x < \lambda_{\max}(P)\|x\|$$

Lemme 2.3 ([37]) *Considérons l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0$$

où α est une fonction de classe \mathcal{K} sur $[0, a)$ et localement lipschitzienne. Pour tout $y_0 \in [0, a)$, cette équation possède une unique solution $y(t)$ définie pour tout $t \geq t_0$, donnée par

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

où σ est une fonction de classe \mathcal{KL} définie sur $[0, a) \times [0, \infty)$.

La proposition suivante donne une caractérisation plus pratique des différentes notions de la stabilité uniforme à l'aide des fonctions de classes \mathcal{K} et \mathcal{KL} .

Proposition 2.1 ([37]) *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2.11) est*

- *uniformément stable si et seulement s'il existe une fonction φ de classe \mathcal{K} et une constante $c > 0$, indépendantes de t_0 telles que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \varphi(\|x_0\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c.$$

- *uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction β de classe \mathcal{KL} et une constante positive c , indépendante de t_0 , telles que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x_0\| < c. \quad (2.12)$$

- globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité (2.12) est vérifiée pour n'importe quel état initial x_0 .

Dans le cas où la fonction β prend la forme suivante :

$$\beta(r, s) = kr \exp(-\lambda s), \quad \text{avec } \lambda, k > 0.$$

on parlera de la stabilité exponentielle, plus exactement :

Définition 2.10 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2.11) est exponentiellement stable s'il existe des constantes c, k et λ positives telles que*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq k \|x_0\| \exp(-\lambda(t - t_0)), \quad \forall \|x_0\| < c. \quad (2.13)$$

et globalement exponentiellement stable si l'inégalité (2.13) est vérifiée pour n'importe quel état initial x_0 .

Dans le paragraphe suivant, on présentera les principaux théorèmes sur la stabilité uniforme, via la méthode directe de Lyapunov.

Théorème 2.8 ([37]) *Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. Soit $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable (de classe \mathcal{C}^1) telle que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \quad (2.15)$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où $W_1(x)$ et $W_2(x)$ sont des fonctions continues, définies positives sur D . Alors, $x = 0$ est uniformément stable.

Preuve. La dérivée de V tout au long des trajectoires du système est donnée par

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0$$

on choisit $r > 0$ et $c > 0$ tels que $B_r \subset D$ et $c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$. Alors, $\{x \in B_r / W_1(x) \leq c\}$ est dans l'intérieur de B_r . On définit l'ensemble $\Omega_{t,c}$ par

$$\Omega_{t,c} = \{x \in B_r / V(t, x) \leq c\}$$

L'ensemble $\Omega_{t,c}$ contient $\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$ car

$$W_2(x) \leq c \Rightarrow V(t, x) \leq c$$

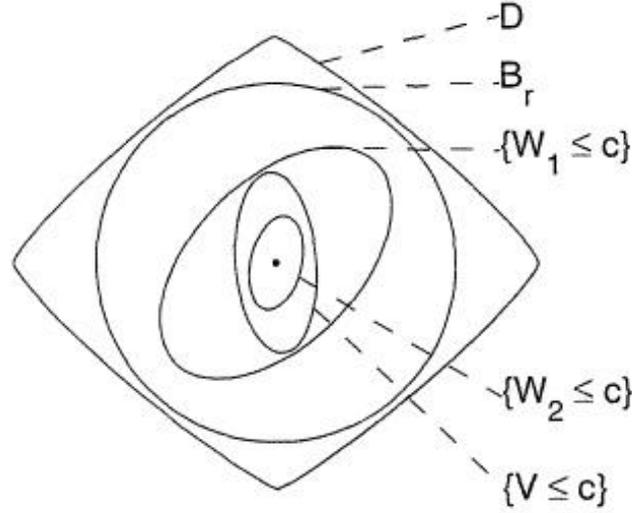


FIG. 2.1 – Représentation géométrique des ensembles de la preuve du théorème 2.8.

D'autre part, $\Omega_{t,c} \subset \{x \in B_r / W_1(x) \leq c\}$ car

$$V(t, x) \leq c \Rightarrow W_1(x) \leq c$$

Ainsi

$$\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\} \subset \Omega_{t,c} \subset \{x \in B_r / W_1(x) \leq c\} \subset B_r \subset D$$

pour tout $t \geq 0$. Ces cinq ensembles sont illustrés dans la figure 2.1

Comme $\dot{V}(t, x) \leq 0$ dans D , pour chaque $t_0 \geq 0$ et chaque $x_0 \in \Omega_{t_0,c}$, la trajectoire de la solution de condition initiale (t_0, x_0) reste dans $\Omega_{t,c}$ pour tout $t \geq t_0$. Par conséquent, toute solution de condition initiale dans $\{x \in B_r / W_1(x) \leq c\}$ reste dans $\Omega_{t,c}$, et donc aussi $\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$, pour tout temps futur. Il vient donc que la solution est bornée et est définie pour tout $t \geq t_0$.

Par ailleurs, comme $\dot{V} \leq 0$, nous avons

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)), \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.16)$$

Par le lemme 2.2, il existe deux fonctions α_1 et α_2 de classe \mathcal{K} , définies sur $[0, r]$, telles que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (2.17)$$

En combinant les inégalités (2.16) et (??), nous obtiendrons :

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(V(t_0, x(t_0))) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$$

comme $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2$ est une fonction de classe \mathcal{K} , l'inégalité

$$\|x(t)\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\|x(t_0)\|))$$

montre que l'origine est uniformément stable. ■

Le lemme suivant est utile pour démontrer les théorèmes 2.9 et 2.10.

Lemme 2.4 (Lemme de Comparaison) *Considérons l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue en t et localement lipschitzienne en x , pour tout $t > 0$ et tout $x \in J \subset \mathbb{R}$. Soit $[t_0, T)$ (T peut être infini) l'intervalle maximal de la solution $x(t)$, et supposons que $x(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Soit $v(t)$ une fonction dérivable vérifiant l'inégalité différentielle :

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) < x_0$$

avec $v(t) \in J$ pour tout $t \in [t_0, T)$. Alors

$$v(t) \leq x(t), \quad \text{pour tout } t \in [t_0, T).$$

Théorème 2.9 ([37]) *Supposons que les conditions du théorème précédent soient satisfaites, où la condition (2.15) est remplacée par*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où $W_3(x)$ est une fonction continue définie positive sur D . Alors $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable. Par ailleurs, si r et c sont choisis tels que $B_r = \{\|x\| \leq r\} \subset D$ et $c < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$, alors toute trajectoire ayant un état initial dans $\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$, vérifie

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

pour une certaine fonction β de classe \mathcal{KL} . Finalement, si $D = \mathbb{R}^n$ et $W_1(x)$ est radialement non-bornée, alors $x = 0$ est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Preuve. En tenant compte de la démonstration du théorème précédent, on sait que si toute trajectoire d'état initial dans $\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$ reste dans $\{x \in B_r / W_1(x) \leq c\}$, pour tout t_0 . D'après le lemme 2.2, il existe une fonction α_3 de classe \mathcal{K} définie sur $[0, r]$, telle que

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

En utilisant l'inégalité

$$V \leq \alpha_2(\|x\|) \Leftrightarrow \alpha_2^{-1}(V) \leq \|x\| \Leftrightarrow \alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \leq \alpha_3(\|x\|)$$

nous constatons que V satisfait l'inégalité différentielle

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \stackrel{\text{déf}}{=} -\alpha(V)$$

où $\alpha = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$ est une fonction de classe \mathcal{K} définie sur $[0, r]$. Supposons, sans perte de généralité, que α est localement lipschitzienne. Soit $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle autonome du premier ordre

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0$$

Grâce au lemme 2.4 il vient que

$$V(t, x(t)) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0$$

D'après le lemme 2.3, il existe une fonction $\sigma(r, s)$ de classe \mathcal{KL} définie sur $[0, r] \times [0, \infty)$ telle que

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, c]$$

Par ailleurs, chaque solution d'état initial dans $\{x \in B_r / W_2(x) \leq c\}$, satisfait l'inégalité

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)) \stackrel{\text{déf}}{=} \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) \end{aligned}$$

Le lemme 2.1 montre que β est une fonction de classe \mathcal{KL} . Ainsi, l'inégalité (2.12) est satisfaite, ce qui implique que $x = 0$ est uniformément asymptotiquement stable. Si $D = \mathbb{R}^n$, les fonctions α_1, α_2 et α_3 sont définies sur $[0, \infty)$. D'où α et par conséquent β sont indépendantes de c . Comme $W_1(x)$ est radialement non borné, c peut-être choisi arbitrairement assez grand pour inclure n'importe quel état initial dans $\{W_2(x) \leq c\}$. Ainsi, l'inégalité (2.12) a lieu pour n'importe quel état initial, cela montre que l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable. ■

Définition 2.11 Une fonction $V(t, x)$ est dite :

- semi-définie positive si $V(t, x) \geq 0$.
- définie positive s'il existe une fonction $W_1(x)$ définie positive telle que

$$V(t, x) \geq W_1(x).$$

- radialement non bornée si W_1 l'est.

- décroissante si $V(t, x) \leq W_2(x)$ pour une certaine fonction définie positive.
- définie négative (semi-définie négative) si $-V(t, x)$ est définie positive (semi définie positive).

Remarque 2.6 Les deux théorèmes précédents montrent que l'origine est

- uniformément stable s'il existe une fonction $V(t, x)$ de classe C^1 sur $[0, \infty) \times D$, définie positive, décroissante, et dont la dérivée au long de la trajectoire du système est semi-définie négative
- uniformément asymptotiquement stable si \dot{V} est définie négative
- globalement uniformément asymptotiquement stable si les conditions pour l'uniforme asymptotique stabilité ont lieu globalement avec $V(t, x)$ radialement non-bornée.

Ces théorèmes généralisent donc les théorèmes sur la stabilité locale et globale des systèmes autonomes. Une fonction V de classe C^1 sur $[0, \infty) \times D$, définie positive, décroissante, et dont la dérivée au long de la trajectoire du système est semi-définie négative est dite fonction de Lyapunov.

Le théorème ci-dessous fournit des conditions suffisantes pour la stabilité exponentielle d'un système non autonome.

Théorème 2.10 ([37]) Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système

$$\dot{x} = f(t, x)$$

et $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. et soit $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable tel que

$$k_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \quad (2.19)$$

$\forall t \geq 0$ et $\forall x \in D$, où k_1, k_2, k_3 et a sont des constantes positives. Alors $x = 0$ est exponentiellement stable. Si la condition est stricte alors $x = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Preuve. A l'aide de la figure 2.1, on peut remarquer que toute trajectoire ayant un état initial $x(t_0)$ dans $\{k_2 \|x\|^a \leq c\}$, pour c suffisamment petit, reste bornée pour tout $t \geq t_0$. Les deux inégalités (2.18) et (2.19) montrent que V satisfait l'inégalité différentielle

$$\dot{V} \leq -\frac{k_3}{k_2} V$$

il en résulte grâce au principe de comparaison (lemme 2.4) que

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) e^{(\frac{k_3}{k_2})(t-t_0)}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[\frac{V(t, x(t))}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} \leq \left[\frac{V(t_0, x(t_0)) e^{(\frac{k_3}{k_2})(t-t_0)}}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} \\ &\leq \left[\frac{k_2 \|x(t_0)\|^a e^{(\frac{k_3}{k_2})(t-t_0)}}{k_1} \right]^{\frac{1}{a}} = \frac{k_2^{\frac{1}{a}}}{k_1} \|x(t_0)\| e^{(\frac{k_3}{k_2})(t-t_0)} \end{aligned}$$

Ainsi, l'origine est exponentiellement stable. Si toutes les conditions ont lieu globalement, c peut être choisi arbitrairement assez grand et l'inégalité ci dessus a lieu pour tout $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$. ■

Exemple 2.8 *Considérons le système scalaire*

$$\dot{x} = -[1 + g(t)] x^3$$

où g est une fonction continue et $g(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$. En utilisant la fonction candidate de Lyapunov

$$V(x) = \frac{x^2}{2},$$

on obtient

$$\dot{V}(t, x) = -[1 + g(t)] x^4 \leq -x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

Les hypothèses du théorème 2.9 sont satisfaites globalement avec $W_1(x) = W_2(x) = V(x)$ et $W_3(x) = x^4$. On conclue que l'origine est globalement uniformément stable.

Exemple 2.9 *Considérons le système*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

où g est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et vérifiant

$$0 \leq g(t) \leq k \quad \text{et} \quad \dot{g}(t) \leq g(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Choisissons $V(t, x) = x_1^2 + [1 + g(t)] x_2^2$ comme fonction candidate de Lyapunov. On peut facilement voir que

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + [1 + k] x_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, $V(t, x)$ est définie positive, décroissante et radialement non-bornée. La dérivée de V le long des trajectoires du système est donnée par

$$\dot{V}(t, x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2.$$

En utilisant les estimations suivantes

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geq 2 + 2g(t) - g(t) \geq 2$$

on obtient

$$\dot{V}(t, x) \leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} -x^T Q x$$

où Q est définie positive. C'est à dire, $\dot{V}(t, x)$ est définie négative.

Par conséquent, toutes les hypothèses du théorème 2.9 sont satisfaites globalement avec des fonctions quadratiques W_1 , W_2 et W_3 , définies positives. Rappelons qu'une fonction quadratique $x^T P x$ définie positive vérifie

$$\lambda_{\min}(P) x^T x \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P) x^T x$$

On voit que toutes les conditions du théorème 2.10 sont vérifiées globalement avec $a = 2$, on déduit donc que l'origine est globalement exponentiellement stable.

Exemple 2.10 Soit $A(t)$ une fonction matricielle continue pour tout $t \geq 0$. Etudions la stabilité du système linéaire non autonome

$$\dot{x} = A(t)x$$

autour du point d'équilibre $x = 0$. Supposons qu'il existe une fonction P de classe \mathcal{C}^1 , vérifiant :

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

et l'équation différentielle matricielle suivante

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \quad (2.20)$$

où $Q(t)$ est une fonction matricielle continue, symétrique et définie positive, c'est à dire,

$$Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

La fonction candidate de Lyapunov

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

vérifie

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|_2^2$$

($\|\cdot\|_2$ étant la norme euclidienne de \mathbb{R}^n) et la dérivée de V le long des trajectoires du système est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} \\ &= \dot{x}^T \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) \right] x \\ &= -x^T Q(t)x \leq -c_3 \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi donc toutes les hypothèses du théorème 2.10 sont vérifiées globalement avec $a = 2$, on conclue que l'origine est exponentiellement stable.

L'analyse de la stabilité des systèmes linéaires non autonomes peut complètement être caractérisée en termes de la résolvante du système. En effet, considérons à nouveau le système

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.21}$$

rapellons que la solution du système est donnée par

$$x(t) = R(t, t_0)x(t_0)$$

où $R(t, t_0)$ est la matrice résolvante.

Nous avons le théorème suivant permettant de caractériser la stabilité asymptotique uniforme du système linéaire (2.21) :

Théorème 2.11 *Le point d'équilibre $x = 0$ du système (2.21) est (globalement) uniformément asymptotiquement stable si et seulement si la résolvante du système vérifie*

$$\|R(t, t_0)\| \leq k \exp(-\lambda(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

pour certaines constantes positives k et λ .

Ce théorème montre que, pour un système linéaire non autonome, l'uniforme asymptotique stabilité de l'origine est équivalente à la stabilité exponentielle.

2.6.1 Méthode indirecte de Lyapunov pour les systèmes non autonomes

Le théorème ci-dessous énonce la méthode indirecte de Lyapunov établissant la stabilité asymptotique de l'origine dans le cas d'un système autonome. Sa démonstration repose essentiellement sur le lemme suivant que nous énonçons sans démonstration.

Lemme 2.5 Soit $x = 0$ un point d'équilibre exponentiellement stable du système (2.21). Supposons que $A(t)$ est continue, bornée. Soit $Q(t)$ une fonction matricielle continue, bornée et symétrique définie positive. Alors, il existe une fonction matricielle $P(t)$ de classe \mathcal{C}^1 , bornée, symétrique définie positive et vérifiant l'équation (2.20).

En tenant compte de l'exemple 2.11, la fonction $V(t, x) = x^T P(t)x$, où P est donnée par le lemme précédent, est une fonction de Lyapunov pour le système (2.21), de plus, elle vérifie toutes les conditions du théorème 2.10.

