

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



*Spécialité : Mathématiques Option :
Probabilités et statistique Mémoire de
fin de cycle intitulé :*

**Sur les paramètres d'un processus autorégressif
d'ordre deux en fonction de son polynôme
caractéristique.**

Réalisé par :
FRITIH Lila

Encadré par :
M^{me} Slimi Farida

Soutenu devant le jury d'examen composé de :

M^{me} Moussouni Samia ,	Maître assistante A, UMMTO, Présidente.
M^{me} Slimi Farida ,	Maître de conférence B, UMMTO, Rapporteuse.
M^r Goubi Mouloud,	Maître de conférence A, UMMTO, Copromoteur.
M^{me} Bouzian Houria,	Maître assistante A, UMMTO, Examinatrice.

2025/2026

Remerciements

Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la santé, et la patience de mener à terme ce présent travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui m'ont soutenue et accompagnée tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement mon encadreuse, **Mme. Slimi Farida**, pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son accompagnement rigoureux qui ont grandement contribué à la réussite de ce travail. également pour mon rapporteur **Mr. Goubi Mouloud** je le remercie pour sa disponibilité, pour ses nombreux conseils, pour ses corrections et son appréciation au cours de l'élaboration de ce travail.

Je souhaite également remercier les membres du jury pour le temps qu'ils consacreront à l'évaluation de ce mémoire.

Je tiens à adresser un remerciement tout particulier à mon mari, pour son soutien inconditionnel, sa patience et ses encouragements constants qui m'ont permis de mener à bien ce projet.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et à mes amis pour leur présence et leur soutien moral tout au long de ce parcours.

Enfin, je remercie toutes les personnes et institutions qui, de près ou de loin, ont participé à l'aboutissement de ce mémoire.

Table des matières

Notations	3
Introduction générale	5
1 Les suites de nombres satisfaisant la récurrence à trois termes	7
1.1 Introduction	7
1.2 Les suites et séries numérique	7
1.2.1 La convergence d'une série numérique	7
1.2.2 Série entière	8
1.2.3 Produit de Cauchy	8
1.3 Suites de nombre spéciales	8
1.3.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1	8
1.3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	8
1.4 Fonction génératrice	9
1.5 Calcul du terme général d'une suite	12
1.5.1 La formule de Binet d'une suite A_n	12
1.5.2 La formule de Binet de la suite a_n	15
1.6 La suite des nombres de Fibonacci	16
1.7 La fonction génératrice du produit	16
1.8 Formule de Binôme	17
2 Les processus autorégressifs	19
2.1 Introduction	19
2.2 Définition et propriétés	19
2.2.1 La stationnarité	20
2.2.2 Processus Bruit blanc	21
2.2.3 Décomposition de Wold	21
2.2.4 Opérateur retard	22
2.2.5 Opérateur de différence	23
2.2.6 Polynôme caractéristique	24
2.3 Processus autorégressifs	24
2.4 Processus autorégressifs d'ordre deux	24
2.5 Inversion d'un processus autorégressif	26
2.5.1 Calcul des coefficients π_j	27
2.5.2 Fonction d'autocovariance de Y_t	30
2.5.3 La fonction d'autocorrélation de Y_t	33

3 L'autocovariance et l'autocorrélation en fonction des coefficients :	
méthode algébrique	36
3.1 Introduction	36
3.2 Applications numérique pour le calcul des paramètres d'un $AR(2)$ en fonction de (ϕ_1, ϕ_2)	40
Conclusion générale	45
Bibliographie	46

Notations

$[n]$: La partie entière de n .

$n!$: Le factoriel de n .

$\binom{n}{k}$: Le coefficient binomial, avec $0 \leq k \leq n$.

$AR(p)$: Modèle autorégressif d'ordre p .

$MA(q)$: Modèle moyenne mobile d'ordre q .

π_j : Le coefficient de l'inverse du polynôme caractéristique.

$\gamma(\cdot)$: La fonction d'autocovariance.

$\rho(\cdot)$: La fonction d'autocorrélation.

$\mathbb{E}(\cdot)$: La fonction moyenne.

$\text{Var}(\cdot)$: La variance.

$\text{Cov}(\cdot)$: La covariance.

$\text{Corr}(\cdot)$: La corrélation.

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: La loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 .

l : Opérateur retard.

∇ : Opérateur de différence.

Introduction

Les séries chronologiques sont un sujet d'actualité a connu un développement très important aussi bien du point de vue théorique que pratique. Les processus autorégressifs occupent une place centrale dans l'analyse des séries temporelles, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser la dépendance d'une variable avec ses propres valeurs passées. Un processus autorégressif d'ordre deux, abrégé $AR(2)$, constitue l'un des cas les plus simples permettant d'introduire des dynamiques complexes, comme des effets de mémoire ou des comportements oscillatoires.

Ce type de processus est entièrement défini par deux paramètres, qui contrôlent l'influence des deux périodes précédentes sur la valeur actuelle. Pour étudier les propriétés fondamentales d'un tel processus, en particulier la stationnarité, on s'appuie sur ce que l'on appelle le polynôme caractéristique associé au modèle. Ce polynôme permet de relier les paramètres du modèle à des conditions mathématiques qui garantissent que le processus ne dérive pas dans le temps, c'est-à-dire qu'il reste centré autour d'une moyenne constante et présente une variance stable.

L'analyse des racines de ce polynôme fournit des informations précieuses sur la stabilité du processus et sur la forme que peuvent prendre ses fluctuations. Selon la position de ces racines par rapport au cercle unité dans le plan complexe, le processus peut être stationnaire, présenter des oscillations amorties, ou au contraire devenir non stationnaire.

Ainsi, l'étude des paramètres d'un processus $AR(2)$ à travers son polynôme caractéristique est une étape essentielle pour comprendre et maîtriser son comportement temporel, en particulier dans le cadre de la modélisation, de la prévision, ou encore de l'analyse structurelle des séries temporelles économiques ou financières. Les modèles autorégressifs d'ordre deux nécessitent l'utilisation des suites de nombres satisfaisant des récurrences linéaires d'ordre deux et leurs produits. Ces nombres sont l'objet de plusieurs travaux récents. Boughaba et al [2], ont construit des fonctions génératrices du produit. Ils sont proposés pour donner une autre approche pour calculer les coefficients d'un modèle moyenne mobile d'ordre infini $MA(\infty)$ [1]. L'étude de ces suites permet de mettre en évidence des techniques puissantes d'analyse, telles que la résolution des équations de récurrence. Les

résultats obtenus sont utiles dans le traitement de nombreux problèmes de prédiction [5, 6, 8, 10, 25, 26, 30, 31, 32].

Le mémoire est organisé en trois chapitres dont le contenu est le suivant : Dans le premier chapitre des rappels, nous citons les suites récurrentes linéaires et certaines propriétés de base. Dans le deuxième chapitre, on donne un bref aperçu sur les séries chronologiques, le bruit blanc, la fonction d'autocovariance, la fonction d'autocorrélation, la décomposition de Wold, le modèle autorégressif d'ordre 2 et les différentes expressions des paramètres associés en fonction des racines du polynôme caractéristique. Le dernier chapitre est consacré à déterminer les formules des paramètres associés à un $AR(2)$ en fonction seulement des coefficients du polynôme caractéristique au lieu des racines et on termine par quelques applications numériques.

Chapitre 1

Les suites de nombres satisfaisant la récurrence à trois termes

1.1 Introduction

Les suites définies par une relation de récurrence jouent un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques, notamment en algèbre [12, 27], en analyse[24] et en théorie des nombres[16, 18]. Parmi elles, les suites satisfaisant une récurrence linéaire à trois termes qui occupent une place particulière, par leur structure simple et leur richesse mathématique.

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions des suites récurrentes linéaires et certaines propriétés de base.

1.2 Les suites et séries numériques

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes, la série numérique associée est donnée par l'expression suivante :

$$\sum_{n \geq 0} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \quad (1.1)$$

Cette expression représente une somme finie en générale s'écrit sous la forme

$$S_n = \sum_{k \geq n} u_k, \quad \text{suite des sommes partielles.} \quad (1.2)$$

1.2.1 La convergence d'une série numérique

1. La série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite convergente si la somme S_n a une limite finie quand $(n \rightarrow \infty)$ c'est à dire $\sum_{n \geq 0} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

2. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge si la limite n'existe pas ou est infinie.
3. La série est absolument convergente si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

1.2.2 Série entière

On appelle série entière toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$,

1.2.3 Produit de Cauchy

Définition 1.1. [9] Soient $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ et $g(t) = \sum_{n \geq 0} b_n t^n$ deux séries entières.

Le produit de Cauchy de ces deux séries est :

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n t^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) t^n. \end{aligned}$$

1.3 Suites de nombre spéciales

1.3.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Définition 1.2. [23] Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 1 si elle est définie par :

$$a_n = \alpha a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.3)$$

Avec a_0 une valeur initiale et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

1.3.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 1.3. [23] Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente linéaires d'ordre deux est définie par :

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (1.4)$$

Avec les premiers termes $a_0 = a$ et $a_1 = b$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$.

1.4 Fonction génératrice

Définition 1.4. [9] Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $G(t)$ la fonction génératrice de la suite récurrente linéaire $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n. \quad (1.5)$$

Exemple 1.1. Pour la suite constante $a_n = 1$, la fonction génératrice est

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1. \quad (1.6)$$

En effet on a

$$\begin{aligned} G(t, n) &= \sum_{k=0}^n a_k t^k \\ &= 1 + t + t^2 + \dots + t^n \\ &= \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}. \end{aligned}$$

$G(t, n)$ représente la somme partielle de la suite géométrique t^j du premier terme 1 et de raison t qui converge pour $|t| < 1$. On a alors $G(t) = \frac{1}{1-t}$.

