

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

## Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie électrique

Spécialité : **Commande des systèmes**

*Présenté par*

**HAMADENE Ouiza**

**TAIB Sabrina**

Thème

## **Evaluation des performances d'un système de production avec contraintes de temps de séjour**

*Mémoire soutenu publiquement le 29 /09/ 2016 devant le jury composé de :*

**M. Rabah MELLAH**

MCA, UMMTO, President

**Mme. Aldjia NAIT ABDESLAM**

MAA, UMMTO, Encadreur

**M. Redouane KARA**

MCA, UMMTO, Examineur

**Mme. Ouiza BOUKENDOUR**

MAA, UMMTO, Examineur

# *Remerciements*

*Nous Commençons par remercier Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté de mener ce travail.*

*Nos remerciement et reconnaissances à notre promotrice M<sup>me</sup> A.NAIT ABED ESLAM pour ces précieux conseils et orientations et M<sup>r</sup> R.KARA qui nous à donné des explications afin de mener à bien ce travail.*

*On tient aussi à remercier les membres de jury qui nos feront l'honneur d'évaluer ce travail.*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A ma chère mère, A mon cher père.*

*A mes frères et sœurs.*

*A toute ma famille.*

*A tous mes amis*

*H. Ouïza*

*Je dédie ce modeste travail à:*

*Mes très chers parents, que dieu les bénisse*

*Mon frère Merzouk*

*Mes sœurs Samira et Samia*

*Toute ma grande famille sans exception*

*Tous mes amies sans exception*

**SABRINA**

## Notations

---

SED : système à événements discret.

RdP : réseau de Petri.

GE : graphe d'événements.

GET : graphe d'événements temporisé.

$P$  : ensemble non vide de places d'un réseau de Petri.

$T_r$  : ensemble non vide de transitions d'un réseau de Petri.

$T$  : vecteur colonne des durées de séjour d'un jeton dans les places.

$T^-$  : vecteur colonne des durées minimales de séjour d'un jeton dans les places.

$T^+$  : vecteur colonne des durées maximales de séjour d'un jeton dans les places.

$W$  : matrice d'incidence d'un réseau de Petri.

$W^+$  : matrice d'incidence arrière d'un réseau de Petri.

$W^-$  : matrice d'incidence avant d'un réseau de Petri.

$W_{ij}^-$  : poids de l'arc allant de la place  $P_i$  vers la transition  $x_j$ .

$W_{ij}^+$  : poids de l'arc allant de la place  $x_j$  vers la transition  $P_i$ .

$\bullet x_i$  : ensemble des places situées en amont de la transition  $x_i$ .

$x_i \bullet$  : ensemble des places situées en aval de la transition  $x_i$ .

$\bullet p_i$  : ensemble des transitions situées en amont de la place  $P_i$ .

$p_i \bullet$  : ensemble des transitions situées en aval de la place  $P_i$ .

$\leftarrow x_i$  : l'ensemble des transitions situées en amont de la transition  $x_i$ .

$x_i \rightarrow$  : l'ensemble des transitions situées en aval de la transition  $x_i$ .

$\mathbb{R}_{max}$  : algèbre  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, max, +)$ .

$\overline{\mathbb{R}}_{max}$  : algèbre  $(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, max, +)$ .

$\mathbb{Z}_{min}$  : algèbre  $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, min, +)$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  : algèbre  $(\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}, min, +)$ .

$\oplus$  : Opérateur maximum dans l'algèbre  $(max, +)$ .

$\otimes$  : Addition dans l'algèbre  $(max, +)$ .

$\wedge$  : Opérateur minimum dans l'algèbre  $(min, +)$ .

$\otimes$  : Addition dans l'algèbre  $(min, +)$ .

$x_i(k)$  : variable dateur associée à la transition  $x_i$  d'un graphe d'événements temporisé.

$x_i(t)$  : variable compteur associée à la transition  $x_i$  d'un graphe d'événements temporisé.

---

## Notations

---

$\lambda$ : temps de cycle.

$A^t$ : matrice transposée de la matrice  $A$ .

$I$ : matrice identité.

$L_a$  : produit à gauche par  $a$ ,  $L_a(x) = a \otimes x$

$R_a$  : produit à droite par  $a$ ,  $R_a(x) = x \otimes a$

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Outils algébriques</b>	
Introduction.....	4
1. Les ensembles ordonnés et treillis .....	4
1.1. Relation d'ordre et structure ordonnées .....	4
2. Dioïdes et structures ordonnées .....	7
2.1 Notion de base sur les dioïde .....	7
2.2. Relation d'ordre dans un dioïde.....	8
2.3. Dioïde et treillis .....	9
2.4. Application définies sur les dioïde .....	10
3. Dioïde matriciels .....	11
3.1. Opérations sur les matrices.....	11
4. Résolution d'équations dans un dioïde .....	12
4.1. Théorie de la résiduation .....	13
4.2. Applications Résiduables sur les dioïdes complet (Résolution de $ax \leq b$ ) .....	13
4.3. Extension aux dioïdes de matrices : $AX \leq B$ .....	14
4.4. Equations aux points fixes .....	15
4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene.....	16
5. Programmation linéaire .....	17
5.1. Systèmes d'inégalités linéaires.....	17
5.2. Problème de la programmation linéaire .....	17
Conclusion.....	18
<b>Chapitre 2 : Modélisation des GET et P-temporels</b>	
Introduction.....	19
1. Généralités sur les systèmes à événements discrets (SED) .....	19
1.1 Classes de systèmes.....	19
2. Les Réseaux de Petri(Rdp) .....	20
2.1 Définition et notions de base : .....	20
2.3 Franchissement d'une transition :.....	21
2.4 Concurrence et synchronisation dans les Rdp .....	22
2.5 Quelques Propriétés d'un Rdp : .....	23

---

# Table des matières

---

2.6 Les classe de réseaux de Petri .....	25
3. Graphe d'événements temporisés (GET) .....	26
3.1 Fonctionnement d'un graphe d'événements.....	26
3.1.1 Fonctionnement au plus tôt d'un GET .....	26
3.1.2 Fonctionnement FIFO .....	27
3.2 Modélisation des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre (max; +).....	27
3.2.1 Equations aux dateurs .....	27
3.2.2 Forme explicite " ARMA " .....	29
4. Graphes d'événements temporels.....	31
Graphes d'événements T-temporels .....	31
4.1 Graphes d'événements P-temporels (GDE P-temporels).....	32
4.2 Inéquations d'un graphe d'événements P-temporel .....	33
4.3 Modèle de type dateur de GE P-temporels dans l'algèbre conventionnelle .....	34
Conclusion.....	36

## Chapitre 3 : Evaluation des performances

Introduction : .....	37
1. Rappel de la théorie des graphes .....	37
2. Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices .....	40
3. Eléments de la théorie spectrale .....	41
4. Calcul de la valeur propre en utilisant la théorie des graphes .....	41
5. Evaluation de performances des Graphes d'événements dans l'algèbre standard.....	43
5.1 Evaluation de performances des GET dans l'algèbre standard.....	44
5.2 Evaluation de performances des GDE P-temporels dans l'algèbre standard.....	45
5.2.1 La méthode graphique de calcul de temps de cycle d'un GDE P-temporels :.....	45
5.2.2 Approche pour l'évaluation de performances des GDE P-temporels .....	46
6. Le calcul du temps de cycle d'un graphe d'événements P-temporel .....	48
6.1 Obtention de modèle Algébrique sous forme $Ax \leq b$ .....	48
6.2 Exemple d'application .....	49
Conclusion.....	55
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>56</b>

---

# Introduction générale

---

Les Systèmes (Dynamiques) à Événements Discrets (SED) désignent des systèmes généralement de conception humaine. Leur évolution obéit à l'apparition d'événements qui ont lieu à des instants discrets. Les systèmes de production, les réseaux de transport et les systèmes informatiques sont, par exemple, des processus que l'on peut considérer comme des systèmes à événements discrets. Pour ces systèmes, se posent, entre autres, deux types de problèmes :

## **L'évaluation de performances :**

Ex : calculer le taux de production ou le niveau d'en-cours d'un système de production, déterminer le débit maximum d'un réseau informatique pour un protocole particulier...

## **L'optimisation de système :**

Ex : calculer un ordonnancement de tâches qui optimise un critère donné, déterminer l'allocation optimale de ressources (moyens de transports, machines, processeurs...) pour une performance souhaité

De façon informelle, les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dans lesquels les variables d'état changent sous l'occurrence d'événements. Ils ne peuvent généralement pas être décrits, à l'instar des systèmes continus classiques, par des équations différentielles en raison de la nature des phénomènes qui entrent en jeu, notamment des phénomènes de synchronisation ou d'exclusion mutuelle. Ces systèmes sont alors souvent représentés par des modèles états-transitions. Les plus connus sont les automates d'états finis qui servent pour représenter les systèmes déterministes les plus simples, les chaînes de Markov pour leur analogues stochastiques et les réseaux de Petri pour des systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation, de concurrence et de parallélisme.

Parmi les différents formalismes, Les réseaux de Petri, représentent un formalisme puissant et reconnu pour la modélisation et l'analyse des systèmes à événements discrets. Dans un souci de tenir compte de manière efficace aussi bien des différentes fonctionnalités du système, que de ses caractéristiques temporelles de manière explicite, de nombreuses extensions des réseaux de Petri ont été proposées dans la littérature. Les extensions déterministes peuvent se regrouper en deux grandes classes distinctes : les modèles temporisés, où les attributs temporels sont des valeurs ponctuelles, et les modèles

# Introduction générale

---

temporels où ces derniers attributs prennent la forme d'intervalles de temps pouvant traduire des plages de faisabilité aussi bien que des incertitudes sur le procédé.

Indépendamment du domaine des réseaux de Petri, une théorie a considéré les structures des semi-anneaux au début des années 80. La structure la plus connue est celle des semi-anneaux idempotents également appelés dioïdes qui permettent de décrire et d'analyser différents problèmes traités par la théorie des graphes de manière unifiée. Appliquée aux graphes d'événements temporisés et temporel, l'évolution de l'état est représentée sous la forme d'équations de récurrence qui utilisent des opérateurs  $(\max, +)$  ou alors  $(\min, +)$  et qui sont donc non-linéaires. Mais traduite dans cette structure de dioïde, cette représentation devient linéaire. La représentation est alors dite  $(\max, +)$ -linéaire, dans le cas du dioïde  $(\max, +)$ . L'algèbre des dioïdes est donc apparue comme une structure mathématique adéquate pour modéliser et étudier cette classe de systèmes.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif d'évaluer les performances des systèmes à événement discrets modélisé par un GET et GEP-temporel, on s'intéresse au calcul de deux indicateurs de performances : temps de cycle et le taux de production. L'objectif de ce travail est d'étudier les performances d'un système à événement discret modélisé par un graphe d'événement P-temporel représentant une cellule de Production des pots de peinture.

Les lignes directrices des trois chapitres de ce mémoire, ainsi que son organisation sont Présentés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous exposons un ensemble de concepts et d'outils mathématiques importants pour le traitement du problème posés dans ce mémoire. Dans une première partie, sont passés en revue les concepts et les fondements de base des treillis et des dioïdes. Ensuite les méthodes de résolution d'équations dans les dioïdes.

Le deuxième chapitre se porte sur les réseaux de Petri en général, on étudie ainsi les RdP temporisé et temporels. Nous présentons ainsi une alternative à l'algèbre des dioïdes pour modéliser les graphes d'événements P-temporels au moyen d'un système d'inégalités dans l'algèbre conventionnelle. Exploitant ce modèle, nous montrons que nous pouvons analyser les performances du système. La technique sera d'associer à ces graphes un problème de programmation linéaire.

## Introduction générale

---

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse de performances des graphes d'événements P-temporels. Nous utilisons le modèle de la forme  $Ax \leq b$  pour évaluer et analyser les performances des graphes d'événements P-temporels. Pour cela, considérant un comportement 1-périodique, l'application du lemme de Farkas permettra la détermination des bornes encadrant le temps de cycle. On termine par une conclusion générale.

**Introduction**

Ce premier chapitre a pour objectif d'explicitier les outils algébriques utilisés dans ce mémoire. Dans un premier temps, nous introduisons les notions de base relative aux ensembles ordonnés, la théorie des treillis. Ensuite, nous présenterons les dioïdes, également appelés semi-anneaux idempotents, qui sont liés à la théorie des treillis. Cela vient du fait, comme nous allons le voir, qu'un dioïdes peut être considéré comme un sup-demi-treillis. Enfin nous présentons les techniques propres aux dioïdes permettant de résoudre des équations. La première est la théorie de la résiduation qui est une alternative aux problèmes d'inversion d'application isotones définie sur les dioïdes. La seconde est l'étoile de Kleene qui concerne les équations au point fixe, ensuite la résolution des équations d'inégalité linéaire en utilisant la technique de la programmation linéaire.

**1. Les ensembles ordonnés et treillis [1]**

On rappelle dans cette partie certaines définitions et propriétés de base relatives aux ensembles ordonnés et notamment aux treillis.

Un ensemble ordonné est un ensemble  $E$  muni d'une relation d'ordre, c.-à-d. une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Cette relation notée  $\leq$  et un ensemble ordonné sera noté simplement  $(E, \leq)$ .

**1.1. Relation d'ordre et structure ordonnées****Définition 1.1. (Relation d'ordre)[1]**

Considérons l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , on peut définir les deux relations suivantes : soit  $a, b \in \mathbb{N}$

$a \leq b$  : relation d'ordre habituelle

$a \mid b$  :  $a$  divise  $b$

Ces deux relations présentent des propriétés communes :

*réflexivité*  $a \leq a$  et  $a \mid a$

*antisymétrie*  $\begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq a \text{ alors } a = b \\ \text{si } a \mid b \text{ et } b \mid a \text{ alors } a = b \end{cases}$

$$\text{transitivité} \begin{cases} \text{si } a \leq b \text{ et } b \leq c \text{ alors } a \leq c \\ \text{si } a \text{ div } b \text{ et } b \text{ div } c \text{ alors } a \text{ div } c \end{cases}$$

On dit alors que les relations  $a \leq b$  et  $a \text{ div } b$  sont des relations d'ordre.

**Définition 1.2. (Ensembles ordonnés).** Un ensemble  $E$  ordonné, est un ensemble muni d'une relation d'ordre, notée  $(E, \preceq)$ .

Cet ensemble est dit totalement ordonné si  $\preceq$  est une relation d'ordre totale, c'est-à-dire si deux éléments quelconques  $x$  et  $y$  de  $E$  sont comparables ( $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$ ). Dans le cas contraire, l'ordre est partiel et l'ensemble est dit partiellement ordonné.

**Définition 1.3. (Ordre partiel).** Soit un ensemble ordonné  $(E, \preceq)$ . S'il existe deux éléments  $x, y \in E$  tels que  $x$  et  $y$  sont non-comparables, alors la relation d'ordre  $\preceq$  est partielle. On dit aussi que  $(E, \preceq)$  est partiellement ordonnée.

