MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI TIZI-OUZOU
FACULTE DE GENIE DE LA CONSTRUCTION
DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Sujet :

Introduction aux modélisations et aux méthodes de calcul des matériaux composites

PRÉSENTÉ PAR :

KHERBOUCHE Laaziz

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MAGISTER
EN GENIE MECANIQUE
OPTION : MATÉRIAUX

Devant le jury composé de :

HANACHI Naceur-Eddine	Professeur	UMMTO	Président
BOUHERAOUA Ali	Maître de conférences	UMMTO	Rapporteur
AIT TAHAR Kamel	Professeur	UMMTO	Examinateur
BOUAZZOUNI Amar	Professeur	UMMTO	Examinateur
AIT AIDER Hacène	Maître de conférences	UMMTO	Examinateur

Soutenu le, 11/07/ 2010

Remerciements

Tout d'abord, je ne pourrais pas commencer les remerciements sans évoquer la personne qui m'a proposé le sujet et qui m'a encadré tout le long de ce travail: A. BOUHERAOUA. Au travers nos discussions, il m'a apporté une compréhension plus approfondie des diverses étapes et aspects du sujet, je salue aussi sa souplesse, son ouverture d'esprit et sa bonne humeur qui ont su me laisser une large marge de liberté pour mener à bien ce travail.

Ma reconnaissance s'adresse ensuite aux membres de jury: HANACHI Naceur-Eddine professeur à UMMTO président du jury, AIT TAHAR Kamel professeur à UMMTO examinateur, BOUAZZOUNI Amar professeur à UMMTO examinateur et AIT AIDER Hacene maître de conférence à UMMTO examinateur, pour avoir accepté de rapporter sur mon travail et de l'examiner.

Et toute ma gratitude à toutes les personnes ayant relu et commenté mon manuscrit et ayant ainsi participé à son amélioration.

Enfin, je remercie ma famille, mes amis (es), mes collègues de travail au sein de la société MI-SWACO de m'avoir soutenu et supporter durant la réalisation de ce travail et en particulier à ma fiancée bien aimée WASSILA qu'elle n'a pas cessée de m'encourager.

Résumé

Les matériaux composites occupent une place de plus en plus importante dans la réalisation de structures à hautes performances mécaniques (aérospatiale, aéronautique, automobile….). De telles utilisations doivent nécessairement s'accompagner d'une bonne connaissance du comportement du matériau, de telle manière à déterminer le type de renfort et la séquence d'agencement qui permet d'avoir des propriétés mécaniques de façon optimale.

L'objectif de nôtre travail est d'effectuer une étude comparative sur la caractérisation du comportement mécanique d'une plaque composite d'empilement $[0/90/\pm45]_{2S}$, sous l'influence de divers paramètres entre autre: les différentes orientations de fibres d'un pli, de la fraction volumique de fibres et de leurs natures (verre, kevlar, graphite haut résistance et haut module). Les caractéristiques mécaniques de ce stratifié symétrique régulier seront prévues par l'utilisation d'une approche mathématique basée sur un modèle de Mindlin et la théorie de Kirchhoff-love.

Les différents résultats obtenus, montrent une variabilité dans les caractéristiques mécaniques en fonction de degré d'anisotropie du matériau, et nous permet aussi de proposer les types d'agencements capables d'améliorer la résistance du composite stratifié dans une telle direction de sollicitation.

Mots clés: Matériaux composites, unidirectionnel, stratifié, caractérisation, modélisation méthodes de calculs.

Abstract

The composites materials occupy an increasing significant place in the realization of structures of high material performances (aerospace, aeronautical, automobile…). Such uses must be necessarily accompanied by a good knowledge of the material behavior, such manner to determine the type of reinforcement and the arrangement sequence which makes it possible to have optimal mechanical proprieties.

The objective of our work is to effect a comparative study on the mechanical behavior characterization of a stacking plate composite $[0/90/\pm 45]_{2S}$ under the various parameters influence amongst other things: various fibers orientation of a fold, fiber's voluminal fraction and their nature (glass, kevlar, high graphite strength and high module).The mechanical characteristics of this regular symmetrical laminate will be envisaged by the use of a mathematical approach based on a model of Mindlin and the theory of Kirchhoff-love.

The various results obtained, show variability in the mechanical characteristics according to degree of anisotropy of material, and also allow us to propose the types of fittings able to improve resistance of the composite laminated in such a direction of request.

Key words: Composite materials, unidirectional, laminate, characterization, modeling methods of calculation.

Sommaire

Remerciements……... ii
Résumé …….. iii
Sommaire …… v
Liste des figures …… xi
Liste des tableaux …… xv
Nomenclature ……... xvi

Introduction Générale…… 1

Chapitre I : Présentation Des Matériaux Composites

I.1 Introduction…….. 03
I.2 Définition……..... 03
I.3 Différents types de constituants de base……. 04
I.3.1 Renforts…… 04
I.3.1.1 Fibres…… 04
A. Formes linéiques…… 04
B. Formes surfaciques…… 05
B.1 Les mats …… 05
B.2 Les tissus et rubans…… 05
C. Formes multidirectionnelles …… 06
C.1 Tresses et préformes …….. 06
C.2 Tissus multidirectionnels…… 07
I.3.1.2 Les principales fibres…… 08
A. Fibres de verre…… 08
A.1 Les avantages de fibres de verre…… 08
A.2 Les inconvénients de fibres de verre……... 09
B. Fibres de carbone…… 09
B.1 Les avantages de fibres de carbone…… 09
B. 2 Les inconvénients de fibres de carbones…… 09
C. Les fibres de bore…… 09

D. Les fibres de carbure de silicium…… 10
E. Les fibres d'aramide (Kevlar)…… 10
I.3.2 La matrice…… 11
I.3.3 Les charges et les additifs…… 12
a. Charges renforçantes…… 13
b. Charges non renforçantes…… 13
c. Charges conductrices et antistatiques…… 13
e. Les additifs……. 13
I.4 Classification des matériaux composites…… 13
I.5 Elaboration des composites…… 14
I.5.1 Matrice organique…… 14
I.5.2 Demi-produit…… 14
I.5.3 Matrices métalliques …… 14
I.5.4 Matrices céramiques……. 14
I.6 Architecture des composites…… 15
I.6.1 Définition…….. 15
a. Renfort unidirectionnel…… 15
b. Tissus…… 15
c. Renfort dispersé…… 15
d. Pli…….. 15
e. Couche…… 15
I.6.2 Stratifiés…… 15
a. Plan moyen…… 16
b. Code de représentation d'un stratifié…… 16
I.6.2.3 Stratifié hybride…… 17
I.6.3 Composite sandwich…… 17

Chapitre II : Caractérisation Des Matériaux Composites

II.1 Introduction……..... 18
II.2 Paramètres influençant les propriétés mécaniques des composites…… 18
II.2.1 Influence de l'interface sur le comportement global du composite (liaison fibre- matrice)…… 18
II.2.2 Influence du type de renfort…… 19

II.2.3 Influence de la matrice…… 20
II.2.4 Influence du type d'armature de renforts…… 20
II.2.5 Influence de la longueur et du diamètre de fibres……. 20
II.2.6 Influence de l'angle de sollicitation par rapport au sens principal des fibres... 21
II.2.7 Influence du taux de porosité…… 21
II.2.8 Influence de la fraction volumique de fibres et du degré de transfert de charge Ef/Em…… 22
II.2.9 Influence du mode de mise en œuvre……... 23
II.3 Paramètres influençant les propriétés physico-chimiques des composites……. 24
II.3.1 Absorption de solvant……... 24
II.3.2.Absorption d'eau……... 24
II.3.3 Composition chimique du matériau……. 25
II.4. Différents essais normalisés……... 25
II.4.1 Essais sur les constituants de matériaux composites…… 26
II.4.1.1 Essais sur les renforts……. 26
A. Propriétés physiques……. 26
B. Propriétés mécaniques…….. 26
C. Aptitude à l'imprégnation……. 27
II.4.1.2 Essais sur la résine……. 27
A. Contrôle chimique de la résine……. 27
B. Viscosité de la résine…… 27
C. Durée d'utilisation d'un système résine durcisseur……... 28
II.4.1.3 Essai sur les demi-produits…… 28
A. Masse surfacique…… 28
B. Teneur en matières volatiles…… 29
C. Teneur en fibres…… 29
D. Teneur en résine déposée…….. 29
E. Pourcentage d'écoulement conventionnel de la résine…….. 29
F. Mouillabilité…….. 29
G. Retrait au moulage par compression et par post-retrait…… 30
H. Plasticité…… 30
II.4.2 Essai sur les matériaux composites……... 30
II.4.2.1 Essai physiques……. 30

A. Absorption d'eau…….. 30
B. Essai de perte au feu…… 30
II.4.2.2 Les essais mécaniques…… 31
A. Traction…… 31
B. Compression…… 31
C. Flexion trois points…… 31
D. Essais de flexion quatre points……. 33
E. Dureté Barcol…… 34
F. Résistance au choc…… 34
II.4.2.3 Les essais d'endurance…….. 34
A. Fatigue…….. 34
B. Fluage et Relaxation…… 35
C. Vieillissement……. 35
II.4.2.4 Essais thermiques…… 36
A. Conductivité thermique…… 36
B. indice d'oxygène…… 37
C. Essai d'inflammabilité par rayonnement……... 37
II.4.3 La caractérisation physicochimique…… 37
II.4.3.1 Spectroscopie infrarouge…… 37
A. Principe…… 37
B. Infrarouge à transformée de Fourier……. 38
C. Objectifs de L'I.R.T.F……... 38
II.4.3.2 Analyses thermique…… 39
A. Analyse thermique différentielle (ATD)……... 39
B. Analyse thermomécanique (TMA)……. 40
C. Analyse viscoélastique dynamique ou analyse différentielle mécanique (DMA)…….. 40

CHAPITRE III : Etat de l'art sur les matériaux composites

III.1 Introduction……..... 41
III.2 Matériaux composites à fibres…… 41
III.2.1 Distribution de contraintes de matériaux composites à fibres courtes…….. 41
A. Déplacement d'élément basé sur la contrainte plane……. 42

B. Elément de contrainte hybride…… 43
C. Comparaison des modèles d'éléments finis…… 45
III.2.2 Analyse par éléments finis de transfert de contraintes…….. 50
A. Transfert de contrainte élastique…… 52
B. Rupture de la matrice (mode α)…….. 53
C. Fissuration de la matrice (mode γ)……. 54
D. Décollage de l'interface (mode β)…….. 55
E. Transfert de contrainte plastique…… 55
F. Arrachement de fibres……. 56
G. Fragmentation des fibres…… 57
III.3 Fluage des matériaux composites……... 57
III.3.1 Loi de fluage de glissement et la diffusion de l'interface……... 58
III.3.1.1 Formulation…… 59
III.3.1.2 Analyse……... 60
A. Cas linéaire……... 60
B. Cas non linéaire…… 61
C. Résistance de composite au fluage……... 62
III.3.2 Modélisation du fluage d'un composite à matrice métallique renforcé de fibres élastiques continues alignées……..…… 64
III.3.2.1 Comportement de la matrice au cisaillement…… 65
A. Modèle du deBotton et de Ponte Castâneda…… 65
B. Modèle de volume élémentaire représentatif…….. 66
III.3.2.2 Comportement de fibres aux charges axisymétriques …… 68
A. Modèle de McLean…….. 69
B. Solution de volume élémentaire représentatif…… 70
III.4 Modélisation du béton armé…….. 71
III.4.1 Modélisation de poutres en béton armé renforcées de tissus d'aramide…… 71
III.4.1.1 Méthodologie…… 72
III.5 Composites stratifiés…… 75
III.5.1 Effet thermomécanique sur les stratifiés d'empilement anisotrope…… 75
III.5.2 Caractérisation du comportement stratifié…… 76
III.5.3 Prévision de la rupture…… 78
III.6 Conclusion……..…. 80

CHAPITRE IV: Etude de l'influence de l'orientation des fibres sur les composites UD et stratifiés

IV.1 Introduction…….. 81

IV.2 Matériaux composites unidirectionnels…… 81

IV.2.1 Propriétés mécaniques des matériaux composites……..… 81

IV.2.2 Relation contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel…… 81

A. Loi de Hooke en axes propres…… 81

B. Transformation de coordonnées…… 84

IV.3 Simulation numérique…… 86

IV.3.1 Résultats obtenus…… 86

IV.3.2 Interprétation des résultats…… 88

IV.3.3 Etude comparative…… 89

IV.4 Matériaux composites stratifiés…… 90

IV.4.1 Généralités…… 90

IV.4.2 Approche bidimensionnelle (en petite déformation)…… 91

A. Champ cinématique de déformation…… 91

B. Efforts généralisés résultants …… 93

C. Comportement global d'une plaque stratifiée……..... 95

IV.4.3 Simulation numérique ……... 97

A. Présentation et description du stratifié…… 97

B. Résultats obtenus…… 99

C. Interprétation et discussion des résultats……. 103

D. Analyse des résultats……... 104

IV.5 Conclusion…….. 104

Conclusion Générale ……... 106

Références bibliographiques…….. 108

Annexe A…… 111

Annexe B…… 118

Liste des figures

Figures Page

Figure I.1 : Les différentes formes de présentation de la fibre du verre…….. 05

Figure I.2 : Chaîne et Trame d'un Tissu……... 06

Figure I.3 : Les principaux types d'armure Utilisés pour le tissage des tissus……. 06

Figure I.4 : Tissage cylindrique et conique…….. 07

Figure I.5 : Tissus multidirectionnels……... 07

Figure I.6 : Organigramme des principaux matériaux de renforts…… 10

Figure I.7 : Organigramme des principaux matériaux des matrices……. 12

Figure I.8 : Constitution d'un stratifié…….. 16

Figure I.9 : Repérage du plan moyen…….. 16

Figure I.10 : Désignation d'un stratifié…… 17

Figure I.11 : Structure en sandwich…….. 17

Figure II.1 : Types de sollicitation: A- en série ; B- en parallèle……. 19

Figure II.2 : Influence du pourcentage de verre et type d'armature sur la contrainte de rupture……. 20

Figure II.3.a : Relation entre la longueur de fibre et la résistance moyenne…… 21

Figure II.3.b : Relation entre le diamètre de la fibre et la résistance moyenne……. 21

Figure II.4 : Variation de la contrainte de rupture en fonction de l'angle de sollicitation 21

Figure II.5.a : Relation entre le taux de porosité et la résistance au cisaillement interlaminaire…… 22

Figure II.5.b : Relation entre taux de vide et résistance en compression des composites a fibres de verre…… 22

Figure II.6 : Influence du taux de fibres sur la résistance à la traction d'un composite unidirectionnel…….. 22

Figure II.7 : Influence du mode de mise en œuvre sur l'endurance (fibre de verre-époxy V_f = 70%)……. 23

Figure II.8 : Dispositif d'essai et dimension de l'éprouvette en flexion……... 32

Figure II.9 : Dispositif d'essai et dimension de l'éprouvette en flexion 4 points……. 33

Figure III.1 : Poutre simplement soutenue, uniformément chargée…….. 45
Figure III.2 : L'écart de la contrainte normale maximale pour les deux modèles d'élément finis…….. 46
Figure III.3 : Volume élémentaire représentatif de composite de fibres courtes alignées 57
Figure III.4 : Contraintes normale et de cisaillement d'interface le long de la direction des extrémités de fibres en forme "V"……. 48
Figure III.5 : Effet de la fraction volumique de fibres sur la contrainte normale de fibres, $a_f = 15$, $E_f/E_m = 63.75$……... 48
Figure III.6 : Effet de la fraction volumique de fibre sur la contrainte de cisaillement i interfaçiale, $a_f = 15, E_f/Em = 63.75$…… 49
Figure III.7 : Effet du rapport d'aspect de fibre sur la contrainte normale maximale d de fibre, $E_f/E_m = 63.75$, $V_f = 0.1$……. 49
Figure III.8 : Relation entre le rapport d'aspect de fibre et la région de contrainte normale constante de fibres, *Ef/Em = 63.15, Vf = 0.1*…… 50
Figure III.9 : Croquis 3D d'un modèle axisymétrique de FE représenté dans le 2D pour un quart de cercle supérieur……... 51
Figure III.10 : Graphe de contraintes axiales σ_z/σ_c, en fonction de la distance Z…… 53
Figure III.11 : Graphes de distributions :(a) contraintes axiales de fibres σ_z, (b) contraintes de cisaillement interfaçiale τ……. 54
Figure III.12 : Graphe de distribution : (a) de contrainte axiale σ_z et (b) de contrainte de cisaillement interfaçiale τ…… 56
Figure III.13 : Graphe de la distribution : (a) de contrainte axiale σ_z et (b) de contrainte de cisaillement interfaçiale τ…… 57
Figure III.14 : Cellule unité pour l'analyse du fluage……... 60
Figure III.15 : La contrainte appliquée sur le matériau composite en fonction du taux de déformation, des propriétés de fluage de matrice, de glissement, du transport de la masse à l'interface et de la géométrie de cellule unité cellules…….. 62
Figure III.16 : Résistance au fluage d'un matériau composite en fonction de coefficient de traînance d'interface quand il n'y a aucun transport de la masse d'interface…… 63
Figure III.17 : Résistance au fluage d'un composite en fonction de coefficient de diffusion d'interface…… 63

Figure III.18 : Présentation d'un état de contrainte arbitraire……... 66
Figure III.19 : Arrangement hexagonal de fibres dans une cellule unité…….. 67
Figure III.20 : Maille d'élément fini utilisée dans les calculs de cellule unité……. 67
Figure III.21 : Evolution de cisaillement pour *f*= 0.32 et n = 3…… 68
Figure III.22 : Evolution de tension uniaxiale pour $\varepsilon_0/\varepsilon_c$ = 0.6 et n = 3…… 69
Figure III.23 : Evolution de la tension uniaxiale en fonction de *f*=0.32, n=3, B=4.125×10^{-13}Mpa^{-11}S^{-1} et σ_n=500MPa…….. 70
Figure III.24 : Evolution de la tension biaxiale pour *f*=0.32, n=3, B=4.125×10^{-13}Mpa^{-11}S^{-1} et σ_n=500MPa…… 70
Figure III.25 : Essais de flexion…… 73
Figure III.26 : Modélisation numérique en 2D……. 73
Figure III.27 : Evolution des flèches……. 74
Figure III.28 : Comparaison entre les essais et le calcul numérique……. 75
Figure III.29 : Définition des systèmes d'axes pour une plaque (a) stratifié symétrique $[\theta/0°]_{2S}$, (b) stratifié antisymétrique [θ/0°/90°/-θ]…… 77
Figure III.30 : Variation de la résistance à la rupture en traction, à T=100°C, en fonction de l'orientation des fibres de différentes plaques stratifiées….. 78
Figure III.31 : Comparaison des résistances à la rupture en traction, pour différentes températures, des plaques composites hybrides…… 78
Figure III.32 : Evolution de différentes zones d'endommagement, à T=100°C……... 79
Figure III.33 : Comparaison des résistances à la rupture en traction, à T=100°C…… 79
Figure III.34 : Courbe Traction-déformations des plaques stratifiées $[90°/0°]_{2S}$ et [90°/0°/90°/0°] à T=100°C…….. 80
Figure III.35 : Courbe traction-déformations des plaques stratifiées $[45°/0°]_{2S}$ et [45°/0°/90°/-45°] à T=100°C……. 80

Figure VI.1 : Pli composite unidirectionnel…….. 83
Figure VI.2 : Changement d'axes……. 85
Figure VI.3 : Variation des caractéristiques d'un composite unidirectionnel en fonction de l'orientation des fibres (Vf = 10 %)……... 87
Figure VI.4 : Variation des caractéristiques d'un composite unidirectionnel en fonction de l'orientation des fibres (Vf = 20 %)……... 87
Figure VI.5: Schématisation d'un stratifié……. 91
Figure VI.6: Efforts résultants en membrane…… 93

Figure VI.7: Moment résultants en flexion et torsion…….. 94
Figure VI.8: Efforts résultants en cisaillement transversal……... 94
Figure VI.9: Géométrie du stratifié étudier…….. 98
Figure VI.10: Organigramme de la méthode modélisation du comportement du stratifié…….. 99
Figure VI.11: Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 1 et 8…….. 100
Figure VI.12: Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 2 et 7…….. 100
Figure VI.13: Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 3 et 6…….. 101
Figure VI.14: Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 4 et 5…….. 101

Liste des tableaux

Tableaux Page

Tableau I.1 : Types de verres…… 08

Tableau I.2 : Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base……. 11

Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermoplastiques et thermodurcissables….. 12

Tableau II.1 : Module d'élasticité en traction (composite unidirectionnel)…….. 19

Tableau II.2 : Effets de l'absorption d'eau sur les propriétés de quelques réticulations polyépoxydes aminés…… 25

Tableau II.3 : Dimensions des éprouvettes pour les essais de flexion…….. 32

Tableau IV.1 : Présentation des composites UD……... 86

Tableau IV.2 : Influence de la fraction volumique de fibres de verre sur les caractéristiques d'un UD……... 89

Tableau IV.3 : Valeurs théoriques de caractéristiques mécaniques des composites unidirectionnels à 60% de fibres……... 89

Tableau IV.4 : Valeurs expérimentales de caractéristiques mécaniques des composites unidirectionnels à 60% de fibres……... 90

Tableau IV.5 : Séquence d'empilement de la structure de base étudiée 98

Tableau IV.6 : Module d'Young longitudinal homogénéisé (EHL)…….. 102

Tableau IV.7 : Module d'Young transversal homogénéisé (EHT)…… 102

Tableau IV.8 : Module de cisaillement homogénéisé (GH)……. 102

Tableau IV.9 : Coefficient de poisson homogénéisé (νH)……... 103

Nomenclature

E_i : Module de Young dans la direction *i*.

E_f : Module de Young de fibres.

E_m : Module de Young de la matrice.

C_f, C_m : Tenseurs de quatrième ordre de module élastique de fibres et de la matrice respectivement.

σ' : Tenseur déviatorique.

σ_a : Contrainte axiale moyenne.

$\sigma_0, \dot{\varepsilon}_0$: Contrainte et déformation pure dans la matrice.

$\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$: Contrainte et déformation uniaxiale.

$\dot{\varepsilon}^e$: Taux de déformation élastique.

f : Fraction volumique de fibres.

α : Constante de relaxation.

$\dot{\varepsilon}$: Taux de déformation.

ε_c : Déformation critique.

ε_0 : Déformation initiale.

$\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_3^0$: Déformations de membranes.

k_1, k_2, k_3 : Déformations de courbure.

$\varepsilon_4, \varepsilon_5$: Déformations de glissement transversal.

(B, n): Constantes de fluage de la matrice.

$[e]$: Vecteur de déformation.

$[S]$: Matrice de complaisance.

S_{ij} : Coefficient de la matrice de complaisance.

$[\bar{u}]$: Vecteur de déplacement au frontière.

$[D]$: Matrice de rigidité.

$[Q]$: Vecteur des forces nodales.

σ_u : Contraintes limite de rupture.

$\sigma(a,z)$: Contrainte hydrostatique sur la surface de fibre.

$\{\sigma^G\}_K$: Contrainte de kième couche en repère de structure.

τ : Contrainte de cisaillement.

r_0 : Rayon de fibre.

η : Viscosité

D : Coefficient du diffusion de l'interface.

W : Charge.

$W_{\max}$: Charge maximale.

T : Température absolue.

ΔT : Ecart de température.

V_m : Fraction volumique de la matrice.

V_f : Fraction volumique de fibres.

$\overline{T}$: Vecteur de force de traction.

$[P]$: Matrice des termes polynomiaux de coordonnées (x,y).

$[B]$: Matrice de déformation.

σ_{yz} : Contrainte de cisaillement sur la surface de fibre.

a_f : Fraction volumique de fibres.

t : Epaisseur.

j_z : Volume de matière transportée.

S : Résistance au fluage.

α_1, α_2 : Coefficients de dilatation thermique.

k_{ij} : Coefficient de courbure.

$[T]$: Matrice de passage.

θ : Angle d'orientation de fibres.

A_{ij} : Coefficients de la matrice de rigidité.

B_{ij} : Coefficients de la matrice de coulage.

N_{ij}^T : Coefficients de la matrice des termes thermiques.

$E_x^{(k)}$: Module de Young de la k$^{\text{ième}}$ couche dans la direction de l'axe x.

G_{ij} : Module de cisaillement dans le plan correspondant

$G_{xz}^{(k)}$: Module de cisaillement transversal de la k^{ième} couche.

ν_{ij} : Coefficient de Poisson dans le plan correspondant

k : Facteur de correction de cisaillement

σ_i : Contrainte dans la direction i

σ_F : Contrainte de traction

τ , τm : Contrainte de cisaillement

τ_{mu} : Contrainte en cisaillement à la rupture

τ_{ij} : Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant

N_i : Efforts dans la direction i

M_i : Moments de flexion

P_i : Force de traction, Force axiale

V_i : Force de cisaillement

ε_j : Déformation relative dans la direction j

ε^f : Déformation en flexion

γ_{ij} : Glissement de cisaillement dans le plan correspondant

$u_1(x)$: Déplacement longitudinal

$u_3(x)$: Déplacement transversal

$\gamma(x)$: Deplacement en rotation

v_m^T : Déplacements des nœuds $(m = i, j, k, l)$

z_k : Coordonnée de la k^{ième} couche

w_i, et γ_x^i : Déplacements nodaux

w_i : Déplacement transversal ;

u_i : Déplacement longitudinal ;

S_{ij} : Matrice de souplesse

C_{ij} : Matrice de complaisances (ou des rigidités).

$\left[\bar{C}_{ij}\right]_k$: Matrice des complaisances de la $k^{ième}$ couche

$\left[\bar{C}_{ij}\right]_{eq}$: Matrice des complaisances équivalente

$D^{(k)}$: Matrice d'élasticité.

ρ_0, ρ_1 et ρ_2 : Les densités massiques généralisées

ρ_k : Masse volumique de la $k^{ième}$ couche.

h: Epaisseur

L : longueur

b : Largeur de la poutre.

A_i : Rigidité en traction

D_i : Rigidité en flexion.

$M(x_1, x_2)$: Moments résultants.

$N(x_1, x_2)$: Efforts résultants en membrane.

$T(x_1, x_2)$: Efforts tranchants résultants.

$R(O, X_1^G, X_2^G, X_3^G)$: Repère de la structure.

$R^K(O, X_1^K, X_2^K, X_3^K)$: Repère local d'orthotropie du pli K

Introduction Générale

Introduction Générale

Depuis quelques années, les matériaux composites se sont imposés dans de nombreux secteurs de pointe tels que le spatial, l'aéronautique, la construction navale ou même l'automobile. Une telle percée n'est pas le fruit du hasard mais bien la réponse à des besoins technologiques de plus en plus sévères. L'avantage des matériaux composites est en effet de pouvoir marier plusieurs caractéristiques mécaniques ou chimiques propres à chaque constituant. Ainsi le renfort d'un polymère par des fibres de verre permet d'obtenir un matériau léger, chimiquement peu réactif, étanche comme le plastique et résistant comme le verre. Dans le domaine des hautes températures, domaine qui intéresse tous les motoristes en général, les matériaux composites à matrice céramique (CMC) et à fibres céramiques longues se sont avérés une alternative aux alliages métalliques. En effet les CMC sont capables de conserver leurs propriétés mécaniques à haute température et en milieu oxydant grâce à leur faible réactivité chimique, tout en présentant un caractère beaucoup moins fragile.

La connaissance du comportement mécanique d'un matériau composite est le premier souci des chercheurs du domaine. Mais cela s'avère insuffisant puisque les matériaux composites généralement utilisés (ceux à base d'une matrice organique) sont susceptibles d'être exposés à tous les milieux ambiants et en particulier à l'atmosphère extérieure ou les gaz, les fumées, l'humidité, et le soleil sont autant de facteurs qui modifient notablement le comportement mécanique des matériaux, contribuant ainsi à leur vieillissement.

Les fibres de carbone ont été sélectionnées grâces à leurs très bonnes caractéristiques spécifiques (résistance et rigidité). Elles ont étés alliés à une matrice résineuse (époxy) qui permet la mise en forme aisée. On a ainsi obtenu un matériau composite qui possède des caractéristiques duales; les constituants résine et fibre ont des propriétés mécaniques quasiment aux extrêmes de la palette des matériaux. Le composite sous forme de plis arrangés en fonction des directions de chargement constitue un composite stratifié: l'orientation judicieuse des plis permet de faire correspondre les axes de charge et les axes de rigidité ou de résistance de la structure c'est-à-dire d'optimiser. Le problème lié à ce matériau est la prédiction de son comportement à la fois complexe et multiple (lié à l'hétérogénéité et l'anisotropie): la compréhension des phénomènes et leur

prise en compte dans des modèles ne sont pas encore abouties que pour les matériaux métalliques. On peut être satisfait des progrès déjà réalisés concernant le comportement mécanique sous chargement statique ; mais là où la marge de progression reste importante, c'est en dehors de ce domaine : en particulier des chargements mécaniques de fatigue.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude de l'influence de divers paramètres, entre autre: les différentes orientations de fibres unidirectionnelles, la fraction volumique de fibres et de la nature du type du renfort (verre, kevlar, graphite haut résistance et haut module) sur le comportement du pli, puis nous abordons la caractérisation d'un composite stratifié composé de huit plis symétriques de fibres de carbone et d'une matrice époxy. Une approche basée sur un modèle analytique sous des charges statiques, est mise au point pour prévoir les caractéristiques mécaniques du stratifié et l'identification du l'agencement le plus adéquat pour une telle sollicitation.

A cet fait nous avons structuré ce mémoire autour de ces objectifs comme suit :
Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à la présentation des matériaux composites ainsi que leur domaine d'utilisation ; le second chapitre, porte sur la caractérisation des matériaux composites et les paramètres influençant sur leur comportement. Une synthèse bibliographique dans laquelle nous présentons sommairement quelques travaux récents sur la modélisation et les méthodes de calcul appliquées aux matériaux composites en troisième chapitre. Dans le chapitre quatre, nous étudions l'influence de l'orientation des fibres sur les matériaux composites unidirectionnels et une simulation numérique du comportement des structures stratifiées par une approche théorique.

Chapitre I:

Présentation des Matériaux Composites

I.1 Introduction

A l'image des technologies qui ont caractérisé l'évolution rapide de la science durant la dernière moitié du XX siècle, les matériaux, voire même leur concept, ont été marqués par des évolutions fondamentales. Pendant longtemps, le tout métallique, caractérisé par le développement de l'industrie sidérurgique, a rempli le cahier des charges de toutes les applications industrielles. L'introduction de nouvelles familles de matériaux à partir des années 70 a non seulement occasionné d'autres matériaux dans un espace initialement réservé aux matériaux métalliques, mais surtout amené à penser différemment les concepts associés aux choix des matériaux.

Part conséquent, les nouveaux matériaux nécessitent de la part des constructeurs une meilleure maîtrise des différentes étapes qui vont de la conception du matériau à son utilisation en passant par sa réalisation. **[4]**

La caractérisation d'un matériau composite doit tenir compte de toutes les conditions et considérations afin de mieux définir désormais, son rôle et ses performances à pouvoir même remplacer certains matériaux métalliques d'égale résistance mais plus léger et encore mieux résistant dans des milieux les plus agressifs.

L'utilisation des matériaux composites implique des choix restreints conditionnés par les caractéristiques des différents éléments du matériau choisi (résines, fibres, additifs, …) et par le procédé de mise en œuvre. La connaissance de toutes les caractéristiques de la matière première permettent, par la sommation de leurs performances (physiques, chimiques, mécaniques, …etc.), de définir celles du produit final.

Pour l'étude du comportement d'un matériau composite et pouvoir ainsi établir ces propriétés, il est impératif de connaître son rôle et sa destination selon un cahier des charges pré établi, comment et par quoi le caractériser.

I.2. Définition

Un matériau composite est l'assemblage de deux ou plusieurs matériaux non miscibles, de nature différente, et dont les propriétés sont la somme de celles des constituants, ou mieux encore, par effets de synergie et non pas d'addition, un dépassement des caractéristiques originelles. **[5]**

I.3. Différents types de constituants de base

Les différents constituants du composite sont les renforts, la matrice, les charges et les additifs.

I.3.1. Le renfort

Le renfort est tout simplement le squelette ou l'armature du composite ; il confère aux composites leurs caractéristiques mécaniques : rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc. Il permet aussi d'améliorer certaines des propriétés physiques : comportement thermique, tenue en hautes températures, tenue au feu, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc. parmi ces renforts on peut citer :

I.3.1.1 Fibres

Les fibres sont des éléments du matériau composite qui apportent généralement les propriétés mécaniques recherchées. Elles se présentent sous forme de filaments de plus au moins longs.

Les fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- Linéiques (fils, mèches, … etc.)
- Tissus surfaciques (tissus simples, mats,… etc.)
- Multidirectionnelles (tresses, tissus complexes, …etc.)

Il existe également des fibres courtes de 1 à 2mm qui sont dispersées dans la matrice, ou encore des fils coupés de 15 à 50mm de longueur. Leur utilisation est encore limitée en raison des difficultés de fabrication.

A. Formes linéiques [2 ; 3]

Les fibres sont élaborées suivants un diamètre de quelques microns seulement (filaments élémentaires); trop petites pour l'utilisation unitaire, elles sont par conséquent réunies en fils ou en mèches de différentes formes :

- Fil de base : ensemble de filaments élémentaires.
- Fil simple : ensemble de fils de base unitaires continus ou discontinus, maintenus ensemble par torsion.
- Fil retors : ensemble de fils simples retordus ensemble.
- Fil câblé : ensemble de fils retors, avec éventuellement des fils simples retordus une ou plusieurs fois ensemble

- Mèches : ensemble de fibres élémentaires discontinues
- Stratifil : ensemble de fils de base continus.

L'unité de masse linéique est le tex (1 tex = 1 g/Km).

