Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Introduction à la théorie des probabilités

Polycopié d'habilitation
réalisé par :

Dr. BOUALAM Karima

INTRODUCTION

Ce document s'articule autour des principales notions de la théorie des probabilités ; il résume l'essentiel des concepts fondamentaux des probabilités discrètes et continues qui permettent d'aborder la modélisation mathématique de l'incertitude, du hasard et de la fluctuation ou de la variabilité des données lors des observations.

Il offre la possibilité aux étudiants d'assimiler les principaux outils conceptuels et de fournir des connaissances de base destinées à permettre un approfondissement ultérieur dans des domaines plus avancés en théorie statistique de l'estimation et des tests.

Les étudiants trouveront, un cours présenté selon un cheminement logique des notions et outils de probabilités permettant d'étudier et de comprendre les phénomènes aléatoires, ceux dont les résultats ne peuvent être prédits avec certitude, nous avons également introduit des exercices pour illustrer l'intérêt et la mise en oeuvre des principes théoriques.

Brièvement, le premier chapitre résume les différentes méthodes de dénombrement mathématique. La notion de probabilité et ses propriétés sont abordées au deuxième chapitre. Quant au dernier, est consacré aux variables aléatoires et aux lois usuelles continues et discrètes, les plus utilisés en statistique.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction **1**

Table des matières **1**

1 Analyse combinatoire **4**

1.1 Arrangements 4

1.2 Combinaisons 5

1.3 Permutations 7

1.4 Principe de multiplication 8

1.5 Exercices Corrigés 10

2 Calcul de probabilités **16**

2.1 Définitions 16

2.2 Notion de probabilité 17

2.2.1 Calcul de probabilité 19

2.3 Probabilité conditionnelle et formule de Bayes 19

2.3.1 Probabilité conditionnelle 19

2.3.2 Formule des probabilités totales 21

2.3.3 Formule de Bayes 22

2.3.4 Événements indépendants 23

2.4 Exercices corrigés 25

3 Variables aléatoires **30**
3.1 Définitions 30
3.2 Loi de probabilité-fonction de répartition- densité 31
3.3 Espérance mathématique et moments 35
3.4 Variance et écart-type 39
3.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev 41
3.6 Lois de probabilités usuelles 42
3.6.1 Lois usuelles discrètes 42
3.6.1.1 Loi uniforme discrète 42
3.6.1.2 Loi de Bernoulli 43
3.6.1.3 Loi Binomiale 44
3.6.1.4 Loi de Poisson 45
3.6.1.5 Loi binomiale négative 50
3.6.1.6 Loi géométrique 51
3.6.1.7 Loi hypergéométrique 52
3.6.2 Lois usuelles continues 53
3.6.2.1 Loi uniforme 53
3.6.2.2 Loi exponentielle 54
3.6.2.3 Loi normale 56
3.6.2.4 Loi de Cauchy 60
3.6.2.5 Loi log-normale 61
3.6.2.6 Loi gamma 62
3.6.2.7 Loi bêta 63
3.6.2.8 Loi de chi-deux 65
3.6.2.9 Loi de Student 65
3.6.2.10 Loi de Fisher-Snedecor 66
3.7 Exercices 68

Bibliographie **81**

CHAPITRE 1

ANALYSE COMBINATOIRE

L'analyse combinatoire fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utile en théorie des probabilités. Nous calculons le nombre de possibilités de pouvoir choisir p éléments dans un ensemble de n éléments .
Les méthodes de dénombrement se classent selon trois catégories : Les arrangements (l'ordre est important), les combinaisons (l'ordre n'est pas important) et les permutations (l'ordre est important et $n = p$).

Soit E un ensemble fini de cardinal égal à n, on choisit p éléments de E.

1.1 Arrangements

a. Arrangement sans répétition : Si dans la disposition des éléments, la répétition est non permise et l'ordre est important, alors le nombre d'arrangements possibles est

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

b. Arrangement avec répétition : Si dans la disposition des éléments, la répétition est permise et l'ordre est important, alors le nombre d'arrangements possibles est

$$a_n^p = n^p$$

Remarques

• $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n$

• $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}, \quad \forall p = \overline{1, n-1}$
En effet,

$$A_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{(n-p)!}$$

alors,

$$nA_{n-1}^{p-1} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$$

Exemple 1.1—
Combien de nombres différents de 5 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres de 0 à 9.

Solution :
$E = \{0, 1, 2, ..., 9\}, n = cardE = 10,$ le nombre de chiffres à choisir est $p = 5$.
Les nombres sont formés de 5 chiffres différents. On déduit que l'ordre est important et la répétition n'est pas permise.
le nombre de dispositions possibles est un arrangement sans répétition :

$$A_n^p = A_{10}^5 = \frac{10!}{5!} = 30240$$

Exemple 1.2—
Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien de mots de 5 lettres peut-on former ? (les mots n'ont pas nécessairement de signification.)

Solution :
$n = 26, \quad p = 5,$ les mots sont formés avec 5 lettres pas nécessairement différentes, alors l'ordre est important et la répétition est permise, le nombre de mots possibles est un arrangement avec répétition :

$$a_n^p = a_{26}^5 = 26^5$$

1.2 Combinaisons

a. Combinaison sans répétition : Si dans la disposition des éléments, la répétition est non permise et l'ordre n'est pas important, alors le nombre de combinaisons possibles est

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

b. Combinaison avec répétition : Si dans la disposition des éléments, la répétition est permise et l'ordre n'est pas important, alors le nombre de combinaisons possibles est

$$K_n^p = C_{n+p-1}^p$$

Remarques
• $C_n^0 = C_n^n = 1$
• $C_n^p = C_n^{n-p}, \quad \forall p = \overline{0, n}$
En effet

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$$

• $A_n^p = p! C_n^p, \quad \forall n \geq 0.$
• $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p, \quad \forall p = \overline{1, n-1}$ (appelée combinaisons composées ou formule de Pascal).
En effet

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p)!(n-p-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!p}{(p)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!(n-p)}{(p)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)!(p+n-p)}{(p)!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(p)!(n-p)!} = C_n^p \end{aligned}$$

Le triangle de Pascal est une conséquence de la dernière formule de récurrence ;

$$\begin{array}{llllllll} & 0 & 1 & 2 & 3 & p-1 & & p & \ldots \\ 0 & C_0^0 & & & & & & & \\ 1 & C_1^0 & C_1^1 & & & & & & \\ 2 & C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & & \\ 3 & C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \\ n-1 & C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \ldots & \boxed{C_{n-1}^{p-1}} & \rightarrow & \boxed{C_{n-1}^p} \downarrow & \ldots \\ n & C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^{p-1} & & \boxed{C_n^p} & \ldots \end{array}$$

Pour établir le triangle de Pascal, il suffit de porter les valeurs prises par p en colonne et celles prises par n en ligne (voir tableau ci-dessus). La valeur attribuée à chaque case, C_n^p , est obtenue en faisant la somme de la valeur de la case située juste au-dessus, C_{n-1}^{p} et la valeur de la case située au-dessus et à gauche C_{n-1}^{p-1}. Ceci correspond à l'application de la propriété des combinaisons composées.

Exemple 1.3—
Combien de manières différentes peut-on former un comité de 3 personnes à partir d'une classe de 24 étudiants ?

Solution :
$n = 24, \quad p = 3$, le comité est formé de 3 personnes différentes où l'ordre n'est pas important.
Donc, le nombre de comités possibles est une combinaison sans répétition.

$$C_n^p = C_{24}^3 = \frac{24!}{3!21!} = \frac{22.23.24}{6} = 2024$$

Exemple 1.4—
Une urne contient 3 boules de couleur différentes, on tire successivement avec remise 2 boules, combien de dispositions possibles peut-on avoir ?

Solution :
$n = 3, \quad p = 2$, le tirage des 2 boules est successif avec remise, donc l'ordre n'est pas important et la répétition est permise. Le nombre de dispositions possibles est une combinaison avec répétition :

$$K_n^p = K_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

1.3 Permutations

a. Permutation sans répétition : Le nombre de permutations dans une disposition ordonnée de n éléments discernables (distincts) est

$$P_n = n!$$

Remarque
La permutation de n éléments constitue un cas particulier d'arrangement sans répétition de p éléments pris parmi n lorsque $p = n$. Ainsi $P_n = A_n^n$

b. Permutation avec répétition : Dans un ensemble E de n éléments où plusieurs objets sont répétés, on subdivise l'ensemble en sous ensembles $E_1, E_2, ..., E_k$ d'éléments de même type, alors le nombre de permutations possibles est

$$P'_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!} \qquad avec \quad n_i = cardE_i, \qquad \forall i = \overline{1,k}$$

Exemple 1.5—
Combien d'anagrammes peut-on former avec les mots : GYMNASE, PROFESSIONS.

Solution :
Pour le premier mot, $E = \{G, Y, M, N, A, S, E\}$, $cardE = n = 7$, toutes les lettres sont différentes, alors le nombre d'anagrammes possibles est une permutation sans répétition :

$$P_n = n! = 7!$$

Pour le deuxième mot, $E = \{P, R, O, F, E, S, S, I, O, N, S\}$ $cardE = n = 11$.
On subdivise E en sous ensembles contenant les mêmes lettres :
$E_1 = \{P\}, E_2 = \{R\}, E_3 = \{O, O\}, E_4 = \{F\}, E_5 = \{E\}, E_6 = \{S, S, S\}, E_7 = \{I\}, E_8 = \{N\}$.
Le nombre d'anagrammes possibles est une permutation avec répétition :

$$P'_n = \frac{11!}{2!3!}$$

1.4 Principe de multiplication

Le principe de multiplication permet de compter le nombre de résultats d'expérience qui peuvent se décomposer en une succession de sous-expériences.
Supposons qu'une expérience est la succession de m sous-expériences. Si la ième expérience a n_i résultats possibles pour $i = \overline{1,n}$, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience globale est

$$n = \prod_{i=1}^{m} n_i = n_1 \times n_2 \times ... \times n_m$$

Exemple 1.6—
Combien de mots de 3 lettres peuvent être formés dans un alphabet de 26 lettres ?

Solution :
On peut considérer cette expérience comme le composé de 3 expériences, dans chacune on choisit 1 lettre parmi 26. Alors, $m = 3$, $n_1 = 26, n_2 = 26$, et $n_3 = 26$, donc le nombre total de mots formés est $26 \times 26 \times 26 = 26^3$.

Exemple 1.7—
Un palindrome numérique est un entier, tel 45654, que l'on peut lire aussi bien depuis la gauche que depuis la droite.
Combien de palindromes à cinq chiffres existe-t-il ?

Solution :
$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $p = 5$
Pour former un palindrome à cinq chiffres, on choisit le premier chiffre parmi 9 (on choisit pas 0), le deuxième parmi 10, le troisième parmi 10, le quatrième parmi 1 (doit être le même que le premier) et le cinquième parmi 1 (doit être le même que le deuxième). Le nombre de dispositions possibles est

$$C_9^1 \times C_{10}^1 \times C_{10}^1 \times C_1^1 \times C_1^1 = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

1.5 Exercices Corrigés

Énoncé des exercices

Exercice 1 : Combien peut-on former de nombres de 8 chiffres avec deux « 4 », quatre« 2 »et deux « 3 » ?

Exercice 2 : Un représentant commercial s'apprête à visiter cinq de ces clients, de combien de façons peut-il faire cette série de visites
1. s'il les fait toutes le même jour ?
2. s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 3 : Dans un groupe de 8 femmes et 6 hommes, on doit former un comité de 3 hommes et 3 femmes. Combien de comités différents peut-on former si
1. deux hommes refusent d'être ensemble dans le même comité ?
2. deux femmes refusent d'être ensemble dans le même comité ?
3. un homme et une femme refusent d'être ensemble dans le même comité ?

Exercice 4 : On suppose que les plaques d'automobile peuvent être composées de trois lettres suivies de trois chiffres ou de trois chiffres suivis de trois lettres. Combien y a-t-il de plaques différentes si
1. aucune restrictions n'est imposée.
2. on exclut que les lettres ou les chiffres se répètent.

Exercice 5 : On considère un groupe de 20 personnes, si chaque personne serre la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?

Exercice 6 : Trois membres d'une association charitable ont accepté d'être les directeurs du comité exécutif et doivent se partager les responsabilités de président, secrétaire et trésorier. Déterminer le nombre de choix possibles.

Exercice 7 : Un étudiant doit répondre à 7 des 10 questions d'un examen. De combien de manières peut il les choisir ? Même question s'il est obligé de choisir au moins trois des cinq premières questions.

Exercice 8 : Parmi 7 hommes et 8 femmes, combien peut-on former de comités de 8 personnes ayant
1. 4 hommes et 4 femmes.
2. Au plus 2 femmes.

Exercice 9 : Un homme veut offrir un total de 7 cadeaux à ses enfants. L'aîné en recevra 3 les deux autres 2. De combien de manières peut-il procéder ?

Exercice 10 : Les douze tomes d'une encyclopédie sont placés au hasard.
1. Combien y a-t-il de manières de les classer ?
2. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

Exercice 11 : De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (choisir 6 numéros parmi 45) ?
Parmi toutes les possibilités, combien permettent de réaliser 3 bons numéros ? 6 bons numéros (le gros lot) ?

Exercice 12 : On doit asseoir sur un rang 4 américains, 3 Français et 3 Anglais, les personnes de mêmes nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer ?

Exercice 13 : Un livre comporte 14 chapitres.
1. Combien y-a-t-il de façons de choisir 3 chapitres dans ce livre ?
2. Pour k=3,. . .,14, dénombrer les choix de 3 chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisis.
3. En déduire que

$$C_{14}^{3} = C_{13}^{2} + C_{12}^{2} + ... + C_{3}^{2} + C_{2}^{2}$$

4. Généraliser les dénombrements précédents pour démontrer que,
pour $1 \leq p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} C_{k}^{p} = C_{n+1}^{p+1}$$

Corrigé des exercices

Solution d'exercice 1 : $E = \{2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4\}$, $cardE = n = 8$, on veut former des nombres de 8 chiffres, donc $p = 8$.
Le nombre de dispositions possibles est une permutation avec répétition :

$$P'_n = \frac{8!}{4!2!2!} = \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8}{4} = 420$$

Solution d'exercice 2 : 1/ $n = 5$, $p = 5$ ces visites peuvent se faire de $P_n = 5! = 120$ manières différentes.
2/ Les trois visites du premier jour peuvent être choisies sans ordre et sans répétition de 5 visites programmées, puis les deux visites de lendemain sont choisit des 2 restantes, toujours sans ordre et sans répétition.
Le nombre de dispositions possibles est :

$$C_5^3 \times C_2^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Solution d'exercice 3 : $n = 8femmes + 6hommes$, $p = 3femmes + 3hommes$, Les personnes sont choisies sans ordre et sans répétition :
1/ On choisit : [3 femmes parmi 8 et 3 hommes parmi 4 (on écarte les 2 hommes M.X et M.Y)] ou [3femmes parmi 8 et 2 hommes parmi 4 et M.X] ou [3femmes parmi 8 et 2 hommes parmi 4 et M.Y].
Le nombres de dispositions possibles est :

$$C_4^3 \times C_8^3 + 2 \times C_1^1 \times C_4^2 \times C_8^3$$

2/On choisit : [3 femmes parmi 6 et 3 hommes parmi 6 (on écarte les 2 femmes Mme.X et Mme.Y)] ou [2 femmes parmi 6 et 3 hommes parmi 6 et Mme.X] ou [2 femmes parmi 6 et 3 hommes parmi 6 et Mme.Y].
Le nombres de dispositions possibles est :

$$C_6^3 \times C_6^3 + 2 \times C_1^1 \times C_6^2 \times C_6^3$$

3/On choisit : [3 femmes parmi 6 et 3 hommes parmi 4 (On écarte M.X et Mme Y)] ou [3femmes parmi 6 et 2 hommes parmi 4 et M.X] ou [2femmes parmi 6 et 3 hommes parmi 4 et Mme.Y].
Le nombres de dispositions possibles est :

$$C_6^3 \times C_4^3 + C_6^3 \times C_4^2 \times C_1^1 + C_6^2 \times C_4^3 \times C_1^1$$