**Exemple 1.1 :**

Soit l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}^*$ . La relation d'ordre  $\leq$  est définie comme suit :

$x \leq y$  si et seulement si,  $x$  divise  $y$ .

Il est clair alors que  $(E, \preceq)$  est partiel ( $5 \not\preceq 7$ ) car 5 n'est pas divisible par 7 dans  $\mathbb{N}^*$  et inversement)

**Définition 1.4. (Ordre total) :** Un ensemble  $E$  est totalement ordonné si pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $E$ ,  $x \preceq y$  ou  $y \preceq x$

**Exemple 1.2. (Ensembles ordonnés)**

On présente ici quelques exemples d'ensembles munis d'une relation d'ordre.

– L'ensemble  $(\mathbb{N}, \preceq)$  est totalement ordonné.

– La relation d'ordre  $\parallel$  définie dans  $\mathbb{N}$  est partielle. En considérant cette relation, on a par exemple  $3 \parallel 5$  :

– L'ensemble  $(\mathbb{N}^{2 \times 2}, \leq)$  est partiellement ordonné bien que  $(\mathbb{N}, \leq)$  le soit totalement.

On peut aisément le remarquer en considérant les deux éléments suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.5.(Majorant, minorant).** Soit  $E$  un ensemble ordonné muni d'une relation d'ordre  $\leq$ . On peut définir certains éléments particuliers:

**Majorant :**  $M$  est un majorant de  $A \subset E$  si  $\forall a \in A, a \leq M$  on dit alors que  $A$  est une partie majorée de  $E$ .

**Minorant :**  $m$  est un minorant de  $A \subset E$  si  $\forall a \in A, m \leq a$  on dit alors que  $A$  est une partie minorée de  $E$ .

**Définition 1.6. (Borne d'un ensemble).** Un sous-ensemble  $A \subset E$  est dit borné s'il admet un majorant et un minorant.

**Remarque 1.1 :(Bornes d'un ensemble)** Lorsqu'il existe, le plus petit majorant d'un ensemble  $F \subset E$  est souvent appelée borne *sup* de  $F$  et est notée  $\sup(F)$ . De même, lorsqu'il existe, le plus grand minorant de  $F$  est appelée borne *inf* de  $F$  et est notée  $\inf(F)$ . Lorsque ces bornes sont définies, tout majorant de  $F$  est plus grand que  $\sup(F)$  et tout minorant de  $F$  est plus petit que  $\inf(F)$ .

## 1.2. Demi-treillis et treillis

Parmi les ensembles ordonnés, il existe une classe particulièrement riche de propriétés : les treillis. En effet, les treillis établissent le lien entre les ensembles ordonnés et les structures algébriques.

**Définition 1.7 (Demi-treillis).** Un ensemble ordonné  $(E, \leq)$  est un sup-demi-treillis si toute partie de deux éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $E$  admet une plus petite borne supérieure (plus petit majorant)  $b$ . On notera  $b = x_1 \vee x_2$ . Duale,  $E$  est un inf-demi-treillis si toute partie  $\{x_1, x_2\}$  de  $E$  admet une plus grande borne inférieure (plus grand minorant)  $a = x_1 \wedge x_2$ .

**Définition 1.8 (Un treillis).** est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure, c'est-à-dire qu'étant donné deux éléments  $x$  et  $y$ , l'ensemble des majorants communs de  $x$  et  $y$  et l'ensemble de leurs minorants communs n'est pas vide et admet un maximum noté  $\vee$  et un minimum noté  $\wedge$ .

L'ensemble ordonné  $(E, \leq)$  est un treillis si c'est à la fois un demi-treillis supérieur et un demi-treillis inférieur [1]

**Définition 1.9. (Treillis complet).** Un ensemble  $(E, \leq)$  est dit complet s'il est, à la fois sup-demi-treillis complet et inf-demi treillis complet.

**Exemple 1.3.** Le treillis  $(\mathbb{N}, \vee, \wedge)$  n'est pas complet.  $(\mathbb{N} \cup \{+\infty, -\infty\}, \vee, \wedge)$  est un treillis complet.

**Remarque 1.2.** Tout treillis fini est complet.

## 2. Dioïdes et structures ordonnées [3]

Le concept de dioïde, ou demi-anneau idempotent, a été formalisé dans les années 70 et a depuis suscité des études et des applications de plus en plus poussées.

### 2.1 Notion de base sur les dioïdes

**Définition 1.10. (Monoïde).**  $(\mathcal{M}, \oplus)$  est un monoïde si  $\oplus$  est une loi interne, associative, et admettant un élément neutre  $\varepsilon$  ( $\forall m \in \mathcal{M}, m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m$ ). Si la loi  $\oplus$  est commutative, le monoïde est dit commutatif.

**Remarque 1.3 :** Dans un monoïde, on appellera parfois loi "additive", la loi  $\oplus$ .

**Définition 1.11. (Monoïde ordonné).** Un monoïde  $(\mathcal{M}, \oplus)$  est dit ordonné lorsqu'on peut définir sur  $\mathcal{M}$  une relation d'ordre  $\leq$  compatible avec la loi  $\oplus$ , c'est-à-dire telle que  $\forall a, b, c \in \mathcal{M}, a \leq b \Rightarrow a \oplus c \leq b \oplus c$ .

**Définition 1.12. (Monoïde idempotent)[4]**

Un monoïde  $(\mathcal{M}, \oplus)$  est dit idempotent si la loi  $\oplus$  est commutative, associative et idempotente c'est-à-dire, si elle vérifie :

$$\forall a \in \mathcal{M}; a \oplus a = a$$

**Définition 1.13. (Dioïde ou Semi-anneau idempotent).** On appelle semi-anneau un ensemble  $D$  muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$  telles que :

- $(D, \oplus)$  est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est noté  $\varepsilon$ .
- $(D, \otimes)$  est un monoïde (l'élément neutre noté  $e$ ).
- L'élément  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  ( $\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ )
- Le produit est distributif sur la somme à gauche et à droite :

$$\forall a, b, c \in D, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

$$et(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).$$

- Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un semi-anneau. Si la loi  $\oplus$  est idempotente alors  $(D, \oplus, \otimes)$  est appelé dioïde (ou encore semi-anneau idempotent).

Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est un demi-anneau tel que le monoïde  $(D, \oplus)$  est idempotent.

Si la loi  $\otimes$  est commutative, alors le dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est commutatif.

**Exemple 1.4.**

- L'ensemble  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , muni de  $\oplus$  et  $\otimes$  correspondant respectivement à l'opération *max* et à l'addition usuelle, est un dioïde noté  $\mathbb{R}_{max}$ . Classiquement, ce dioïde est appelé algèbre  $(max, +)$  avec  $e = 0$  et  $\varepsilon = -\infty$ .

De même, on définit l'algèbre  $(min, +)$  comme le dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$  où  $\oplus$  et  $\otimes$  coïncident respectivement avec l'opérateur *min* et l'addition usuelle,  $e=0$  et  $\varepsilon = +\infty$ .

**Exemple 1.5. (Algèbres  $(max,+)$ )**  $\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty, max, +\})$  est un dioïde commutatif complet pour lequel  $\varepsilon = -\infty, e = 0$ , et  $T = +\infty$ . L'ordre  $\preceq$  associé à  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  est total et coïncide avec l'ordre naturel  $\leq$ .

**2.2. Relation d'ordre dans un dioïde.**

Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , la propriété d'idempotence de la loi additive  $\oplus$  induit une relation d'ordre, notée  $\preceq$  définie par :  $\forall (a, b) \in D^2, a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b$ . De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de  $D$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \forall (a, b, c) \in D^3, a \preceq b &\Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c, \\ a \preceq b &\Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c. \end{aligned}$$

**Remarque.1.4.** L'ordre  $\preceq$  définie dans  $\mathbb{R}_{max}$  est total et coïncide avec l'ordre usuel  $\leq$ . En revanche l'ordre total  $\preceq$  définie dans  $\mathbb{R}_{min}$  coïncide avec l'inverse de l'ordre usuel  $\geq$ .

**Exemple.1.6** La relation  $\preceq$ , associé à l'application *max* est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel  $\leq$ .

$$(1 \preceq 3) \Leftrightarrow 3 = max(1,3) \Leftrightarrow a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b, 1 \leq 3.$$

La relation  $\preceq$ , associé à l'application *min* est une relation d'ordre qui correspond à l'ordre usuel  $\geq, a \preceq b \Leftrightarrow a \geq b$

$$(1 \preceq 3) \Leftrightarrow 1 = min(1,3) \Leftrightarrow 3 \geq 1.$$

**2.3. Dioïde et treillis [5]**

Un dioïde a une structure de demi-treillis supérieur du fait de la relation d'ordre induite par la loi additive. Dans un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$ , cette borne supérieure, traditionnellement notée  $v$ , correspond à la loi additive  $\oplus$  (tout couple  $(a, b) \in D$  admet  $a \oplus b$  comme borne supérieure).

Un dioïde possède donc une structure de treillis. On peut donc appliquer directement aux dioïdes les résultats sur les treillis.

**Définition 1.14. (Dioïde complet) [3]** Un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  est complet si :

- il est fermé pour les sommes infinies.
- la loi  $\otimes$  distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout  $a \in D$  et tout sous-ensemble  $B \subseteq D$ .

$$a \otimes \left( \bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{b \in B} (a \otimes b) \quad \text{Et} \quad \left( \bigoplus_{b \in B} b \right) \otimes a = \bigoplus_{b \in B} (b \otimes a).$$

Un dioïde complet admet un élément maximum  $\bigoplus_{a \in D} a$ , que l'on notera  $T$  pour "Top".

L'élément  $T$  est absorbant pour l'addition, autrement dit,  $\forall a \in D, T \oplus a = T$ .

Un dioïde  $D$  est dit complet si, dans ce dioïde, toute somme finie ou infinie d'éléments est définie et telle que la distributivité (à droite et à gauche) de  $\otimes$  par rapport à  $\oplus$  s'étende aux sommes infinies.  $\forall A \subset D, \forall B \subset D$  et  $\forall b \in D$ , on a :

$$\left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes b = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes b)$$

$$b \otimes \left( \bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} (b \otimes a)$$

On en déduit que

$$\left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes \left( \bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} (a \otimes b)$$

**Définition 1.15. (Sous dioïde).** Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde, Un sous-ensemble  $C \subset D$  est dit sous-dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  si et seulement si :

- $\varepsilon, e \in C$
- $C$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ , c'est-à-dire,

$$\forall a, b \in C, a \oplus b \in C \text{ et } a \otimes b \in C.$$

**2.4. Application définies sur les dioïde [2]**

Dans cette section, on met en évidence certaines propriétés concernant les applications définies sur des ensembles ordonnés et plus précisément sur des dioïdes.

**Définition 1.16. (Isotonie, Antitonie).** Soit  $f$  une application définie d'un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(C, \oplus, \otimes)$

$f$  est dite isotone si :  $\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$ .

$f$  est dite antitone si :  $\forall a, b \in D, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$ .

**Remarque.1.5.** Une application  $f$  est dit **monotone** si elle est **isotone** ou **antitone**. L'isotonie et l'anti tonie sont des notions utilisées pour caractériser les applications respectivement croissantes et décroissantes, définie sur des ensembles ordonnés.

**Définition 1.17. (Application injective, surjective et bijective).**

Soit  $f$  une application définie d'un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $\mathcal{C}, \oplus, \otimes$ .

- $f$  est injective si  $\forall a, b \in \mathcal{D}, f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$ .
- $f$  est surjective si  $\forall a, b \in \mathcal{C}, \exists a \in \mathcal{D}, f(a) = b$ .
- $f$  est bijective si elle à la fois injective et surjective.

**Définition 1.18. (Homomorphisme).** Une application  $f$  définie d'un dioïde  $D$  dans un dioïde  $C$  est un homomorphisme si :  $\forall a, b \in D$ :

$$f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon \qquad f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e$$

Une application qui vérifie la propriété

$$f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon \text{ Sera appelée } \oplus\text{-morphisme.}$$

Aussi, une application qui ne vérifie que la propriété

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e \text{ sera appelée } \otimes\text{-morphisme. Un homomorphisme est donc } \oplus\text{-morphisme et } \otimes\text{-morphisme.}$$

**Définition 1.19. (Isomorphisme).** Une application  $f$  est dite isomorphisme si et seulement si : l'application  $f$  est un **homomorphisme** et  $f$  est **bijective**.

**Définition 2.20. (Continuité).[1]** Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux dioïdes complets. Une application  $F$  de  $D$  dans  $C$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), respectivement semi-continue supérieurement (s.c.s.) si, pour tout sous-ensemble  $B \subseteq D$ ,

$$f\left(\bigoplus_{x \in B} x\right) = \bigoplus_{x \in B} f(x)$$

Respectivement,

$$f(\bigwedge_{x \in B} x) = \bigwedge_{x \in B} f(x)$$

- $F$  est dite continue si elle est à la fois s.c.i et s.c.s

$$a \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \oplus b \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \Leftrightarrow f(a) \geq f(b) \\ b = a \wedge b \Rightarrow f(b) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \Leftrightarrow f(b) \leq f(a) \end{cases}$$

**Définition.1.21. (Linéarité).** Une application  $f$  d'un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  dans un dioïde  $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$  est dit linéaire si elle satisfait les propriétés d'additivité et d'homogénéité :

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \forall \alpha \in \mathcal{D}, f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad (\text{Additivité})$$

$$f(\alpha a) = \alpha f(a) (\text{Homogénéité}).$$

La combinaison des deux conditions mentionnées est connue sous le nom de principe de Superposition, soit :

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{D}, f(\alpha a \oplus \beta b) = \alpha f(a) \oplus \beta f(b).$$

### 3. Dioïde matriciels [1]

#### 3.1. Opérations sur les matrices

Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde, on note  $D^{n \times n}$  l'ensemble des matrices carrées de dimension  $n$  à coefficients dans  $\mathcal{D}$ . La somme et le produit de matrices sont définies par :

$$\text{La somme } A \oplus B: (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij},$$

$$\text{Le produit } A \otimes B: (A \otimes B)_{ij} = A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

On peut montrer que l'ensemble  $D$  muni de deux opérations est un dioïde matriciel, dont l'élément nul noté  $\varepsilon$ , est la matrice composée exclusivement de  $\varepsilon$ . L'élément unité est la matrice noté  $Id_n$  composée de  $e$  sur la diagonale et de  $\varepsilon$  ailleurs.

**Exemple 1.8 [4]** Nous donnons ici un exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre  $(\max, +)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

**Somme de deux matrices carrées.**

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max[3,1] & \max[7,6] \\ \max[4,2] & \max[5,8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

**Produit de deux matrices carrées**

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max[3 + 1, 7 + 2] & \max[3 + 6, 7 + 8] \\ \max[4 + 1, 5 + 2] & \max[4 + 6, 5 + 8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

En général, la multiplication des matrices dans  $D^{n \times n}$  n'est pas commutative, même si  $(D, \oplus, \otimes)$  est commutative.  $D^{n \times n}$  est distributif si  $D$  l'est.  $A \succcurlyeq B$  dans  $D^{n \times n} \Leftrightarrow \{A_{ij} \succcurlyeq B_{ij} \text{ dans } D, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}$ .