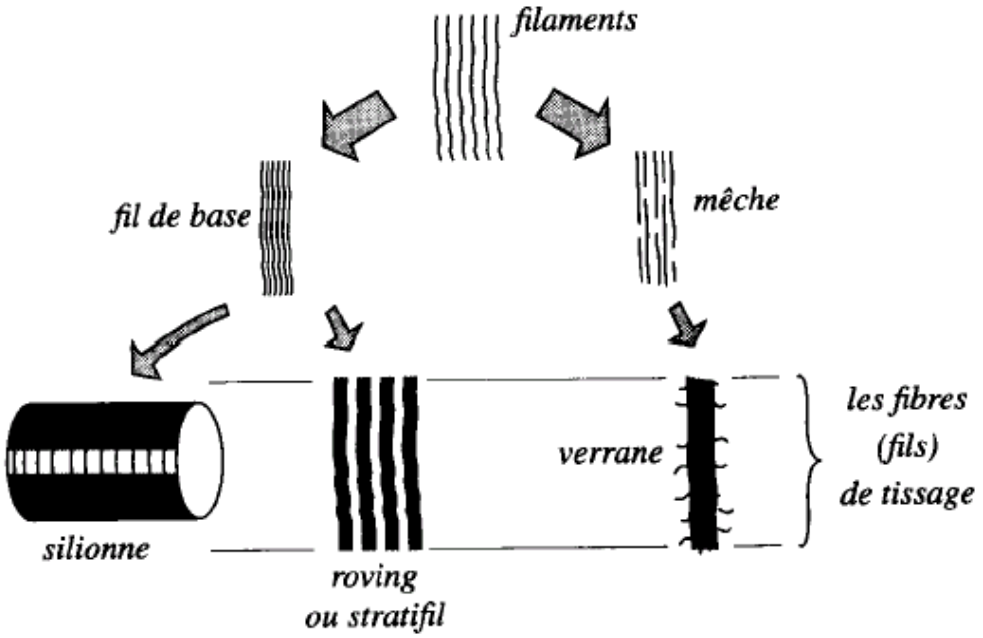


Figure I.1 : Les différentes formes de présentation de la fibre du verre

B. Formes surfaciques

Des ensembles linéaires décrits précédemment on peut réaliser les formes surfaciques suivantes :

B.1. Les mats

Ce sont des nappes de fils continus ou discontinus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle, et maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines. L'absence d'orientation préférentielle des fibres conduit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

B.2. Les tissus et rubans

Ensemble de fils, stratifiés ou mèches réalisé sur un métier à tisser, composé d'une chaîne et d'une trame (Figure I.2)

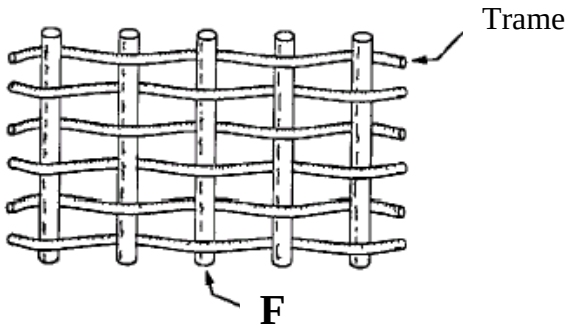


Figure I.2 : Chaîne et Trame d'un Tissu **[2 ; 3]**

Selon le schéma d'entrecroisement des fils de chaîne et les fils de trame, que l'on nomme l'armure du tissu, on distingue plusieurs types de tissage (Figure I.3.)

- Armure toile ou taffetas
- Armure satin
- Armure sergé
- Armure haute module
- Armure unidirectionnelle

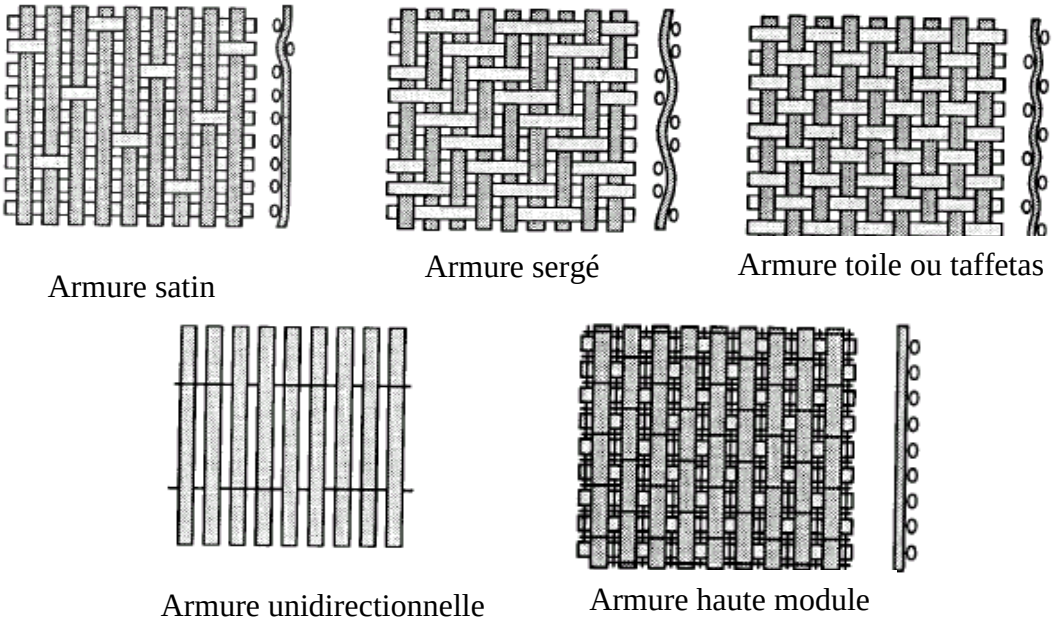


Figure I.3 : Les principaux types d'armure Utilisés pour le tissage des tissus

C. Formes multidirectionnelles

C.1. Tresses et préformes

Tissage cylindrique ou conique avec des entrecroisements réguliers des fils qui a la particularité d'être modulable en diamètre. Les fils s'entrecroisent en hélice. Le diamètre

de la tresse est lié au pas de l'hélice, par conséquent à l'angle que font les fils entre eux. Ce tissage nous permet des révolutions très résistantes ayant un diamètre variable le long de l'axe. **[4 ; 7]**

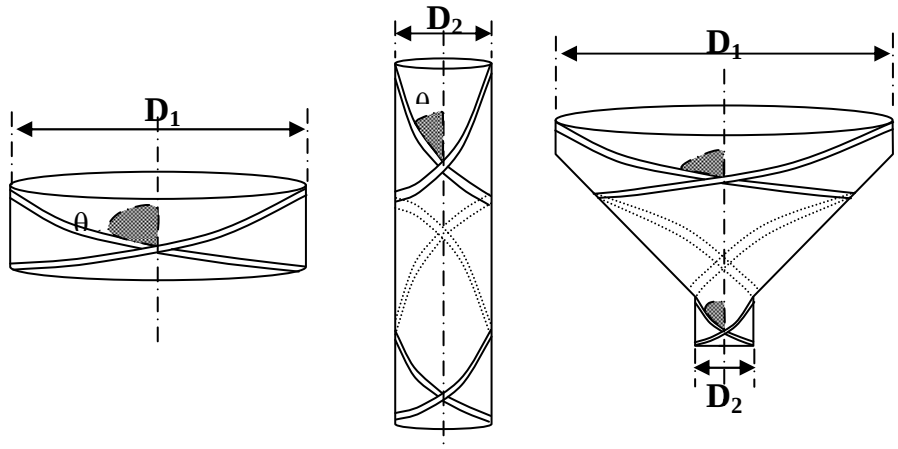
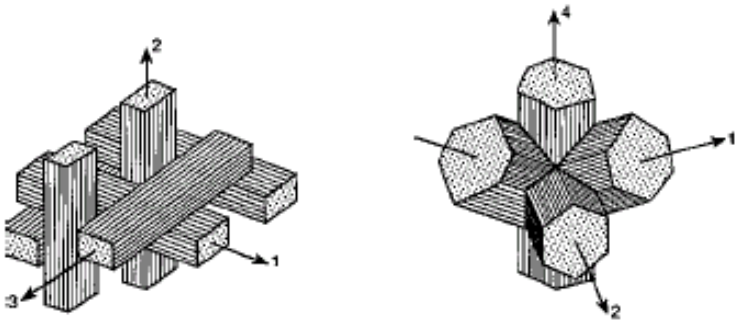


Figure I.4 : Tissage cylindrique et conique

C.2. Tissus multidirectionnels

Les fibres sont tissées dans plusieurs directions. Ceci permet d'obtenir un tissu très dense et épais mais par conséquent peu souple, il est utilisé par exemple pour la réalisation de tuyère. Des tissages 3D et 4D sont montrés respectivement par les figures I.5 (a) et I.5 (b) **[4 ; 6]**



(a) : tissage 3D (b) : tissage 4D

Figure I.5 : Tissus multidirectionnels

I.3.1.2 Les principales fibres

A. Fibres de verre

C'est la fibre la plus utilisée vu son excellent rapport performances mécaniques/ prix, ça place est au premier rang des renforts utilisés dans les matériaux composites.

Les fibres de verre sont fabriquées à partir d'un mélange à base de silice (SiO_2), qui est fondu à une température 1200°C puis passé dans une filière en platine, et les filaments sont étirés avant refroidissement à un diamètre de 5 à 13 μm à une vitesse de 60 m/s. En faisant varier la composition du mélange (silice, kaolin, chaux…etc.) on peut obtenir différents types de verre voire tableau suivant.

Principaux constituants (%)	Type de verre		
	E	D	R
Silice S_iO_2	53-54	73-74	60
Alumine AL_2O_3	14-15		25
Chaux CaO- Magnésie M_gO	20-24	0.5-0.6	9
Oxyde de bore B_2O_3	6-9	22-23	6

Tableau I.1: Types de verres

Le verre E est utilisé pour les composites GD, les verres D pour les circuits imprimés (en raison de leur propriétés diélectrique), et le verre R pour les composites HP (à cause de leurs haute résistance mécanique).

Les propriétés de la fibre de verre dépendent du type de verre utilisé (E, D, R) et du mode de filage (continu ou discontinu)

A.1. Les avantages de fibres de verre

- Rapport performances mécaniques/prix
- Bonne résistance spécifique (pour verre R)
- Bonne adhérence avec toutes les résines (existence d'ensimage)
- Tenue à température élevée
- Dilatation et conductivité thermique faibles
- Bonne propriétés diélectriques

A.2. Les inconvénients de fibres de verre:

- Faible module (par rapport à la fibre de carbone ou d'aramide)
- Vieillissement au contact de l'eau

B. Fibres de carbone

Les fibres de carbone sont fabriquées d'une matière organique de base (appelée précurseur) constituée de fibre acrylique à partir du poly acrylonitrile (PAN). En raison de la diversité des techniques de fabrication et de nombre de paramètres entrant en jeu, les fibres produites ont des propriétés plus au moins différentes. On distingue deux groupes :

- Les fibres à haut ténacité (HT) ou haute résistance (HR) σ_{tr} = 3000 Mpa
- Les fibres à haut module (HM) de module en traction élevé E_{tr} = 400000 Mpa

B.1. Les avantages de fibres de carbone

- excellentes propriétés mécaniques (R_t, R_c, E)
- très bonne tenue en température (atmosphère non oxydante)
- dilatation thermique nulle
- bonne conductibilité thermique et électrique
- bonne tenue à l'humidité
- usinabilité aisée
- faible densité

B.2 Les inconvénients de fibres de carbone

- prix très élevé
- tenue limitée aux chocs et à l'abrasion
- mauvais comportement avec l'oxygène (à partir de 400°C), avec les acides oxygénant à chaud et avec les métaux (corrosion galvanique)
- adhésion difficile avec les résines.

C. Les fibres de bore

Obtenues par dépôt chimique de chlorure de bore (BCI) et de l'hydrogène (H_2) sur un fil de tungstène de diamètre 13µm chauffé à une température comprise entre 1100 et 1300°C par effet joule.

D. Les fibres de carbure de silicium

Le principe d'élaboration est analogue à celui de fibres de bore, le dépôt résulte de la décomposition chimique à 1200°C du méthyltrichlorosilane en présence d'hydrogène.

E. Les fibres d'aramide (Kevlar)

Ce sont des polyamides des aromatiques (ou polyamide) dont la structure est composée de noyaux benzéniques reliés par des groupe CO et HN.

Les principaux matériaux de renfort sont :

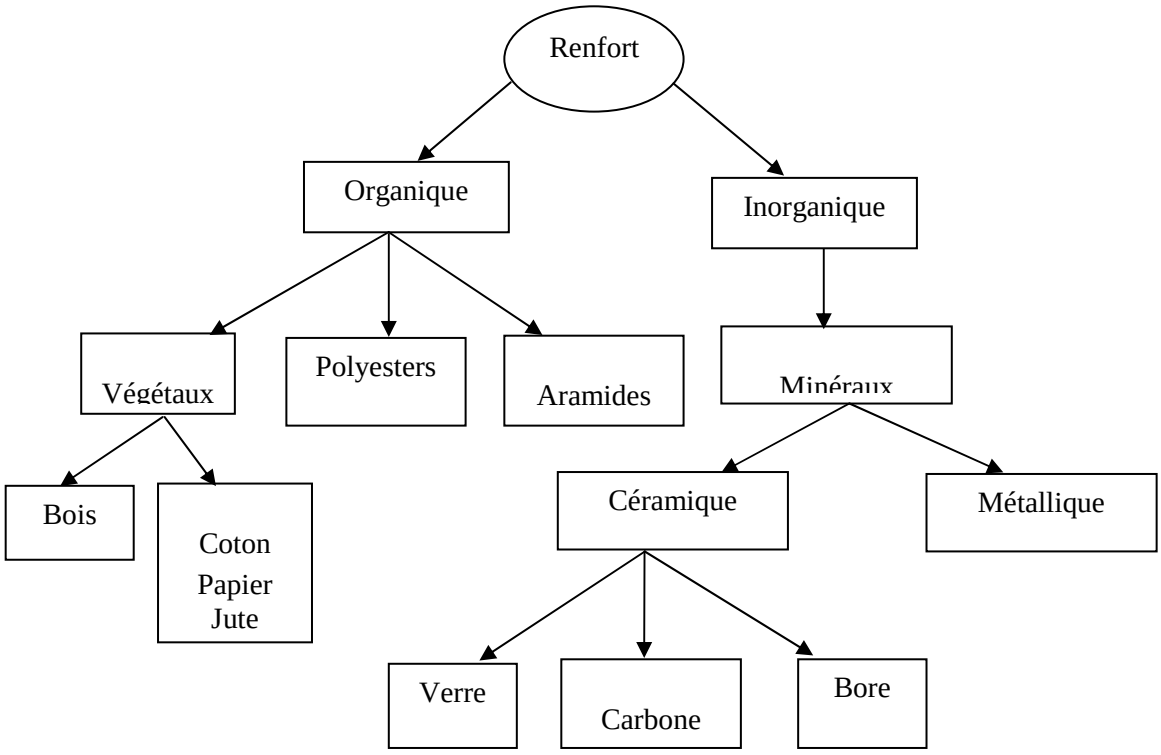


Figure I.6 : Organigramme des principaux matériaux de renforts

On peut résumer les caractéristiques de ces fibres dans le tableau suivant :

Fibre	Densité ρ en Kg/m^3	Charge de rupture en traction En MPa	Charge de rupture en compression MPa	Allongement à la rupture En%	Module d'élasticité longitudinale en MPa	Diamètre du filament élémentaire En µm
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3 – 30
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3 – 30
Aramide Bas module	1.45	3100	500	2	70000	12
Aramide haut module	1.45	3100	500	1	130000	12
Carbone HT	1.78	2800	1800	0.5	200000	8
Carbone	1.8	2200	1300	-	400000	8
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100 – 200
Acier XC10	7.85	1000	-	-	210000	-
Aluminium	2.63	358	-	-	69800	-

Tableau I.2 : Principales caractéristiques mécaniques des fibres de base **[1 ; 2]**

I.3.2 La matrice [1;2]

La matrice constitue l'élément de liaison entre les divers éléments constitutifs et donne la forme voulue au produit réalisé. Elle assure également une protection chimique. Les matrices doivent présenter une bonne compatibilité avec le renfort. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à permettre aux matériaux composites de conserver ces caractéristiques mécaniques spécifiques élevées. On distingue deux grandes familles de matrice (Figure I.7)

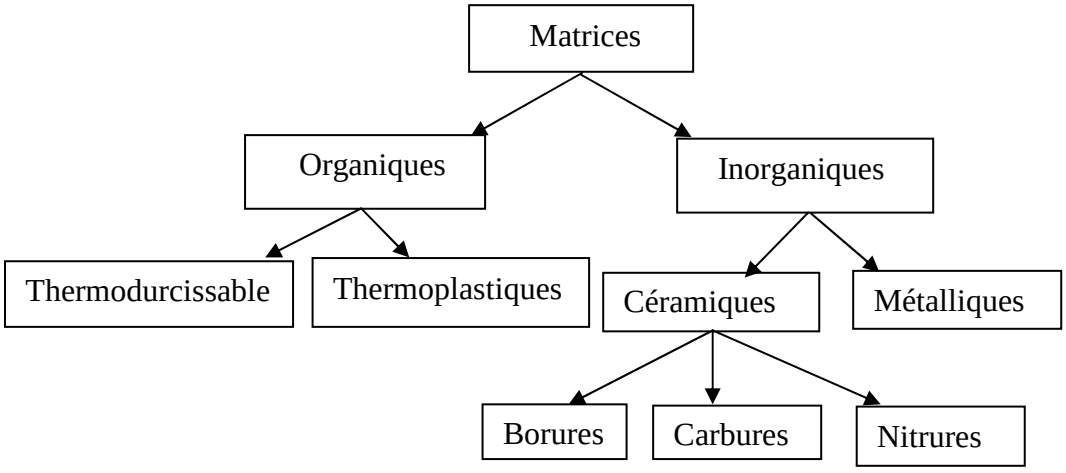


Figure I.7 : Organigramme des principaux matériaux des matrices

Le tableau suivant présente quelques caractéristiques des résines TP et TD

Matrices résineuses		ρ_m Kg/m^3	E_m MPa	G_m Mpa	υ_m	σ_m MPa	A %	α 10^{-5} °C^{-1}	T_{max} °C
Thermodurcissables	Epoxyde	1200	4500	1600	0.4	130	2(100°C) 6(200°C) 2.5	11	90 à200
	Phénolique	1300	3000	1100	0.4	70		1	120à200
	Polyster	1200	4000	1400	0.4	80	2.5	8	60à200
	Polycarbonate	1200	2400			60		6	120
	Vinylester	1150	3300			75	4	5	>100
	Silicone	1100	2200			35			100à350
	Uréthane	1100	700 à 7000			30	100		100
	Polyimide	1400	4000à 19000	1100	0.35	70	1	8	250à300
Thermoplastiques	Polypropylène	900	1200			30	20à 400	9	70à140
	Polysulfure de phénylène	1300	4000			65	100	5	130 à 250
	Polyamide	1100	2000			70	200	8	170
	Polyéther sulfone	1350	3000			85	60	6	180
	Polyéther imide	1250	3500			105	60	6	200
	Polyétheréthercétone	1300	4000			90	50	5	140 à 250

Tableau I.3 : Caractéristiques des résines thermoplastiques et thermodurcissables **[1 ; 2]**

I.3.3 Les charges et les additifs

Les charges et les additifs : sont utilisés pour améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques et pour faciliter la mise en œuvre.

a. Charges renforçantes

- Des sphères pleines ou creuses généralement en verre, en carbone ou en époxydes.
- Non sphériques ou des écailles de dimension transversal 100 à 500 μm et d'épaisseur de 10 à 20μm. Généralement elles sont ajoutées à des résines dans des applications électriques ou électroniques.

b. Charges non renforçantes

Permettent de diminue le coût des résines tout en gardant les performances. Les principales charges sont en carbonates et silicates (les silices). On a aussi les charges ignifugeantes qui ont pour rôle de réduire ou d'empêcher les phénomènes de combustion. Par exemples l'hydrate d'alumine, l'oxyde d'antimoine.

c. Charges conductrices et antistatiques

- Poudre ou paillettes métalliques en cuivre, fer, aluminium
- Des microbilles de verre métallisées (cuivre argent)
- Des particules de carbone (noir de carbone)
- Des filaments métalliques

d. Les additifs

Les additifs, se trouvent en faible quantité et interviennent comme :

- Lubrifiants et agents de démoulage
- Pigments et colorants
- Agents anti-retraits
- Agents anti-ultraviolets

I.4 Classification des matériaux composites

Il est possible de définir des classes de matériaux composites en se référant à la nature ou à la forme des constituants.

La forme des renforts → Matériaux composites à fibres
La forme des renforts → Matériaux composites à particules

La nature des matrices → Matériaux composites à matrice organique
La nature des matrices → Matériaux composites à matrice métallique
La nature des matrices → Matériaux composites à matrice minérale

I.5 Elaboration des composites

Le mélange renfort/matrice ne devient un véritable matériau composite résistant qu'au terme des dernières phases de fabrication, c'est-à-dire durant le durcissement de la matrice. Il sera alors impossible de le modifier ultérieurement, comme on peut modifier la structure d'un alliage métallique, par traitement thermique par exemple. Dans le cas des composites à matrice résineuse, cette dernière doit être polymérisée.

L'élaboration des composites se fait suivant la nature des matrices à savoir :

I.5.1. Matrice organique

Il existe des procédés de moulage spéciaux pour la fabrication de différentes pièces suivant la demande spécifique attendue. On distingue plusieurs procédés d'élaboration dont les plus courants sont :

- moulage sans pression (moulage au contact, moulage par projection simultanée)
- moulage sous vide
- moulage par compression (moulage par compression à froid, moulage par compression à chaud).
- moulage en continu
- moulage par pultrusion
- moulage par centrifugation
- moulage par enroulement filamentaire (enroulement circonférentiel, enroulement hélicoïdal continu et discontinu, enroulement polaire).

I.5.2. Demi-produit

Pour la mise en œuvre de demi-produits (prés imprégnés), on fait appel aux mêmes techniques que le moulage à partir de fils ou tissus.

I.5.3. Matrices métalliques

Les procédés de fabrication sont classés selon le mode de mise en œuvre de la matrice, phase gazeuse, liquide ou solide, les deux derniers sont les plus utilisés.

I.5.4. Matrices céramiques

Elles sont élaborées en faisant appel à des précurseurs par voie gazeuse ou liquide de la matrice. Par voie gazeuse, l'infiltration chimique en phase vapeur dérive du dépôt

chimique en phase vapeur (DPCV). Ces procédés sont lents mais conduisent à des matériaux de haute qualité. Les procédés par voie liquide font appel à des précurseurs constitués d'un seul ou d'un composé organométallique et l'imprégnation du renfort fibreux est réalisée selon les technologies des composites à matrice organique. Une opération de pyrolyse à haute température est ensuite effectuée.

I.6 Architecture des composites [3]

I.6.1 Définitions

Les définitions suivantes sont utilisées pour comprendre les différentes architectures des composites :

a. Renfort unidirectionnel

Fibres de renforcement disposées dans une seule direction (sauf indication contraire, le renfort est supposé continu)

b. Tissus

Assemblage de mèches entre lacées.

c. Renfort dispersé

Fibres disposées sans direction préférentielle, ou réparties aléatoirement sur une surface (sauf indication, les fibres sont supposées coupées et de quelques centimètres de longueur) – autre dénomination : mat.

d. Pli

Nappe élémentaire dans la constitution d'un stratifié.

e. Couche

Ensemble de plis identiques empilés dans la même direction

I.6.2 Stratifiés [2]

Les stratifiés sont constitués de couches successives de renforts (fils, stratifiés, mats…etc.) Imprégnées de résine, orientées de façon quelconque les unes par rapport aux autres (Figure I.8)

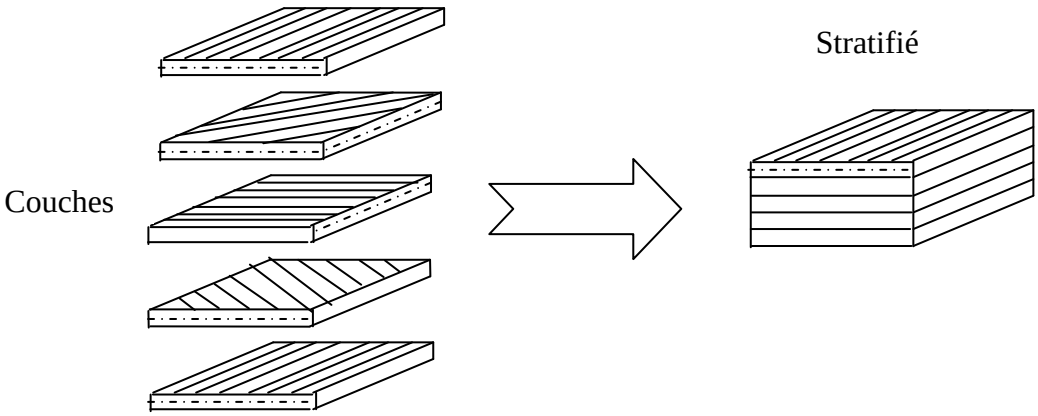


Figure I.8 : Constitution d'un stratifié

Les avantages des stratifiés résident dans la possibilité d'adopter et de contrôler l'orientation des fibres pour que le matériau résiste à des sollicitations déterminées dans des meilleures conditions.

a. Plan moyen

C'est par définition le plan qui sépare en deux moitiés l'épaisseur du stratifié Le plan moyen a par convention pour côte Z = 0 (Figure I.9).

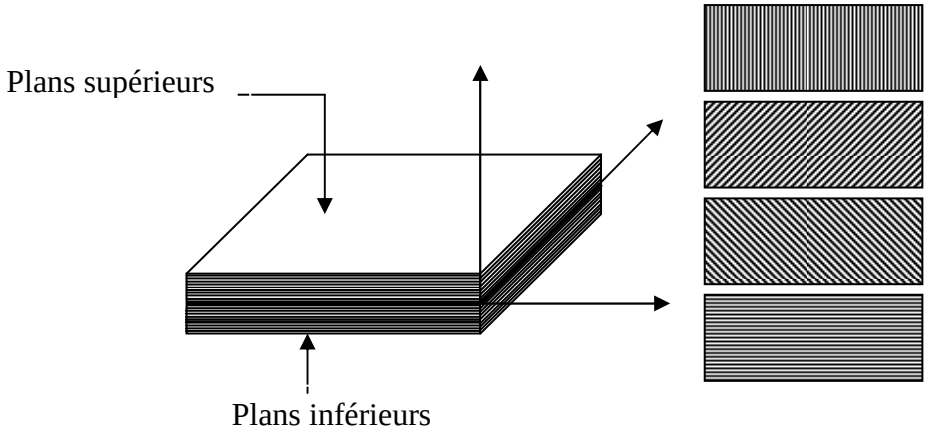


Figure I.9 : Repérage du plan moyen

b. Code de représentation d'un stratifié

Le codage se fait comme suit : depuis le pli extrême de coté Z<0 jusqu'au pli extrême de coté Z > 0

- Chaque pli est repéré par son orientation
- Les plis successifs sont séparés par (/)
- Lorsque plusieurs plis de même direction sont groupés, un chiffre en indice indique le nombre de plis identiques.

La (figure I.10) schématise un stratifié code ($45/0/45/90_2/30$)

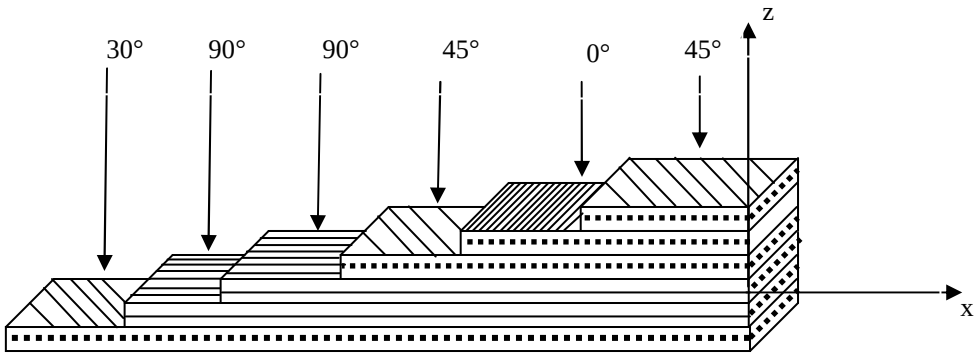


Figure I.10 : Désignation d'un stratifié

I.6.2.3 Stratifié hybride

Le stratifié comporte au moins deux renforts de nature différente (par exemple verre et carbone ou tissus mixtes à tissage de fils de natures différentes : verre et aramide…).

I.6.3 Composite sandwich [1]

Le principe de la technique sandwich consiste à appliquer sur une âme (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en compression), deux « feuilles » ou peaux (possédant de bonnes caractéristiques en traction) ; l'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité.

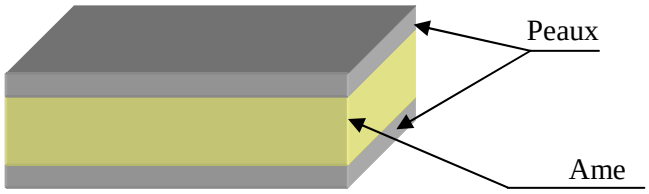


Figure I.11 : Structure en sandwich

Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, …etc.) ou creuses (alliages métalliques léger, papier, …etc.). Les peaux sont des stratifiés ou des feuilles d'alliages légers [1]

Il existe encore d'autres architectures :

- Les plastiques renforcés (avec des fibres courtes, des billes ou des poudres)
- Les composites volumiques (élaborés à partir de tissages volumiques)

Chapitre II :

Caractérisation des Matériaux Composites

II.1 Introduction

Avant d'étudier le comportement d'un matériau composite ainsi que ces propriétés, il est d'abord nécessaire de savoir comment le caractériser.

La connaissance des caractéristiques fonctionnelles d'un matériau composite et sa structure permettent de comprendre, voir et de prédire son comportement en service. Afin de caractériser son comportement dans des conditions bien précises, on a recours à un certain nombre d'essais.

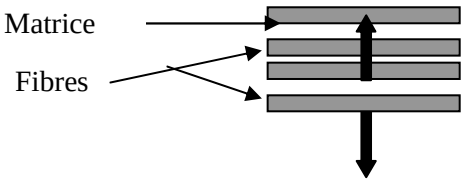
II.2 Paramètres influençant les propriétés mécaniques des composites [1]

Les études et les expériences sur les composites ont montrées l'influence de différents paramètres sur les caractéristiques mécaniques des composites. Ces paramètres sont : l'interface fibre-matrice, la fraction volumique de fibres, la nature des composants (nature des fibres et matrice), le type d'empilement des couches, la présentation des renforts, l'angle de sollicitation par rapport au sens principal d'orientation des fibres, le taux de porosité, la vitesse de déformation, la température, l'absorption d'eau, le mode d'obtention, …etc.

II.2.1 Influence de l'interface sur le comportement global du composite (liaison fibre-matrice)

Les résultats concernant l'influence de l'interface sur les propriétés du composite proviennent soit d'études mathématiques (modèle prenant en compte les propriétés de l'interface, module et épaisseur) et analysant les effets de leurs variations, soit de travaux expérimentaux consistant à tester des matériaux dont l'interface est variable de par sa nature ou son épaisseur. Cette influence est fonction du type de sollicitation qui peut se présenter sous deux formes **[2]**:

Association en série (exemple traction transverse)



a)

$$1/E_c = V_f/E_f + V_m/E_m + V_i/E_i$$

Association en parallèle (exemple traction longitudinale)

b)

$$E_c = E_f V_f + E_m V_m + E_i V_i$$

Figure II.1 : Types de sollicitation: A) en série ; B): parallèle

Dans le 1er cas (série), si le terme V_f/E_f est négligeable devant V_m/E_m (module de fibres est élevé par rapport à la matrice), le terme V_i/E_i doit être pris en compte. Il peut devenir important par exemple dans le cas d'une interphase élastomère dont le module peut être 100 fois inférieur à celui de la matrice (la fraction volumique d'interphase V_i pouvant approcher 10% de celle de la matrice). De nombreuses études font ressortir l'effet spécifique de l'épaisseur de l'interphase, celle-ci présentant un optimum vis à vis des propriétés du composite.

Dans le 2ème cas de l'association en parallèle, l'effet de l'interface est moins évident.

II.2.2 Influence du type de renfort [1]

Les fibres sont des éléments déterminants des propriétés mécaniques des composites à matrice organique. Le tableau ci-dessous montre les valeurs du module de Young avec différents types de fibres :

Fibres	Module d'élasticité (Gpa)		
	Fibres seules	Composite avec 50% de fibres en volume	Composite avec 70% de fibres en volume
Verre E	73	36	50
Verre R	87	40	60
Aramide	125	60	87
Carbone HR	250	120	170
Carbone HM	400	200	280

Tableau II.1: Module d'élasticité en traction (composite unidirectionnel).

II.2.3 Influence de la matrice

La matrice apporte un comportement plastifiant aux matériaux composites selon les liaisons ioniques (type de matrice et nature de l'interface).

II.2.4 Influence du type d'armature de renforts [1]

Le type d'armature des renforts est déterminant pour le transfert de charge et il influence l'amorçage et la propagation de la fissure lors de la rupture (figure II.2) :

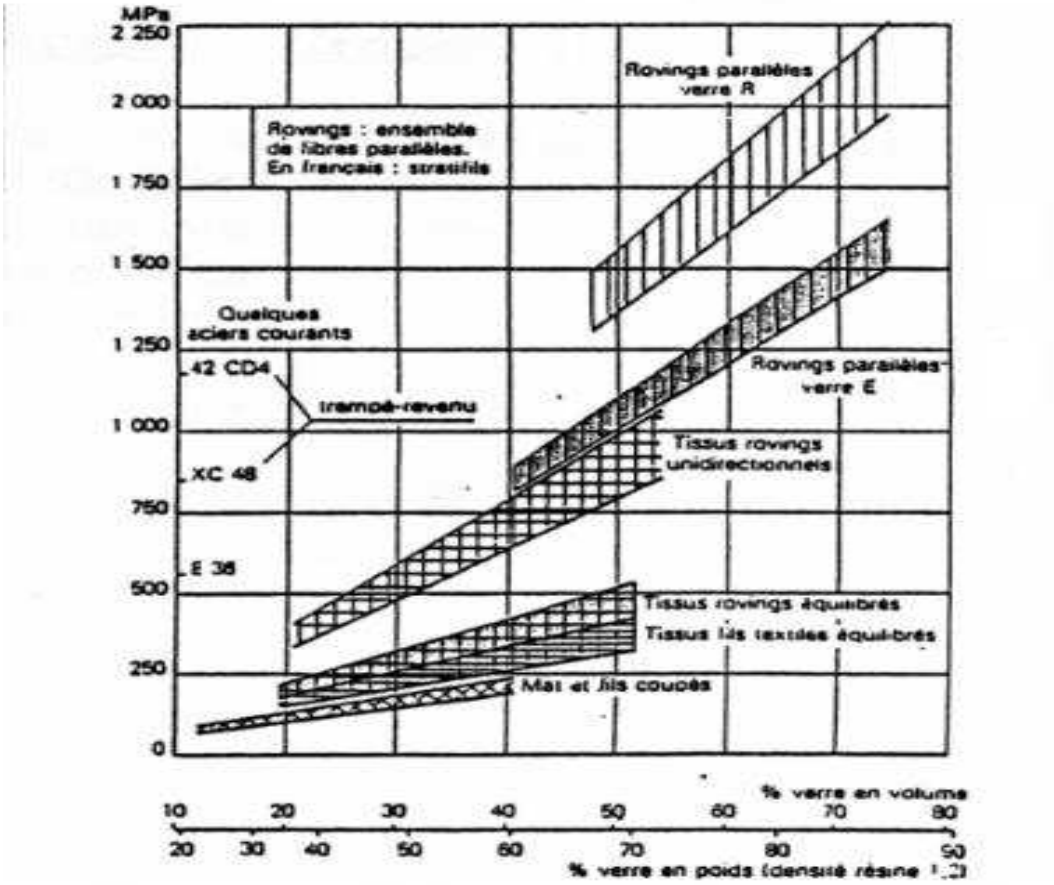


Figure II.2 : Influence du pourcentage de verre et type d'armature sur la contrainte de rupture (matrice thermodurcissable).