Théorème 1.1. [13] La fonction génératrice de la suite récurrente linéaire d'ordre deux $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par :

$$G(t) = \frac{a + (b - \alpha a) t}{1 - \alpha t - \beta t^2}. \quad (1.7)$$

Démonstration. On a

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

nous multiplions les deux membres de la récurrence par t^n

$$a_n t^n = \alpha a_{n-1} t^n + \beta a_{n-2} t^n,$$

alors, la somme à partir de 2 s'écrit comme

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} a_n t^n &= \alpha \sum_{n \geq 2} a_{n-1} t^n + \beta \sum_{n \geq 2} a_{n-2} t^n \\ &= \alpha \sum_{n \geq 1} a_n t^{n+1} + \beta \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+2} \\ &= \alpha t \sum_{n \geq 1} a_n t^n + \beta t^2 \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \end{aligned}$$

et nous changeons l'indice de sommation

$$-a_0 - a_1 t + \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \alpha t \sum_{n \geq 0} a_n t^n - a_0 \alpha t + \beta t^2 \sum_{n \geq 0} a_n t^n,$$

qui permet d'écrire

$$(1 - \alpha t - \beta t^2) \sum_{n \geq 0} a_n t^n = a_0 + a_1 t - a_0 \alpha t.$$

Finalement, la fonction génératrice $G(t)$ est:

$$G(t) = \frac{a_0 + (a_1 - a_0 \alpha) t}{1 - \alpha t - \beta t^2}.$$

Le remplacement de a_0 et a_1 par leurs valeurs permet d'écrire

$$G(t) = \frac{a + (b - a\alpha) t}{1 - \alpha t - \beta t^2}.$$

□

Pour se mettre dans le langage des séries chronologiques, on considère la suite de nombres A_n , donnée par la relation de récurrence suivante :

$$A_n = -\frac{a_1}{a_0} A_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} A_{n-2}, \quad a_0 \neq 0, \forall n \geq 2, \quad (1.8)$$

avec $A_0 = \frac{1}{a_0}$ et $A_1 = -\frac{a_1}{a_0^2}$.

Théorème 1.2. [15] La fonction génératrice de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2} = \sum_{n \geq 0} A_n t^n. \quad (1.9)$$

Preuve. Soit $G(t)$ la fonction génératrice de A_n définie par

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} A_n t^n.$$

On a

$$A_n = -\frac{a_1}{a_0} A_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} A_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

nous multiplions les deux membres de la récurrence par t^n

$$A_n t^n = -\frac{a_1}{a_0} A_{n-1} t^n - \frac{a_2}{a_0} A_{n-2} t^n,$$

alors, la somme à partir de 2 s'écrit comme

$$\sum_{n \geq 2} A_n t^n = -\frac{a_1}{a_0} \sum_{n \geq 2} A_{n-1} t^n - \frac{a_2}{a_0} \sum_{n \geq 2} A_{n-2} t^n,$$

et nous changeons l'indice de sommation

$$-A_0 - A_1 t + \sum_{n \geq 0} A_n t^n = -\frac{a_1}{a_0} t \sum_{n \geq 0} A_n t^n + \frac{a_1}{a_0} A_0 t - \frac{a_2}{a_0} t^2 \sum_{n \geq 0} A_n t^n,$$

qui permet d'écrire

$$\left(1 + \frac{a_1}{a_0}t + \frac{a_2}{a_0}t^2\right) \sum_{n \geq 0} A_n t^n = A_0 + A_1 t + \frac{a_1}{a_0} A_0 t.$$

Finalement, la fonction génératrice $G(t)$ est:

$$G(t) = \frac{A_0 + \left(\frac{a_1}{a_0} A_0 + A_1\right) t}{1 + \frac{a_1}{a_0} t + \frac{a_2}{a_0} t^2},$$

soit, après simplification ;

$$G(t) = \frac{a_0 A_0 + (a_1 A_0 + a_0 A_1) t}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}.$$

Le remplacement de A_0 et A_1 par leurs valeurs permet d'écrire

$$G(t) = \frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}.$$

Le chemin inverse de la fonction génératrice à la récurrence précédente est assuré par le calcul suivant.

$$\begin{aligned} 1 &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \sum_{n \geq 0} A_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^2 a_n t^n \sum_{n \geq 0} A_n t^n. \end{aligned}$$

En utilisant le produit de Cauchy pour le polynôme $P(t) = \sum_{n=0}^2 a_n t^n$ et la série

$\sum_{n \geq 0} A_n t^n$, on obtient :

$$1 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k A_{n-k} \right) t^n,$$

On pose

$$c_n = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k A_{n-k}.$$

et on écrit

$$1 = \sum_{n \geq 0} c_n t^n,$$

avec $c_0 = 1$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$.

On obtient alors :

$$\sum_{n \geq 0} c_n t^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} a_k A_{n-k} \right) t^n.$$

Par identification on aura :

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{a_0} & \text{si } n=0 \\ -\frac{a_1}{a_0} & \text{si } n=1 \\ -\frac{a_1}{a_0} A_{n-1} - \frac{a_2}{a_0} A_{n-2} & \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Tout au long de ce travail on considère $a_0 = 1$ et la récurrence devient

$$A_n = -a_1 A_{n-1} - a_2 A_{n-2}. \quad (1.10)$$

Dans le cas $a_0 = 1$, $a_1 = \alpha$ et $a_2 = \beta$. La fonction génératrice de A_n est

$$G(t) = \frac{1}{1 - \alpha t - \beta t^2} = \sum_{n \geq 0} A_n t^n$$

1.5 Calcul du terme général d'une suite

La formule de Binet est une expression mathématique explicite qui permet de calculer directement le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite récurrente linéaire à savoir à calculer tous les termes précédents.

1.5.1 La formule de Binet d'une suite A_n

Théorème 1.3. [9] La formule de Binet d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux A_n est donné dans le théorème suivant.

$$A_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}. \quad (1.11)$$

Démonstration. Soit $P(t) = 1 - a_1 t - a_2 t^2$

Calculons les racines du polynôme $P(t)$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1^2 + 4a_2 \\ t_1 &= \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \\ t_2 &= \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}. \end{aligned}$$

On peut réécrire le polynôme $P(t)$ en fonction de t_1 et t_2

$$\begin{aligned} P(t) &= -a_2(t - t_1)(t - t_2) \\ &= -a_2 t_1 t_2 \left(\frac{t}{t_1} - 1 \right) \left(\frac{t}{t_2} - 1 \right) \\ &= -a_2 t_1 t_2 \left(1 - \frac{1}{t_1} t \right) \left(1 - \frac{1}{t_2} t \right). \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned} t_1 t_2 &= \left(\frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2} \right) \left(\frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2} \right) \\ &= \frac{-1}{a_2} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} P(t) &= \left(1 - \frac{1}{t_1} t \right) \left(1 - \frac{1}{t_2} t \right) \\ &= (1 - \alpha t)(1 - \beta t). \end{aligned}$$

Avec $\alpha = \frac{1}{t_1}$ et $\beta = \frac{1}{t_2}$

Et l'inverse de $P(t)$ est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(t)} &= \sum_{n \geq 0} A_n t^n \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha t)(1 - \beta t)} \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha t)} \cdot \frac{1}{(1 - \beta t)} \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} \alpha^n t^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} \beta^n t^n \right), \end{aligned}$$

pour notre cas $a_n = \alpha^n$ et $b_n = \beta^n$ en utilisant le produit de Cauchy on aura :

$$\frac{1}{P(t)} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \alpha^k \beta^{n-k} t^n \quad (1.12)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{t_1} \right)^k \left(\frac{1}{t_2} \right)^{n-k} t^n, \quad (1.13)$$

et

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{t_1}\right)^k \left(\frac{1}{t_2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{t_1}\right)^k \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \left(\frac{1}{t_2}\right)^{-k} t^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^k \left(\frac{1}{t_2}\right)^n t^n \\
&= \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^k t^n \\
&= \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \frac{1 - \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{n+1}}{1 - \frac{t_2}{t_1}} \\
&= \left(\frac{1}{t_1 t_2}\right)^n \frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2}. \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Finalement $\frac{1}{P(t)} = \sum_{n \geq 0} A_n t^n$ avec

$$\begin{aligned}
A_n &= \left(\frac{1}{t_1 t_2}\right)^n \frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2} \\
&= \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.
\end{aligned}$$

On obtient la formule de Binet définie précédemment. \square

Proposition. *La formule de la suite a_n en fonction de A_n est donnée par*

$$a_n = A_n + (b - a\alpha)A_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{1.15}$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n \geq 0} A_n t^n = \frac{1}{1 - \alpha t - \beta t^2}$$

et

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{a + (b - a\alpha)t}{1 - \alpha t - \beta t^2}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} a_n t^n &= \left(\frac{1}{1 - \alpha t - \beta t^2}\right) (a + (b - a\alpha)t) \\
&= (a + (b - a\alpha)t) \sum_{n \geq 0} A_n t^n \\
&= a \sum_{n \geq 0} A_n t^n + (b - a\alpha) \sum_{n \geq 0} A_n t^{n+1}
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n \geq 0} A_n t^{n+1} = \sum_{n \geq 1} A_{n-1} t^n$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n t^n &= a \sum_{n \geq 0} A_n t^n + (b - a\alpha) \sum_{n \geq 1} A_{n-1} t^n \\ &= a + \sum_{n \geq 0} (A_n + (b + a\alpha)A_{n-1}) t^n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Théorème 1.4. *La formule de la suite a_n en fonction de α et β est donnée par*

$$a_n = \frac{1}{\beta - \alpha} [(b - a\alpha + \beta)\beta^n + (a\alpha - b - \alpha)\alpha^n]. \quad (1.16)$$

Démonstration. D'après les formules (1.11) et (1.15) on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} + (b - a\alpha) \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} + (b - a\alpha)(\beta^n - \alpha^n)] \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [b\beta^n - b\alpha^n - a\alpha\beta^n + a\alpha^n\alpha + \beta^n\beta - \alpha^n\alpha] \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [(b - a\alpha + \beta)\beta^n + (a\alpha - b - \alpha)\alpha^n]. \end{aligned}$$

\square

1.5.2 La formule de Binet de la suite a_n

Théorème 1.5. [9] *La formule de Binet de la suite a_n est donnée par la relation suivante*

$$a_n = \frac{t_1 t_2^{-n} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2}, \text{ avec } t_1, t_2 \text{ racines de } P(t). \quad (1.17)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{t_1}\right)^k \left(\frac{1}{t_2}\right)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{t_1}\right)^k \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \left(\frac{1}{t_2}\right)^{-k} \\ &= \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^k \\ &= \left(\frac{1}{t_2}\right)^n \left(\frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2}\right) \left(\frac{t_1}{t_1^{n+1}}\right) \\ &= \frac{t_1 t_2^{-n} - t_2^{n+1}}{t_1 - t_2}. \end{aligned}$$

\square

1.6 La suite des nombres de Fibonacci

Définition 1.5. La suite de nombres de Fibonacci [7, 17, 22] est définie par la relation de récurrence suivante

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad (1.18)$$

avec les premiers termes $F_0 = 0, F_1 = 1$. Un simple calcul permet de trouver sa fonction génératrice définie comme suit :

$$\sum_{n \geq 0} F_n t^n = \frac{t}{1 - t - t^2}. \quad (1.19)$$

C'est un cas particulier de la suite récurrente d'ordre deux (1.4), avec $\alpha = \beta = 1$, $a = F_0$ et $b = F_1 = 1$. En effet on a :

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{n \geq 0} F_n t^n \\ &= F_0 + F_1 t + \sum_{n \geq 2} F_n t^n \\ &= F_0 + F_1 t + \sum_{n \geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) t^n \\ &= F_0 + F_1 t + \sum_{n \geq 0} F_n t^{n+1} + \sum_{n \geq 0} F_n t^{n+2} \\ &= F_0 + F_1 t + t \sum_{n \geq 0} F_n t^n + t^2 \sum_{n \geq 0} F_n t^n, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$t = (1 - t - t^2)A(t),$$

et le résultat découle.