**Exemple 1.9.** : Exemple d'un produit et une somme de deux matrices carrées dans l'algèbre  $(\min, +)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \min[3,1] & \min[7,6] \\ \min[4,2] & \min[5,8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \min[3 + 1, 7 + 2] & \min[3 + 6, 7 + 8] \\ \min[4 + 1, 5 + 2] & \min[4 + 6, 5 + 8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

#### 4. Résolution d'équations dans un dioïde [6]

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution d'équation de type

$$f(x) = b, \quad b \in D$$

Les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  n'étant pas inversibles, en particulier dans les applications matricielle. Il n'est pas possible, en général d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde, alors la résolution de l'équation pose un problème d'inversion d'application. La théorie de la résiduation permet cependant de définir des pseudo-inverses pour des applications définies sur des dioïdes. Par conséquent, elle permet d'établir, lorsqu'elles existent des solutions extrêmes de l'équation précédente. On s'intéresse donc à la plus grande solution de l'inéquation  $f(x) \preccurlyeq b$  ou la plus petite solution de l'inéquation  $f(x) \succcurlyeq b$ .

**4.1. Théorie de la résiduation [6]**

**Définition 1.22. (Applications Résiduables et sa résidée).** Une application isotone  $f$  définie par  $f: (D, \leq) \rightarrow (C, \leq)$ . L'application  $f$  est dite résiduable, si pour tout  $b \in C$  l'équation  $f(x) \leq b$  admet une plus grande solution dans  $D$ . L'application résiduée  $f^\#$  est définie par  $f^\#(b) = \bigoplus \{x \in D \mid f(x) \leq b\}$

**4.2. Applications Résiduables sur les dioïdes complet (Résolution de  $ax \leq b$  et  $xa \leq b$ ) [5]**

Les applications,  $L_a$  (multiplication à gauche) et  $R_a$  (multiplication à droite)

Sur un dioïde  $D$  complet sont définies comme suit :

$$R_a : x \rightarrow a \oplus x$$

$$L_a : x \rightarrow a \otimes x$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a$$

Le fait que le dioïde  $D$  soit complet implique que les applications  $L_a$  et  $R_a$  sont semi-continues inférieurement (distributivité de  $\otimes$  à gauche et à droite sur  $\oplus$  pour des ensembles finis ou infinis).

En outre, comme  $\varepsilon$  est absorbant pour  $\otimes$ , alors  $L(\varepsilon) = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  et  $R(\varepsilon) = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ . On peut donc considérer  $L_a^\#$  et  $R_a^\#$  les applications résiduées respectivement de  $L_a$  et  $R_a$  qui sont définies par :

$$L_a^\#(b) = \bigoplus \{x \mid L(x) = a \otimes x \leq b\} = \frac{b}{a} \equiv a/b$$

$$R_a^\#(b) = \bigoplus \{x \mid R(x) = x \otimes a \leq b\} = \frac{b}{a} \equiv a/b$$

L'ensemble de propriétés concernant les applications  $L_a$  et  $R_a$  sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned}
a \bowtie \top &= \top & \top \not\bowtie a &= \top, \\
a(a \bowtie x) &\preceq x & (x \not\bowtie a)a &\preceq x, \\
a \bowtie (ax) &\succeq x & (xa) \not\bowtie a &\succeq x, \\
a(a \bowtie (ax)) &= ax & ((xa) \not\bowtie a)a &= xa, \\
a \bowtie (a(a \bowtie x)) &= a \bowtie x & ((x \not\bowtie a)a) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a, \\
a \bowtie (x \wedge y) &= a \bowtie x \wedge a \bowtie y & (x \wedge y) \not\bowtie a &= x \not\bowtie a \wedge y \not\bowtie a, \\
a \bowtie (x \oplus y) &\succeq (a \bowtie x) \oplus (a \bowtie y) & (x \oplus y) \not\bowtie a &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (y \not\bowtie a), \\
(a \wedge b) \bowtie x &\succeq (a \bowtie x) \oplus (b \bowtie x) & x \not\bowtie (a \wedge b) &\succeq (x \not\bowtie a) \oplus (x \not\bowtie b), \\
(a \oplus b) \bowtie x &= a \bowtie x \wedge b \bowtie x & x \not\bowtie (a \oplus b) &= x \not\bowtie a \wedge x \not\bowtie b, \\
(ab) \bowtie x &= b \bowtie (a \bowtie x) & x \not\bowtie (ba) &= (x \not\bowtie a) \not\bowtie b, \\
(a \bowtie x)b &\preceq a \bowtie (xb) & b(x \not\bowtie a) &\preceq (bx) \not\bowtie a, \\
b(a \bowtie x) &\preceq (a \not\bowtie b) \bowtie x & (x \not\bowtie a)b &\preceq x \not\bowtie (b \bowtie a),
\end{aligned}$$

### 4.3. Extension aux dioïdes de matrices : $AX \preceq BetXA' \preceq B'$

Concernant le cas matriciel, définissons comme suit les applications produit à gauche  $L_A : D^{n \times p} \rightarrow D^{m \times p}$  et produit à droite  $R_A : D^{n \times p} \mapsto D^{m \times p}$  sur les dioïdes de matrices à coefficients dans le dioïde complet  $D$  :

$$L_A : X \mapsto A \otimes X,$$

$$R_A : X \mapsto X \otimes A'.$$

Dans ces applications.  $A \in D^{m \times n}$  et  $A' \in D^{n \times m}$ .

Les plus grandes solutions des inéquations  $AX \preceq BetXA' \preceq B$  pour lesquelles

$B \in D^{m \times p}$  et  $B' \in D^{p \times m}$  sont respectivement la résiduée du produit à gauche notée  $L_A^\#(B) = A \bowtie B$  et la résiduée du produit à droite notée  $R_{A'}^\#(B') = B' \not\bowtie A'$ . Les valeurs de ces matrices sont alors données comme suit :

$$L_A^\#(B) = A \bowtie B : (A \bowtie B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m A_{ki} \bowtie B_{kj}$$

$$R_{A'}^\#(B') = B' \not\circ A' : (B' \not\circ A')_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m B'_{ik} \not\circ A'_{jk}$$

**Remarque.1.6.** En toute rigueur, seul le produit de matrices carrées constitue une application résiduable. Cependant, il est toujours possible de réécrire les applications  $L_A$  et  $R_A$  dans le dioïde de matrices  $D^{q \times q}$  pour lequel  $q = \max(m, n, p)$ .

Les lignes et colonnes doivent alors être complétées par l'élément  $\varepsilon$ , ce qui peut compliquer les écritures.

#### 4.4. Equations aux points fixes

Grâce à leur structure de treillis, il est possible d'appliquer aux dioïdes les résultats concernant les points fixes d'applications définies sur des treillis. Par la suite, nous différencions les applications isotones des applications antitones. Ainsi, des équations de type  $f(x) = x$  peuvent être résolues.

**Définition 1.23. (L'ensemble des points fixes d'une application).** Soit  $f$  une application isotone définie sur un dioïde complet  $D$ . Les ensembles des points fixes, post-fixes et préfix d'applications sont respectivement définie comme suit :

$$\mathcal{F}_f = \{x \in D \mid f(x) = x\},$$

$$\mathcal{P}_f = \{x \in D \mid f(x) \geq x\},$$

$$\mathcal{Q}_f = \{x \in D \mid f(x) \leq x\}.$$

Notons que les ensembles des point post-fixe  $\mathcal{P}_f$  peuvent être interprétés dans  $\mathcal{Q}_f$  selon les équivalences suivantes:

$$f(x) \geq x \Leftrightarrow f(x) \oplus x = x,$$

$$f(x) \leq x \Leftrightarrow f(x) \oplus x = x.$$

#### 4.5. Résolution d'équation par étoile de Kleene

##### Définition 1.24. (Etoile de Kleene)

Soit  $*$  l'opérateur défini sur un dioïde  $(D, \oplus, \otimes)$  par  $\forall a \in D, a^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$ , avec  $a^0 = e$

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre  $\leq$  par l'implication suivante :

$$\forall a, b \in D, \text{ si } a \leq b, \text{ alors } a^* \leq b^*.$$

De la même façon que pour un dioïde de scalaires, l'étoile d'une matrice carrée  $A \in D^{n \times n}$  notée  $A^*$  est définie par  $A^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A^i$  avec par convention  $A^0 = I_n$ .

L'étoile de Kleene possède certaines propriétés dont les plus courantes ont été regroupées si dessous. Ces propriétés sont valables  $\forall a, b \in D$ .

$$(a^*)^* = a^* \quad (1)$$

$$a^* a = a a^* \quad (2)$$

$$a(b a)^* = (ab)^* a \quad (3)$$

$$(a b^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (4)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* b)^* a^* = a^* (b a^*)^* = (a^* b^*)^* \quad (5)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \quad (6)$$

Lorsque  $D$  est commutatif :

$$(a \oplus b)^* = a^* b^*$$

On note "+" l'opérateur défini dans un dioïde complet  $(D, \oplus, \otimes)$  par :

$$a \in D, \quad a^+ = \bigoplus_{n \geq 1} a$$

On a:

$$a^* = e \oplus a^+ \text{ et } a^+ = a \otimes a^*$$

Les propriétés regroupées ci-dessus sont vérifiées pour tout dioïde complet, y compris matriciel.

## 5. Programmation linéaire [4]

Une des formes de programmation mathématique les plus étudiées est la programmation linéaire qui correspond au cas où  $f(x)$  est une fonction linéaire de  $n$  variables et où le domaine  $D$  est déterminé par un ensemble fini d'inégalités linéaires.

**5.1. Systèmes d'inégalités linéaires.**

Soit  $A$  une matrice réelle ayant  $m$  lignes et  $n$  colonnes et  $\in \mathbb{R}^m$ . Nous noterons  $O_n$  le vecteur ayant toutes ses composantes nulles. Alors le système  $Ax \leq b$  est appelé un système d'inégalités linéaires et le système  $Ax = b$  est appelé un système d'équations linéaires. Soient  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{O_n\}$  et  $a_0 \in \mathbb{R}$ . On appelle demi-espace de  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble des points  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \leq a_0\}$ .

Un polyèdre  $P$  est un ensemble de points de  $\mathbb{R}^n$  engendré par l'intersection d'un nombre fini

de demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$ . D'une manière équivalente,  $P$  est l'ensemble des solutions d'un système d'inégalités linéaires, c'est-à-dire :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

Où  $A$  est une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes, et  $b$  un vecteur à  $m$  composantes. Nous dirons alors que le système  $Ax \leq b$  détermine (définit ou caractérise) le polyèdre.

**5.2. Problème de la programmation linéaire [7]**

Dans le cas où la fonction  $f(x)$  à minimiser (ou à maximiser) est linéaire et que toutes les contraintes  $h_j(x)$  sont linéaires, la méthode de résolution appropriée est la programmation Linéaire. Le problème se pose sous la forme suivante :

$$\min_x f(x) = cx$$

Sujet à :

$$Ax \leq b \quad (I.1)$$

$$x \geq 0 \quad (I.2)$$

avec  $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ .

On peut mettre tout problème du type (I.1) sous la forme canonique en introduisant des variables d'écart positives  $x_{n+j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

$$\min_x f(x) = cx$$

Sujet à :

$$Ax - b = 0 \text{ (I.3)}$$

$$x \geq 0 \text{ (I.4)}$$

avec  $c$  et  $x \in \mathbb{R}^{(n+q)}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+q)}$  et  $b \in \mathbb{R}^q$ .

### Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de faire un tour sur un ensemble d'outils et d'éléments de base mathématiques utilisés par la suite dont les principaux sont les ensembles ordonnés, les treillis, et leurs relations avec la structure algébrique des dioïdes. Ensuite, plusieurs types de fonctions définies sur les dioïdes sont considérés. Cependant, grâce à la théorie de la résiduation, il est possible de considérer les pseudo-inverses d'application isotone, ainsi que la résolution des équations de types point fixes qui nécessitent la définition de l'application étoile de Kleene, et la résolution des systèmes d'inégalité appliquant les techniques de la programmation linéaire.

**Introduction**

On présente dans ce chapitre les réseaux de Petri, un outil qui permet de modéliser commander et analyser les systèmes à événements discrets.

On s'intéressera plus particulièrement à deux sous-classes de réseaux de Petri : les graphes d'événements temporisés et les graphes d'événements temporels. Notons que les graphes d'événements admettent une représentation linéaire dans une algèbre adaptée (L'algèbre des dioïdes).

**1. Généralités sur les systèmes à événements discrets (SED) [15]**

Le vocable "systèmes (dynamiques) à événements discrets" est relativement récent et recouvre un champ de recherches encore assez diverses. Ce domaine est actuellement très actif et fait l'objet de nombreuses manifestations scientifiques.

**❖ Définition 2.1(SED)[9]**

Un système à événement discrets est un système à espace d'états discrets dont l'état change seulement à certain instants, de façon instantanée et dont les transitions entre états sont associées à l'occurrence des événements. En l'absence d'événement l'état du système demeure inchangé.

**1.1 Classes de systèmes**

Alors que la théorie classique des systèmes "continus" (y compris en temps discret) et de l'Automatique s'intéresse à des systèmes "naturels" obéissant essentiellement aux lois de la Physique, et descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles (ou leur discrétisation approchée en temps), le vocable SED recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la dynamique échappe totalement à ce genre de description. En réalité, c'est plutôt le niveau descriptif auquel on se place qui est à la source de cette impossibilité : au lieu de s'intéresser au déroulement continu des phénomènes, on ne se soucie que des "début" et des "fin" de ces phénomènes (les "événements discrets") et à leur enchaînement dynamique, logique ou temporel.

Ces systèmes, généralement fabriqués par l'homme, ont une part croissante, voire prépondérante, dans l'économie moderne. Pourtant, sur le plan de la théorie, ils ne bénéficiaient pas jusqu'à récemment d'un "statut" et d'une conceptualisation comparables à

ceux des systèmes continus. De plus, ils étaient plutôt étudiés par la Recherche Opérationnelle que par l'Automatique. En voici quelques exemples : Systèmes de production, Systèmes informatiques, Réseaux de communication et de transport, Planification de tâches.

**Caractéristiques :**

La plupart des systèmes énumérés ci-dessus présente les caractéristiques communes suivantes :

- **Parallélisme** : De nombreux événements peuvent se dérouler simultanément et indépendamment dans diverses parties du système.
- **Synchronisation** : L'accomplissement de certains événements nécessite la disponibilité *simultanée* de plusieurs ressources ou la vérification simultanée de plusieurs conditions.
- **Concurrence** : Certains événements excluent l'apparition simultanée d'autres événements. Par exemple, une machine ne peut travailler que sur une seule pièce à la fois.