II.2.5 Influence de la longueur et du diamètre de fibres

La longueur et le diamètre des fibres ont une grande influence sur la résistance à la rupture des fibres. (Voir figure II.3). Quand la longueur du filament croit, la probabilité de trouver des défauts augmente (figure II.3).

L'arrangement des fibres de diamètres plus élevés donne de meilleurs taux de fibres dans le cas du verre. De plus, il y a augmentation du module de Young des fibres de verre de plus fort diamètre à la fabrication.

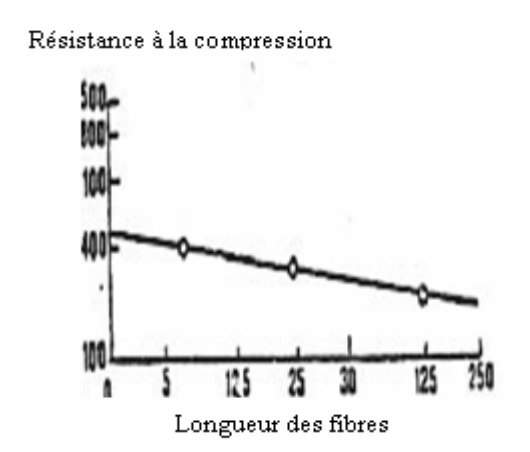


Figure II.3.a : Relation entre la longueur de fibre et la résistance moyenne

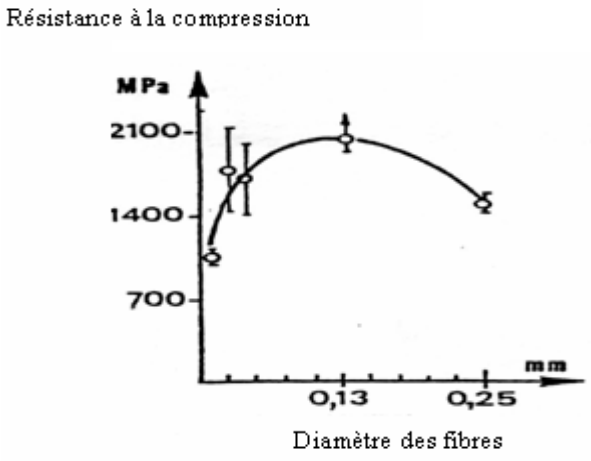


Figure II.3.b : Relation entre le diamètre de la fibre et la résistance moyenne

II.2.6 Influence de l'angle de sollicitation par rapport au sens principal des fibres

Le degré d'anisotropie des composites est caractérisé par la nature du renfort ainsi que de la nature et du mode de l'empilement des différentes couches. La direction de l'application de la charge implique une incidence sur les caractéristiques du matériau (voir figure II.4).

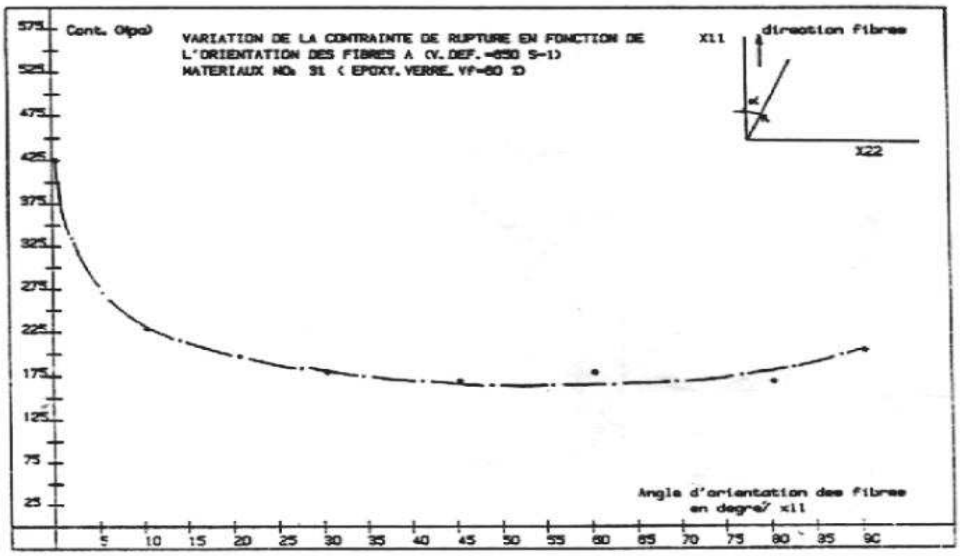


Figure II.4 : Variation de la contrainte de rupture en fonction de l'angle de sollicitation.

II.2.7 Influence du taux de porosité

En raison d'une fabrication non parfaite des composites, des vides subsistent dans la structure. La complexité du contrôle des différents paramètres des produits rentrant

dans le procédé de fabrication engendre des insuffisances quant à la qualité du produit final.

La figure (II.5.a) montre la relation entre le taux de porosité et la résistance au cisaillement interlaminaire dans un composite à matrice époxy.

De plus la résistance au cisaillement est très sensible au taux de porosité. De même que l'accroissement du taux de vide provoque la chute des propriétés mécaniques en compression (figure. II.5.b).

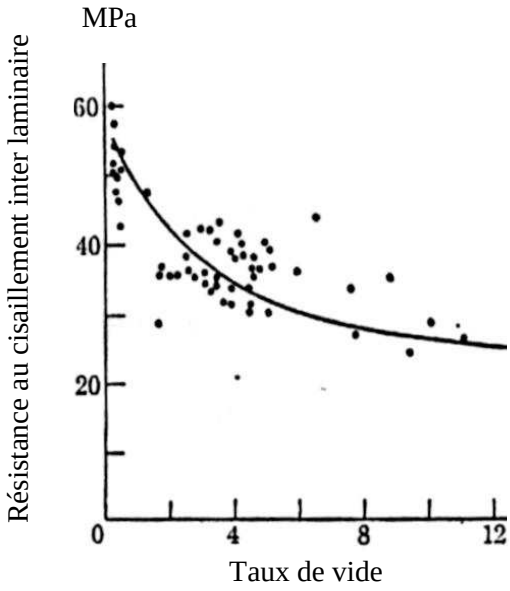


Figure II.5.a : Relation entre le taux de porosité et la résistance au cisaillement interlaminaire

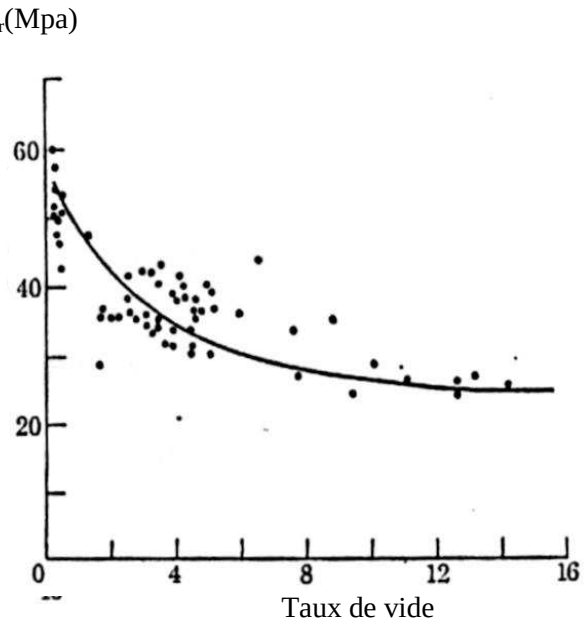


Figure II.5.b : Relation entre taux de vide et résistance en compression des composites a fibres de verre.

II.2.8 Influence de la fraction volumique de fibres et du degré de transfert de charge E_f/E_m

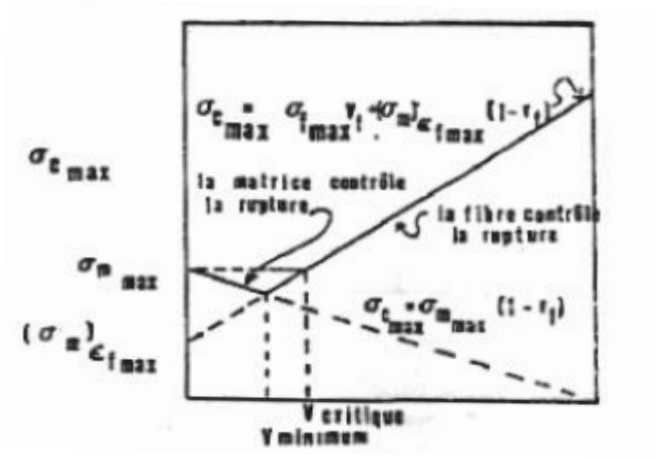


Figure II.6 : Influence du taux de fibres sur la résistance à la traction d'un composite unidirectionnel

Une analyse simplifiée conduit aux lois des mélanges :

$$E_c = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad \text{(II.1)}$$

$$\sigma_c = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad \text{(II.2)}$$

En fait l'expérience nous montre que les propriétés mécaniques passent par un minimum à une faible fraction volumique de fibres dite minimum.

La fraction minimum s'exprime simplement par :

$$V_{\min} = (\sigma_{Rm} - \sigma_m) \big/ (\sigma_f + (\sigma_{Rm} - \sigma_m)) \quad \text{(II.3)}$$

La fraction critique est la fraction qu'il faut dépasser pour obtenir des propriétés supérieures à celle de la matrice.

$$V_{Crit} = (\sigma_{Rm} - \sigma_m)(\sigma_f - \sigma_m) \quad \text{(II.4)}$$

Où E_f et E_m : Sont respectivement les modules de Young de la fibre et de la matrice. En conséquence, la loi des mélanges ne s'applique pas en dessous d'une certaine valeur de V_f minimale et dans ce cas la matrice contrôle la rupture. Au delà, c'est la fibre qui contrôle la rupture même si l'effet renforçateur n'intervient qu'au dessus de la valeur critique V_{crit} .

II.2.9 Influence du mode de mise en œuvre

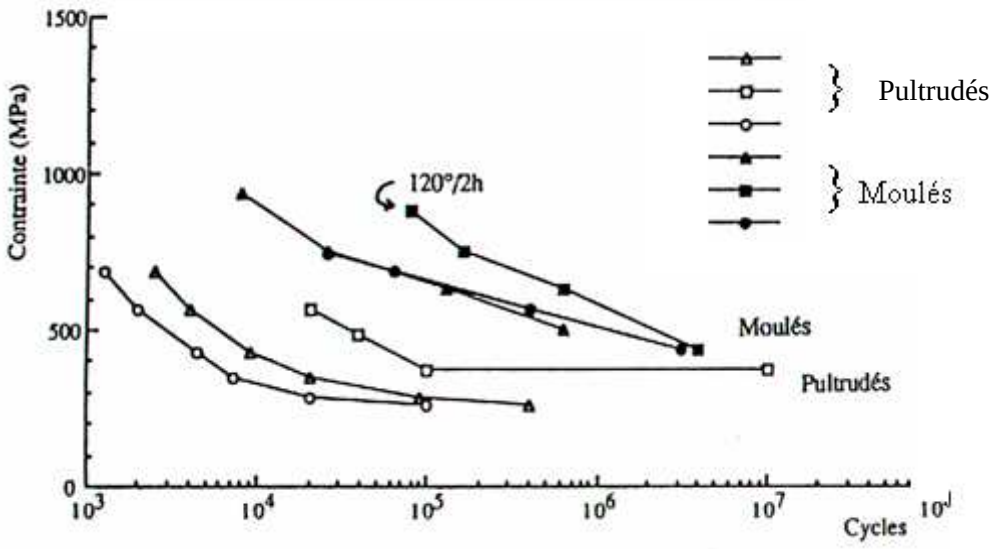


Figure II.7 : Influence du mode de mise en œuvre sur l'endurance (fibre de verre-époxy V_f = 70%)

II.3 Paramètres influençant sur les propriétés physico-chimiques de composites [3]

II.3.1 Absorption de solvant

L'absorption d'un solvant par des matériaux donne naissance à trois types de comportements qui sont :

- interaction physique pure : elle est réversible (du moins du point de vue gravimétrique et en considérant un composite à matrice polymère insoluble dans l'eau);
- réaction chimique conduisant à une augmentation de la masse sèche : par exemple une réaction d'addition;
- réaction chimique conduisant à une diminution de la masse sèche : par exemple une réaction de dégradation (coupure de la chaîne principale) en milieu liquide avec extraction des produits de réaction.

Le phénomène d'absorption de solvant par un matériau entraîne donc des modifications des propriétés de ce matériau.

II.3.2.Absorption d'eau

Les matrices des matériaux composites sont très sensibles au vieillissement atmosphérique et surtout à l'humidité. Des essais de vieillissement naturel exposent directement les éprouvettes ou la structure aux agents atmosphériques (intempéries) pendant une durée et sous un climat donnés.

L'eau diffuse dans le matériau dans l'interface crée des microvides, ce qui entraîne une faible cohésion fibre matrice et diminuant ainsi les caractéristiques mécaniques du matériau. Une autre altération du matériau par l'eau est à signaler : l'abaissement de la température de transition vitreuse du polymère **[4]**.

Le tableau (2.2) montre les effets de l'absorption d'eau sur les propriétés mécaniques et sur la température de transition vitreuse de réticulations polyépoxydes aminés **[4]**.

Sigle du polymère (3)	Propriétés initiales			Propriétés après 500 h à 700 °C et 95% d'humidité relative.			
	Tg °C	E Mpa	σ_R MPa	W %	Tg °C	E MPa	σ_R MPa
DGEBA-DDM	161	2610	78.5	1.57	132	2560	71.5
DGEBF-DDM	144	2780	87	1.75	115	2500	79
DGEBF-DDS	172	2776	104.5	2.23	125	2570	86.5
DGEBA-DDS	166	2950	92	1.95	130	2770	75
TGMDA-DDM	222	3380	73.5	2.98	190	3200	62
TGMDA-DDS	239	3880	77.5	3.05	189	3690	55
TGMDA-DDA	224	3660	70	3.22	185	3360	57
TGAP-DDM	227	3730	87	3.70	146	2980	55

(1) Tg : température de transition vitreuse, E : module d'Young
σ_R : contrainte à la rupture en traction, W : teneur massique d'eau absorbée
(2) D'après les résultats d'essai (non publiés) obtenus dans les laboratoires de l'ENSAM et de l'IRCHA
(3) DDA : dicyandiamide, DDM : diaminodiphénylméthane
DDS : diaminodiphénylsulfone DGEBA : diglycidyléther du bisphénol A
DGEBF : diglycidyléther du bisphénol F
TGAP : triglycidyl-p-aminophénol
TGMDA : tétraglycidylméthylènedianiline

Tableau II.2 : Effets de l'absorption d'eau sur les propriétés de quelques réticulations polyépoxydes aminés.

II.3.3 Composition chimique du matériau

De petites variations de composition des matières premières ou des modifications dans le processus de fabrication, peuvent avoir des incidences sur les propriétés du produit final.

II.4. Différents essais normalisés [4]

Les essais sur les matériaux composites peuvent être classés en deux grandes familles :

- Les essais de réception ou de contrôle, qui permettent au fabriquant de suivre la qualité de sa fabrication et à l'utilisateur de vérifier la conformité de la fourniture par rapport au cahier des charges,
- Les essais de qualification qui ont pour but de démontrer l'aptitude du produit à une application particulière et d'évoluer ses performances.

Ces essais ne sont pas restreints à la structure du produit final mais ils concernent aussi les constituants qui forment les composites. Il est à noter que les normes ne décrivent pas tous les essais nécessaires au contrôle et à la qualification. Elles sont complétées par des standards propres à diverses sociétés ou encore par des tests couramment utilisés mais qui ne sont pas normalisés.

II.4.1 Essais sur les constituants de matériaux composites

Les matières premières ; résines et fibres doivent être contrôlées et leurs caractéristiques seront vérifiées afin de garantir le produit fini.

II.4.1.1 Essais sur les renforts

La qualité du matériau composite en fin de fabrication dépend également de certaines caractéristiques des renforts telles que :

- Les propriétés physiques,
- Les propriétés mécaniques,
- L'aptitude du renfort à réaliser les liaisons avec la matrice.

Les renforts se présentent sous forme de fils, mats ou tissus. Pour les tissus, le premier contrôle est un examen visuel afin de déceler tout défaut de tissage susceptible d'engendrer des défaillances du produit fini (déformation, excès ou manque de résine).

A. Propriétés physiques

Pour déterminer les caractéristiques physiques du renfort, on effectue des essais telles que la détermination de la masse linéique pour les fils ou le grammage c'est-à-dire la masse surfacique pour les mats, ou encore la détermination de l'épaisseur moyenne et de l'épaisseur sous charge et de la recouvrance après compression pour les mats.

B. Propriétés mécaniques

Le principal essai mécanique est l'essai de traction qui permet la détermination de la force de rupture et allongement à la rupture en traction. Cet essai s'applique au renfort sous toute forme, fils, mats ou tissus. Cette propriété est très importante pour les fibres utilisées en enroulement filamentaire.

C. Aptitude à l'imprégnation

Certaines caractéristiques du renfort influent sur sa liaison avec la matrice. Il est donc important de contrôler ces paramètres avant imprégnation. Ainsi, on détermine le taux d'humidité du renfort par pesée avant et après séchage. De même, le taux d'impureté de fibres peut être mesuré par la perte au feu obtenu par pesée avant et après calcination.

La mesure de la masse volumique de la fibre, par comparaison avec la masse volumique du matériau de base (verre par exemple) permet de mettre en évidence les porosités qui faciliteront l'adhésion de la résine (c'est le cas par exemple des fibres de verre destinées à renforcer une résine époxyde). Le taux de ces produits d'ensimage peut être déterminé par dissolution puis pesée.

II.4.1.2 Essais sur la résine

Les propriétés de la résine sont, la sensibilité à la température, à l'humidité,…etc. Donc la vérification de l'état de livraison de la résine qui représente le premier contrôle est très importante. La qualité du composite en fin de fabrication dépend des propriétés physiques et chimiques de cette matière première.

A. Contrôle chimique de la résine

Afin de vérifier la composition de la résine par rapport à une formule de base, des analyses chimiques, pourront être effectuées :

- Indice d'acide, indice d'hydroxyle, teneur en styrène, teneur en eau, pour une résine polyester.
- Equivalent époxyde, indice d'hydroxyle, teneur en chlore pour une résine époxyde.
- Teneur en formole et phénol libre, teneur en eau pour une résine phynolformaldéhyde.

B. Viscosité de la résine

La viscosité est une caractéristique très importante car elle influe sur la qualité finale du matériau composite. Elle est en fonction de la longueur des chaînes de molécules. Ainsi, des chaînes moléculaires courtes peuvent donner un matériau de plus faible résistance. De plus, la viscosité a une grande importance lors de la mise en œuvre. On peut mesurer la viscosité de différentes manières :

- Un contrôle approché peut être effectué par l'écoulement de la résine à travers un orifice calibré dans des conditions déterminées de température et d'hydrométrie;
- On peut également utiliser un viscosimètre de torsion type BROOKFIELD ou similaire.

C. Durée d'utilisation d'un système résine durcisseur

Elle est mesurée par l'évolution de la viscosité ainsi que la température lors de la polymérisation. Le durcissement complet dans le temps de la résine (polymérisation) se divise en trois périodes.

- Vie en pot : période qui s'écoule entre le moment ou l'on à mis le dernier adjuvant catalytique et la prise en gel. Elle correspond à la phase d'initiation. Elle se traduit par une légère baisse de la viscosité puis par une forte augmentation de celle-ci. C'est au cours de cette période que s'effectue le premier travail de la résine : imprégnation des stratifiés, débullage, fluage de la matière sous presse.
- Durcissement de la résine : période qui s'écoule entre la prise en gel élastique et l'exotherme maximum. Elle correspond à la phase de propagation, et elle se traduit par un fort dégagement de la chaleur. L'amplitude gel-pic est un facteur très important. Elle donne une idée de la rapidité de démoulage. Plus elle sera courte plus il sera possible de démouler rapidement. C'est au cours de cette période que prend place le second travail de la résine : formation des ondes (plaques) mise en forme définitive sous presse.
- Refroidissement et post durcissement : c'est la dernière phase et le dernier travail de la résine : conformation des pièces moulées à chaud pour leur donner une bonne stabilité dimensionnelle, recuit de stratifiés.

II.4.1.3 Essai sur les demi-produits

A. Masse surfacique

L'essai consiste à peser des éprouvettes de tissus ou mats préimprégnées de surface déterminée.

B. Teneur en matières volatiles

Les matières volatiles (non susceptible de polymériser avec l'ensemble) sont éliminées par chauffage. Leur teneur est déterminée par la masse d'une éprouvette avant et après passage en étuve, pendant une durée déterminée et à une température donnée.

C. Teneur en fibres

Deux techniques peuvent être utilisées :

- ✓ Une méthode de calcination qui consiste à éliminer les matières organiques. La teneur en fibres est obtenue par pesée avant et après calcination;
- ✓ Une autre méthode par dissolution, consiste à éliminer la résine et les charges minérales contenues dans le demi-produit, la teneur en fibres résiduelles est alors obtenue par pesée.

D. Teneur en résine déposée

La teneur en fibres du demi-produit étant déterminée par dissolution de la résine dans un solvant, on en déduit la teneur en résine déposée. Ou encore dans le cas de demi-produit ne refermant aucune charge, la teneur en résine est égale à la perte par calcination diminuée de la teneur conventionnelle en matières volatiles.

E. Pourcentage d'écoulement conventionnel de la résine

L'éprouvette est un empilement de couches dont on mesure la masse surfacique. L'essai consiste à provoquer un écoulement de la résine par rapport au renfort en exerçant à chaud une pression sur une éprouvette puis à suivre l'évolution de la masse surfacique. La résistance au fluage de la résine à travers les fibres est ainsi étudiée ; ce qui permet de prévoir son comportement lors de la mise en œuvre.

Cet essai peut également être utilisé pour suivre l'évolution de la résine au cours du stockage.

F. Mouillabilité

Cet essai consiste à mesurer l'aptitude au moulage à la presse à chaud de demi-produits, et cela suivant des normes bien déterminées.

La norme NFT 57 514 relative aux mats de verre préimprégnées à base de résines polyesters, correspondent à un moulage dans un moule particulier dit 'moule à oreilles' Renault, dans des conditions déterminées de prétraitement et de moulage d'une pièce

composée d'un disque et de deux oreilles latérales dont les longueurs après moulage permettent de caractériser la mouillabilité.

G. Retrait au moulage par compression et par post-retrait

Le retrait au moulage correspond à la différence entre les dimensions à froid d'une cavité de moule et celles, après refroidissement, de l'article moulé dans cette cavité à partir d'une matière, dans des conditions définies.

Le post-retrait représente la différence entre les dimensions, après refroidissement, d'une pièce moulée et les dimensions de la même pièce après traitement dans une étuve, à une température donnée, pendant un temps défini.

H. Plasticité

L'essai consiste à mesurer la pénétration dans le demi-produit, sous un effort constant pendant un temps déterminé d'un poinçon cylindrique ; le chargement étant décomposé en pré-charge et charge.

II.4.2 Essais sur les matériaux composites

II.4.2.1 Essais physiques

A. Absorption d'eau

L'échantillon de matériau composite est immergé dans l'eau à une température déterminée. La masse d'eau absorbée est obtenue par la variation pondérale observée. Il est à noter qu'il n'est pas possible de transposer le pouvoir d'absorption d'eau de la résine seule sur le comportement de la matière renforcée en raison de l'influence exercée par le renforcement de la fibre et par la mise en œuvre. Cet essai s'effectue sur des temps longs, la durée pour atteindre un régime permanent se compte en semaines, voir en mois.

B. Essai de perte au feu

La perte au feu résulte de la combustion de la résine. Si le produit ne contient qu'un renfort incombustible et une résine entièrement combustible. Par différence, se déduit la teneur en renfort. Si le produit contient des charges incombustibles ou une matière plastique partiellement combustible, la méthode permet seulement d'obtenir la teneur en cendre. L'éprouvette est pesée avant et après calcination à une température de l'ordre de 650°c.

II.4.2.2 Les essais mécaniques

A. Traction [5]

Le principe de cet essai est de soumettre une éprouvette de géométrie définie (normalisée) à une extension progressive dans le sens le la longueur jusqu'à l'obtention de la rupture. Les caractéristiques à déterminer sont :

- La limite élastique,
- La limite à la rupture,
- Module d'élasticité E.

L'essai de traction permet de définir la contrainte maximale de traction qui est définie par la formule :

$$\sigma = \frac{F}{b \times h}$$

F : force maximale

b : langueur initiale de l'éprouvette

h : épaisseur initiale de l'éprouvette

B. Compression [5]

L'effort de compression est parallèle au plan de stratification. L'essai consiste à appliquer, à vitesse constante un effort de compression sur un barreau parallélépipédique disposé verticalement.

Cet essai détermine la contrainte à la rupture en compression qui est définie par la formule :

$$\sigma = \frac{F_r}{b \times h}$$

Avec :

Fr : charge à la rupture

b : Longueur de l'éprouvette

h : épaisseur de l'éprouvette

C. Flexion trois points

Le principe de cet essai consiste à déformer un barreau rectangulaire reposant sur deux appuis, par l'intermédiaire d'une panne située à égale distance des appuis et se déplaçant à une vitesse constante. On enregistre la courbe contrainte-déplacement.

La norme EN63 relative aux matières plastiques renforcées au verre textile décrit l'appareillage représenté à la figure suivante **[3]**.

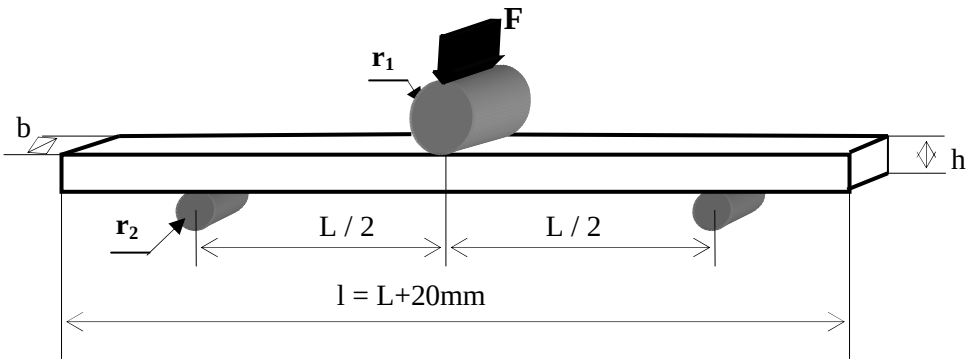


Figure II. 8 : Dispositif d'essai et dimension de l'éprouvette en flexion.

Avec : r_1 : Rayon de cylindre de la panne (= 5mm) ;

r_2 : Rayon des cylindres d'appuis (= 2.5mm) ;

L : Longueur entre appuis ;

l : la longueur totale de l'éprouvette.

Les dimensions de l'éprouvette sont telles que $l \approx 20h$; b est fonction de h comme indique dans le tableau suivant (dimensions en mm) :

Epaisseur h	Largeur b
1<h≤10	$15^{\pm 0.5}$
10<h≤20	$30^{\pm 0.5}$
20<h≤35	$50^{\pm 0.5}$
35<h≤50	$80^{\pm 0.5}$

Tableau II.3 : Dimensions des éprouvettes pour les essais de flexion [3].

Cet essai de flexion trois points, permet de déterminer :

La contrainte de flexion à rupture σ_r :

$$\sigma_r = \frac{3}{2}\frac{F_r L}{bh^{é}} \qquad \text{(II.5)}$$

Le module d'élasticité de flexion E^f :

$$E^f = \frac{L^3}{4bh^3}a \qquad \text{(II.6)}$$

Avec : F_r : Charge à la rupture ;

L : Portée ;

b : Largeur de l'éprouvette ;

h : Epaisseur de l'éprouvette ;

a : Pente de la partie rectiligne de la courbe effort-déformation $a = F_r / y_c$.

Les dimensions des éprouvettes préconisées par la normalisation conduisent parfois à des ruptures en cisaillement. Ce type d'essai pénalise le matériau.

D. Essais de flexion quatre points [3]

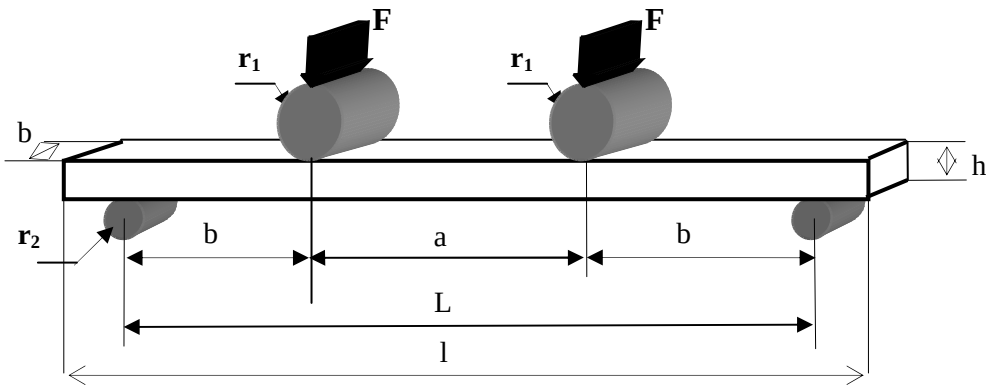


Figure II.9 : Dispositif d'essai et dimension de l'éprouvette en flexion 4 points.

Pour ce cas, avec $L = 4b = 2a$, nous avons de la flexion pure entre les deux panes de chargement, et on peut enregistrer la contrainte maximale de traction σ_{xx} à $(L/2)$ et à $(-h/2)$ selon l'expression :

$$\sigma_{xx} = \frac{3}{4}\frac{PL}{bh^2} \qquad \text{(II.7)}$$

Et le module de flexion

$$E_x = \frac{11}{64}\frac{PL^3}{bh^3 y_c} \qquad \text{(II.8)}$$

Avec : y_c la flèche enregistrée lors de l'essai.

Remarque : les avantages de ces deux types d'essais (flexion trois et quatre points) en quasi statique et surtout du point de vue pratique peuvent être résumés:

La préparation des éprouvettes qu'il suffit de découper aux dimensions normalisées ; les éprouvettes ne demandent aucune des opérations si complexes et nécessaires à faire.

- lors des essais de traction où les éprouvettes normalisées portent des talons collés ou usinées pour la fixation dans les mors et éviter l'écrasement du matériau.
- Ne demandant aucun moyen de fixation de l'éprouvette qu'il suffit d'ajuster sur les pannes d'appui.

Nous ne devrions pas négliger les inconvénients générés par l'essai de flexion trois points et qui peuvent masquer parfois de beaucoup les résultats à obtenir, ces inconvénient peuvent être résumés par :

- ✓ Sollicitation plus forte de la face en compression ;
- ✓ Un état de contrainte complexe (compression biaxiale et cisaillement) généré au voisinage de la zone de contact ;
- ✓ L'influence, dans cette zone des contraintes de contact longitudinales, est accrue dans la direction de fibres par rapport à celle d'un matériau isotrope ;
- ✓ L'influence du module transversal qui est déterminant sur les aires et pressions de contact.

E. Dureté Barcol

La mesure est basée sur la pénétration dans l'échantillon, d'un poinçon exerçant un effort constant La dureté est fonction de cet enfoncement et est lue sur le cadrant du DUROMETRE BARCOL.

F. Résistance au choc

La résistance au choc des matériaux composites est exprimée au moyen de l'énergie dépensée pour obtenir la rupture d'une éprouvette, de forme et dimensions définies.

Dans la norme NFT 57 108 relative aux matières plastiques, renforcées au verre textile, l'éprouvette d'essai repose sur deux appuis et est cassée par percussion unique d'un pendule, la frappant à égale distance des appuis.

II.4.2.3 Les essais d'endurance [3]

A. Fatigue

L'essai de fatigue donne le comportement du matériau soumis à des contraintes périodiques. La transposition des résultats d'un essai de fatigue à un cas d'application pratique est difficile. Parmi les différentes sollicitations possibles, on peut envisager un essai de fatigue en traction-traction, ou en traction-compression alternée ou encore en flexion. La résistance à la fatigue de composites peut être représentée par des courbes de WOEHLER.

B. Fluage et Relaxation

L'essai de fluage consiste à soumettre un échantillon à un état de contrainte permanent et constant. On peut calculer un module de fluage, qui représente un module d'élasticité ramené à la déformation totale de l'éprouvette (déformation instantanée plus déformation de fluage).

L'essai de relaxation détermine inversement la variation de l'effort appliqué nécessaire au maintient d'un niveau de déformation constant d'une éprouvette. Il en résulte, pour un taux de déformation donné, une diminution de la sollicitation statique en fonction du temps.

C. Vieillissement

Les matrices des matériaux composites sont très sensibles au vieillissement atmosphérique et surtout à l'humidité.

Des essais de vieillissement naturel exposent directement les éprouvettes ou la structure aux agents atmosphériques (intempéries) pendant une durée et sous un climat donnés.

Des tests accélérés pourront également être réalisés, mais les corrélations entre le vieillissement naturel et artificiel sont difficiles à établir.

L'effet de vieillissement est apprécié visuellement ou par variation d'une caractéristique (généralement mécanique) mesurée avant et après essai.

On pourra envisager aussi un teste d'exposition au brouillard salin, ou des expositions qui combinent les facteurs d'environnement :

- ✓ Chaleur et froid pour simuler les chocs thermiques;
- ✓ Chaleur, humidité;
- ✓ Lumière artificielle, chaleur et humidité;
- ✓ Chaleur, humidité et charges;
- ✓ Brouillard, ultraviolets.

La chaleur accélère en particulier la diffusion de l'humidité dans la matrice et accentue ainsi le vieillissement.

A ces tests, il est possible de joindre des contraintes particulières telles que jets de sable pour mettre en relief le caractère d'érosion et d'abrasion dû au vent, vapeurs, fumées, ou à l'eau et qui sont négligés dans tous les essais.