1.7 La fonction génératrice du produit

Le produit $a_n a_n^*$ de deux suites de nombres satisfaisant la récurrence d'ordre deux est étudié dans [14], les premiers termes de a_n et a_n^* sont $a_0 = a, a_1 = b, a_0^* = a'$ et $a_1^* = b'$, et la relation de récurrence sous forme vectorielle est :

$$(a_{n+2}, a_{n+2}^*) = p(a_{n+1}, a_{n+1}^*) + q(a_n, a_n^*), \text{ avec } p, q \in \mathbb{N}.$$

Ainsi les fonctions génératrices de a_n et a_n^* sont respectivement

$$\frac{a - (ap - b)z}{1 - pz - qz^2} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad (1.20)$$

et

$$\frac{a' - (a'p - b')z}{1 - pz - qz^2} = \sum_{n \geq 0} a_n^* z^n. \quad (1.21)$$

La fonction génératrice de $a_n a_n^*$ est :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n a_n^* z^n &= \frac{aa' + (bb' - aa'p^2)z}{1 - p^2z - (2qp^2 + 2q^2)z^2 - (pq)^2z^3 + q^4z^4} \\ &+ \frac{(a'qbp + aqb'p - aa'(2qp^2 + q^2))z^2 - q^2(b' - a'p)(b - ap)z^3}{1 - p^2z - (2qp^2 + 2q^2)z^2 - (pq)^2z^3 + q^4z^4}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Pour la preuve voir [14, Theorem 3.1] en posant $x = y = 1$, $a' = b$, $b' = aq + bp$, $p' = p$ et $q' = q$. Par la suite, la fonction génératrice de $a_n a_{n+1}$ est :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n a_{n+1} z^n &= \frac{ab + (pb^2 + qab - abp^2)z}{1 - p^2z - (2qp^2 + 2q^2)z^2 - (pq)^2z^3 + q^4z^4} \\ &+ \frac{(qpb^2 + pq^2a^2 - abqp^2 - abq^2)z^2 - aq^3(b - ap)z^3}{1 - p^2z - (2qp^2 + 2q^2)z^2 - (pq)^2z^3 + q^4z^4}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Finalement pour $a = a'$ et $b = b'$, la fonction génératrice de a_n^2 est :

$$\sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n = \frac{a^2 + (b^2 - a^2p^2)z + (2aqbp - a^2(2qp^2 + q^2))z^2 - q^2(b - ap)^2z^3}{1 - p^2z - (2qp^2 + 2q^2)z^2 - (pq)^2z^3 + q^4z^4}. \quad (1.24)$$

Ces produits sont importants pour étudier les modèles autorégressifs d'ordre deux, comme on le verra dans le dernier chapitre. Ces fonctions génératrices permettent de calculer explicitement les fonctions d'autocovariances et les fonctions d'auto-corrélations.

1.8 Formule de Binôme

Soient a_1 et a_2 deux nombres quelconques et $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial

Lemme 1.1. *La formule de binôme Newton est donnée par :*

$$(a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.25)$$

On sait que

$$\sum_{n \geq 0} (at)^n = \frac{1}{1 - at}.$$

Une autre manière de trouver l'inverse de polynôme $P(t)$ en utilisant la formule de

binôme et la somme d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(t)} &= \frac{1}{1 - a_1 t - a_2 t^2} \\ &= \frac{1}{1 - (a_1 t + a_2 t^2)} \\ &= \sum_{n \geq 0} (a_1 t + a_2 t^2)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_1 t)^{n-k} (a_2 t^2)^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_1^{n-k} a_2^k t^{n+k}.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Les processus autorégressifs

2.1 Introduction

La structure probabiliste d'un tel processus est déterminée par sa distribution de probabilité conjointe, dont l'analyse est très compliquée. Heureusement, une grande partie de l'information contenue dans ces distributions peut être décrite en termes de moments centraux et non centraux (moyenne, variance, covariance, ...).

2.2 Définition et propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et T l'ensemble des indices de temps la distance entre deux valeurs successive la même partout. Un processus stochastique Y_t est l'ensemble $\{Y_t, t \in T\}$, ou Y_t sont des variables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 2.1. (Brockwell 1991 [3]) Une série chronologique (ou temporelle) est un ensemble de données Y_t , chacune étant enregistrée à un moment précis t . Autrement dit, une série chronologique c'est une suite finie d'observations $(Y_t)_{t=1, \dots, T}$.

La fonction moyenne, la variance, la covariance sont donnée par :

1. La fonction moyenne du processus stochastique $\{Y_t, t \in T\}$ est la fonction définie par :

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mu_t, t \in T$$

2. La variance du processus stochastique $\{Y_t, t \in T\}$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \mathbb{E}[(Y_t - \mu)^2] \\ &= \mathbb{E}(Y_t)^2 - \mathbb{E}^2(Y_t) \\ &= \sigma_t^2, t \in T. \end{aligned}$$

3. La fonction d'autocovariance du processus stochastique $\{Y_t, t \in T\}$, notée $\gamma_{t_1 t_2}$ est définie par :

$$\gamma_{t_1 t_2} = \mathbb{E}[(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2})], \tag{2.1}$$

autrement

$$\gamma_{t_1 t_2} = \text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2}). \quad (2.2)$$

4. La fonction d'autocorrélation est définie comme le rapport entre les fonctions d'autocovariance et la variance de la série :

$$\rho_{t_1, t_2} = \frac{\mathbb{E}[(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2})]}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}} \quad (2.3)$$

Par définition, on a donc $\rho(0) = 1$.

Remarques 2.1. – La fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation ne dépend que du décalage $h = t_2 - t_1$

$$\gamma(h) = \text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_1+h})$$

- La fonction d'autocorrélation normalise la fonction d'autocovariance par la variance, ce qui permet de comparer les corrélations à différents décalages.

2.2.1 La stationnarité

Avant de modéliser une série temporelle, plusieurs étapes préliminaires sont nécessaires. Pour appliquer les méthodes classiques des séries temporelles, il faut vérifier que les séries étudiées évoluent dans un état "d'équilibre statistique" dans le sens où les propriétés probabilistes et statistiques ne changent pas dans le temps. De tels processus sont dits stationnaires. Il existe deux types de stationnarité : (la stationnarité forte et la stationnarité faible).

a)-La stationnarité forte ou stationnarité stricte :

Définition 2.2. [20] Le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ est strictement stationnaire ou fortement stationnaire si la distribution conjointe de $Y_{t_1} \cdots Y_{t_n}$ est la même que celle de $Y_{t_1-k} \cdots Y_{t_n-k}, t_i \in T, i = 1, \dots, n$, et pour tout $k \in T$.

b)-La stationnarité faible ou stationnarité d'ordre deux :

Définition 2.3. [19] Le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ est dit faiblement stationnaire ou stationnaire au second ordre si les conditions suivantes sont vérifiées

1. $\mathbb{E}(Y_t) = \mu, \forall t \in \mathbb{T}$
2. $\text{Var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{T}$
3. $\text{Cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = \gamma_h, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{T}, \forall h \in \mathbb{T}$.

Si le processus $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ est un processus faiblement stationnaire, alors la moyenne et la variance sont indépendantes du temps, et la fonction d'autocovariance

ne dépend que du décalage h entre t_1 et t_2 [11]. La fonction d'autocovariance (2.2) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\gamma(h) = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.4)$$

Et de même pour la fonction d'autocorrélation (2.3).

$$\rho(h) = \text{Corr}(Y_t, Y_{t+h}), \quad t \in \mathbb{T}. \quad (2.5)$$

- Remarques 2.2.**
1. ρ_h représente l'expression de lien linéaire entre le présent et le passé d'ordre h .
 2. $\rho(h) \in [-1, 1]$ et les fonctions $\gamma(h)$ et $\rho(h)$ sont symétriques.
 3. La stationnarité stricte implique la stationnarité faible lorsque les deux premiers moments existent.

2.2.2 Processus Bruit blanc

Parmi les processus stationnaires, il existe des processus particuliers, qui sont les processus bruits blancs.

Définition 2.4. [4] Soit le processus $\{\epsilon_t, t \in T\}$ un bruit blanc s'il satisfait les trois conditions suivantes :

1. $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$
2. $\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \sigma^2$
3. $\mathbb{E}(\epsilon_{t_1}, \epsilon_{t_2}) = 0, \quad t_1 \neq t_2$

Autrement le processus $\{\epsilon_t, t \in T\}$ un bruit blanc qui suit une loi normale définit par

$$\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

2.2.3 Décomposition de Wold

L'énoncé de théorème de Wold (1938) qui établit une décomposition de processus du second ordre, ce théorème donne une justification théorique de l'utilité de la classe des modèles linéaires à coefficients constants. En effet, le théorème de Wold (1938) est un théorème fondamental de l'analyse des séries temporelles stationnaires. l'énoncé de ce théorème est le suivant :

Théorème 2.1. [4] (*Décomposition de Wold (1938)*) *Tout processus, du second ordre, faiblement stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ possède une décomposition unique donnée par :*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} + V_t, \quad (2.6)$$

où les paramètres ψ_j sont des réels satisfaisant $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc et la composante linéaire déterministe V_t vérifie $\text{Cov}(V_t, \epsilon_s) = 0$, pour tous les s et t dans \mathbb{Z} .

Tout processus stationnaire peut s'écrire sous la forme d'une somme pondérée infinie des chocs passés (Théorème de Wold 1938). L'implication forte de ce théorème est que, si on connaît les pondérations ψ_j , $\forall j \in \mathbb{N}$ et la variance σ^2 du bruit blanc, alors on peut proposer une représentation de n'importe quel processus stationnaire. C'est un outil pour la modélisation des séries temporelles. Il existe des cas particuliers du théorème de Wold, qui sont utiles dans la pratique. Parmi ces cas, processus bruit blanc et d'autres représentations possibles, le cas de processus autorégressif d'ordre p , processus moyenne mobile d'ordre q ...

Tout au long de ce travail, nous considérons un processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, du second ordre et le processus bruit blanc de moyenne nulle ($\mu = 0$) et de variance qui vaut un ($\sigma^2 = 1$).

2.2.4 Opérateur retard

Définition 2.5. L'opérateur retard, souvent noté L ou B , est un outil fondamental dans l'analyse des séries temporelles. Il permet de manipuler les observations temporelles en décalant leur position dans le temps. L'opérateur retard défini par $LY_t = Y_{t-1}$ et d'une manière générale $L^k Y_t = Y_{t-k}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Propriété 2.1. On considère un processus stochastique stationnaire $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$.