Solution d'exercice 4 : On choisit 3 lettres parmi 26 suivies de 3 chiffres parmi 10 ou 3 chiffres parmi 10 suivis de 3 lettres parmi 26 avec ordre et répétition, donc le nombres de plaques différentes est

$$2a_{26}^{3} \times a_{10}^{3} = 2 \times 26^{3} \times 10^{3}$$

2/ Même réponse que la question précédente, sauf que la répétition n'est pas permise, le nombre de dispositions possibles est :

$$2A_{26}^{3} \times A_{10}^{3} = 2 \times \frac{26!}{23!} \times \frac{10!}{7!}$$

Solution d'exercice 5 : $n = 20, \quad p = 2$, les poignées de main sont réalisées sans répétition et l'ordre n'est pas important, donc le nombre de dispositions possibles est une combinaison sans répétition :

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{18!2!} = 190$$

Solution d'exercice 6 : E=$\{$président, secrétaire, trésorier$\}$, $n = 3, \quad p = 3$.
Le nombre de choix possibles est une permutation sans répétition :

$$P_n = n! = 3!$$

Solution d'exercice 7 : $n = 10$ questions, $p = 7$ questions.
1/L'étudiant doit répondre à 7 questions parmi 10 sans ordre et sans répétition, le nombre de choix possibles est une combinaison sans répétition :

$$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120 \text{ choix}$$

2/S'il est obligé de choisir au moins trois des cinq premières questions, alors il choisit : [3 questions des 5 premières et 4 questions parmi les 5 dernières] ou [4 questions des 5 premières et 3 questions parmi les 5 dernières] ou [5 questions des 5 premières et 2 questions parmi les 5 dernières] sans ordre et sans répétition :

$$C_5^3 \times C_5^4 + C_5^4 \times C_5^3 + C_5^5 \times C_5^2 = 110 \text{ choix}$$

Solution d'exercice 8 : $n = 7 + 8 = 15$ personnes, $p = 8$ personnes.
1/On choisit [4 hommes parmi 7 et 4 femmes parmi 8] sans ordre et sans répétition, le nombres de comités possibles est :

$$C_7^4 \times C_8^4 = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{8!}{4!4!}$$

2/ Au plus 2 femmes,i.e., le comité doit contenir 1 femme ou 2 femmes.
On choisit : [(7 hommes parmi 7 et 1 femmes parmi 8) ou (6 hommes parmi 7 et 2 femmes parmi 8)] sans ordre et sans répétition, le nombre de comités possibles est :

$$C_7^7 \times C_8^1 + C_7^6 \times C_8^2 = \frac{7!}{7!0!} \times \frac{8!}{1!7!} + \frac{7!}{6!1!} \times \frac{8!}{2!6!}$$

Solution d'exercice 9 : Ce papa commence par offrir 3 cadeaux pour l'aîné parmi les 7 puis 2 cadeaux parmi les 4 pour le deuxième enfant et 2 cadeaux parmi 2 pour le petit dernier.
Cet homme peut procéder de la même manière en commençant par (l'aîné,le dernier puis le 2ème enfant) ou (le 2ème enfant puis l'aîné et enfin le dernier) ou (le 2ème enfant, le dernier puis l'aîné) ou (le 3ème enfant suivi de deuxième puis l'aîné) ou encore (le 3ème enfant suivi de l'aîné puis le deuxième enfant).
Le nombre de manières possibles est :

$$2 \times C_7^3 \times C_4^2 \times C_2^2 + 2 \times C_7^2 \times C_5^3 \times C_2^2 + 2 \times C_7^2 \times C_5^2 \times C_3^3$$

Solution d'exercice 10 : $E = \{T_1, T_2, ..., T_{12}\}$, T_i est le tome d'ordre i de l'encyclopédie.
1/$n = cardE = 12$, on classe les douze tomes donc $p = 12$, le nombre de manières de les classer est une permutation sans répétition :

$$P_n = n! = 12!$$

2/On considère que [le tome1 suivi du tome2 est le même livre, alors on permute $n = cardE = 11$], donc le nombre de manières de les classer est :

$$2 \times P_n = n! \times 2 = 11! \times 2$$

Solution d'exercice 11 : - $n = 45$, on choisit $p = 6$ numéros parmi 45 sans ordre et sans répétition, le nombre de dispositions possibles est

$$C_{45}^6 = \frac{45!}{6!39!} = 8145060$$

- Pour réaliser 3 bons numéros, on choisit 3 de 3 bons numéros puis 3 de 42 numéros restants, i.e.,

$$C_3^3 \times C_{42}^3 = \frac{42!}{3!39!} = 413280$$

- Pour réaliser le gros lot. on a besoin de choisir 6 numéros parmi les 6 bons numéros, i.e.,

$$C_6^6 = 1$$

Solution d'exercice 12 : $E = \{$ 4 américains, 3 Français et 3 Anglais$\}$, $n = 10,\ \ p = 10$.
Les personnes de même nationalité doivent rester ensemble alors, le nombre de dispositions possibles est :

$$3!(4! \times 3! \times 3!)$$

Solution d'exercice 13 :1. Il y en a exactement C_{14}^3.
2. Une fois le numéro k du plus grand chapitre choisi, il reste 2 chapitres à choisir parmi $k-1$: il y a donc exactement C_{k-1}^2 choix de chapitres dont le dernier porte le numéro k.
3. On réalise une partition de l'ensemble des parties à 3 éléments en fixant le plus grand élément valant de 3 à 14. On a donc

$$C_{14}^3 = \sum_{k=3}^{14} C_{k-1}^2$$

ce qui est exactement le résultat demandé.
4. On part cette fois d'un livre comprenant $n+1$ chapitres et on en sélectionne $p+1$. Il y a C_{n+1}^{p+1} choix possibles. On étudie ensuite le nombre de choix possibles où le plus grand des chapitres porte le numéro k, pour k allant de $p+1$ à $n+1$: il y en a C_{k-1}^p (reste p chapitres à choisir parmi ceux numérotés de 1 à k-1).
On a donc

$$C_{n+1}^{p+1} = \sum_{k=p+1}^{n+1} C_{k-1}^p = \sum_{k=p}^{n} C_k^p$$

CHAPITRE 2
CALCUL DE PROBABILITÉS

Dans des domaines très différents comme le domaine sociologique, médical et les sciences humaines, on s'intéresse à de nombreux phénomènes dans lesquels apparaît souvent l'effet du hasard. Ces phénomènes sont caractérisés par le fait que les résultats observés varient d'une expérience à l'autre. La quantification des chances qu'un tel événement a de se réaliser correspond à la notion intuitive de probabilité.

2.1 Définitions

Définition 2.1 (Expérience aléatoire)—
Une expérience est qualifiée d'aléatoire si l'on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents (certains apparaissent plus fréquemment que d'autres).

Exemple 2.1—
On tire au hasard une boule dans une urne qui contient 2 boules rouges et 3 boules blanche. Quelle est la couleur de la boule tirée ? Deux résultats sont possibles : rouge ou blanche mais on ne peut prévenir le résultat à l'avance.

Définition 2.2 (Espace fondamental, événement)—
• Les résultats d'une expérience aléatoire appartiennent à un **espace fondamental** ou espace des épreuves Ω, un élément quelconque ω de Ω est un **événement élémentaire**.
• On appelle **événement composé**, le résultat de la réunion ou de l'intersection de plusieurs événements élémentaires.
• On appelle **événement certain** l'espace entier Ω.
• On appelle **événement impossible** la partie vide $\emptyset$.
• On appelle événement contraire A^c de A son complémentaire dans Ω.
• On dit que A et B sont des événements incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, i.e., s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.
• On dit que $\{A_i\}_i$ forme un système d'événements complet dans Ω si

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \ \ \forall i \neq j \quad et \quad \bigcup_i A_i = \Omega$$

Exemple 2.2—
Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé de six faces numérotés de 1 à 6, on peut associer l'univers $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$.
A={le résultat est le chiffre 1} est un événement élémentaire.
B={le résultat est un chiffre pair}={2,4,6} est un événement composé.
C={le résultat est un chiffre impair}={1,3,5} est l'événement contraire de B, on note, $C = B^c$.
Le système $\{B, C\}$ est un système complet de Ω.

2.2 Notion de probabilité

On s'intéresse maintenant aux chances de réaliser un événement quelconque.

Définition 2.3 (Algèbre)—
Soit Ω un espace fondamental. Un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω est une algèbre, s'il vérifie les trois axiomes suivants :
• $\Omega \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$.
• Si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$.
• Si $A, B \in \mathcal{T}$ alors $A \cup B \in \mathcal{T}$.

Définition 2.4 (Tribu)—
Soit Ω un espace fondamental. Une tribu ou une σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie.
• $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \in \mathcal{F}$.
• Si $A \in \mathcal{F}$ alors $A^c \in \mathcal{F}$.
• Toute réunion dénombrable d'éléments A_i de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{C})$ est appelé espace probabilisable et les éléments de $\mathcal{C}$ sont les événements de l'expérience aléatoire.

Exemple 2.3—
• $\{X, \emptyset\}$ est une tribu.
• $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω est une tribu.

Remarques
- Une tribu est forcément une algèbre mais la réciproque est fausse en général.
- Une algèbre est stable par intersection finie.
- Une tribu est stable par intersection infinie dénombrable.
- La réunion de deux tribus n'est pas une une tribu en général.

Définition 2.5 (Probabilité)—
Une probabilité P définie sur $(\Omega, \mathcal{C})$ avec $\mathcal{C}$ est une tribu de parties de Ω, est une application dans [0,1] ;

$$\begin{array}{rccc} P: & (\Omega, \mathcal{C}) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \rightarrow & P(A) \end{array}$$

telle que :
• $P(\Omega) = 1$
• $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_{i)}$ pour toute réunion finie ou dénombrable d'événements incompatibles.
Le triplet $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriété 2.1—
Soient $A, B, A_1, ...$et A_n des événements dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$
• $P(\emptyset) = 0$.
• Si $P(A) = 0$ on dit que A est un événement presque impossible.
• Si $P(A) = 1$, l'événement A est presque certain.
• $P(A^c) = 1 - P(A)$
• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
• $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_{i)}$

Pour montrer que $P(A^c) = 1 - P(A)$, il suffit de considérer $P(\Omega) = 1$ alors $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$.

2.2.1 Calcul de probabilité

Lorsqu'un événement est associé à une expérience aléatoire dont les événements élémentaires sont équiprobables (de probabilités égales), il est possible d'évaluer théoriquement la probabilité de l'événement.

Définition 2.6—
Soit A un événement de l'univers Ω d'une expérience aléatoire.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Le nombre de cas favorables}}{\text{Le nombre de cas possibles}}$$

Le calcul des probabilités est alors ramené à un problème de dénombrement.

Exemple 2.4—
Le jet d'un dé de 6 faces numérotés de 1 à 6 donne l'ensemble des épreuves $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Soit l'événement $A = \{\text{Avoir un multiple de } 3\} = \{3, 6\}$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2.3 Probabilité conditionnelle et formule de Bayes

2.3.1 Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé. L'intersection de deux événements A et B est l'événement, noté $A \cap B$, réalisé, si et seulement si, les deux événements A et B sont réalisés, cependant, on peut s'intéresser à la réalisation de l'événement A à la condition que l'événement B soit, lui aussi, réalisé.

Définition 2.7 (Probabilité conditionnelle)—
La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé, est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{C}, P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{avec} \quad P(B) > 0$$

Remarques
• Si $P(B) = 0$ alors il n'est pas utile de parler de probabilité conditionnelle car $P(A/B) = A$ (la réalisation de A ne dépend pas de la réalisation de B).
• $P(\emptyset/B) = 0, \;\; P(\Omega/B) = 1$.

Exemple 2.5—
Dans une famille qui comporte deux enfants, l'un est une fille. Calculer la probabilité que l'autre soit un garçon.

Solution :
On choisit $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ où par exemple, FG signifie que l'aîné des enfants est une fille et le second un garçon.
On note ; $A = \{\text{un des enfants est un garçon}\} = \{FG, GF, GG\}$
et $B = \{\text{un des enfants est une fille}\} = \{FG, GF, FF\}$
Alors $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{|A \cap B|}{|B|} = \dfrac{2}{3}$

Exemple 2.6—
A et B sont des événements tels que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ et $P(A/B) = 0.2$. Quelle est la probabilité
1. que A ou B se réalisent ?
2. qu'au plus un des deux événements se réalise ?
3. que ni A ni B ne se réalisent ?

Solution :
1. On cherche la probabilité de $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

On calcule tout d'abord $P(A \cap B)$
sachant que

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$$

alors

$$P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.1 = 0.8$$

2. Soit l'événement $D = \{\text{au plus un des deux événements se réalise}\}$
son complémentaire $\overline{D} = \{\text{les deux événements se réalisent}\} = A \cap B$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$$

3. Soit l'événement $E = \{\text{ni A ni B ne se réalisent }\}$

$$P(E) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.8 = 0.2$$

2.3.2 Formule des probabilités totales

Théorème 2.1—
Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω. Alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A \bigcap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i) \end{aligned}$$

Exemple 2.7—
Un examen comporte des réponses par 'oui' ou par 'non' un étudiant connaît la moitié du programme, lorsqu'il ne sait pas répondre à une question, il répond au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'une réponse soit exacte.

<u>Solution</u> :
On considère les événements suivants :
$B = \{\text{la réponse de l'étudiant est exacte}\}$
$A_1 = \{\text{la réponse de l'étudiant vient de ses connaissances}\}$
$A_2 = \{\text{la réponse de l'étudiant vient de sa chance}\}$
A_1 et A_2 forment un système complet de Ω, on cherche $P(B)$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A_1) \times P(A_1) + P(B/A_2) \times P(A_2) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2.3.3 Formule de Bayes

Théorème 2.2 (Bayes)—
Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω. Alors

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \times P(A_i)}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P(A_j/B) &= \frac{A_j \cap B}{P(B)} \\ &= \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{P(B)} \end{aligned}$$

Exemple 2.8—
Selon l'énoncé de l'exemple précédent. Calculer la probabilité qu'une réponse soit juste grâce à ses connaissances et non pas à sa chance.

Solution :
On cherche :

$$\begin{aligned} P(A_1/B) &= \frac{P(B/A_1) \times P(A_1)}{P(B)} \\ &= \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exemple 2.9—
Une banque possède un dispositif d'alarme, s'il y a cambriolage, ce dispositif fonctionne avec une probabilité de 0.95. La probabilité que le dispositif ce mette en marche par erreur sans qu'il y ait de cambriolage est de 0.01 et la probabilité qu'il y ait un cambriolage est de 0.005.
Calculer la probabilité qu'il y ait un cambriolage lorsque l'alarme est déclenchée.

Solution :
Soient les événements :
$B = \{$L'alarme est déclenchée$\}$
$A_1 = \{$Il y a cambriolage$\}$

$A_2 = \{\text{Il n'y a pas de cambriolage}\}$
On cherche la probabilité $P(A_1/B)$, On utilise la formule de Bayes.

$$\begin{aligned} P(A_1/B) &= \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} \\ &= \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.995 \times 0.01} \\ &= 0.323 \end{aligned}$$

2.3.4 Événements indépendants

Proposition 2.1—
Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé, les événements A et B de probabilités non nulles sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

La formule précédente est dite formule des probabilités composée.
Remarques
• L'indépendance de A et B se caractérise aussi par les relations :

$$P(A/B) = P(A) \;\text{ ou }\; P(B/A) = P(B)$$

i.e., que la probabilité donnée à l'événement A (respectivement B) n'est pas modifiée par l'information que l'événement B (respectivement A) est réalisé.