Théorème 2.12 Soit $x = 0$ un point d'équilibre pour le système

$$\dot{x} = f(t, x)$$

où $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , $D = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 < r\}$. On suppose que la matrice jacobienne $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]$ est bornée et lipschitzienne sur D , uniformément par rapport à t . Soit

$$A(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right]_{x=0}.$$

Alors, l'origine est un équilibre exponentiellement stable pour le système non linéaire s'il représente un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système linéaire

$$\dot{x} = A(t)x.$$

Preuve. Comme l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable du système linéaire, de plus, la fonction $A(t)$ est continue et bornée, le lemme 2.5 assure l'existence d'une fonction matricielle $P(t)$ de classe \mathcal{C}^1 , bornée, symétrique définie positive et vérifiant l'équation différentielle (2.20), où Q est une fonction matricielle continue, symétrique et définie positive. On utilisera alors

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

comme fonction candidate de Lyapunov pour le système non linéaire.

Notons que les hypothèses du théorème sur la matrice jacobienne de f permettent d'écrire

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_2) \right\|_2 \leq L_1 \|x_1 - x_2\|_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

En utilisant le théorème de la valeur moyenne (comme dans le cas autonome), on obtient l'expression suivante

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x)$$

où

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \quad \text{et} \quad g_i(t, x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x$$

z_i étant un point du segment joignant x , l'origine et la fonction g vérifie l'estimation suivante

$$\|g(t, x)\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \leq L \|x\|_2^2$$

où $L = \sqrt{n}L_1$.

La dérivée de V le long des trajectoires du système est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= f^T(t, x)P(t)x + x^T\dot{P}(t)x + x^TP(t)f(t, x) \\ &= \dot{x}^T \left[\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) \right] x + 2x^TP(t)g(t, x) \\ &= -x^TQ(t)x + 2x^TP(t)g(t, x) \\ &\leq -c_3 \|x\|_2^2 + 2c_2L \|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - 2c_2L\rho) \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho. \end{aligned}$$

Le choix de $\rho < \min \left\{ r, \frac{c_3}{2c_2L} \right\}$ nous assure que la fonction $\dot{V}(t, x)$ est définie négative dans la boule $B_\rho = \{\|x\|_2 < \rho\}$. Par conséquent, toutes les conditions du théorème 2.10 sont vérifiées, il vient donc que l'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système non linéaire. ■

2.7 Inégalités matricielles linéaires

Les techniques LMI (abréviation anglaise d'Inégalité Matricielle Linéaire) permettent de formuler de nombreuses spécifications de conception sous forme de contraintes inégalités. Par exemple, l'analyse et la conception à partir de l'approche de Lyapunov permettent une formulation LMI. La stabilité d'un système dynamique $\dot{x} = Ax$ est équivalente à la faisabilité de trouver $P = P^T$ tel que $A^TP + PA < 0$ et $P > Id$.

Une fois la formulation LMI réalisée, le problème est résolu exactement par les algorithmes d'optimisation convexe.

Une contrainte LMI sur un vecteur variable x de \mathbb{R}^m est une expression de la forme :

$$F(x) = F_0 + x_1F_1 + \dots + x_mF_m < 0 \quad (2.22)$$

où x_1, x_2, \dots, x_m sont des variables réelles, dites aussi variables de décision de la LMI; $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de décision (ses composantes sont des variables de décision) et $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0, 1, \dots, m$ sont des matrices symétriques données.

Il existe des situations où les variables sont des matrices, comme par exemple l'inégalité matricielle de Lyapunov.

$$F(X) = A^T X + X A + Q < 0$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont deux matrices constantes données, et la variable $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice inconnue. Nous allons expliquer dans ce qui suit comment se ramener de cette inégalité matricielle à une LMI de la forme (2.22).

Soit E_1, E_2, \dots, E_m une base de $S^n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathbb{R}^{n \times n}, N = N^T\}$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n . Pour tout $X \in S^n(\mathbb{R})$, il existe $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que $X = \sum_{i=1}^m x_i E_i$. L'inégalité de Lyapunov devient :

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^m x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1 (A^T E_1 + E_1 A) + \dots + x_m (A^T E_m + E_m A) < 0, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre qu'une LMI particulière.

Une autre LMI souvent rencontrée en commande est l'inégalité de Riccati

$$A^T P + P A + P B R^{-1} B^T P + Q < 0,$$

où $R > 0$, $Q = Q^T$, $R = R^T$, $P = P^T$.

Cette dernière s'exprime comme une LMI en P .

La notation suivante $F < 0$ (ou $F \leq 0$) signifie que la matrice F est définie négative (respectivement F semi-définie négative). La contrainte $F(x) < 0$ est une contrainte convexe en x , c'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$ est convexe. On dit que la LMI (2.22) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ tel que l'inégalité matricielle (2.22) est vérifiée. Pour des fonctions affines $F, G : \mathbb{R}^m \rightarrow S^n(\mathbb{R})$, les contraintes $F(x) > 0$ et $F(x) < G(x)$ sont aussi des LMIs car elles peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} -F(x) &< 0, \\ F(x) - G(x) &< 0. \end{aligned}$$

2.7.1 Programmation semi-définie

Grâce à des outils comme Matlab par exemple, il existe des fonctions qui permettent de résoudre plusieurs types de problèmes LMI.

Les trois problèmes de bases sont les suivants :

1. La faisabilité d'un problème LMI, comme il a été signalé auparavant, permet de déterminer s'il existe un vecteur x , qui vérifie la contrainte LMI $F(x) < 0$.
2. Minimiser $c^T x$ par rapport à $F(x) < 0$; où $c \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, et F est une matrice symétrique et affine en x , est appelé un programme semi-défini (ou SDP pour semi-definite program). Le vecteur c définit l'objectif du problème et $x \in \mathbb{R}^m$ représente la variable de décision.
3. Minimiser les valeurs propres généralisées. Il s'agit ici de déterminer le minimum d'un paramètre λ tel que le problème LMI suivant sont vérifié :

$$\begin{cases} C(x) < 0 \\ B_j(x) > 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \\ A_j(x) > \lambda B_j(x), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\} \end{cases}$$

où x correspond à l'ensemble des inconnues de l'inégalité matricielle, C , B_j , A_j sont des matrices.

Il existe plusieurs algorithmes de résolution numérique de tels types de problèmes LMI. La technique que nous avons utilisée pour résoudre la LMI de notre application est celle exploitée par le logiciel Matlab (plus précisément, la fonction `feasp`), à savoir la méthode projective détaillée dans [31]. La solution exhibée par Matlab est une solution particulière de la LMI à résoudre.

L'avantage majeur des SDP est que leur complexité est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe des algorithmes qui permettent d'en calculer l'optimum global (pour une décision fixée a priori) en un temps de calcul polynomial par rapport à la taille du problème.

2.7.2 Les théorèmes classiques

La difficulté n'est donc pas de résoudre une LMI. En effet les théorèmes issus des techniques du type Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires qui s'écrivent sous la forme d'inéquation de Riccati. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ses contraintes non linéaires en formulation LMI.

Pour cela, nous disposons des lemmes suivants :

La transformation basée sur le complément de Schur est la méthode la plus simple et la plus fréquemment utilisée pour transformer des contraintes non linéaires en des contraintes LMI. Cette transformation est la suivante :

Lemme 2.6 (Complément de Schur, [8]) *Soient trois matrices $Q(x)$, $S(x)$ et $R(x)$ affines par rapport à la variable x , les matrices $Q(x)$ et $R(x)$ étant symétriques. La*

LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0,$$

est équivalente aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0. \end{cases}$$

Une autre transformation est décrite dans le lemme suivant :

Lemme 2.7 ([8]) Pour toutes matrices A , $P_0 > 0$ et $P_1 > 0$, l'inégalité

$$A^T P_1 A - P_0 < 0,$$

est équivalente à l'existence d'une matrice Y telle que :

$$\begin{bmatrix} -P_0 & A^T Y^T \\ Y A & -Y - Y^T + P_1 \end{bmatrix} < 0.$$

Chapitre 3

Contrôlabilité et stabilisation

La contrôlabilité fait partie des propriétés dites structurelles qui caractérisent les systèmes, et éventuellement permettent de les classifier, par leurs propriétés algébriques et géométriques. Elle est indispensable dans les applications pour qu'un système puisse être convenablement commandé et permet de construire des lois de commande de façon effective. Cependant, elle sert d'introduction à de nombreuses questions d'une grande importance pratique, comme la planification de trajectoires.

La première partie de ce chapitre aborde la contrôlabilité, après de courtes définitions, nous étudions en détail les systèmes linéaires, autonomes et non autonomes. Leur contrôlabilité est caractérisée par le critère de Kalman.

Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile, nous aborderons que l'étude de la contrôlabilité locale de tels systèmes.

Le concept de la stabilité est fortement lié au concept de l'existence d'une loi de commande pour un système donné qui pourra rendre le système en boucle fermée asymptotiquement stable autour d'un point d'équilibre. Pour les systèmes linéaires, la contrôlabilité implique la stabilité du système. Cependant ceci n'est pas vrai pour les systèmes non-linéaires voir [9].

Nous aborderons dans la deuxième partie de ce chapitre le problème de la stabilisation par retour d'état statique.

3.1 Contrôlabilité

Le problème de la contrôlabilité est le suivant : étant donnés deux états $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un temps T et un contrôle admissible u tels que la trajectoire $x_u(t)$ associée à ce contrôle joigne $x_0 = x(0)$ à $x_1 = x(T)$? C'est le problème de contrôlabilité. On peut poser le même problème avec le temps T fixé.

L'objet de la sous section suivante est de caractériser la contrôlabilité des systèmes linéaires, on verra qu'il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman.

3.1.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & t \in I \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que

- les applications $t \mapsto A(t), B(t)$ sont L^∞ sur I ,
- la commande u est mesurable et localement bornée sur I , à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent l'existence sur I d'une unique application $t \mapsto x(t)$ absolument continue telle que

$$\forall t \in I, \quad x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \quad (3.2)$$

où $M(t)$ est la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$.

Ensemble accessible

Définition 3.1 ([42]) *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T^* > 0$ est*

$$\begin{aligned} \text{Acc}(x_0, T^*) &= \{x_1 \in \mathbb{R}^n \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ p.p. sur } [0, T^*], \\ x(0) &= x_0, \quad x(T^*) = x_1. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\text{Acc}(x_0, T^)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (3.1) en temps T^* , lorsqu'on fait varier le contrôle u .*

Définition 3.2 ([42]) *Le système (3.1) est dit contrôlable (ou commandable) en temps T si $\text{Acc}(x_0, T^*) = \mathbb{R}^n$ autrement dit pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T . i.e. :*

$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T^*] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \text{ p.p. sur } [0, T^*] \\ x(0) &= x_0, \quad x(T^*) = x_1. \end{aligned}$$

Le système (3.1) est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{T \geq 0} \text{Acc}(x_0, T).$$

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t , elle est dite condition de Kalman.

Théorème 3.1 ([42]) *Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit contrôlable en temps T si et seulement si : la matrice $C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang égal à n .*

La matrice C est appelée matrice de Kalman. La condition $\text{rg } C = n$ est appelée condition de Kalman.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 ([42]) *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} \phi : L^\infty([0, T^*], \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto \int_0^{T^*} \exp^{(T^*-t)A} Bu(t) dt \end{aligned}$$

est surjective.

Preuve du lemme. Supposons tout d'abord que $\text{Rg } C < n$, et montrons que ϕ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. par conséquent :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que

$$A^n = a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On en déduit par récurrence immédiate que pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0, T^*]$:

$$\psi \exp^{tA} B = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a :

$$\psi \int_0^{T^*} \exp^{(T^*-t)A} Bu(t) dt = 0,$$

i.e. $\psi \phi(u) = 0$, et donc ϕ n'est pas surjective.

Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{T^*} \exp^{(T^*-t)A} Bu(t) dt = 0.$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, T^*]$:

$$\psi \exp^{(T^*-t)A} B = 0.$$

En $t = T^*$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T^*$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi par dérivations successives on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et donc $\text{rg} C < n$. ■

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème 3.1.

Si la matrice C est de rang n , alors d'après le lemme 3.1, l'application ϕ est surjective, i.e. $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u l'extrémité au temps T de la trajectoire associée à u est :

$$x(T^*) = \exp^{T^*A} x_0 + \int_0^{T^*} \exp^{(T^*-t)A} B u(t) dt,$$

donc l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\text{Acc}(T^*, x_0) = \exp^{T^*A} x_0 + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

et donc le système est contrôlable.

Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 et l'ensemble accessible en temps T s'écrit :

$$\text{Acc}(T, x_0) = \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n,$$

ce qui prouve que ϕ est surjective, et donc d'après le lemme 3.1 la matrice C est de rang n .

Exemple 3.1 *Le système suivant :*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Ax + Bu$$

est contrôlable car la matrice de Kalman $C = \begin{pmatrix} B, AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 = n .

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non autonome (instationnaire) i.e. dans le cas où les matrices A et B dépendent du temps t .

Théorème 3.2 ([42]) *Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est contrôlable en temps T^* si et seulement si :*

la matrice

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} M(t)^{-1} B(t) B^T(t) (M(t)^{-1})^T dt \quad (3.3)$$

est inversible.

La matrice $C(T^*)$ est appelée matrice de contrôlabilité. On a $C(T^*) = C^T(T^*)$, et $x^T C(T^*) x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $C(T^*)$ est une matrice symétrique positive.

Démonstration. Pour toute solution $x(t)$, on a

$$x(T^*) = M(T^*)x_0 + M(T^*) \int_0^{T^*} M(s)^{-1} B(s) u(s) ds.$$

Posons

$$x^* = M(T^*)x_0.$$

Si $C(T^*)$ est inversible, posons $u(t) = (M(t)^{-1} B(t))^T \psi$, avec $\psi \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$x(T^*) = x^* + M(T^*) C(T^*) \psi,$$

et il suffit de prendre $\psi = (M(T^*) C(T^*))^{-1} (x_1 - x^*)$.

Réciproquement, si $C(T^*)$ n'est pas inversible, alors il existe $\psi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que $\psi^T C(T^*) \psi = 0$. On en déduit :

$$\int_0^{T^*} \left\| (M(t)^{-1} B(t))^T \psi \right\|^2 dt = 0,$$

d'où $(M(t)^{-1} B(t))^T \psi = 0$ p.p. sur $[0, T^*]$, et donc, pour tout contrôle u , on a

$$\psi^T \int_0^{T^*} M(t)^{-1} B(t) u(t) dt = 0.$$

Posons $\psi_1 = (M(T^*)^{-1})^T \psi$; on a pour tout contrôle u

$$\psi^T (x_u(T^*) - x^*) = 0,$$

i.e. $x_u(T^*) \in x^* + \psi^\perp$ (ψ^\perp étant l'orthogonal de ψ), et donc le système n'est pas contrôlable. ■

Remarque 3.1 1. *La condition (3.3) dépend de T^* mais ne dépend pas de la condition initiale x_0 autrement dit si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps T^* depuis x_0 alors il est contrôlable en temps T^* depuis tout point.*

2. Si le système est autonome, on a $M(t) = \exp(tA)$, et donc

$$C(T^*) = \int_0^{T^*} \exp(-sA)BB^T \exp(-sA^T)ds.$$

Dans ce cas, $C(T_1)$ est inversible si et seulement si $C(T_2)$ est inversible, i.e. la condition de contrôlabilité ne dépend pas de T^* (ce qui n'est pas le cas pour le système instationnaire)

Exemple 3.2 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) + u(t) \cos t \\ \dot{y}(t) = x(t) + u(t) \sin t \end{cases}$$

L'écriture matricielle du système est

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} u(t)$$

On posera

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La résolvante du système $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ est donnée par la formule $M(t) = \exp(tA)$.

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$. Un calcul simple montre que

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} & \frac{1}{2}ie^{it} - \frac{1}{2}ie^{-it} \\ \frac{1}{2}ie^{-it} - \frac{1}{2}ie^{it} & \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} & M(t)^{-1}B(t)B(t)^T(M(t)^{-1})^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \sin t \\ \cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ \sin 2t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice de contrôlabilité au temps T^* est alors

$$\begin{aligned} C(T^*) &= \int_0^{T^*} \exp(-sA) B(s) B(s)^T \exp(-sA^T) ds \\ &= \int_0^{T^*} \begin{pmatrix} \cos 2s & 0 \\ \sin 2s & 0 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin 2T^* & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2T^* & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que la matrice $C(T^*)$ n'est pas inversible, donc le système donné n'est pas contrôlable.