Dans le cadre de notre étude, nous nous servirons des RdP comme outil de représentation pour l'étude des SED.

**2. Les Réseaux de Petri(Rdp) [11] [18]****2.1 Définition et notions de base :**

Les réseaux de Petri (RdP) sont un outil graphique et mathématique, introduit en 1962 par Carl Adam Petri. Ils permettent la modélisation d'un grand nombre de systèmes à événements discrets. Ils sont particulièrement adaptés à l'étude des processus complexes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation et de concurrence.

**❖ Définition 2.2. (Réseau de Petri).**

Un réseau de Petri (Rdp) est un graph biparti orienté composé de places et de transitions, reliées par des arcs .Une place peut contenir un nombre entier de jetons ou marques. A chaque arc peut être associé un poids (nombre entier).

Formellement, un réseau de Petri est quadruplet  $Q = (P, T, Pré, Post)$  où :

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ , est un ensemble fini de places.
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ , est un ensemble fini de transition.
- $Pré : P \times T \rightarrow N$ , est l'application d'incidence avant.
- $Post : P \times T \rightarrow N$ , est l'application d'incidence arrière.
- $Pré(P_i, T_j)$ , représente le poids de l'arc reliant  $P_i$  à  $T_j$ , alors que  $Post(P_i, T_j)$  représente le poids de l'arc reliant  $T_j$  à  $P_i$ .

On définit la matrice d'incidence  $W$  comme suit :

$$W = W^+ - W^-.$$

$$\text{Avec } W_{ij}^+ = Pré(P_i, T_j), W_{ij}^- = Post(P_i, T_j)$$

On définit le vecteur de marquage  $M = (m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_m))^T$

❖ **Définition 2.3(Marquage des places)** : Les places sont "marquées" par des "jetons" (points noirs) qui vont "circuler" dans les places selon des règles définies ci-après. Ceci symbolise l'évolution dynamique du système.

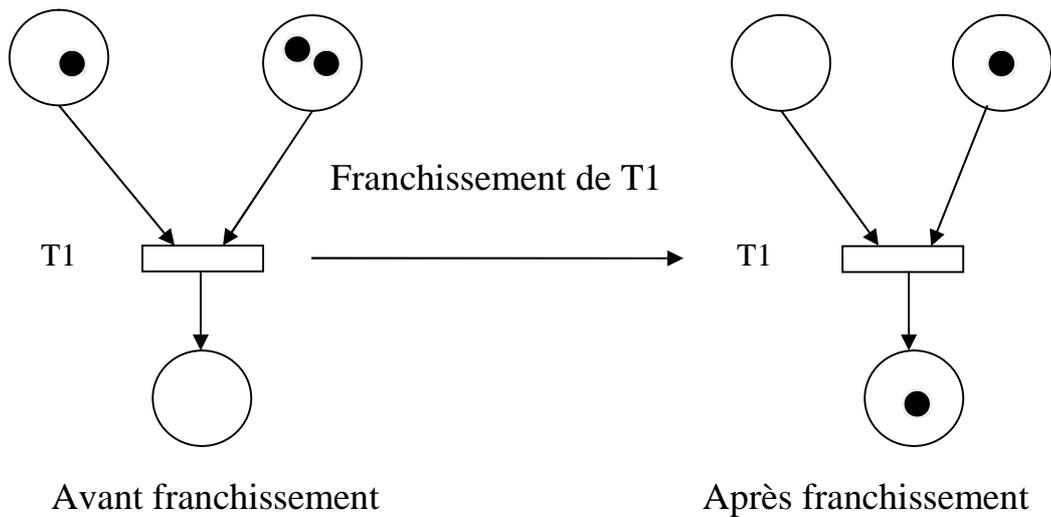
Marquage initial :(celui qu'on indique sur les dessins) donne la position initiale des jetons.

### 2.3 Franchissement d'une transition :

Une transition  $T_j$  est franchissable si les places  $p_i$  en amont de  $T_j$  ont un marquage supérieur ou égal au poids de l'arc reliant  $p_i$  à  $T_j$  :

$$\forall P_i \in P, m(P_i) \geq Pré(P_i, T_j).$$

lors du franchissement de  $T_j$ , le marquage des places  $P_i$  en amont de  $T_j$  est décrémenté de  $Pré(P_i, T_j)$  marques, et le marquage des places  $P_k$  en aval de  $T_j$  est incrémenté de  $Post(P_i, T_j)$  marques.



**Figure (2.1):**Franchissement d'une transition

#### 2.4 Concurrence et synchronisation dans les RdP [14]

Le formalisme des réseaux de Petri est très puissant, il permet de représenter une grande variété de comportement des systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation. Sur la figure 2.2, nous avons représenté quatre structures de réseaux de Petri permettant de décrire ces phénomènes

- la figure 2.2 (a) représente une structure de choix. La place  $p_1$  a deux transitions en aval, notées  $T_1$  et  $T_2$ . Le tir de  $T_1$  ou de  $T_2$  consommera le jeton de la place  $p_1$  et exclura donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de concurrence à la consommation comme par exemple le partage d'un processeur entre tâches concurrentes dans un système informatique ;
- la configuration de la figure 2.2(b) permet de représenter une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici  $p_1$  ;
- la configuration de la figure 2.2(c) permet de modéliser un phénomène de synchronisation. La transition  $T_1$  n'est franchissable que lorsque les places  $p_1$  et  $p_2$  contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.2(d), l'apport de jetons dans les places  $p_1$  et  $p_2$  est synchronisé par le tir de la transition  $T_1$  et permet, par exemple, de modéliser l'initiation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.

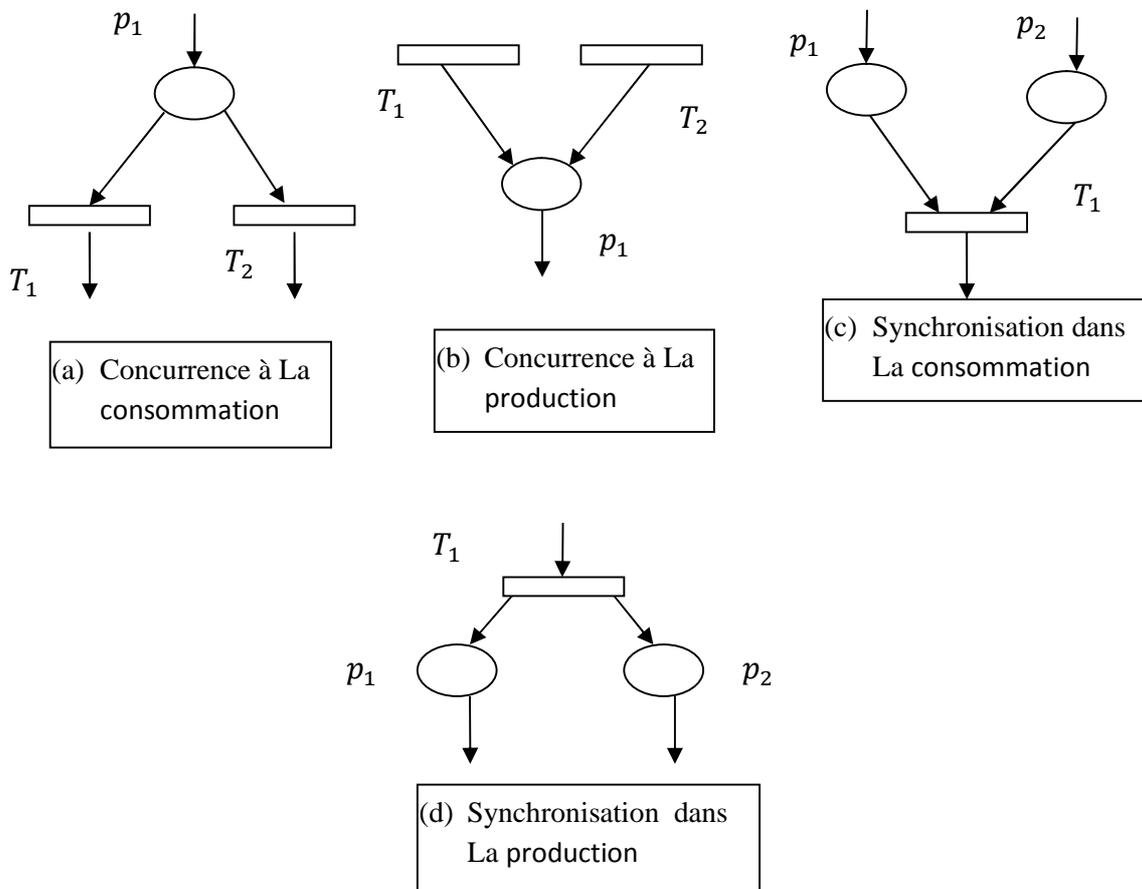


Figure (2.2): Concurrence et synchronisation dans les RdP.

### 2.5 Quelques Propriétés d'un Rdp :

- **Accessibilité** : un marquage  $M_f$  est accessible à partir du marquage initial  $M_0$  s'il existe une séquence de franchissement  $S$  telle que : du franchissement de cette séquence à partir de  $M_0$ , résulte un nouveau marquage  $M_f$  et on note :  $M_0 [S, M_f]$ . Cette propriété permet de savoir si un état non désiré risque de se produire.
- **Réversibilité** : Un Rdp est dit réversible ou réinitialisable pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage  $M$  accessible à partir de  $M_0$ , il existe une séquence de franchissement  $S$  qui ramène à  $M_0$ .

- Vivacité** : Un réseau de Petri est dit vivant pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage  $M$  accessible à partir de  $M_0$  et pour toute transition  $T_i$ , il existe une séquence de franchissement  $S$  qui inclut la transition  $T_i$ . Cette propriété permet de déduire si le système ne comporte pas de blocage.

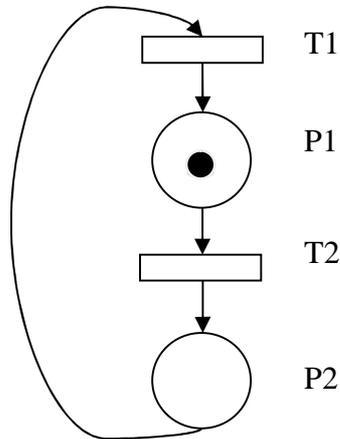
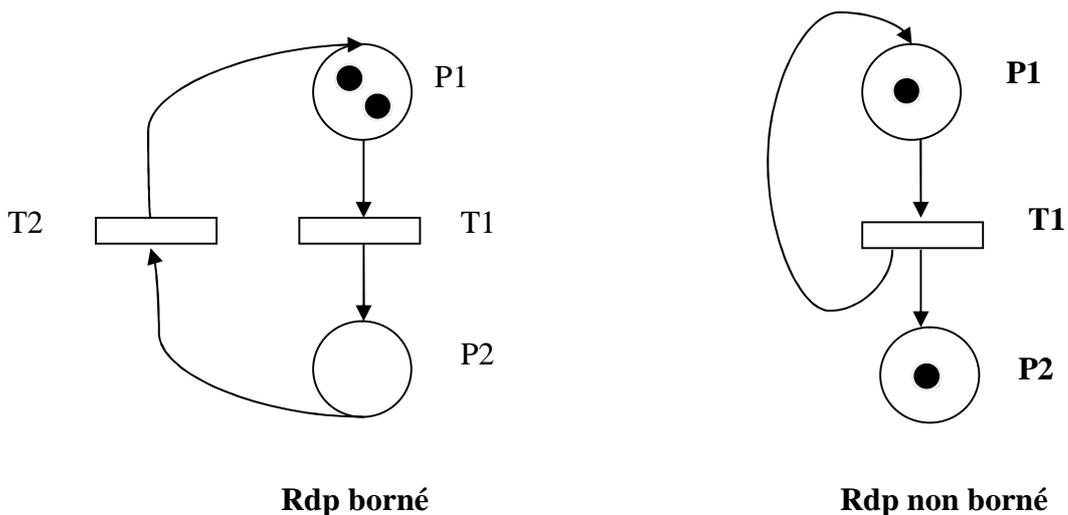


Figure (2.3) : Rdp vivant

- Bornitude** : Une place  $p_i$  est dite bornée pour un marquage initial  $M_0$  si pour tout marquage accessible à partir de  $M_0$ , le nombre de marques dans  $P_i$  est fini. Un Rdp est dit borné si toutes ces places sont bornées.

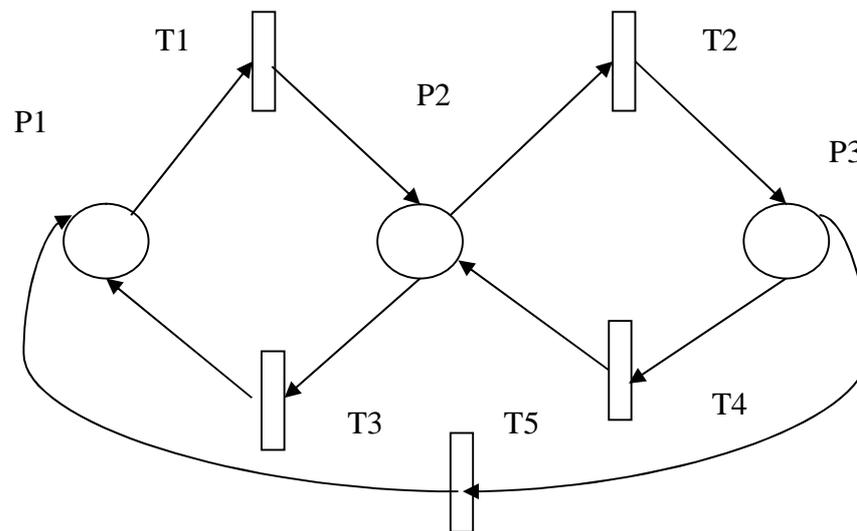


Figure(2.4) :Rdp borné ou non borné

## 2.6 Les classe de réseaux de Petri

## • Graphe d'états :

Un Rdp non marqué ou marqué est un graphe d'état si et seulement si chaque transition possède exactement une place d'entrée et une place desortie.



Figure(2.5) : Graphe d'état

## • Graphes d'événements :

Un Rdp est un graphe d'événements si et seulement si chaque place possède exactement une seule transition d'entrée et une seul transition de sortie. Un graphe d'événements est parfois appelé graphe de transitions.