Des tests anticorrosion peuvent également être combinés avec les cycles précédents pour mettre en évidence la résistance du matériau vis-à-vis de milieux chimiques. On choisit par exemple un milieu acide oxydant ou une exposition au SO_2, ou CO_2 représentatif de l'ambiance agressive réelle d'un milieu industriel.

Tous ces phénomènes combinés et alternés conduisent pour des stratifiés polyester verre par exemple, à un vieillissement qui se traduit par plusieurs changements d'aspect classés par ordre chronologique d'apparition :

- Révélation des fibres de verre ou phénomène d'apparition des fibres blanches;
- Jaunissement;
- Microcraquelures, microfissures et fendillements visible surtout au microscope;
- Perte de brillant en surface;
- Turbidité de la résine durcie;
- Délaminage et défibrage allant à la limite jusqu'à un aspect 'pelucheux'.

II.4.2.4 Essais thermiques

A. Conductivité thermique

Elle est généralement mesurée en régime permanent avec un champ de température unidirectionnel.

Pour une plaque renferment des résistances chauffantes, telle que cette plaque est constituée d'une partie centrale de mesure et de deux autres latérales surchauffées de façon à annuler les fuites de chaleur latérales, on apporte la chaleur aux éprouvettes du matériau situées de part et d'autre de la plaque centrale. L'énergie traversant les éprouvettes est dissipée par deux plaques froides disposées sur ces deux éprouvettes.

La puissance électrique apportée à la plaque chaude est mesurée par les méthodes électriques classiques et le gradient de température de part et d'autre des éprouvettes est mesurée par un thermocouple.

Le coefficient de conductivité thermique à une température moyenne est déduit par :

$$\lambda_t = \frac{\phi e}{S\Delta T}$$

ϕ: Flux de chaleur, égale à la moitié de la puissance électrique dissipée dans la plaque chaude

e : épaisseur moyenne des deux éprouvettes.

S : surface de la zone centrale de chauffe.

ΔT : Écart de température entre surface chaude et surface froide.

B. Indice d'oxygène

L'essai consiste à déterminer la proportion juste nécessaire en volume d'oxygène, dans un mélange oxygène-azote, en faible courant autour de l'éprouvette, pour entretenir sa combustion. Plus l'indice d'oxygène est élevé, meilleur est le comportement au feu de matériau. Pour la réalisation de cet essai on utilise un appareil normalisé.

C. Essai d'inflammabilité par rayonnement

Des échantillons se présentant sous forme de plaque de dimensions déterminées sont soumis au rayonnement d'une source de chaleur constante, et à provoquer l'inflammation de gaz éventuellement dégagé aux faces supérieures et inférieures.

L'essai est réalisé dans une enceinte spéciale. Les divers phénomènes qui se passent durant l'essai sont notés : combustion, inflammation, hauteur de flamme. Ils permettent de calculer les critères servant au classement des matériaux en :

- ✓ Non inflammable;
- ✓ Difficilement inflammable;
- ✓ Moyennement inflammable;
- ✓ Facilement inflammable.

II.4.3 Caractérisation physicochimique [5]

De petites variations de composition des matières premières, de légers changements de formulation ou des conditions de fabrication, affectent le taux de réticulation de résine et peuvent aussi changer de façon dramatique les propriétés du produit final. Afin d'éviter des productions mauvaises et coûteuses, il est extrêmement important d'analyser les constituants et les demi-produits pour prédire les caractéristiques et ainsi détecter et corriger les problèmes de fabrication dès qu'ils se manifestent.

II.4.3.1 Spectroscopie infrarouge

A) Principe

La spectroscopie en général est une méthode d'analyse basée sur l'étude des interactions entre la matière et un rayonnement électromagnétique. Ce dernier peut être défini par :

- ✓ Sa fréquence γ, exprimée en (Hz);

- ✓ Sa longueur d'onde λ exprimée en unité de longueur;
- ✓ Son nombre d'onde $\bar{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$ exprimé en (cm-1).

La spectroscopie infrarouge concerne les changements des niveaux d'énergie vibrationnelle des atomes, dus à l'absorption d'une radiation électromagnétique.
Lorsque l'on envoi une lumière infrarouge d'une fréquence déterminée sur une matière, les molécules de cette matière vibrent (interaction entre la matière et le rayonnement).

L'absorption d'une radiation infrarouge aura pour effet de faire vibrer cet assemblage en modifiant les distances inter atomiques ou les angles normaux de liaisons, tel que les différentes liaisons présentes dans un composé (C-C, C=C, C-O, O-H, N-H,…etc.) ont des fréquences vibrationnelles différentes. La présence de ces liaisons dans un échantillon peut être détectée par l'identification des fréquences caractéristiques des bandes d'absorption infrarouge.

B. Infrarouge à transformée de Fourier

La spectroscopie infrarouge à transformée de Fourier permet de caractériser des produits par le spectre d'absorption des fréquences propres des groupements fonctionnels qui les composent. Elle est une technique utilisée pour la détection de signaux faibles et les spectromètres I.R.T.F présentent plusieurs avantages par rapport aux spectromètres classiques (dispersifs) ; une plus grande rapidité, une meilleure précision et un rapport signal bruit élevé

Elle repose sur l'obtention d'un interférogramme à l'aide d'un interféromètre de Michelson. Le spectre est en suite déduit par le calcul de sa transformée de Fourier. Le développement de la spectroscopie à transformée de Fourier n'a pas seulement apporté rapidité et sensibilité au domaine de la spectroscopie IR, mais la nature informatique des résultats permet de réaliser des purifications de spectres par soustractions informatiques de spectres d'absorption. Ces différences de spectres éliminent des absorptions d'interférence et accentuent les données essentielles.

C. Objectifs de L'I.R.T.F

- La structure de la résine ainsi que sa qualité peuvent être déterminées à partir de l'identification des divers groupes fonctionnels, ou bien en comparant son spectre

infrarouge avec celui d'un standard connu, cette dernière technique ; rapide nous permet facilement de détecter les différences existantes d'un lot à l'autre.

- Ainsi, l'IR permet de mettre en évidence les effets de stockage à long terme ou d'exposition à l'humidité sur la composition des constituants. On peut remarquer l'effet de stockage sur la figure (II.1) qui représente les spectres d'une résine DGEBA avant et après un stockage de dix-huit semaines à température ambiante. La soustraction informatique des deux spectres révèle les légères variations qu'a subit la résine après le stockage, l'augmentation d'intensité du pic à 1650 cm^{-1} correspond à une augmentation de la teneur en eau et une diminution d'intensité de pics à 300, 1256, 1041, 915, 841cm^{-1} correspond à la disparition de groupes époxydes.
- L'infrarouge est une technique bien adaptée pour étudier la réticulation des demi-produits et analyser les produits obtenus.

Une autre étude IR de grande importance pratique est la détermination de pourcentages de réactifs initiaux (résine et durcisseur) et extension de réticulation. Cette analyse nécessite un spectrophotomètre à transformée de Fourier équipé d'un calculateur. Le système multi composant doit être exprimé par une combinaison linéaire des spectres de composants purs. Ensuite le spectre de ces composants doit coïncider avec le spectre du système multi composant par un critère de moindres carrés. Cette coïncidence nécessite la multiplication du spectre de chaque composant par un facteur appelé coefficient des moindres carrés. La composition du matériau en pourcentage de groupes fonctionnels ainsi que l'extension de la réticulation sont obtenus à partir de ces coefficients.

II.4.3.2 Analyses thermique

A. Analyse thermique différentielle (ATD)

L'analyse thermique permet de suivre l'évolution d'un matériau lorsque l'on fait varier sa température. Cette évolution peut être accompagnée d'un effet calorifique et dans ce cas l'analyse thermique différentielle est la méthode de choix pour révéler les changements qui se produisent

L'essai consiste à enregistrer la différence de température entre un échantillon et une référence inerte soumise à la même loi de chauffage dans un appareil appelé analyseur thermique différentiel qui nous permet de tracer les courbes ATD (thermogramme) des

transformations thermiques de l'échantillon en fonction de la température qui se traduisent par des pics dont la position, l'amplitude, le sens et la surface, caractérise ces transformations.

L'ATD permet l'étude des mécanismes de réticulation des polymères, la mise en évidence des processus de dégradation, ainsi que la détection de la température de second ordre (Température de transition vitreuse), et la mesure des chaleurs de réaction.

B. Analyse thermomécanique (TMA)

Un analyseur thermomécanique permet de mesurer la variation dimensionnelle linéaire ou volumique d'un matériau en fonction de la température. Cette variation est mesurée par un capteur prenant appui sur l'échantillon.

Les paramètres qu'on peut déterminer avec la TMA sont :

- La température de transition vitreuse T_g;
- Le degré de polymérisation des résines;
- Les vitesses de réaction et l'efficacité de divers durcisseurs dans une matrice donnée;
- Le coefficient d'expansion des résines.

C. Analyse viscoélastique dynamique ou analyse différentielle mécanique (DMA)

L'essai consiste à soumettre l'échantillon à une charge oscillante et à suivre la variation soit du module et de la viscosité, soit de la rigidité relative d'un matériau, en fonction de la température ou du temps.

En fonction du mode de sollicitation de l'échantillon et les méthodes de détection, on différencie plusieurs appareils utilisés pour cette technique d'analyse. Comme objectif, ces appareils permettent de calculer les caractéristiques viscoélastiques d'un matériau caoutchoutiques ou rigides en traction, cisaillement ou flexion.

Chapitre III :

Etat de l'art sur les Matériaux Composites

III.1 Introduction

L'objectif de cette étude de l'art est de donner un aperçu des travaux et théories développées autour de la modélisation et les méthodes de calcul appliquées aux composites. Nous nous attacherons en particulier aux modèles permettant de prendre en compte; les caractéristiques mécaniques, la morphologie et la nature de constituants (la forme et la distribution spatiale) et les différentes formes de distribution et de transfert de contraintes entre les fibres et la matrice.

A cet effet, nous avons réparti nôtre recherche bibliographique en trois classes: (1) des modèles de distribution et de transfert de contraintes fibres-matrice. (2) des modèles numériques simulant la loi de fluage de composites. (3) des modèles analytiques pour la caractérisation du comportement de composites stratifiés.

Concernant la première classe, nous présentons deux modélisations; l'une proposée par Carrara et McGarry (1995), R.L. Gol et R.D. Aspden (1997) permettent d'étudier la distribution et le transfert de contraintes de matériaux composites de fibres courtes. Quand à la deuxième classe, nous illustrons les travaux de; McMeeking et al (1994), N. Aravas et al (1996) basés sur la modélisation de la loi de fluage des composites. En troisième classe, on se focalise sur les travaux de recherche mené par F. Mili et B. Necib (2002) concernant la caractérisation analytique du comportement des composites stratifiés.

III.2 MATERIAUX COMPOSITES A FIBRES

III.2.1 Distribution de contraintes de matériaux composites à fibres courtes

La distribution des contraintes de cisaillement dans les matériaux composites de fibres courtes, sous des charges parallèles à la direction des fibres, est l'objet de nombreuses études qui sont faites sur la compréhension du comportement micromécanique des composites de fibres courtes. Carrara et McGarry **[15]**, ont appliqué un programme d'éléments finis pour prévoir la distribution de contrainte de cisaillement normale et interfaciale de composite à fibres courtes soumis à une charge parallèle à la direction des fibres. MacLaughlin et Barker**[16]** ont examiné l'effet du rapport de module sur la concentration de contrainte dans la matrice en utilisant l'analyse de déformation de Moiré et la méthode des éléments finis, ont remarqué que le facteur de concentration de contrainte proche des extrémités de fibres augmente fortement avec l'augmentation du rapport de modules. Chou et Sun **[24]** ont développé un module d'analyse de glissement pour évaluer la distribution de contraintes de cisaillement normale et interfaciale du

composite à fibres orientées aléatoirement. Ont conclu aussi, que la contrainte normale maximale apparaît au milieu de la fibre, par conséquent, la contrainte de cisaillement apparaît à l'extrémité de fibre. Cependant, Hiroshi et Chou **[25]** ont observé que la distribution de la contrainte de cisaillement interfaciale augmente avec l'augmentation du rapport de longueur sur le diamètre de fibres.

Nous illustrons une méthode d'analyse par éléments finis qui est développée par W.J.Liou (1995), on combinant un modèle d'éléments finis de contrainte hybride et de déplacement d'un élément basé sur la contrainte plane. Pour évaluer la distribution de contraintes de cisaillement normale et interfaciale de composite à fibres courtes sous une charge parallèle à la direction de fibres. On considérant ainsi les effets liés aux formes géométriques des extrémités de fibres, de la fraction volumique de fibres, du rapport des modules élastiques de fibres et de la matrice (E_f / E_m) et rapport de longueur de fibre sur le diamètre (rapport d'aspect).

Vu, le progrès en techniques numériques réalisés ces dernières décennies, la méthode des éléments finis est devenue un outil indispensable pour le traitement des problèmes d'ingénieries très complexes. Liou et Sun **[26]**, ont développé deux modèles d'éléments finis afin de prévoir la distribution de contraintes de composites à fibres courtes, l'un des modèles est basé sur le déplacement de contrainte plane et l'autre sur les contraintes hybrides.

A- Déplacement d'élément basé sur la contrainte plane [15]

Le développement du modèle de contrainte plane est basé sur le principe de l'énergie potentielle minimale. En absence de toutes contraintes et de déformations initiales et de forces volumiques, le déplacement est donné par la fonction π_p en notation matricielle :

$$\pi_p = \sum_n \left[\int_{v_n} \frac{1}{2} e^t D e dv - \int_s u^t \overline{T} ds \right] \qquad \text{(III.1)}$$

π_p est la fonction de contrainte plane, l'exposant t représente la matrice transposée, e est le vecteur de déformation calculé à partir du vecteur déplacement u, D est la matrice de rigidité, $\overline{T}$ est le vecteur de la force de traction appliquée sur la surface, l'intégration est prise sur le volume v_n d'élément n et de surface chargée s.

Dans la méthode des éléments finis, le déplacement est supposé avoir des valeurs inconnues seulement aux points nodaux, tel que la variation dans un élément est décrite en termes de déplacements nodaux d'élément q et N est la fonction d'interpolation qui est donnée comme suit :

$$u = Nq \qquad \text{(III.2)}$$

N est la fonction de forme de coordonnées naturelles (ξ, η). L'élément sous la contrainte plane à 8 nœuds isoparamétriques est donné par la fonction suivante :

$$e = \partial u = \partial N q = Bq \qquad \text{(III.3)}$$

B est la matrice de déformation composée des dérivées des fonctions de forme; ∂ est la matrice des opérateurs différentiels qui s'exprime comme suit :

$$\partial = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.4)}$$

En substituant les équations (III.2) et (III.3) dans l'équation (III.1), on obtient alors :

$$\pi_p = \sum_n \left(\frac{1}{2} q^t K q - q^t Q \right) \qquad \text{(III.5)}$$

Où $$K = \int_{v_n} B^t D B dv \qquad Q = \int_s N^t \bar{T} ds \qquad \text{(III.6)}$$

La variation de la fonction par rapport à q entraîne ;

$$Kq = Q$$

K est le terme de l'élément de la matrice de rigidité, Q est la force nodale équivalente de l'élément.

B. Elément de contrainte hybride

Le modèle de contrainte hybride est basé sur le principe d'énergie minimale complémentaire, qui donne une grande flexibilité dans la description du champ de contrainte. Dans le développement de Pian et Tang **[17]**, la fonction de contrainte hybride peut être exprimée en notation matricielle :

$$\pi_c = \sum_n \left\{ \int_{v_n} (\sigma^t e - \sigma^t S \sigma / 2) dv - \int_{s_1} \bar{T}^t u ds + \int_{s_n} T^t (\bar{u} - u) ds \right\} \qquad \text{(III.7)}$$

où σ est le vecteur de contrainte, e est le vecteur de déformation, S est la matrice de complaisance, T est le vecteur de la surface de traction, $\overline{T}$ vecteur de contrainte recommandée et $\overline{u}$ est le vecteur déplacement au frontière.

Avec

$$\sigma = P\beta \qquad \text{(III.8)}$$

P est la matrice des termes polynomiaux de coordonnées (x, y) et β est le champ de contrainte. La distribution de la contrainte dans chaque élément satisfait l'équation d'équilibre homogène, le déplacement u peut être exprimé en terme de déplacement nodal q est :

$$u = Nq \qquad \text{(III.9)}$$

Le déplacement d'un élément de frontière $\overline{u}$ peut être décrit comme suit :

$$\overline{u} = Lq \qquad \text{(III.10)}$$

L est une matrice de coordonnées sur la surface. Le vecteur de déformation e est calculé à partir du vecteur déplacement u par la relation contrainte-déformation.

$$e = \partial u = \partial Nq = Bq \qquad \text{(III.11)}$$

La substitution de l'équation (III.8), (III.10) et (III.11) dans l'équation (III.6) donne la fonction de contrainte hybride qui est :

$$\pi_c = \sum_n \left(\frac{1}{2} q^t K q - q^t Q \right) \qquad \text{(III.12)}$$

Avec

$$G = \int_{v_n} P^t B dv$$

$$H = \int_{v_n} P^t S P dv$$

$$Q = \int_{s_n} L \overline{T} ds$$

Q est le vecteur de force nodale, K est l'élément hybride de la matrice de rigidité ; défini comme suit :

$$k = G^t H^{-1} G \qquad \text{(III.13)}$$

La variation de l'équation (III.8) par rapport à q entraîne :

$$Kq - Q = 0 \qquad \text{(III.14)}$$

Cette équation est l'équation typique du modèle des éléments finis dans le cas statique, une fois le déplacement nodal est calculé, les contraintes peuvent être calculées en utilisant les équations suivantes:

$$\beta = H^{-1}Gq \qquad \text{(III.15)}$$

$$\sigma = P\beta \qquad \text{(III.16)}$$

C. Comparaison des modèles d'éléments finis

Pour l'exactitude et la validité des modèles d'éléments finis développés par Sun à partir des programmes des éléments finis. Il a comparé les résultats numériques d'éléments finis avec les solutions analytiques exactes existantes. Il a supposé une poutre rectangulaire isotrope de longueur L, de largeur d et d'épaisseur b, portée sur deux appuis simples, et soumise à une charge W uniformément répartie sur la longueur (figure III.1). Le problème est résolu par la méthode des éléments finis basée sur la contrainte plane et la contrainte hybride. Le rapport de longueur sur l'épaisseur, $L/b = 8$, une modélisation de 8 nœuds isoparamétriques est utilisée pour les deux méthodes.

La solution exacte d'élasticité relative au problème de contrainte plane est donnée comme suit :

$$\sigma_x = \frac{w}{2I}\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right)y + \frac{w}{2I}\left(\frac{b^2 y}{10} - \frac{2}{3}y^3\right)$$

$$W_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}\left[1 + \frac{12}{5}\left(\frac{b}{L}\right)^2\left(\frac{4}{5} + \frac{v}{2}\right)\right] \qquad \text{(III.17)}$$

Avec $W_{\max}$: charge maximale et (x, y) coordonnées des nœuds.

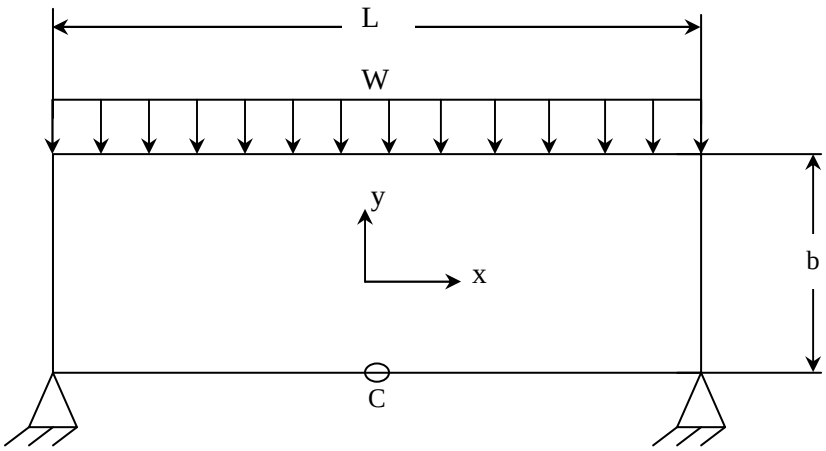


Figure III.1 : Poutre simplement soutenue, uniformément chargée

L'écart de déplacement transversal maximal entre la solution exacte d'élasticité et les solutions par éléments finis est montré dans la figure (III.2). Sun a conclu que le déplacement transversal maximal prévu par le modèle d'éléments finis de contraintes hybrides converges plus rapidement que le modèle d'éléments finis basé sur le déplacement d'élément et qu'il y a une meilleure concordance avec la solution élastique exacte. La figure (III.2) montre également la différence de contraintes normales maximales entre la solution exacte d'élasticité et celle par éléments finis.

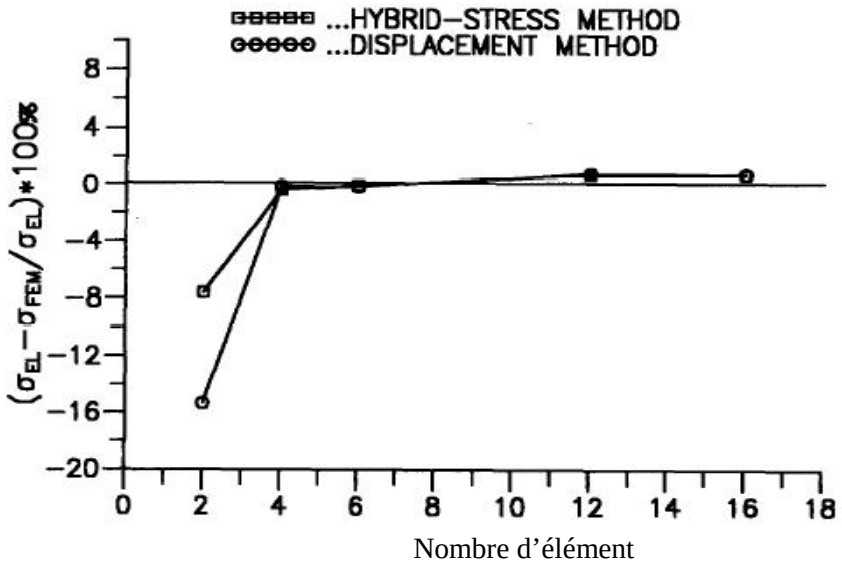


Figure III.2 : L'écart de la contrainte normale maximale pour les deux modèles d'éléments finis.

Par conséquent, les modèles numériques présentent un certain nombre de limites lié à la contrainte de l'interface et à la distribution de contraintes normales le long des fibres courtes d'un matériau composite. Mais Aussi, les solutions analytiques sont restreintes aux hypothèses suivantes :

- L'effet des fibres adjacentes sur la distribution de contrainte est ignoré;
- L'adhésion entre la fibre et la matrice à l'interface est supposée parfaite;
- Les fibres et la matrice sont supposées homogènes et isotropes;
- Le problème de contraintes résiduelles durant le processus de fabrication est ignoré;
- La relation contrainte-déformation obéit à la théorie d'élasticité linéaire.

Le modèle physique proposé par W.J. Liou suppose que la fibre est entourée par la matrice et est soumise à une tension parallèle à la direction de la fibre (figure III.3).

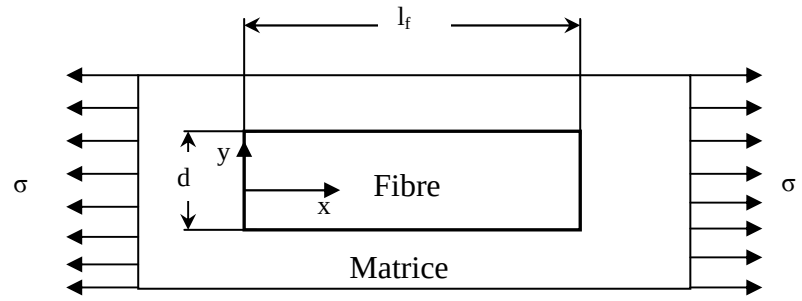


Figure III.3 : Volume élémentaire représentatif de composite de fibres courtes alignées.

Le matériau composite présenté dans cette étude est un composite de carbone/époxy dont les caractéristiques sont :

a. Matrice

Module de Young $E_m = 4.48\,\text{Gpa}$, coefficient de poisson ν_m =0.3.

b. Fibres

Module de Young fibre $E_f = 285.6$ Gpa, coefficient de poisson $\nu_f = 0.2$, rapport de la longueur de fibre au diamètre $a_f = l_f / d = 15$, fraction volumique $V_f = 0.5$.

La distribution de contraintes normale et de cisaillement à l'interface du composite à fibres courtes sous une charge parallèle à la direction de fibres est déterminée par le modèle des éléments finis global et local pour les différentes formes géométriques des extrémités de fibres. La figure (III.4) illustre la distribution de contraintes normale et de cisaillement le long des extrémités de fibres courtes en forme de V. On remarque également que la contrainte de cisaillement maximale de l'interface se produit aux niveaux des extrémités de fibres.

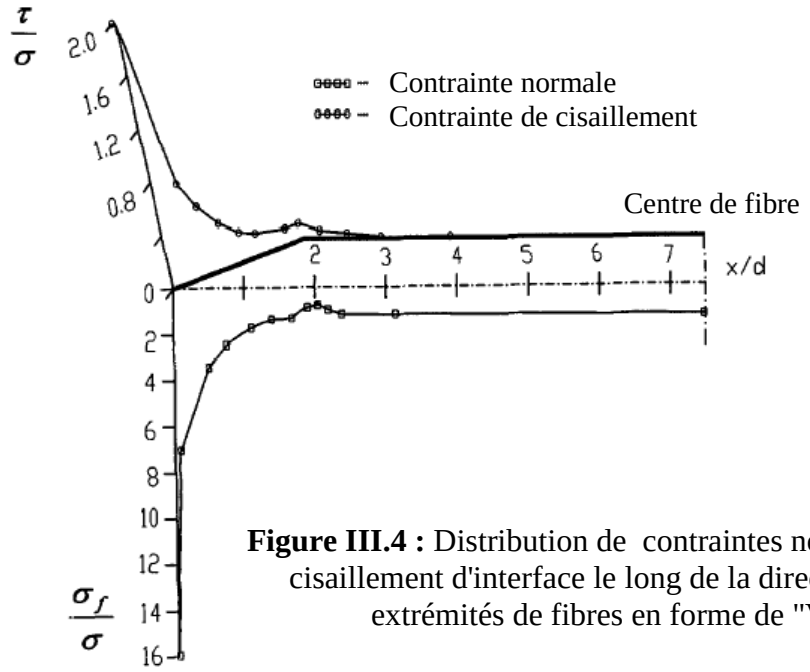


Figure III.4 : Distribution de contraintes normale et de cisaillement d'interface le long de la direction des extrémités de fibres en forme de "V"

La figure (III.5), montre l'effet de la fraction volumique sur la distribution de contrainte normale de fibres. La distribution de cette dernière augmente considérablement pendant que la fraction volumique diminue. L'influence de la fraction volumique de fibres sur la distribution de contrainte de cisaillement à l'interface est représentée dans la figure (III.6). On observe également que la diminution du rapport volumique induit l'augmentation de la contrainte de cisaillement interfaçiale.

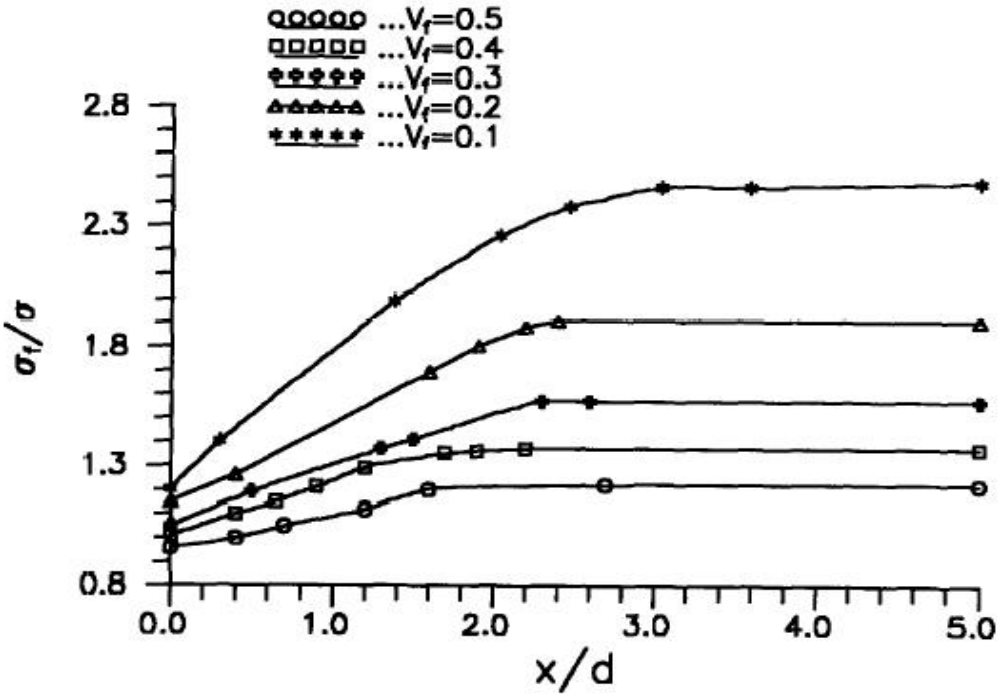


Figure III.5 : Effet de la fraction volumique de fibres sur la contrainte normale de fibres, $a_f = 15$, $E_f/E_m = 63.75$.

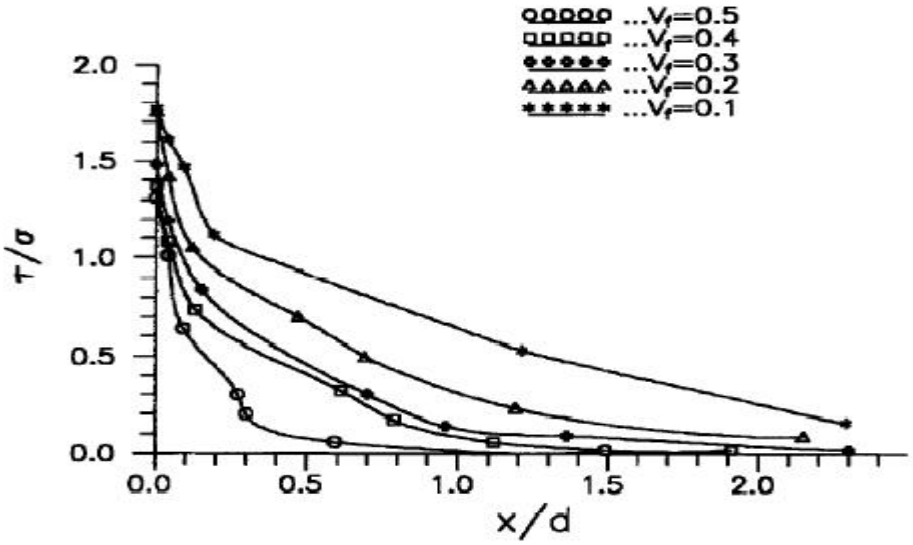


Figure III.6 : Effet de la fraction volumique de fibres sur la contrainte de cisaillement interfaçiale, $a_f = 15, E_f/Em = 63.75$.

L'effet du rapport d'aspect de fibre sur la contrainte normale maximale est également étudié ; W.J. Liou **[15]** a constaté que cette dernière dépende fortement du rapport d'aspect de fibres comme illustré dans la figure (III.7).

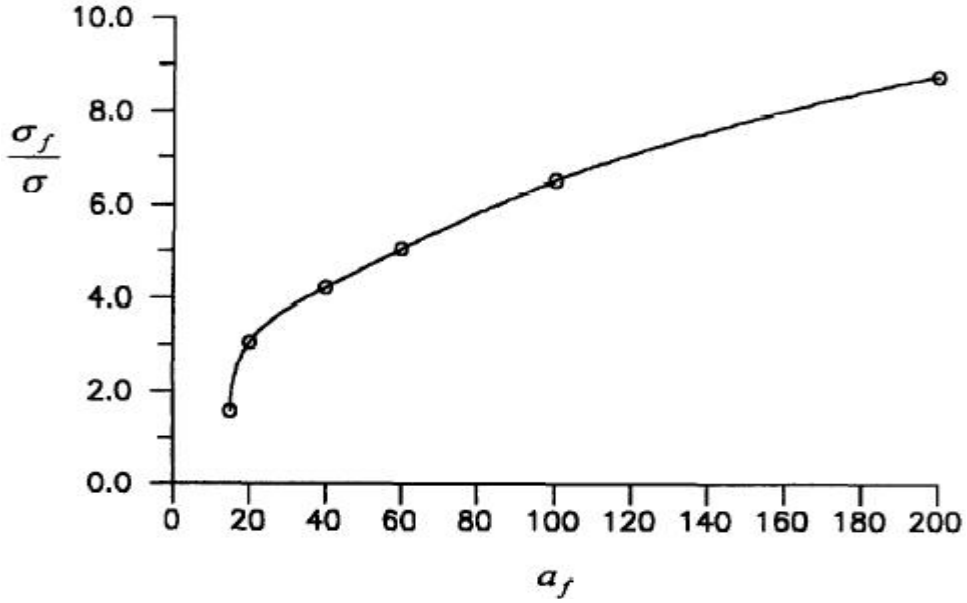


Figure III.7 : Effet du rapport d'aspect de fibre sur la contrainte normale maximale de fibre, $E_f/E_m = 63.75$, $V_f = 0.1$.

Dans l'analyse du modèle de *cisaillement-dislocation* suggéré par Chou et Sun **[24]**: la contrainte normale est uniformément répartie à travers la direction de fibres, quand le rapport d'aspect est important et la fraction volumique de fibre est faible. En effet la surface hachurée dans la figure (III.8) représente la zone où la contrainte est

constante, quand le rapport d'aspect a_f est faible, seulement la partie centrale de la fibre est dans la zone de contrainte constante, et lorsque a_f augmente, la zone de contrainte constante augmente à son tour aussi. De ce fait, Sun et Liou ont concluent que l'hypothèse de la contrainte normale est uniformément répartie à travers la direction diamétrale de fibres.