3.1.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Le problème de caractériser la contrôlabilité locale et globale des systèmes non-linéaires est difficile et fait partie des problèmes critiques du domaine de la théorie des systèmes non-linéaires. (voir [24] pour une présentation lucide des travaux dans ce domaine). Un résultat fondamental sur la contrôlabilité d'un système non-linéaire provient d'un théorème qui énonce que si la linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point est contrôlable alors le système non-linéaire est lui-même localement contrôlable [24].

L'étude de la contrôlabilité non linéaire conduit à des calculs plus lourds qui, pour être présentée de façon compacte, nécessitent le langage de la géométrie différentielle et les crochets de Lie. [14].

L'approche de la géométrie différentielle pour l'analyse de contrôlabilité a été développée dans laquelle un système non-linéaire est considéré comme étant une famille de champs de vecteurs. Dans ce contexte, une large théorie sur la commande de tels systèmes est basée sur l'algèbre de Lie [19]; [38]. Le lecteur pourra se référer à [11] pour quelques travaux récents dans lesquels les auteurs présentent une technique de test de contrôlabilité ainsi qu'un algorithme de commande pour le mouvement de systèmes mécaniques sous-actionnés. Une très bonne introduction à la commande des systèmes non-linéaires, incluant le concept de la géométrie différentielle est présenté dans [21] et [32].

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

On dispose de la définition mathématique de la contrôlabilité (ou de la commandabilité) :

Définition 3.3 Comme dans le cas linéaire, on dit que le système 3.4 est contrôlable (ou commandable) en temps $T > 0$, si $\text{Acc}(x_0, T) = \mathbb{R}^n$. Autrement dit, pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps T . i.e. :

$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1 &\in \mathbb{R}^n \exists u \in L_{loc}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m), \exists x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. sur } [0, T] \\ x(0) &= x_0, x(T) = x_1. \end{aligned}$$

Remarque 3.2 En général, la commande u n'est pas unique, il en existe une infinité. Cette étape s'appelle planification de trajectoire : calculer $t \mapsto u(t)$ à partir de la connaissance de f, x_0, x_1 constitue l'une des questions majeures de l'automatique. Cette question est très loin d'être résolue actuellement.

Exemple 3.3 Considérons l'équation du pendule pesant

$$m\ell^2\ddot{\theta} + m\ell g \sin \theta = u$$

où u représente la somme des moments des forces autres que le point. En posant $\omega = \dot{\theta}$, le système devient

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{u}{m\ell^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

On notera alors $x = (\theta, \omega)$ l'état du système, le champ de vecteurs est

$$F(\theta, \omega) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{u}{m\ell^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{\ell} \sin \theta \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \frac{\omega}{m\ell^2} \\ \frac{1}{m\ell^2} \end{pmatrix}.$$

Étudions maintenant la contrôlabilité du système (3.5). Considérons deux états du pendule pesant :

$$x_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \text{ et } x_2 = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

Soit φ une fonction \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[0, T]$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \theta_1 \quad \varphi(T) = \theta_2 \\ \dot{\varphi}(0) &= \omega_1 \quad \dot{\varphi}(T) = \omega_2. \end{aligned}$$

On pose

$$v(t) = m\ell^2 \left(\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)) + \ddot{\varphi}(t) \right).$$

et on a alors

$$-\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)) + \frac{1}{m\ell^2} v(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

est solution de l'équation du pendule pour l'entrée $v(\cdot)$ sur $[0, T]$. Il est clair que son état initial est x_1 et son état final est x_2 .

Par conséquent étant donnés deux états quelconques, et pour tout temps $T > 0$, il existe un contrôle défini sur $[0, T]$ qui permet d'aller d'un état à l'autre. Le pendule pesant est contrôlable en temps T pour tout $T > 0$.

Exemple 3.4 Considérons dans \mathbb{R}^2 le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1^2 \\ \dot{x}_2 = u_2^2 \end{cases}$$

L'ensemble des points que l'on peut atteindre à partir de $x = (x_1, x_2)$ est égal à

$$\{y = (y_1, y_2); \quad y_1 \geq x_1, \quad y_2 \geq x_2\}$$

Le système n'est donc pas contrôlable.

3.1.3 Contrôlabilité locale d'un système non linéaire

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Considérons le système de contrôle linéaire (3.1). Ce système linéaire généralement par linéarisation du système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in I \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

autour d'une trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) .

Soit (x, u) une trajectoire du système proche de (\bar{x}, \bar{u}) : on écrit $x = \bar{x} + \varepsilon y$, $u = \bar{u} + \varepsilon v$ avec ε un réel positif suffisamment petit. On a, en développant à l'ordre 1 en ε ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\bar{x}} + \varepsilon \dot{y} = f(t, \bar{x} + \varepsilon y, \bar{u} + \varepsilon v) \\ &\approx f(t, \bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}, \bar{u}) y + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}, \bar{u}) v \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\dot{y} \approx A(t) y + B(t) v$$

avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^q .

On ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non-linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation. Donnons nous d'abord la définition de la contrôlabilité locale :

Définition 3.4 *Le système de contrôle $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $t \in I$ est localement contrôlable le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et tout $b \in \mathbb{R}^n$ avec $|x(0) - a| < \eta$ et $|x(T) - b| < \eta$, il existe un contrôle $u \in L_{loc}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ tel que*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ p.p. et } x(0) = a \implies (x(T) = b), \\ |u(t) - \bar{u}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3 ([41]) *Si le linéarisé autour de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) est contrôlable, alors le système de contrôle $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ est localement contrôlable le long de la trajectoire (\bar{x}, \bar{u}) .*

La réciproque de ce théorème est fautive, par exemple, si $n = m = 1$, $f(t, x, u) = u^3$, $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ et $\bar{x} = \bar{u} = 0$.

3.1.4 Application de la contrôlabilité à un problème de contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal est le suivant : on considère un système

$$\dot{x} = F(t, x, u)$$

et on suppose qu'on peut atteindre le point x_1 à partir du point x_0 en temps T . (on suppose donc que le système est contrôlable). En général, il existe une infinité d'entrées qui permettent d'aller du point x_0 au point x_1 en temps T , et on cherche celle(s), si elle existe, qui minimise le critère (ou la fonction coût)

$$J(x, u(\cdot), T) = \int_0^T L(x(t), u(t)) dt$$

où $t \rightarrow x(t)$ est la trajectoire issue de $x(0) = x_0$ pour l'entrée $u(\cdot)$ (elle vérifie $x(T) = x_1$). Autrement dit, il faut chercher, parmi les contrôles admissibles $u(\cdot)$, celui qui réalise

$$\min_u J(x, u(\cdot), T), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1.$$

Un cas très particulier du système précédent est le système suivant dans \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dots \dots \\ \dots \dots \\ \dot{x}_n = u_n \end{cases}$$

Si les entrées admissibles sont les entrées continues sur $[0, T]$, le problème revient à minimiser

$$\int_0^T L(x(t), u(t)) dt \text{ avec } u(t) = \dot{x}(t)$$

parmi toutes les courbes de classe \mathcal{C}^1 qui joignent x_0 à x_1 , on retrouve le problème de calcul des variations.

Dans le cas général, l'ensemble des courbes prises en considération est beaucoup plus réduit, et la résolution du problème de minimisation demande des outils différents de ceux du calcul des variations classique (cf. le principe du maximum de Pontryaguin).

Lorsque T est fini, le problème de contrôle optimal est dit en horizon fini. Lorsque $T = +\infty$ on parle d'optimisation en horizon infini. Pour plus de détails, voir [7]. On présentera dans cette section un problème d'optimisation en horizon infini pour le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

et le coût quadratique

$$C(u) = \int_0^{+\infty} [u^T(s)Ru(s) + x^T(s)Qx(s)] ds, \quad x(0) = x_0, \quad x(+\infty) = 0, \quad (3.6)$$

où R et Q sont deux matrices symétriques définies positives; on a le résultat suivant :

Théorème 3.4 *Supposons qu'il existe une matrice symétrique positive S , telle que S soit solution de l'équation de Riccati algébrique :*

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0, \quad (3.7)$$

telle que la matrice $A - BR^{-1}B^T S$ a toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives. Alors le minimum du critère (3.6) vaut

$$\min_u C(u) = x_0^T S x_0.$$

De plus, ce minimum est atteint pour la commande

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T S x^*(t)$$

où $x^*(t)$ est la solution du système

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T S)x$$

de condition initiale $x^*(0) = x_0$.

Une condition suffisante pour que l'équation de Riccati algébrique (3.7) admette une solution est que la paire (A, B) soit commandable voir [24], p. 198. Si S est une solution de l'équation (3.7) alors la matrice $A - BR^{-1}B^T S$ est de Hurwitz. En effet, l'équation (3.7) s'écrit

$$(A - BR^{-1}B^T S)^T S + S(A - BR^{-1}B^T S) - SBR^{-1}B^T S + Q = 0. \quad (3.8)$$

C'est l'équation de Lyapunov (2.8). La matrice

$$SBR^{-1}B^T S = (R^{-1}B^T S)^T R (R^{-1}B^T S)$$

est positive et la matrice Q est définie positive. Comme l'équation (3.8) admet la solution S , on en déduit que la matrice $A - BR^{-1}B^T S$ est de Hurwitz. Pour plus de détails, voir [35].

3.2 Stabilisation

Considérons à nouveau le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (3.9)$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure 3.1.

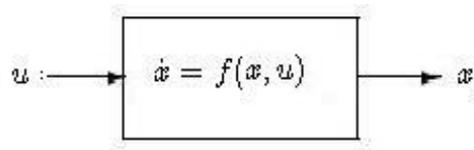


FIG. 3.1 – Système en boucle ouverte

Un contrôle en boucle ouverte est une application d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles admissibles.

Définition 3.5 *Un contrôle u en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, ou encore un feedback, est une application $x \mapsto u = \gamma(x)$ définie sur l'espace d'état $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'ensemble des contrôles admissibles \mathcal{U} .*

Le problème de stabilisation (ou régulation) du système (3.9) consiste à maintenir ce système près d'un point d'équilibre x^0 . Il s'agit donc de construire une loi de contrôle $u = \gamma(x)$ telle que x^0 soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (voir la figure 3.2). Plus précisément :

Définition 3.6 (Stabilisation) Soit (x^0, u^0) un point d'équilibre du système (3.9). On dit que ce système est (localement) (C^1) stabilisable autour de (x^0, u^0) , s'il existe une fonction de classe C^1

$$\gamma : \Xi_0 \rightarrow \mathcal{U}, \quad \gamma(x^0) = u^0 \quad (3.10)$$

définie sur un certain voisinage Ξ_0 de x^0 pour laquelle le système en boucle fermée (à espace d'état Ξ_0)

$$\dot{x} = f(x, \gamma(x)). \quad (3.11)$$

est (localement) asymptotiquement stable au point d'équilibre x^0 .

Si $\Xi_0 = \mathbb{R}^n$ et le système est (3.11) est globalement stable, on dit que le système (3.9) est globalement C^1 stabilisable.

Dans le cas où la fonction γ est simplement continue, on dira que le système (3.9) est stabilisable.

La loi de contrôle donnée par la formule (3.10) est appelée *bouclage statique* et la stabilisation donnée par la définition précédente est dite *stabilisation par bouclage statique*.

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est par définition un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

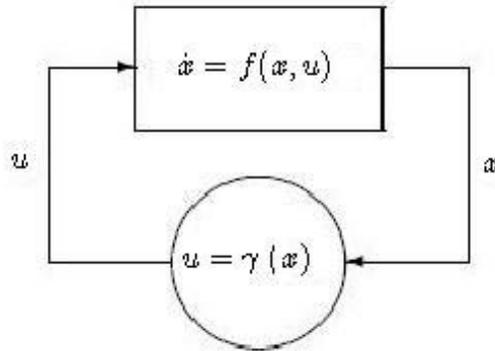


FIG. 3.2 – Système en boucle fermée

où le vecteur x est le vecteur des états du système, le vecteur u celui des contrôles (entrées) et le vecteur y celui des variables observées (sorties). (u et y sont des fonctions connues du temps). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure 3.3

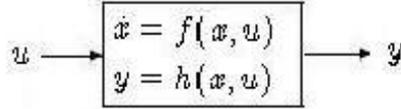


FIG. 3.3 – Système contrôlé-observé

Le problème de stabilisation de tels systèmes fait appel à la notion de bouclage dynamique.

Définition 3.7 (Bouclage dynamique) *On dit que u est bouclage dynamique (ou retour d'état dynamique) du système en boucle ouverte*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (3.12)$$

s'il est la sortie d'un système ayant y comme entrée, c'est à dire

$$\begin{cases} u = \gamma(y, z) \\ \dot{z} = g(y, z) \end{cases}$$

Dans ce cas, le système en boucle fermée est représenté par la figure 3.4.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x, z), \\ \dot{z} = \bar{g}(x, z). \end{cases} \quad (3.13)$$

où $\bar{f}(x, z) = f(x, \gamma(y, z))$ et $\bar{g}(x, z) = g(y, z)$.

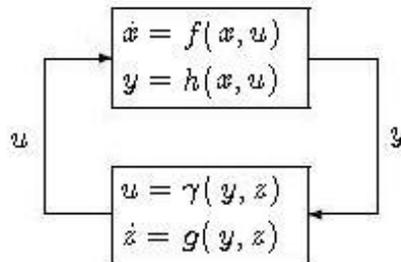


FIG. 3.4 – Bouclage dynamique

Le principe de stabilisation du système contrôlé-observé (3.12) consiste donc à construire un bouclage dynamique $u = \gamma(y, z)$ de manière à ce le point d'équilibre ($x = 0, z = 0$) soit asymptotiquement stable du système en boucle fermée (3.13).

La notion de contrôle (ou de commande) en boucle fermée fait partie de la vie quotidienne : se déplacer dans une pièce, conduire une voiture, ranger un objet dans une armoire... etc. Tous ces petits gestes de la vie quotidienne font intervenir un capteur (la vue, le toucher) qui informe notre cerveau de la situation réelle, ce dernier compare en permanence la situation observée avec la situation souhaitée (la consigne) et commande nos muscles (les organes de commande), pour tenter de rapprocher la situation réelle de celle qui est souhaitée.

Exemple 3.5 *On considère à nouveau le système du pendule pesant :*

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{u}{m\ell^2} \end{cases}$$

A partir d'une fonction quelconque $(\theta, \omega) \rightarrow \phi(\theta, \omega)$, on peut construire le retour d'état

$$\alpha(\theta, \omega) = m\ell^2 \left(\frac{g}{\ell} \sin \theta + \phi(\theta, \omega) \right)$$

qui donne le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \phi(\theta, \omega) \end{cases}$$

On peut stabiliser ce système autour de n'importe quel point d'équilibre $(\theta_0, 0)$ en prenant par exemple $\phi(\theta, \omega) = a(\theta - \theta_0) + b\omega$ où a et b sont deux constantes réelles à calculer, il suffit par exemple de les choisir de sorte que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

du système linéaire

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = a(\theta - \theta_0) + b\omega \end{cases}$$

soit de Hurwitz.

Dans ce qui suit, nous allons aborder le problème de la stabilisation des systèmes contrôlés linéaires et non linéaires. La stabilisation des systèmes contrôlés-observés fait appel à la notion d'observabilité. Son étude ne sera présentée qu'après avoir introduit les notions d'observabilité et d'observateur.

3.2.1 Stabilisation des systèmes de contrôle linéaires

Définition 3.8 *Le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est dit stabilisable (par retour d'état linéaire, ou par feedback linéaire, ou aussi par régulateur linéaire) s'il existe une matrice $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le système bouclé par le feedback $u(t) = Kx(t)$, i.e.*

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad (3.14)$$

soit asymptotiquement stable, i.e., la matrice $(A + BK)$ est de Hurwitz.

*La matrice de feedback K s'appelle les **gains**.*

Le théorème suivant donne une condition suffisante de stabilisation d'un système linéaire autonome en terme de commandabilité.

Théorème 3.5 *Si la paire (A, B) est commandable, on peut choisir la matrice de K pour placer arbitrairement les valeurs propres de la matrice $A + BK$, en d'autres termes, pour tout polynôme réel unitaire de degré n , il existe $K \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ tel que le polynôme caractéristique de $A + BK$ est égal à P .*

Ce résultat, connu sous le nom du théorème *de placement des pôles*, montre que l'on peut choisir la matrice K de telle sorte que la matrice $A + BK$ soit de Hurwitz et que l'origine du système bouclé (3.14) soit asymptotiquement stable. Donc tout système linéaire contrôlable est stabilisable (globalement).