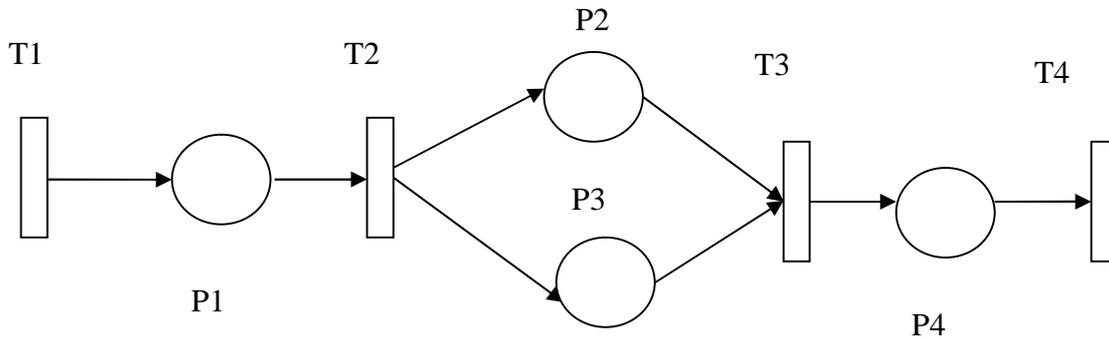


Figure (2.6) : Graphe d'événements

### 3. Graphe d'événements temporisés (GET)

Un GET permet de décrire un système dont le fonctionnement dépend du temps. Par exemple, il peut s'écouler une certaine durée entre le début d'une opération et la fin de cette opération. Si une marque dans une certaine place indique que cette opération est en cours, un GET permettra de rendre compte de cette durée.

#### 3.1 Fonctionnement d'un graphe d'événements

##### 3.1.1 Fonctionnement au plus tôt d'un GET

On appelle fonctionnement au plus tôt d'un GET, le mode de fonctionnement suivant.

Toutes les transitions internes et puits (pas de place en aval de la transition) sont franchies dès que possible. Les jetons qui arrivent dans une place, pourront contribuer au franchissement de la transition située en aval dès que le temps de séjour minimum se termine. Les transitions sources (pas de place en amont de la transition) sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que sur l'occurrence d'événements externes associés à ces transitions.

❖ **Définition 2.4 (Règles de fonctionnement temporisé)** Le fonctionnement au plus tôt d'un réseau de Petri temporisé obéit aux points suivants.

1. Une transition  $x$  est validée s'il y a au moins un jeton disponible dans chacune des places de  $\bullet x$  (située en amont de  $x$ ).
2. Une transition  $x$  est tirée dès qu'elle est validée. On note  $x(k)$  l'instant où le tir numéroté  $k$  de la transition  $x$  a lieu. Ce tir transforme le marquage : un jeton est prélevé dans

chacune des places de  $\bullet x$ , et simultanément un jeton est ajouté dans chacune des places de  $x \bullet$ .

### 3.1.2 Fonctionnement FIFO [5]

Le fonctionnement FIFO va permettre une numérotation des événements et ainsi une écriture correcte des relations.

❖ **Définition 2.5.** Si le  $K^{ième}$  jeton qui arrive dans une place d'un graphe d'événements p-temporisé est aussi le  $K^{ième}$  jeton disponible pour franchir une transition en aval, alors cette place fonctionne selon la règle FIFO.

On dit qu'un graphe d'événements est FIFO, si toutes ses places et transitions sont FIFO.

## 3.2 Modélisation des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre (max; +)

Les graphes d'événements temporisés représentent un outil de modélisation graphique qui constitue une première étape. La seconde étape est la mise en équations du modèle graphique, c'est-à-dire, la définition d'une représentation analytique du système. Le comportement d'un graphe d'événements temporisé peut être décrit par un modèle linéaire dans l'algèbre (max; +) ce modèle amène à manipuler des variables discrètes qui correspondent aux dates d'activation des transitions du GET.

### 3.2.1 Equations aux dateurs [4]

Un dateur  $x$  est une application monotone (croissante) de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ .

Un dateur doit vérifier :

$$x(k+1) \geq x(k) \quad (2.1)$$

Nous associons à chaque transition  $x_i$  (respectivement,  $u_i$  ou  $y_i$ ) un dateur  $x_i(k)$  (respectivement  $u_i(k)$  ou  $y_i(k)$ ), qui représente la date, possiblement négative, à laquelle l'événement  $k$ , associé à chaque variable, a lieu.

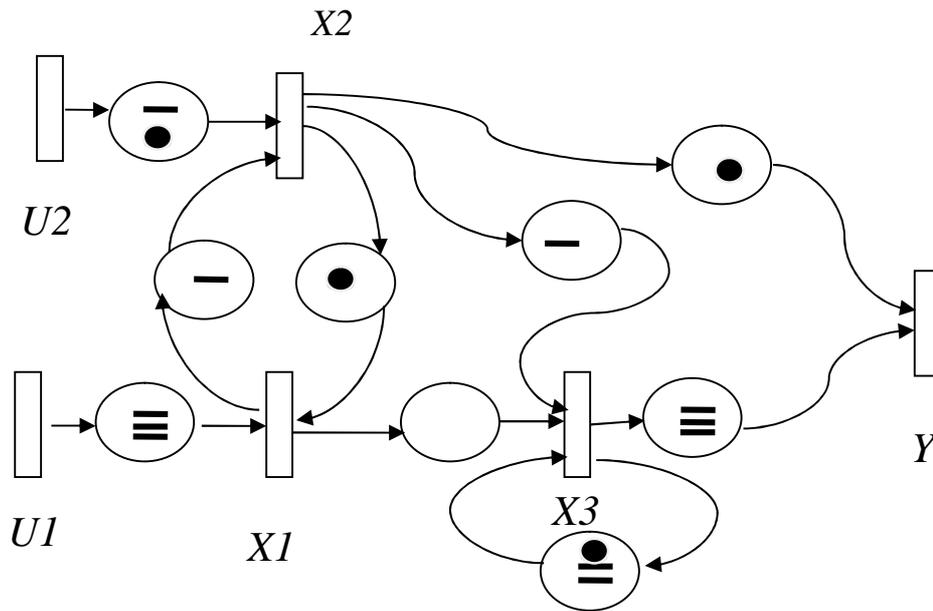


Figure (2.7): exemple d'un GET

Dans l'exemple de la figure (2.7) Les barres dans les places indiquent les temporisations (en nombre de tops d'horloge par exemple).

• **Les équations aux dateurs :**

$$x1(k) \geq \max(x2(k - 1), u1(k) + 3)$$

$$x2(k) \geq \max(x1(k) + 1, u2(k - 1) + 1)$$

$$x3(k) \geq \max(x1(k), x2(k) + 1, x3(k - 1) + 2)$$

$$y(k) \geq \max(x2(k - 1), x3(k) + 3)$$

Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$  où  $a \oplus b = \max(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b$ ,  $\mathcal{E} = -\infty$ ,  $e = 0$ , le système précédent se met sous forme :

$$x1(k) \geq x2(k - 1) \oplus u1(k) \otimes 3$$

$$x2(k) \geq x1(k) \otimes 1 \oplus u2(k - 1) \otimes 1$$

$$x3(k) \geq x1(k) \oplus x2(k) \otimes 1 \oplus x3(k - 1) \otimes 2$$

$$y(k) \geq x2(k - 1) \oplus x3(k) \otimes 3$$

La forme matricielle :

$$x(k) \geq \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k-1)$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ 3)x(k) \oplus (\varepsilon \ e \ \varepsilon)x(k-1)$$

Soit un système de la forme :

$$x(k) \geq A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_2 \otimes x(k-2) \oplus B_0 \otimes u(k) \oplus B_1 \otimes u(k-1)$$

$$y(k) \geq C_0 \otimes x(k) \oplus C_1 \otimes x(k-1) \oplus C_2 \otimes x(k-2)$$

En notant  $\mathcal{M}_0(p_i)$  le marquage initial pour tout place  $p_i \in \mathcal{P}$  et en posant  $M = \max_{p_i \in \mathcal{P}} (\mathcal{M}_0(p_i))$ , on obtient d'une manière générale un système de la forme dite forme implicite :

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^M A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(k-j) \quad (2.2)$$

$$y(k) = \bigoplus_{i=0}^M C_i x(k-i) \quad (2.3)$$

### 3.2.2 Forme explicite " ARMA "[2]

L'étude du fonctionnement "au plus tôt" (les transitions sont franchies dès qu'elles sont franchissable) ; les graphes d'événement temporisés est équivalente à l'étude des solutions minimales dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$  du système implicite d'inéquations aux dateurs du type  $x \geq Ax \oplus B$ , la plus petite solution étant donnée par :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^M \bar{A}_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M \bar{B}_j u(k-j) \quad (2.4)$$

Où

$\bar{A}_1 = A_0^* A_1, \bar{A}_2 = A_0^* A_2, \dots, \bar{B}_0 = A_0^* B_0, \dots$ , avec  $x(k)$  et  $u(k)$  sont des vecteurs d'état et d'entrée.

Et  $A_0^* = I \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus \dots$

La forme explicite "ARMA" définit l'ensemble des dattes au plus tôt pour le fonctionnement du système.

ARMA signifie (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée).

$$x(k) = \underbrace{\bigoplus_{i=1}^M \bar{A}_i x(k-i)}_{\text{AR}} \oplus \underbrace{\bigoplus_{j=0}^M \bar{B}_j u(k-j)}_{\text{MA}}$$

La forme explicite de la figure (2.7)

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

$$A_0^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$A_0^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e\varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = A_0^* A_1 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e\varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}_0 = A_0^* B_0 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e\varepsilon & \varepsilon \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}_1 = A_0^* B_1 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e & \varepsilon \\ 2 & 1 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

Finalement la forme explicite est :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 2 \end{pmatrix} (k-1) \oplus \begin{pmatrix} 3 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon \\ 5 & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix} u(k-1)$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ 3)x(k) \oplus (\varepsilon \ e \ \varepsilon)x(k-1)$$

#### 4. Graphes d'événements temporels

Les graphes d'événements temporels sont une sous-classe des réseaux de Petri temporels, introduits par Merlin [Merlin 1974]. Pour les graphes d'événement temporels, l'extension temporelle s'exprime sous la forme d'un intervalle associé principalement aux transitions (t-temporel), ou aux places (p-temporel).

Dans le cadre de notre étude, on se limitera à l'utilisation et l'exploitation des Graphes d'Événements p-temporel.

##### 4.1 Graphes d'événements T-temporels [5]

Dans les graphes d'événements T-temporels, les activités sont liées aux transitions. Ils sont capables de représenter par exemple des systèmes informatiques ayant des temps de réponse variables.

**Définition 2.6.** Un graphe d'événements t-temporel est un doublet  $\langle GE, SI_t \rangle$  où GE est un graphe d'événements

$$IS_x: T \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times); (\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\}),$$

$$t_i \rightarrow IS_i = [T^-; T^+] \text{ avec } 0 \leq T^- \leq T^+.$$

Chaque transition  $x_i$  est associée à un intervalle statique  $[T^-; T^+]$  les durées  $T^-, T^+$  représentent respectivement les dates de tir au plus tôt et au plus tard de la transition  $t_i$ .

##### 4.2 Graphes d'événements P-temporels (GDE P-temporels)[4]

Les réseaux de Petri p-temporels ont pour objectif de modéliser des systèmes dans lesquels le temps prend un aspect non déterministe. En effet, le temps de séjour associé à chaque place  $p_i$  n'est plus considéré déterminé comme pour les GET, mais appartient à un intervalle de temps  $IS_i$ . Nous consacrons la première partie de cette section au rappel des définitions et notations relatives aux réseaux de Petri p-temporels.

❖ **Définition2.7** : Un graphe d'événements p-temporel est défini par le doublet  $\langle R; IS \rangle$  où :

R est un réseau de Petri marqué (places-transitions)

- $IS: P \rightarrow (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times (\mathbb{R}^+ \cup \{0, +\infty\})$ ,
- $pi \rightarrow IS_i = [T_i^-; T_i^+]$  avec  $0 \leq T_i^- \leq T_i^+$ ,

où  $[T_i^-; T_i^+]$  définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place  $p_i$ . Le jeton doit rester dans la place durant un temps de séjour au minimum  $T_i^-$ . Avant l'écoulement de cette durée, le jeton est dans un état d'indisponibilité pour tirer la transition aval. De même, la grandeur  $T_i^+$  est le temps de séjour maximal qui ne doit pas être dépassé sous peine de la mort du jeton. Ainsi, le jeton est disponible pour tirer la transition aval dans l'intervalle  $[T_i^-; T_i^+]$ .

La définition suivante va nous permettre d'introduire la notion d'admissibilité qui sera utilisée dans la suite pour la modélisation des graphes d'événements p-temporels.

❖ **Définition2.8 (Fonctionnement admissible)**

Un fonctionnement est admissible pour un réseau de Petri p-temporel, lorsque son évolution dynamique préserve la vivacité des jetons. En conséquence, il ne mène pas le système à un état de blocage.

❖ **Définition2.9 (Fonctionnement au plus tôt et au plus tard d'un graphe d'événements p-temporel)** Un fonctionnement au plus tôt (respectivement au plus tard) du système correspond à un franchissement pour chacune des transitions (sources, internes et puits) à une date au plus tôt telle qu'avant (respectivement au-delà de) cette dernière, le système global (comportant toutes les transitions) perde sa propriété de fonctionnement admissible.

### 4.3 Inéquations d'un graphe d'événements P-temporel

De la même manière que pour les graphes d'événements temporisés, nous pouvons décrire le système d'inégalités pour les graphes d'événements p-temporels, à partir de chaque place  $p_l$  où  $(x_j, x_i) = (\bullet p_i, p_i \bullet)$ .

**Proposition 2.1.** Pour qu'un graphe d'événements P-temporel respecte un fonctionnement admissible, la modélisation correspondant à chacune de ses transitions, non transition source, est donnée par l'expression suivante :

$$\bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_i) + T_i^-) \leq x_i(k) \leq \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_i) + T_i^+) \quad (2.5)$$

Avec  $S_i$  l'ensemble des places d'entrée de la transition  $x_i$  et  $m_j$  le marquage initial de chacune de ces places.

Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}$ , le premier système se réécrit :  $x_i(k) \geq \bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_i) + T_i^-)$  ,

Dans le dioïde  $\mathbb{R}_{min}$ , le deuxième système se réécrit :  $x_i(k) \leq \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_i) + T_i^+)$

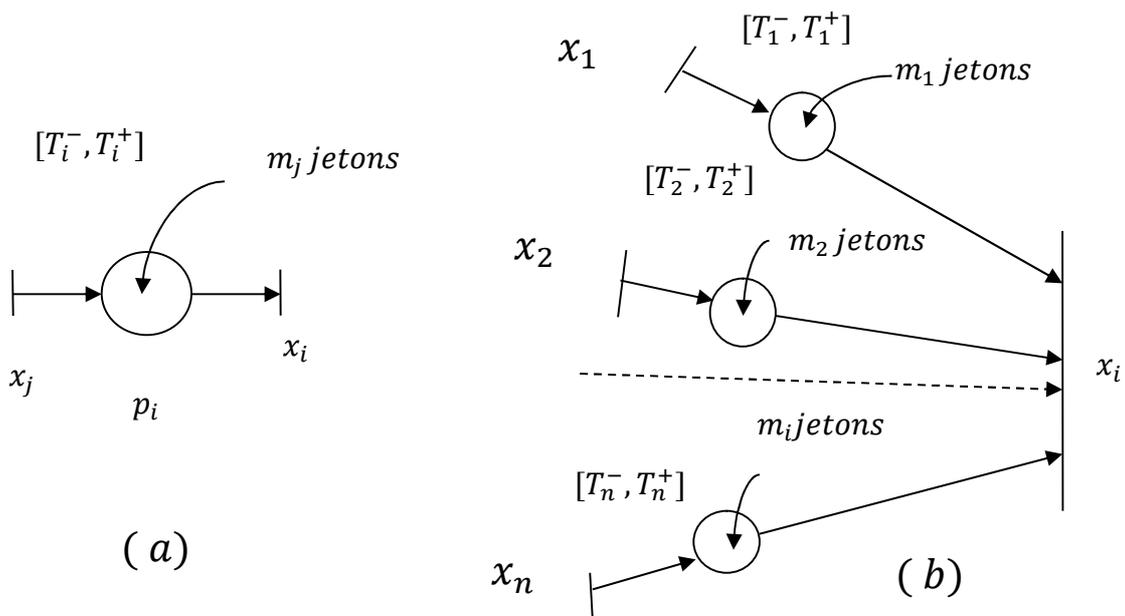


Figure (2.8) : Graphe d'événements p-temporel.

Les places sont supposées fonctionner en FIFO. L'évolution peut être alors représentée par les inégalités suivantes lesquelles décrivent les relations entre les dates de tir.

Pour la borne inférieure  $T_i^-$  on a :

$$T_i^- + x_j(k - m_i) \leq x_i(k). \quad (2.6)$$

Le coefficient  $1 \text{ dex}_j(k - m_i)$  (respectivement, 1 de  $x_i(k)$ ) est le poids en valeur absolue de l'arc allant de la transition  $x_j$  vers la place  $p_i$  (respectivement, l'arc allant de la place  $p_i$  vers la transition  $x_i$ ).

De même en utilisant la borne supérieure  $T_i^+$ , nous avons :

$$x_i(k) \leq T_i^+ + x_j(k - m_i) \quad (2.7)$$

Si  $x_i$  est une transition de synchronisation (voir la Figure (2.8.b)),  $x_i(k)$  doit satisfaire les deux systèmes d'inéquations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \geq x_1(k - m_1) + T_1^- \\ x_i(k) \geq x_2(k - m_2) + T_2^- \\ \vdots \\ x_i(k) \geq x_n(k - m_n) + T_n^- \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i(k) \leq x_1(k - m_1) + T_1^+ \\ x_i(k) \leq x_2(k - m_2) + T_2^+ \\ \vdots \\ x_i(k) \leq x_n(k - m_n) + T_n^+ \end{array} \right.$$

**Remarque 2.1:** les GET est un cas particuliers des Graphes d'événements p-temporels

#### 4.4 Modèle de type dateur de GE P-temporels dans l'algèbre conventionnelle

Rappelons que  $\Delta$  est la plus grande composante de  $M_0$ . Ci-dessous, les deux vecteurs colonne  $-T^-$  et  $T^+$  sont des vecteurs de temporisations où  $[T_i^- ; T_i^+]$  est l'intervalle de temps de la place  $P_i$ .

L'ensemble des inégalités précédentes (2.6) et (2.7), lesquelles décrivent un graphe d'événements P-temporel, peut être exprimé avec la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k - \Delta) \\ x(k - \Delta + 1) \\ \vdots \\ x(k - 1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

avec :

$$G^- = [G_\Delta^- G_{\Delta-1}^- G_{\Delta-2}^- \dots G_1^- G_0^-] \text{ et } G^+ = [G_\Delta^+ G_{\Delta-1}^+ G_{\Delta-2}^+ \dots G_1^+ G_0^+].$$

Chaque place correspond à une ligne de  $G^-$  qui contiennent les poids de ses arcs entrants et sortants. En particulier, on a :

1. La matrice  $G_i^-$  contient les poids, avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initial est  $i$ , pour  $i \in [0; \Delta]$ .
2. De plus, la matrice  $G_0^-$  contient les poids, avec le signe moins, de l'arc sortant de chaque place dont le marquage initial est nul (habituellement exprimé par  $-W^-$ ).

On a donc  $G_i^- \geq 0$  pour  $i \in [1; \Delta]$  et  $G_i^- \geq -W^-$ . Remarquons qu'un coefficient non nul de la matrice  $G_0^-$  peut être négatif ou positif.

De la description ci-dessus sur le poids des arcs, nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence  $W$ :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^- \tag{2.9}$$

$$-W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^+ \tag{2.10}$$

Exemple 2.1 :

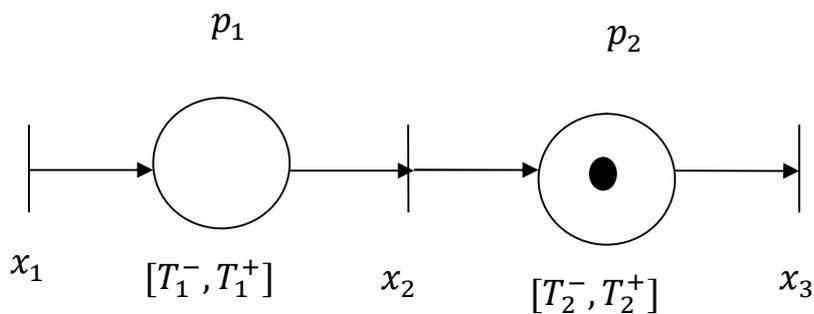


Figure (2.9): Graphe d'Événements P-temporel

L'ensemble des inégalités qui décrivent le graphe est exprimé avec ce système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} x_1(k) - x_2(k) \leq -T_1^- , \\ x_2(k-1) - x_3(k-1) \leq -T_2^- , \\ -x_1(k) + x_2(k) \leq T_1^+ , \\ -x_2(k-1) + x_3(k) \leq T_2^+ , \end{cases}$$

La forme matricielle correspondante est comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T_1^- \\ -T_2^- \\ T_1^+ \\ T_2^+ \end{pmatrix},$$

Les matrices sont donc :  $G^- = [G_1^- G_0^-]$ , et  $G^+ = [G_1^+ G_0^+]$ ,

$$G_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G_0^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, G_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, G_0^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Notons que  $-W^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu sur les réseaux de Petri et les Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels qui représentent une sous classe des réseaux de Petri qui sont des modèles de représentation souvent utilisés pour les SED. Ils sont largement utilisés et permettent de modéliser des systèmes dynamiques, Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique de dioïde, Cette représentation est bien adaptée pour aborder, par exemple, les problèmes de commande ou d'évaluation de performances.

**Introduction :**

Pour évaluer les performances des systèmes à événements discrets modélisés par des GET ou GDEP-temporel, on s'intéresse au calcul de deux indicateurs de performances : temps de cycle et le taux de production.

On présente dans ce chapitre un rappel sur les éléments de la théorie des graphes, Afin d'appliquer certains résultats de base de la théorie spectrale pour l'évaluation de performances des GET. L'objectif de ce chapitre est l'évolution des performances des graphes d'événement P-temporel en utilisant les techniques analytique. On considère un comportement 1-périodique, deux parties pour analyser le temps de cycle  $\lambda$  seront présentées. La première partie est l'application du lemme de Farkas pour déterminer les bornes encadrant le temps de cycle, la deuxième nécessite la construction du modèle algébrique et l'application d'un algorithme de la programmation linéaire.

**1. Rappel de la théorie des graphes [14]*****Définition 3.1 (Graphe orienté)***

Un graphe orienté qu'on note  $\mathcal{G} = (\Omega, \Phi)$  est un graphe composé d'un ensemble de sommets (ou nœuds), noté  $\Omega$ , et un ensemble d'arcs orientés, noté  $\Phi$  (figure 3.1).

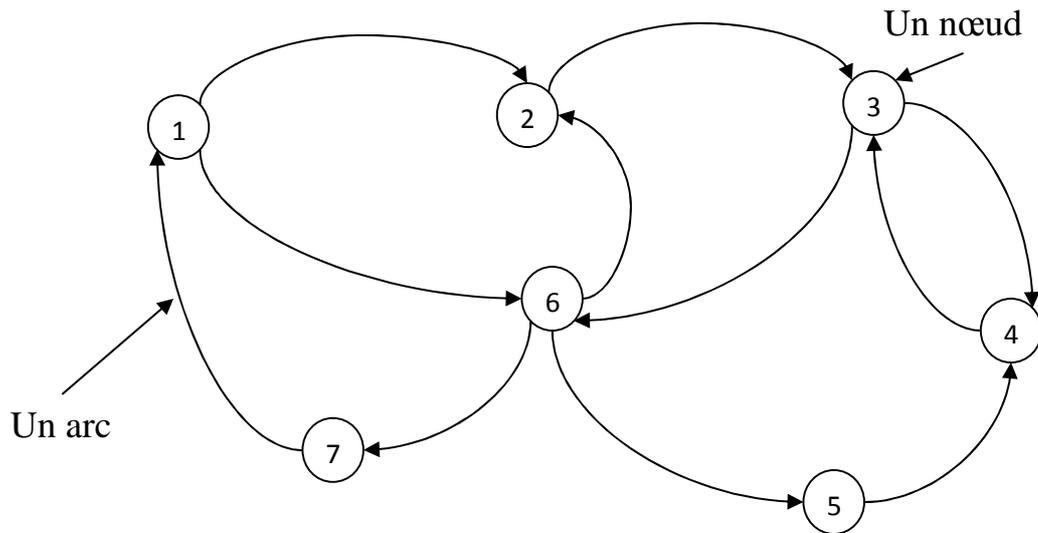


Figure (3.1) : Graphe orienté

**Définition 3.2 (Chemin, circuit)**

Un chemin est une suite de sommets que l'on peut parcourir successivement en utilisant les arcs de  $\Phi$ . On note:  $a \rightarrow b$  un chemin allant d'un sommet d'origine, noté a, vers un sommet d'extrémité, noté b.

Un chemin est dit

- simple s'il ne passe pas deux fois par le même arc.
- élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Un *circuit* est un chemin dont le sommet de départ est confondu avec sommet d'arrivée (figure 3.2).

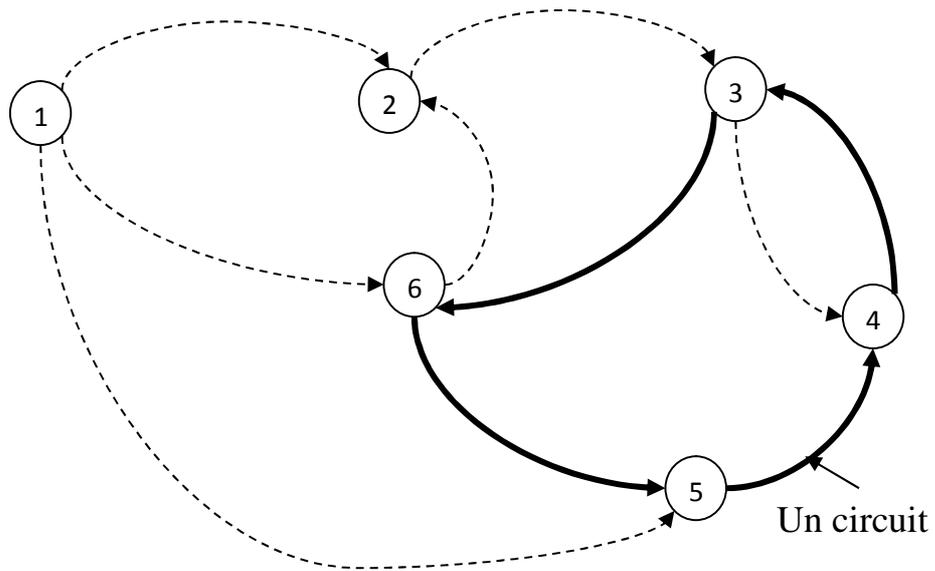


Figure (3.2) : circuit dans un graphe orienté

**Définition 3.3 (Graphe fortement connexe)[8]**

Un graphe est dit fortement connexe si pour deux nœuds  $i$  et  $j$  quelconques il existe un chemin allant de  $i$  à  $j$ .

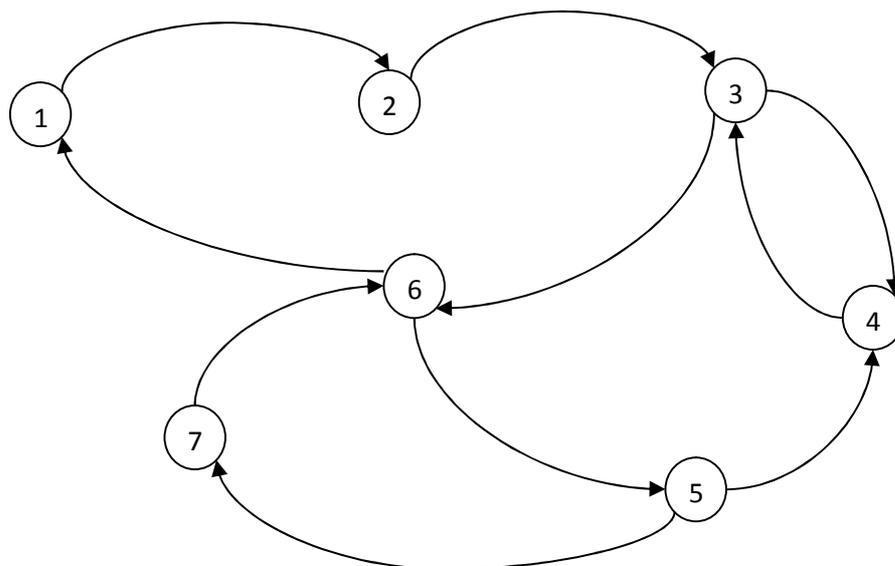


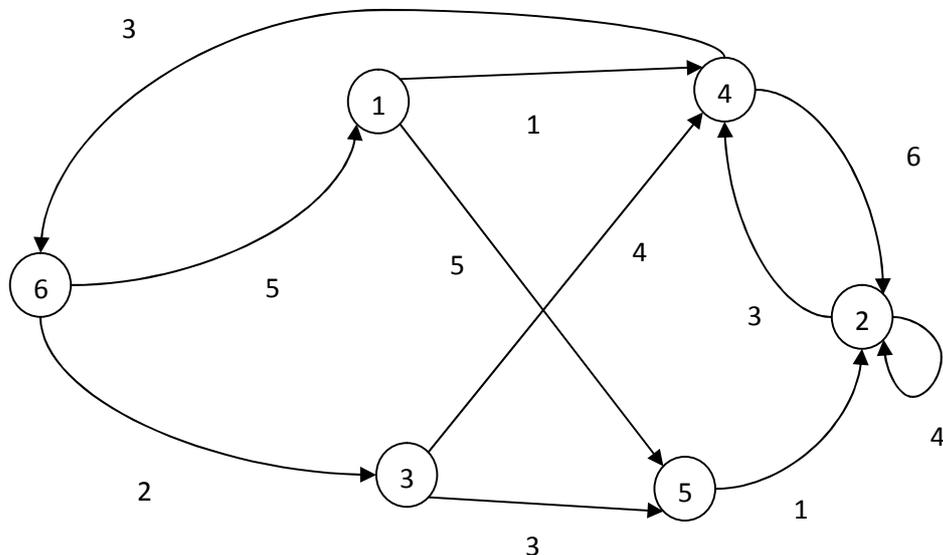
Figure (3.3) : composante fortement connexe.