• Si on considère n événements $A_1, \ldots, A_n$, il y a deux façons de définir leur indépendance :
On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si

$$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times ... \times P(A_{i_p}), \quad \forall \{i_1, ..., i_p\} \subset \{1, ..., n\}$$

On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j), \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$$

Exemple 2.10—
Le jet de deux pièces de monnaie donne l'univers : $\Omega = \{pp, pf, fp, ff\}$.

On considère les événements $A = \{$la première pièce donne pile $\} = \{pp, pf\}$
et $B = \{$la deuxième pièce donne face $\} = \{ff, pf\}$
Remarquons que $A \cap B = \{pf\}$
On en déduit les probabilités $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
alors, A et B sont indépendants.

2.4 Exercices corrigés

Énonce des exercices

Exercice 1 : Un étudiant doit réussir à deux examens A et B pour passer en année supérieure. On note A l'événement {il réussit l'examen A} et B l'événement {il réussit l'examen B}. On donne $P(A) = \frac{1}{3}$,$P(B) = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Calculer la probabilité pour que l'étudiant passe en année supérieure sachant qu'il a réussi

1. l'examen A.
2. l'examen B.
3. au moins un des deux examens.

Exercice 2 : Soit A et B deux événements tels que $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Calculer les probabilités des événements suivants :
E = {au moins l'un de ces événements se produit}
F = {un seul de ces événements se produit}

Exercice 3 : Une urne contient n boules dont 3 sont blanches, les $(n-3)$ autres étant rouges. A l'occasion d'un tirage sans remise de 2 boules, on a constaté que la probabilité d'avoir tiré une blanche puis une rouge est de 0.25. Calculer n.

Exercice 4 : Dans une entreprise, il y a un comité d'entreprise comprenant 5 délégués du personnel et 4 personnes de la direction. De combien de manière peut-on former un sous comité de 5 personnes.
Quelle est la probabilité que le sous comité soit formé de 3 délégués du personnel et 2 membres de la direction ?.

Exercice 5 : Un marchand de glaces propose dix arômes au choix pour des glaces en cornet. Trois étudiants choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des arômes proposés. Calculer la probabilité des l'événements :
A={les trois étudiants choisissent des arômes différents}.
B={deux étudiants parmi les trois choisissent le même arôme}.

Exercice 6 : Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R1, R2 et R3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la

classe R1, 50% pour la classe R2, et 30% pour la classe R3.
Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.
1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M.X n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 7 : On tire au sort un individu dans une population test, dont on sait qu'elle est formée de 60% d'hommes et de 40% de femmes ; on sait de plus que 20% des individus de cette population sont des informaticiens.
Déterminer une condition pour que les événements " l'individu choisi est une femme " et " l'individu choisi est un informaticien " soient indépendants.

Exercice 8 : Un club de joueurs d'échecs se compose de 8 hommes et 9 femmes.
1. Au cours d'un championnat, chaque membre joue contre les autres. Combien de parties y a-t-il en tout ? Combien y a-t-il de parties mixtes ?
2. On choisit au hasard 4 personnes du club. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 hommes et 2 femmes ?

Exercice 9 :Dans un pays, on estime que 10% de la population est contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :
-La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0.99.
-La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0.97.
On choisit une personne au hasard. Sachant que son test est positif, quelle est la probabilité que cette personne soit contaminée.

Exercice 10 : Un technicien en maintenance informatique sait qu'une panne d'ordinateur peut être causée par un problème logiciel avec une probabilité de 0.7 ou un problème technique avec une probabilité de 0.3.
De plus, parmi les ordinateurs en panne à cause d'un problème logiciel, 10% sont de marque X et d'un problème technique, 20% sont de marque X.
Quelle est la probabilité que la panne d'un ordinateur d'une marque X soit liée à un problème technique ?

Corrigé des exercices

Solution d'exercice 1 : Soit l'événement $D = \{$l'étudiant passe en année supérieure $\}$.

On remarque que $D = A \cap B$.

1. On cherche $P((A \cap B)/A)$

$$P((A \cap B)/A) = \frac{P(A \cap B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

2. On cherche $P((A \cap B)/B)$

$$P((A \cap B)/B) = \frac{P(A \cap B \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}$$

3. On cherche $P((A \cap B)/(A \cup B)$

$$P((A \cap B)/(A \cup B)) = \frac{P(A \cap B) \cap (A \cup B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

D'autre part $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

alors, $P((A \cap B)/(A \cup B)) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$

Solution d'exercice 2 : On remarque que $E = A \cup B$ et $F = (\overline{B} \cup A) \cup \overline{A} \cup B)$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{8} = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) = \; & P((\overline{B} \cup A) \cup \overline{A} \cup B)) \\ &= P(\overline{B} \cup A) + P(\overline{A} \cup B) = P(A) - P(A \cup B) + P(A) - P(A \cup B) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{19}{24} - \frac{1}{8} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Solution d'exercice 3 : On considère l'événement $A = \{$ tirer une boule blanche puis une rouge $\}$.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}} \\ &= \frac{A_3^1 \times A_{n-3}^1}{A_n^2} \\ &= \frac{3(n-3)}{n(n-1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On déduit que $n^2 - 13n + 36 = 0$ alors, $n = 4 \vee n = 9$.

Solution d'exercice 4 : Pour former un sous comité de 5 personnes, on choisit sans ordre et sans répétition 5 personnes parmi 9.
Le nombre de sous comités possibles est $C_9^5 = \dfrac{9!}{4!5!} = 126$.
Soit l'événement : $A = \{$le sous comité soit formé de 3 délégués du personnel et 2 membres de la direction $\}$

$$P(A) = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}} = \frac{C_5^3 \times C_4^2}{126} = \frac{60}{126}$$

Solution d'exercice 5 :

$$P(A) = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}} = \frac{C_3^{10}}{K_3^{10}}$$

$$P(B) = \frac{\text{le nombre de cas favorables}}{\text{le nombre de cas possibles}} = \frac{C_2^{10} \times C_1^2}{K_3^{10}}$$

Solution d'exercice 6 : On considère les événements suivants :
$B = \{$La personne a eu un accident sur l'année considérée $\}$
$A_1 = \{$Le client est de classe R1$\}$
$A_2 = \{$Le client est de classe R2$\}$
$A_3 = \{$Le client est de classe R3$\}$
1.
$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3)$
$P(B) = 0.05 \times 0.2 + 0.15 \times 0.5 + 0.3 \times 0.3 = 0.175$
2.

$$P(A_1/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/A_1)P(A_1)}{P(\overline{B}/A_1)P(A_1) + P(\overline{B}/A_2)P(A_2) + P(\overline{B}/A_3)P(A_3)}$$

$$P(A_1/\overline{B}) = \frac{0.95 \times 0.2}{0.95 \times 0.2 + 0.85 \times 0.5 + 0.3 \times 0.7} = \frac{0.19}{0.825} = 0.23$$

Solution d'exercice 7 : Soient $A\{$ La personne choisie est une femme$\}$, $B\{$ La personne choisie est un informaticien$\}$
A et B sont indépendants si $P(A/B) = P(A)$,
on a $P(A) = 0.4$, alors

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{0.2} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.08.$$

On en déduit que A et B sont indépendants si 8% des femmes sont des informaticiennes.

Solution d'exercice 8 : $n = 8$ hommes + 9 femmes =17.

1. On choisit 2 joueurs parmi 17 sans ordre et sans répétition. Le nombre de parties d'échec est $C_{17}^2 = \frac{17!}{2!15!} = 136$
Pour avoir des parties mixtes, on choisit (1 homme parmi 8 et 1 femme parmi 9) i.e., $C_8^1 \times C_9^1 = 72$.
2. Soit l'événement $A = \{$ choisir 2 hommes et 2 femmes$\}$.

$$P(A) = \frac{\text{Le nombre de cas favorables}}{\text{Le nombre de cas possibles}} = \frac{C_8^2 \times C_9^2}{C_{17}^4} = \frac{36}{85}$$

Solution d'exercice 9 :
On considère les événements suivants :
$B = \{$ le test est positif$\}$
$A_1 = \{$La personne est contaminée par le virus$\}$
$A_2 = \{$La personne n'est pas contaminée par le virus$\}$
1. On cherche $P(A_1/B)$

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} = \frac{0.1 \times 0.99}{0.1 \times 0.99 + 0.03 \times 0.9} = 0.785$$

Si le test est positif, la probabilité que la personne soit contaminée est 0.785.

Solution d'exercice 10 : On considère les événements suivants :
$B = \{$L'ordinateur est de la marque X$\}$
$A_1 = \{$La cause de la panne est technique$\}$
$A_2 = \{$La cause de la panne est logiciel$\}$
On cherche $P(A_1/B)$

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)} = \frac{0.2 \times 0.3}{0.2 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7} = 0.4615$$

CHAPITRE 3

VARIABLES ALÉATOIRES

Dans une expérience aléatoire on s'intéresse souvent à des quantités particulières dépendant des éléments de l'univers Ω, plutôt qu'au résultat dans son intégralité, ainsi dans le jet de deux dès, on peut s'intéresser à la somme ou le produit des deux résultats.

3.1 Définitions

Définition 3.1 (Variable aléatoire)—
Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire est une application X définie dans $(\Omega, \mathcal{C})$ vers un ensemble E :

$$\begin{array}{rccc} X: & (\Omega, \mathcal{C}) & \mapsto & E \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

ayant la propriété suivante ; l'image réciproque de tout intervalle de type $]a, b]$ est un élément de Ω i.e., $X^{-1}(]a, b]) \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est une tribu de parties de Ω).
L'ensemble $D_X = X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé l'ensemble de définition ou le support de la variable X.

Remarques
• Si E est un ensemble discret, fini ou dénombrable, on parle de variable aléatoire discrète.

• Si $E = \mathbb{R}$, alors la variable aléatoire est dite réelle continue.

Exemple 3.1—
Pour une expérience qui consiste à jeter deux dès, on observe la somme des résultats des deux dès.

L'univers de l'expérience est $\Omega = \{(i,j),\ \ 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6\}$, $\mid \Omega \mid = 36$.
La variable aléatoire X est définie comme suit :

$$\omega = (i,j) \mapsto X(\omega) = i + j, \ \ \forall i,j = \overline{1,6}$$

Le support de X est $X(\Omega) = \{2,3,4,...,12\}$.
Remarquons, par exemple, que $X^{-1}(3) = \{(2,1),(1,2)\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 3.2—
Soit une famille de trois enfants. On désigne par G les garçons et par F les filles. L'ensemble Ω contient toutes les dispositions possibles, en considérant l'ordre de naissance des enfants.

$$\Omega = \{GGG, GGF, GFG, FGG, GFF, FGF, FFG, FFF\}$$

On définit la variable aléatoire X qui a tout $\omega \in \Omega$ associe le nombre de filles de ω, i.e.,

$$\omega \mapsto X(\omega) = le\ nombre\ de\ filles\ dans\ \omega$$

Le support de la variable est $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$.
On a, par exemple,
$X^{-1}(0) = \{GGG\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $X^{-1}(1) = \{FGG, GFG, GGF\} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

3.2 Loi de probabilité-fonction de répartition- densité

Définition 3.2 (Loi de probabilité)—
Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète. On appelle loi de probabilité de X notée P_X, l'application qui à toute valeur x_i dans le support de X associe $P(X = x_i)$, vérifiant :

$$\sum_{x_i \in D_X} P(X = x_i) = 1$$

Pour présenter de façon unifiée la loi de probabilité d'une variable aléatoire qu'elle soit discrète ou continue, nous définissons la fonction de répartition.

Définition 3.3 (Fonction de répartition)—
La fonction de répartition de la variable aléatoire X, noté F_X, est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriété 3.1—
• $0 \leq F_X \leq 1$
•F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
• F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
• $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X = 1$
• Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$, on a

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

et

$$P(X > b) = 1 - P(X \leq b) = 1 - F_X(b)$$

Exemple 3.3—
Selon l'énoncé de l'exemple 3.1, on trace le tableau suivant qui regroupe la loi de probabilité et la fonction de répartition de la variable

$$\omega = (i, j) \mapsto X(\omega) = i + j, \quad \forall i, j = \overline{1,6}$$

$x_i \in D_X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	T
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$F_X(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	1	/

Par exemple, pour calculer la probabilité d'avoir la somme des deux résultats inférieure ou égale à 3, il suffit de calculer la fonction de répartition pour la valeur 3.

$$\begin{aligned} F_X(3) &= P(X \leq 3) \\ &= P(X = 2 \;\; ou \;\; X = 3) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} \end{aligned}$$

Définition 3.4 (Densité de probabilité)—
Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité, si elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 0$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

La deuxième condition de la définition précédente, signifie que la densité f permet de décrire complètement la variable aléatoire X.
On dit que la variable X est à densité f si sa fonction de répartition est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction de répartition permet de calculer la probabilité de tout intervalle et donc, en pratique, de tout événement.
Remarques
• Si $a < b$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)dt = F(b) - F(a)$$

La probabilité de trouver X dans un intervalle $[a; b]$ apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f et l'axe des abscisses.
• $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$P(X = a) = 0$$

La probabilité que X prenne une valeur bien précise x est nulle. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul.

Exemple 3.4—
Vérifier que la fonction suivante est une densité de probabilité, puis déterminer sa fonction de répartition.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x \in [1, 3] \\ 0 & si \quad\quad non \end{cases}$$

Solution :
Pour que f soit une densité de probabilité il suffit de vérifier que $f(t) \geq 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
La fonction f telle qu'elle est définie est positive, il nous reste à vérifier la deuxième condition, calculons

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{1} 0dx + \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2}dx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_1^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

La fonction de répartition est définie par :$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

On fait varier x dans $\mathbb{R}$, on obtient : Si $x < 1$: $\quad F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

Si $1 \leq x < 3$: $\quad F_X(x) = \int\limits_{1}^{x} \frac{1}{2}dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_1^x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Si $x \geq 3$: $\quad F_X(x) = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{2}dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_1^3 = 1$

Alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & si \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Exemple 3.5—
Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} k\exp(-2x) & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

Déterminer k pour que g définisse une fonction de densité de probabilité.

Solution :
La fonction g est positive si et seulement si $k > 0$,
De plus

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_{0}^{+\infty} k\exp(-2x)dx = \left[-\frac{k}{2}\exp(-2x)\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{2}$$

Pour que g soit une densité de probabilité, il faut que $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 1$.

Par conséquent : $\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$

3.3 Espérance mathématique et moments

Définition 3.5 (Espérance mathématique)—
L'espérance d'une variable aléatoire X, noté $E(X)$, correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.
Si X est discrète :

$$E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i P(X = x_i)$$

Si X est continue de densité f_X :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$E(X)$ sera aussi appelée la moyenne de X.

Propriété 3.2—
Soient X et Y deux variables aléatoires, admettant chacune une espérance mathématique,.
- $E(a) = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}$,
- $E(aX + b) = aE(X) + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$,
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- une variable aléatoire est dite centrée si son espérance mathématique est nulle : $E(X) = 0$

Exemple 3.6—
La variable aléatoire X de densité de probabilité g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2\exp(-2x) & si \quad x \in [0, +\infty[\\ 0 & si \quad non \end{cases},$$

son espérance est

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} x \exp(-2x) dx$$

Par intégration par parties , on obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\left[-\frac{x}{2}\exp(-2x)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\exp(-2x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-2x)dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Définition 3.6 (Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire)—
Soit $g(X)$ une fonction de la variable aléatoire X. Alors,
dans le cas discret :

$$E(g(X)) = \sum_{x_i \in D_X} g(x_i)P(X = x_i) \quad \texttt{(si la somme existe)}$$

dans le cas continue :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \quad \texttt{(si l'intégrale existe)}$$

où f_X est la densité de probabilité de X.