3.2.2 Stabilisation locale d'un système non linéaire

On a vu précédemment qu'un système linéaire contrôlable peut être stabilisé asymptotiquement par un contrôle linéaire (donc continu). Cette propriété n'est pas vraie pour un système non linéaire. Il existe des systèmes non linéaires, localement (et même globalement) contrôlables, qu'on ne peut pas stabiliser par un contrôle continu [14]. Cependant si l'approximation linéaire du système est contrôlable, alors on peut le stabiliser par un contrôle continu et même linéaire. En effet, considérons le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

et soit (x_e, u_e) un point d'équilibre, i.e. $f(x_e, u_e) = 0$. Le système linéarisé en ce point est

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t) \quad (3.15)$$

où les matrices A et B sont définies par

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e).$$

Supposons que (A, B) soit commandable. Il existe une matrice K telle que la matrice $A + BK$ soit de Hurwitz. Par conséquent, le contrôle $v = Ky$ stabilise globalement le système linéarisé (3.15).

Théorème 3.6 *Le contrôle $u = K(x - x_e) + u_e$ stabilise localement le système non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.*

Preuve. En effet, le système en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(x(t) - x_e) + u_e) = F(x).$$

On a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_e, u_e) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e) K = A + BK.$$

Donc (x_e, u_e) est asymptotiquement stable pour le système linéarisé. La méthode indirecte Lyapunov permet alors d'affirmer que (x_e, u_e) est asymptotiquement stable pour le système non linéaire $\dot{x} = F(x)$. ■

Chapitre 4

Observabilité et estimation de l'état des systèmes non linéaires

Ce chapitre consiste en une introduction aux problèmes d'observation et d'estimation de l'état des systèmes non linéaires. Nous présentons le principe d'estimation d'état, quelques définitions sur la notion d'observabilité et un état de l'art sur les différentes techniques de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

Pour illustrer la problématique de l'observabilité et de l'estimation de l'état, considérons les deux exemples suivants :

Exemple 4.1 *Dans un asservissement de position d'un axe numérique de table d'usinage, un choix possible du vecteur d'état est le vecteur composé de la position angulaire θ , de la vitesse $\dot{\theta}$ et éventuellement de l'accélération $\ddot{\theta}$. L'évaluation du vecteur d'état est directe si ces trois grandeurs sont mesurées, ce qui est le cas en général. Si on ne mesure que la position, on peut alors en déduire la vitesse et l'accélération par dérivations successives. Cette seconde méthode d'évaluation du vecteur d'état est dite indirecte et elle est obtenue par un programme de calcul.*

Exemple 4.2 *La dynamique d'une régulation de niveau et de température d'un fluide dans une cuve peut-être modélisée, autour d'un point de fonctionnement, par l'équation d'état suivante :*

$$\begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{E_0}/2SH_0 & 0 \\ -P_{u_0}/SH_0^2c + \Delta TD_{E_0}/SH_0^2 & -D_{E_0}/SH_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/S & 0 \\ -\Delta T/S & 1/S & 1/S & 1/S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_e \\ p_u \end{bmatrix}$$

- T_E est la température d'entrée du fluide supposée constante,
- h est la variation de hauteur de fluide autour de H_0 ,

- θ est la variation de température du fluide en sortie, autour de T_{s_0} ,
- d_e représente la variation du débit d'entrée autour de D_{E_0} ,
- p_u est la variation de la puissance de chauffe autour de P_{U_0} ,
- S est la section de la cuve,
- C représente la chaleur spécifique du fluide.

La mesure de la hauteur et de la température du fluide fournit une évaluation directe du vecteur d'état du système. L'équation de mesure a alors pour expression :

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \theta \end{bmatrix}$$

Supposons que nous ne mesurons que la hauteur du fluide, dans ce cas la question est de savoir s'il est possible d'en déduire sa température ?. Intuitivement, on peut voir que la température n'intervient pas dans la variation de la hauteur pour le modèle choisi. Cette variation de hauteur étant découplée de la température, celle-ci ne peut pas être déduite de la mesure de la hauteur du fluide. Par contre, la température dépendant de la masse du fluide donc de sa hauteur, nous pourrions, à partir de la mesure de cette température, déduire la hauteur du fluide dans la cuve. On peut remarquer que le modèle de variation de la hauteur n'a pas pris en compte des phénomènes de dilatation dus à l'échauffement du fluide et que dans ce cas, la température aurait été perceptible au travers de la mesure et de la hauteur.

Ces exemples ont permis d'introduire trois notions de base : la mesure directe des composantes du vecteur d'état, l'évaluation indirecte de ces composantes et enfin la possibilité ou non de réaliser cette évaluation indirecte. L'évaluation indirecte d'une grandeur par l'intermédiaire d'une seconde fait intervenir le modèle variationnel de la grandeur à estimer. De ce fait, il est nécessaire de mettre en oeuvre un programme d'évaluation indirecte des grandeurs non mesurées, ce qui est le rôle d'un observateur.

L'observation d'un système a donc pour objectif de **mesurer** ou d'**estimer** les grandeurs constitutives du vecteur d'état. Les mesures peuvent être réalisées en mettant en oeuvre autant de capteurs que de grandeurs d'état à mesurer. Cette situation présente un avantage essentiel du fait que les mesures sont alors réalisées avec une dynamique indépendante de celle du système. La conséquence est que le capteur doit permettre d'acquérir la mesure à une vitesse plus grande que la dynamique la plus rapide du système. Pour appuyer ce propos, il suffit de penser à la prise d'une image d'un véhicule rapide, au moment de son passage devant l'objectif, qui nécessite un temps de pose très petit. On touche là un point essentiel sur la rapidité des observations ou d'un observateur qui serait mis en oeuvre. Un usage exclusif de capteurs n'est pas toujours possible pour les raisons suivantes :

- Le coût prohibitif du ou des capteurs comme par exemple une centrale inertielle permettant de déterminer un déplacement relatif,
- Le capteur trop lent par rapport à la dynamique de la variable à mesurer. Par exemple, l'utilisation d'un système de perception basée sur l'emploi d'une caméra nécessite la mise en oeuvre d'un traitement d'image sophistiqué qui peut se révéler être trop lent,
- L'inexistence de capteur pour la grandeur physique que l'on voudrait mesurer. C'est une situation typique dans certains secteurs industriels (chimie, agroalimentaires).

Quand toutes les composantes du vecteurs d'état (ou seulement l'une d'entre elles) ne sont pas mesurables, il devient nécessaire d'élaborer un programme d'estimation de ce vecteur d'état. On parlera dans ce cas de synthèse d'un observateur. Cette synthèse s'appuie sur les mesures effectuées, la connaissance des entrées et le modèle dynamique du système. Elle n'est toute fois possible que sous la condition d'observabilité du système.

A partir de l'analyse du problème de l'observation des systèmes présentés dans cette introduction, trois premières définitions de base peuvent être énoncées :

Définition 4.1 *On appelle mesurabilité d'une grandeur physique la possibilité d'effectuer la mesure de celle-ci.*

Définition 4.2 *On appelle observabilité d'un système la possibilité d'évaluer l'ensemble des grandeurs constitutives du vecteur d'état à partir des mesures effectuées sur le système.*

Définition 4.3 *On appelle observateur la méthode d'estimation des composantes du vecteur d'état.*

Donnons nous maintenant une définition plus précise des notions citées précédemment.

4.1 Observabilité

Les systèmes concernés dans toute la suite de ce mémoire sont les systèmes commandés-observés (\mathcal{S}) de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions supposées suffisamment régulières. Le vecteur x est celui des états du système, le vecteur $u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$

celui des contrôles (entrées, consignes) supposé connu, et le vecteur y celui des variables observées (sorties, mesures).

Notons $x(t, x_0, u(\cdot))$ la solution (trajectoire) du système (\mathcal{S}) de condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, et $y(t, x_0, u(\cdot))$ la sortie correspondante pour $t \in [0, T]$.

Dans le cas des systèmes non linéaires, la notion d'observabilité est liée aux entrées et aux conditions initiales. Il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indiscernabilité (ou d'indistinguabilité) des états, une définition très fréquente a été établie dans [20].

Définition 4.4 Fixons une entrée $t \mapsto u(t)$, $t \in [0, T]$. Cette entrée sépare, ou distingue, les états initiaux x_0 et x_1 du système (\mathcal{S}) s'il existe $t \in [0, T]$,

$$y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot))$$

Autrement dit, x_0 et x_1 sont distinguables s'il existe un contrôle u tel que les trajectoires observées diffèrent.

Définition 4.5 Le système (\mathcal{S}) est observable en temps T , si pour toute paire d'états initiaux x_0 et x_1 , avec $x_0 \neq x_1$, il existe une entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ qui distingue x_0 et x_1 . Autrement dit :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad x_0 \neq x_1 \implies \exists u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}) \quad \text{tel que } y(t, x_0, u(\cdot)) \neq y(t, x_1, u(\cdot)).$$

De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) \quad y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_1, u(\cdot)) \implies x_0 = x_1$$

Le problème de l'observabilité est donc d'établir l'injectivité de l'application $x_0 \rightarrow y(t, x_0, u(\cdot))$. Si cette application est injective pour une certaine entrée $u \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, le système (\mathcal{S}) est dit observable. Si elle est injective pour toutes les entrées u , le système (\mathcal{S}) est dit uniformément observable.

Exemple 4.3 Munissons le pendule pesant de l'exemple 3.3 de la sortie

$$h(\theta, \omega) = \theta$$

d'où le système contrôlé et observé

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta + \frac{u}{m\ell^2} \\ y = \theta \end{cases}$$

Supposons que pour une certaine entrée qu'on ne précise pas, les deux états (θ_1, ω_1) et (θ_2, ω_2) induisent la même sortie : $\theta_1(t) = \theta_2(t)$, pour tout t . En dérivant cette égalité on obtient $\omega_1(t) = \omega_2(t)$, pour tout t , donc en particulier ces égalités prises à $t = 0$ donnent

$$(\theta_1, \omega_1) = (\theta_2, \omega_2).$$

On voit que toute entrée sépare toute paire d'états initiaux distincts, et ceci sur un intervalle de temps arbitrairement petit. Donc le système est uniformément observable.

4.1.1 Observabilités des systèmes linéaires

Les critères d'observabilité d'un système linéaire sont décrits dans de nombreuses références [1], [42] et [41]. Considérons le système dynamique linéaire autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Les matrices A , B et C sont de dimensions appropriées. Sans perte de généralité, on peut supposer que $D = 0$ (voir [41]).

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman :

Théorème 4.1 ([41]) *Le système linéaire commandé-observé (4.1) est observable (en temps T quelconque) si et seulement si la matrice d'observabilité de Kalman*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n . On dit alors que la paire (A, C) est observable.

Preuve. Dérivons y et utilisons l'équation d'état. Une première dérivation donne :

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu.$$

Donc x est nécessairement solution du système (les fonctions y et u sont connues).

$$\begin{aligned} Cx &= y \\ CAx &= \dot{y} - CBu. \end{aligned}$$

A ce niveau, tout se passe comme si la quantité $\bar{y}_1 = \dot{y} - CBu$ était une nouvelle sortie. En la dérivant de nouveau, nous avons $CA^2x = \dot{\bar{y}}_1 - CABu$. Maintenant, x est nécessairement solution du système étendu

$$\begin{aligned} Cx &= \bar{y}_0 = y \\ CAx &= \bar{y}_1 = \dot{y} - CBu \\ CA^2x &= \bar{y}_2 = \dot{\bar{y}}_1 - CABu. \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que x sera nécessairement solution des équations :

$$CA^k x = \bar{y}_k$$

où les quantités connues $CA^k x = \bar{y}_k$ sont définies par la récurrence $\bar{y}_k = \dot{\bar{y}}_{k-1} - CA^{k-1}Bu$ pour $k \geq 1$ et $\bar{y}_0 = y$.

Si le rang de la matrice d'observabilité est maximum et égal à n , elle admet un inverse à gauche (non nécessairement unique), P matrice $n \times pn$ vérifiant

$$P \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

Ainsi

$$x = P \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La condition de rang est donc suffisante.

Réciproquement, si le rang de cette matrice est strictement inférieur à n , alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0,$$

et donc par le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Ce^{tA}x_0 = 0,$$

et par conséquent le système n'est pas observable. ■

Remarque 4.1 1. Pour un système linéaire autonome, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps T .

2. La notion d'observabilité pour un système linéaire autonome ne dépend pas de la matrice B .

$$3. \text{ On a } \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang} \left(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^{n-1})^T C^T \right) = n, \text{ et}$$

par conséquent, le système (4.1) est observable si et seulement si le système $\dot{x} = A^T x + C^T u$ est contrôlable. C'est la dualité contrôlabilité/observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

Comme conséquence directe du théorème précédent et de la remarque sur la dualité contrôlabilité/observabilité, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4.1 *Le système (4.1) est observable en temps T si et seulement si la matrice*

$$O(T) = \int_0^T \exp(-sA^T) C^T C \exp(-sA) ds$$

est inversible.

4.1.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Ce paragraphe consiste en une introduction au problème d'observation de l'état des systèmes non linéaires.

Rappelons que l'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrée et de sortie.

La seule façon effective de tester l'observabilité d'un système est de considérer l'application qui à x associe y et ses dérivées en temps. Nous supposons dans cette section que y et u sont des fonctions régulières du temps connues. Nous supposons également que les rangs en x des fonctions de (x, u, \dot{u}, \dots) qui apparaissent ci-dessous sont constants.

Comme u et y sont connues, les dérivées de u et y peuvent être évaluées. Dans ce cas, le concept d'observabilité peut être interpréter de manière claire. Pour un système SISO « Single Input Single Output », nous définissons

$$y' = [y \ \dot{y} \ \ddot{y} \ \dots y^{(n-1)}]^T$$

et

$$u' = [u \ \dot{u} \ \ddot{u} \ \dots u^{(n-1)}]^T$$

Chaque dérivée $y^{(i)}$ est une fonction de x et $u, \dot{u}, \dots, u^{n-1}$, et donc aussi une fonction de x et u' si $i \leq n-1$.

Soit Ψ_i une fonction définie par

$$y^{(i)} = \Psi_i(x, u').$$

La dérivée de $y^{(i)}$ est alors donnée par

$$y^{(i+1)} = \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial x}(x, u') \right] f(x, u) + \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial u'}(x, u') \right] \frac{du'}{dt}$$

ce qui est, par définition, $\Psi_{i+1}(x, u')$ si $i+1 \leq n-1$. En définissant l'opérateur linéaire \mathcal{M}_f par :

$$(\mathcal{M}_f \Psi)(x, u') = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, u') \right] f(x, u) + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial u'}(x, u') \right] \frac{du'}{dt}$$

alors y' s'écrit :

$$y' = \omega(x, u'),$$

où

$$\omega(x, u') = \begin{pmatrix} h(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h)(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathcal{M}_f^{n-1} h)(x, u) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

est la matrice d'observabilité.

Si la matrice d'observabilité (4.2) est inversible, i.e. il existe ω^{-1} telle que

$$x = \omega^{-1}(y', u')$$

alors le système correspondant est observable. En outre, si la jacobienne de la matrice d'observabilité,

$$\Omega(x, u') = \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, u'),$$

est inversible en x^0 , alors il existe un voisinage \mathcal{V}_{x^0} de x^0 sur lequel ω est inversible. Dans ce cas, le système correspondant est localement observable, ce qui signifie que x^0 est distinguable de tous les points de \mathcal{V}_{x^0} . Pour les systèmes multi-sorties, c'est-à-dire $y \in \mathbb{R}^p$, $p > 1$, la notion d'observabilité peut être investiguée d'une manière similaire.

Soit

$$N = [n_1 \ n_2 \dots \ n_p]^T$$

un vecteur d'entiers positifs, avec $\sum_{i=1}^{i=p} n_i = n$.

Définissons

$$y = [y_1 \ y_2 \dots y_p]^T,$$

et

$$h(x, u) = [h_1(x, u) \ h_2(x, u) \dots h_p(x, u)]^T.$$

En posant

$$\omega_j(x, u') = \begin{pmatrix} h_j(x, u) \\ (\mathcal{M}_f h_j)(x, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathcal{M}_f^{n_j-1} h_j)(x, u) \end{pmatrix},$$

les dérivées de $y^{(j)}$ jusqu'à l'ordre n_j sont

$$[y_j \ \dot{y}_j \dots y_j^{(n_j)}]^T = \omega_j(x, u').$$

La matrice d'observabilité pour les systèmes multi-sorties est alors définie par :

$$\omega_N(x, u') = \begin{pmatrix} \omega_1(x, u') \\ \omega_2(x, u') \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_q(x, u') \end{pmatrix}.$$

S'il existe N tel que $w_N(x, u)$ soit inversible, alors l'état x peut être déterminé à partir de u' , y , et les dérivées de chaque y_j jusqu'à l'ordre n_j . De ce fait, le système correspondant est observable.