**Définition 3.4 (Graphe valué)**

Un graphe valué est un graphe pour lequel tout arc  $(a, b) \in \Phi$  est muni d'un poids  $\mu_{ba}$  (l'indice du sommet d'arrivée b précède l'indice du sommet de départ a).

Soit  $\Delta = (a_1 a_2, \dots, a_K)$  un chemin d'un graphe valué. On appelle :

- longueur de  $\Delta$ , notée  $|\Delta|_l$ , le nombre d'arcs qui le composent ;
- poids de  $\Delta$ , noté  $|\Delta|_\mu$ , la somme des poids des arcs qui le composent, qui est égal à  $a_{i_k i_{k-1}} + \dots + a_{i_2 i_1}$



Figure(3.4): graphe orienté valué

**2. Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices**

**Définition 3.5 (Matrice et graphe de précédence)**

Soit A une matrice de dimension  $n \times n$  à coefficients dans un dioïde D. La matrice A d'un graphe valué à n sommets, ayant pour élément  $A_{ab}$  le poids  $\mu_{ab}$  de l'arc  $a \rightarrow b$ , est appelée matrice de précédence.

De tout graphe de précédence, on peut extraire une matrice de précédence.

Le graphe représenté par la figure (3.4)admet la matrice de précédence suivante :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 4 & \varepsilon & 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 4 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 5 & \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$\varepsilon$  correspond à un arc absent dans le graphe.

**Définition 3.6 (Matrice irréductible)**

Une matrice irréductible  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  est une matrice pour laquelle, pour toute paire  $(a, b)$ , il existe un entier  $i$  tel que  $(A^i)_{ab} \neq \varepsilon$ .

Ceci est équivalent à l'existence d'un chemin allant de  $b$  à  $a$  pour toute paire de sommets  $(a, b)$ .

**3. Eléments de la théorie spectrale [4]**

Cette partie rappelle les principales propriétés spectrales des matrices à coefficients dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ , pour les matrices irréductibles. On rappelle comment ces résultats peuvent être appliqués à l'évaluation de performances des GET.

❖ **Définition 3.7 (Vecteurs propres valeurs propres)** Soit  $A$  une matrice de dimension  $n \times n$  à coefficients dans un dioïde  $D$ . Si un

Couple  $(\lambda, \vartheta) \in R_{max} \times (R_{max}^n - \{\varepsilon\}^n)$  vérifie :

$$A \otimes \vartheta = \lambda \otimes \vartheta \quad (3.1)$$

On dit que  $\lambda$  (respectivement,  $\vartheta$ ) est valeur propre (respectivement, vecteur propre) de  $A$ .

On note  $\rho_{max}(A)$  le rayon spectral de  $A$ , i.e., la plus grande des valeurs propres de  $A$ .

La matrice irréductible ne possède qu'une seule valeur propre donnée par le théorème de Perron-Frobenius, soit :

$$\rho_{max}(A) = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{i_1, \dots, i_n} \frac{A_{i_1, i_2} + A_{i_2, i_3} + \dots + A_{i_k, i_1}}{k} \quad (3.2)$$

**4. Calcul de la valeur propre en utilisant la théorie des graphes [4]**

La matrice  $A$  de dimension  $n \times n$  dans un dioïde  $D$  est une matrice de précédence, l'élément  $A_{ij}$  désigne le poids  $w_{ij}$  de l'arc  $j \rightarrow i$ . Le poids d'un arc absent du graphe est égal à  $\varepsilon$ . A toute matrice carrée  $A$ , on peut associer un graphe de précédence, noté  $G(A)$ .

La matrice est dite irréductible si pour toute paire  $(i; j)$ , il existe un entier  $k$  tel que  $(A^k)_{ij} \neq \varepsilon$ .

En termes de graphes, le graphe  $G(A)$  est fortement connexe. Le théorème suivant permet de calculer la valeur propre d'une matrice irréductible.

**Théorème 3.1 [17]** Une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  irréductible admet une unique valeur propre, notée  $\lambda$ , égale au rayon spectral de la matrice  $A$ , soit :

$$\lambda = \rho_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}^n (\text{trace} A^k)^{1/k} \quad (3.3)$$

Où  $\text{trace} A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ ,  $A^k$  est une matrice carrée de dimension  $n \times n$  à éléments dans  $\mathbb{R}$ , l'élément  $(A^k)_{ij}$  représente le poids maximal des chemins de longueur  $k$  allant du nœud  $j$  au nœud  $i$ .

Pour  $k = 2$ , on a ainsi :

$$(A^2)_{ij} = \max_{l=1..n} \{A_{il} + A_{lj}\} \quad (3.4)$$

D'après ce théorème, la valeur propre  $\lambda = \rho_{\max}(A)$  correspond, dans le graphe  $G(A)$ , au circuit de poids moyen maximal (le poids d'un circuit étant la somme des poids des arcs qui le composent). Par analogie avec la notion de chemin critique, un tel circuit est appelé circuit critique du système. Ce sont les circuits qui limitent les performances du système et la valeur  $\frac{1}{\lambda}$ , est le taux de production maximal qui peut être obtenu. Par ailleurs, les vecteurs propres associés à la valeur propre, fournissent les différentes conditions d'initialisation possibles permettant d'obtenir du système ces performances maximales.

**Exemple 3.1 : Calcul de la valeur propre en utilisant la théorie des graphes**

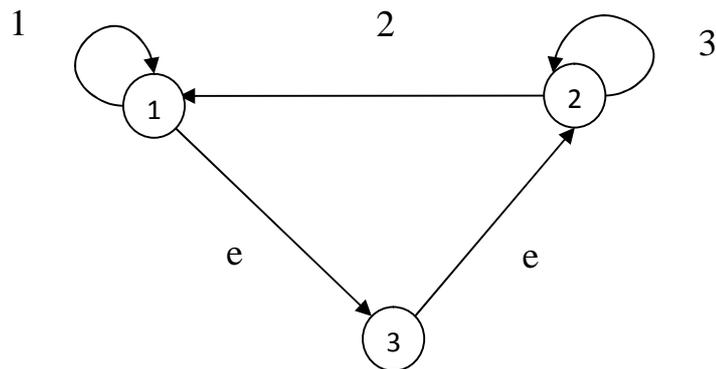


Figure (3.5) : graphe de précédence fortement connexe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Le graphe est fortement connexe, donc A est irréductible

On calcule la valeur propre  $\lambda$  en utilisant le théorème (3.2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ e & 6 & 3 \\ 1 & 2 & \varepsilon \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Trace}(A) = \bigoplus_{i=1}^3 A_{ii} = 3$$

$$\text{Trace}(A^2) = \bigoplus_{i=1}^3 A^2_{ii} = 6$$

$$\text{Trace}(A^3) = \bigoplus_{i=1}^3 A^3_{ii} = 9$$

Alors on a :

$$\lambda = \rho_{max}(A) = \bigoplus_{i=1}^3 (trace A^k)^{\frac{1}{k}} = tr(A) \oplus tr(A^2)^{\frac{1}{2}} \oplus tr(A^3)^{\frac{1}{3}} = 3$$

### 5. Evaluation de performances des Graphes d'événements dans l'algèbre standard

Dans cette section, on introduit les techniques d'analyse pour analyser les performances (calcul du temps de cycle) des GET et les graphes P-temporels en particulier dans l'algèbre standard.

**Définition 3.5.** Le temps de cycle noté  $\lambda$ , d'un graphe d'événements, est le temps moyen séparant deux tirs consécutifs d'une transition en régime permanent. Pour un système de production, il correspond au temps moyen séparant deux pièces produites.

#### 5.1 Evaluation de performances des GET dans l'algèbre standard

La valeur propre  $\lambda$ , associée à la matrice irréductible  $A$  à coefficients dans le dioïde  $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$  correspond au taux de production asymptotique du GET, défini comme le nombre moyen de tirs par unité de temps. Ce taux de production, qui représente aussi la fréquence de franchissement de chaque transition, est identique pour toutes les transitions du graphe. Pour un système de production, il correspond aux nombres moyens de pièces produites par unité de temps.

**Théorème 3.1.** (Taux de production asymptotique). [12]

Soit  $C(t)$  le compteur associé à la transition  $C$ . Son taux de production asymptotique, noté  $\lambda$ , est défini par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{c(t)}{t} \quad (3.5).$$

Ce taux de production peut être calculé de deux façons : soit en appliquant une approche algébrique à travers le théorème 3.2, soit en utilisant le théorème suivant qui permet de calculer  $\lambda$  à partir du graphe de précédence.

**Théorème 3.2 [16]** Le taux de production  $\lambda$  d'un GET fortement connexe est caractérisé par :

$$\lambda = \min_{\rho \text{ circuit élémentaire}} \frac{M(\rho)}{Temp(\rho)} \quad (3.6)$$

où  $M(\rho)$  correspond au nombre total de jetons du circuit  $\rho$ , équivalent au poids du circuit du graphe de précédence associé, et  $Temp(\rho)$  correspond à la somme des temporisations des places du circuit  $\rho$ , équivalent à la longueur du circuit du graphe de précédence associé. L'inverse de cette valeur propre est également utilisé pour analyser les performances d'un GET. Elle correspond au *temps de cycle* du graphe. Ce temps de cycle, noté  $\lambda$  peut être calculé de la façon suivante :

$$\lambda = \max_{\rho \text{ circuit élémentaire}} \frac{Temp(\rho)}{M(\rho)} \quad (3.7)$$

## 5.2 Evaluation de performances des GDE P-temporels dans l'algèbre standard

### 5.2.1 La méthode graphique de calcul de temps de cycle d'un GDE P-temporels :

Le temps de cycle d'un Graphe d'Événements P-temporel est noté  $\lambda$  tel que :

$$\lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

$\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  sont calculés comme suit :

$$\lambda_{min} = \max \left\{ \frac{\sum C_k T^-}{\sum C_k m_{0i}} \right\}, \quad \lambda_{max} = \max \left\{ \frac{\sum C_k T^+}{\sum C_k m_{0i}} \right\}$$

$\sum C_k T^-$  : est la somme des bornes inférieures de circuit élémentaire  $C_k$ .

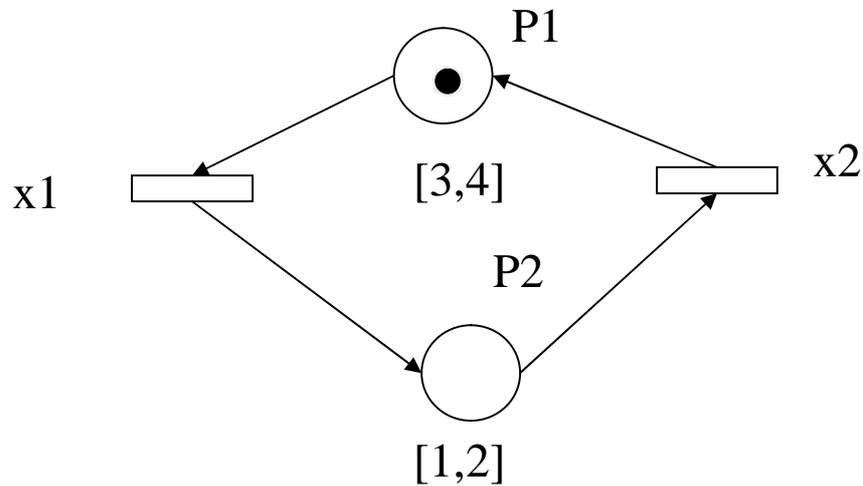
$\sum C_k T^+$  : est la somme des bornes supérieures de circuit élémentaire  $C_k$ .

$\sum C_k m_{0i}$  : est la somme des marques dans le circuit élémentaire  $C_k$ .

L'intervalle  $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$  est appelée la fenêtre temporelle du temps du cycle.

**Exemple 3.2 :**

On considère le graphe d'événements P-temporel suivant :



**Figure (3.6):**Graphe d'Événements P-temporel

$$\lambda_{min} = \max \left\{ \frac{3+1}{1} \right\} = 4 .$$

$$\lambda_{max} = \max \left\{ \frac{4+2}{1} \right\} = 6 .$$

Donc :  $4 \leq \lambda \leq 6$

**5.2.2 Approche pour l'évaluation de performances des GDE P-temporels [4]**

Pour un temps de cycle  $\lambda$ , le système a un comportement 1- périodique et son marquage initial satisfait  $0 \leq m_{ij} \leq 1$ . qui est défini de la manière suivante. Le temps de cycle est noté  $\lambda$  :

$x(k + 1) = \lambda \times u + x(k)$  , avec  $u = (1,1, \dots, 1)^t$  .A partir de l'écriture algébrique de notre système, nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k + 1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Avec  $\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix}$  En remplaçant  $(k + 1)$  par  $\lambda \times u + x(k)$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \times u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \times x(k) + \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times \lambda \times u \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

Comme

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^- \text{ et } -W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^+$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} \times x(k) + \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times \lambda \times u \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

### 5.2.3 Condition d'existence du temps de cycle dans un GDE P-temporel [4]

Après l'obtention d'un système d'inégalités linéaires du type  $A \times x \leq b$  , nous analysons l'existence du temps de cycle  $\lambda$  en utilisant le théorème suivant.

**Théorème 3.3.**Le système (3.11) peut suivre un comportement 1-périodique pour un temps de cycle  $\lambda$  donné, si et seulement si, il existe un vecteur ligne  $y$  positif qui satisfait :

$$y \times \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0 \text{ et } y \times \left( \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times \lambda \times u \right) \geq 0.$$

Preuve : A partir du lemme de Farkas, on peut déduire que le système (3.11) d'inégalités linéaires a une solution  $x$ , si et seulement si,  $y \times \left( \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times \lambda \times u \right) \geq 0$  , pour chaque vecteur ligne du vecteur  $y \geq 0$  avec  $y \times \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$ .

Donc:

$$y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} - y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times \lambda \times u \geq 0 \quad (3.12)$$

Soit

$$y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \geq y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times (\lambda \times u).$$

Donc :

$$y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \geq \lambda \times y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u \quad (3.13)$$

Dans cette relation, le produit par  $u$  donne une addition avec toutes les colonnes de  $\begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix}$ .