1. L'opérateur retard est défini par :

$$L^j Y_t = Y_{t-j}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

En particulier :

$$L^0 Y_t = Y_t.$$

2. Si $Y_t = c$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ avec $c \in \mathbb{R}$, alors

$$L^j Y_t = L^j c = c, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

3. L'opérateur est additif en composition :

$$L^i(L^j Y_t) = L^{i+j} Y_t = Y_{t-i-j}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

En effet :

$$L^i(L^j Y_t) = L^i(Y_{t-j}) = Y_{t-j-i} = Y_{t-(i+j)}.$$

4. L'inverse de l'opérateur est donné par :

$$L^{-i}Y_t = Y_{t+i}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

5. La somme de deux opérateurs s'écrit :

$$(L^i + L^j)Y_t = L^iY_t + L^jY_t = Y_{t-i} + Y_{t-j}, \quad \forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2.$$

6. Si $|a| < 1$, alors l'inverse du polynôme $(1 - aL)$ appliqué à Y_t est donné par la série géométrique :

$$(1 - aL)^{-1}Y_t = \frac{Y_t}{1 - aL} = \lim_{j \rightarrow \infty} (1 + aL + a^2L^2 + \dots + a^jL^j)Y_t.$$

Cette propriété est particulièrement utile pour inverser les polynômes d'ordre 1 définis en l'opérateur retard.

En effet :

$$(1 - aL) \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} (1 + aL + a^2L^2 + \dots + a^jL^j) Y_t = Y_t.$$

Développons le produit :

$$\begin{aligned} & \lim_{j \rightarrow \infty} [(1 - aL)(1 + aL + a^2L^2 + \dots + a^jL^j)] Y_t \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (1 - a^{j+1}L^{j+1}) Y_t \\ &= Y_t - \lim_{j \rightarrow \infty} a^{j+1}L^{j+1}Y_t. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $|a| < 1$, on a bien :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a^{j+1}L^{j+1}Y_t = 0,$$

donc :

$$(1 - aL) \cdot (1 - aL)^{-1}Y_t = Y_t.$$

2.2.5 Opérateur de différence

L'opérateur de différence est couramment utilisé dans l'analyse des séries temporelles pour rendre une série stationnaire. Beaucoup de séries temporelles réelles ont de tendances ou des variations saisonnières, ce qui les rend non stationnaires. L'opérateur de différence permet d'éliminer ces tendances.

Définition 2.6. L'opérateur de différence ∇ est défini par :

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$$

Alors :

$$\nabla X_t = X_t - LX_{t-1} = (1 - L)X_t$$

La différence seconde est :

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) = (1 - L)^2 X_t = 1 - 2L + L^2 \\ \Rightarrow \nabla^2 X_t &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}.\end{aligned}$$

2.2.6 Polynôme caractéristique

À partir de la définition de l'opérateur retard, on peut construire des polynômes à coefficients réels. Soit $\Psi(L)$ un polynôme d'ordre q :

$$\Psi(L) = \psi_0 L^0 + \psi_1 L^1 + \cdots + \psi_q L^q.$$

L'application de ce polynôme à un processus aléatoire $\{Y_t; t \in \mathbb{Z}\}$ donne :

$$\Psi(L)Y_t = \psi_0 Y_t + \psi_1 Y_{t-1} + \cdots + \psi_q Y_{t-q}.$$

2.3 Processus autorégressifs

Dans ce qui suit en rappel la notion d'un processus autorégressifs d'ordre quelconque et leur propriété.

Définition 2.7. Un processus autorégressif d'ordre p , noté $AR(p)$, est un processus stochastique pour le quel la valeur actuelle Y_t est une combinaison linéaire de p valeurs récentes Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p} plus un bruit blanc ϵ_t . Il s'écrit sous la forme :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (2.7)$$

avec $\phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p-1$, $\phi_p \neq 0$ et par convention $\phi_0 = 1$.

2.4 Processus autorégressifs d'ordre deux

Dans notre travail on s'intéresse aux processus autorégressif du second ordre.

Définition 2.8. Le processus stationnaire $\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ satisfait une représentation AR d'ordre 2, notée $AR(2)$, s'il est solution de l'équation aux différences stochastique suivante :

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t \quad (2.8)$$

alors

$$\epsilon_t = Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} \quad (2.9)$$

En utilisant l'opérateur retard, l'expression (2.9) devient :

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= Y_t - \phi_1 LY_t - \phi_2 L^2 Y_t \\ &= (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t\end{aligned}$$

Finalement

$$\Phi(L)Y_t = \epsilon_t. \quad (2.10)$$

avec $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 1 - \sum_{j=1}^2 \phi_j L^j$ où $\phi_2 \in \mathbb{R}^*$, $\phi_0 = 1$ avec ϵ_t un bruit blanc, $\Phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2)^t$ les coefficients du modèle $AR(2)$.

Stationnarité du processus autorégressifs d'ordre deux :

1. La condition sur les racines du polynôme caractéristique :

Le modèle $AR(2)$ est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme caractéristique ξ_j sont à l'extérieur du cercle unité c'est-à-dire

$$|\xi_j| > 1, \quad j = \overline{1, 2} \quad (2.11)$$

2. La condition sur les coefficients du polynôme caractéristique :

La condition sur les coefficients du polynôme caractéristique ϕ_1 et ϕ_2 dite (région triangulaire) qu'est définie dans (Sorbye 2022[29], P.587) :

- (a) $\phi_2 < 1$
- (b) $\phi_2 > -1$
- (c) $\phi_1 + \phi_2 < 1$
- (d) $\phi_1 - \phi_2 < 1$

Ces inégalités forment une région triangulaire dans le plan des coefficients (ϕ_1, ϕ_2) appelée région de stationnarité triangulaire.

Triangle de stationnarité

Cette zone est un triangle délimité par ces 3 droites :

- (a) $|\phi_2| = 1$ droite horizontale
- (b) $\phi_2 = 1 - \phi_1$ (pente négative)
- (c) $\phi_2 = \phi_1 - 1$ (pente positive)

Graphiquement, cette région a la forme d'un triangle dans le plan des coefficients.

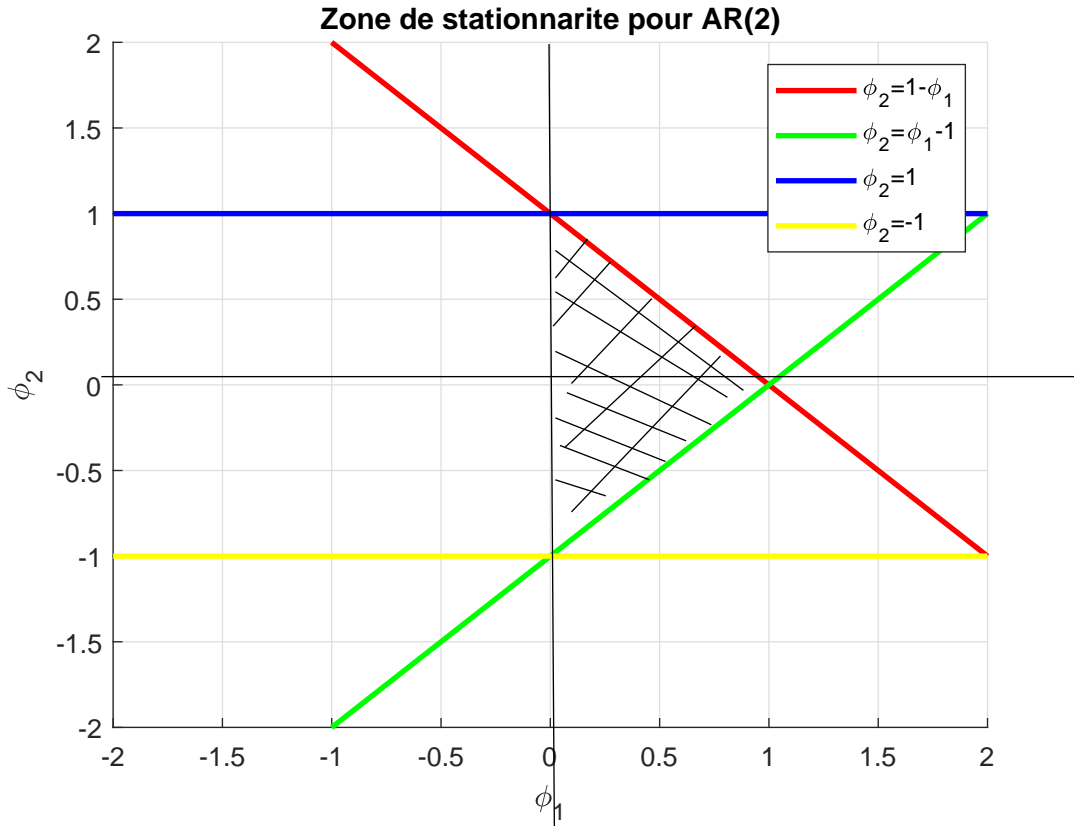


FIG. 2.1: La région de stationnarité d'un AR(2)

2.5 Inversion d'un processus autorégressif

L'inverse d'un processus autorégressif d'ordre p est une représentation en moyenne mobile d'ordre infini, notée $MA(\infty)$. D'après la formule (2.10), on a

$$Y_t = \frac{1}{\Phi(L)} \epsilon_t. \quad (2.12)$$

alors

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2} \epsilon_t \\ &= \sum_{j \geq 0} \pi_j L^j \epsilon_t \\ &= \sum_{j \geq 0} \pi_j \epsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

Où les π_j sont les coefficients de l'inverse du polynôme caractéristique $\Phi(L)$.

2.5.1 Calcul des coefficients π_j

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les coefficients π_j , on commence par la méthode classique qu'on va détailler dans le théorème suivant.

Théorème 2.2. *Les coefficients π_j en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 est :*

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k \quad (2.13)$$

Preuve. *On a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(z)} &= \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} \\ &= \frac{1}{1 - (\phi_1 z + \phi_2 z^2)}, \text{ c'est la somme d'une suite géométrique de raison } \phi_1 z + \phi_2 z^2 \\ &= \sum_{j \geq 0} (\phi_1 z + \phi_2 z^2)^j, \end{aligned}$$

En appliquant la formule de "binôme Newton" (cité dans le premier chapitre) l'équation $\frac{1}{\phi(z)}$ devient comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\phi(z)} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (\phi_1 z)^{j-k} (\phi_2 z^2)^k \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \phi_1^{j-k} \phi_2^k z^{j+k} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k z^j, \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j \geq 0} \pi_j z^j$$

Par identification on aura

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k.$$

d'où le résultat.