Dans le domaine non-linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. En lien avec le concept d'indistinguabilité des états, une définition très fréquente a été établie dans [20]. Des résultats importants ont été établis dans [6] et [32] pour une classe spéciale de systèmes affines en la commande. Pour plus de détails sur les différents types de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires, nous renvoyons le lecteur à [20], [32] et [37].

4.2 Estimation d'état des systèmes non linéaire

4.2.1 Cas des systèmes linéaires autonomes : Observateur asymptotique de Luenberger

Motivation : supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{cases} \quad (4.3)$$

soit observable. Il est classique de noter par \hat{x} une estimation de la quantité x . Nous cherchons ici à obtenir une estimation de l'état sans utiliser les dérivées de y et u . La première idée qui vient à l'esprit est de copier la dynamique du système. On intègre directement

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t)$$

à partir d'une condition initiale \hat{x}_0 . Si la matrice A est stable, alors \hat{x} peut être pris comme estimation de x car l'erreur $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tend vers zéro puisque $\dot{e} = Ae$. Si A est instable cette méthode ne marchera pas. En effet, une petite erreur initiale $e_0 = e(0)$ sera amplifiée exponentiellement. Intuitivement, si l'erreur $x - \hat{x}$ devient grande, alors, le système étant observable, l'erreur sur les sorties $\hat{y} - y$ devient grande également¹. Comme y est connue, il est alors tentant de modifier $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$ par l'ajout d'un terme du type $L(y - \hat{y})$ qu'on connaît et qui correspond à l'erreur de l'observation. Ainsi, se pose le problème suivant : peut-on choisir la matrice L de façon à ce que la solution \hat{x} du système

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu(t) + L(\hat{y} - y(t)), \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

converge vers x ? Puisque $y = Cx$, la question se pose ainsi : peut-on ajuster la matrice L de façon à obtenir une équation différentielle d'erreur stable :

$$\dot{e} = (A + LC)e?$$

Pour un choix judicieux de L , peut-on imposer à $A + LC$ d'avoir toutes ses valeurs propres à parties réelles strictement négatives ?

Or les valeurs propres restent inchangées par la transposition : $A + LC$ admet le même spectre que $A^T + C^T L^T$. De plus la paire (A, C) est observable si, et seulement si, la paire (A^T, C^T) est commandable : on obtient le critère de Kalman de commandabilité en transposant celui de l'observabilité. Ainsi le théorème de placement de pôles se transpose au Théorème de placement de pôle propres de l'observateur que nous énonçons après avoir donné la définition de l'observateur de Luenberger.

¹On a noté $\hat{y} = C\hat{x}$.

Définition 4.6 Un observateur de Luenberger $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est une solution d'un système du type

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \underbrace{A\hat{x}(t) + Bu(t)}_{(I)} + \underbrace{L(C\hat{x}(t) - y(t))}_{(II)} \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{4.4}$$

La partie (I) est celle correspondant à la dynamique du système et la partie (II) est le correctif. Par définition d'un observateur, la matrice $L \in \mathcal{M}_{n,p}$ (dite matrice de gains) est telle que

$$\forall x(0), \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n, \quad x(t) - \hat{x}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Compte tenu des équations d'état et de sortie de l'observateur (4.4) et du système (4.3), nous en déduisons le diagramme structurel présenté à la figure (4.1) ci-dessous :

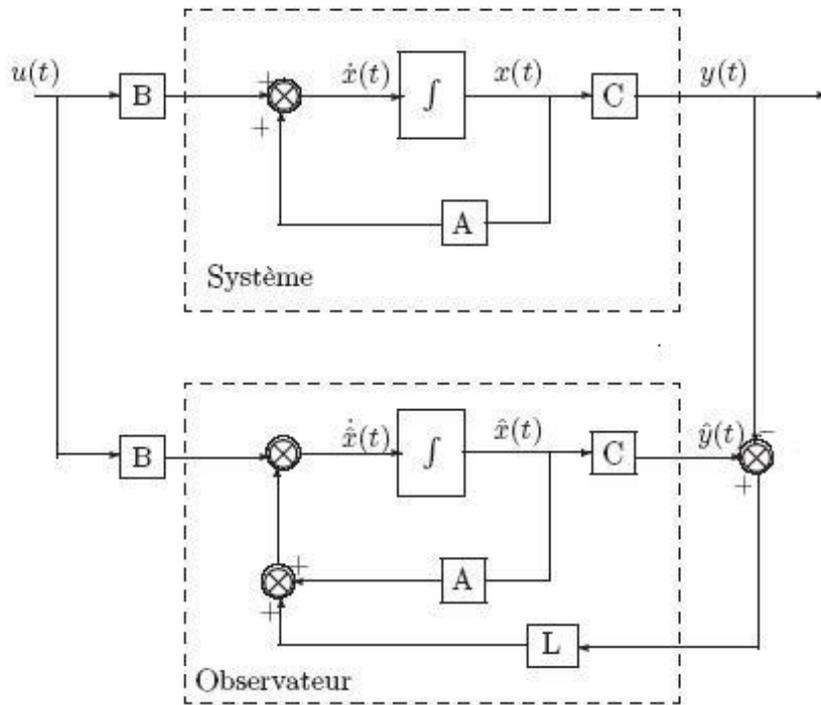


FIG. 4.1 – Diagramme structurel de l'observateur de Luenberger

Remarque 4.2 La dynamique de l'erreur $e(\cdot)$ vérifie l'équation différentielle

$$\dot{e}(t) = (A + LK)e(t)$$

et donc $e(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, pour toute valeur initiale $e(0)$ si et seulement si la matrice $A + LC$ est de Hurwitz. Construire donc un observateur de Luenberger revient à déterminer une matrice de gain L telle que la matrice $A + LC$ soit de Hurwitz. Ainsi, de manière duale au théorème de placement de pôles, on a :

Théorème 4.2 (Théorème de placement des modes propres de l'observateur)

Si la paire (A, C) est observable, alors le système admet un observateur de Luenberger, i.e., on peut construire une matrice de gains L telle que $A + LC$ soit de Hurwitz.

Preuve. La paire (A^T, C^T) étant contrôlable, d'après le théorème de placement des pôles, il existe une matrice L^T telle que la matrice $A^T + C^T L^T$ soit de Hurwitz. ■

On a vu comment stabiliser un système par retour d'état. Or il peut s'avérer coûteux de mesurer l'état complet d'un système. On peut alors se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet (c'est la propriété d'observabilité), et de stabiliser le système entier : c'est la stabilisation par retour d'état dynamique, ou synthèse régulateur-observateur.

4.2.2 Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique

On peut se demander si, étant donné un système contrôlable et observable $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$, il existe un feedback $u = Ky$ stabilisant le système, i.e. si la matrice $A + BKC$ est de Hurwitz. La réponse est non. Pour le voir, considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ est trivialement contrôlable et observable. Pourtant, pour toute matrice scalaire $K = (k)$, la matrice $A + BKC$ n'est pas de Hurwitz.

En conclusion, un feedback par retour d'état statique (bouclage statique) ne suffit pas en général. c'est pourquoi, dans la suite on va voir comment construire un retour d'état dynamique (bouclage dynamique) via un observateur asymptotique.

On a vu comment construire :

- un régulateur (feedback) pour un système contrôlable,
- un observateur de Luenberger pour un système observable.
- Il semble naturel, pour un système contrôlable et observable, de construire un bouclage dynamique en fonction de l'observateur de l'état : c'est l'étape de **synthèse régulateur-observateur**.

Définition 4.7 On appelle régulateur -observateur (ou feedback de sortie) du système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \tag{4.5}$$

le bouclage dynamique $u = K\hat{x}$, où

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y).$$

Une solution du problème de stabilisation d'un système linéaire contrôlé-observé est apporté par le théorème ci-dessous :

Théorème 4.3 (Théorème de stabilisation par retour dynamique de sortie, [41])

Si le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, est contrôlable et observable, alors il est stabilisable par retour dynamique de sortie, i.e., il existe des matrices de gain $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que les matrices $A + BK$ et $A + LC$ soient de Hurwitz, et alors le système bouclé

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + BK\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + BK\hat{x} + L(C\hat{x} - y) \end{cases} \quad (4.6)$$

est asymptotiquement stable.

Démonstration. Le système (4.6) est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A + LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

ce dernier étant asymptotiquement stable si et seulement si les matrices $A + BK$ et $A + LC$ sont de Hurwitz, ce qui est possible avec les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité. ■

Les valeurs propres de $A + BK$ sont dites modes propres du régulateur, et les valeurs propres de $A + LC$ sont dites modes propres de l'observateur.

4.2.3 Application à la stabilisation locale d'un système non linéaire par retour dynamique de sortie

Considérons le système non linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t)). \end{aligned}$$

Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre, i.e. $f(x_e, u_e) = 0$. Le système linéarisé en (x_e, u_e) s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{\delta f}{\delta x}(x_e, u_e), \quad B = \frac{\delta f}{\delta u}(x_e, u_e), \quad C = \frac{\delta f}{\delta x}(x_e).$$

D'après le théorème de linéarisation, on obtient :

Théorème 4.4 ([42]) *Si le système linéarisé est contrôlable et observable, alors il existe des matrices de gains K et L telles que les matrices $A + BK$ et $A + Lc$ soient de Hurwitz, et alors le contrôle $u = u_e + K\delta\hat{x}$, où*

$$\delta\dot{\hat{x}} = (A + BK + LC)\delta\hat{x} - L(y - g(x_e)),$$

stabilise localement le système au voisinage du point d'équilibre.

4.2.4 Observateurs des systèmes non linéaires

De façon générale, un observateur consiste en un système dynamique auxiliaire (\mathcal{O}) dont les entrées sont les entrées/sorties mesurées d'un système (\mathcal{S}), et les sorties sont supposées donner une estimation de son état, selon le schéma décrit sur la figure (4.2) :

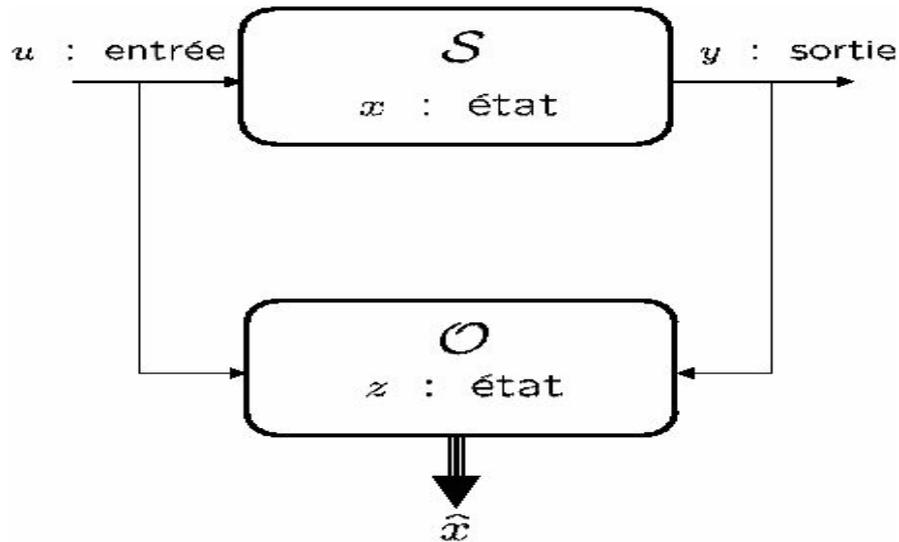


FIG. 4.2 – Principe d'estimation d'état

Définition 4.8 ([47]) *Le système dynamique (\mathcal{O}) décrit par les équations*

$$\begin{cases} \dot{z} = \phi(z, u, y) \\ \hat{x} = \psi(z, u, y) \end{cases} \quad (4.7)$$

est un observateur asymptotique local pour le système (\mathcal{S}) si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $x(0) = \hat{x}(0) \Rightarrow x(t) = \hat{x}(t) \quad \forall t \geq 0$;
2. *il existe un voisinage ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de l'origine tel que :*

$$x(0) - \hat{x}(0) \in \Omega \Rightarrow \|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Si l'erreur $e(t)$ entre le vecteur d'état $x(t)$ et son estimé $\hat{x}(t)$ tend exponentiellement vers zéro, le système (\mathcal{O}) est dit observateur exponentiel de (\mathcal{S}) .

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, le système (\mathcal{O}) est dit observateur global de (\mathcal{S}) .

L'observateur est d'ordre plein si $q = n$, et est d'ordre réduit si $q < n$, voir [12]

La condition 2. signifie que l'erreur d'estimation doit être asymptotiquement stable. Un système pour lequel un observateur de la forme (4.7) existe et tel que la condition 2. soit satisfaite est dit détectable.

Quant à la condition 1., elle signifie que si l'observateur (\mathcal{O}) et le système (\mathcal{S}) possèdent tous les deux le même état initial, alors l'état estimé de (\mathcal{O}) devrait être égal à l'état réel du système (\mathcal{S}) à tout instant.

4.2.5 Structure générale d'un observateur asymptotique

Si l'état estimé \hat{x} est égal à z , alors le système dynamique (\mathcal{O}) peut être remplacé par :

$$\dot{\hat{x}} = \Phi(\hat{x}, u, y). \quad (4.8)$$

La condition 1. peut être exprimée par

$$x = \hat{x} \Rightarrow \dot{x} = \dot{\hat{x}}$$

ce qui est équivalent à

$$\hat{x} = x \Rightarrow \Phi(\hat{x}, u, y) = f(\hat{x}, u)$$

Par conséquent, sans perte de généralité, (4.8) peut se réécrire comme suit :

$$\sigma_{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + \kappa(\hat{x}, u, y)$$

où

$$\hat{x} = x \Rightarrow \kappa(\hat{x}, u, y) = 0 \quad (4.9)$$

Une fonction κ qui contient le facteur $x - \hat{x}$ satisfait (4.9), mais puisque x n'est pas mesuré, ceci n'est pas possible. Cependant, $\hat{x} = x \Rightarrow h(\hat{x}, u) = h(x, u) = y$, donc nous pouvons prendre une fonction κ de la forme :

$$\kappa(\hat{x}, u, y) = K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y})$$

où $\hat{y} = h(\hat{x}, u)$.

L'observateur peut donc s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + K(\hat{x}, u, y)(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}, u).\end{aligned}$$

4.3 Observateurs des systèmes non linéaires, un état de l'art

Si, pour un système linéaire, une solution au problème de la synthèse d'observateurs a été apportée dans les années 1960-70 par Luenberger dans un environnement déterministe, et par Kalman dans un environnement stochastique, il n'existe pas, à ce jour, d'approche universelle pour la construction d'observateurs des systèmes non linéaires. Ce problème reste ouvert et de nombreux travaux y sont régulièrement consacrés, donnant naissance à un large éventail d'algorithmes d'estimation. Les approches envisageables sont soit une extension des algorithmes linéaires, soit des algorithmes non-linéaires spécifiques. Dans le premier cas, l'extension est basée sur une linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement. Pour le cas d'algorithmes non linéaires spécifiques, les nombreuses recherches menées sur ce sujet [47] ont donné naissance à de nombreux algorithmes d'observation. Nous présenterons ces algorithmes dans la suite de ce chapitre.

1. **Méthodes de transformation non linéaires** : Cette technique fait appel à un changement de coordonnées afin de transformer un système non-linéaire en un système linéaire. Une fois qu'une telle transformation est faite, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système original en utilisant le changement de coordonnées inverse.
2. **Observateurs étendus** : Dans ce cas, le calcul du gain de l'observateur se fait à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu.
3. **Observateurs à grand gain** : Ce type d'observateurs est utilisé en général pour les systèmes Lipschitziens. Son non est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système.
4. **Observateurs de Luenberger généralisés(OLG)** : C'est un nouveau type d'observateurs qui a été proposé récemment pour la classe des systèmes monotones. Cette nouvelle conception consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième gain à l'intérieur de la partie non-linéaire du système.

5. **Observateurs basés sur la théorie de la contraction** : Ce type d'observateurs, comme son nom l'indique, est basé sur la théorie de la contraction utilisée comme outil d'analyse de la convergence. Cette technique mène à de nouvelles conditions de synthèse différentes de celles fournies par les techniques précédentes.

Ci-après, nous présentons un peu plus en détail ces cinq méthodes.