Exemple 3.7—
Considérons X une variable aléatoire de fonction de répartition $F_X(x) = x$ et de densité $f_X(x) = 1,; \forall x \in [0,1]$. Soit la fonction $Y = X^2$.
L'espérance de la variable Y peut être calculer de deux manières différentes.
Cherchons la loi de Y.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) = \sqrt{y}, \forall y \in [0,1] \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \forall y \in [0,1] \;\; et \;\; 0 \;\; \text{sinon}$$

Alors

$$E(Y) = \int_0^1 y\frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

En utilisant la définition précédente, on calcule :

$$E(Y) = E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Définition 3.7 (Moment non centré d'ordre r)—
Le moment non centré d'ordre r de la variable aléatoire X, où r est un entier positif, est défini par
Si X est discrète :

$$E(X^r) = \sum_{x_i \in D_X} x_i^r P(X = x_i)$$

Si X est continue de densité f_X :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx$$

Les moments d'une variable aléatoire X sont des espérances mathématiques des puissances de X, ils donnent des indications sur l'étalement et la forme de la distribution,

Définition 3.8 (Moment centré d'ordre r)—
Le moment centré d'ordre r de la variable aléatoire X est défini par
Si X est discrète :

$$E((X - E(X))^r) = \sum_{x_i \in D_X} (x_i - E(X))^r P(X = x_i)$$

Si X est continue de densité f_X :

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f_X(x) dx$$

En général, $E((X - E(X))^r)$ sont notés m_r.
Les caractéristiques de la forme de la distribution reposent plutôt sur les moments centrés de X. En effet, m_2, m_3, m_4 sont utilisés pour définir les paramètres suivants :

• **Le coefficient d'asymétrie (Skewness)** :

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{(m_2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ce coefficient est nul pour une distribution parfaitement symétrique, inférieur à zéro si la distribution est plus étendue vers la gauche (les valeurs inférieures à la moyenne), et supérieur à zéro dans le cas contraire.

• **Le coefficient d'aplatissement (Kurtosis) :**

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{(m_2)^2}$$

est toujours supérieur à 1. De plus, on a toujours $\gamma_2 \geq 1 + (\gamma_1)^2$. Plus que l'aplatissement, le coefficient γ_2 mesure l'importance des queues de distribution.

Définition 3.9 (Fonction génératrice des moments)—
On appelle fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X, si elle existe, la fonction

$$\Phi_X(t) = E(e^{tX})$$

Remarque
Le moment d'ordre r de la variable X est donné par

$$E(X^r) = \Phi_X^{(r)}(0)$$

où $\Phi_X^{(r)}$ est la dérivée d'ordre r de X.

Exemple 3.8—
Soit f une la densité de probabilité, d'une variable aléatoire X, définie par : $f(x) = 2e^{-2x}, \ \ \forall x \geq 0$
On a :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{tx} 2e^{-2x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2e^{(-2+t)x} dx \\ &= \left[\frac{2}{-2+t} e^{(-2+t)x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{-2}{t-2} \end{aligned}$$

Les deux premières dérivées de Φ_X sont :

$$\Phi_X^{(1)}(t) = \frac{2}{(2-t)^2} \ , \ \ \Phi_X^{(2)}(t) = \frac{4}{(2-t)^3}$$

On déduit que

$$E(X) = \Phi_X^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \ , \ E(X^2) = \Phi_X^{(2)}(0) = \frac{1}{2}$$

3.4 Variance et écart-type

La moyenne ne nous renseigne pas de manière satisfaisante sur les valeurs de la variable aléatoire. C'est pourquoi, il faut pouvoir mesurer la dispersion autour de cette moyenne, c'est le rôle de la variance et de l'écart-type. L'écart-type a aussi l'avantage de s'exprimer dans la même unité que la variable aléatoire et son espérance.

Définition 3.10 (Variance)—
Le moment centré d'ordre 2 est appelé la variance de la variable aléatoire ;

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

La variance peut s'écrire (formule de Koenig)) comme suit :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

En effet ;

$$\begin{aligned} V(X) = & \ E((X - E(X))^2) \\ = & \ E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) \\ = & \ E(X^2) - 2E(X).E(X) + E^2(X) \\ = & \ E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

Cette relation s'applique aux variables aléatoires continues et discrètes.

Définition 3.11 (Écart-type)—
L'écart-type, noté σ_X, de la variable aléatoire X est la racine carrée de sa variance, i.e.,

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

La variance et l'écart-type caractérisent la dispersion des valeurs de la variable autour de sa moyenne. Lorsque la variance est nulle, la variable est une constante égale à sa moyenne.

Propriété 3.3—
$\forall a \in \mathbb{R}$, on a
- $V(a) = 0$,
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Exemple 3.9—
Calculons $E(X), V(X)$ et σ_X pour la variable définie dans l'énoncé de l'exemple 3.1 et 3.3.

$x_i P(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{252}{36} = 7$
$x_i^2 P(X = x_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{100}{36}$	$\frac{180}{36}$	$\frac{294}{36}$	$\frac{320}{36}$	$\frac{324}{36}$	$\frac{300}{36}$	$\frac{242}{36}$	$\frac{144}{36}$	$\frac{1974}{36}$

$$E(X) = \sum_{x_i=2}^{12} x_i P(X = x_i) = 7$$

$$V(X) = \sum_{x_i=2}^{12} x_i^2 P(X = x_i) - E^2(X) = \frac{1974}{36} - 49 = 5.833$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5.833} = 2.415$$

Exemple 3.10—
Calculons $E(X)$, $V(X)$ et σ_X pour la variable continue définie dans l'exemple 3.4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x \in [1,3] \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{3}^{1} \frac{1}{2} x dx = [\frac{1}{4} x^2]_1^3 = 2$$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$, calculons tout d'abord,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{3}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = [\frac{1}{6} x^3]_1^3 = \frac{26}{6}$$

$$V(X) = \frac{26}{6} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

3.5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

L'inégalité de Markov formalise le fait que si une variable aléatoire a une espérance finie " pas trop grande", alors, sa probabilité de prendre des "grandes" valeurs est "petite". Autrement dit, une variable aléatoire positive a peu de chances d'être beaucoup plus grande que sa moyenne.

Proposition 3.1 (Inégalité de Markov)—
Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}E(X)$$

En posant $a = \alpha E(X)$, l'inégalité se réécrit $P(X \leq \alpha E(X)) = \frac{1}{\alpha}$.

L'inégalité de Tchebychev évalue la distance entre les valeurs prises par une variable aléatoire X et sa moyenne. Plus précisément elle donne une majoration de la probabilité que l'écart soit grand.

Proposition 3.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)—
Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$,

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

En effet ;
La variable aléatoire X étant de variance finie, alors $|X - E(X)|^2$ est d'espérance finie, on applique l'inégalité de Markov avec la variable $Y = |X - E(X)|^2$, $\forall a > 0$,

$$\begin{aligned} P(|X - E(X)| \geq a) &= P(|X - E(X)|^2 \geq a^2) \\ &\leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{a^2} \\ &\leq \frac{V(X)}{a^2} \end{aligned}$$

3.6 Lois de probabilités usuelles

Dans cette partie nous citons les lois les plus utilisées dans la modélisation statistique. Le choix de la loi dépend de la nature du phénomène étudié afin de choisir entre loi discrète et loi continue.

3.6.1 Lois usuelles discrètes

3.6.1.1 Loi uniforme discrète

Elle modélise des situations d'équiprobabilités. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{1, 2, 3, ..., r\}$ avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à un $\frac{1}{r}$.

Définition 3.12 (Loi de probabilité)—
Une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète si sa loi de probabilité est définie par :

$$P(X = k) = \frac{1}{r} \quad , \quad \forall k = \overline{1, r}$$

L'espérance et la variance d'une loi uniforme discrète sont données par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{r+1}{2} \\ V(X) &= \frac{1}{12}(r^2 - 1) \end{aligned}$$

En effet ;

$$E(X) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} i = \frac{1}{r}\frac{r(r+1)}{2} = \frac{r+1}{2}$$

D'autre part,

$$E(X^2) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} i^2 = \frac{1}{r}(1^2 + 2^2 + ... + r^2) = \frac{1}{6}(r+1)(2r+1)$$

alors,

$$V(X) = \frac{1}{6}(r+1)(2r+1) - (\frac{r+1}{2})^2 = \frac{1}{12}(r^2 - 1)$$

Exemple 3.11—
On lance un dé de six face, si le dé est parfaitement symétrique chaque face, et donc chaque nombre de 1 à 6 a la même probabilité d'apparaître, égale à $\frac{1}{6}$.
L'espérance mathématique du nombre de points est $\frac{7}{2}$ et sa variance $\frac{35}{12}$.

3.6.1.2 Loi de Bernoulli

Cette loi s'applique uniquement aux expériences aléatoires à deux issues possibles.
L'univers Ω est constitué de deux éventualités "succès" ou "échec" : $\Omega = \{s, e\}$.
Soit X une variable aléatoire sur cet espace telle que :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si s est réalisé} \\ 0 & \text{si e est réalisé} \end{cases}$$

On appelle variable de Bernoulli, notée $B(P)$ où P est la probabilité que s se produise, la variable définie par :

$$\begin{array}{llll} X: & \Omega = \{s, e\} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & w & \mapsto & \{0, 1\} \end{array}$$

Définition 3.13 (Loi de probabilité)—
Soit $X \sim B(P)$, sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = \begin{cases} P & \text{si } k = 1 \\ 1 - P & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

L'espérance et la variance : Si $X \sim B(P)$, alors

$$E(X) = P \quad \text{et} \quad V(X) = P(1 - P)$$

En effet,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} kP(X = k) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) = P$$

.
De plus,

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 P(X = k) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) = P$$

Alors,

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = P(1-P)$$

Exemple 3.12—
On jette une pièce de monnaie 1 seule fois.
Cette expérience aléatoire est à deux issues possibles : avoir face ou avoir pile.
La probabilité d'avoir face est égale à $\frac{1}{2}$.

3.6.1.3 Loi Binomiale

On considère n expériences indépendantes d'un événement à deux issues "succès" et "échec", de probabilité respective P et $Q = 1 - P$. Soit X une variable aléatoire qui représente le nombre de succès obtenus, on obtient ainsi n variables aléatoires de Bernoulli sur $\Omega = \{s, e\}$. On définit X par

$$\begin{array}{lll} X: & \Omega^n & \mapsto \mathbb{R} \\ & w & \mapsto X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim B(P) \end{array}$$

X est appelée variable aléatoire binomiale, notée, $X \sim B(n, P)$.

Définition 3.14 (Loi probabilité)—
Soit $X \sim B(n, P)$, sa loi de probabilité est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}$$

où k est le nombre de succès obtenus au cours de n épreuves.
P est la probabilité d'avoir un succès à chaque épreuve.

L'espérance et la variance de $X \sim B(n, P)$ sont donnés par :

$$E(X) = nP \quad \text{et} \quad V(X) = nP(1-P)$$

En effet,

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E(X_i) = nP$$

et

$$V(X) = V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nP(1-P)$$

(les épreuves sont indépendantes).

Proposition 3.3—
Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \sim B(P)$, $\forall i = \overline{1, n}$, alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi $B(n, P)$.

D'après la proposition précédente, on déduit que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $B(n_1, P)$ et $B(n_2, P)$ est une loi binomiale $B(n_1 + n_2, P)$.

Exemple 3.13—
On jette une pièce de monnaie 6 fois. Quelle est la probabilité d'avoir moins de 3 fois face.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenu.
$X \sim B(n = 6, P = 0.5)$, $P = 0.5$ est la probabilité d'avoir face dans chaque jet.
On veut calculer $P(X < 3)$, d'après la loi binomiale ;

$$\begin{aligned} P(X<3) &= P(X=0 \ \texttt{ou} \ X=1 \ \texttt{ou} \ X=2) \\ &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\ &= C_6^0(0.5)^0(0.5)^6 + C_6^1(0.5)^1(0.5)^5 + C_6^2(0.5)^2(0.5)^4 \\ &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

Exemple 3.14—
Une urne contient 6 billes rouges et 14 billes vertes, quelle est la probabilité d'avoir deux billes rouges dans une série de 5 tirages avec remise ?
Dans notre cas, le nombre d'expériences n est le nombre de tirages, il est égal à 5.
La probabilité P d'avoir une bille rouge (succès) parmi les 6+14=20 billes contenues dans l'urne est :

$$P = \frac{\text{Le nombre de cas favorables}}{\text{Le nombre de cas possibles}} = \frac{6}{20} = 0.3$$

On considère X la variable aléatoire présentant le nombre de billes rouges tirées, $X \sim B(n = 5, P = 0.3)$
Le nombre de succès auquel on s'intéresse est $k = 2$.
D'après la loi binomiale, on a :

$$P(X=2) = C_5^2 0.3^2 (0.7)^{5-2} = 0.3087$$

3.6.1.4 Loi de Poisson

La loi de Poisson s'applique souvent aux phénomènes accidentels où la probabilité est très faible, elle sert à la description de processus de comptage et de files d'attente, par exemple : le nombre de panne d'une machine, le nombre de personnes qui utilisent un distributeur automatique.

Définition 3.15—
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,on note $X \sim P(\lambda)$, si sa loi de probabilité s'écrit comme suit :

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Remarque
Il est possible d'utiliser une formule de récurrence pour calculer les valeurs des probabilités successives :

$$P(X = k) = \frac{\lambda}{k}P(X = k-1), \;\; k \geq 1$$

En effet ;

$$\begin{aligned} P(X = k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \frac{\lambda}{k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{k}P(X = k-1) \end{aligned}$$

L'espérance et la variance de $X \sim P(\lambda)$ sont données par :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

D'autre part, $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (k-1+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (k-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

On déduit que $V(X) = \lambda$.

Proposition 3.4 (Propriété d'additivité)—
Soient $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$ indépendante de X_1, alors
$X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

Approximation de la loi binomiale à une loi de Poisson
La loi de Poisson est la loi limite de la loi binomiale quand n tend vers l'infini et P tend vers 0, en pratique cette approximation est vraie dès que $n > 50$ et $P < 0.1$.
La loi de probabilité binomiale d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} P^k (1-P)^{n-k}$$

Écrivant $P(X = k-1)$,

$$P(X = k-1) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} P^{(k-1)} (1-P)^{n-k+1}$$

Faisant le rapport : $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)}$

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}P^k(1-P)^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}P^{(k-1)}(1-P)^{n-k+1}}$$

$$= \frac{(n-k+1)P}{k(1-P)}$$
$$= \frac{(n-k+1)nP}{kn(1-P)}$$

On suppose que n est assez grand et P est assez petit ($1-P \simeq 1$), donc l'expression $\dfrac{(n-k+1)}{n(1-P)}$ tend vers 1.

On déduit que, $\dfrac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \simeq \dfrac{nP}{k}$

En posant $\lambda = nP$, on obtient $P(X=k) = P(X=k-1)\dfrac{\lambda}{k}$, d'où

$P(X=1) = P(X=0)\dfrac{\lambda}{1}$,

$P(X=2) = P(X=0)\dfrac{\lambda^2}{2}$,

$P(X=3) = P(X=0)\dfrac{\lambda^3}{3!}$,

.

.

.

$P(X=k) = P(X=0)\dfrac{\lambda^k}{k!}$

de plus

$$P(X=0) + P(X=0)\lambda + P(X=0)\frac{\lambda^2}{2!} + ... + P(X=0)\frac{\lambda^k}{k!} + ... = 1$$

alors ;

$$P(X=0)\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^k}{k!} + ...\right] = 1 \Rightarrow P(X=0) = e^{-\lambda}$$

On conclut,

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Exemple 3.15—
Six personnes (par heure), en moyenne, utilisent le guichet automatique d'une agence bancaire le samedi matin, quelle est la probabilité pour que :
1. Exactement 6 clients viennent durant une heure ?
2. Il y ait moins de 5 clients durant cette heure ?
3. Personne ne vienne durant une période de 10 min ?