Théorème 2.3. [4] *Les coefficients π_j en fonction des racine du polynôme caractéristique sont donnés par*

$$\pi_j = \frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_2 \xi_1^{-j}}{\xi_1 - \xi_2}. \quad (2.14)$$

Démonstration. Soit le polynôme caractéristique d'un $AR(2)$ en fonction de z donné par :

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$$

On a d'après le premier chapitre, les racines de ce polynôme sont

$$\begin{aligned}\Delta &= \phi_1^2 + 4\phi_2 \\ z_1 &= \frac{-\phi_1 + \sqrt{\Delta}}{2\phi_2} \\ z_2 &= \frac{-\phi_1 - \sqrt{\Delta}}{2\phi_2}.\end{aligned}$$

On peut réécrire le polynôme $\phi(z)$ en fonction de z_1 et z_2

$$\begin{aligned}\phi(z) &= -\phi_2(z - z_1)(z - z_2) \\ &= -\phi_2 z_1 z_2 \left(\frac{z}{z_1} - 1\right) \left(\frac{z}{z_2} - 1\right) \\ &= -\phi_2 z_1 z_2 \left(1 - \frac{1}{z_1} z\right) \left(1 - \frac{1}{z_2} z\right).\end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= \left(\frac{-\phi_1 + \sqrt{\Delta}}{2\phi_2}\right) \left(\frac{-\phi_1 - \sqrt{\Delta}}{2\phi_2}\right) \\ &= -\frac{1}{\phi_2}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \left(1 - \frac{1}{z_1} z\right) \left(1 - \frac{1}{z_2} z\right) \\ &= (1 - \alpha z)(1 - \beta z).\end{aligned}$$

Avec $\alpha = \frac{1}{z_1}$ et $\beta = \frac{1}{z_2}$

Et l'inverse de $\phi(z)$ est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(z)} &= \sum_{j \geq 0} \pi_j z^j \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha z)} \cdot \frac{1}{(1 - \beta z)} \\ &= \left(\sum_{j \geq 0} \alpha^j z^j\right) \left(\sum_{j \geq 0} \beta^j z^j\right),\end{aligned}$$

pour notre cas $a_j = \alpha^j$ et $b_j = \beta^j$ en utilisant le produit de Cauchy on aura :

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^j \left(\frac{1}{z_1}\right)^k \left(\frac{1}{z_2}\right)^{j-k} z^j, \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{k=0}^j \left(\frac{1}{z_1}\right)^k \left(\frac{1}{z_2}\right)^{j-k} = \sum_{k=0}^j \left(\frac{1}{z_1}\right)^k \left(\frac{1}{z_2}\right)^j \left(\frac{1}{z_2}\right)^{-k} z^j \\ &= \sum_{k=0}^j \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^k \left(\frac{1}{z_2}\right)^j z^j \\ &= \left(\frac{1}{z_2}\right)^j \sum_{k=0}^j \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^k z^j \\ &= \left(\frac{1}{z_2}\right)^j \frac{1 - \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{j+1}}{1 - \frac{z_2}{z_1}} \\ &= \left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)^j \frac{z_1^{j+1} - z_2^{j+1}}{z_1 - z_2} \\ &= \frac{z_1 z_2^{-j} - z_2 z_1^{-j}}{z_1 - z_2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour $z = \xi$ on aura

$$\pi_j = \frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_1^{-j} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}.$$

□

Une autre manière pour calculer les coefficients π_j en fonction de ϕ_1 et ϕ_2 , on utilise la récurrences à trois termes sur les coefficients π_j donné dans le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Les coefficients π_j satisfont la relation de récurrences à trois termes suivante*

$$\pi_j = \phi_1 \pi_{j-1} + \phi_2 \pi_{j-2}. \quad (2.17)$$

Avec les premiers termes $\pi_0 = 1$ $\pi_1 = \phi_1$

Preuve. *Ce résultat découle de l'application de [14, Theorem 2.1] pour la fonction génératrice rationnelle $\frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2}$*

En effet, on a

$$\frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} = \sum_{j \geq 0} \pi_j z^j,$$

qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} \sum_{j \geq 0} \pi_j z^j \\ &= \left(\sum_{j \geq 2} b_j z^j \right) \left(\sum_{j \geq 0} \pi_j z^j \right), \end{aligned}$$

avec $b_0 = 1$, $b_1 = \phi_1$ et $b_2 = -\phi_2$. Le produit de Cauchy permet d'écrire

$$1 = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{\min(2,j)} b_k \pi_{j-k} \right) z^j.$$

Par identification on aura :

$$\pi_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 0 \\ \phi_1, & \text{si } j = 1 \\ \phi_1 \pi_{j-1} + \phi_2 \pi_{j-2}, & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

2.5.2 Fonction d'autocovariance de Y_t

Théorème 2.5. [28] La fonction d'autocovariance en fonction des coefficients π_j est donnée par

$$\gamma(h) = \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h} \quad (2.18)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t) \\ &= \mathbb{E} \left(Y_{t+h} \sum_{j \geq 0} \pi_j \epsilon_{t-j} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j \geq 0} \pi_j \epsilon_{t-j} Y_{t+h} \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \pi_j \mathbb{E}(Y_{t+h} \epsilon_{t-j}) \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{i \geq 0} \pi_j \pi_i \mathbb{E}(\epsilon_{t+h-i} \epsilon_{t-j}). \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}(\epsilon_{t+h-i} \epsilon_{t-j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j+h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors la fonction d'autocovariance de Y_t devient :

$$\gamma(h) = \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h}.$$

D'où le résultat. □

Avant de calculer $\gamma(h)$ on calculons d'abord le produit $\pi_j \pi_{j+h}$.
En effet, on a

$$\pi_j = \frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_1^{-j} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}$$

alors

$$\pi_{j+h} = \frac{\xi_1 \xi_2^{-j-h} - \xi_1^{-j-h} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2}$$

Le produit nous donne

$$\begin{aligned} \pi_j \pi_{j+h} &= \left(\frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_1^{-j} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \left(\frac{\xi_1 \xi_2^{-j-h} - \xi_1^{-j-h} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \\ &= \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_1^2 \xi_2^{-h-2j} - \xi_1^{-j-h+1} \xi_2^{-j+1} - \xi_1^{-j+1} \xi_2^{-j-h+1} + \xi_2^2 \xi_1^{-2j-h} \right) \\ &= \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_1^2 \xi_2^{-h-2j} - (\xi_1 \xi_2)^{-j+1} (\xi_1^{-h} - \xi_2^{-h}) + \xi_2^2 \xi_1^{-2j-h} \right). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\sum_{j \geq 0} \xi_1^2 \xi_2^{-h-2j} - (\xi_1 \xi_2)^{-j+1} (\xi_1^{-h} - \xi_2^{-h}) + \xi_2^2 \xi_1^{-2j-h} \right) \\ &= \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_1^2 \xi_2^{-h} \sum_{j \geq 0} \xi_2^{-2j} - (\xi_1^{-h} - \xi_2^{-h}) (\xi_1 \xi_2) \sum_{j \geq 0} (\xi_1 \xi_2)^{-j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_2^2 \xi_1^{-h} \sum_{j \geq 0} \xi_1^{-2j} \right). \end{aligned}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \xi_2^{-2j} &= \frac{1}{1 - \xi_2^{-2}} \\ \sum_{j \geq 0} (\xi_1 \xi_2)^{-j} &= \frac{1}{1 - (\xi_1 \xi_2)^{-1}} \\ \sum_{j \geq 0} \xi_1^{-2j} &= \frac{1}{1 - \xi_1^{-2}}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\sum_{j \geq 0} \xi_2^{-2j}$, $\sum_{j \geq 0} (\xi_1 \xi_2)^{-j}$ et $\sum_{j \geq 0} \xi_1^{-2j}$ par leurs valeurs, $\gamma(h)$ de-

vient :

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) &= \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_1^2 \xi_2^{-h} \left(\frac{1}{1 - \xi_2^{-2}} \right) - (\xi_1^{-h} - \xi_2^{-h}) (\xi_1 \xi_2) \left(\frac{1}{1 - (\xi_1 \xi_2)^{-1}} \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left(\xi_2^2 \xi_1^{-h} \left(\frac{1}{1 - \xi_1^{-2}} \right) \right) \\
 &= \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(\xi_1 - \xi_2)^2} \left[\frac{\xi_2^{-h}}{\xi_2^2 - 1} + \frac{\xi_1^{-h}}{\xi_1^2 - 1} - \frac{\xi_1^{-h} + \xi_2^{-h}}{\xi_1 \xi_2 - 1} \right].
 \end{aligned}$$

D'où

$$\gamma(h) = \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(\xi_1 \xi_2 - 1)(\xi_2 - \xi_1)} \left[\frac{\xi_1^{1-h}}{\xi_1^2 - 1} - \frac{\xi_2^{1-h}}{\xi_2^2 - 1} \right] \quad (2.19)$$

Théorème 2.6. [20] La fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ est donnée par la récurrence suivante

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2). \quad (2.20)$$

Démonstration. On a

$$\pi_j = \phi_1 \pi_{j-1} + \phi_2 \pi_{j-2}.$$

Alors

$$\pi_{j+h} = \phi_1 \pi_{j+h-1} + \phi_2 \pi_{j+h-2}$$

On calculons le produit $\pi_j \pi_{j+h}$

$$\begin{aligned}
 \pi_j \pi_{j+h} &= \pi_j (\phi_1 \pi_{j+h-1} + \phi_2 \pi_{j+h-2}) \\
 &= \phi_1 \pi_j \pi_{j+h-1} + \phi_2 \pi_j \pi_{j+h-2}
 \end{aligned}$$

et d'après le théorème (2.18), on a

$$\begin{aligned}
 \gamma(h) &= \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h} \\
 &= \sum_{j \geq 0} (\phi_1 \pi_j \pi_{j+h-1} + \phi_2 \pi_j \pi_{j+h-2}) \\
 &= \phi_1 \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h-1} + \phi_2 \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h-2} \\
 &= \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2).
 \end{aligned}$$

Alors

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2).$$

D'où le résultat. □

2.5.3 La fonction d'autocorrélation de Y_t

Théorème 2.7. [28] L'expression de $\rho(h)$ en fonction des racines est donnée par

$$\rho(h) = \frac{\xi_1^{-h+1}(\xi_2^2 - 1) - \xi_2^{-h+1}(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1(\xi_2^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)} \quad (2.21)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \frac{\frac{\xi_1^{1-h}}{\xi_1^2-1} - \frac{\xi_2^{1-h}}{\xi_2^2-1}}{\frac{\xi_1}{\xi_1^2-1} - \frac{\xi_2}{\xi_2^2-1}} \\ &= \frac{\xi_1^{-h+1}(\xi_2^2 - 1) - \xi_2^{-h+1}(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1(\xi_2^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat

Pour la récurrence qui satisfait $\rho(h)$ on a le théorème suivant

Théorème 2.8. [20]

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) \quad (2.22)$$

Preuve. – Pour $h = 0$, $\rho(0) = 1$.