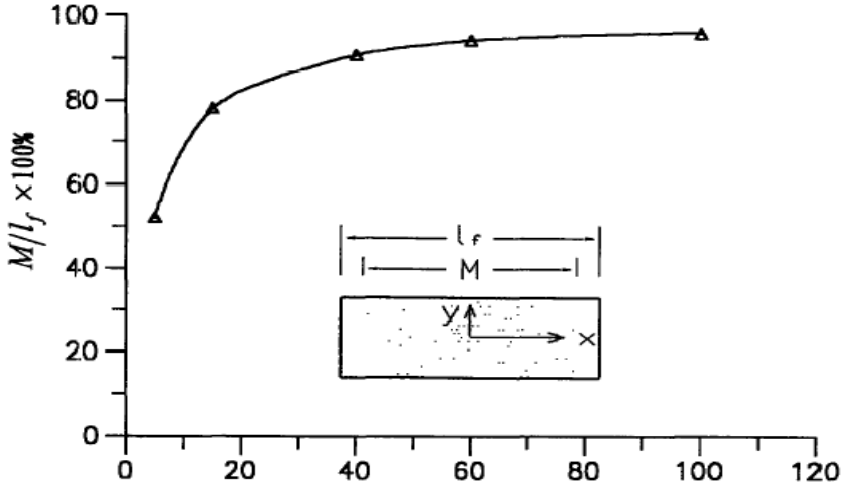


Figure III.8 : Relation entre le rapport d'aspect de fibres et la région de contrainte normale constante de fibres, *Ef/Em = 63.15, Vf = 0.1.*

III.2.2 Analyse par éléments finis de transfert de contraintes [17]

Nous présentons dans cette section les travaux de KL. Goh et de R.D. Aspden qui se focalisent sur l'analyse par éléments finis de transferts de contraintes de matériaux composites, afin de comprendre les processus du transfert de contraintes qui peuvent se produire, et qui peuvent aussi à leurs tour contribuer au transfert de contraintes entre la matrice et les fibres du matériaux composites.

En générale, la courbe contrainte-déformation caractérisant un matériau composite de fibres courtes, une fois tendu sous l'action d'une force parallèle à la direction de fibres, se compose de quatre (04) étapes :

- Déformation élastique des fibres et de la matrice,
- Déformation plastique de la matrice, tandis que les fibres continues de se déformer élastiquement,
- Déformation plastique des fibres et de la matrice,
- Rupture des fibres suivie par la rupture du matériau composite.

Cependant, Goh et Aspden et al, ont suggéré divers modèles pour étudier les différents processus du transfert de contraintes entre la matrice et les fibres d'un matériau composite à fibres courtes.

Ces processus peuvent être groupés en deux concepts de base. Le premier est illustré par la figure (III.9) qui montre un modèle d'analyse axisymétrique par éléments finis d'une fibre cylindrique incorporée dans une matrice cylindrique (le modèle représente seulement un quart du cercle supérieur). Le deuxième concept est semblable au premier sauf que la partie DEF'C de la figure (III.9) n'est pas prise en compte **[14,19]**. Dans les deux concepts l'axe *z* ; défini l'axe de système de coordonnée polaire cylindrique voir; G. Rauchs et M. Preuss. Bien que d'autres modèles soient dérivés de l'un de ces concepts, ils se sont distingués par différentes conditions aux frontières.

Le modèle représenté ci-dessous, peut être également modifié afin d'étudier le transfert de contraintes aux fibres de forme non cylindrique, voir (D. Tripathi et K. Goh), par la rotation du modèle autour de l'axe OD pour obtenir des fibres de forme conique, paraboloïde ou ellipsoïde.

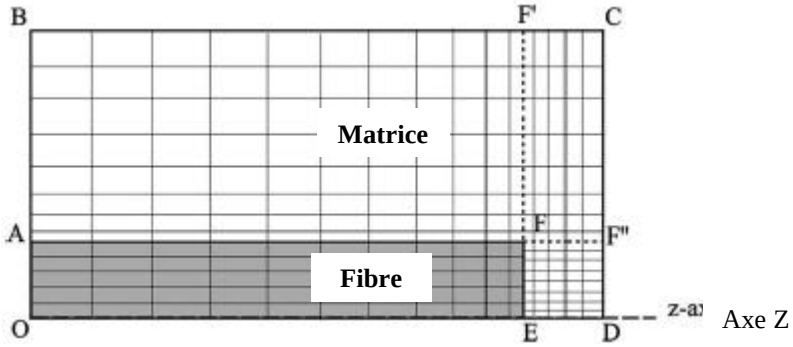


Figure III.9 : Croquis 3D d'un modèle axisymétrique de FE représenté dans le 2D pour un quart de cercle supérieur.

Goh et Aspden et al, ont proposé une description plus précise du processus de transfert de contraintes entre la matrice et les fibres par l'intermédiaire de l'interface, selon les quatre étapes suivantes:

Dans la première étape, le transfert de la contrainte se produit à partir d'une matrice élastique à une fibre élastique par l'intermédiaire de l'interface durant le chargement initial; en seconde étape, la matrice continue à se déformer de côté adjacent de l'interface (mode α) jusqu'au décollage de l'interface fibre-matrice (mode β) qui engendre à son tour le glissement de la matrice sur la fibre résultant de transfert de contraintes par frottement.

Cependant la matrice se déforme plastiquement. Les fissures peuvent apparaissent dans la matrice à partir des extrémités des fibres décollées (mode γ), suite à la combinaison du mode α et β. Par conséquent en troisième étape la combinaison du mode β et γ provoquant ainsi l'arrachement de fibres; en quatrième étape, on assiste à la fragmentation des fibres suite à la fissuration continue de la matrice due aux arrachements de fibres qui peuvent engendrer la rupture entière du matériau composite.

Les différents processus étudiés par Goh et Aspden en utilisant l'analyse d'éléments finis sont:

A. Transfert de contrainte élastique [18]

Le processus de transfert de contrainte élastique, entraîne le transfert de contrainte d'une matrice élastique à une fibre élastique par l'intermédiaire de l'interface. L'adhérence entre la fibre et la matrice est un facteur important qui influe sur les propriétés globales de fibre, qui est imposé par les nœuds répartie le long de l'interface (AF). Dans l'analyse par éléments finis, Carrara AS, Owen DRJ et Lyness JF ont supposé que la fibre et la matrice sont des matériaux isotropes. Pour un matériau élastique isotrope, ils ont admis que: en dehors des 21 constantes du matériau, seulement deux sont indépendantes, c'est-à-dire, E et ν. Par conséquent les constantes matérielles qui peuvent être considérées dans l'analyse par éléments finis sont le module de Young et le coefficient de Poisson de fibre et de la matrice, et la contrainte de traction axiale dans une fibre cylindrique est liée à E_f/E_m et q . Avec $q = L/r_0$

[q] : Paramètre cristallographique. [L] : Demi-longueur de la fibre.

[r_0] : Rayon de fibre.

La figure (III.10) illustre la liaison entre la contrainte de traction axiale σ_z/σ_c d'une fibre cylindrique, et de rapport de modules E_f/E_m et de paramètre cristallographique q . Cependant, le graphe montre également; que le rapport de contraintes est plus élevé au centre de la fibre, et ce dernier diminue de manière non linéaire jusqu'à zéro à l'extrémité de la fibre considérée. Des résultats similaires sont également obtenus expérimentalement. Une analyse identique est aussi appliquée aux fibres de forme non cylindrique (conique, paraboloïde et ellipsoïde), ceci pour des valeurs minimales du rapport E_f/E_m (autour de 50), la distribution de contraintes dans les fibres est très similaire aux résultats théoriques de Eshelby. Le paramètre q , a une influence

faible sur la distribution de contrainte dans les fibres cylindriques, paraboloïdes et ellipsoïdes.

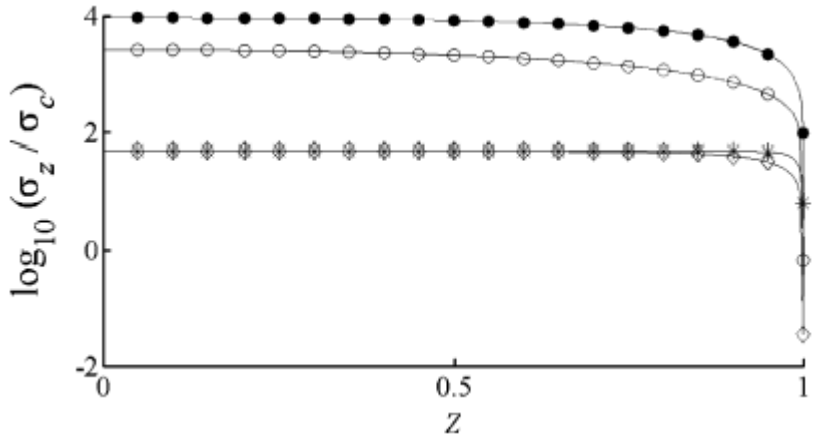


Figure III.10 : Graphe de contraintes axiales σ_z/σ_c, en fonction de la distance Z, le long de la demi-longueur d'une fibre cylindrique.

B. Rupture de la matrice (mode α)

Le modèle des éléments finis représenté par la figure (III.9), où la matrice est modélisée comme un matériau élasto-plastique **[18]**, c'est-à-dire que, la courbe de contrainte-déformation est caractérisée par une zone initiale (élastique) décrite par une croissance rapide de contrainte accompagnée d'une déformation, puis, suivi par une zone plastique décrite par un faible accroissement de contrainte mais avec une déformation importante. Le changement de propriétés à partir de l'état élastique à un état plastique provoque la plasticité de la région adjacente de l'interface, ce qu'induit à la rupture de la matrice.

Le graphe de la figure (III.11) schématise la contrainte axiale σ_z en fonction de la distance le long de l'axe de la fibre, ce graphe résulte de l'analyse par éléments finis de Tripathi et al **[27]**, ayant présenté trois zones de distribution de contraintes autour de la fibre. La zone (I): représente la distribution de contraintes qui sont attribuées aux effets du mode β(décollage de l'interface), correspondant au début de défaillance de la matrice (mode α) initialisée à l'extrémité de fibre. Par conséquent, dans la région de défaillance, seulement deux zones sont observées qui correspondent au mode (α) et au transfert de contrainte élastique **[11]**, puis la concentration élevée de la contrainte dans la matrice et à l'extrémité de fibre influe sur l'adhérence de l'interface qui correspond au mode (β) tandis que le mode(α) s'éloigne de la zone de défaillance pour se concentrer dans la zone

(II) ; et la troisième zone est exemptée de toute concentration de contrainte élevée et la matrice demeure élastique.

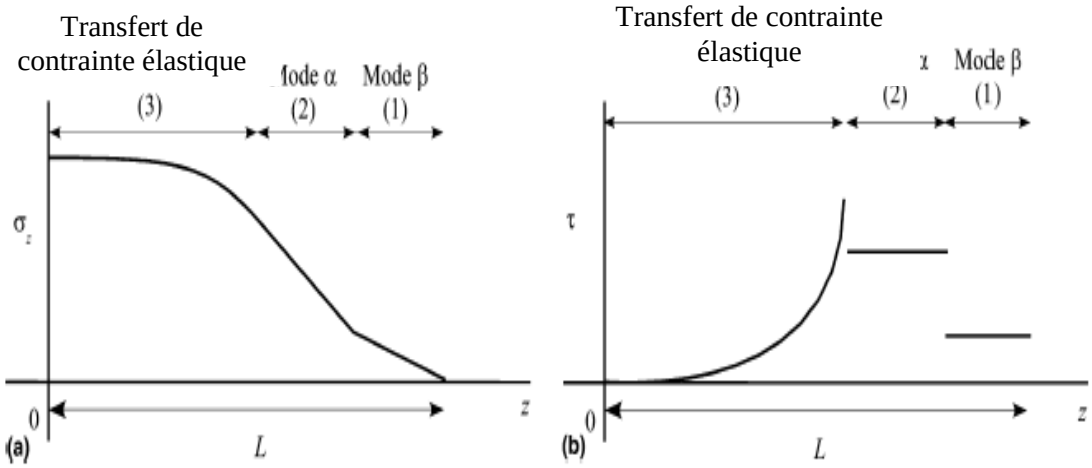


Figure (III.11) : Graphes de distribution :(a) contraintes axiales de fibres σ_z, (b) contraintes de cisaillement interfacialle τ.

Notons également, que une distribution linaire de la contrainte axiale σ_z apparaisse dans les modes β et α correspondant aux zones (I) et (II) (voir la figure III.11), résultant respectivement; du mouvement relatif entre la matrice déformée et la fibre, induit par la contrainte de cisaillement interfacialle, et de la contrainte de cisaillement interfacialle correspondante qui est constante, dans ce cas (mode α) , puisque il n'y a aucun décollage de l'interface; donc elle ne peut être que l'effet du mouvement relatif entre la matrice et la fibre à l'interface d'après Kelly et Tyson**[28]**.

C. Fissuration de la matrice (mode γ)

Le mode γ se produit lorsque la fissure dans la région de l'extrémité de la fibre décollée EF (figure III.9), se propage dans la matrice mais non le long de l'interface fibre-matrice **[19]**.

RICE et TRACY ont modifié la germination des micro-vides ; un modèle de croissance et de cohésion est utilisé pour prévoir la propagation de la fissure, on tenant compte de la manière avec la quelle la fissure de la matrice se forme et comment-elle se propage vers les vides présents dans la région avale de la fissure ; cette dernière se développe et se fusionne également en raison de la présence de contraintes élevées. Un processus de modélisation est mis en application en considérant la matrice comme un

matériau élastoplastique, sous un déplacement incrémental appliqué au modèle de la figure (III.9) sur la limite CD, la matrice se déforme de l'état élastique à l'état plastique. Une contrainte critique de rupture est ainsi définie et qui dépend de la taille des vides et des contraintes autour de la région. Si l'état de déformation en un point dans la matrice est plus grand par rapport à la déformation critique de rupture, alors la fissure est considérée formée.

D. Décollage de l'interface (mode β)

Le mode β se produit quand les fissures initiales dans l'interface au décollage de l'extrémité de fibre EF (figure III.9) se propagent le long de l'interface AF ; le transfert de la contrainte par frottement se produit quand la matrice se déforme en glissant sur la surface de la fibre. Owen DRJ et Lyness JF, considèrent un rapport entre le taux de décollement et le rapport de module E_f/E_m : plus E_f/E_m est grand, plus le taux de défaillance est élevé.

La distribution de la contrainte σ_z est linéaire comme la montre la figure (III.11 a). Cette distribution est induite par la contrainte de cisaillement à l'interface, et elle résulte du mouvement relatif entre la matrice déformée et la fibre.

E. Transfert de la contrainte plastique [18]

L'apparition simultanée de modes β et α à l'interface AF (figure III.9) et dans la région adjacente de la matrice, engendre le transfert de contrainte plastique. Goh et al **[29]** considèrent un modèle d'éléments finis consistant en une fibre élastique en traction sous l'application d'une contrainte de cisaillement constante τ appliquée sur sa surface. Ont observé, que τ agit comme une constante d'échelle de σ_z, ceci est conforme au modèle de cisaillement constant de Kelly et Tyson **[28]**.

En revanche, Rauchs et al supposent un modèle d'éléments finis composé d'une matrice élastoplastique dans laquelle la fibre élastique de même longueur que la matrice est incorporée. Ce modèle correspond au deuxième concept de base cité précédemment, où une charge est appliquée dans la direction de la fibre afin d'engendrer un déplacement axial à l'extrémité de la fibre EF', tandis que l'autre extrémité fibre-matrice OB ne subi aucun déplacement axial. La comparaison des prévisions du modèle aux résultats obtenus expérimentalement, a apporté une compréhension au processus de transfert de contrainte qui s'est produit. Ce processus progresse à partir du transfert de contrainte élastique, puis

aux contraintes des modes α et β, et finalement au transfert de contrainte plastique. Les résultats du modèle des éléments finis de Goh KL, concernant le transfert de contrainte dans une fibre cylindrique uniforme sont conformes aux résultats théoriques et expérimentaux de Aspeden. RM et Rauchs. G, respectivement : la contrainte de traction axiale relative à la fibre augmente linéairement de zéro à l'extrémité jusqu'à une valeur maximale au centre de la fibre.

F. Arrachement de fibres

L'arrachement de fibres peut se produire quand les fibres sont tendues en dehors des faces d'une fissure de la matrice, ceci pouvant résulter de la combinaison de modes β et γ en l'absence du mode α. La fissure de la matrice résultante du mode γ peut se propager aux fibres voisines de sorte que ces fibres soient responsables de fissuration de la matrice ; en conséquence, l'arrachement des fibres peut se produire. La capacité de fibres de transmettre les fissures à une matrice dépend : de l'interface, de la résistance de fibre et du module de fibres.

La figure (III.12a) montre le graphe de σ_z en fonction de la distance z, le long de l'axe d'une fibre. Ce dernier est basé sur des résultats compilés des expériences de l'analyse par éléments finis et des modèles mathématiques **[18, 19]**. La distribution de contraintes est représentée par trois zones : Bennett et Jeunes suggèrent, que la distribution linéaire de contraintes dans les zones (II) et (III) peuvent être attribuées au glissement, et elles sont produites quand l'interface se décolle c'est-à-dire le mode β ; alors que la zone (I) est due au transfert de contraintes élastiques.

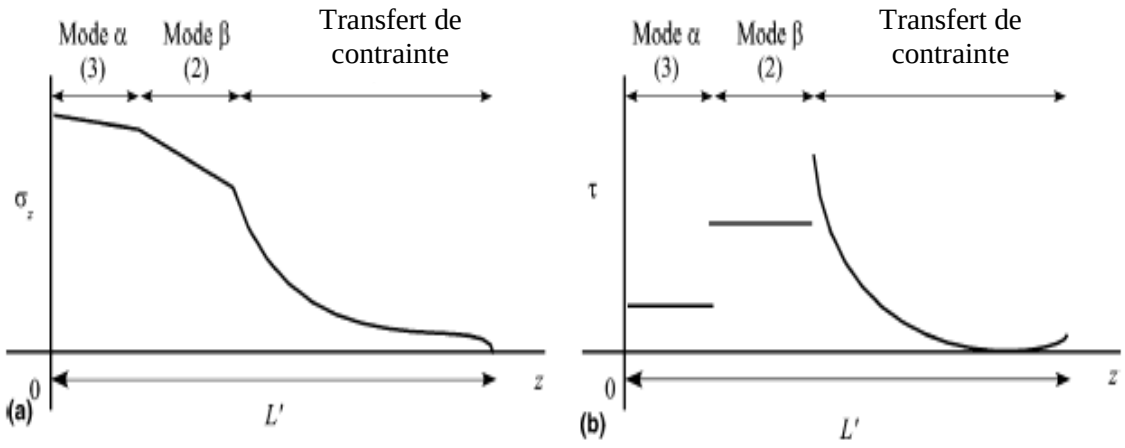


Figure (III.12) : Graphe de distribution : (a) de contrainte axiale σ_z et (b) de contrainte de cisaillement interfaçiale τ.

Une analyse par éléments finis est réalisée par Zhang et al **[18]**, dans laquelle ont conclu que : la distribution de la contrainte axile σ_z est le résultat de transfert de contraintes élastiques, et leur distribution s'initier durant le chargement initial, alors que la valeur maximale de σ_z se situe au point de transition de la zone II vers I , en suite elle diminue rapidement jusqu'à elle devienne constante pour la grande partie de la longueur, avant de se tend vers zéro à l'extrémité de la fibre.

G. Fragmentation des fibres

Pendant le processus de déformation, le transfert de contrainte de la matrice aux fibres peut causer des coupures aux fibres à l'emplacement où la limite de rupture est atteinte, la fragmentation s'arrête quand les fragments sont très petits (inférieur à la longueur critique) que les demi-longueurs de fragments n'atteignent pas σ_u , c'est-à-dire; pas assez de contraintes qui peuvent être transférer aux fragments de fibres pour causer d'avantage la fragmentation. Rauchs et al **[17]** analysent par la méthode des éléments finis les contraintes dans la fibre réduite en fragment en utilisant le modèle de transfert de contrainte plastique. La figue (III.13a) montre un schéma du σ_z le long de l'axe des fragments de fibres alignés en série. Le graphe résulte alors, les résultats obtenus par l'analyse des éléments finis rapportés par Rauchs et al; le graphe illustre le transfert de contraintes plastiques. La distribution correspondante de la contrainte de cisaillement τ le long de la surface de ces fragments de fibres est illustrée par la figure (III.13b). Rauchs et al, démontrent que si r_0 dans tous les fragments a la même valeur, et τ agit sur tous les fragments de la même grandeur, alors la grandeur de σ_z dépend de q. Ceci est conforme au cisaillement constant du modèle de Kelly et Tyson.

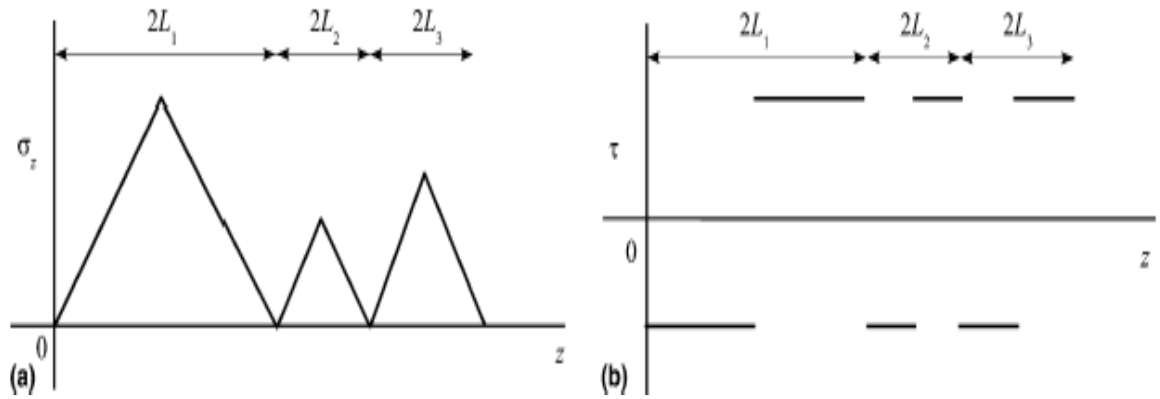


Figure (III.13) : Graphe de la distribution : (a) de contrainte axiale σ_z et (b) de contrainte de cisaillement interfaciale τ.

III.3 FLUAGE DES MATERIAUX COMPOSITES

Conventionnellement, le fluage correspond à l'augmentation de la déformation d'un élément de structure sous charge maintenue constante au cours du temps. Les déformations de fluage sont évaluées par la différence des évolutions dans le temps des structures chargées et non chargés (Coquillat, 1987).

La découverte du fluage en 1910 est révélée par Eugène Freyssinet qui l'observa sur un pont qu'il construisit à Le Veurdre sur l'Allier (France) en observant une évolution de déplacements de la structure au cours du temps. En parallèle, il étudiait les méthodes de précontrainte et montra qu'elles remédiaient en partie aux déformations différées. Mais, il cherchait aussi à établir les relations entre l'évolution de déformations et les propriétés de ciment et des matériaux. Ces travaux permirent de conclure que le fluage dépendait des mouvements de l'eau contenue dans le ciment et très tôt, il l'associa davantage à un retrait amplifié par l'état de contrainte qui accélérait la vitesse de déformation et par la suite, le départ d'eau (Freyssinet, 1933).

Dans cette section nous présentons, deux approches micromécaniques du fluage des matériaux composites, l'une se focalise sur la loi du fluage avec le glissement et la diffusion de l'interface, proposée par Robert M. McMeeking (1994). Et l'autre concerne la modélisation au fluage d'un composite à matrice métallique renforcé de fibres élastiques continues, présentée par N.Aravas (1996).

III.3.1 Loi du fluage de glissement et la diffusion de l'interface

Kelly et Street (1972) proposent un modèle relatif à la loi de puissance de fluage pour le matériau composite, avec des fibres alignées. Ce même modèle a fait objet d'une amélioration mené par McMeeking (1994), en analysant le champ d'écoulement d'une matrice. Dans les deux traitements, l'interface fibre-matrice est considérée bien collée et sans glissement ou avec glissement relatif contrôlé par la matrice. En outre, beaucoup de matériaux composites ont une interface fibre-matrice avec des propriétés du fluage très différentes. McMeeking a élaboré un modèle pour caractériser le glissement et la diffusion de l'interface ainsi que l'influence de différentes interphases. Le traitement précédent de ces caractéristiques par Goto et McLean (1991) est basé sur les modèles originaux de Kelly et de Street (1972) sans améliorer avantagement les champs d'écoulement analysés par McMeeking (1994).

Il convient de noter que le modèle que nous présentons et ceux mentionnés précédemment considèrent que la résistance au fluage est contrôlée par l'écoulement continu de la matrice.

III.3.1.1 Formulation

La géométrie du problème est illustrée dans la figue (III.14), la fibre étant rigide de longueur $2L$ et de diamètre $2a$. On suppose alors, que toutes les fibres ont le même rapport d'aspect L/a. La matrice rompt suivant une loi rhéologique, et en considère seulement l'état d'équilibre de fluage. Un volume élémentaire représentatif (VER) de diamètre $2b$ et de longueur légèrement supérieure à $2L$ est choisie de sorte que le rapport du volume de fibre au volume de VER est égal à la fraction volumique de fibres dans le matériau composite. La relation exacte entre a/b et la fraction volumique de composite dépend de la façon dont les fibres sont disposées dans la matrice et de l'espacement bout à bout et côte à côte des fibres, comme considéré par McMeeking. Le volume élémentaire représentatif se déforme de telle manière que sa forme cylindrique soit préservée. La contrainte de cisaillement du côté de la VER est nulle. Cependant, la contrainte radiale n'est pas uniformément nulle, mais elle l'est en moyenne. Ceci confirme que la contrainte transversale est nulle de sorte que la seule charge appliquée est la contrainte axiale σ, comme il est illustré dans la figure (III.14). Le comportement de fluage à l'interface est exprimé donc par : $\tau = \eta\dot{\gamma}$, ou τ est la contrainte de cisaillement, η est la viscosité et $\dot{\gamma}$ est le taux de déformation. De ces conditions aux frontières, donc le glissement relatif de la matrice sur la fibre, peut s'exprime comme suit :

$$\sigma_{rz} = \mu v z \qquad \text{et} \qquad \mu = \eta / t \tag{III.18}$$

σ_{rz} est la contrainte de cisaillement sur la surface de fibre; l'épaisseur t est supposée uniforme et constante. On suppose également que le transport de masse par diffusion est possible à l'interface entre la fibre et la matrice. Le processus de diffusion est engendré par la différence de contrainte et il s'effectue des régions comprimées vers des régions détendues, en conséquence le processus de diffusion de la matrice et de la fibre est négligé, seulement le processus de diffusion du côté de la fibre son considéré. Donc le taux de masse transportée dans la direction z est donnée par :

$$j_z(z) = D\frac{\partial\sigma(a,z)}{\partial z} \tag{III.19}$$

j_z est le volume de matière transportée à travers une unité de longueur de la surface de fibre par unité de temps, $\sigma(a,z)$ est la contrainte hydrostatique sur la surface de la fibre, D est un coefficient du diffusion de l'interface.

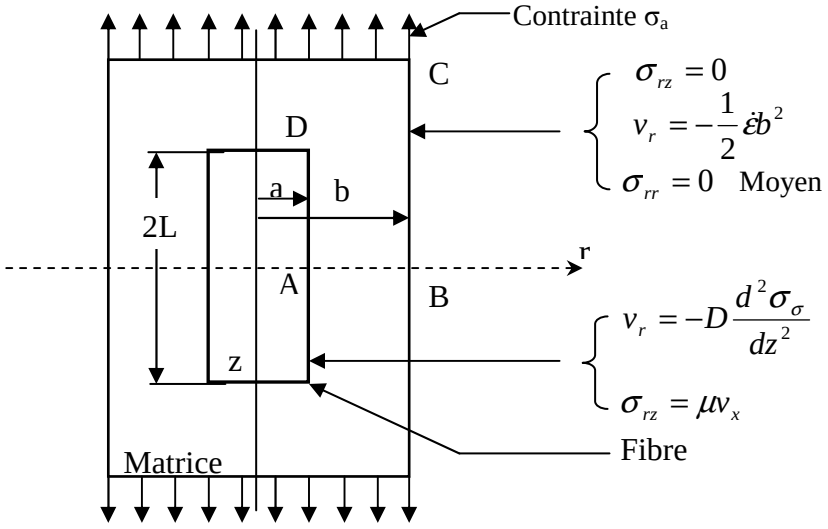


Figure III.14 : Cellule unité pour l'analyse du fluage.

III.3.1.2 Analyse

A. Cas linéaire

Lorsque la diffusion ou le glissement de l'interface ou les deux sont actifs simultanément, la résistance au fluage se dégrade. Un effet similaire est identifié par Sofronis et McMeeking (1994) dans un composite à particules. L'ampleur de transport de masse dépend de l'importance de D et μ. On s'attend souvent à ce que ces paramètres soient dépendants de la température comme si le cas de la viscosité de la matrice σ_0/ε_O. Par conséquent, la température est un facteur important dans l'ampleur de la dégradation de la résistance au fluage par la diffusion et le glissement de l'interface.

Une conclusion importante a tiré de l'équation (III.20): que l'effet de la diffusion et ou du glissement de l'interface sur la résistance du fluage est identique. Cependant, Il suffit qu'un mécanisme soit actif pour que la résistance au fluage se dégrade. Ainsi, Sofronis et McMeeking (1994) soulignent que la diffusion d'interface n'est pas automatiquement responsable de la perte de résistance au fluage dans le matériau à fibres aux températures élevées (Rosier et al, 1990 ; 1991), puisqu'elle pourrait également être due au glissement de l'interface.

$$\sigma_a = \frac{\frac{1}{6}(L/b)^2 \dot{\varepsilon}}{\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\sigma_0} H\left(\frac{a}{b},1\right) + \left[\frac{D}{b^2} + \frac{\left(1-a^2/b^2\right)^2}{4\mu a^2/b^2}\right]\frac{a}{b^2}} \qquad \text{(III.20)}$$

Et si le transport de masse est très rapide quand la valeur de D est grande, ou quand la dislocation engendrée par le glissement est très faible lorsque μ est très faible, la valeur du dénominateur de équation (III.20) est très grande. En conséquence, la résistance au fluage du matériau composite est faible, l'effet de la longueur de fibre est dominé par le glissement d'interface et le transport de masse. Il en résulte que la résistance au fluage du matériau composite est critiquement dépendante de l'intégrité de l'interface entre la fibre- matrice.

B. Cas non linéaires

Une méthode des projections est utilisée pour trouver une solution satisfaisante pour l'équation (III.21) par l'intégration de cette dernière par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre.

$$\int_0^L \sigma(z)dz = 0 \qquad \text{(III.21)}$$

Les solutions numériques pour $n = 2$ sont comparées à la solution analytique de l'équation (III.22). En suite, pour toutes les valeurs de n, la solution pour $C = 0$, est comparée au résultat analytique de McMeeking (1994). L'unanimité entre les solutions numériques et analytiques est bonne.

$$\hat{\sigma}(\hat{z}) = \frac{1}{4}C(1-2\hat{z}) + \frac{1}{12}\left(C^2+4\hat{z}\right)^{3/2} - \frac{1}{120}\left(C^2+4\right)^{5/2} + \frac{1}{120}C^5 \qquad \text{(III.22)}$$

Avec

$$C = 2\left[\frac{D}{b^2} + \frac{\left(1-a^2/b^2\right)^2}{4\mu a^2/b^2}\right]\frac{\sigma_0}{\dot{\varepsilon}L} \times \frac{a}{b}\left[\frac{\dot{\varepsilon}L}{2H\left(\frac{a}{b},n\right)\dot{\varepsilon}_0 b}\right]^{1/n}$$

Les résultats sont représentés dans la figure (III.15) en fonction de C pour plusieurs valeurs de n.

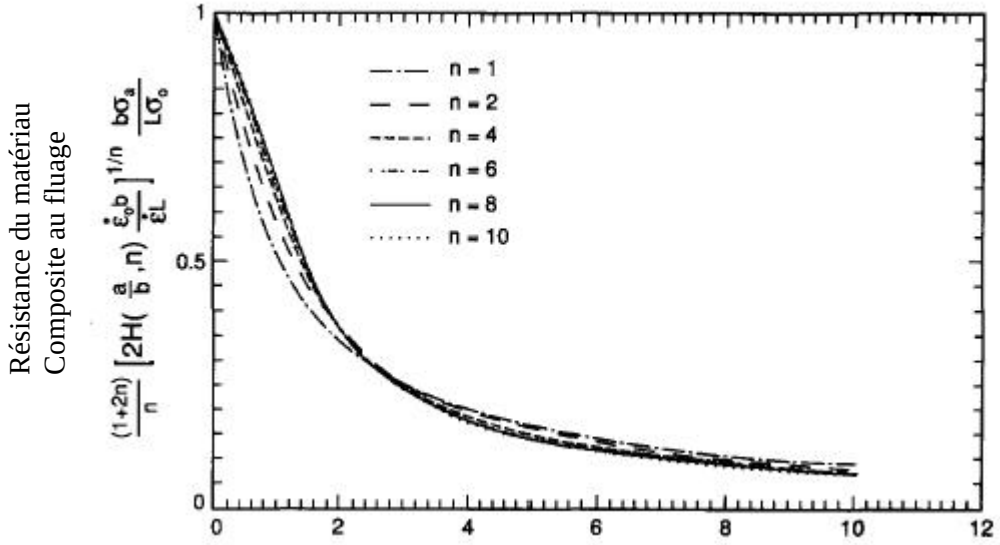


Figure III.15 : La contrainte appliquée sur le matériau composite en fonction de taux de déformation, des propriétés de fluage de matrice, de glissement d'interface, du transport de la masse à l'interface et de la géométrie de cellules unité.

C. Résistance de composite au fluage

Les résultats tracés dans la figure (III.15), bien qu'abrégés, sont difficiles à interpréter puisque les deux paramètres d'ordonnée et d'abscisse sont très compliqués. Pour faciliter l'interprétation des résultats, quelques cas spécifiques sont illustrés dans les figures (III.16) et (III.17) ; la résistance au fluage est donnée comme suit :

$$S = \frac{\sigma_a}{\sigma_0}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_0}{\dot{\varepsilon}}\right)^{1/n} \qquad \text{(III.23)}$$

Avec:

S : Résistance au fluage.

σ_a : Contrainte axiale moyenne.

σ_0 et $\dot{\varepsilon}_0$: Contrainte et déformation pure dans la matrice.

La Figure (III.16) montre la résistance au fluage en fonction du glissement d'interface pour un matériau dont $a^2/b^2 = 0.2$ (qui peut être interprété comme 20% de fraction volumique des fibres) et de rapport d'aspect de fibre L/a = 5. On constate qu'il n'y a aucune diffusion d'interface, et la résistance au fluage du matériau composite se dégrade avantagement pour les valeurs de n inférieur à 10.