L'existence de  $x$  peut être déduite par les conditions suivantes :

$$\bullet \frac{y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda, \quad \text{si} \quad y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u > 0, \quad (3.14)$$

$$\bullet \frac{y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u} \leq \lambda, \quad \text{si} \quad y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u < 0, \quad (3.15)$$

$$\bullet y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{si} \quad y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u = 0 \quad (3.16).$$

### 6. Le calcul du temps de cycle d'un graphe d'événements P-temporel

Après avoir prouvé l'existence du temps de cycle dans un graphe d'événements P-temporel, avec un comportement 1-périodique on calcule ensuite les bornes minimale et maximale du temps de cycle par la manière suivante :

#### 6.1 Obtention de modèle Algébrique sous forme $Ax \leq b$ [4]

Si nous simplifions l'écriture (3.8) avec  $x(k) = x$ . On obtient ainsi une formulation du type programmation linéaire de la forme :  $\min \lambda$  (respectivement,  $\max \lambda$ ) sous la contrainte de la forme  $Ax \leq b$ .

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) & G_0^- \times u \\ (G_1^+ + G_0^+) & G_0^+ \times u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Cette écriture peut être simplifiée car On a :

$$G_1^- + G_0^- = w \text{ et } G_1^+ + G_0^+ = -w$$

$G_0^- \times u = -w^- \times u = -M_0$  (ce qui correspond à la somme des colonnes de  $-W$ ), ce qui représente le marquage initial. De même, on a :  $G_0^+ \times u = w^- \times u = M_0$ .

Ce résultat est également vrai lorsque chaque place a initialement un jeton au plus.

Alors on peut écrire (3.15) comme suit :

$$\begin{pmatrix} w & -M_0 \\ -w & M_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

En appliquant un algorithme de la programmation linéaire, on pourra ainsi déterminer la valeur optimale de  $\lambda$ . La solution est de borner par dessous (respectivement, par dessus) par un minorant (respectivement, un majorant) fini le problème de minimisation (respectivement, maximisation). Le minorant de l'état  $x$  (respectivement, majorant) est noté  $L$  (respectivement, noté  $U$ ).

### 6.2 Exemple d'application

Une cellule de production de pots de peinture est donnée par la figure (3.7). Elle est constituée de deux machines. La première machine *M1* s'occupe du malaxage (mélange des différentes couleurs) et du chargement de la peinture dans les pots. Cette opération dure au minimum 2 unités de temps, et au maximum 7 unités de temps (sinon, il y aura un débordement du produit et le pot devra être retiré de la chaîne de production). Le temps de fermeture des pots, remplis par la machine *M2*, est compris entre 1 au minimum (sinon le pot sera mal fermé) et 6 unités de temps au maximum (sinon, le pot sera fermée avec trop de force). Un premier convoyeur a besoin entre 2 et 5 unités de temps pour transporter les produits sortant de *M1* vers une zone de transition. Ces derniers transitent par *x3* pour atteindre un deuxième convoyeur qui met entre 1 et 4 unités de temps pour transporter les produits de la zone de transition vers la machine *M1*. On impose aux deux machines qu'ils ne restent pas libres au delà de 4 unités de temps. Les deux convoyeurs mettent un temps minimum de 1 unité temps pour retourner à leurs états initiaux une fois qu'ils ont livré un produit. Ils peuvent aussi attendre un produit jusqu'à 3 unités de temps.

Afin de modéliser ce système, on utilise donc le graphe d'événements P-temporels représenté dans la figure (3.7).

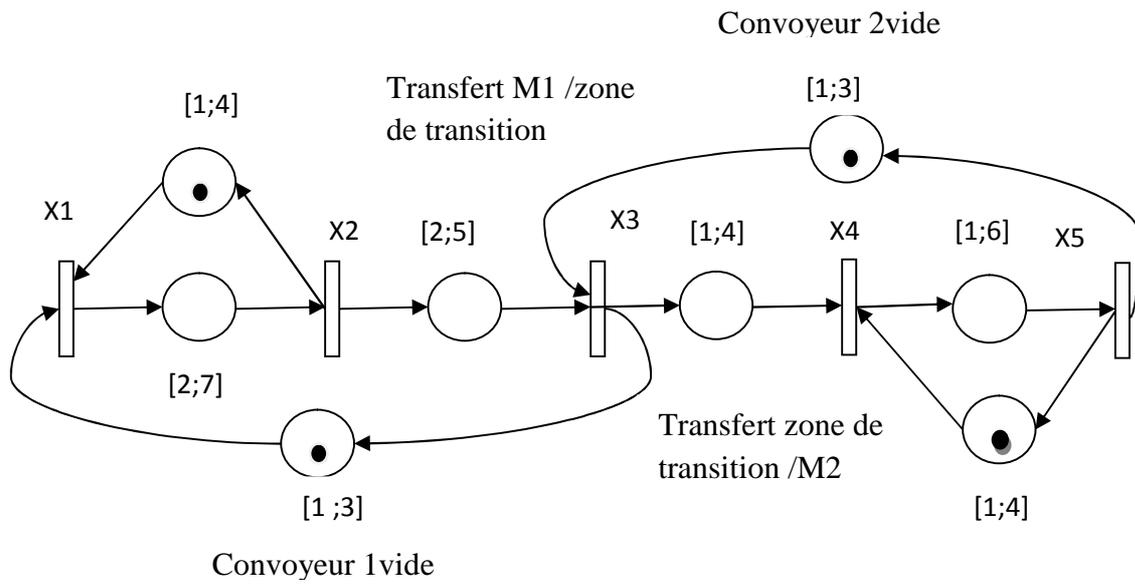


Figure (3.7): Graphe d'événements p-temporel qui représente le système

• Les équations :

$$-x_1(k) + x_3(k - 1) \leq -1$$

$$x_1(k) - x_3(k - 1) \leq 3$$

$$-x_1(k) + x_2(k - 1) \leq -1$$

$$x_1(k) - x_2(k - 1) \leq 4$$

$$-x_2(k) + x_1(k) \leq -2$$

$$x_2(k) - x_1(k) \leq 7$$

$$-x_3(k) + x_2(k) \leq -2$$

$$x_3(k) - x_2(k) \leq 5$$

$$-x_3(k) + x_5(k - 1) \leq -1$$

$$x_3(k) - x_5(k - 1) \leq 3$$

$$-x_4(k) + x_3(k) \leq -1$$

$$x_4(k) - x_3(k) \leq 4$$

$$-x_4(k) + x_5(k-1) \leq -1$$

$$x_4(k) - x_5(k-1) \leq 4$$

$$-x_5(k) + x_4(k) \leq -1$$

$$x_5(k) - x_4(k) \leq 6$$

Si on pose  $x(k) = (x_1(k); x_2(k); x_3(k); x_4(k); x_5(k))^t$  On obtient la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \\ x_5(k-1) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ou :

$$G_1^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_0^- = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G_1^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_0^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et on a :

$$-T^- = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, T^+ = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}. \text{ On a : } W = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

- **Preuve d'existence de temps de cycle :**

Nous analysons l'existence du temps de cycle, en utilisant le lemme de Farkas

Un vecteur  $y \geq 0$  avec  $y \times \begin{pmatrix} w \\ -w \end{pmatrix} = 0$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u = [-1 - 1 \ 0 \ 0 - 1 \ 0 - 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^t$$

$$y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 - 1]^t$$

$$y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} = [2 \ 3 \ 5 \ 3 \ 2 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 7 \ 8 \ 5 \ 8 \ 7 \ 8 \ 10 \ 8 - 5]^t$$

Pour  $\frac{y \times \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \times u}$ , on obtient la borne supérieure  $\lambda_{max} = \frac{10}{1}$  et la borne inférieure  $\lambda_{min} = \frac{-5}{-1}$

Le temps de cycle obtenu par l'approche de farkas est  $\lambda_{max} = 10 \quad \lambda_{min} = 5$

- **Le calcul du temps de cycle du graphe d'événements P-temporel de la figure en utilisant la programmation linéaire**

Après avoir prouver l'existence du temps de cycle dans un graphe d'événements P-temporel, avec un comportement 1-périodique on calcule ensuite les bornes minimale et maximale du temps de cycle en utilisant la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} w & -M_0 \\ -w & M_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ou : } M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On obtient alors la forme du type  $A \times x \leq b$  suivante :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ \lambda \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En utilisant la programmation linéaire sous Matlab pour optimiser (minimiser, maximiser) le temps de cycle, on obtient les résultats suivantes :

$$lb = 0, ub = 15$$

X =

3.7981

5.7981

7.7981

9.0599

11.0284

5.0000

$\lambda_{min} = 5$  Unités de temps

X =

0.0000

6.0000

8.0000

9.0000

15.0000

10.0000

$\lambda_{max} = 10$  Unités de temps

Donc :  $5 \leq \lambda \leq 10$

### Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de performances des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard. Deux parties pour analyser le temps de cycle sont présentées. La première partie est l'application du lemme de Farkas pour déterminer les bornes encadrant le temps de cycle. Les expressions des bornes obtenues dépendent uniquement des caractéristiques du graphe d'événements P-temporel. Rappelons que l'inverse du temps de cycle est le taux de production. De ce fait, l'existence du temps de cycle est analysée.

La deuxième partie consiste à proposer des techniques efficaces permettant de calculer les bornes minimale et maximale du temps de cycle. A partir du modèle algébrique, nous montrons que les temps de cycle minimal et maximal peuvent simplement être obtenus moyennant l'utilisation d'algorithmes classiques de la programmation linéaire.

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour sujet principal les Systèmes à Événements Discrets qui peuvent être modélisés par les Graphes d'Événements Temporisés et temporels.

On a utilisé les propriétés mathématiques des treillis, de dioïdes qui permettent de décrire et d'analyser divers problèmes traités par la théorie des graphes. Ces graphes, qui sont une sous classe des Réseaux de Petri, permettent de modéliser, par exemple, de façon simple des opérations d'assemblage et de désassemblage de produits, présentes dans certains systèmes de production.

Dans ce mémoire, nous avons abordé le problème d'évaluation de performances d'un système de production modélisé par des GEP-temporel. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de performances des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard. Une première démarche a consisté à appliquer le lemme de Farkas pour déterminer les bornes encadrant le temps de cycle.

Une deuxième démarche consiste à appliquer la programmation linéaire afin de calculer le temps de cycle et l'état initial qui permettent d'obtenir un fonctionnement 1-périodique.

Une perspective à ce travail consiste à utiliser cette approche pour la commande de systèmes à événements discrets modélisés par les graphes d'événements temporels.

## Références bibliographiques

---

- [1] **L. HOUSSIN** : Contribution à la commande des systèmes (max; +)-linéaires. Applications aux réseaux de transport. Thèse de doctorat Ecole Doctorale d'Angers 2006
- [2] **M. LHOMMEAU** : Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+): Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations. Thèse, ISTIA - Université d'Angers, 2003.
- [3] **S. HAMACI** : Étude de graphes d'événements temporisés avec multiplieurs dans l'algèbre (min; +). Thèse de doctorat université d'Angers ISTIA école doctorale d'Angers 2006.
- [4] **A. GUEZZI** : Modélisation, analyse de performances et commande des systèmes à événements discrets, thèse doctorat, École Doctorat STIM, Science et technologie de l'information et de Mathématique, 2010.
- [5] **M. DIDI ALAOUI** : Etude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande. Thèse, doctorat Ecole Doctorale d'Angers, 2005
- [6] **LHARDOUIN** : Sur la Commande des Systèmes (max,+) Linéaires. DEA Automatique et Informatique Appliquée – Angers Septembre 2008
- [7] **A. MAIDI** : Cours d'optimisation appliquée, UMMTO 2016.
- [8] **R. KARA** : Cours Productique, UMMTO, 2016.
- [9] **C. CASSANDRAS and S. LAFORTUNE** : introduction to discrete event systems second edition, springer science +business, LCC, USA, 2008.
- [10] **S. GAUBERT** : Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, July 1992.
- [11] **A. GIUA, K. SEATZU**: A systems theory view of Petri nets, Did. Ingeneria Electronica, Università di Cagliari, Italy.
- [12] **S. GAUBERT**: Optimization and (min,+) Spectral Theory IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 40, no. 11, pages 1931–1934, November, 1995.
- [13] **M. GONDRAN et M. MINOUX** : Graphes et algorithmes ». Eyrolles, Paris, France, 1985.
-

## Références bibliographie

---

[14] **A.BENFEKIR** : Contribution à l'analyse de performances des Systèmes à Evénements Discrets nonlinéaires dans l'algèbre (min,+), Thèse doctorat, école doctorale de l'université de CERGY,2013.

[15] **G. COHEN** : Théorie Algébrique des systèmes à événements discrets, Centre Automatique et Systèmes Ecole des Mines de Parist1995.

[16] **S. GAUBERT** Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes. Thèse, École des Mines de Paris, July 1992.

[17] **M. Gondran et M. Minoux** : Graphes et algorithmes. Eyrolles, Paris, France,1979. Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984.

[18] **L.E HOIIOWAY,B.H.kROGH, A.GIUA**:A Survey of Petri Net methods for controlled discrete event systems,kluwer Academic publishers ,Boston. Manufactured in the Netherlands (1997).

## Résumé

Ce mémoire porte sur l'évaluation de performances d'un système de production modélisé par des GEP-temporel. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de performances des graphes d'événements P-temporels dans l'algèbre standard. Une première démarche a consisté à appliquer le lemme de Farkas pour déterminer les bornes encadrant le temps de cycle. Une deuxième démarche consiste à appliquer la programmation linéaire afin de calculer le temps de cycle et l'état initial qui permettent d'obtenir un fonctionnement 1-périodique. Dans la première partie, nous exposons un ensemble de concepts et d'outils mathématiques importants pour le traitement du problème posés dans ce mémoire. La deuxième partie se porte sur les réseaux de Petri en général, on étudie ainsi les RdP temporisé et temporels. Nous présentons ainsi une alternative à l'algèbre des dioïdes pour modéliser les graphes d'événements P-temporels au moyen d'un système d'inégalités dans l'algèbre conventionnelle. Exploitant ce modèle, nous montrons que nous pouvons analyser les performances du système. La technique sera d'associer à ces graphes un problème de programmation linéaire. Le problème d'évaluation de performances des graphes d'événements P-temporels fait l'objet de la troisième partie. Habituellement dans l'algèbre  $(\max,+)$ , on applique certains résultats de base de la théorie spectrale, pour évaluer les performances des graphes d'événements temporisés. Nous nous sommes intéressés à l'évaluation des performances des graphes d'événements P-temporels en utilisons le modèle de la forme  $Ax \leq b$ . Pour cela, considérant un comportement 1-périodique, l'application du lemme de Farkas permettra de prouver l'existence du temps de cycle et la détermination des bornes encadrant le temps de cycle en utilisant la programmation linéaire.

**Mots-clés** : Systèmes à événements discrets, Réseaux de petri, Graphes d'événement p-temporels, Graphes d'événement temporisés, temps de cycle.