– Pour $h = 1$, $\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$.

– Pour $h \geq 2$

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \\ &= \frac{\phi_1\gamma(h-1) + \phi_2\gamma(h-2)}{\gamma(0)} \\ &= \phi_1\frac{\gamma(h-1)}{\gamma(0)} + \phi_2\frac{\gamma(h-2)}{\gamma(0)} \\ &= \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) \end{aligned}$$

Finalement

$$\rho(h) = \phi_1\rho(h-1) + \phi_2\rho(h-2) \quad (2.23)$$

Exemple 2.1. On considère le processus autorégressif d'ordre 2:

$$Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + \epsilon_t.$$

Son polynôme caractéristique est $\Phi_2(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2$, ce qui implique

$$\Phi_2(z) = 1 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}z^2$$

donc $\Delta = \frac{1}{36}$ qui admet 2 et 3 comme racines. Les expressions de π_j , γ_h et ρ_h en fonction des racines de son polynôme caractéristique sont :

$$\begin{aligned}\pi_j &= \frac{\xi_1 \xi_2^{-j} - \xi_1^{-j} \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \\ &= \frac{3}{2^j} - \frac{2}{3^j},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_h &= \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{(\xi_1 \xi_2 - 1)(\xi_2 - \xi_1)} \left[\frac{\xi_1^{1-h}}{\xi_1^2 - 1} - \frac{\xi_2^{1-h}}{\xi_2^2 - 1} \right] \\ \gamma_h &= \frac{3}{10} (2^{4-h} - 3^{2-h}),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_h &= \frac{\xi_1^{-h+1}(\xi_2^2 - 1) - \xi_2^{-h+1}(\xi_1^2 - 1)}{\xi_1(\xi_2^2 - 1) - \xi_2(\xi_1^2 - 1)} \\ &= \frac{1}{7} (2^{4-h} - 3^{2-h}).\end{aligned}$$

Exemple 2.2. On considère le processus autorégressif d'ordre 2 :

$$Y_t = \frac{3}{4}Y_{t-1} - \frac{9}{16}Y_{t-2} + \epsilon_t.$$

Son polynôme caractéristique est $\Phi_2(L) = 1 - \frac{3}{4}L + \frac{9}{16}L^2$.

Donc $\Delta = \frac{27}{16}i^2$ et $\sqrt{\Delta} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i$ qui admet $\frac{2}{3}(1 - i\sqrt{3})$ et $\frac{2}{3}(1 + i\sqrt{3})$ comme racines, avec $|\xi_1| = |\xi_2| = \frac{4}{3} > 1$ vérifies la stationnarité. Les expressions de π_j , γ_h et ρ_h en fonction des racines de son polynôme caractéristique sont :

$$\pi_j = \frac{2^{1-j}}{\sqrt{3}i} \left((1 + i\sqrt{3})^{-(j+1)} - (1 - i\sqrt{3})^{-(j+1)} \right)$$

$$\gamma_h = -\frac{64\sqrt{3}}{3367}i \left(\frac{2}{3} \right)^{1-h} \left[(1 - i\sqrt{3})^{1-h}(-17 + 8i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3})^{1-h}(-17 - 8i\sqrt{3}) \right]$$

et

$$\rho_h = \left(\frac{3}{2} \right)^h \frac{1}{50i\sqrt{3}} \left[(1 - i\sqrt{3})^{1-h}(-17 + 8i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})^{1-h}(-17 - 8i\sqrt{3}) \right]$$

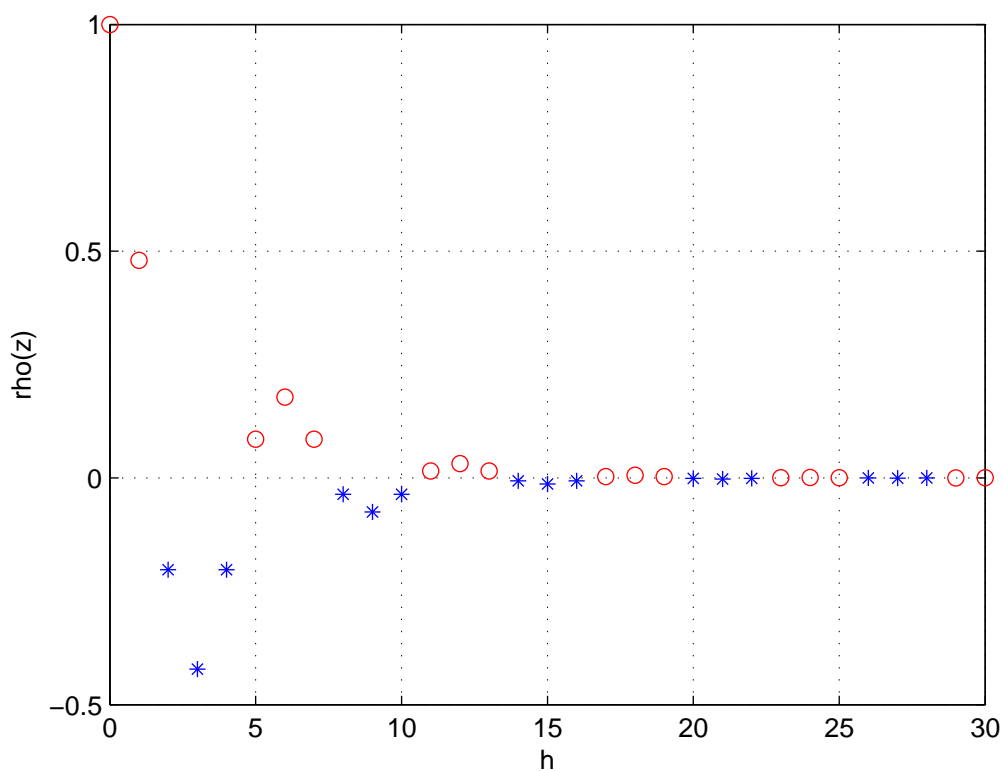


FIG. 2.2: Fonction d'autocorrélation dans l'intervalle $[0, 30]$.

Le graphe de $\rho(h)$ sur l'intervalle de nombres entiers $[0, 30]$ est représenté par le correlogramme sur la figure 2.2. Il s'agit d'une extension de [4, Figure 3-4, p.82].

Chapitre 3

L'autocovariance et l'autocorrélation en fonction des coefficients : méthode algébrique

3.1 Introduction

L'étude des séries temporelles repose sur l'analyse des dépendances internes entre les observations successives d'un processus aléatoire. Deux concepts fondamentaux dans cette analyse sont l'autocovariance et l'autocorrélation, qui permettent de quantifier la force et la structure de ces dépendances.

L'autocovariance mesure la covariance entre les valeurs d'une série à deux instants différents, tandis que l'autocorrélation standardise cette mesure pour la rendre indépendante de l'échelle des données. Ces fonctions sont particulièrement utiles pour identifier les composantes périodiques, les tendances et les structures de dépendance à long terme dans une série.

Dans le cadre de la méthode algébrique, ces coefficients sont dérivés de manière formelle à partir de représentations mathématiques du processus, comme les modèles autorégressifs (AR), les modèles à moyenne mobile (MA), ou leurs combinaisons (ARMA/ARIMA). La formulation algébrique permet de relier directement les paramètres du modèle aux propriétés statistiques du processus, notamment à sa fonction d'autocovariance et d'autocorrélation. Cette approche offre un outil rigoureux pour la modélisation.

Théorème 3.1. *L'expression de γ et $\gamma(1)$ en fonction des coefficients ϕ_1 et ϕ_2 sont données respectivement par*

$$\gamma = \frac{1 - \phi_2}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \quad (3.1)$$

et

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \quad (3.2)$$

Preuve. On a

$$\sum_{n \geq 0} \pi_j z^j = \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2}$$

et d'après le premier chapitre

$$\sum_{n \geq 0} a_n t^n = \frac{a - (ap - b)t}{1 - pt - qt^2}$$

Par identification, on aura $a = 1$, $p = b = \phi_1$ et $q = \phi_2$. Et on a aussi dans le premier chapitre

$$\sum_{n \geq 0} a_n a_{n+1} t^n = \frac{Q(t)}{1 - p^2 t - (2qp^2 + 2q^2)t^2 - (pq)^2 t^3 + q^4 t^4}$$

Avec le polynôme $Q(t)$ donné par :

$$Q(t) = ab + (pb^2 + qab - abp^2)t + (qpb^2 + pq^2 a^2 - abqp^2 - abq^2)t^2 - aq^3(b - ap)t^3.$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n^2 t^n = \frac{R(t)}{1 - p^2 t - (2qp^2 + 2q^2)t^2 - (pq)^2 t^3 + q^4 t^4}.$$

Avec le polynôme $R(t)$ donné par :

$$R(t) = a^2 + (b^2 - a^2 p^2)t + (2abpq - a^2(2qp^2 + q^2))t^2 - q^2(b - ap)^2 t^3,$$

en remplaçant a , b , p et q par leurs valeurs on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n a_{n+1} t^n &= \frac{\phi_1 + \phi_1 \phi_2 t}{1 - \phi_1^2 t - (2\phi_2 \phi_1^2 + 2\phi_2^2)t^2 - (\phi_1 \phi_2)^2 t^3 + \phi_2^4 t^4} \\ &= \frac{\phi_1(\phi_2 t + 1)}{(\phi_2 t + 1)[\phi_2^3 t^3 - \phi_2(\phi_1^2 + \phi_2)t^2 - (\phi_1^2 + \phi_2)t + 1]} \\ &= \frac{\phi_1}{[\phi_2^3 t^3 - \phi_2(\phi_1^2 + \phi_2)t^2 - (\phi_1^2 + \phi_2)t + 1]} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n^2 t^n &= \frac{1 - \phi_2^2 t^2}{1 - \phi_1^2 t - (2\phi_2 \phi_1^2 + 2\phi_2^2)t^2 - (\phi_1 \phi_2)^2 t^3 + \phi_2^4 t^4} \\ &= \frac{(1 - \phi_2 t)(1 + \phi_2 t)}{(1 + \phi_2 t)[\phi_2^3 t^3 - (\phi_1^2 + \phi_2)\phi_2 t^2 - (\phi_1^2 + \phi_2)t + 1]} \\ &= \frac{1 - \phi_2 t}{\phi_2^3 t^3 - (\phi_1^2 + \phi_2)\phi_2 t^2 - (\phi_1^2 + \phi_2)t + 1}, \end{aligned}$$

Pour $t = 1$ on aura

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} a_n a_{n+1} t^n &= \frac{\phi_1}{[\phi_2^3 - \phi_2(\phi_1^2 + \phi_2) - (\phi_1^2 + \phi_2) + 1]} \\
&= \frac{\phi_1}{(1 + \phi_2^3) - (\phi_1^2 + \phi_2)(1 + \phi_2)} \\
&= \frac{\phi_1}{(1 + \phi_2)(\phi_2^2 - \phi_2 + 1) - (\phi_1^2 + \phi_2)(1 + \phi_2)} \\
&= \frac{\phi_1}{(1 + \phi_2)[(\phi_2 - 1)^2 - \phi_1^2]} \\
&= \frac{\phi_1}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)},
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\gamma(1) = \frac{\phi_1}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)}.$$

D'où le résultat

On a aussi pour $t = 1$ la formule $\sum_{n \geq 0} a_n^2 t^n$ devient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} a_n^2 t^n &= \frac{1 - \phi_2}{\phi_2^3 - (\phi_1^2 + \phi_2)\phi_2 - (\phi_1^2 + \phi_2) + 1} \\
&= \frac{1 - \phi_2}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)},
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\gamma = \frac{1 - \phi_2}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)}.$$

D'où le résultat.