<u>Solution</u> :
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'utilisateurs du guichet automatique, $X \sim P(\lambda = 6)$.
Sa loi de probabilité : $P(X = k) = e^{-6}\dfrac{6^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$
1. En utilisant la loi de probabilité, on calcule :

$$P(X = 6) = e^{-6}\frac{6^6}{6!}$$

2.

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= P(X = 0 \ \text{ou} \ X = 1 \ \text{ou} \ X = 2 \ \text{ou} \ X = 3 \ \text{ou} \ X = 4) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= P(X = 0)[1 + \frac{6}{1} + \frac{6^2}{2} + \frac{6^3}{3!} + \frac{6^4}{4!}] \\ &= 0.28497 \end{aligned}$$

3. Comme l'intervalle de temps est réduit à 10 min alors la moyenne $\lambda = 1$, on cherche P(Y=0) avec $Y \sim P(\lambda = 1)$.
D'après la loi de probabilité : $P(Y = 0) = e^{-1}\dfrac{1^0}{0!} = 0.36787$

Exemple 3.16—
Les services après ventes d'une importante entreprise d'appareils électroniques ont enregistré un retour de livraison pour défaillance de fonctionnement à hauteur de 3%. Quelle est la probabilité sur une livraison de 60 appareils que ?
1. six soient défectueux.
2. deux ou plus de deux appareils défectueux.
3. Moins de trois soient défectueux.

<u>Solution</u> :
Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre d'appareils défectueux, $X \sim$

$B(n = 60; P = 0.03)$.
On remarque que $n = 60 > 50$ et $P = 0.03 < 0.1$, alors on peut appliquer l'approximation d'une loi binomiale à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1.8$.
Sa loi de probabilité est :$P(X = k) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^k}{k!}$
1.En utilisant la loi de probabilité, on obtient :

$$P(X = 6) = e^{-1.8}\frac{(1.8)^6}{6!} = 0.0078$$

2. En utilisant la fonction de répartition :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0.5371$$

3.De la même manière que la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.1653.[1 + 1.8 + 1.62] \\ &= 0.7306 \end{aligned}$$

3.6.1.5 Loi binomiale négative

On considère des épreuves de Bernoulli (identiques et indépendantes), on désire obtenir n succès et l'on considère la variable aléatoire discrète X qui représente le nombre d'épreuves indépendantes (ou le nombre d'échecs) k précédant le n^{ieme} succès.

Définition 3.16 (La loi de probabilité)—
X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p notée $B_N(n, p)$ si sa loi de probabilité est définie par :

$$P(X = k) = C^k_{n+k-1}p^n(1-p)^k, \quad k, n \in \mathbb{N}, k \geq n$$

Le nombre de succès n est connu et l'on cherche le nombre d'épreuves k, nécessaire pour obtenir les n succès (les épreuves cessent avec l'obtention du n^{ieme} succès).

Remarque
Les coefficients binomiaux généralisés aux nombres négatifs sont définis par

$$C^k_{-n} = (-1)^k C^k_{n+k-1}$$

La loi binomiale négative peut aussi s'écrire sous la forme

$$P(X=k)=C^{k}_{-n}p^{n}(p-1)^{k}$$

Espérance et variance
Soit $X \sim B_N(n,p)$

$$E(X)=\frac{n(1-p)}{p} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{n(1-p)}{p^2}$$

Exemple 3.17—
On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{3}$. On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre d'échecs précédant le 4-ième face. Alors X suit une loi binomiale négative de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{3}$.

3.6.1.6 Loi géométrique

C'est un cas particulier de la loi binomiale négative, lorsque le nombre de succès n est égal à 1, la loi de la variable aléatoire X :le nombre d'essais k nécessaire à l'obtention de 1 succès, porte le nom de loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre P, notée $G(P)$.

Définition 3.17 (Loi de probabilité)—
Soit $X \sim G(P)$, sa loi de probabilité est définie par :

$$P(X=k)=P(1-P)^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Espérance et variance : L'espérance et la variance de la variable aléatoire $X \sim G(P)$

$$E(X)=\frac{1}{P} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{1-P}{P^2}$$

Exemple 3.18—
Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On les tire une à une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule noire. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirage nécessaires pour avoir une boule

noire. Déterminer la loi de X et calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.

<u>Solution</u> :
X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$, sa loi de probabilité est :

$$P(X = k) = P(1 - P)^{k-1}$$

donc

$$P(X = 2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{4}$$

3.6.1.7 Loi hypergéométrique

Soit une population de N individus dont M possèdent un certain caractère, que nous appellerons "succès", et $N - M$ ne le possèdent pas. On effectue un tirage aléatoire sans remise de n individus dans cet ensemble. On considère la variable aléatoire X : le nombre de succès obtenus parmi les n individus, alors X obéit à une loi hypergéométrique notée $H(N, M, n)$.

Définition 3.18 (Loi de probabilité)—
La loi de probabilité de la variable aléatoire $X \sim H(N, M, n)$

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = \overline{0, n}$$

Le numérateur correspond au nombre de choix de k individus parmi M ayant le caractère succès et $n - k$ parmi $N - M$ qui restent.

Remarque
Le schéma hypergéométrique est une succession d'épreuves de Bernoulli non indépendantes.
Espérance et variance : L'espérance et la variance de la variable $X \sim H(N, M, n)$ sont données par les formules suivantes

$$E(X) = n\frac{M}{N} \quad \text{et} \quad V(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$$

Exemple 3.19—
Dans une entreprise qui compte 8 employés, 5 d'entre eux appartiennent à l'entreprise depuis plus de 3 ans, si dans ce groupe de 8, on choisit au hasard 4 employés. Quelle est la probabilité pour qu'il y en ait exactement 2 dans l'échantillon à présenter ce caractère.

Solution :
$X \sim H(N, M, n)$ avec $N = 8, M = 5, n = 4$, alors pour calculer $P(X = 2)$, on utilise la loi de probabilité :

$$P(X = k) = \frac{C_5^k C_{8-5}^{4-k}}{C_8^n}, \quad k = \overline{0,4}$$

donc

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 C_3^{4-2}}{C_8^2} = \frac{3}{7}$$

3.6.2 Lois usuelles continues

3.6.2.1 Loi uniforme

Définition 3.19—
Soient a et b deux réels distincts. Soit X une variable aléatoire continue sur l'intervalle $[a, b]$. On dit que X suit une loi uniforme lorsque sa densité de probabilité est une constante sur $[a, b]$ et sa fonction de densité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 0 & si \quad non \end{cases}$$

On dit aussi que la variable X est uniformément répartie sur l'intervalle $[a, b]$.

Fonction de répartition : L'expression de sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

Espérance et variance : On considère une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a, b]$ (On écrit $X \sim U([a, b])$). Son espérance et sa variance sont définies comme suit :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

En effet,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt \\ &= \int_a^b t\frac{1}{b-a}dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

D'autre part, $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt - E^2(X)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt = \int_a^b t^2\frac{1}{b-a}(t)dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

d'où

$$V(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.6.2.2 Loi exponentielle

Définition 3.20—
La variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on note $X \sim Exp(\lambda)$, si sa fonction de densité est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \ \ x \geq 0 \\ 0 & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

La loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie.
Fonction de répartition : Soit $X \sim Exp(\lambda)$, sa fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \ \ x \geq 0 \\ 0 & si \ \ x < 0 \end{cases}$$

En effet ;

• Si $x < 0 : F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$

• Si $x \geq 0 : F_X(x) = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

Espérance et variance : L'espérance et la variance de $X \sim Exp(\lambda)$ sont définies par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

En effet ;

•
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{0}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

•
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{0}^{+\infty} t^2\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} te^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + 2\left[\left[-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t}dt\right] \\ &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple 3.20—
La durée de vie d'une tablette Samsung, exprimée en années, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On admet qu'en moyenne, une tablette a une durée de vie de 7 ans. Déterminer la probabilité qu'une tablette Samsung ait une durée de vie supérieure à 8 ans.

Solution :
Soit X la variable aléatoire qui modélise la durée de vie des tablettes Samsung :
$X \sim Exp(\lambda)$ avec $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 7$, on déduit que $\lambda = \dfrac{1}{7}$.
La probabilité qu'une tablette ait une durée de vie supérieure à 8 ans est

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - F_X(8) = e^{-8\lambda} = e^{(-\frac{8}{7})} = 0.3189$$

3.6.2.3 Loi normale

Définition 3.21 (Fonction de densité)—
Une variable aléatoire réelle X suit une loi Laplace-Gauss ou loi normale d'une moyenne $m \in \mathbb{R}$ et d'écart type $\sigma \in \mathbb{R}^+$, notée $X \sim N(m, \sigma)$, si sa fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Les valeurs d'une loi normale se répartissent symétriquement par rapport à la moyenne et sont représentées par une courbe en cloche appelée courbe de Gauss.
Fonction de répartition : Soit $X \sim N(m, \sigma)$, sa fonction de répartition est définie par

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt$$

Cette dernière intégrale n'ayant pas d'expression analytique simple, ses valeurs sont données dans les tables statistiques usuelles.

Propriété 3.4—
• Dans une distribution normale, la moyenne, le mode et la médiane sont égaux.
• Dans une distribution normale :

68% des valeurs se trouvent entre $m - \sigma$ et $m + \sigma$
95% des valeurs se trouvent entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$
99.8% des valeurs se trouvent entre $m - 3\sigma$ et $m + 3\sigma$

Distribution normale centrée réduite : Soit une variable aléatoire $Y \sim N(m,\sigma)$, le changement de variable $X = \dfrac{Y-m}{\sigma}$ est une loi normale dite centrée et réduite de moyenne nulle et d'écart-type 1.
En effet ;
Soient F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives de X et de Y, alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(\frac{Y-m}{\sigma} \leq x) \\ &= P\,(Y \leq \sigma x + m) \\ &= F_Y(\sigma x + m) \end{aligned}$$

et en dérivant F_X et F_Y par rapport à x, on a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sigma f_Y(\sigma x + m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma x + m - m}{\sigma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2)} \end{aligned}$$

En utilisant cette dernière propriété, le calcul de $P(X \leq x)$ se ramène à un calcul de probabilité sur une variable normale centrée et réduite.

Proposition 3.5—
Soit $X \sim N(m,\sigma)$, alors

$$P(X \leq x) = P(U \leq \frac{x-m}{\sigma}), \;\; \text{où} \;\; U \sim N(0,1)$$

Exemple 3.21—
A. Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale centrée et réduite :
1. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(U < 1.33); \;\; P(U \geq 0.45); \;\; P(U < -1.51).$$

2. Calculer les taux " t " sachant que :

$$P(U < t) = 0.8547; \;\; P(U \geq t) = 0.7124$$

B. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'une moyenne 6 et d'écart-type 2. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X < 5.8) \;\; et \;\; P(X \geq 4.69)$$

C. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale d'une moyenne m et d'écart-type σ, déterminer m et σ sachant que :

$$P(Y < 14.8) = 09918 \;\; et \;\; P(Y \geq 13) = 0.0668.$$

<u>Solution</u> :
1/D'après la lecture directe de la table de la normale centrée réduite, on a :
•

$$P(U < 1.33) = 0.9082$$

• D'après les propriétés de la fonction de répartition, on a :

$$P(U \geq 0.45) = 1 - P(U < 0.45)$$

• La courbe de la loi normale centrée et réduite est symétrique par rapport à 0, on déduit que :

$$\begin{aligned} P(U < -1.51) &= P(U > 1.51) \\ &= 1 - P(U < 1.51) \\ &= 1 - 0.9345 \end{aligned}$$

2/• D'après la table on a : $P(U < 1.05) = 0.8531$ et $P(U < 1.06) = 0.8554$, on prend la valeur la plus proche de 0.8547 et on déduit que $t = 1.06$.

• Comme $P(U \geq t) = 0.7124$, alors $t < 0$,
on écrit $P(U \geq t) = P(U \leq -t) = 0.7124$
puis on déduit de la table que $-t = 0.56 \Rightarrow t = -0.56$

B/ $\quad X \rightarrow N(m = 6, \sigma = 2)$

$$\begin{aligned} P(X < 5.8) &= P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{5.8-6}{2}) \\ &= P(U < -0.1), U \rightarrow N(0,1) \\ &= P(U > 0.1) = 1 - P(U \leq 0.1) \\ &= 1 - 0.5398 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 4.69) &= P(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{4.69-6}{2}) \\ &= P(U \geq -0.655) \\ &= P(U < 0.65) \\ &= 0.7422. \end{aligned}$$

C/ $\quad Y \rightarrow N(m, \sigma)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Y < 14.8) = 0.9918 \\ P(Y \geq 13) = 0.0668 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(U < \dfrac{14.8-m}{\sigma}) = 0.9918 \\ P(U \geq \dfrac{13-m}{\sigma}) = 0.0668 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(U < \dfrac{14.8-m}{\sigma}) = 0.9918 \\ P(U < \dfrac{13-m}{\sigma}) = 1 - 0.0668 = 0.9332 \end{array} \right.$$

On déduit que $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{14.8-m}{\sigma} = 2.4 \\ \dfrac{13-m}{\sigma} = 1.5 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 14.8 - m = 2.4\sigma \\ 13 - m = 1.5\sigma \end{array} \right.$

La solution du dernier système est $m = 10$ et $\sigma = 2$

Proposition 3.6 (Propriété d'additivité)—
Considérons deux variables aléatoires normales $X \sim N(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim N(m_2, \sigma_2)$, si X et Y sont indépendantes alors la somme $X + Y$ suit une loi normale et $X + Y \sim N(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Approximation de la loi binomiale On considère une variable $X \sim B(n, P)$, la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ tend vers la loi normale centrée et réduite, quand n tend vers l'infini. En pratique, cette approximation est valable dès que np et $n(1-p)$ sont supérieures à 5.

Approximation de la loi de Poisson
On considère une variable $X \sim P(\lambda)$, la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ tend vers la loi normale centrée et réduite, quand λ tend vers l'infini. En pratique, cette approximation est valable dès que λ est supérieure à 18.

3.6.2.4 Loi de Cauchy

Définition 3.22—
Une variable aléatoire continue X suit une loi de Cauchy, on note $X \sim C(x_0, \alpha)$, de paramètres $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (paramètre d'échelle) et $x_0 \in \mathbb{R}$(paramètre de position) si elle admet pour densité de probabilité la fonction :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (x - x_0)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Fonction de répartition : Soit $X \sim C(x_0, \alpha)$, sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(x) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}$$

En effet ;

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + (t - x_0)^2}dt = \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + \left(\frac{t - x_0}{\alpha}\right)^2}dt$$

Posons $y = \dfrac{t - x_0}{\alpha}$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{\alpha\pi}\int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\alpha}} \frac{1}{1 + y^2}dy \\ &= \frac{1}{\alpha\pi}\left[\arctan y\right]_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{\alpha}} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x - x_0}{\alpha}\right)\right] \end{aligned}$$

Espérance et variance : Les intégrales qui définissent l'espérance et la variance de cette loi ne convergent pas, de sorte qu'une variable aléatoire de Cauchy ne possède ni espérance, ni variance.

Remarque

La loi de Cauchy apparaît comme la loi d'une variable aléatoire qui est le quotient de deux variables aléatoires normales indépendantes centrées et de même écart-type.

3.6.2.5 Loi log-normale

Définition 3.23—
Soit $Y \sim N(m;\sigma)$, la variable aléatoire définie par $X = e^Y$ suit une loi dite loi log-normale de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On note $X \sim LN(m;\sigma)$.