La figure (III.17) illustre la résistance au fluage en fonction du coefficient de diffusion de l'interface ; quand $a^2/b^2 = 0.2$, $L/a = 5$ et le coefficient de glissement

$\mu = 10$ en absence du transport de masse à l'interface, le composite a une bonne résistance au fluage. Le graphe montre que la résistance au fluage tend à se diminuer si l'équation (III.24) tend à une valeur supérieur à 10^{-1}, si $\hat{D}$ est supérieur à 10, la résistance diminue et le point de transition de la résistance se produit au voisinage de $\hat{D} = 1$.

$$\hat{D} = \frac{D\sigma_0}{b^2 L\dot{\varepsilon}}\left(\frac{\dot{\varepsilon}L}{\dot{\varepsilon}_0 b}\right)^{1/n} \qquad \text{(III.24)}$$

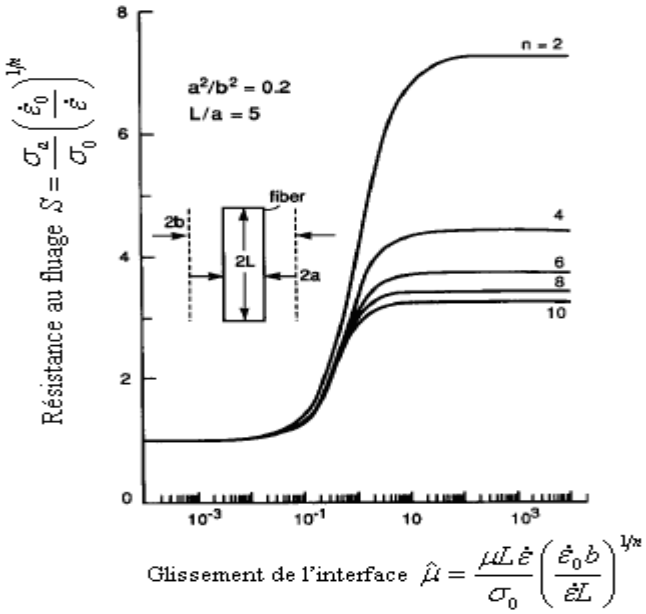


Figure (III.16) : Résistance au fluage d'un matériau composite en fonction du coefficient de traînance d'interface quand il n'y a aucun transport de la masse d'interface.

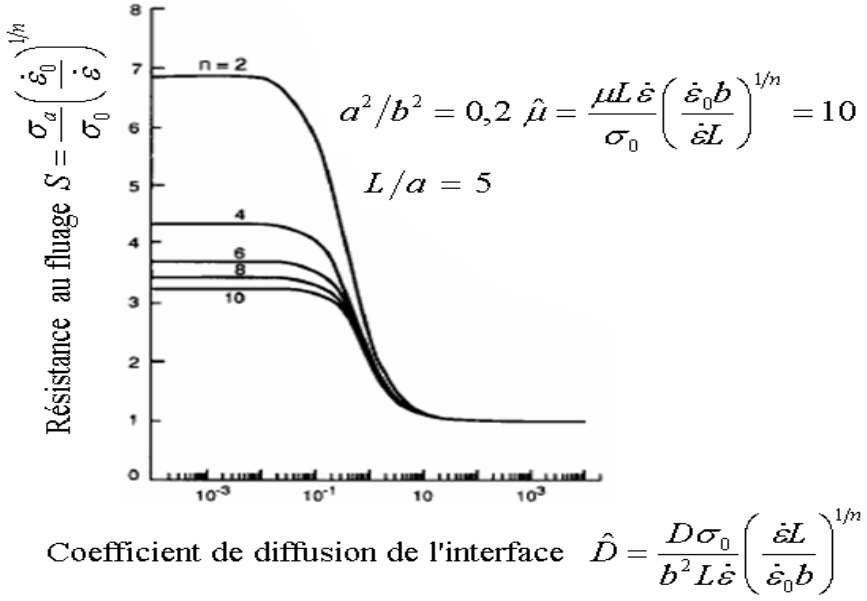


Figure III.17 : Résistance au fluage d'un matériau composite en fonction du coefficient de diffusion d'interface.

III.3.2 Modélisation du fluage d'un composite à matrice métallique renforcé de fibres élastiques continues alignées [21]

Les matériaux composites de matrice métallique renforcés de fibres continues ont beaucoup intéressé les chercheurs ces dernières années, en raison de leur potentialité en tant que matériaux structuraux à hautes températures. Plusieurs modèles, dont unidimensionnels, peuvent être employés pour prévoir le comportement au fluage des composites renforcés de fibres sous chargement simple ; nous mentionnons les travaux de Mileiko (1970), de Kelly et de Street (1972), McLean (1985, 1988, 1989), Goto et McLean (1991a, b), et McMeeking (1993a, b).Cependant, on note, pas de progrès dans le développement des équations constitutives *tridimensionnelles* pour le comportement des composites de matrice métallique à des températures élevées.

Quand la matrice et les fibres subissent le fluage, le composite observe un état d'équilibre. Des équations constitutives tridimensionnelles du comportement au fluage pour tels composites sont développées par Johnson (1977) et, plus récemment par Aravas et al (1995).

N. Aravas et CAO Cheng (1995), développent un modèle d'équations constitutives tridimensionnelles, afin d'étudier le comportement au fluage des matériaux composites à matrice métallique renforcée de fibres élastiques continues. Cependant, ont supposé que le comportement macroscopique du composite est transversalement isotrope, l'axe de l'isotropie transversal étant défini par la direction des fibres. Le modèle du composite est développé selon deux étapes : (i) la charge relative au cisaillement est appliquée sur les fibres, la réponse est dominée par la matrice, (ii) le composite est soumis aux charges axisymétriques relatives aux fibres et la réponse est dominée par les fibres.

Les prévisions du modèle sont comparées aux solutions d'un certain nombre de problèmes «de volume élémentaire représentatif» ; des conditions aux frontières adaptées aux conditions de la théorie d'homogénéisation périodiques sont appliquées aux problèmes, et les solutions sont obtenues on employant la méthode des éléments finis.

CAO Cheng et N. Aravas ont considéré un composite de matrice métallique renforcée par des fibres alignées et continues, Où la matrice métallique est considérée afin d'illustrer la loi de fluage de composite, la réponse de la matrice est alors élastique. Le taux de déformation est donné par la relation (III.27) suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_m} + B\sigma^n \qquad \text{(III.27)}$$

$\dot{\varepsilon}$ et $\dot{\sigma}$ sont respectivement la déformation et la contrainte uniaxiales, E_m est le module de Young de la matrice, et (B, n) sont les constantes de fluage de la matrice. Les fibres se comportent selon une loi élastique et le rapport uniaxial de contrainte-déformation est:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_f} \qquad \text{(III.28)}$$

E_f est le module de Young de fibres. La version tridimensionnelle correspondante de l'équation ci-dessus est:

$$\dot{\varepsilon} = C_m^{-1} : \dot{\sigma} + \frac{3}{2} B\sigma_c^{n-1}\sigma' \qquad \text{Pour la matrice,} \qquad \text{(III.29)}$$

et

$$\varepsilon = C_f^{-1} : \sigma \qquad \text{Pour la fibre,} \qquad \text{(III.30)}$$

Où ε et σ sont les tenseurs de déformation et de contrainte. C_m et C_f sont les tenseurs de quatrième ordre des modules élastiques pour la matrice et les fibres, respectivement ; et σ' est la partie déviatorique du tenseur de contrainte.

L'axe x_3 coïncide avec la direction des fibres, de sorte que le x_1 et x_2 soient des axes transversaux. Une contrainte macroscopique arbitraire σ peut donc être écrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{1}{2}(\sigma_{22}-\sigma_{11}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{11}-\sigma_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \qquad \text{(III.31)}$$

Le premier terme du membre droit de l'équation ci-dessus correspond au chargement de cisaillement relatif aux fibres ; le dernier terme est la superposition de la pression latérale et du chargement uniaxial.

III.3.2.1 Comportement de la matrice au cisaillement

A. Modèle du deBotton et du Ponte Castâneda

Les travaux de deBotton et du Ponte Castâneda (1993) sont axés sur un modèle constitutif pour les matériaux composites non-linéaires renforcés par des fibres alignées et

continues. Le modèle constitutif est basé sur un principe variationnel qui permet d'exprimer l'énergie effective du composite non-linéaire en termes de problèmes d'optimisation. Dans le cas des fibres rigides et d'une matrice soumise à la loi de fluage, ont considéré les coordonnées (x'_1, x'_2, x_3) montrées dans la figure (III.18) ; et la relation du modèle s'écrit comme suit :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{3}{2} B(1-f)(1+f)^{-(n+1)/2} \sigma_S^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & \tau_p & \tau_n \cos\phi \\ \tau_p & 0 & \tau_n \sin\phi \\ \tau_n \cos\phi & \tau_n \sin\phi & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.32)}$$

$\sigma_s^2 = 3(\tau_n^2 + \tau_p^2)$. Pour une orientation arbitraire des cordonnées des axes transversaux x_1 et x_2. L'équation ci-dessus devient :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{3}{2} B(1-f)(1+f)^{-(n+1)/2} \sigma_S^{n-1} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}-\sigma_{22})/2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22}-\sigma_{11})/2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.33)}$$

Où

$$\tau_n^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \qquad \text{et} \qquad \tau_p^2 = \sigma_{12}^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2/4$$

De sorte que

$$\sigma_S^2 = \frac{3}{4}(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \qquad \text{(III.34)}$$

Selon ce modèle, ces contraintes constantes appliquées provoquent un taux de déformation constant (fluage équilibré).

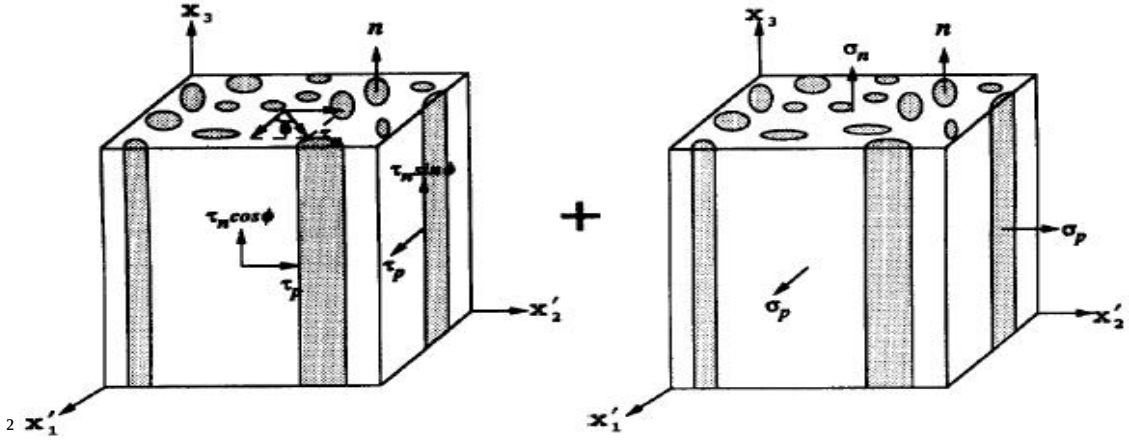


Figure III.18 : Présentation d'un état de contrainte arbitraire.

b. Modèle du volume élémentaire représentatif

Les prévisions de modèles analytiques sont comparées aux résultats de la théorie d'homogénéisation périodique (Sanchez-Palencia, 1980; Bakhvalov et Panasenko, 1989).Un certain nombre de problèmes de "volume élémentaire représentatif"

périodiques, avec des conditions aux frontières conformes aux conditions de la théorie d'homogénéisation, sont résolus en employant la méthode des éléments finis.

CAO Cheng et N. Aravas ont supposé une distribution périodique, ainsi que une disposition hexagonale des fibres.

Les charges macroscopiques appliquées sont combinées du cisaillement transversal et longitudinal. La figure (III.19) montre l'arrangement hexagonal des fibres dans la matrice, tandis que la figure (III.20) montre la maille d'élément fini utilisée dans les calculs bidimensionnels. Les régions foncées et blanches dans cette figure représentent les fibres et la matrice respectivement. Une maille semblable est employée dans les calculs tridimensionnels qui impliquent le cisaillement longitudinal (Aravas et al, 1993).

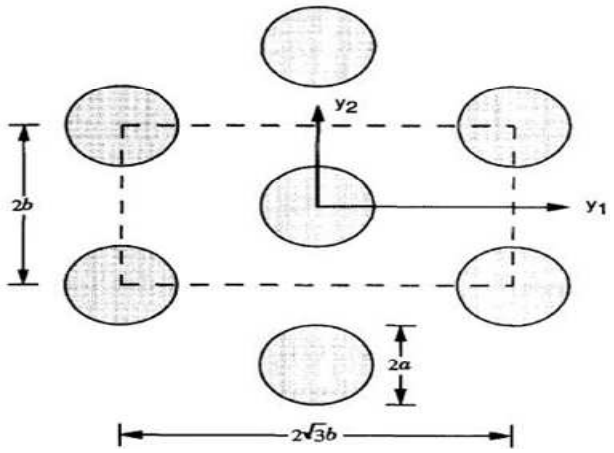


Figure III.19 : Arrangement hexagonal de fibres dans une cellule unité.

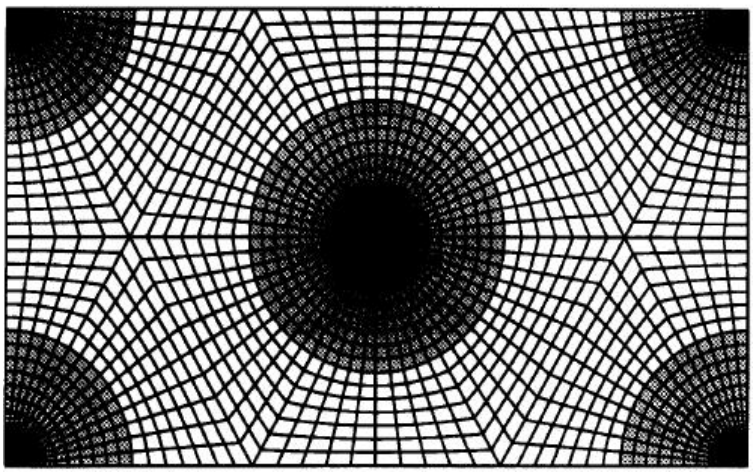


Figure III.20 : Maille d'élément fini utilisée dans les calculs de volume élémentaire représentatif.

Cependant, des calculs itératifs sont effectués pour plusieurs valeurs de l'exposant n de fluage de la matrice en fonction de différentes valeurs de la fraction volumique de fibres f . La solution numérique, à laquelle ont parvenus est pratiquement indépendante des valeurs des caractéristiques élastiques de fibres et de la matrice. En revanche, les résultats du volume élémentaire représentatif sont en bonnes concordances avec la solution de l'équation suivante :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{3}{2} B(1-f)\chi^n \sigma_s^{n-1} \begin{bmatrix} (\sigma_{11}-\sigma_{22})/2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & (\sigma_{22}-\sigma_{11})/2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.35)}$$

La figure (III.21) montre les résultats de calcul relatif au volume élémentaire représentatif ainsi que ceux des équations (III.36)-(III.37) pour une fraction volumique de fibres $f = 0{,}32$ et $n = 3$. Les prédictions du modèle analytique sont en concordances avec les résultats des solutions des éléments finis.

$$\chi^{-1} = 1 + a(n) f + b(n) f^2 + c(n) f^6 \qquad \text{(III.36)}$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{B\tau_0^n} = 3^{(n+1)/2}(1+f)\chi^n \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \qquad \text{(III.37)}$$

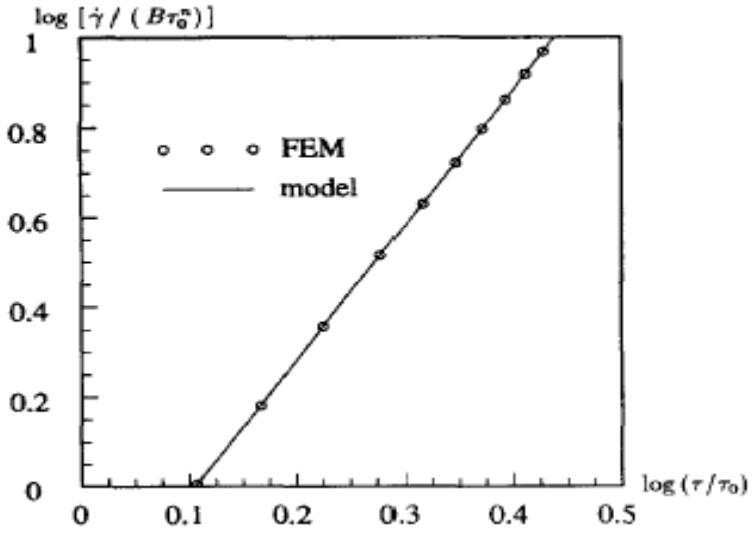


Figure III. 21 : Evolution du cisaillement pour *f*= 0.32 et n = 3.

III.3.2.2 Comportement de fibres aux charges axisymétriques

Dans le cas du chargement axisymétrique montré en figue (III.18b), l'élasticité des fibres a une importance majeure. McLean (1985, 1988) a développé un modèle simple pour une tension uniaxiale dans la direction de fibres.

A. Modèle de McLean

McLean a supposé un modèle, dans lequel une charge macroscopique est appliquée dans la direction des fibres, c'est-à-dire $\sigma_{33} = \sigma$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon$ est la déformation axiale macroscopique correspondante, et que les contraintes prennent des valeurs constantes dans les fibres et la matrice, et que les seules composantes différentes de zéro sont $\sigma_{f33} = \sigma_f$ et $\sigma_{m33} = \sigma_m$. Il a supposé également que la déformation axiale uniforme correspondante dans les fibres et la matrice est égale à la déformation axiale macroscopique ε. Avec ces hypothèses, on a :

$$\sigma = f\sigma_f + (1-f)\sigma_m \qquad \text{(III.38)}$$

Le taux de déformation axial est alors :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_f}{E_f} = \frac{\dot{\sigma}_m}{E_m} + B\sigma_m^n \qquad \text{(III.39)}$$

de ces deux dernières équations, McLean a prouvé que le modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B'(\sigma - \alpha)^n \qquad \text{et} \qquad \frac{\dot{\alpha}}{fE_f} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B'(\sigma - \alpha)^n \qquad \text{(III.40)}$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (III.40a) définit le taux de déformation élastique de composite ($\dot{\varepsilon}^e$), et le deuxième terme définit le taux de déformation de fluage. La figure (III.22) montre la variation de la déformation normale ε avec des valeurs normalisées du temps t pour $n = 3$ et $\varepsilon_0/\varepsilon_c = 0.6$, où

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} = \frac{\alpha}{\sigma} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{B^t \sigma^n t}{\varepsilon_c} \qquad \text{(III.41)}$$

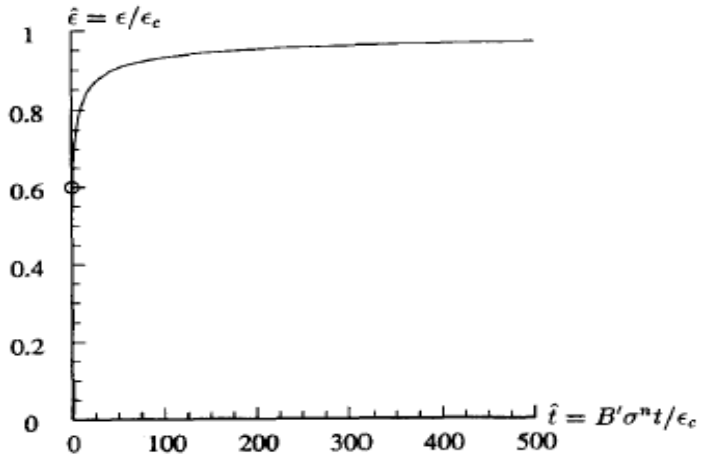


Figure III.22 : Evolution de la tension uniaxiale pour $\varepsilon_0/\varepsilon_c = 0.6$ et n = 3.

B. Solutions de volume élémentaire représentatif

La figure (III.23) montre les résultats des calculs par éléments finis ainsi que les prévisions du modèle tridimensionnel, quand une charge axiale macroscopique est constante $\sigma_n = 500$ MPa est appliquée. Les résultats correspondants pour une charge macroscopique transversale axisymétrique constante $\sigma_p = 100$ MPa sont montrés dans la figure (III.24). Les résultats des calculs du volume élémentaire représentatif sont en bonne concordance avec les prévisions du modèle analytique.

Les propriétés de matériaux utilisées dans les calculs sont : $E_f = 360$ Gpa, $\nu_f = 0.3$, $E_m = 65$ Gpa, $\nu_m = 0.3$, $n = 3$, et $B = 4{,}125.10^{-13}$ Mpa^{-n} s^{-1}. La fraction volumique des fibres est $f = 0.32$.

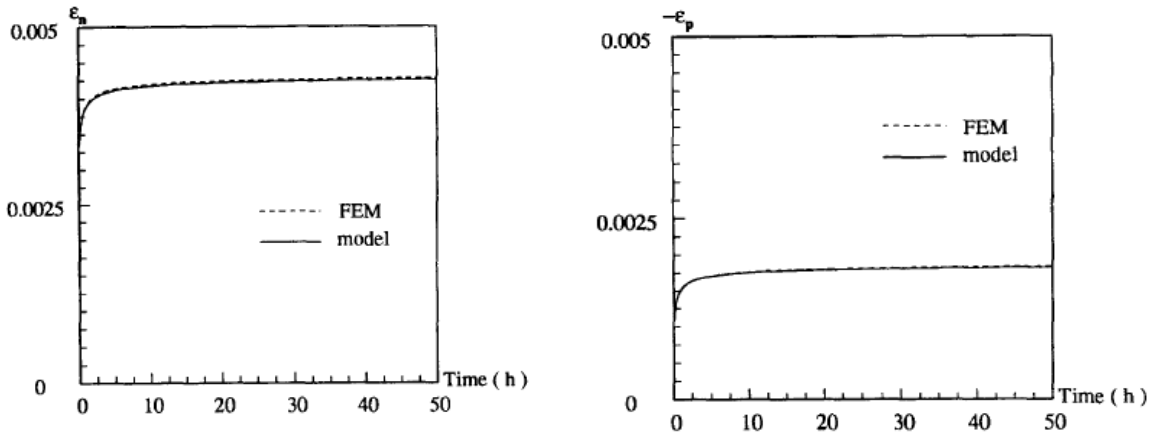


Figure III.23 : Evolution de la tension uniaxiale en fonction de f=0.32, n=3, B=4.125×10^{-13}Mpa^{-11}S^{-1} et σ_n=500MPa

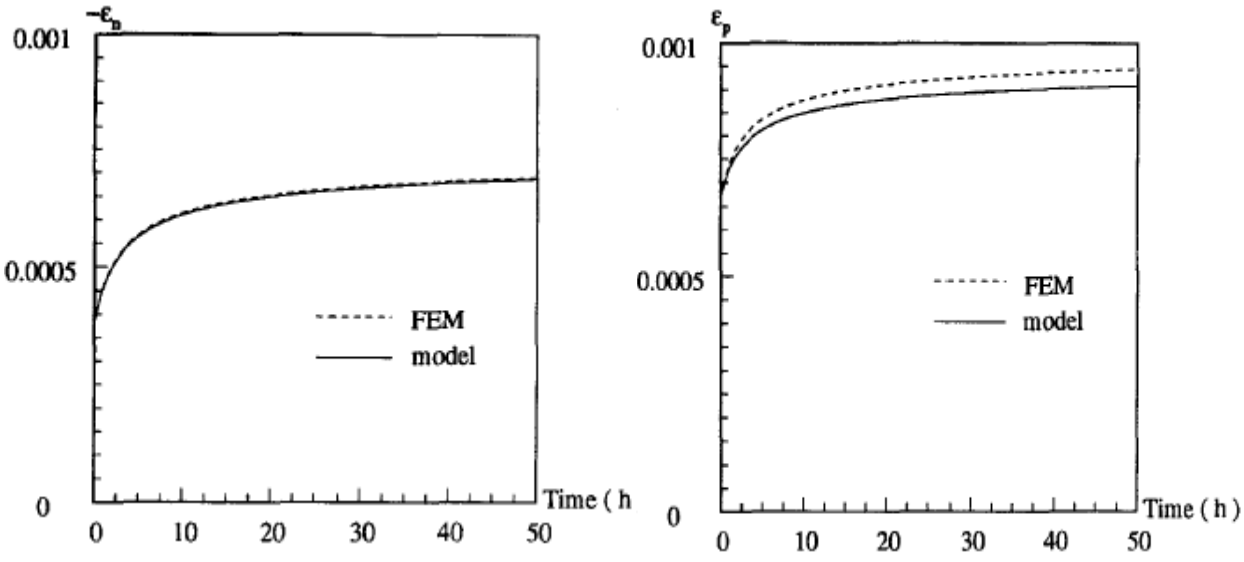


Figure III.24 : Evolution de la tension biaxiale pour f=0.32, n=3, B=4.125×10^{-13}Mpa^{-11}S^{-1} et σ_n=500MPa

III.4. MODELISATION DU BETON ARME

III.4.1 Modélisation de poutres en béton armée renforcées de tissus d'aramide

Depuis plusieurs années, la réfection et le renforcement d'ouvrage en béton armé prennent de plus en plus d'importance dans la construction. Plusieurs facteurs rendent nécessaire le renforcement ou la réparation des ouvrages : la corrosion de aciers d'armature, la fissuration du béton, un mauvais dimensionnement, l'évolution des normes, des accidents (choc contre un élément de structure), l'endommagement par des séismes, la prolongation de la durée de vie de l'ouvrage, …etc.

Les méthodes de renforcement classiques, par exemple l'augmentation de la section par l'ajout de nouvelles barres d'armature et d'un nouveau béton lié à l'ancienne structure, sont souvent très complexes à réaliser, très onéreuses, et nécessitent une intervention lourde sur la structure.

Grâce aux progrès effectués dans le domaine des adhésifs au milieu du siècle passé, une nouvelle option se présentait aux ingénieurs : le renforcement des structures par le collage externe. Dès le milieu des années soixante, on a commencé à appliquer des lames d'acier sur des structures en béton. Ces lames sont collées à la surface de béton à l'aide d'une résine époxyde. Cette méthode constitue une avancée majeure dans le domaine de la réfection car elle simplifie grandement le travail par rapport aux méthodes traditionnelles. Toutefois des problèmes de corrosion de l'acier mettent en péril la sécurité de ce type de renforcement **[30]**. Dès lors, les chercheurs ont tenté de trouver des matériaux de substitution qui régleraient ce problème et se sont retournés vers les matériaux non métalliques, en particulier les RFP (Fiber Renfoced Polymer) pour leurs nombreuses qualités.

Vers 1990, on a commencé à utiliser les FRP dans le domaine de la construction au Japon, au USA et en Europe **[31]**. Les fibres généralement utilisées sont en verre, en carbone ou en aramide, sous forme de tissus unidirectionnels ou bidirectionnels, de lamelles ou de barres.

De nombreuses études ont été menées par R. Suter et D. Jungo (2001) sur l'utilisation des FRP pour le confinement de colonnes, le renforcement en flexion de poutres ou de dalles.

De nos jours, la volonté grandissante de maîtriser l'environnement a poussé un grand nombre de scientifiques à se tourner vers des outils sophistiqués qui permettent

d'analyser dans le détail les comportements physiques des matériaux. Les éléments finis sont même capables de répondre à ces attentes et sont actuellement communément utilisés dans de nombreux domaines. L'apparition de l'ordinateur et des programmes de calcul (logiciels) extrêmement puissants, tels ANSYS, ADINA et bien d'autres, nous permet de modéliser précisément le comportement de structures complexes. Dans le domaine de GENIE CIVIL, le calcul par éléments finis est également entré dans les mœurs. Avec l'avènement des méthodes de calculs non linéaires, il est devenu possible de modéliser fidèlement le comportement d'une structure en béton armé.

De par son comportement non homogène, le béton est un matériau très difficile à modéliser, particulièrement son comportement en traction. Il existe deux façons de modéliser le béton en traction : la méthode discrète qui tente de reproduire la propagation de la fissure individuellement les unes et les autres, et la méthode « étalée » qui simule un comportement global du béton en traction. La grande complexité de la méthode discrète amène la plupart des logiciels à utiliser le deuxième procédé. Mis à part le problème du béton, d'autres difficultés entrent en compte lorsque l'on modélise un élément de structure en béton armé, de surcroît s'il est renforcé par des matériaux composites collés. Les différents paramètres de liaisons, d'adhérences et d'interfaces entre les matériaux sont en effet complexes à modéliser ou sont encore mal connus. Là encore, la plupart des études déjà réalisées font des simplifications (Buyle-Bodin F, David E et Rageau E). Les armatures sont représentées par une ligne sans prendre en compte l'adhérence au béton (considéré parfaitement liée) et la couche d'adhésif entre le béton et RFP est généralement négligée. Certaines études, visant à comprendre un phénomène bien particulier comme la délamination [Yang Z.J, Chen J.F et Proverbs D 2003], ont développé des méthodes particulières qui modélisent plus fidèlement la structure.

III.4.1.1 Méthodologie

Pour analyser en détail les techniques de renforcement, Fabrice Conus et Reni Suter, ont entrepris une étude expérimentale sur des poutres de section carrée (400×400mm) en béton armé renforcées par des tissus en aramide (kevlar) appliqués en différentes couches dans la direction longitudinale et transversale. Le tableau (III.1) illustre les différentes poutres.

	PK1	PK2	PK3	PK4
Armature	8 Ø 20	8 Ø 20	8 Ø 20	8 Ø 20
Etriers	Ø 8	Ø 8	Ø 8	Ø 8
espacement [mm]	s = 300	s = 300	s = 300	s = 300
Renforcement	-	Kevlar® type AK-60	Kevlar® type AK-60	Kevlar® type AK-60
longitudinal	-	**2 couches**	**3 couches**	**4 couches**
transversal	-	2 couches	2 couches	2 couches

Tableau (III.1) : renforcement des poutres d'essais

Les poutres d'une longueur $L = 5{,}20m$, sont sollicitées par deux charges concentrées aux tiers de la portée (figure III.25), ce qui permet d'analyser la partie centrale soumise à la flexion pure, sans l'influence d'un effort tranchant.

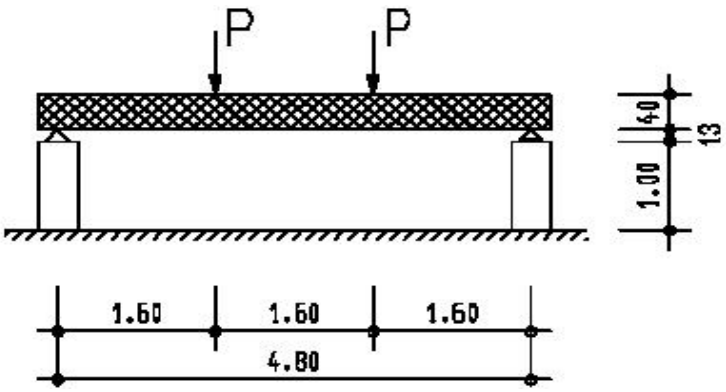


Figure III.25 : Essais de flexion

Ensuite, une modélisation en 2D est effectuée à l'aide du logiciel d'élément fini ADINA (Automatic Dynamic Incremental NonLinear Analysis) figure (III.26).

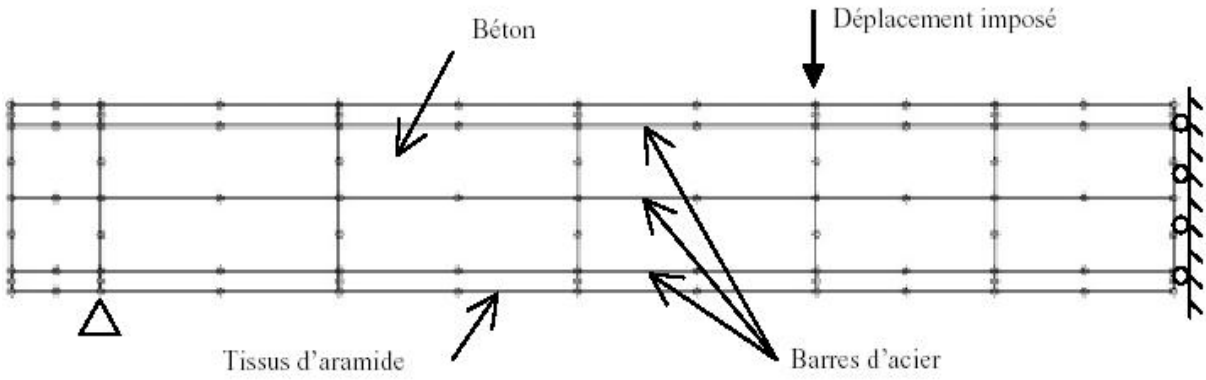


Figure III.26 : Modélisation numérique en 2D.

Les résultats des essais de flexion sont présentés dans la figure (III.27). Les charges de ruines atteintes par les poutres PK2 et PK3 augmentent considérablement par rapport à la poutre de référence PK1, nous remarquons que la quatrième couche de tissus n'apporte plus une contribution par rapport à l'élément PK3. En ce qui concerne la flèche, on observe également une augmentation considérable en fonction des couches de tissus en Kevlar appliquées.

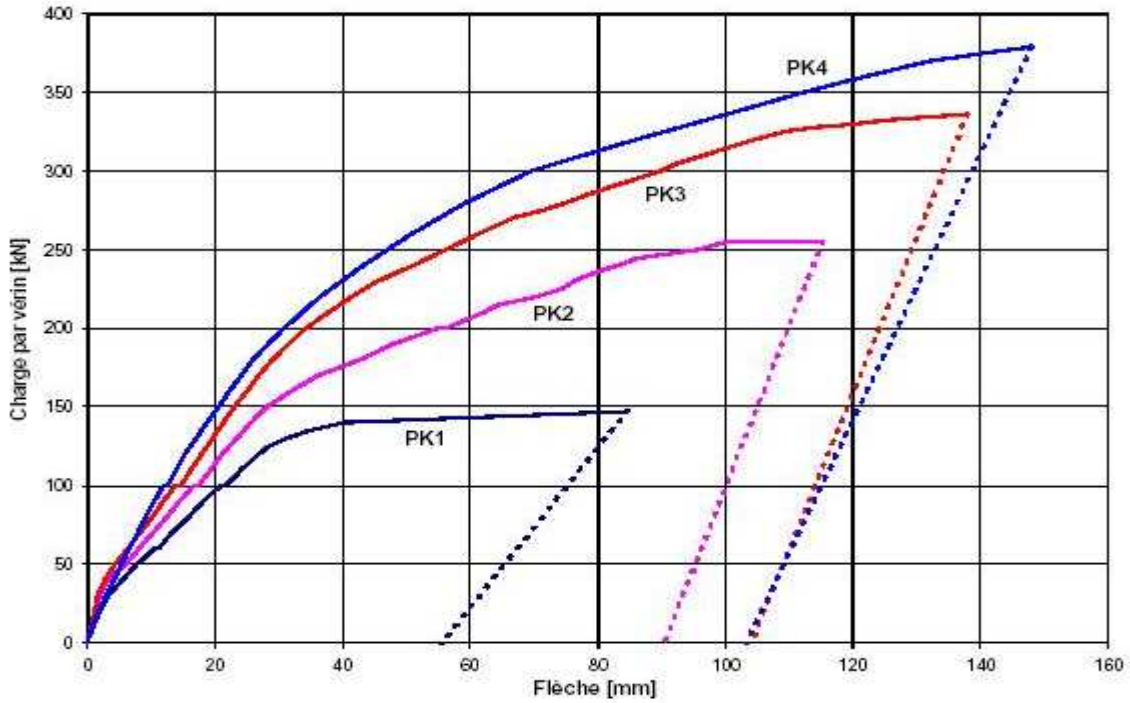


Figure III.27 : Evolution des flèches.