Lemme 3.1. [28] Les coefficients π_{j+h} sont données par

$$\pi_{j+h} = \pi_h \pi_j + \phi_2 \pi_{h-1} \pi_{j-1}. \quad (3.3)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \pi_{j+h} z^j &= \frac{\pi_h + \phi_2 \pi_{h-1} z}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} \\
&= \pi_h \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} + \phi_2 \pi_{h-1} z \frac{1}{1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2} \\
&= \pi_h \sum_{n \geq 0} \pi_j z^j + \phi_2 \pi_{h-1} z \sum_{n \geq 0} \pi_j z^j \\
&= \pi_h \sum_{n \geq 0} \pi_j z^j + \phi_2 \pi_{h-1} \sum_{n \geq 0} \pi_j z^{j+1} \\
&= \pi_h \sum_{n \geq 0} \pi_j z^j + \phi_2 \pi_{h-1} \sum_{n \geq 1} \pi_{j-1} z^j \\
&= \pi_h \sum_{n \geq 0} \pi_j z^j + \phi_2 \pi_{h-1} \sum_{n \geq 0} \pi_{j-1} z^j.
\end{aligned}$$

Par identification on aura

$$\pi_{j+h} = \pi_h \pi_j + \phi_2 \pi_{h-1} \pi_{j-1}$$

D'où le résultat.

Théorème 3.2. [28] La fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ est

$$\gamma(h) = \frac{(1 - \phi_2)\pi_h + \phi_1\phi_2\pi_{h-1}}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \quad (3.4)$$

Preuve. La définition de $\gamma(h)$ et la formule (3.3) mener à :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+h} z^j \\ &= \sum_{j \geq 0} \pi_j (\pi_h \pi_j + \phi_2 \pi_{h-1} \pi_{j-1}) z^j \\ &= \pi_h \sum_{j \geq 0} \pi_j z^j + \phi_2 \pi_{h-1} \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j-1} z^j \\ &= \gamma \pi_h + \phi_2 \pi_{h-1} \sum_{j \geq 0} \pi_j \pi_{j+1} \\ &= \gamma \pi_h + \phi_2 \pi_{h-1} \gamma(1). \end{aligned}$$

En remplaçant γ et $\gamma(1)$ par les expressions (3.1) et (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \gamma \pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \gamma \pi_{h-1} \\ &= \gamma \left(\pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1} \right) \\ &= \frac{1 - \phi_2}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \left(\pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1} \right) \\ &= \frac{(1 - \phi_2)\pi_h + \phi_1 \phi_2 \pi_{h-1}}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \end{aligned}$$

Alors

$$\gamma(h) = \frac{(1 - \phi_2)\pi_h + \phi_1 \phi_2 \pi_{h-1}}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)}$$

D'où le résultat.

Théorème 3.3. [28] La fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ est

$$\rho(h) = \pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1}. \quad (3.5)$$

Preuve. D'après les définitions du premier chapitre on a :

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \frac{\gamma(h)}{\gamma} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma} \left(\pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1} \right) \\ &= \pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1}\end{aligned}$$

Alors

$$\rho(h) = \pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1}.$$

Explicitement, pour h pair on aura :

$$\rho(2h) = \phi_2^h + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\frac{2h-k}{2h-2k} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2} \right) \binom{2h-k-1}{k} \phi_1^{2(h-k)} \phi_2^k. \quad (3.6)$$

Et pour h impair on aura :

$$\rho(2h+1) = \phi_2^h + \sum_{k=0}^h \left(\frac{2h-k+1}{2h-2k+1} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2} \right) \binom{2h-k}{k} \phi_1^{2(h-k)+1} \phi_2^k. \quad (3.7)$$

3.2 Applications numérique pour le calcul des paramètres d'un $AR(2)$ en fonction de (ϕ_1, ϕ_2)

Nous présentons quelques résultats de simulation sur les paramètres du modèle $AR(2)$. On obtient les résultats qui sont présentés dans les tableaux suivants, pour les différentes valeurs des coefficients ϕ_1 et ϕ_2 .

(ϕ_1, ϕ_2)	$\pi_j(X)$
$(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})$	$(\frac{7}{10})^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} (\frac{10}{49})^k$
$(\frac{7}{10}, -\frac{1}{10})$	$(\frac{7}{10})^j \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} (\frac{-10}{49})^k$
$(\frac{7}{5}, -\frac{9}{20})$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} (\frac{7}{5})^{j-2k} (\frac{-9}{20})^k$
$(-\frac{2}{5}, \frac{9}{20})$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} (\frac{-2}{5})^{j-2k} (\frac{9}{20})^k$
$(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16})$	$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} (\frac{3}{4})^{j-2k} (\frac{-9}{16})^k$

TAB. 3.1: Quelques valeurs de π_j

(ϕ_1, ϕ_2)	γ	$\gamma(1)$
$(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})$	2,55682	1,98864
$(\frac{7}{10}, \frac{-1}{10})$	1,69753	1,08025
$(\frac{7}{5}, \frac{-9}{20})$	18,5008	17,8628
$(\frac{-2}{5}, \frac{9}{20})$	2,66183	-1,93587
$(\frac{3}{4}, \frac{-9}{16})$	1,9008	0,912385

TAB. 3.2: Quelques valeurs de γ et $\gamma(1)$ obtenues par (3.1) et (3.2)

(ϕ_1, ϕ_2)	$\rho(50)$	$\rho(51)$
$(\frac{7}{10}, \frac{1}{10})$	0,0000518722	0,0000426233
$(\frac{7}{10}, \frac{-1}{10})$	$1,2918958832001824 \times 10^{-15}$	$6,459479416000911 \times 10^{-16}$
$(\frac{7}{5}, \frac{-9}{20})$	0,00599793	0,00539814
$(\frac{-2}{5}, \frac{9}{20})$	0,00451792	-0,00406613
$(\frac{3}{4}, \frac{-9}{16})$	$-2,038757963136975310^{-7}$	$-4,2474124232022032 \times 10^{-7}$

TAB. 3.3: Quelques valeurs de $\rho(50)$ et $\rho(51)$ obtenues par (3.1) et (3.2)

Soient les deux exemple suivant en appliquant les formules (2,13), (3.1), (3.2), (3.6), (3.5) et (3.7)

Exemple 3.1. On considère le processus autorégressif d'ordre 2:

$$Y_t = \frac{5}{6}Y_{t-1} - \frac{1}{6}Y_{t-2} + \epsilon_t.$$

Son polynôme caractéristique est $\Phi_2(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2$, avec $\phi_1 = \frac{5}{6}$ et $\phi_2 = -\frac{1}{6}$. Les expressions de π_j , γ_h et ρ_h en fonction des coefficients de son polynôme caractéristique (ϕ_1, ϕ_2) sont :

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \phi_1^{j-2k} \phi_2^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2k} \left(-\frac{1}{6}\right)^k, \\ \gamma &= \frac{1 - \phi_2}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{6}}{\left(-\frac{1}{6} + 1\right)\left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{6} - 1\right)\left(-\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 1\right)} \\ &= \frac{\frac{7}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)(-2)\left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= 2,1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \frac{\phi_1}{(\phi_2 + 1)(\phi_2 - \phi_1 - 1)(\phi_2 + \phi_1 - 1)} \\
&= \frac{\frac{5}{6}}{\left(-\frac{1}{6} + 1\right)\left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{6} - 1\right)\left(-\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 1\right)} \\
&= \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{5}{6}\right)(-2)\left(-\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_h &= \pi_h + \frac{\phi_1 \phi_2}{1 - \phi_2} \pi_{h-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{h}{2} \rfloor} \binom{h-k}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-2k} \left(-\frac{1}{6}\right)^k - \frac{5}{42} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor} \binom{h-k-1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{h-2k} \left(-\frac{1}{6}\right)^k.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho(2h) &= \phi_2^h + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\frac{2h-k}{2h-2k} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2}\right) \binom{2h-k-1}{k} \phi_1^{2(h-k)} \phi_2^k \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)^h + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\frac{12h-5k}{14h-14k}\right) \binom{2h-k-1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(h-k)} \left(-\frac{1}{6}\right)^k.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\rho(2h+1) &= \phi_2^h + \sum_{k=0}^h \left(\frac{2h-k+1}{2h-2k+1} + \frac{\phi_2}{1-\phi_2}\right) \binom{2h-k}{k} \phi_1^{2(h-k)+1} \phi_2^k \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)^h + \sum_{k=0}^h \left(\frac{12h-5k+6}{14h-14k+7}\right) \binom{2h-k}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{2(h-k)+1} \left(-\frac{1}{6}\right)^k.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2. On considère le processus autorégressif d'ordre 2:

$$Y_t = \frac{3}{4}Y_{t-1} - \frac{9}{16}Y_{t-2} + \epsilon_t.$$

Son polynôme caractéristique est $\Phi_2(L) = 1 - \frac{3}{4}L + \frac{9}{16}L^2$, avec $\phi_1 = \frac{3}{4}$ et $\phi_2 = -\frac{9}{16}$ comme racines. Les expressions de π_j , γ_h et ρ_h en fonction des coefficients de son polynôme caractéristique (ϕ_1, ϕ_2) sont :