Méthode de transformations non linéaires

Cette technique consiste à transformer, à l'aide d'un changement de coordonnées, un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Une fois qu'un tel changement de coordonnées est obtenu, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger suffira pour estimer l'état du système transformé, et donc l'état du système non-linéaire original en utilisant le changement de coordonnées inverse.

Soit le système autonome de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.10)$$

est transformé, par un changement de coordonnées non-linéaire $z = \phi(x)$, en un système linéaire sous la forme canonique observable suivante :

$$\dot{z} = A_c z + \lambda(y) \quad (4.11a)$$

$$y = C_c z \quad (4.11b)$$

où A_c et C_c sont sous forme duale de Brunovskii, i.e. :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix}, \quad C_c = [1 \quad 0_{n-1}^T]$$

L'observateur de Luenberger correspondant au système précédent est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y) + K(y - C_c \hat{z}),$$

dont la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est linéaire et s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A_c - KC_c)\varepsilon. \quad (4.12)$$

Le calcul du gain K se fait par un placement de pôles.

La transformation non-linéaire a été généralisée comme suit :

$$\begin{aligned} z &= \phi(x), \\ v &= \psi(y). \end{aligned}$$

où v est la transformation de la sortie y à l'aide du changement de coordonnées non linéaire $\psi(\cdot)$. Les conditions sous lesquelles une telle transformation existe ont été établies. Cependant, trois problèmes sont liés à cette approche :

1. La classe des systèmes pour lesquels une telle transformation existe est très restreinte ;
2. La procédure d'obtention d'une telle transformation est très compliquée ;
3. Dans le cas des systèmes avec entrées (systèmes commandés), le système transformé contient toutes les dérivées des entrées.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

Dans ce cas, le système transformé sous forme canonique généralisée est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + \lambda(y, u') \\ v &= C_c z \end{aligned} \quad (4.13a)$$

où $u' = [u \quad \dot{u} \quad \dots \quad u^{(n)}]^T$. La transformation non-linéaire utilisée est

$$\begin{aligned} z &= \phi(x, u'), \\ v &= \psi(y, u'). \end{aligned}$$

En supposant que les dérivées de l'entrée u sont disponibles, la structure de l'observateur suggéré est :

$$\dot{\hat{z}} = A_c \hat{z} + \lambda(y, u') + K(v - \hat{v}) \quad (4.14)$$

$$\hat{v} = C_c \hat{z}. \quad (4.15)$$

La dynamique de l'erreur est donnée par (4.12)

Une des raisons pour laquelle la classe des systèmes qui peuvent être transformés sous forme linéaire observable est restreinte est due au fait que la sortie doit être linéaire comme dans (4.11b) et (4.13a). Cette condition est relaxée dans [22] pour la classe des systèmes autonomes mono-sortie. L'idée est de transformer le système (4.10), en utilisant le changement de variables $z = \phi(x)$, en

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Ly \\ y &= nz \end{aligned}$$

où $n(z) = h(x) |_{x=\phi^{-1}(z)}$. L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Ly,$$

et la dynamique de l'erreur $\varepsilon = z - \hat{z}$ est

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon.$$

La transformation ϕ est choisie de façon à obtenir une matrice A avec des propriétés souhaitables.

Afin de surmonter la difficulté d'obtention de la transformation convenable, indépendamment des travaux précédents, une nouvelle approche a été présentée dans [3] pour la classe des systèmes non linéaires autonomes et mono-sortie. Une méthode constructive basée sur des techniques de synthèse linéaires a été proposée. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la forme canonique ont été énoncées dans [25]. Plusieurs extensions de cette approche au cas des systèmes non-linéaires commandés et multi-sorties sont données dans [44] et [4].

Observateurs étendus

Il est possible d'éteindre quelques techniques linéaires à des systèmes non-linéaires, ceci en calculant le gain de l'observateur à partir du modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement. C'est par exemple le cas du filtre de Kalman étendu et l'observateur de Luenberger étendu que nous citons un peu plus en détail dans la suite.

A) *Filtre de Kalman Étendu (EKF)*

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non-linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires. Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non-linéaires. Cependant, cette convergence n'est que locale. L'analyse de la convergence de cet estimateur reste, à l'heure actuelle, un problème ouvert. Les nombreuses recherches qui ont été menées sur ce sujet ont donné naissance à de nombreuses publications et ouvrages [10], [13] et [17]. Avant d'introduire le fameux filtre de Kalman étendu, nous avons besoin de présenter l'estimateur de Kalman standard pour les systèmes linéaires autonomes (LTV).

Filtre de Kalman standard

Comme nous l'avons mentionné au précédemment, il existe une solution simple et optimale au problème de l'observation des systèmes linéaires donnée par les estimateurs de type Luenberger-Kalman. Le principe de l'estimateur de Luenberger est fondé

sur les techniques linéaires de placement de pôles, alors que l'estimateur de Kalman dualisant les résultats de commande optimale, s'appuie sur la résolution d'une équation de Riccati.

Considérons un système LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.16)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t). \quad (4.17)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $w(t) \in \mathbb{R}^r$, $v(t) \in \mathbb{R}^p$. sont des bruits blancs gaussiens, de moyenne nulles et de covariances respectives Q et R . Les matrices A , B , C , et L sont de dimensions appropriées.

Un estimateur de Luenberger-Kalman pour le système (4.16) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (4.18)$$

La dynamique de l'erreur d'observation est : $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - K(t)C)\tilde{x}(t) - K(t)v(t) + Lw(t). \quad (4.19)$$

Dans un environnement déterministe (i.e. $v(t) = w(t) = 0$) l'approche de Luenberger utilise les techniques linéaires de placement de pôles consiste, de ce fait, à choisir le gain d'observateur K constant de façon à placer les valeurs propres de la matrice $A - KC$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche.

L'approche optimale de Kalman se place, quant à elle, dans un environnement stochastique et fait appel aux propriétés statistiques des bruits, le gain de l'estimateur (4.16) s'écrivant :

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1} \quad (4.20)$$

où $P(t)$ est la solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t) + LQL^T. \quad (4.21)$$

Cette équation résulte de la minimisation par rapport à $K(t)$ de la matrice de covariance de l'erreur de l'estimation $P(t) = \varepsilon \left(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T \right)$. La stabilité du filtre est liée à l'existence d'une solution stationnaire $P(\infty) = \lim P(t)$ de l'équation (4.20) qui est assurée sous les conditions de d'observabilité de la paire (A, C) et de la stabilité de la paire (A, Γ) avec $\Gamma^T = LQL^T$.

Pour le système LTV (système linéaire non autonome) de la forme

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + v_1(t) \quad (4.22)$$

$$y = C(t)x + v_2(t).$$

L'estimateur de Kalman standard est donné par :

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + B(t)u + PC^T(t)R^{-1}(y - C(t)\hat{x})$$

où P est la solution symétrique et définie positive de l'équation de Riccati suivante :

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP.$$

Le filtre de Kalman étendu est une extension directe du filtre de Kalman standard en remplaçant les matrices d'état et de sortie, A, C du système linéaire (4.22) par les jacobiniennes des non-linéarités du système en question.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) + v(t) \\ y &= h(x, u) + w(t)\end{aligned}$$

L'EKF s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + PH(\hat{x}, u)R^{-1}(y - h(\hat{x}, u)) \\ \dot{P} &= F(\hat{x}, u)P + PF(\hat{x}, u)^T + Q - PH(\hat{x}, u)^T R^{-1} H(\hat{x}, u)P\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}F(\hat{x}, u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u); \\ H(\hat{x}, u) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}, u).\end{aligned}$$

B) Observateur de Luenberger étendu

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarisé est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsque l'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, cette méthode n'est pas très utilisée, parce que son utilisation peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement. Dans le deuxième cas, comme nous l'avons mentionné précédemment, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation de solutions approchées est envisageable.

Observateurs a grand gain : Approche de Thau et ses généralisations

Une méthode directe de conception d'observateur est d'utiliser un retour de sortie linéaire. Cette approche, introduite initialement dans [40], s'applique sur la classe des systèmes non-linéaires s'écrivant sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \phi(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.23)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties du système. La paire (A, C) est observable et la non-linéarité, ϕ satisfait la propriété de Lipschitz par rapport à x :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\|, \quad \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall u \in \mathbb{R}^m \quad (4.24)$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz de la fonction ϕ .

Ce type d'observateurs est relativement classique en observation des systèmes non linéaires. Son nom est dû au fait que le gain de l'observateur choisi est suffisamment grand pour compenser la non-linéarité du système.

L'observateur de type Luenberger correspondant a (4.23) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \quad (4.25)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ est donnée par l'équation :

$$\dot{\varepsilon} = (A - KC)\varepsilon + \phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u) \quad (4.26)$$

L'objectif est de déterminer sous quelles conditions le gain K peut garantir la stabilité de l'erreur d'estimation ε en zéro.

La méthode de Thau fournit une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation (4.26). Le résultat de cette méthode est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.5 ([40]) *Considérons le système (4.23) et l'observateur (4.25). Si le gain d'observation K est choisi tel que*

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (4.27)$$

où $\lambda_{\min}(S)$ et $\lambda_{\max}(S)$ désignent respectivement les valeurs propres minimale et maximale de la matrice carrée S , les matrices $P = P^T > 0$ et $Q = Q^T > 0$ désignent les solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0$$

alors l'erreur d'estimation (4.26) est exponentiellement stable.

La preuve de ce théorème est basée sur l'utilisation de la fonction de Lyapunov standard

$$V = V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

Pour plus de détails sur la preuve de ce Théorème, nous invitons le lecteur à consulter [40]. où il a été démontré que le rapport $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal si $Q = I_n$. Le problème est donc réduit à choisir un gain K qui satisfait

$$\gamma\phi < \frac{1}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{4.28}$$

où

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -I_n.$$

L'approche de Thau n'est pas une méthode de synthèse systématique. Elle permet seulement de vérifier la convergence de l'observateur (4.23), a posteriori. En effet, le choix des matrices P, Q et K qui satisfont l'inégalité (4.27) n'est pas direct. Par exemple, le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche n'implique pas que la condition (4.27) est satisfaite. Il n'existe aucune relation spécifique entre les valeurs propres de $(A - KC)$ et $\lambda_{\max}(P)$, ceci a été prouvé dans [40] par un simple exemple numérique.

Ce type d'observateurs a été largement étudié dans la littérature par de nombreux chercheurs spécialistes dans le domaine de l'observation d'état. Une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans [40], où une solution explicite et systématique du choix du gain de l'observateur est établie. Cette solution est illustrée dans le théorème suivant :

Théorème 4.6 ([40]) *Considérons le système (4.23) et l'observateur (4.25). S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation de Riccati*

$$AP + PA^T + P(\gamma_\phi^2 I_n - \frac{1}{\varepsilon} C^T C)P + I_n + \varepsilon I_n = 0$$

admette une solution P symétrique définie positive, alors le gain

$$K = \frac{1}{2\varepsilon} PC^T$$

stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'estimation (4.26).

Cependant, cet algorithme n'est pas efficace pour toutes les paires (A, C) observables et malheureusement ne donne pas d'informations sur les conditions que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin d'assurer la stabilité de l'erreur d'estimation. Nous avons vu que le placement des valeurs propres de $(A - KC)$ dans le demi-plan gauche est certainement insuffisant.

Dans [43], l'auteur a suggéré une procédure de conception liée directement à la matrice $(A - KC)$. Dans cette procédure, le choix du gain K tel que

$$\sigma_{\min}(A - KC) > \gamma_{\phi}$$

assure l'inégalité (4.28). Les valeurs singulières de $(A - KC)$ jouent, en effet, un rôle sur la convergence de l'observateur. Malheureusement, ce résultat est en général incorrect. Ceci a été démontré par un contre exemple dans [34] où l'auteur a établi un nouveau résultat permettant de corriger le précédent. Ce résultat est resumé dans le théorème suivant qui fournit des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la matrice $(A - KC)$ afin de justifier la convergence de l'observateur.

Théorème 4.7 ([34]) *Considérons le système(4.23) et l'observateur(4.25), avec (A, C) observable et ϕ satisfait (4.37). Alors, l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable si le gain K peut-être choisi tel que $(A - KC)$ soit stable et*

$$\min_{\omega \geq 0}(\sigma_{\min}(A - KC - j\omega I_n)) > \gamma_{\phi}$$

où j est tel que $j^2 = -1$.

La démonstration complète de ce théorème est donnée en trois étapes dans [34]. D'autres méthodes de synthèse d'observateurs ont été développées spécialement pour la classe des systèmes uniformément observables. Ces méthodes utilisent un changement de variables pour se ramener à un système de la forme (4.23). Une fois le système est transformé, l'utilisation d'un observateur a grand gain est systématique. Ce type d'observateurs a été appliqué à une classe de systèmes biologiques et à des procédés biotechnologiques.

Observateurs de Luenberger Généralisés (OLG)

La classe des systèmes concernés par cette nouvelle conception d'observateurs consiste à ajouter à l'observateur de Luenberger un deuxième retour de sortie linéaire à l'intérieur de la partie non linéaire du système. Cette approche concerne les systèmes décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + G\gamma(Hx) + \varrho(y, u) \\ y = Cx. \end{cases} \quad (4.29)$$

L'observateur d'état proposé a la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + G_{\gamma}(H\hat{x} + K(y - C\hat{x})) + \varrho(y, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (4.30)$$

Des conditions de convergence de l'observateur (4.30) ont été établies. Ce résultat concerne les systèmes pour lesquels la fonction non linéaire γ satisfait les hypothèses suivantes :

1. Chaque composante γ_i est une fonction scalaire à variable scalaire, i.e. :

$$\gamma_i = \gamma_i\left(\sum_{j=1}^{j=n} H_{ij}x_j\right), \quad i = 1, \dots, r.$$

2. 2. Toutes les composantes de γ sont des fonctions non décroissantes, i.e. :

$$0 \leq \frac{\gamma_i(v) - \gamma_i(w)}{v - w}, \quad \forall v \neq w \in \mathbb{R}.$$

En utilisant (4.29) et (4.30), la dynamique de l'erreur d'estimation $\varepsilon = x - \hat{x}$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + G(\gamma(v) - \gamma(w)) \quad (4.31)$$

où

$$v = Hx \text{ et } w = H\hat{x} + K(y - C\hat{x})$$

Ces conditions de convergence sont illustrées dans le théorème suivant :

Théorème 4.8 ([47]) *L'erreur d'estimation (4.31) est exponentiellement stable à l'origine s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante $v > 0$ et une matrice diagonale $\Lambda > 0$ tel que l'inégalité*

$$\begin{bmatrix} (A - Lc)^T P + P(A - LC) + vI_n & PG + (H - KC)^T \Lambda \\ G^T P + \Lambda(H - KC) & 0 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.32)$$

soit satisfaite.

Cette technique a été étendue dans [15] au cas des systèmes monotones multi-variables. Des conditions de convergence analogues ont été obtenues. De nouvelles conditions suffisantes de synthèse des gains K et L ont été proposées pour une classe de systèmes dont la non-linéarité est une fonction scalaire à variable scalaire. Ce résultat est plus général que le précédent, puisqu'il prend en compte les bornes du terme $\frac{\gamma(v) - \gamma(w)}{v - w}$ quand elles existent, c'est à dire quand la non-linéarité satisfait la condition

$$0 \leq \frac{\gamma(v) - \gamma(w)}{v - w} \leq b, \quad \forall v \neq w \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Dans ce cas, en exploitant la condition (4.33), les auteurs ont établi le théorème suivant :

Théorème 4.9 ([47]) *L'observateur d'état (4.30) converge exponentiellement s'il existe une matrice $P = P^T > 0$, une constante $v > 0$ et une matrice diagonale $\Lambda > 0$ telles que l'inégalité*

$$\begin{bmatrix} (A - Lc)^T P + P(A - LC) + vI_n & PG + (H - KC)^T \\ G^T P + (H - KC) & -\frac{2}{b} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.34)$$

soit satisfaite.

Cette dernière inégalité est moins restrictive que (4.32). En effet, dans (4.32) il est nécessaire d'avoir $PG + (H - KC)^T \Lambda = 0$ à cause de la présence d'un zéro sur la diagonale. Ceci rend l'inégalité (4.32) contraignante. Cependant, dans (4.34), le zéro sur la diagonale est remplacé par $-\frac{2}{b}$, ce qui n'impose pas à $PG + (H - KC)^T$ d'être nul. Notons qu'en particulier, pour $b = +\infty$, nous retrouvons l'inégalité (4.32).