Concernant la modélisation numérique, les graphes de la figure (III.28) comparent les résultats numériques et expérimentaux. Nous remarquons clairement que le comportement global de la modélisation numérique est proche de celui des essais.

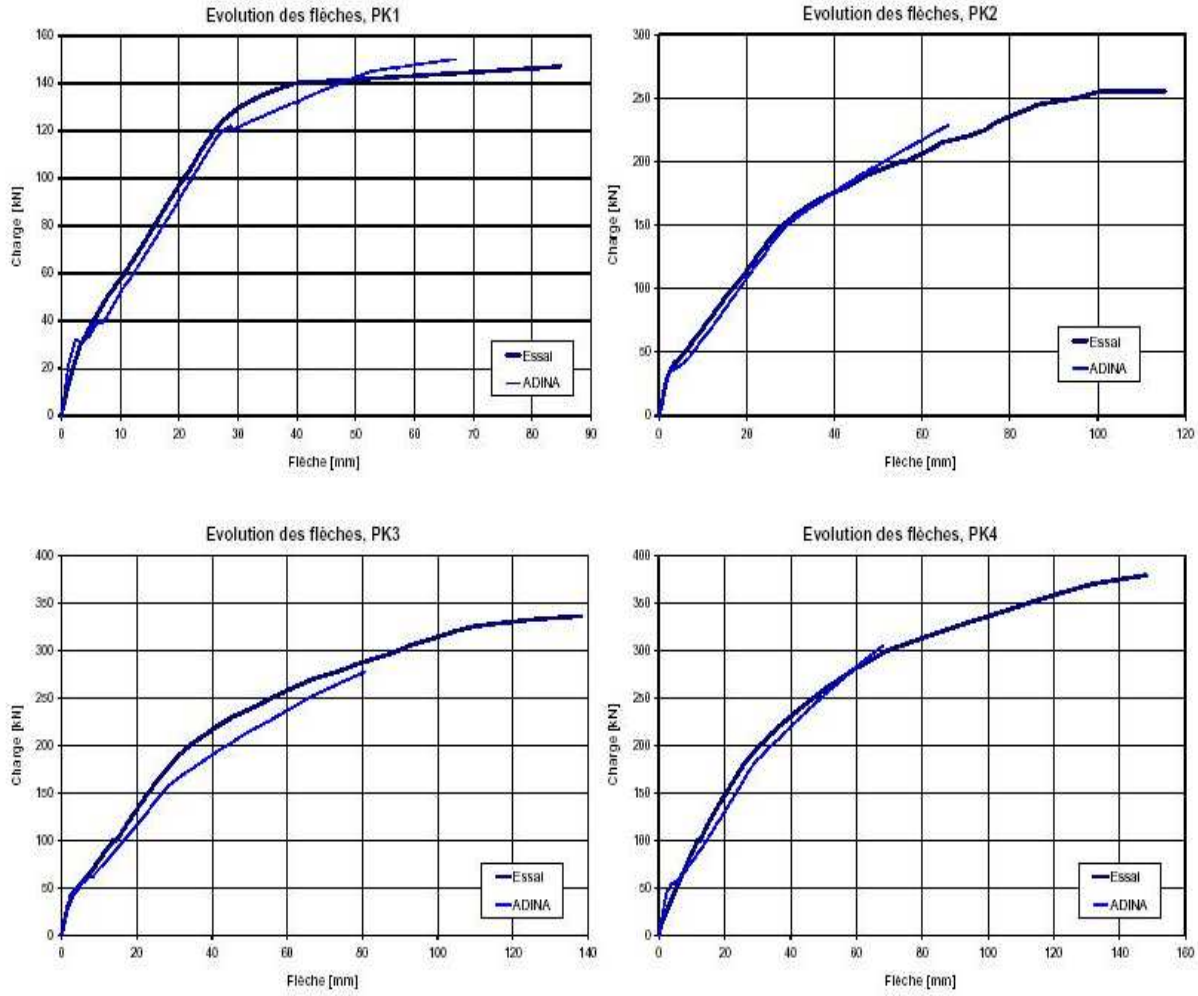


Figure III.28 : Comparaison entre les essais et le calcul numérique.

III.5 COMPOSITES STRATIFIES

III.5.1. Effet thermomécanique sur les stratifiés d'empilement anisotrope

La connaissance du comportement mécanique du matériau composite sous les effets conjugués de contraintes et de variations de température permet de prévenir sa rupture, d'améliorer les procédés de fabrication et de résoudre les problèmes de durée de vie.

Les recherches théoriques et expérimentales sur la mécanique des matériaux composites ont permis de proposer des critères de résistance développés soit par l'approche de la micromécanique, soit par celle de la macromécanique. Dans la première, les critères de résistance sont établis en considérant les propriétés des composants du matériau et des interfaces. Ballrani et Ahmed **[32]** ont développé un modèle mathématique pour prévoir la résistance et les caractéristiques micromécaniques de rupture d'un matériau composite à fibres continues et de matrice en céramique, et optimiser ainsi la propagation de la fissure par la méthode des éléments finis. Christensen trouve que cette

approche est encore limitée par des hypothèses restrictives concernant la composition du matériau, mais elle lui a permis d'obtenir des résultats fiables pour des types particuliers de composites.

Dans l'approche macromécanique, purement phénoménologique, le matériau structuré est considéré comme un solide homogène anisotrope et les études consacrées aux critères de résistance, qui sont basés sur la rupture totale de l'éprouvette. Camacho et al **[6]** ont utilisé un modèle mathématique permettant d'étudier l'influence de l'orientation et de la nature du renfort, géométrie et degré d'anisotropie sur les prévisions des coefficients de dilatation thermique et modules élastiques d'un matériau composite hybride. F. Mili et B. Necib ont présenté un travail qui permet de prévoir le comportement thermomécanique et la détermination des différentes zones d'endommagement du matériau composite hybride à renforcement unidirectionnel verre-carbone/ époxyde. Cette étude est réalisée sur des stratifiés symétriques et antisymétriques réguliers pour les différentes températures.

Une approche mathématique basée sur le critère de rupture de Tsai-Hill et la théorie de contrainte maximale, est mise au point pour prévoir l'effort de la membrane optimal que peut supporter le pli composant le moins résistant, et déterminer les différents modes de rupture et zones d'endommagement des plaques stratifiées.

III.5.2. Caractérisation du comportement d'un stratifié [23]

Dans le domaine de linéarité et en admettant que la température est uniforme dans tout le volume considéré ; il est possible de calculer, à partir de la loi de Hooke-Duhamel, la déformation d'un pli sous l'effet conjugué de la contrainte et la variation de la température :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.42)}$$

S_{ij} étant les coefficients de la matrice de rigidité, α_1 et α_2 sont les coefficients de dilatation thermique à 20 °C.

L'action d'une sollicitation extérieure provoque donc, en tout point de la surface moyenne du stratifié des déformations planes ε_{ij} et des courbures k_{ij}, donc la loi du

comportement thermomécanique du stratifié (figure III.29) est donnée par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{23} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{23} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} \qquad \text{(III.43)}$$

Dans laquelle les rigidités de membrane A_{ij}, les rigidités de couplage B_{ij} et les forces thermiques N_{ij}^T sont obtenues respectivement par les relations suivantes :

$$A_{ij} = \frac{h}{N} \sum_{K=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \qquad \text{(III.44)}$$

$$B_{ij} \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_K \left(z_K^2 - z_{K-1}^2\right) \qquad \text{(III.45)}$$

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_K \Delta T dz \qquad \text{(III.46)}$$

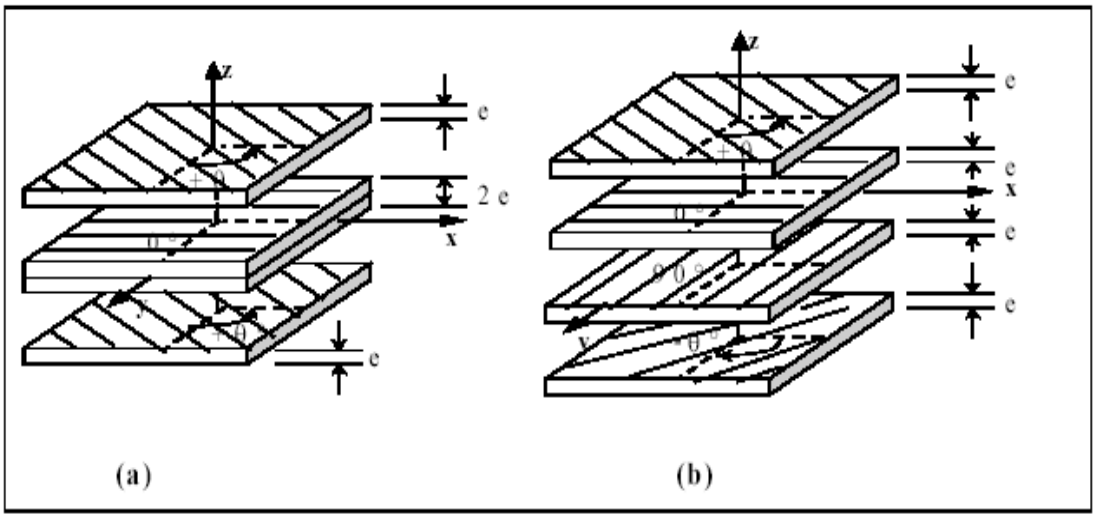


Figure III.29 : Définition des systèmes d'axes pour une plaque
(a) stratifié symétrique $[\theta/0°]_{2S}$, (b) stratifié antisymétrique $[\theta/0°/90°/-\theta]$

Les plaques composites hybrides verre-carbone/époxyde permettent d'améliorer les performances thermomécaniques du matériau figure (III.30). Le choix d'une séquence d'empilement symétrique entraîne l'élévation de ces caractéristiques par rapport à l'antisymétrique. Par ailleurs, le chargement en traction des plaques composites $[\theta/0°]_{2S}$ et

[θ/0°/90°/-θ] se trouvant initialement à la température ambiante (figure III.31), provoque une croissance de leurs résistances limites lorsque T passe de –100°C à 200°C (figure III.30) et θ s'éloigne de 0°.

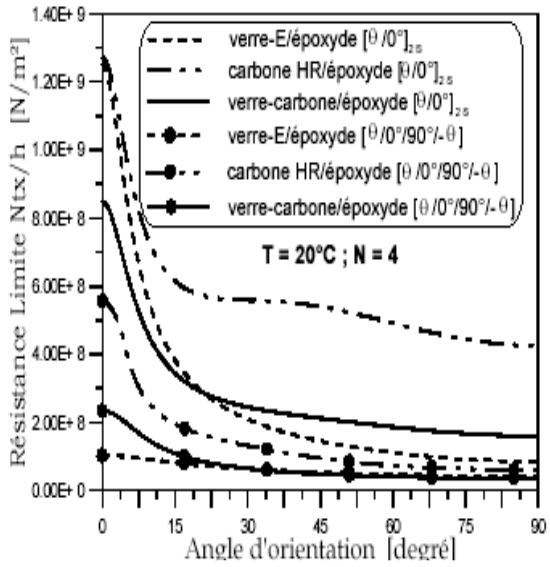


Figure III.30 : Variation de la résistance à la rupture en traction, à T=100°C, en fonction de l'orientation des fibres de différentes plaques stratifiées.

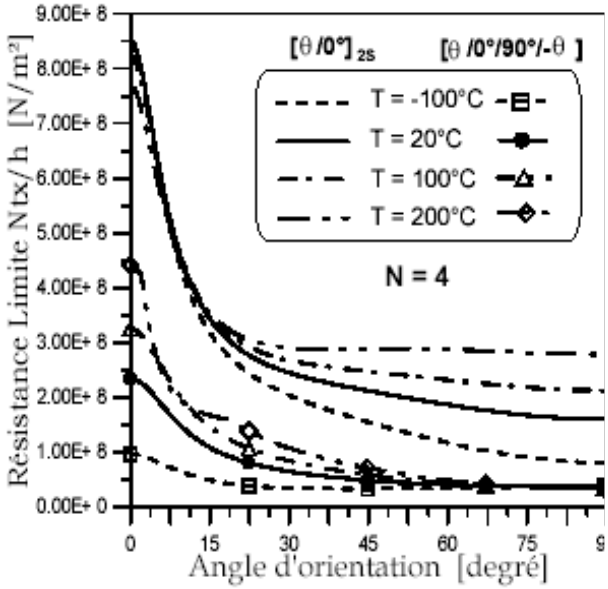


Figure III.31 : Comparaison des résistances à la rupture en traction, pour différentes températures, des plaques composites hybrides.

III.5.3. Prévision de la rupture [22]

L'évolution de la tenue du matériau hybride verre-carbone/époxyde, à des températures d'utilisation différentes et à l'effort de traction, est basée sur un calcul de prévision de sa résistance limite qu'il peut supporter lors de son chargement. Le critère de rupture de Tsai-Hill sera donc appliqué pour chaque pli composant :

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}+\left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2\le 1 \qquad \text{(III.47)}$$

X et Y sont respectivement les contraintes de rupture en traction du pli [0°] et [90°]. S est la contrainte de rupture en cisaillement dans le plan (1,2) du pli [0°].

Il n'y a pas donc de rupture tant que les contraintes régnant dans le pli ne dépassent pas les contraintes limites.

A partir des spectres des efforts de membrane limites, représentés sur la figure (III.32), on distingue trois modes de rupture de la plaque composite $[\theta/0°]_{2S}$. La zone I, correspondre à la rupture en traction des fibres unidirectionnelles, et la zone III, regroupant les plis extérieurs responsables de la ruine du matériau par cisaillement de la

matrice époxyde parallèlement aux fibres, les fissures s'élargissent chaque fois la température augmente. Au fur et à mesure que θ s'approche de 90°, le mode de rupture change vers une fissuration produite par traction de la résine parallèle au renfort. Cette zone II devient plus étroite lorsque la température croit. Part ailleurs, le stratifié antisymétrique [θ/0°/90°/-θ] présente une rupture par la traction de la matrice de pli intérieur orienté à 90°.

La comparaison du comportement mécanique des plaques composites à un nombre de plis croissant (N=4, 6, 8, 10 et 20) et à T=100°C est donnée par la figure (III.33) ; elle montre que la résistance à la rupture de la plaque devient important à chaque fois que le nombre de plis en carbone HR/époxyde N_c devient supérieur à celui des plis en verre-E/époxyde.

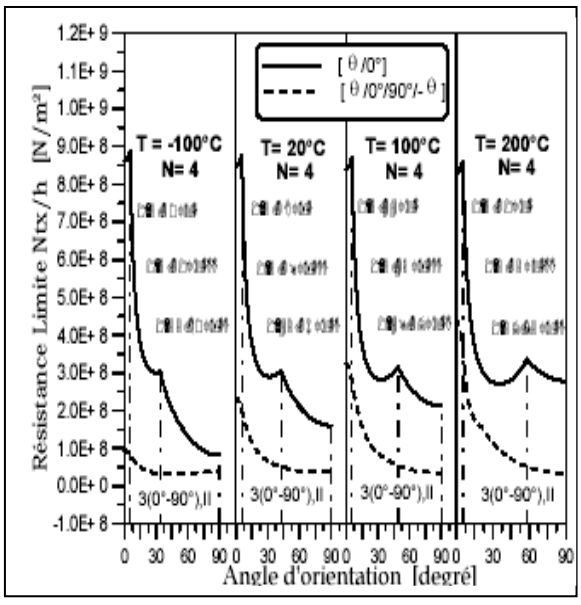


Figure III.32 : Evolution de différentes zones d'endommagement, à T=100°C

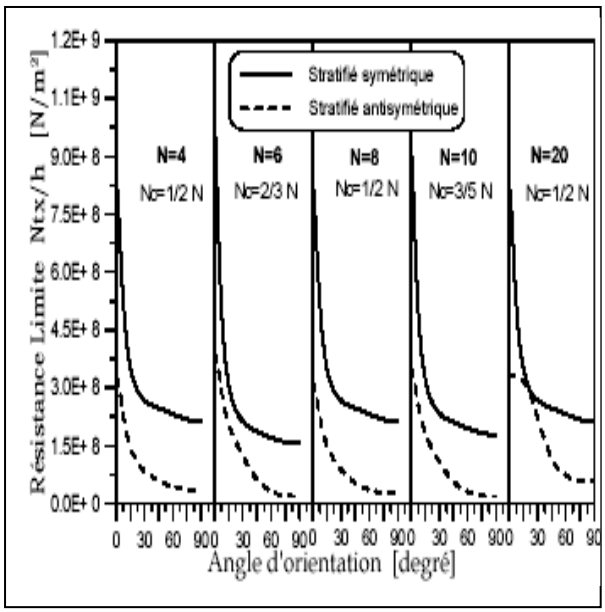


Figure (III.33) : Comparaison des résistances à la rupture en traction, à T=100°C

Les évolutions de la déformation globale des plaques composites $[90°/0°]_{2S}$, [90°/0°/90°/0°], $[45°/0°]_{2S}$ et [45°/0°/90°/-45°] en fonction de la variation de l'effort de traction et à la température 100°C, sont illustrées dans les figures (III.34 et III.35). Ces courbes présentent une forme linéaire (phase élastique) jusqu'à la rupture, où l'adaptation plastique est absente. Lorsque le stratifié est bidimensionnel, il ne présente pas de distorsion angulaire et son comportement mécanique est semblable à celui des matériaux

isotropes. Lorsque θ = 45°, on constate des distorsions angulaires non nulles et plus importantes que les déformations linéiques.

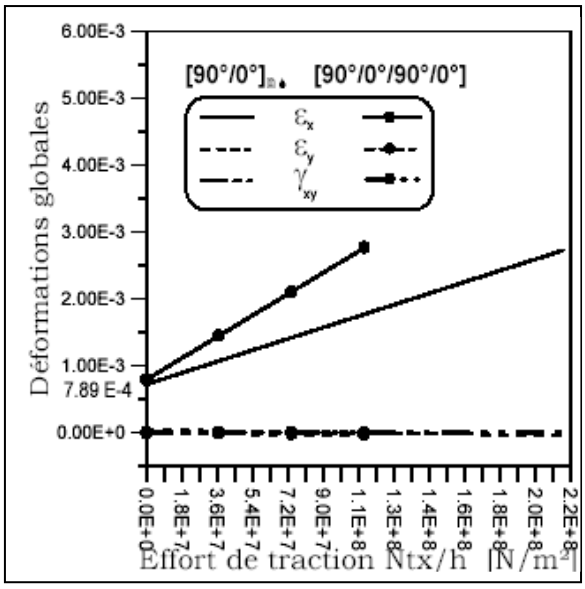


Figure III.34 : Courbe Traction-déformations des plaques stratifiées $[90°/0°]_{2S}$ et [90°/0°/90°/0°] à T=100°C

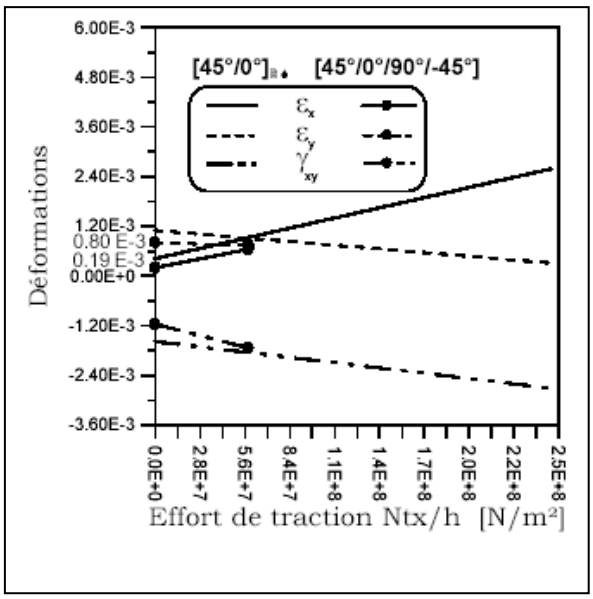


Figure III.35 : Courbe traction-déformations des plaques stratifiées $[45°/0°]_{2S}$ et [45°/0°/90°/-45°] à T=100°C

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement quelques modèles de modélisation et méthodes de calcul pour la prédiction du comportement à partir des caractéristiques de différents constituants du matériau composite.

Dans la suite, nous proposons une méthode de caractérisation du comportement de matériau composite stratifié, s'appuyant sur une analyse analytique. Dans cette étude, nous illustrons l'influence des constituants, orientations et de la fraction volumique sur le comportement global du pli unidirectionnel, puis nous étudions l'influence de différentes orientations et de l'emplacement de plis dans le stratifie sur le comportement global de la structure multicouche.

Chapitre IV :

Etude de l'influence de l'orientation des fibres sur les composites UD et stratifiés

IV.1 Introduction

Les matériaux composites occupent une place de plus en plus importante dans la réalisation de structures à hautes performances mécaniques (aérospatiale, aéronautique, automobile, biomécanique, …). De telles utilisations doivent nécessairement s'accompagner d'une bonne connaissance du comportement du matériau, de manière à déterminer et à choisir le type de renforcement qui permet d'avoir des propriétés mécaniques de façon optimale. A cet effet, nous avons effectué une étude comparative sur la caractérisation analytique du comportement des composites unidirectionnels (verre E / époxyde, Kevlar 49 / époxyde, graphite HR/ époxyde, graphite HM/ époxyde) à différentes dispositions de renforts, avec des résultats expérimentaux. Dans ce que il suit nous exposons la théorie des matériaux composites utilisée.

IV.2 Matériaux composites unidirectionnels :

IV.2.1 Propriétés mécaniques des matériaux composites

L'analyse d'une structure composite est plus complexe que celle d'un matériau traditionnel, métallique par exemple. Cela est dû au caractère hautement anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, aussi bien en raideur qu'en résistance, assurées par les fibres. Les propriétés transverses peuvent être d'un ordre de grandeur plus faible. Or, si l'on excepte quelques cas particuliers tels les câbles ou les tirants, une structure doit supporter des efforts dans plusieurs directions, et le matériau constitutif correspondant doit être obtenu par la mise en œuvre d'arrangements de couches soigneusement dimensionnées et orientées **[13]**.

IV.2.2 Relation contrainte-déformation d'un composite unidirectionnel

A. Loi de Hooke en axes propres [13,14]

La loi de Hooke généralisée d'un matériau composite unidirectionnel peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.1)}$$

Avec : 1, 2 et 3 directions de symétrie (figure IV.1),

E_i : Module d'Young dans la direction i.

ν_{ij} : Coefficient de Poisson dans le plan correspondant.

G_{ij} : Module de cisaillement dans le plan correspondant.

ε_j : Déformation relative dans la direction j .

γ_{ij} : Glissement de cisaillement dans le plan correspondant.

σ_i : Contrainte dans la direction i .

τ_{ij} : Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant.

Pour raisons de symétrie :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}$$

Cette matrice, qui permet d'obtenir les déformations relatives connaissant les contraintes, est généralement appelée matrice des souplesses, et notée $[S_{ij}]$. La matrice inverse, notée $[C_{ij}]$, est généralement appelée matrice des complaisances (ou des rigidités). Elle permet d'obtenir les contraintes en fonction des déformations relatives. Compte tenu de la symétrie de la matrice, neuf constantes sont nécessaires pour décrire le comportement du matériau s'il n'est pas isotrope transverse. Dans la plupart des cas, le matériau n'est utilisé que dans un plan, et sa relation de Hooke généralisée se simplifie grandement dans la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.2)}$$

Soit :

$$[\varepsilon_i] = [S_{ij}][\sigma_j] \qquad \text{(IV.3)}$$

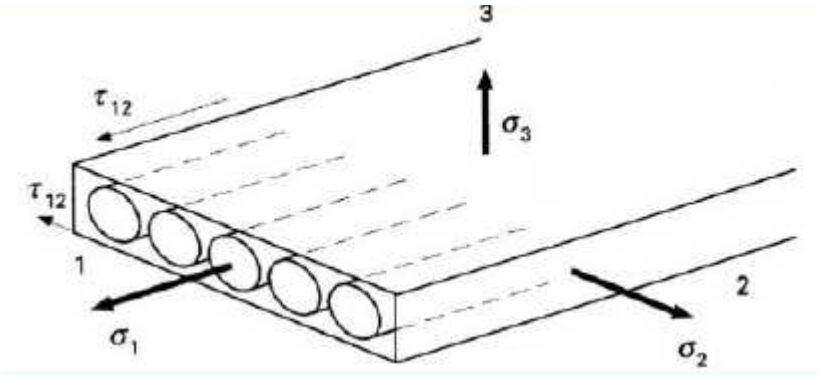


Figure IV.1 : Pli composite unidirectionnel.

Ou inversement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.4)}$$

Soit :

$$[\sigma_j] = [C_{ij}][\varepsilon_i] \qquad \text{(IV.5)}$$

Les constantes qu'il est nécessaire de déterminer sont alors au nombre de quatre : le module d'Young sens fibres E_1, le module d'Young sens transverse E_2, le coefficient de cisaillement G_{12} et le coefficient de Poisson principal ν_{12}. Afin de déterminer ces différentes constantes, plusieurs méthodes peuvent être utilisées :

- La méthode expérimentale est en principe la meilleure, mais elle nécessite la réalisation d'éprouvettes et de séries de mesures, inabordables dans les premiers stades d'étude.

- De nombreux ouvrages fournissent des fourchettes classiques de propriétés pour les principaux composites utilisés dans l'industrie **[14]**.

- Les méthodes de calcul par homogénéisation font appel à des théories complexes et nécessitent la conduite de calculs informatiques parfois non négligeables **[15]**.

- Les méthodes d'estimation par formules approchées **[16] [15]**.

Quelque que soit les méthodes retenues et leurs précisions, il ne faudrait pas négliger un phénomène important qui pourrait se produire lorsque la structure est mise sous chargement extensif, la première fois lors d'un essai de réception par exemple, et ensuite au cours de sa vie opérationnelle. La microfissuration de la matrice, qui va apparaître au niveau des plis élémentaires en fonction des contraintes transverses et de cisaillement induites, généralement bien avant la ruine proprement dite de la structure se traduira par une chute des valeurs des divers modules. Cette chute est faible pour le module d'Young dans le sens des fibres et conséquente dans les autres directions **[13]**.

B. Transformation de coordonnées

Le problème traité dans ce paragraphe consiste à déterminer la relation contrainte-déformation d'un matériau en dehors de ses axes propres (figure IV. 2). La mécanique élémentaire exprime les contraintes ou les déformations dans les axes (x, y), faisant un angle θ avec les axes de référence (1, 2), par les relations (IV.6 et IV.7) :

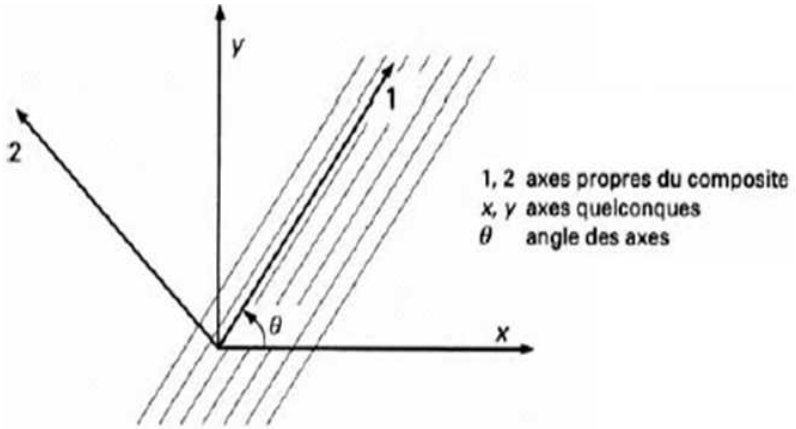


Figure IV.2 : Changement d'axes

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}/2\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.7)}$$

Soit $[T]^{-1}$ la matrice de passage (on remarque que $\left[T(-\theta)\right]^{-1}=\left[T(\theta)\right]$. Après développements mathématiques, si l'on pose $\left[\overline{C}_{ij}\right]=[T]^{-1}\left[C_{ij}\right][T]^{-t}$, la nouvelle relation contrainte-déformation dans les axes (x, y) s'écrit :

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\left[\overline{C}_{ij}\right]\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.8)}$$

Ou inversement $\left(\left[\overline{S}_{ij}\right]=\left[\overline{C}_{ij}\right]^{-1}\right)$:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\left[\overline{S}_{ij}\right]\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} \qquad \text{(IV.9)}$$

Les coefficients de la matrice transformée $\left[\overline{C}_{ij}\right]$ s'écrivent, en fonction des coefficients de la matrice dans les axes propres $\left[C_{ij}\right]$ et de l'angle θ :

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_{11} &= C_{11}\cos^4\theta + 2\left(C_{12}+2C_{33}\right)\sin^2\theta c\,\mathrm{os}^2\theta + C_{22}\sin^4\theta \\
\overline{C}_{12} &= \left(C_{11}+C_{22}-4C_{33}\right)\sin^2\theta c\,\mathrm{os}^2\theta + C_{12}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) \\
\overline{C}_{22} &= C_{11}\sin^4\theta + 2\left(C_{12}+2C_{33}\right)\sin^2\theta c\,\mathrm{os}^2\theta + C_{22}co\,\mathrm{s}^4\theta \\
\overline{C}_{13} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{33}\right)\sin\theta c\,\mathrm{os}^3\theta + \left(C_{12}-C_{22}+2C_{33}\right)\sin^3\theta c\,\mathrm{os}\,\theta \\
\overline{C}_{23} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{33}\right)\sin^3\theta c\,\mathrm{os}\,\theta + \left(C_{12}-C_{22}+2C_{33}\right)\sin\theta c\,\mathrm{os}^3\theta \\
\overline{C}_{33} &= \left(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{33}\right)\sin^2\theta c\,\mathrm{os}^2\theta + C_{33}\left(\sin^4\theta + c\,\mathrm{os}^4\theta\right)
\end{aligned}
\qquad \text{(IV.10)}
$$

On rappelle, pour des raisons de symétrie que :

$$\overline{C}_{21}=\overline{C}_{12},\quad \overline{C}_{31}=\overline{C}_{13},\quad \overline{C}_{32}=\overline{C}_{23}$$

IV.3 Simulation numérique

Dans cette partie on a étudié une structure unidirectionnelle avec divers constituants de base (voir le tableau ci-dessous), afin d'illustrer l'influence de chacun des constituants de base et de leurs orientations, ainsi que leurs fractions volumiques sur le comportement global du pli unidirectionnel, en utilisant la loi de mélange (Voir annexe A)

Références	Matrice	Fibre
Composite 1	résine époxy	Verre
Composite 2	résine époxy	Kevlar 49
Composite 3	résine époxy	Graphite HR
Composites 4	résine époxy	Graphite HM

Tableau IV.1 : Présentation des composites UD étudie

IV.3.1 Résultats obtenus

Les résultats présentés en figure (IV.3) et (IV.4) montrent la variation des modules: de Young longitudinale et transversale, de coefficient de poisson et le module de cisaillement, en fonction de la nature et des fractions volumiques de fibres et de leurs orientations.