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{j-2k} \left(-\frac{9}{16}\right)^k,$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1 + \frac{9}{16}}{\left(-\frac{9}{16} + 1\right)\left(-\frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 1\right)\left(-\frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1\right)} \\
&= \frac{\frac{25}{16}}{\left(\frac{7}{16}\right)\left(-\frac{37}{16}\right)\left(-\frac{13}{16}\right)} \\
&= \frac{25}{3367}.
\end{aligned}$$

et

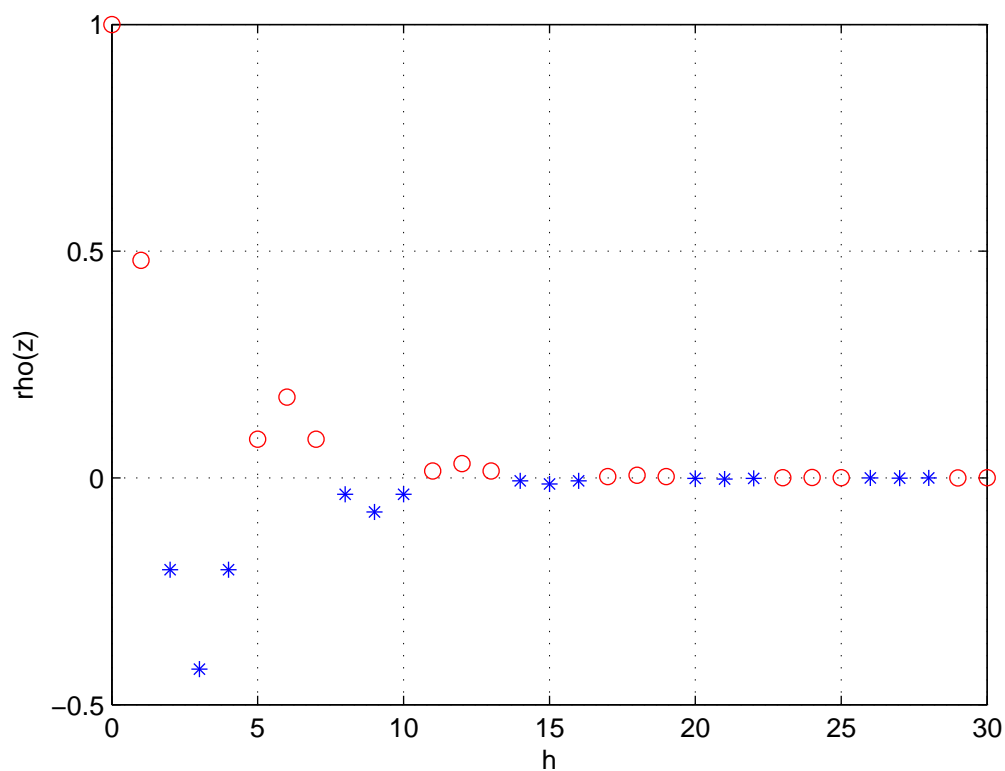
$$\begin{aligned}
\gamma(1) &= \frac{\frac{3}{4}}{\left(-\frac{9}{16} + 1\right)\left(-\frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 1\right)\left(-\frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1\right)} \\
&= \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{7}{16}\right)\left(-\frac{37}{16}\right)\left(-\frac{13}{16}\right)} \\
&= \frac{12}{3367}.
\end{aligned}$$

$$\rho_h = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{j-2k} \left(-\frac{9}{16}\right)^k - 0,27 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{h-1}{2} \rfloor} \binom{h-k-1}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{h-2k} \left(-\frac{9}{16}\right)^k.$$

$$\rho(2h) = \left(-\frac{9}{16}\right)^h + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\frac{32h-7k}{50h-50k}\right) \binom{2h-k-1}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(h-k)} \left(-\frac{9}{16}\right)^k.$$

Ainsi

$$\rho(2h+1) = \left(-\frac{9}{16}\right)^h + \sum_{k=0}^h \left(\frac{12h-7k+6}{10h-10k+5}\right) \binom{2h-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(h-k)+1} \left(-\frac{9}{16}\right)^k.$$

FIG. 3.1: Fonction d'autocorrélation dans l'intervalle $[0, 30]$.

Remarque 3.1. D'après l'exemple (2.2) du deuxième chapitre et l'exemple (3.2) en remarque que le graphe de la fonction ρ_h est le même dans les deux méthodes.

Conclusion

Ce travail de mémoire est porté sur les processus autorégressif d'ordre 2. Dans un premier temps nous avons rappelé quelques notions de base sur les fonctions génératrices, les suites de nombre spéciales (notamment les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 et les suites récurrentes linéaires d'ordre 2), le produit de Cauchy et la formule de Binet. Au lieu de calculer les dérivées successives et les relations de récurrence; ces outils nous ont servi à revisiter les processus $AR(2)$. Dans la littérature la plupart des travaux existants expriment les $MA(\infty)$, les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation en fonction des racines du polynôme caractéristique. Pour ce qui nous concerne on a remplacé la condition sur les racines pour qu'ils soient à l'extérieur du cercle unité par la condition triangulaire sur les coefficients. Ainsi on a trouvé l'analogie des formules existantes en fonction des coefficients du polynôme caractéristique. On a aussi calculé explicitement la fonction d'autocovariance et la fonction d'autocorrélation. Pour s'assurer des calcul on a repris l'exemple du Brockwell et Davis [4] où $\phi_1 = 3/4$ et $\phi_2 = -9/16$. Le diagramme obtenu est identique à celui établi dans [4, p.82]. Il reste à signaler que le cas général d'un processus autoregressif d'ordre $p \geq 3$ est difficile à étudier en fonction des racines ou des coefficients du polynôme caractéristique. Dans le travail déjà publié récemment avec Aumorassi et Goubi [1], on a réussi à trouver des formules et des relations de recurrences pour le modèle moyenne mobile $MA(\infty)$ et les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation. Comme perspective à ce travail, nous comptons étudier les processus autoregressifs de n'importe quel ordre et voir leur impact sur les problèmes pratiques de la statistique.

Bibliographie

- [1] F. Aumorassi, M. Goubi and F. Slimi, *On the inversion of an autoregressive process of finite order*, *Mathematica Montisnigri*. **LVII**(2023), 24–36.
- [2] S. Boughaba, N. Saba and A. Boussayoud, *Construction of generating functions of the products of Vieta polynomials with Gaussian numbers and polynomials*, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **12**(1)(2021), 649–668.
- [3] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Time Series theory and methods*, Springer, Second edition, 1991.
- [4] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Introduction to time series and forecasting*, Springer, Third edition, 2016.
- [5] P. Bühlmann, *Moving-average representation of autoregressive approximations*, *Stochastic processes and their applications*, **60**(1995), 331–342.
- [6] U. Hackstein, S. Krickl and S. Bernhard, *Estimation of ARMA-model parameters to describe pathological conditions in cardiovascular system models*, *Informatics in medicine Unlocked*. **18**(2020), 1–8.
- [7] Y. Cetin and Y. Simsek, *Formulas on Fibonacci type numbers and polynomials derived from linear recurrence relations and generating functions*, *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.* **5**(3)(2023), 120–130.
- [8] D. Chakraborty and S.K. Sanyal, *Time-series data optimized AR/ARMA model for frugal spectrum estimation in Cognitive Radio*, *Physical Communication*. **44**(2021), 1–19.
- [9] L. Comtet, *Advanced combinatorics: The art of finite and infinite expansions*, Dordrecht,Boston, 1974.
- [10] P. Congdon, *A spatio-temporal autoregressive model for monitoring and predicting COVID infection rates*, *Journal of geographical systems*. **24** (2022), 583–610.
- [11] D. J. Cryer and K.-S. Chan, *Time Time Series Analysis with Applications in \mathbb{R}* . Springer-Verlag New York, second edition, 2008, ISBN 978-0-387-75958-6.
- [12] M. Drton and S. Sullivant, *Algebraic statistical models*, *Statistica Sinica*, **17**(2007), 1273–1297.

-
- [13] M. Goubi, *On combinatorial formulation of Fermat quotients and generalization*, MTJPAM. **4**(1)(2022), 59–76.
- [14] M. Goubi, *On generating functions of the product of two polynomials defined by second-order linear recurrence relations*, JMPES. **3**(2)(2022), 69–77.
- [15] M. Goubi, *On the recursion formula of polynomials generated by rational functions*, IJMA. **13**(1)(2019), 29–38.
- [16] M. Goubi, *New family of special numbers associated with finite operator*, Mathematica Moravica. **24**(2)(2020), 83–98.
- [17] M. Goubi, *Successive derivatives of Fibonacci type polynomials of higher order in two variables*, Filomat. **32**(2018), 5149–5159.
- [18] M. Goubi, *On a generalized family of Euler-Genocchi polynomials*, Integers. **21**(2021), 1–13.
- [19] C. Gourieroux and A. Monfort, *Séries temporelles et modèles dynamiques*, Ed Economica, 1995.
- [20] J. D. Hamilton, *Time Séries Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [21] S. Hoston and S. Ruffa, *Introductory notes to algebraic statistics*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **37**(2005), 39–70.
- [22] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, New York: Wiley, 2001.
- [23] G. Lafon, *Un an de maths*, ECE3, 2012.
- [24] S.A. Mangai, B. R. Sankar and K. Alagarsamy, *Taylor series prediction of time series data with error propagated by artificial neural network*, International Journal of Computer Applications. **89**(1)(2014), 41–47.
- [25] J. Markeviciute, *Epidemic change tests for the mean of innovations of an AR(1) process*, Statistics and Probability Letters. **112**(2016), 79–91.
- [26] E. Onyemachi, I. S. Iwueze and E.C. Nwogu, *On the paradox of the duality of autoregressive and moving average processes*, Journal of Applied Mathematics and physics. **10**(2022), 589–609.
- [27] E. Riccomagno, *A short history of algebraic statistics*, Metrika, **69**(2)(2009), 397–418.
- [28] F. Slimi, M. Goubi and F. Aumorassi, *On the product of numbers defined by second-order linear recurrence relations and application to time series*, Montes Taurus J. Pure Appl. Math. **6**(1)(2024), 74–84.

- [29] S. H. Sorbye, P. G. Nicolau and H. Rue, *Finite-sample properties of estimators for first and second order autoregressive processes*, *Statistical Inference for Stochastic Processes*. **25**(2022), 577–598.
- [30] T. Ulrich, *On the autoregressive time series model using real and complex analysis*, *MDPI*, **3**(2021), 716–728, <https://doi.org/10.3390/forecast3040044>.
- [31] M. Voutilainen, L. Vitassari and P. Ilmonen, *Note on $AR(1)$ –characterisation of stationary processes and model fitting*, *Modern Stochastic: Theory and Application* **6**(2), (2019), 195–207, <https://doi.org/10.15559/19-VMSTA132>.
- [32] k. Zhu, L. Mu, R. Yu and X. Xia. H. Tu, *Probabilistic modelling of surface drift prediction in marine disasters based on the NN-GA and ARMA model*, *Ocean Engineering*. **281** (2023), 1–14.