Observateurs basés sur la théorie de la contraction

Cette technique, nouvelle en observation d'état, a été introduite dans [27], [26], [28] et [29]. Le principe de la méthode est le suivant :

Etant donné un système non linéaire de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) \\ y &= h(x, t)\end{aligned}$$

l'observateur correspondant est l'observateur classique de Luenberger :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, t) + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= h(\hat{x}, t)\end{aligned}$$

L'objectif est de déterminer la matrice L telle que le système général suivant soit contractant :

$$\dot{X} = f(X, t) + L(y - h(X, t)). \quad (4.35)$$

En effet, si le système (4.35) est contractant, alors, les deux solutions particulières x et \hat{x} de (4.35) convergent exponentiellement l'une vers l'autre. voir théorème 1.2.20([47]).

En utilisant la théorie de la contraction, le système (4.35) est contractant si la valeur propre maximale de la partie symétrique de la matrice suivante est négative :

$$\frac{\partial f}{\partial X}(X, t) - L \frac{\partial h}{\partial X}(X, t). \quad (4.36)$$

De façon générale, le système (4.35) est contractant s'il existe une métrique $M(X, t)$ et une constante positive β_m telles que

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right)^T M + M \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right) + \dot{M} \right\} \leq -\beta_m M. \quad (4.37)$$

Dans le cas où M est constante, l'inégalité (4.37) devient

$$\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right)^T M + M \left(\frac{\partial f}{\partial X} - L \frac{\partial h}{\partial X} \right) \right\} \leq -\beta_m M. \quad (4.38)$$

En posant $S = L^T M$ dans (4.38), on obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial X}^T M + M \frac{\partial f}{\partial X} - \frac{\partial h}{\partial X}^T S - S^T \frac{\partial h}{\partial X} + \beta_m M \leq 0. \quad (4.39)$$

Par conséquent, si la condition (4.39) est soluble pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, alors le gain

$$L = M^{-1}S^T$$

rend le système (4.35) contractant. De ce fait, les deux solutions x et \hat{x} de (4.35) convergent exponentiellement l'une vers l'autre.

La théorie de la contraction a été appliquée à plusieurs types d'observateurs tels que le filtre de Kalman étendu et les observateurs PD [27]. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux articles [27], [26], [28] et [29]. Des conditions sous forme de LMI ont été établies dans [28] et une analogie avec les systèmes LTV est également proposée dans [27].

Chapitre 5

Application : synthèse d'observateur pour une classe de systèmes non linéaires

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de construction d'un observateur d'état pour une classe de systèmes non linéaires proposée par A. Zemouche et al dans dans leur article [46]. Cette méthode est basée sur un observateur de Luenberger généralisé (OLG). La technique utilisée par l'auteur fait intervenir l'utilisation du théorème des accroissements finis (the Differential Mean Value Theorem (DMVT) pour le sigle anglais) au niveau de la dynamique de l'erreur d'estimation, afin de la transformer en un système Linéaire à Paramètres Variants (LPV).

Des conditions de stabilité sous forme de LMIs ont été obtenues, en se basant sur les techniques LPV [2].

Notre application consiste en l'implémentation de ces LMIs sous Matlab, nous avons illustré, par un exemple numérique, la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro.

5.1 Préliminaires et formulation du problème

Préliminaires

Avant d'introduire la classe des systèmes non-linéaires concernée, nous avons besoin d'énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 5.1 (Le DMVT pour des fonctions scalaires) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Supposons que φ soit différentiable sur $Co(a, b)$. Alors, il existe une constante*

$z \in Co(a, b), z \neq a, z \neq b$ tel que :

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)(a - b). \quad (5.1)$$

Démonstration La preuve de ce théorème est basée sur le théorème des accroissements finis classique pour les fonctions scalaires à variables scalaire qui lui même découle du fameux théorème de Rolle.

Remarque 5.1 *Le DMVT est incorrect dans le cas des fonctions vectorielles. Ceci veut dire qu'on peut pas toujours trouver une seule constante $z \in Co(a, b)$ telle que l'équation (5.1) soit vérifiée. En effet, on peut construire facilement des contre exemples.*

Afin d'obtenir une équation similaire à (5.1), on peut imaginer l'existence de plusieurs constantes $z_i \in Co(a, b)$ pour $i = 1, \dots, q$ où q est le nombre de composantes de la fonction non-linéaire en question. Pour ceci, nous proposons de procéder comme suit :

Soit

$$E_s = e_s(i)/e_s(i) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, i = 1, \dots, s.$$

La base canonique de \mathbb{R}^s pour tout $s \geq 1$. Considérons la fonction vectorielle

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$$

Cette fonction peut toujours s'écrire sous la forme

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x)]^T$$

où $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de φ . D'après la définition de E_s , on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^q e_q(i) \varphi_i(x).$$

En appliquant le théorème sur chaque fonction scalaire φ_i et en utilisant le fait que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(\cdot) = \sum_{j=1}^n e_n^T(j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\cdot).$$

on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.2 (Le DMVT pour des fonctions vectorielles) *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$. soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Supposons que φ soit différentiable sur $Co(a, b)$. Il existe alors des $z_1, \dots, z_q \in Co(a, b), z_i \neq a, z_i \neq b$ pour $i = 1, \dots, q$ tel que :*

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \left(\sum_{i,j=1}^{q,n} e_q(i) e_n^T(j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(z_i) \right) (a - b). \quad (5.2)$$

Position du problème

Considérons la classe des systèmes non-linéaires suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bf(x, y, u) \quad (5.3)$$

$$y = Cx \quad (5.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur d'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées. La fonction f est différentiable par rapport à x et s'écrit sous la forme générale suivante :

$$f(x, y, u) = \begin{bmatrix} f_1(H_1x, y, u) \\ \vdots \\ f_q(H_qx, y, u) \end{bmatrix}$$

avec $H_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$ pour tout $i \in 1, \dots, q$. Sans perte de généralité, nous supposons que la matrice B est de plein rang colonne et que $f_i \neq f_j$ pour tout $i \neq j$.

On introduit l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.3 *Supposons que les fonctions $f_i, i = 1, \dots, q$, satisfont la double inégalité ci-après :*

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(v^i, y, u) \leq b_{ij}, \quad \forall v^i \in \mathbb{R}^{s_i}, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m \quad (5.5)$$

où

$$v^i = H_i x.$$

Remarque 5.2 *Sans perte de généralité, nous supposons que $a_{ij} = 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$ et $j = 1, \dots, s$ où $s = \max_{1 \leq i \leq q} (s_i)$. En effet, s'il existe deux sous ensembles $S_1 \subset \{1, \dots, q\}$ et $S_2 \subset \{1, \dots, s\}$ tels que $a_{ij} \neq 0$ pour tout $(i, j) \in S_1 \times S_2$ alors nous pourrions considérer une nouvelle fonction*

$$\tilde{f}(x, y, u) = f(x, y, u) - \left(\sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij} H_i \right) x$$

avec

$$H_{ij} = e_q(i) e_{s_i}^T(j).$$

La fonction \tilde{f} satisfait (5.5) avec $\tilde{a}_{ij} = 0$ et $\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$. Dans ce cas, nous écrivons alors (5.4) comme suit :

$$\dot{x} = \tilde{A}x + B\tilde{f}(x, y, u)$$

avec

$$\tilde{A} = A + B \left(\sum_{(i,j) \in S_1 \times S_2} a_{ij} H_{ij} H_i \right).$$

L'observateur d'état que nous proposons ici a la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\bar{f}(\hat{x}, y, u) + L(y - C\hat{x}) \quad (5.6)$$

$$\bar{f}_i(\hat{x}, y, u) = f_i(H_i\hat{x} + K_i(y - C\hat{x}), y, u) \quad (5.7)$$

où \bar{f}_i représente la $i^{\text{ème}}$ composante de \bar{f} .

Le but principal est de trouver les matrices $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ pour $i = 1, \dots, q$, telles que l'erreur d'estimation

$$\varepsilon = x - \hat{x} \quad (5.8)$$

soit asymptotiquement stable.

La dynamique de l'erreur (5.8) est donnée par :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + B(f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u)) \quad (5.9)$$

En utilisant le DMVT nous déduisons qu'il existe $z_i \in \text{co}(v^i, w^i)$ pour tout $i = 1, \dots, q$ tels que :

$$f(x, y, u) - \bar{f}(\hat{x}, y, u) = \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i \quad (5.10)$$

où

$$\chi_i = (H_i - K_i C)\varepsilon \quad (5.11a)$$

$$H_{ij} = e_q(i) e_{s_i}^T(j) \quad (5.11b)$$

$$h_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial v_j^i}(z_i(t), y, u) \quad (5.11c)$$

$$v^i = H_i, \quad w^i = H_i\hat{x} + K_i(y - C\hat{x}) \quad (5.11d)$$

$$v^i - w^i = (H_i - K_i C)\varepsilon. \quad (5.11e)$$

En utilisant les notations précédentes, la dynamique de l'erreur d'estimation (5.9) devient :

$$\dot{\varepsilon} = (A - LC)\varepsilon + B \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i. \quad (5.12)$$

5.2 Synthèse d'observateur

Nous présentons la méthode de synthèse des gains de l'observateur assurant la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation vers zéro. L'analyse de la stabilité est étudiée en utilisant la théorie de Lyapunov qui permet d'obtenir des conditions exprimées sous forme de LMIs.

Théorème 5.4 *L'erreur d'estimation (5.8) converge exponentiellement vers zéro s'il existe un scalaire positif α et des matrices $P = P^T > 0, R, K_i, i = 1, \dots, q$ de dimensions appropriées tels que l'inégalité linéaire matricielle suivante soit satisfaite :*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \alpha) & \mathcal{N}_1(P, K_1) & \cdots & \mathcal{N}_{sq}(P, K_q) \\ (*) & -\beta_{11}I_{s1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots (*) & \ddots & 0 \cdots \\ (*) & \cdots & (*) & -\beta_{qsq}I_{sq} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.13)$$

$$\mathcal{M}(P, R, \alpha) = A^T P + PA - C^T R - R^T C + \alpha I_n \quad (5.14)$$

$$\mathcal{N}_j = PBH_{ij} + (H_i - K_i C)^T \quad (5.15)$$

$$\beta_{ij} = \frac{2}{b_{ij}} \quad (5.16)$$

Le gain L est alors donné par $L = P^{-1}R^T$ et les gains K_i des solutions libres de la LMI.

Démonstration : Considérons la fonction de Lyapunov quadratique candidate

$$V = \varepsilon^T P \varepsilon.$$

La dérivée de V s'écrit :

$$\dot{V} = \varepsilon^T [(A - LC)^T P + P(A - LC)] \varepsilon + 2\varepsilon^T PB \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{j=1}^{j=s_i} h_{ij}(t) H_{ij} \chi_i.$$

D'après (5.5) nous savons que

$$\frac{1}{h_{ij}(t)} \geq \frac{1}{b_{ij}} \text{ pour tout } i = 1, \dots, q \text{ et } j = 1, \dots, s_i.$$

Alors

$$(h_{ij}(t)\chi_i)^T (h_{ij}(t)\chi_i) \left(\frac{1}{h_{ij}(t)} - \frac{1}{b_{ij}} \right) \geq 0$$

ce qui implique

$$\chi^T (h_{ij}(t)\chi_i) - \frac{1}{b_{ij}} (h_{ij}(t)\chi_i)^T (h_{ij}(t)\chi_i) \geq 0.$$

En posant

$$\xi_{ij} = (h_{ij}(t)\chi_i),$$

nous obtenons l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{i=j} \sum_{j=1}^{j=s_i} \left(\chi_i^T \xi_{ij} - \frac{1}{b_{ij}} \xi_{ij}^T \xi_{ij} \right) \geq 0. \quad (5.17)$$

Donc, d'après (5.17) nous avons

$$\dot{V} \leq \dot{V} + 2 \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{j=1}^{j=s_i} \left(\chi_i^T \xi_{ij} - \frac{1}{b_{ij}} \xi_{ij}^T \xi_{ij} \right). \quad (5.18)$$

En utilisant (5.11a), l'inégalité (5.18) est équivalente à

$$\dot{V} + \alpha \|\varepsilon\|^2 \leq [\varepsilon^T \quad \xi^T] \mathbb{M} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \xi \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

avec

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(P, R, \alpha) & \mathcal{N}_1(P, K_1) & \cdots & \mathcal{N}_{sq}(P, K_q) \\ (*) & -\beta_{11} I_{s1} & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots (*) & \ddots & 0 \cdots \\ (*) & \cdots & (*) & -\beta_{qsq} I_{sq} \end{bmatrix}$$

et $\xi = [\xi_{11}, \dots, \xi_{1s_1}, \xi_{21}, \dots, \xi_{qsq}]^T$.

Puisque (5.13) implique $\mathbb{M} \leq 0$ alors

$$\dot{V} \leq -\alpha \|\varepsilon\|^2. \quad (5.20)$$

D'après (5.20) et le fait que

$$\lambda_{\min}(P) \|\varepsilon\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P) \|\varepsilon\|^2,$$

on déduit que

$$\|\varepsilon(t)\| \leq \gamma \|\varepsilon(0)\| e^{-\beta t} \quad (5.21)$$

avec

$$\gamma = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \beta = \frac{\alpha}{2\lambda_{\max}(P)}.$$

L'inégalité (5.21) signifie que l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers zéro. Ceci complète la preuve du théorème.

Remarque 5.3 Dans l'inégalité (5.5) on peut avoir $b_{ij} = +\infty$. Dans ce cas l'inégalité (5.13) est satisfaite si $PBH_{ij} + (H_i - K_i C)^T = 0$. Cependant, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ fixe, pour que (5.13) soit vérifiée il est nécessaire d'avoir un seul indice j pour lequel $b_{ij} = +\infty$. En effet, considérons deux indices j_1 et j_2 tels que $b_{ij_1} = b_{ij_2} = +\infty$. Ceci signifie que

$$PBH_{ij_1} + (H_i - K_i C)^T = 0 \quad (5.22)$$

$$PBH_{ij_2} + (H_i - K_i C)^T = 0. \quad (5.23)$$

ce qui implique que $PB(H_{ij_1} - H_{ij_2}) = 0$. En utilisant la définition des H_{ij} , nous déduisons que cette dernière égalité est satisfaite si et seulement si la i ème colonne de la matrice B est nulle, ce qui contre dit le fait que B est de plein rang colonne.

Exemple 5.1 Afin de valider les performances de la méthode proposée, nous présentons un exemple numérique où on a pris $b_{11} = +\infty$. L'exemple choisi comporte deux composantes non-linéaires, la première est monotone et la seconde est lipschitzienne. Ce système s'écrit sous la forme avec les paramètres suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$H_1 = [1 \ -1 \ 0] \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f_1(H_1x, y, u) = \frac{1}{3}(x_1 - x_2)^3,$$

$$f_2(H_2x, y, u) = 0.1 \sin(x_1) \sin(x_3).$$

En utilisant l'approche proposée, on obtient :

$$0 \leq h_{11}(t) \leq +\infty,$$

$$-0.1 \leq h_{21}(t) \leq 0.1,$$

$$-0.1 \leq h_{22}(t) \leq 0.1,$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad H_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'après la remarque 5.2, nous devons résoudre la LMI (5.13) avec

$$\tilde{A} = A + a_{21}BH_{21}H_2 + a_{22}BH_{22}H_2,$$

et

$$\tilde{b}_{21} = b_{21} - a_{21}, \quad \tilde{b}_{22} = b_{22} - a_{22}.$$

Après la résolution de la LMI (5.13), nous avons les gains suivant :

$$P = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = [3 \ 8 \ 4]^T,$$

$$K_1 = -1, K_2 = [0.49 \ -0.54]^T.$$

Comme $b_{11} = +\infty$, nous devons avoir $PBH_{11} + (H_1 - K_1C)^T = 0$, ce qui est bien le cas.