La densité de la loi log-normale se déduit de celle de la loi normale par le changement de variable $x = e^y$. En effet

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = P(e^Y \leq x) \\ &= P(Y \leq \ln x) \\ &= P(U \leq \frac{\ln x - m}{\sigma}) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln x - m}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \end{aligned}$$

En dérivant cette dernière expression, on obtient la densité de la loi log-normale.
Espérance et variance : l'espérance et la variance de $X \sim LN(m;\sigma)$ sont données par :

$$E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$
$$V(X) = e^{2m+\sigma^2}(-1 + e^{\sigma^2})$$

En effet ;
La variable aléatoire X est telle que $X = e^Y$ où $Y \sim N(m;\sigma)$

$$E(X) = E(e^Y) = \Phi_y(1), \;\; E(X^2) = E(e^{2Y}) = \Phi_Y(2)$$

et

$$\Phi_y(t) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + tm}$$

On en déduit que

$$E(X) = \Phi_y(1) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}, \;\; E(X^2) = \Phi_Y(2) = e^{2m+2\sigma^2}$$

et

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = e^{2m+\sigma^2}(-1 + e^{\sigma^2})$$

3.6.2.6 Loi gamma

La loi gamma utilise la fonction eulerienne gamma, donnée dans la définition suivante.

Définition 3.24 (Fonction gamma)—
La fonction gamma Γ au point $a > 0$ est la fonction définie par :

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

Propriété 3.5—
$\bullet \Gamma(1) = 1$
$\bullet\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
$\bullet\ \Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$
$\bullet\ \Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Preuve :
$\bullet\ \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$
$\bullet\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$
Posons $x = y^2, dx = 2ydy$

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \int_0^\infty y^{-1} e^{-y^2} 2ydy \\ &= 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$\bullet\ \Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x} dx$, on calcule cette dernière intégrale par parties.

$$\begin{aligned}\Gamma(a+1) &= [-x^a e^{-x}]_0^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \\ &= a\Gamma(a)\end{aligned}$$

$\bullet\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n!\Gamma(1) = n!$

Définition 3.25—
Une variable aléatoire positive X suit une loi de gamma $\Gamma(t,\lambda)$ de paramètres positifs t,λ, si sa densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)} & si \;\; x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Γ est la fonction eulérienne.

Remarques
1. La loi exponentielle est un cas particulier de la famille des lois gamma (en posant $t = 1$).
2. Lorsque t est un entier, la loi gamma s'appelle encore loi d'Erlang. La loi d'Erlang de paramètre t et λ est la loi de la somme de t variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle de paramètre λ.
3. Le paramètre t est un paramètre de forme tandis que $\frac{1}{\lambda}$ est un paramètre d'échelle.
Espérance et variance : l'espérance et la variance de $X \sim \Gamma(t,\lambda)$ sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \frac{t}{\lambda}, \quad V(X) = \frac{t}{\lambda^2}$$

En effet ;

3.6.2.7 Loi bêta

La loi bêta utilise la fonction eulerienne bêta donnée dans la définition suivante

Définition 3.26 (Fonction bêta)—
La fonction beta β aux points $a > 0$ et $b > 0$ est la fonction définie par :

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Propriété 3.6—
•$\beta(a,b) = \beta(b,a)$
• $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Preuve :

$\bullet \beta(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

En posant $y = 1-x \Rightarrow x = 1-y$, on obtient

$$\beta(a,b) = \int\limits_0^1 (1-x)^{a-1}(x)^{b-1}dx = \beta(b,a)$$

$\bullet$

$$\begin{aligned} \Gamma(a).\Gamma(b) &= (\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx)(\int\limits_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy) \\ &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}dxdy \end{aligned}$$

On fait le changement de variables $x+y = r, \quad x = rw$

donc $0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq w \leq 1$

et $dr = dx + dy, \quad dx = wdr + rdw, \quad dy = (1-w)dr - rdw$

donc $dxdy = rdwdr$, il s'en suit,

$$\begin{aligned} \Gamma(a).\Gamma(b) &= \int\limits_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw. \int\limits_0^\infty r^{a+b-1}e^{-r}dr \\ &= \beta(a,b).\Gamma(a+b) \end{aligned}$$

Définition 3.27—

Une variable aléatoire X suit une loi de bêta de paramètres $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on note $X \sim \beta(a,b)$, si sa densité de probabilité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & si \;\; 0 < x < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$B(a,b)$ est la fonction eulérienne, $\beta(a,b) = \dfrac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Remarque

Si $a = b = 1$, alors la loi béta est la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.

Espérance et variance : l'espérance et la variance de $X \sim \beta(a,b)$ sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \frac{a}{a+b}, \quad V(X) = \frac{(a)(b)}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

3.6.2.8 Loi de chi-deux

Définition 3.28—
Soit $Z_1, Z_2, ..., Z_\nu$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée et réduite : $Z_i \sim N(0,1),\ \forall i$.
Alors, la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ suit la loi du chi-deux, χ^2, à ν degrés de liberté, sa fonction de densité est :

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\left(\frac{\nu}{2}-1\right)} e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} & si \;\; x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Remarque[Propriété d'additivité]
La somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement $\chi^2(\nu_1)$ et $\chi^2(\nu_2)$ suit aussi une loi du chi-deux avec $\nu_1 + \nu_2$ degrés de liberté.
Espérance et variance : l'espérance et la variance de la variable $X \sim \chi^2(\nu)$ sont données par les formules suivantes :

$$E(X) = \nu, \quad V(X) = 2\nu$$

3.6.2.9 Loi de Student

Définition 3.29—
Soient $Z \sim N(0,1)$ et $X \sim \chi^2(\nu)$ deux variables aléatoires indépendantes. La variable aléatoire

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{\nu}}}$$

Suit la loi de Student à ν degrés de liberté, noté $t(\nu)$, sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Remarques
1. Si le degré de liberté $\nu = 1$, la densité de $T(1)$ est $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{(1+t^2)}$ est celle de la loi de Cauchy.

2. Si $\nu > 100$, la loi de Student peut être remplacée par la loi gaussienne réduite.
3. La densité associée à un loi de Student est symétrique, centrée sur 0, en forme de cloche.

Espérance et variance : l'espérance et la variance de $T \sim t(\nu)$ sont données par les formules suivantes :

$$E(T) = 0, \quad si \;\; \nu > 1$$

$$V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \;\; , \quad si \;\; \nu > 2$$

Exemple 3.22—
On suppose que T suit la loi de Student avec 9 degrés de libertée. Calculer $P(1.1 < T < 3.25)$.

$$P(1.1 < T < 3.25) = P(T < 3.25) - P(T \leq 1.1)$$

D'après la table de Student, on a :

$$P(1.1 < T < 3.25) = 0.995 - 0.850 = 0.145$$

3.6.2.10 Loi de Fisher-Snedecor

Définition 3.30—
On considère deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de chi-deux à ν_1 et ν_2 degrés de liberté respectivement. La variable aléatoire F de Fisher est définie par :

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{\left(\frac{\chi^2(\nu_1)}{\nu_1}\right)}{\left(\frac{\chi^2(\nu_2)}{\nu_2}\right)}$$

Propriété 3.7—
• Soit $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$, sa fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\left(\frac{\nu_1}{2}\right)}}{\beta\left(\dfrac{\nu_1}{2}, \dfrac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\left(\frac{\nu_1 - 2}{2}\right)}}{\left(1 + \dfrac{\nu_1}{\nu_2} x\right)^{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}} & si \;\; x > 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

• On a :

$$F(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{F(\nu_2, \nu_1)}$$

• Si T suit une loi de Student à ν degrés de liberté alors T^2 suit une loi de Fisher $F(1, \nu)$.

Espérance et variance : Soit $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$, l'espérance et la variance de cette loi sont :

$$E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \quad si \;\; \nu_2 > 2$$

et

$$V(X) = \left(\frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}\right)^2 \frac{2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 4)}, \quad si \;\; \nu_2 > 4$$

3.7 Exercices

Énoncé des exercices

Exercice 1 : Le nombre de parties d'échec gagnées lors d'un tournoi est une variable aléatoire, notée X, dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.07	0.11	0.21	0.25	0.20	0.16

Déterminer la fonction de répartition de X puis calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 : α est un réel positif. On considère la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha t^{-\alpha-1} & si \;\; t \in [1, +\infty[\\ 0 & sinon \end{cases} \quad , \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

1. Montrer que f_α est une densité de probabilité.
2. On pose $(\alpha = 2)$ et soit X une variable aléatoire de densité f_2.
- Trouver la fonction de répartition F_X.
- Calculer $P(\frac{1}{2} < X \leq 4)$.
- Déterminer $E(X)$.

Exercice 3 : On suppose que 20% des employés d'une entreprise sont initiés à l'outil informatique on prélève au hasard un échantillon de 10 employés.
Calculer la probabilité pour que sur 10 personnes choisis au hasard.
1. La majorité soit initiée à l'informatique.
2. La moitié soit initiée à l'informatique.
3. Moins de 3 soient initiés à l'informatique.

Exercice 4 : Un chef d'entreprise, pour éviter l'attente des camions venant livrer, envisage de construire de nouveaux postes de déchargement. Actuellement, 5 postes sont en activité. Pour simplifier l'étude, on considère ; qu'il faut une journée entière pour décharger un camion. On désigne par X la variable aléatoire mesurant le nombre de camions venant livrer chaque jour. Une enquête statistique préalable a montré qu'on pouvait assimiler la loi de X à une loi de Poisson de paramètre λ= 4.
1. Quelle est la probabilité de n'avoir aucun camion en attente ?

2. Combien faudrait-il de postes de déchargement pour porter cette probabilité à 0.95 ?

Exercice 5 : Un épicier reçoit un lot de pommes dont 15% sont avariées. Il charge un employé de préparer des emballages de six pommes chacun. Celui-ci, négligeant, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés.
Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, deux fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X = "nombre de pommes avariées dans un emballage".
Déterminez la loi de probabilité de X en supposant que la probabilité d'avoir une pomme avariée est toujours la même.(tirage avec remise)

2. Quelle est la probabilité qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier ?

Exercice 6 : La note du module de probabilités de la section L2 mathématiques, suit une loi normale d'une moyenne m et d'écart-type σ. Trouver les paramètres m et σ sachant que :

$$P(X < 9.5) = 0.2266 \quad et \quad P(X \geq 13.5) = 0.1056$$

Exercice 7 : Un concessionnaire de voitures vend le même jour " n " véhicules identiques à des particuliers. Sachant que la probabilité pour que ce type de voiture soit en état de rouler deux ans après est de 0.9.
1. Calculez " n " sachant que la probabilité que les n voitures soient en service deux ans plus tard est de 0.4782.
2. Calculer les probabilités que deux ans plus tard :
a. n voitures soient hors de service.
b. 6 voitures soient hors de service.
c. 2 voitures au moins soient en service.

Corrigé des exercices

Solution d'exercice 1 :
On complète le tableau :

x_i	0	1	2	3	4	5	T
$P(X = x_i)$	0.07	0.11	0.21	0.25	0.20	0.16	1
$F_X(x_i) = P(X \leq x_i)$	0.07	0.18	0.39	0.64	0.84	1	/
$x_i P(X = x_i)$	0	0.11	0.42	0.75	0.80	0.8	2.88
$x_i^2 P(X = x_i)$	0	0.11	0.84	2.25	3.20	4	10.4

1. La fonction de répartition est donnée dans la troisième ligne du tableau.
2. Espérance : $E(X) = \sum_{x_i=0}^{5} x_i P(X = x_i) = 2.88$ (quatrième ligne du tableau)
3. La variance $V(X) = E(X^2) - E^2(X) =$ avec $E(X^2) = \sum_{x_i=0}^{5} x_i^2 P(X = x_i)$
$V(X) = 10.4 - (2.88)^2 = 2.1056$.

Solution d'exercice 2 :
1. Pour que f soit une densité de probabilité il suffit de vérifier que $f(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)dt = 1$.

La première condition étant vérifier, il nous reste à calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)dt$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)dt = \int_{1}^{+\infty} \alpha t^{-\alpha-1}dt = [-t^{-\alpha}]_1^{+\infty} = 1.$$

2. On pose $\alpha = 2$, la fonction de répartition s'écrit : $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_2(t)dt$.
- Si $x < 1$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
- Si $x \geq 1$: $F_X(x) = \int_1^x 2t^{-3}dt = [-t^{-2}]_1^x = 1 - x^{-2}$.

On en déduit que,

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - x^{-2} & si \quad x \geq 1 \\ 0 & si \quad x < 1 \end{cases}$$

-Calculons $P(\frac{1}{2} < X \leq 4)$

$$\begin{aligned} P(\tfrac{1}{2} < X \leq 4) &= P(X \leq 4) - P(X \leq \tfrac{1}{2}) \\ &= F_X(4) - F_X(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{16} = \tfrac{15}{16} \end{aligned}$$

-Déterminons $E(X)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_2(t)dt \\ &= \int_1^x 2t^{-2}dt = [-2t^{-1}]_1^{+\infty} = 2 \end{aligned}$$

Solution d'exercice 3 :

On considère X la variable aléatoire qui compte le nombre d'employés initié à l'outil informatique.

X suit une loi binomiale $B(n,p)$ avec $n = 10, p = 0.2$, sa loi de probabilité est :

$$P(X = k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k} = C_{10}^k (0.2)^k (0.8)^{10-k}$$

1. Soit l'événement $A = \{$La majorité soit initiée à l'informatique$\}$,

$$\begin{aligned} P(A) = \; & P(X > 5) \\ &= \sum_{k=6}^{10} C_{10}^k (0.2)^k (0.8)^{10-k} \end{aligned}$$

2. Soit l'événement $A = \{$La moitié soit initiée à l'informatique$\}$,

$$P(A) = P(X = 5) = C_{10}^5 (0.2)^5 (0.8)^5$$

3. Soit l'événementt $A = \{$Moins de 3 soient initiés à l'informatique.$\}$,

$$P(A) = P(X < 3) = \sum_{k=0}^{2} C_{10}^k (0.2)^k (0.8)^{10-k}$$

Solution d'exercice 4 :

X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 4$ $(X \longrightarrow P(\lambda = 4))$, sa loi de probabilité est donnée par :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \exp(-\lambda).\frac{\lambda^k}{k!}, \;\; \forall k \in \mathbb{N} \\ &= \exp(-4).\frac{4^k}{k!}, \;\; \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

1.On calcule $P(X \leq 5)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= \exp(-4)\left[\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!}\right] \\ &= 0.785103 \end{aligned}$$

La probabilité de n'avoir aucun camion en attente est 0.785103.

2. Si on a 6 postes alors la probabilité de n'avoir aucun camion en attente est

$$P(X \leq 6) = P(X \leq 5) + P(X = 6) = 0.785103 + 0.10419 = 0.88929$$

Si on a 7 postes alors la probabilité de n'avoir aucun camion en attente est

$$P(X \leq 7) = P(X \leq 6) + P(X = 7) = 0.948 \simeq 0.95$$

On déduit qu'il nous faut 7 postes de déchargement pour porter la probabilité de n'avoir aucun camion en attente à 0.95.

Solution d'exercice 5 :
1. X = "nombre de pommes avariées dans un emballage". La loi de X est une binomiale $X \sim B(n, p)$, avec $n = 6$ et $P = 0.5$. Sa Loi de probabilité est :

$$P(X = k) = C_6^k (0.15)^k (0.85)^(6 - k), \quad k \in \{0, 1, ..., 6\}$$

2. La probabilité qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier est

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ &= 1 - [C_6^0 (0.15)^0 (0.85)^6 + C_6^1 (0.15)^1 (0.85)^5] \\ &\simeq 0.223 \end{aligned}.$$

Solution d'exercice 6 :
Soit la v.a Y : La note du module de probabilités-statistiques, $Y \rightarrow N(m, \sigma)$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Y < 9.5) = 0.2266 \\ P(Y \geq 13.5) = 0.1056 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(U < \dfrac{9.5 - m}{\sigma}) = 0.2266 \\ P(U \geq \dfrac{13.5 - m}{\sigma}) = 0.1056 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(U > -\dfrac{9.5 - m}{\sigma}) = 0.2266 \\ P(U < \dfrac{13.5 - m}{\sigma}) = 1 - 0.1056 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(U \leq -\dfrac{9.5 - m}{\sigma}) = 1 - 0.2266 = 0.7734 \\ P(U < \dfrac{13.5 - m}{\sigma}) = 1 - 0.1056 = 0.8944 \end{array} \right.$$

On déduit que $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-9.5 + m}{\sigma} = 0.75 \\ \dfrac{13.5 - m}{\sigma} = 1.25 \end{array} \right.$
La solution du dernier système est $m = 11$ et $\sigma = 2$.

Solution d'exercice 7 :
X : compte le nombre de voitures restant en service deux ans plus tard.

$X \longrightarrow B(n,p), \quad p = 0.9$
On cherche n tel que $P(X = n) = 0.4782$.
La loi de probabilité de X est :

$$\begin{aligned} P(X = k) = & \ C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n} \\ & = C_n^k (0.9)^k (0.1)^{n-k}, \quad k = \overline{0,n} \end{aligned}$$

pour $k = n$,

$$\begin{aligned} P(X = k) = & \ C_n^n (0.9)^n (0.1)^{n-n}, \quad k = \overline{0,n} \\ & = (0.9)^n \end{aligned}$$

On pose $P(X = n) = 0.4782$ alors,

$$(0.9)^n = 0.4782 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0.4782)}{\ln(0.9)} \simeq 7$$

a. La probabilité que les 7 voitures soient hors de service deux ans plus tard est

$$P(X = 0) = C_7^0 (0.9)^0 (0.1)^7 = 10^{-7}.$$

b. La probabilité que 6 voitures soient hors de service est

$$P(X = 1) = C_7^1 (0.9)^1 (0.1)^6 = 6.3 \times 10^{-7}.$$

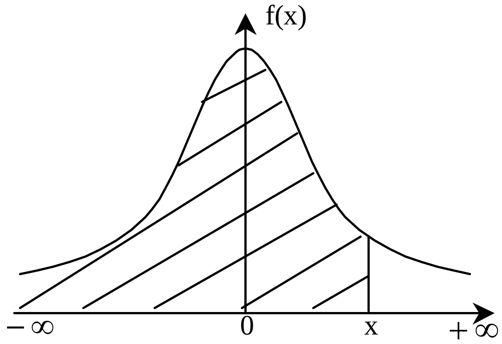
c. La probabilité que 2 voitures au au moins soient en service deux ans plus tard est

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 7.3 \times 10^{-7}.$$

Tables statistiques

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

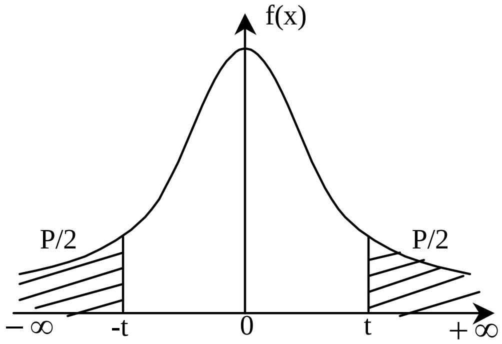
X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921

Loi de Student

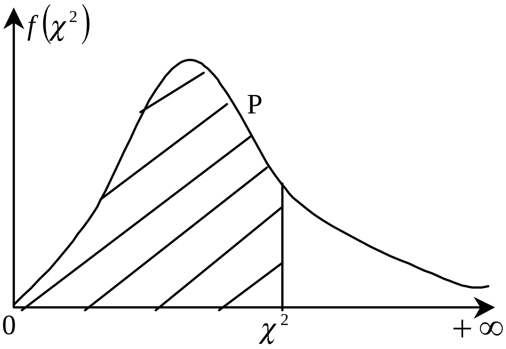
Valeurs de t ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue.



ν \P	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	1%
1	0,1584	0,3249	0,5095	0,7265	1,0000	1,3764	1,9626	3,0777	6,3137	12,7062	63,6559
2	0,1421	0,2887	0,4447	0,6172	0,8165	1,0607	1,3862	1,8856	2,9200	4,3027	9,9250
3	0,1366	0,2767	0,4242	0,5844	0,7649	0,9785	1,2498	1,6377	2,3534	3,1824	5,8408
4	0,1338	0,2707	0,4142	0,5686	0,7407	0,9410	1,1896	1,5332	2,1318	2,7765	4,6041
5	0,1322	0,2672	0,4082	0,5594	0,7267	0,9195	1,1558	1,4759	2,0150	2,5706	4,0321
6	0,1311	0,2648	0,4043	0,5534	0,7176	0,9057	1,1342	1,4398	1,9432	2,4469	3,7074
7	0,1303	0,2632	0,4015	0,5491	0,7111	0,8960	1,1192	1,4149	1,8946	2,3646	3,4995
8	0,1297	0,2619	0,3995	0,5459	0,7064	0,8889	1,1081	1,3968	1,8595	2,3060	3,3554
9	0,1293	0,2610	0,3979	0,5435	0,7027	0,8834	1,0997	1,3830	1,8331	2,2622	3,2498
10	0,1289	0,2602	0,3966	0,5415	0,6998	0,8791	1,0931	1,3722	1,8125	2,2281	3,1693
11	0,1286	0,2596	0,3956	0,5399	0,6974	0,8755	1,0877	1,3634	1,7959	2,2010	3,1058
12	0,1283	0,2590	0,3947	0,5386	0,6955	0,8726	1,0832	1,3562	1,7823	2,1788	3,0545
13	0,1281	0,2586	0,3940	0,5375	0,6938	0,8702	1,0795	1,3502	1,7709	2,1604	3,0123
14	0,1280	0,2582	0,3933	0,5366	0,6924	0,8681	1,0763	1,3450	1,7613	2,1448	2,9768
15	0,1278	0,2579	0,3928	0,5357	0,6912	0,8662	1,0735	1,3406	1,7531	2,1315	2,9467
16	0,1277	0,2576	0,3923	0,5350	0,6901	0,8647	1,0711	1,3368	1,7459	2,1199	2,9208
17	0,1276	0,2573	0,3919	0,5344	0,6892	0,8633	1,0690	1,3334	1,7396	2,1098	2,8982
18	0,1274	0,2571	0,3915	0,5338	0,6884	0,8620	1,0672	1,3304	1,7341	2,1009	2,8784
19	0,1274	0,2569	0,3912	0,5333	0,6876	0,8610	1,0655	1,3277	1,7291	2,0930	2,8609
20	0,1273	0,2567	0,3909	0,5329	0,6870	0,8600	1,0640	1,3253	1,7247	2,0860	2,8453
21	0,1272	0,2566	0,3906	0,5325	0,6864	0,8591	1,0627	1,3232	1,7207	2,0796	2,8314
22	0,1271	0,2564	0,3904	0,5321	0,6858	0,8583	1,0614	1,3212	1,7171	2,0739	2,8188
23	0,1271	0,2563	0,3902	0,5317	0,6853	0,8575	1,0603	1,3195	1,7139	2,0687	2,8073
24	0,1270	0,2562	0,3900	0,5314	0,6848	0,8569	1,0593	1,3178	1,7109	2,0639	2,7970
25	0,1269	0,2561	0,3898	0,5312	0,6844	0,8562	1,0584	1,3163	1,7081	2,0595	2,7874
26	0,1269	0,2560	0,3896	0,5309	0,6840	0,8557	1,0575	1,3150	1,7056	2,0555	2,7787
27	0,1268	0,2559	0,3894	0,5306	0,6837	0,8551	1,0567	1,3137	1,7033	2,0518	2,7707
28	0,1268	0,2558	0,3893	0,5304	0,6834	0,8546	1,0560	1,3125	1,7011	2,0484	2,7633
29	0,1268	0,2557	0,3892	0,5302	0,6830	0,8542	1,0553	1,3114	1,6991	2,0452	2,7564
30	0,1267	0,2556	0,3890	0,5300	0,6828	0,8538	1,0547	1,3104	1,6973	2,0423	2,7500
40	0,1265	0,2550	0,3881	0,5286	0,6807	0,8507	1,0500	1,3031	1,6839	2,0211	2,7045
50	0,1263	0,2547	0,3875	0,5278	0,6794	0,8489	1,0473	1,2987	1,6759	2,0086	2,6778
60	0,1262	0,2545	0,3872	0,5272	0,6786	0,8477	1,0455	1,2958	1,6706	2,0003	2,6603
80	0,1261	0,2542	0,3867	0,5265	0,6776	0,8461	1,0432	1,2922	1,6641	1,9901	2,6387
100	0,1260	0,2540	0,3864	0,5261	0,6770	0,8452	1,0418	1,2901	1,6602	1,9840	2,6259
120	0,1259	0,2539	0,3862	0,5258	0,6765	0,8446	1,0409	1,2886	1,6576	1,9799	2,6174
200	0,1258	0,2537	0,3859	0,5252	0,6757	0,8434	1,0391	1,2858	1,6525	1,9719	2,6006
∞	0,1257	0,2533	0,3853	0,5244	0,6745	0,8416	1,0364	1,2816	1,6449	1,9600	2,5758

Loi du χ^2

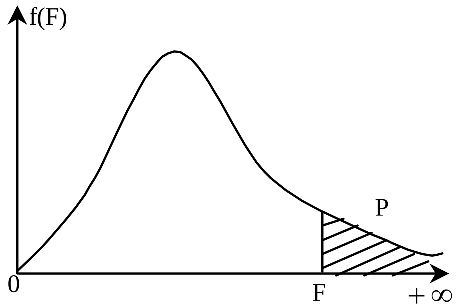
Valeur de χ^2 ayant la probabilité P d'être dépassée.



ddl/P	0,5%	1,0%	2,5%	5,0%	10,0%	50,0%	90,0%	95,0%	97,5%	99,0%	99,5%
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	0,455	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	5,348	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	7,344	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	8,343	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	10,341	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	11,340	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	12,340	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	13,339	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	15,338	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	16,338	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	17,338	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	18,338	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	20,337	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	21,337	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	22,337	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	23,337	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	24,337	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	25,336	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	26,336	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	27,336	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	28,336	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
31	14,458	15,655	17,539	19,281	21,434	30,336	41,422	44,985	48,232	52,191	55,002
32	15,134	16,362	18,291	20,072	22,271	31,336	42,585	46,194	49,480	53,486	56,328
33	15,815	17,073	19,047	20,867	23,110	32,336	43,745	47,400	50,725	54,775	57,648
34	16,501	17,789	19,806	21,664	23,952	33,336	44,903	48,602	51,966	56,061	58,964
35	17,192	18,509	20,569	22,465	24,797	34,336	46,059	49,802	53,203	57,342	60,275

Lorsque $\nu > 30$ on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ suit une loi normale centrée réduite.

Loi de Fisher-Snedecor



Valeurs de F ayant 5% de chances d'être dépassées.

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	18	24	30	50	60	120
1	161,446	199,499	215,707	224,583	230,160	233,988	238,884	241,882	243,905	247,324	249,052	250,096	251,774	252,196	253,254
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,371	19,396	19,412	19,440	19,454	19,463	19,476	19,479	19,487
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,845	8,785	8,745	8,675	8,638	8,617	8,581	8,572	8,549
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,041	5,964	5,912	5,821	5,774	5,746	5,699	5,688	5,658
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,818	4,735	4,678	4,579	4,527	4,496	4,444	4,431	4,398
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,147	4,060	4,000	3,896	3,841	3,808	3,754	3,740	3,705
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,726	3,637	3,575	3,467	3,410	3,376	3,319	3,304	3,267
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,438	3,347	3,284	3,173	3,115	3,079	3,020	3,005	2,967
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,137	3,073	2,960	2,900	2,864	2,803	2,787	2,748
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,978	2,913	2,798	2,737	2,700	2,637	2,621	2,580
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	2,948	2,854	2,788	2,671	2,609	2,570	2,507	2,490	2,448
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,849	2,753	2,687	2,568	2,505	2,466	2,401	2,384	2,341
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,767	2,671	2,604	2,484	2,420	2,380	2,314	2,297	2,252
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,602	2,534	2,413	2,349	2,308	2,241	2,223	2,178
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,544	2,475	2,353	2,288	2,247	2,178	2,160	2,114
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,591	2,494	2,425	2,302	2,235	2,194	2,124	2,106	2,059
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,450	2,381	2,257	2,190	2,148	2,077	2,058	2,011
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,412	2,342	2,217	2,150	2,107	2,035	2,017	1,968
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,477	2,378	2,308	2,182	2,114	2,071	1,999	1,980	1,930
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,348	2,278	2,151	2,082	2,039	1,966	1,946	1,896
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,420	2,321	2,250	2,123	2,054	2,010	1,936	1,916	1,866
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,297	2,226	2,098	2,028	1,984	1,909	1,889	1,838
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,375	2,275	2,204	2,075	2,005	1,961	1,885	1,865	1,813
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,355	2,255	2,183	2,054	1,984	1,939	1,863	1,842	1,790
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,236	2,165	2,035	1,964	1,919	1,842	1,822	1,768
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,220	2,148	2,018	1,946	1,901	1,823	1,803	1,749
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,305	2,204	2,132	2,002	1,930	1,884	1,806	1,785	1,731
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,291	2,190	2,118	1,987	1,915	1,869	1,790	1,769	1,714
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,278	2,177	2,104	1,973	1,901	1,854	1,775	1,754	1,698
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,165	2,092	1,960	1,887	1,841	1,761	1,740	1,683
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,255	2,153	2,080	1,948	1,875	1,828	1,748	1,726	1,670
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,244	2,142	2,070	1,937	1,864	1,817	1,736	1,714	1,657
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,235	2,133	2,060	1,926	1,853	1,806	1,724	1,702	1,645
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,225	2,123	2,050	1,917	1,843	1,795	1,713	1,691	1,633
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,217	2,114	2,041	1,907	1,833	1,786	1,703	1,681	1,623
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,077	2,003	1,868	1,793	1,744	1,660	1,637	1,577
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,130	2,026	1,952	1,814	1,737	1,687	1,599	1,576	1,511
80	3,960	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,056	1,951	1,875	1,734	1,654	1,602	1,508	1,482	1,411
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,032	1,927	1,850	1,708	1,627	1,573	1,477	1,450	1,376
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,016	1,910	1,834	1,690	1,608	1,554	1,457	1,429	1,352

Valeurs de F ayant 2,5% de chances d'être dépassées.