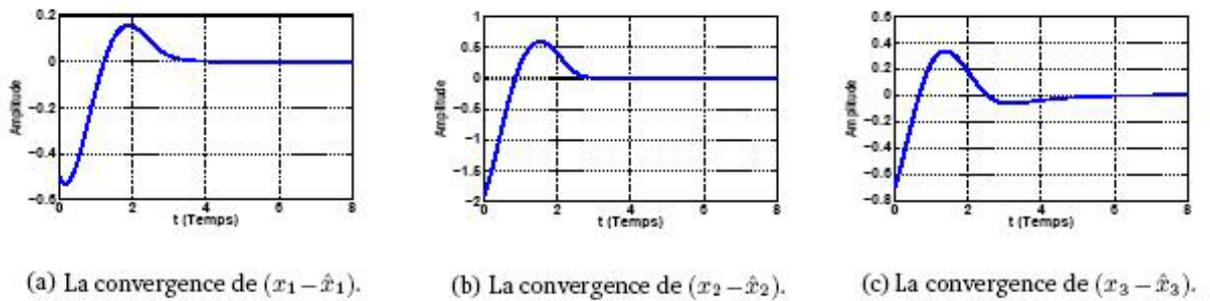


FIG. 5.1 – Evolution exponentielle de chacune des composantes de l'erreur d'estimation

En effet,

$$PBH_{11} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } (H_1 - K_1 C)^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -PBH_{11}.$$

Le comportement asymptotique de l'erreur du système est représenté par la figure 5.1 et la figure 5.2

Le programme Matlab permettant de faire cette simulation est le suivant :

```
%*****
%
%
clear all;
close all;
%
% %***** declaration des constantes *****
%
A = [0 1 0;0 1 1;0 1 -1];
B = [0 0;1 0;0 1];
C = [1 0 0];
H1 = [1 -1 0];
H2 = [1 0 0;0 0 1];
n = size(A,1);
s2 = size(H2,1);
s1 = size(H1,1);
%***** TAF *****
H11 = [1;0];
```

```

H21 = [0 ;1]*[1 0] ;
H22 = [0 ;1]*[0 1] ;
%b11 = 1 ;
%b12 = 2 ;
b21 = 2 ;
b22 = 2 ;
%beta11 = 2/b11 ;
%beta12 = 2/b12 ;
beta21 = 5*2/b21 ;
beta22 = 5*2/b22 ;
%*****%*****
%***** LMI avec égalité *****
P = sdpvar(3) ;
R = sdpvar(1,3) ;
K1 = sdpvar(1,1) ;
K2 = sdpvar(2,1) ;
alpha = sdpvar(1,1) ;
%*** inégalités *****
F=set(zeros(n,n)<P) ;
F=F+set(0<alpha) ;
F=F+set([A'*P-C'*R+P*A-R'*C+alpha*eye(n) P*B*H21+(H2-K2*C)'
P*B*H22+(H2-K2*C)';(P*B*H21)'+(H2-K2*C) -beta21*eye(s2) zeros(s2) ;
(P*B*H22)'+(H2-K2*C) zeros(s2) -beta22*eye(s2)]<0) ;
%***** égalités *****
F=F+set(P*B*H11+(H1-K1*C)'==0) ;
%
%***** résoudre *****
solvesdp(F) ;
%***** récupération des solutions *****
P = double(P) ;
R = double(R) ;
K1 = double(K1) ;
K2 = double(K2) ;
alpha = double(alpha) ;
%***** le gain L *****
L = inv(P)*R' ;
\%**** conditions initiales****
x0 = [0.5;0.1;0.3] ;

```

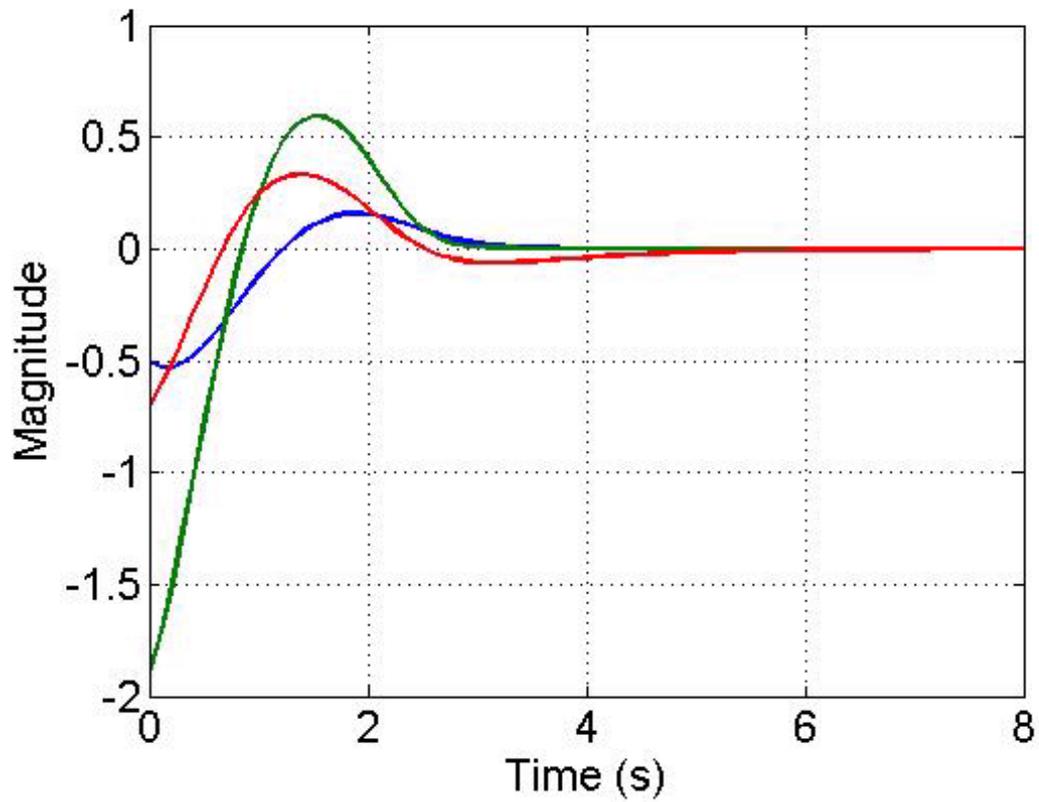


FIG. 5.2 – Comportement asymptotique de l'erreur d'estimation du système

```
x0hat = [1;2;1];
```

```
\%***** fichier SIMULINK *-- cdc06_ex2_simul *****
```

Conclusion et perspectives

Durant tout au long de ce mémoire, nous avons cité plusieurs problèmes de contrôle : la contrôlabilité, la stabilisation, l'observabilité et l'estimation de l'état. Nous avons accordé une attention particulière aux problèmes de stabilisation et de l'estimation. Le problème de stabilisation d'un système consiste à construire un retour d'état, ou feedback (ou encore un régulateur), c'est-à-dire une fonction $x \rightarrow u(x)$ tel que le point que l'on cherche à atteindre (l'équilibre) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$. La contrôlabilité est indispensable pour stabiliser un tel système, en effet, pour atteindre le point d'équilibre, le système doit être contrôlable. Un tel feedback est dit bouclage statique. Souvent on ne mesure pas tout l'état x , mais une partie y de x . On peut se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet. c'est le problème de l'observabilité. Dans ce cas, stabiliser le système entier revient à construire un feedback par retour de sortie dynamique, il s'agit donc de construire une fonction $y \rightarrow u(y, \hat{x})$, où \hat{x} est l'état estimé de x , telle que l'équilibre du système en boucle fermée soit asymptotiquement stable. Estimer x revient à construire un observateur asymptotique \hat{x} de x , i.e. une fonction dynamique de l'observable y tel que $\hat{x}(t) - x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Le problème de construction d'un régulateur en fonction de l'observateur asymptotique de l'état pour un système contrôlable et observable s'appelle synthèse régulateur-observateur. Ce problème est loin d'être résolu dans le cas des systèmes non linéaires.

Les deux difficultés majeures du problème de stabilisation des systèmes non linéaires sont

1. comment construire le régulateur ?.
2. Une fois le régulateur construit comment analyser la stabilité asymptotique du système en boucle fermée, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il n'existe pas de méthode "universelle" pour la construction de la fonction de Lyapunov.

De même, la synthèse d'observateur asymptotique est un problème d'actualité, largement inversé par les automaticiens.

Dans le cas des systèmes linéaires, les deux problèmes sont complètement résolus.

L'analyse de la stabilité de Lyapunov joue un rôle primordial aussi dans les problèmes de stabilisation que dans les problèmes de la synthèse d'observateur. Nous avons consacré, à cet effet, le chapitre deux aux différentes méthodes de Lyapunov pour la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, autonomes et non autonomes.

Dans le chapitre trois, nous nous sommes intéressés à la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires. Dans le cas non linéaire, nous avons présenté que des résultats locaux sur ces deux notions.

Nous avons présenté quelques observateurs les plus connus et utilisés pour les systèmes non linéaires. Un rappel sur la théorie de l'observation des systèmes linéaires, et non linéaires a tout d'abord été présenté.

Notre travail se termine par une synthèse d'observateur d'état pour une classe de systèmes non linéaires. Des conditions de synthèse en termes LMI ont été étudiées. Notre application consiste à illustrer par un exemple numérique la convergence exponentielle de l'estimateur vers zéro. (programmé via le langage de programmation Matlab et Simulink).

Beaucoup de questions fondamentales n'ont pas été abordées dans ce mémoire. En particulier

– Nous n'avons pas expliqué comment construire des feedbacks explicites asymptotiquement stabilisants. Ce problème fondamental a été bien sûr abordé par de nombreux auteurs et de nombreux livres ; voir [14] et [35].

– Souvent on ne mesure pas tout l'état x , mais une partie y de x . On ne peut donc pas utiliser des feedbacks dépendant de x : il faut se limiter à des feedbacks dépendant de y . Sur ce sujet il existe de nouveau une très vaste littérature. Mentionnons juste l'article [14], qui contient un des résultats les plus intéressants obtenus récemment sur ce sujet. Notons qu'il est utile de considérer des feedbacks instationnaires ; par exemple le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u, \\ y &= x^2\end{aligned}$$

ne peut être stabiliser asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(y)$, bien qu'il puisse être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(x)$ (prendre, par exemple $u(x) = -x$). Mais il peut être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(y, t)$. Voir [14] pour plus d'informations.

Il est claire que notre étude est loin d'être complète. Il nous semble néanmoins avoir acquis les connaissances essentielles, lesquelles conjuguées avec beaucoup de persévérances nous permettront d'investir les situations, notamment la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

Bibliographie

- [1] Akhenak, A. ; *Conception d'observateurs non linéaires par approche multimodèle : application au diagnostic.* univ-Nancy, 16 decembre 2004.
- [2] Bara, G. I. ; *State estimation of linear parameter-varying systems.*PHD Thesis, National Polytechnic Institute of Lorraine, 2001.
- [3] Bestle, D. and Zeitz, M. ; *Canonical form observer design for nonlinear time variable systems.* International Journal of Control, 38(2) : 419-431, 1983.
- [4] Birk, J. and Zeitz, M. ; *Extended Luenberger observer for non linear multi variable systems.* International Journal of control, 47(6) : 1823-1836, 1988.
- [5] Bonnas, F. and Rouchon, P. ; *Analyse et Commande de Systèmes Dynamiques,* Mathématiques Appliquées, Ecole polytechnique, septembre 2003.
- [6] Bornard, G. Celle-couenne, F. and Gilles, G. ; *Observabilité et observateurs des systèmes non linéaires.* chapitre 3. Modélisation-Estimation. Masson, 1993.
- [7] Boscaïn U., Piccoli B. ; *An introduction to optimal control,* école de CIMPA Tlemcen du 26 avril au 8 mai 2003.
- [8] Boyd, S., EL Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. ; *Linear matrix inequalities in system and control theory.* In SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [9] Brockett, R. W. *Asymptotic stability and feedback stabilization.* Differential Geometric Control Theory. (R.W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussman, Eds.), Boston, USA. pp. 181-191, 1983.
- [10] Brookner, E. ; *Tracking and Kalman filtering made easy.* John Wiley & Sons, 1998.
- [11] Bullo, F., Leonard, N. et Lewis., A. *Controllability and motion algorithms form underactuated lagrangian systems on lie groups.* IEEE Transaction on Automatic Control, 45(8) :1437-1454, 2000.
- [12] Cherrier, E. ; *Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires.* PhD Thesis, National Polytechnic Institute of lorraine, 2006.
- [13] Chen, G. ; *Approximate Kalman filtering.* World Scientific series in approximations and decompositions, 1993.
- [14] Coron, J. M. ; *Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires,* cours donné dans "Les journées mathématiques X-UPS en 1999". [http ://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf](http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf).

-
- [15] Fan, X. and Arcak, M. ; *Observer design for systems with multivariable monotone nonlinearities*. Systems and Control Letters, 50 : 319-330, 2003.
- [16] Golub, G. H. and Van Loan, C. F. ; *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [17] Grewal, M. and Andrews, A. ; *Kalman filtering : Theory and practice*. Prentice Hall, 1993.
- [18] Hahn W., *Stability of Motion*, Springer Verlag, Berlin (1967).
- [19] Hermann, R. *Accessibility problems for path systems*. *Differential Geometry and the Calculus of Variations*. Brookline., Ma, USA. pp 241-257, 1968.
- [20] Herman, R. and Krener, J. ; *Nonlinear controlability and observability*. *IEEE Trans. Automatic control*, 22(5) : 728-740, 1977.
- [21] Isidori, A. (1989). *Nonlinear Control Systems*. 2nd ed.. Springer-Verlag. Berlin, Germany, 1989.
- [22] Kazantzis, N. and Kravaris, C. ; *Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem*. Systems and control Letters, 34(5) : 241-247, 1998.
- [23] Khalil, H. K. ; *Non Linear System*, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [24] Lee, E. B. and Markus, L. ; *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons, New-York (1967).
- [25] Li, C. W. and Tao, *Observing nonlinear time variable systems through a canonical form observer*. International Journal of control, 44(6) : 1703-1713, 1987.
- [26] Lohmiller, J. and Slotine, J. J. E. ; *On contraction analysis for non linear systems*. Automatica, 34(6) : 683-696, 1998.
- [27] Lohmiller, J. and Slotine, J. J. E. ; *Control system design for mechanical systems using contraction theory*. IEEE Trans. Aut. Control, 45(5) : 984-989, 2000.
- [28] Lohmiller, W. and Slotine, J. J. E. ; *Non linear process control using contraction theory*. A. I. Ch. E Journal, 2000.
- [29] Lohmiller, W. and Slotine, J. J. E. ; *Contraction analysis of non linear distributed systems*. International Journal of control, 2005.
- [30] Müllhaupt, P. ; *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaire*. 12 Juin 2007.
- [31] Nesterov, Y. and Nemirovsky, A. ; *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*. SIAM, 1994.
- [32] Nijmeijer, H. et van der Schaft, A. J. ; *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag. New York, USA, 1990.
- [33] Raghavan, S. and Hedrick, J. K. ; *Observer Design for a class of nonlinear systems ; Int. J. of control*, 59(2) : 515-528, 1994.
- [34] Rajamani, R. ; *Observers for Lipschitz nonlinear systems*. IEEE Trans. Automatic Control, 43(3) : 397-401, 1998.
- [35] Sallet, G. ; *Théorie du contrôle et équations algébriques de Ricatti*, école de CIMPA. Tlemcen du 26 avril au 8 mai 2003.

-
- [36] Slotine, J. J. and Li, W. ; *Applied Non Linear Control*. Prentice Hall. 1991.
- [37] Sontag, E. D. ; *A concept of local observability*. *systems and control Letters*, 5(1) : 41-47, 1984.
- [38] Sussmann, H. et Jurdjevic., V. ; *Controllability of nonlinear systems*. *Journal of Differential Equations*, 12(2) :95–116, 1972.
- [39] *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*. Prentice Hall. 1963.
- [40] Thau, F. E. ; *Observing the state of non linear dynamic systems*. *Int. J. of Control*, 17(3) : 471-479, 1973.
- [41] Trélat, E. et Haberkorn, T. ; *Cours d'automatique, Master de Mathématiques, Université d'Orléans, Premier trimestre*.
- [42] Trélat, E. ; *Contrôle optimal : Théorie et application, Université d'Orléans, 2007*.
- [43] Zak, S. H. ; *On the stabilisation and observation of non linear/uncertain dynamic systems*. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35(5) : 397-401, 1990.
- [44] Zeitz, M. ; *The extended Luenberger observer for non linear systems*. *Systems and control letters*, 9 : 149-156, 1987.
- [45] Zemouche, A., Boutayeb, M. and Iulia Bara, G. ; *Observer Design for nonlinear Systems ; An approach based on the differential mean value theorem*, in 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference CDC-ECC 2005, Seville, Spain, December 2005.
- [46] Zemouche, A., Boutayeb, M. and Bara, G. I. ; *Observers Design for a class of nonlinear Systems*. In 45th IEEE Conference on Decision and Control CDC2006, San Diago, California, USA, December 2006.
- [47] Zemouche, A. ; *Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires*. Univ-Louis Pasteur Strasbourg, 2007.