ν_2 \ ν_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**10**	**12**	**18**	**24**	**30**	**50**	**60**	**120**
1	647,793	799,482	864,151	899,599	921,835	937,114	956,643	968,634	976,725	990,345	997,272	1001,405	1008,098	1009,787	1014,036
2	38,506	39,000	39,166	39,248	39,298	39,331	39,373	39,398	39,415	39,442	39,457	39,465	39,478	39,481	39,489
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,540	14,419	14,337	14,196	14,124	14,081	14,010	13,992	13,947
4	12,218	10,649	9,979	9,604	9,364	9,197	8,980	8,844	8,751	8,592	8,511	8,461	8,381	8,360	8,309
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,757	6,619	6,525	6,362	6,278	6,227	6,144	6,123	6,069
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,600	5,461	5,366	5,202	5,117	5,065	4,980	4,959	4,904
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,899	4,761	4,666	4,501	4,415	4,362	4,276	4,254	4,199
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,433	4,295	4,200	4,034	3,947	3,894	3,807	3,784	3,728
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,102	3,964	3,868	3,701	3,614	3,560	3,472	3,449	3,392
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,855	3,717	3,621	3,453	3,365	3,311	3,221	3,198	3,140
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,664	3,526	3,430	3,261	3,173	3,118	3,027	3,004	2,944
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,512	3,374	3,277	3,108	3,019	2,963	2,871	2,848	2,787
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,388	3,250	3,153	2,983	2,893	2,837	2,744	2,720	2,659
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,285	3,147	3,050	2,879	2,789	2,732	2,638	2,614	2,552
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,199	3,060	2,963	2,792	2,701	2,644	2,549	2,524	2,461
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,125	2,986	2,889	2,717	2,625	2,568	2,472	2,447	2,383
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,061	2,922	2,825	2,652	2,560	2,502	2,405	2,380	2,315
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,005	2,866	2,769	2,596	2,503	2,445	2,347	2,321	2,256
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	2,956	2,817	2,720	2,546	2,452	2,394	2,295	2,270	2,203
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	2,913	2,774	2,676	2,501	2,408	2,349	2,249	2,223	2,156
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,874	2,735	2,637	2,462	2,368	2,308	2,208	2,182	2,114
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,839	2,700	2,602	2,426	2,332	2,272	2,171	2,145	2,076
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,808	2,668	2,570	2,394	2,299	2,239	2,137	2,111	2,041
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,779	2,640	2,541	2,365	2,269	2,209	2,107	2,080	2,010
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,753	2,613	2,515	2,338	2,242	2,182	2,079	2,052	1,981
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,729	2,590	2,491	2,314	2,217	2,157	2,053	2,026	1,954
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,707	2,568	2,469	2,291	2,195	2,133	2,029	2,002	1,930
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,687	2,547	2,448	2,270	2,174	2,112	2,007	1,980	1,907
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,669	2,529	2,430	2,251	2,154	2,092	1,987	1,959	1,886
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,651	2,511	2,412	2,233	2,136	2,074	1,968	1,940	1,866
31	5,549	4,165	3,573	3,234	3,010	2,851	2,635	2,495	2,396	2,217	2,119	2,057	1,950	1,922	1,848
32	5,531	4,149	3,557	3,218	2,995	2,836	2,620	2,480	2,381	2,201	2,103	2,041	1,934	1,905	1,831
33	5,515	4,134	3,543	3,204	2,981	2,822	2,606	2,466	2,366	2,187	2,088	2,026	1,918	1,890	1,815
34	5,499	4,120	3,529	3,191	2,968	2,808	2,593	2,453	2,353	2,173	2,075	2,012	1,904	1,875	1,799
35	5,485	4,106	3,517	3,179	2,956	2,796	2,581	2,440	2,341	2,160	2,062	1,999	1,890	1,861	1,785
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,529	2,388	2,288	2,107	2,007	1,943	1,832	1,803	1,724
50	5,340	3,975	3,390	3,054	2,833	2,674	2,458	2,317	2,216	2,033	1,931	1,866	1,752	1,721	1,639
80	5,218	3,864	3,284	2,950	2,730	2,571	2,355	2,213	2,111	1,925	1,820	1,752	1,632	1,599	1,508
100	5,179	3,828	3,250	2,917	2,696	2,537	2,321	2,179	2,077	1,890	1,784	1,715	1,592	1,558	1,463
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,299	2,157	2,055	1,866	1,760	1,690	1,565	1,530	1,433

Valeurs de F ayant 1% de chances d’être dépassées.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	12	18	24	30	50	60	120
1	4052,185	4999,340	5403,534	5624,257	5763,955	5858,950	5980,954	6055,925	6106,682	6191,432	6234,273	6260,350	6302,260	6312,970	6339,513
2	98,502	99,000	99,164	99,251	99,302	99,331	99,375	99,397	99,419	99,444	99,455	99,466	99,477	99,484	99,491
3	34,116	30,816	29,457	28,710	28,237	27,911	27,489	27,228	27,052	26,751	26,597	26,504	26,354	26,316	26,221
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,799	14,546	14,374	14,079	13,929	13,838	13,690	13,652	13,558
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,289	10,051	9,888	9,609	9,466	9,379	9,238	9,202	9,112
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,102	7,874	7,718	7,451	7,313	7,229	7,091	7,057	6,969
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,840	6,620	6,469	6,209	6,074	5,992	5,858	5,824	5,737
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,029	5,814	5,667	5,412	5,279	5,198	5,065	5,032	4,946
9	10,562	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,467	5,257	5,111	4,860	4,729	4,649	4,517	4,483	4,398
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,057	4,849	4,706	4,457	4,327	4,247	4,115	4,082	3,996
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,744	4,539	4,397	4,150	4,021	3,941	3,810	3,776	3,690
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,499	4,296	4,155	3,910	3,780	3,701	3,569	3,535	3,449
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,302	4,100	3,960	3,716	3,587	3,507	3,375	3,341	3,255
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,140	3,939	3,800	3,556	3,427	3,348	3,215	3,181	3,094
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,004	3,805	3,666	3,423	3,294	3,214	3,081	3,047	2,959
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	3,890	3,691	3,553	3,310	3,181	3,101	2,967	2,933	2,845
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,101	3,791	3,593	3,455	3,212	3,083	3,003	2,869	2,835	2,746
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,705	3,508	3,371	3,128	2,999	2,919	2,784	2,749	2,660
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,631	3,434	3,297	3,054	2,925	2,844	2,709	2,674	2,584
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,564	3,368	3,231	2,989	2,859	2,778	2,643	2,608	2,517
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,506	3,310	3,173	2,931	2,801	2,720	2,584	2,548	2,457
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,453	3,258	3,121	2,879	2,749	2,667	2,531	2,495	2,403
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,406	3,211	3,074	2,832	2,702	2,620	2,483	2,447	2,354
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,363	3,168	3,032	2,789	2,659	2,577	2,440	2,403	2,310
25	7,770	5,568	4,675	4,177	3,855	3,627	3,324	3,129	2,993	2,751	2,620	2,538	2,400	2,364	2,270
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,288	3,094	2,958	2,715	2,585	2,503	2,364	2,327	2,233
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,256	3,062	2,926	2,683	2,552	2,470	2,330	2,294	2,198
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,226	3,032	2,896	2,653	2,522	2,440	2,300	2,263	2,167
29	7,598	5,420	4,538	4,045	3,725	3,499	3,198	3,005	2,868	2,626	2,495	2,412	2,271	2,234	2,138
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,473	3,173	2,979	2,843	2,600	2,469	2,386	2,245	2,208	2,111
31	7,530	5,362	4,484	3,993	3,675	3,449	3,149	2,955	2,820	2,577	2,445	2,362	2,221	2,183	2,086
32	7,499	5,336	4,459	3,969	3,652	3,427	3,127	2,934	2,798	2,555	2,423	2,340	2,198	2,160	2,062
33	7,471	5,312	4,437	3,948	3,630	3,406	3,106	2,913	2,777	2,534	2,402	2,319	2,176	2,139	2,040
34	7,444	5,289	4,416	3,927	3,611	3,386	3,087	2,894	2,758	2,515	2,383	2,299	2,156	2,118	2,019
35	7,419	5,268	4,396	3,908	3,592	3,368	3,069	2,876	2,740	2,497	2,364	2,281	2,137	2,099	2,000
40	7,314	5,178	4,313	3,828	3,514	3,291	2,993	2,801	2,665	2,421	2,288	2,203	2,058	2,019	1,917
50	7,171	5,057	4,199	3,720	3,408	3,186	2,890	2,698	2,563	2,318	2,183	2,098	1,949	1,909	1,803
80	6,963	4,881	4,036	3,563	3,255	3,036	2,742	2,551	2,415	2,169	2,032	1,944	1,788	1,746	1,630
100	6,895	4,824	3,984	3,513	3,206	2,988	2,694	2,503	2,368	2,120	1,983	1,893	1,735	1,692	1,572
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,663	2,472	2,336	2,089	1,950	1,860	1,700	1,656	1,533

Valeurs de F ayant 0,5% de chances d'être dépassées.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	12	18	24	30	50	60	120
1	16212,463	19997,358	21614,134	22500,753	23055,822	23439,527	23923,814	24221,838	24426,728	24765,730	24937,093	25041,401	25212,765	25253,743	25358,051
2	198,503	199,012	199,158	199,245	199,303	199,332	199,376	199,390	199,419	199,449	199,449	199,478	199,478	199,478	199,492
3	55,552	49,800	47,468	46,195	45,391	44,838	44,125	43,685	43,387	42,881	42,623	42,466	42,211	42,150	41,990
4	31,332	26,284	24,260	23,154	22,456	21,975	21,352	20,967	20,705	20,258	20,030	19,892	19,667	19,611	19,469
5	22,785	18,314	16,530	15,556	14,939	14,513	13,961	13,618	13,385	12,985	12,780	12,656	12,454	12,402	12,274
6	18,635	14,544	12,917	12,028	11,464	11,073	10,566	10,250	10,034	9,664	9,474	9,358	9,170	9,122	9,001
7	16,235	12,404	10,883	10,050	9,522	9,155	8,678	8,380	8,176	7,826	7,645	7,534	7,354	7,309	7,193
8	14,688	11,043	9,597	8,805	8,302	7,952	7,496	7,211	7,015	6,678	6,503	6,396	6,222	6,177	6,065
9	13,614	10,107	8,717	7,956	7,471	7,134	6,693	6,417	6,227	5,899	5,729	5,625	5,454	5,410	5,300
10	12,827	9,427	8,081	7,343	6,872	6,545	6,116	5,847	5,661	5,340	5,173	5,071	4,902	4,859	4,750
11	12,226	8,912	7,600	6,881	6,422	6,102	5,682	5,418	5,236	4,921	4,756	4,654	4,488	4,445	4,337
12	11,754	8,510	7,226	6,521	6,071	5,757	5,345	5,085	4,906	4,595	4,431	4,331	4,165	4,123	4,015
13	11,374	8,186	6,926	6,233	5,791	5,482	5,076	4,820	4,643	4,334	4,173	4,073	3,908	3,866	3,758
14	11,060	7,922	6,680	5,998	5,562	5,257	4,857	4,603	4,428	4,122	3,961	3,862	3,697	3,655	3,547
15	10,798	7,701	6,476	5,803	5,372	5,071	4,674	4,424	4,250	3,946	3,786	3,687	3,523	3,480	3,372
16	10,576	7,514	6,303	5,638	5,212	4,913	4,521	4,272	4,099	3,797	3,638	3,539	3,375	3,332	3,224
17	10,384	7,354	6,156	5,497	5,075	4,779	4,389	4,142	3,971	3,670	3,511	3,412	3,248	3,206	3,097
18	10,218	7,215	6,028	5,375	4,956	4,663	4,276	4,030	3,860	3,560	3,402	3,303	3,139	3,096	2,987
19	10,073	7,093	5,916	5,268	4,853	4,561	4,177	3,933	3,763	3,464	3,306	3,208	3,043	3,000	2,891
20	9,944	6,987	5,818	5,174	4,762	4,472	4,090	3,847	3,678	3,380	3,222	3,123	2,959	2,916	2,806
21	9,829	6,891	5,730	5,091	4,681	4,393	4,013	3,771	3,602	3,305	3,147	3,049	2,884	2,841	2,730
22	9,727	6,806	5,652	5,017	4,609	4,322	3,944	3,703	3,535	3,239	3,081	2,982	2,817	2,774	2,663
23	9,635	6,730	5,582	4,950	4,544	4,259	3,882	3,642	3,474	3,179	3,021	2,922	2,756	2,713	2,602
24	9,551	6,661	5,519	4,890	4,486	4,202	3,826	3,587	3,420	3,125	2,967	2,868	2,702	2,658	2,546
25	9,475	6,598	5,462	4,835	4,433	4,150	3,776	3,537	3,370	3,075	2,918	2,819	2,652	2,609	2,496
26	9,406	6,541	5,409	4,785	4,384	4,103	3,730	3,492	3,325	3,031	2,873	2,774	2,607	2,563	2,450
27	9,342	6,489	5,361	4,740	4,340	4,059	3,687	3,450	3,284	2,990	2,832	2,733	2,565	2,522	2,408
28	9,284	6,440	5,317	4,698	4,300	4,020	3,649	3,412	3,246	2,952	2,794	2,695	2,527	2,483	2,369
29	9,230	6,396	5,276	4,659	4,262	3,983	3,613	3,376	3,211	2,917	2,759	2,660	2,492	2,448	2,333
30	9,180	6,355	5,239	4,623	4,228	3,949	3,580	3,344	3,179	2,885	2,727	2,628	2,459	2,415	2,300
31	9,133	6,316	5,204	4,590	4,195	3,918	3,549	3,314	3,149	2,855	2,697	2,598	2,429	2,385	2,269
32	9,090	6,281	5,172	4,559	4,166	3,889	3,521	3,286	3,121	2,828	2,670	2,570	2,401	2,356	2,240
33	9,049	6,248	5,141	4,531	4,138	3,861	3,495	3,260	3,095	2,802	2,644	2,544	2,374	2,330	2,213
34	9,012	6,217	5,113	4,504	4,112	3,836	3,470	3,235	3,071	2,778	2,620	2,520	2,350	2,305	2,188
35	8,976	6,188	5,086	4,479	4,088	3,812	3,447	3,212	3,048	2,755	2,597	2,497	2,327	2,282	2,164
40	8,828	6,066	4,976	4,374	3,986	3,713	3,350	3,117	2,953	2,661	2,502	2,401	2,230	2,184	2,064
50	8,626	5,902	4,826	4,232	3,849	3,579	3,219	2,988	2,825	2,533	2,373	2,272	2,097	2,050	1,925
80	8,335	5,665	4,611	4,028	3,652	3,387	3,032	2,803	2,641	2,349	2,188	2,084	1,903	1,854	1,720
100	8,241	5,589	4,542	3,963	3,589	3,325	2,972	2,744	2,583	2,290	2,128	2,024	1,840	1,790	1,652
120	8,179	5,539	4,497	3,921	3,548	3,285	2,933	2,705	2,544	2,251	2,089	1,984	1,798	1,747	1,606

Pour les grands échantillons, $\dfrac{s_1 - s_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{2n_1}+\dfrac{1}{2n_2}}} \rightarrow \mathrm{N}(0,1)$ avec $s = \sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBE, P., AND LEDOUX, M. Probabilité. *Espace 34. Berlin.* (1998).

[2] BILLINGSLEY, P. Probabilité and measure. *Wiley* (1979).

[3] BOREL, E. Probabilité et certitude. que sais-je ? *No 445 P.U.F* (1950).

[4] DURRETT, R. . Probability : Theory and examples. *Duxbury Press* (2010).

[5] FELLER, W. An introduction to probability theory and its applications. *Vol.I.Wiley* (1991).

[6] FOATA, D., AND FUCHS, A. Calcul des probabilités. *Dunod* (1998).

[7] FREDON, D., MAUMY BERTRAND, M., AND BERTRAND, F. Mathématiques : Statistique et probabilités. *Dunod,Paris* (2004).

[8] LECOUTRE, J. Statistique et probabilités : Cours et exercices corrigées. *Dunod* (2016).

[9] LEJEUNE, M. Statistique - la thèorie et ses applications. *Springer* (2010).

[10] ROSS, S. Initiation aux probabilités. *Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne.* (1976).

[11] SAPORTA, G. Probabilités, analyse des données et statistique. *Editions Teclmip. Paris* (2006).

[12] USPENSKY, J. V. Introduction to mathematical probability. *McGraw-Hill* (1937).

[13] VEYSSEYRE, R. Aide-mémoire : statistique et probabilité pour l'ingénieur. *Dunod, Paris.* (2006).