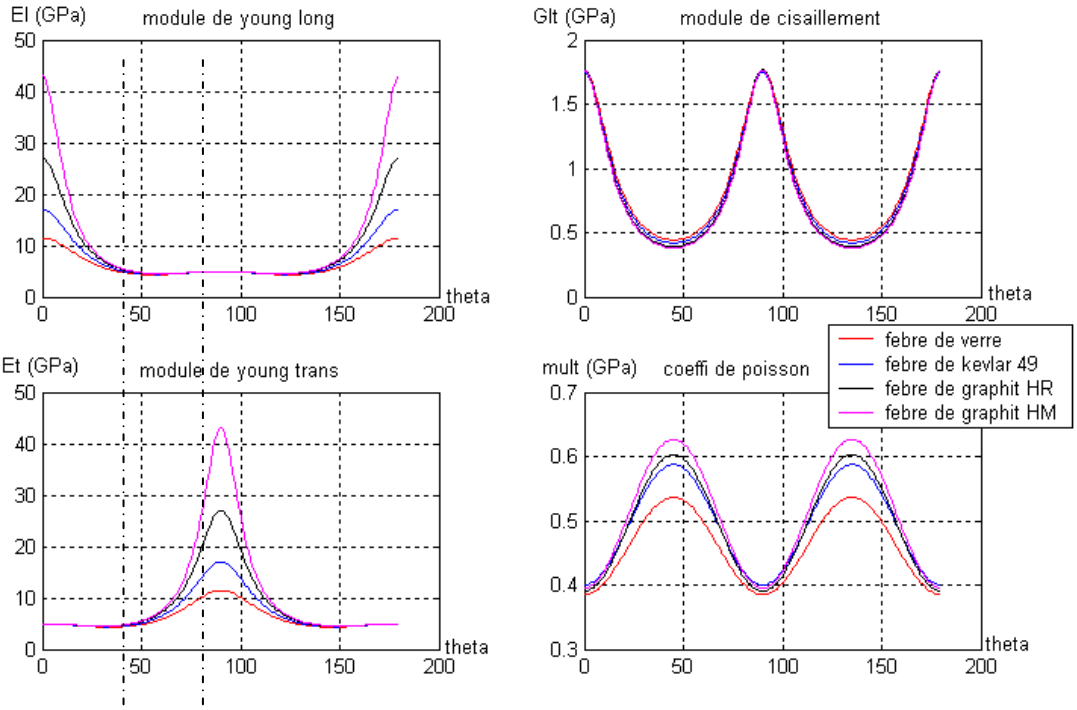


Figure IV.3 : Variation des caractéristiques d'un composite unidirectionnel en fonction de l'orientation des fibres (Vf = 10 %)

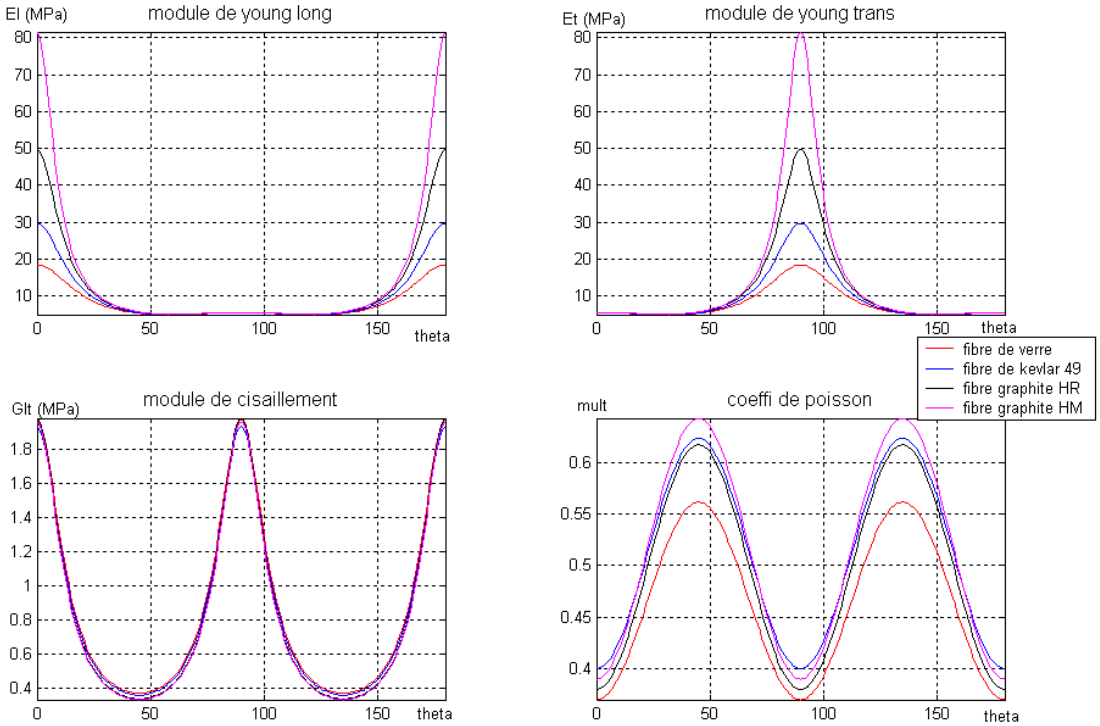


Figure IV.4 : Variation des caractéristiques d'un composite unidirectionnel en fonction de l'orientation des fibres (Vf = 20 %)

IV.3.2 Interprétation des résultats

Dans les figures (IV.3) et (IV.4), nous remarquons une variation symétrique de différents paramètres caractérisant le pli unidirectionnel par rapport à thêta = 90°, et cette symétrie est vérifiée pour les différentes natures de fibres (Verre, Kevlar 49, Graphite HR et Graphite HM). Cependant le module de cisaillement et le coefficient de poisson présentent à leurs tours une autre symétrie à thêta =45°.

Nous constatons également que :

- ✓ Le module de Young longitudinal E_{xx} décroît d'une manière monotone de [0° à 90°], il enregistre ces valeurs maximales à 0° et 180°,
- ✓ Le module de Young transversal E_{yy} varie contrairement inverse au module longitudinal et sa valeur maximale est enregistré à thêta = 90°,
- ✓ Le module de cisaillement G_{LT} enregistre sa valeur maximale à thêta = 45°, et sa variation est symétrique de part et d'autre de cette valeur. Nous constatons également que les valeurs du module de glissement G pour les différentes natures de fibres sont très proches les unes des autres.
- ✓ Le coefficient de poisson ν_{LT} prend une valeur minimale à thêta = 0°, il croît jusqu'à thêta = 45°.

Par conséquent, la fraction volumique a un apport important sur le comportement des composites d'une manière exhaustive, de fait que l'augmentation de cette dernière entraîne l'augmentation de tout les paramètres (module de Young longitudinal et transversal, module de glissement) et une diminution de déformation transversal (coefficient de poisson) (voir la figure IV.3 et IV.4).

Le tableau ci-dessous illustre l'influence de la fraction volumique en fonction de l'orientation de fibres (fibres de verre):

V_f	EHL				EHT				ν_{xy}				G_{xy}			
	0°	30°	45°	90°	0°	30°	45°	90°	0°	30°	45°	90°	0°	30°	45°	90°
20%	18,40	7,20	5,31	5,54	5,54	4,95	5,31	18,40	0,37	0,51	0,56	0,37	1,97	0,46	0,36	1,97
40%	32,30	10,05	7,12	7,20	7,20	6,51	7,12	32,30	0,34	0,50	0,56	0,34	2,57	0,34	0,26	2,57
60%	46,20	14,48	10,26	10,30	10,30	9,37	10,26	46,20	0,31	0,48	0,54	0,31	3,70	0,23	0,17	3,70

Tableau IV.2 : Influence de la fraction volumique de fibres de verre sur les caractéristiques d'un pli

IV.3.3 Etude comparative

Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux donnés par le fabriquant de composites unidirectionnels conçu avec : fibre de Verre/ époxy, Kevlar/ époxy, Graphite HM/époxy et Graphite HR/ époxy.

Les tableaux suivants donnent les valeurs expérimentales et théoriques des modules d'élasticité pour les quatre types de composite, à une fraction volumique de fibres de 60% et à une orientation de 0° de fibres.

Propriétés	**Verre E**	**Graphite**		**Kevlar 49**
		HM	**HR**	
$\mathbf{E_{xx}}$	46,20	235,8	139,8	79,8
$\mathbf{E_{yy}}$	10,3	11,05	10,92	10,69
$\boldsymbol{\nu_{LT}}$	0,31	0,37	0,34	0,4
$\mathbf{G_{LT}}$	3,7	3,57	3,81	3,33

Tableau IV.3 : Valeurs théoriques de caractéristiques mécaniques de composites à fibres unidirectionnelles à 60% de fibres.

Propriétés	Verre E	Graphite		Kevlar 49
		HM	HR	
E_{xx}	46	230	159	84
E_{yy}	10	14,4	14,3	5,6
ν_{LT}	0,31	0,32	0,32	0,34
G_{LT}	4,6	4,9	4,8	2,1

Tableau IV.4 : Valeurs expérimentales de caractéristiques mécaniques de composites à fibres unidirectionnelles à 60% de fibres.

D'après valeurs obtenues, nous remarquons une légère différence entre les valeurs expérimentales et théoriques obtenues par la loi des mélanges, ces différences peuvent être attribuées à:

- Une mauvaise adhérence entre les fibres et la matrice,
- Les constituants de pli sont supposés homogènes et isotropes,
- La distribution géométrique des constituants.

IV.4 Matériaux composites stratifiés

IV.4.1. Généralités

Cette partie est consacrée aux structures stratifiées, composées d'empilement de plis qui peuvent être de nature différentes : fibres continues ou discontinues enrobées dans une matrice, particules elles-mêmes noyées dans une matrice etc. dans le cas des fibres, les configurations peuvent être à leurs tours nombreuses : unidirectionnelles, bidirectionnelles tissées, distribuées de façon aléatoire etc. dans tous les cas, le pli représente l'entité de base et ces caractéristiques mécaniques sont fortement tributaires de la nature et de l'orientation du renfort. Un stratifié en matériaux composites résulte généralement de la superposition de plis dont les orientations diffèrent les uns par rapport aux autres. Le choix d'un agencement particulier des plis afin d'obtenir l'épaisseur et la rigidité souhaitée donne ce que l'on appelle la séquence d'empilement. Il à noter que dans beaucoup d'applications industrielles des composites sont utilisés en structures (plaques) minces. C'est le cas des voilures aéronautiques des panneaux, etc. le comportement pourra être considéré comme bidimensionnel **[13]**. Par contre dans certains domaines tels que les coques marines, les caissons des structures aéronautiques, spatiales, ferroviaires, de

certaines pièces en génie civil, les structures nécessitent d'avantage des stratifications épaisses. Dans ce cas, les épaisseurs ne peuvent être négligées et la prise en compte devient nécessaire. Ces remarques vont nous amener à distinguer deux grandes familles de modèles servant à décrire le comportement des structures stratifiées selon l'épaisseur dans le cas où cette épaisseur est faible par rapport à d'autres dimensions, les modèles sont issues de la théorie des plaques minces. Les différentes plaques confèrent au système, des déformations identiques dans chacun des plis. Le plan moyen devient plan de référence et la complexité des modèles provient du degré de raffinement que l'on souhaité introduire dans l'épaisseur de stratification. Néanmoins, l'écriture globale de ces modèles reste bidimensionnelle. Par contre si l'épaisseur ni plus aussi négligeable comparée aux autres dimensions, la description du comportement est complètement tridimensionnelle, dans ce cas un moyen pour décrire le comportement du stratifié consiste à identifier une cellule de base susceptible de se répéter selon l'épaisseur afin d'utiliser les théories d'homogénéisation **[2]**.

IV.4.2 Approche bidimensionnelle (en petite déformation)

A. Champ cinématique et déformation [13,14]

Le but de ces approches est de modéliser une plaque stratifiée, de structure tridimensionnelle, par une structure bidimensionnelle, cela sous-entend que l'épaisseur globale de la stratification reste faible comparée aux autres dimensions. Soit une plaque stratifiée composée de n plis empilés selon l'axe X_3 occupant un domaine $V = [-h/2, h/2] \times \Omega$ Comme le présente la figure (IV.5)

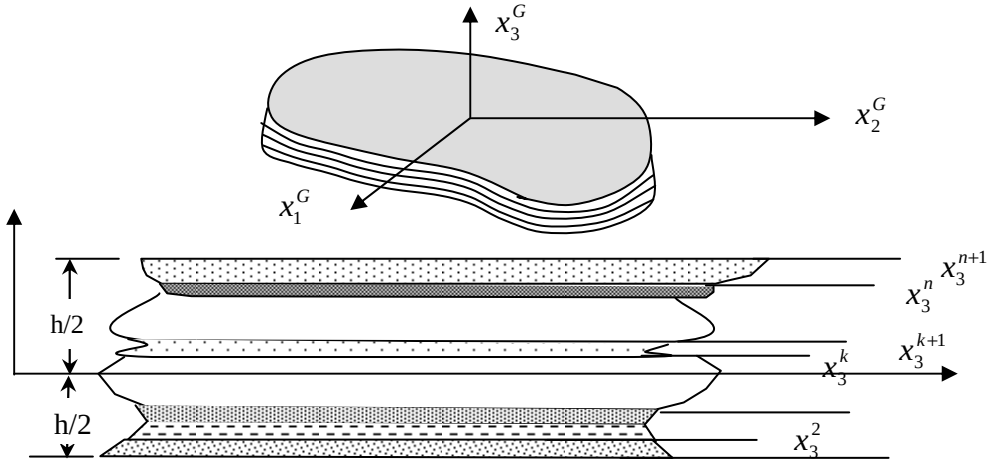


Figure IV.5 : Schématisation d'un stratifié

Dans le cas où la description du stratifié est ramenée à son plan moyen, le champ de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3) &= u_1(x_1,x_2,0)+x_3\phi_1(x_1,x_2)+---+x_3{}^n\varphi_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) &= u_2(x_1,x_2,0)+x_3\phi_2(x_1,x_2)+---+x_3{}^n\varphi_2(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) &= u_3(x_1,x_2,0)+x_3\phi_3(x_1,x_2)+---+x_3{}^{n-1}\varphi_3(x_1,x_2) \end{aligned} \qquad \text{(IV.11)}$$

Les théories que nous allons analyser se limitent aux champs cinématique du premier degré. La première connue sous le nom de son auteur Mindlin, utilise la réduction de l'expression (IV.11) au premier ordre, le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3) &= u_1^0(x_1,x_2)+x_3\phi_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) &= u_2^0(x_1,x_2)+x_3\phi_2(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) &= w(x_1,x_2) \end{aligned} \qquad \text{(IV.12)}$$

Les u_1^0, u_2^0, w, ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions inconnues à déterminer, ϕ_1 et ϕ_2 sont respectivement liées aux rotations des normales autours des axes x_1 et x_2 telles que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\phi_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}=\phi_2 \qquad \text{(IV.13)}$$

Les déformations se déduisent du champ de déplacement par dérivation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}=\varepsilon_1^0+x_3k_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_2^0}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}=\varepsilon_2^0+x_3k_2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}=0 \\ \varepsilon_4 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=\frac{\partial w}{\partial x_2}+\phi_2 \\ \varepsilon_5 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\phi_1 \\ \varepsilon_6 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}=\varepsilon_6^0x_3k_6 \end{aligned} \qquad \text{(IV.14)}$$

Avec $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \varepsilon_6^0$ les déformations de membrane, k_1, k_2, k_6 les déformations de courbure. Les déformations ε_4 et ε_5 caractérisent le glissement transversal.

B. Efforts généralisés résultants

Les efforts résultants se repartissent selon des efforts de membrane, des moments de flexion et de torsion ainsi que des efforts tranchants résultants de cisaillements dans l'épaisseur. Nous allons définir ces différentes quantités. Au niveau de chaque pli d'indice K, le comportement dans le repère global de la structure s'exprime à l'aide de la relation suivante **[13]** :

$$\left\{\sigma^G\right\}_k = \left[C(\theta)\right]_k \left\{\varepsilon^G\right\}_k \qquad \text{(IV.15)}$$

Cette dernière est obtenue après rotation autour de x_3 d'un angle θ caractérisant la différence d'orientation entre le repère principal du pli et le repère global de la stratification.

L'empilement résulte de la superposition de plaques parallèles impliquant des déformations identiques dans chacune d'elles. Les résultantes en membrane sont définies par :

$$N(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1^G \\ \sigma_2^G \\ \sigma_6^G \end{Bmatrix} dx_3 \qquad \text{(IV.16)}$$

ou de manière discrète par une sommation sur chacun des plis :

$$N(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_1^G \\ \sigma_2^G \\ \sigma_6^G \end{Bmatrix}_k dx_3 \qquad \text{(IV.17)}$$

ces efforts sont schématisés sur la figure suivante :

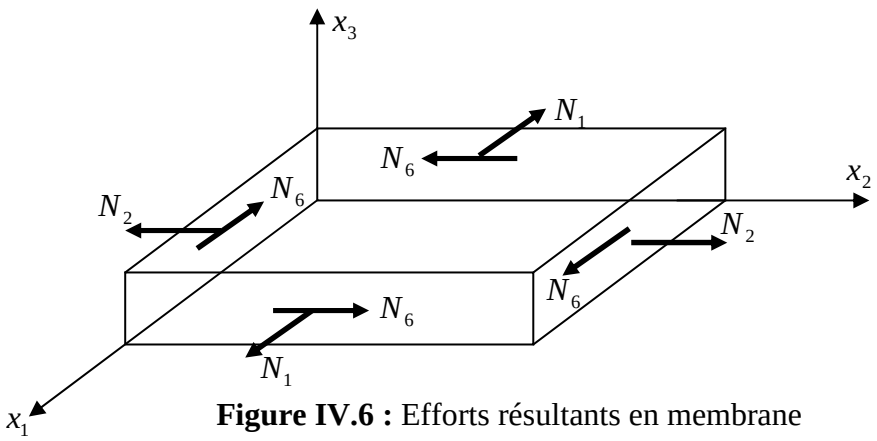


Figure IV.6 : Efforts résultants en membrane

Les moments résultants en flexion et en torsion s'expriment par la relation suivante :

$$M(x_1,x_2)=\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\\M_6\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{Bmatrix}\sigma_1^G\\\sigma_2^G\\\sigma_6^G\end{Bmatrix}x_3dx_3 \qquad \text{(IV.18)}$$

ou de manière discrète :

$$M(x_1,x_2)=\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\\M_6\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}\begin{Bmatrix}\sigma_1^G\\\sigma_2^G\\\sigma_6^G\end{Bmatrix}_k x_3dx_3 \qquad \text{(IV.19)}$$

ces efforts sont schématisés sur la figure (IV.7)

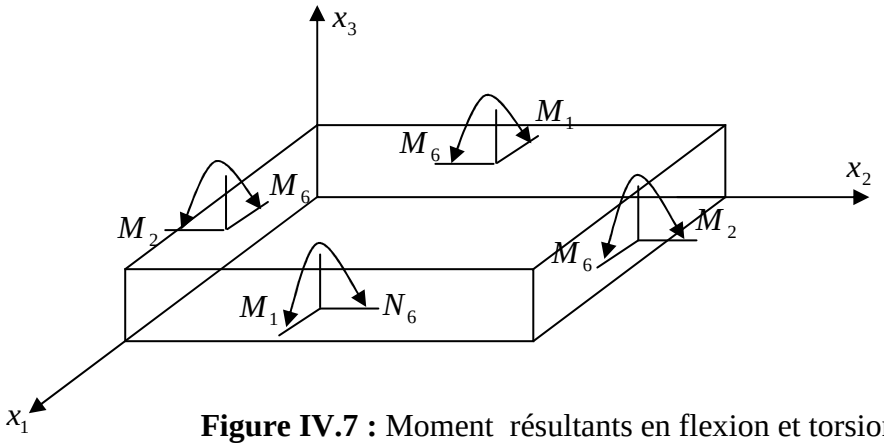


Figure IV.7 : Moment résultants en flexion et torsion

Les efforts tranchants résultants en cisaillement transversal (schématisés en figure IV.8) sont définis par une intégration selon l'épaisseur par la relation :

$$T(x_1,x_2)=\begin{Bmatrix}T_4\\T_5\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}\begin{Bmatrix}\sigma_4^G\\\sigma_5^G\end{Bmatrix}dx_3 \qquad \text{(IV.20)}$$

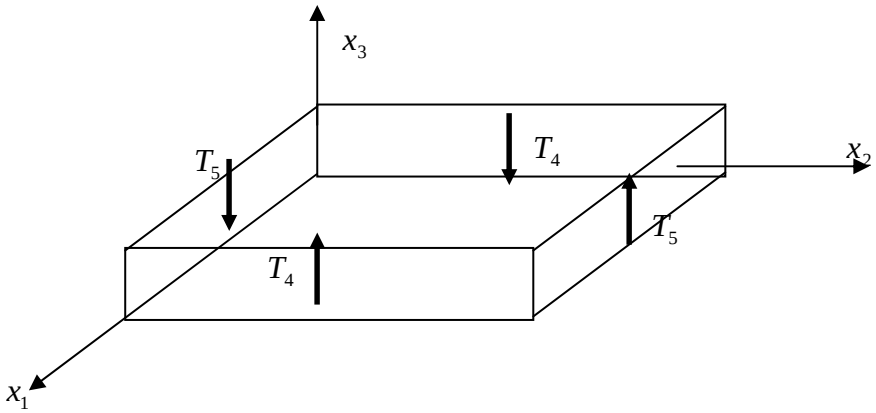


Figure IV.8 : Efforts tranchants résultants en cisaillement transversal

C. Comportement global d'une plaque stratifiée

La théorie de Mindlin fait l'hypothèse que les contraintes normales σ_3 sont négligeables dans le volume de la plaque par rapport aux autres composites de contraintes alors, dans ce cas la loi de comportement du k^{ième} pli écrite dans le repère global est comme suite :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ 0\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}(\theta) & C_{12}(\theta) & C_{13}(\theta) & 0 & 0 & C_{16}(\theta)\\ C_{12}(\theta) & C_{22}(\theta) & C_{23}(\theta) & 0 & 0 & C_{26}(\theta)\\ C_{13}(\theta) & C_{23}(\theta) & C_{33}(\theta) & 0 & 0 & C_{36}(\theta)\\ 0 & 0 & 0 & C_{44}(\theta) & C_{45}(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{45}(\theta) & C_{55}(\theta) & 0\\ C_{16}(\theta) & C_{26}(\theta) & C_{36}(\theta) & 0 & 0 & C_{66}(\theta)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.21)}$$

Donc, ce comportement dépend de l'orientation du pli par apport au repère global, alors la relation (IV.21) peut être réécrite ou séparant les contraintes et les déformations dans le plan, des contraintes et des déformations transversales, nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\\ --\\ \sigma_4\\ \sigma_5\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0\\ -- & -- & -- & -- & --\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45}\\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_6\\ --\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.22)}$$

Avec

$$Q_{\alpha\beta}=C_{\alpha\beta}-\frac{C_{\alpha 3}C_{\beta 3}}{C_{33}}(\alpha,\beta=1,2,3) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3=-\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_1+C_{23}\varepsilon_2+C_{36}\varepsilon_6)$$

La discontinuité de comportement d'un pli à l'autre implique celle des contraintes au passage des plis.

Les contraintes en membrane du pli k, s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix}\varepsilon_1^0\\ \varepsilon_2^0\\ \varepsilon_6^0\end{Bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_6\end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.22)}$$

et les contraintes de cisaillement s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_4\\ \sigma_5\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}C_{44} & C_{45}\\ C_{45} & C_{55}\end{bmatrix}_K\begin{Bmatrix}\varepsilon_4\\ \varepsilon_5\end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.23)}$$

On obtient le comportement global du stratifié par intégration des deux relations précédentes selon l'épaisseur de stratification. On aboutit ainsi aux équations constitutives entre les efforts généralisés et les déformations.

Les efforts résultants en membrane s'expriment par la relation suivante:

$$N(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}\left[Q_k\varepsilon^0(x_1,x_2)+x_3Q_kK(x_1,x_2)\right]dx_3 \qquad \text{(IV.24)}$$

En supposant le comportement du pli homogène, on obtient :

$$N(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\left[Q_k\varepsilon^0(x_1,x_2)\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}dx_3\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[Q_kk(x_1,x_2)\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}x_3dx_3\right] \qquad \text{(IV.25)}$$

ou de manière discrète :

$$N(x_1,x_2)=\left[\sum_{k=1}^{n}(x_3^{k+1}-x_3^k)Q_k\right]\varepsilon^0(x_1,x_2)+\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(x_3^{k+1})^2-(x_3^k)^2\right]Q_k\right]k(x_1,x_2) \qquad \text{(IV.26)}$$

Soit finalement :

$$N(x_1,x_2)=A\varepsilon^0(x_1,x_2)+Bk(x_1,x_2) \qquad \text{(IV.27)}$$

Les matrices A et B sont symétriques et s'expriment de la manière suivante :

$$A=\sum_{k=1}^{n}(x_3^{k+1}-x_3^k)Q_k \quad ; \quad B=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[(x_3^{k+1})^2-(x_3^k)^2\right]Q_k \qquad \text{(IV.28)}$$

ou de manière indicielle :

$$A_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{n}(x_3^{k+1}-x_3^k)(Q_{\alpha\beta})_k \;\; ; \;\; B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(x_3^{k+1})^2-(x_3^k)^2\right](Q_{\alpha\beta})_k \quad \alpha,\beta=1,2,6$$

On notera que les efforts dans le plan sont à la fois fonction des déformations de membrane, mais aussi des courbures en flexion et en torsion.

Donc les moments du flexion s'expriment comme suit :

$$M(x_1,x_2)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}}\left[x_3Q_k\varepsilon^0(x_1,x_2)+x_3^2Q_k(x_1,x_2)\right]dx_3 \qquad \text{(IV.29)}$$

ou de manière discrète :

$$M(x_1,x_2)=\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[(x_3^{k+1})^2-(x_3^k)^2\right]Q_k\right]\varepsilon^0(x_1,x_2)+\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[(x_3^{k+1})^3-(x_3^k)^3\right]Q_K\right]K(x_1,x_2)$$

soit

$$M(x_1, x_2) = B\varepsilon^0(x_1, x_2) + Dk(x_1, x_2)$$

Aux matrices précédentes vient s'ajouter la matrice $[D]$ symétrique, telle que :

$$D = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[(x_3^{k+1})^3 - (x_3^k)^3\right]Q_k \qquad \text{(IV.30)}$$

Les efforts tranchants s'expriment par :

$$T(x_1, x_2) = \begin{Bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_3^k}^{x_3^{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} dx_3 \qquad \text{(IV.31)}$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix} T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix}$$

Avec : $H_{\gamma\delta} = \sum_{K=1}^{n}(x_3^{K+1} - x_3^K)(C_{\gamma\delta})_K \qquad \gamma, \delta = 4{,}5$

Ces intégrations conduisent à exprimer les efforts et les moments généralisés en fonction des déformations dans le plan, des déformations transversales et des courbures. On obtient la loi de comportement d'une structure stratifiée sous forme matricielle.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \\ k_1^0 \\ k_2^0 \\ k_6^0 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.32)}$$

La matrice $[D]$ disparaît s'il y a symétrie mécanique et géométrique. De façon synthétique, on écrit la relation matricielle sous forme :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \varepsilon^T \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV.33)}$$

IV.4.3 Simulation numérique

A. Présentation et description du stratifié

La séquence étudiée, est composée d'un empilement symétrique de huit plis $[0/90/\pm45]_s$. le pli de base est constitué de fibres continues de carbone enrobées dans une

matrice époxy. Ce pli présente une anisotropie particulière dans son repère local, il vérifie l'isotropie de révolution autour de l'axe des fibres.

L'épaisseur totale du multicouche est suffisamment faible vis-à-vis des autres dimensions pour que l'on puisse appliquer l'hypothèse des contraintes planes. On suppose également que les plis sont parfaitement collés les uns aux autres.

Chaque pli d'épaisseur $e_k = h_{k+1} + h_k$ est repéré par l'angle θ_k que font les fibres avec l'axe X_1^G du repère de la structure.

Pour le problème étudié chaque pli a une épaisseur de 0,25 mm.

- $R\left(O, X_1^G, X_2^G, X_3^G\right)$: Repère de la structure.
- $R^k\left(O, X_1^k, X_2^k, X_3^k\right)$: Repère local d'orthotropie du pli *k*.
- L'axe X_1^k est pris parallèle à l'axe des fibres.
- L'axe X_3^G est confondu avec tous les axes X_3^k est perpendiculaires au plan moyen de la structures.

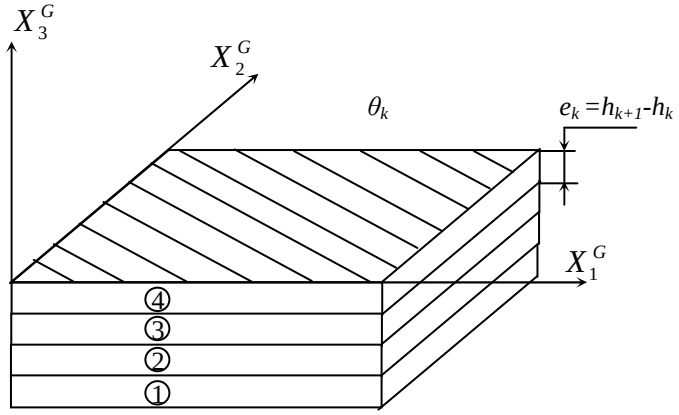


Figure IV.9 : Géométrie du stratifié étudie

La séquence d'empilement du stratifie de base étudié est décrite dans le tableau suivant :

θ_1, θ_8	θ_2, θ_7	θ_3, θ_6	θ_4, θ_5
0°	90°	45°	- 45°

Tableau IV.5: Séquence d'empilement de la structure de base étudiée

Dans ce qui suit, nous intéressons à l'étude de l'influence des différents orientations et de l'emplacement de plis dans le stratifié sur le comportement global d'une structure multicouche présentée ci-dessus, en se basant sur la théorie classique des stratifies de Mindlin développée précédemment (voir l'annexe B). Par conséquent, l'organigramme de la figure (IV.10), illustre les diverses étapes de modélisation du composite stratifié selon les différentes orientations de plis.

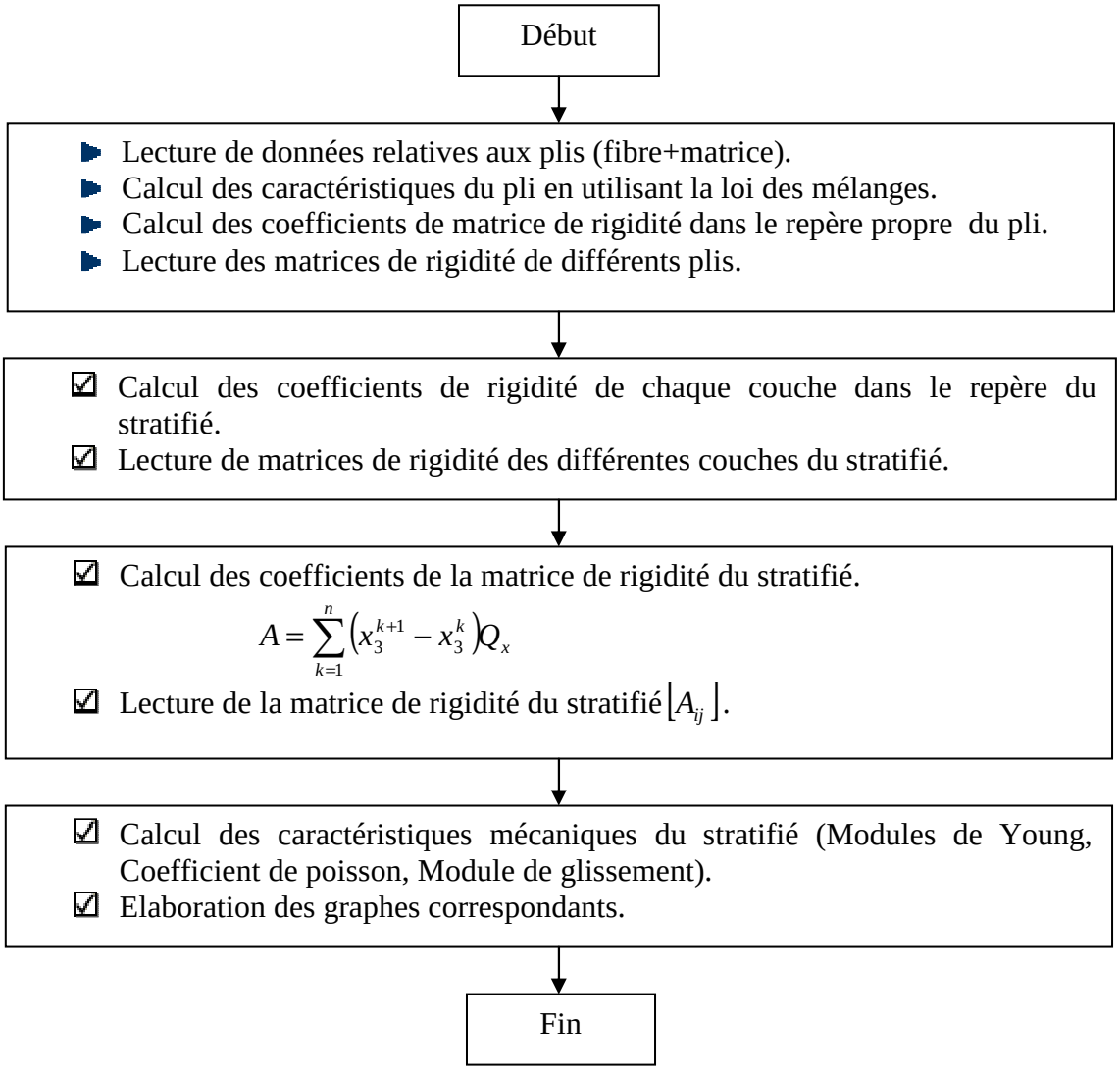


Figure IV.10: Organigramme de la méthode modélisation du comportement du stratifié

B. Résultats obtenus

L'évolution des différents paramètres caractérisant le composite stratifié Carbone/Epoxy d'empilement $[0/90/\pm45]_s$ symétrique, sont reportées sur les figures suivantes.

Cas 1 : en fait varié θ_1 de *0°* à *180°* :

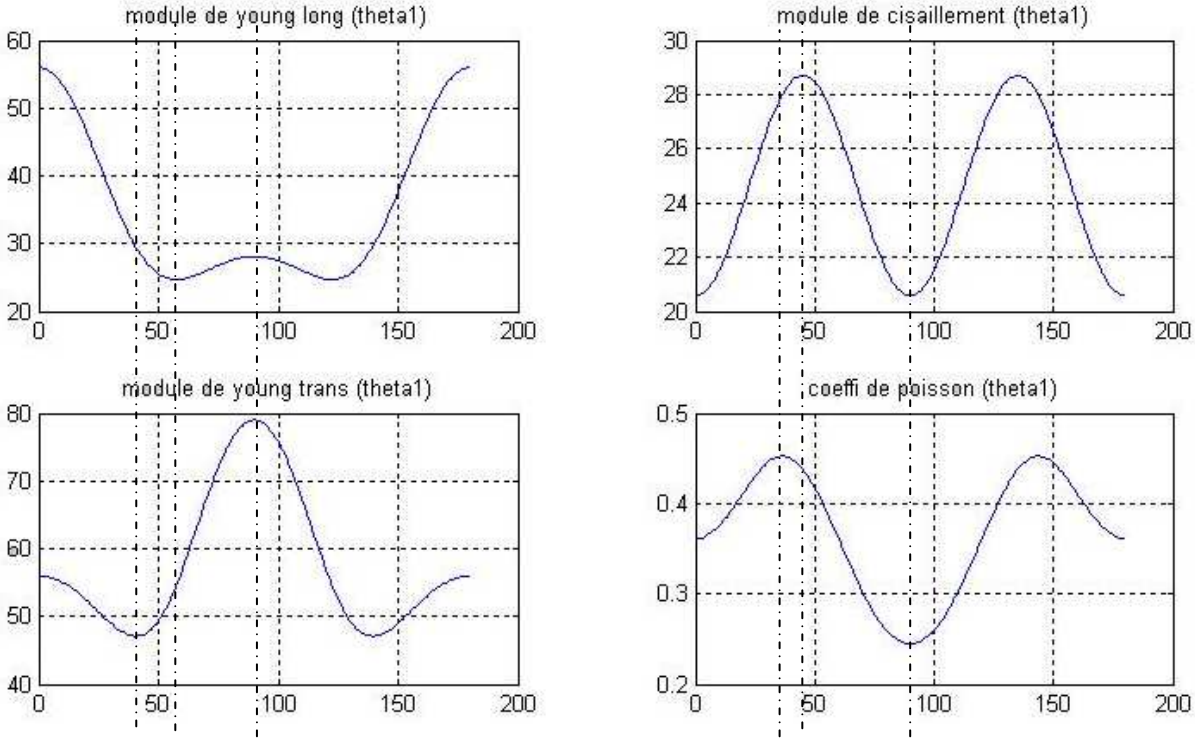


Figure IV.11 : Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 1 et 8

Cas 2 : en fait varié θ_2 de *90°* à 270° :

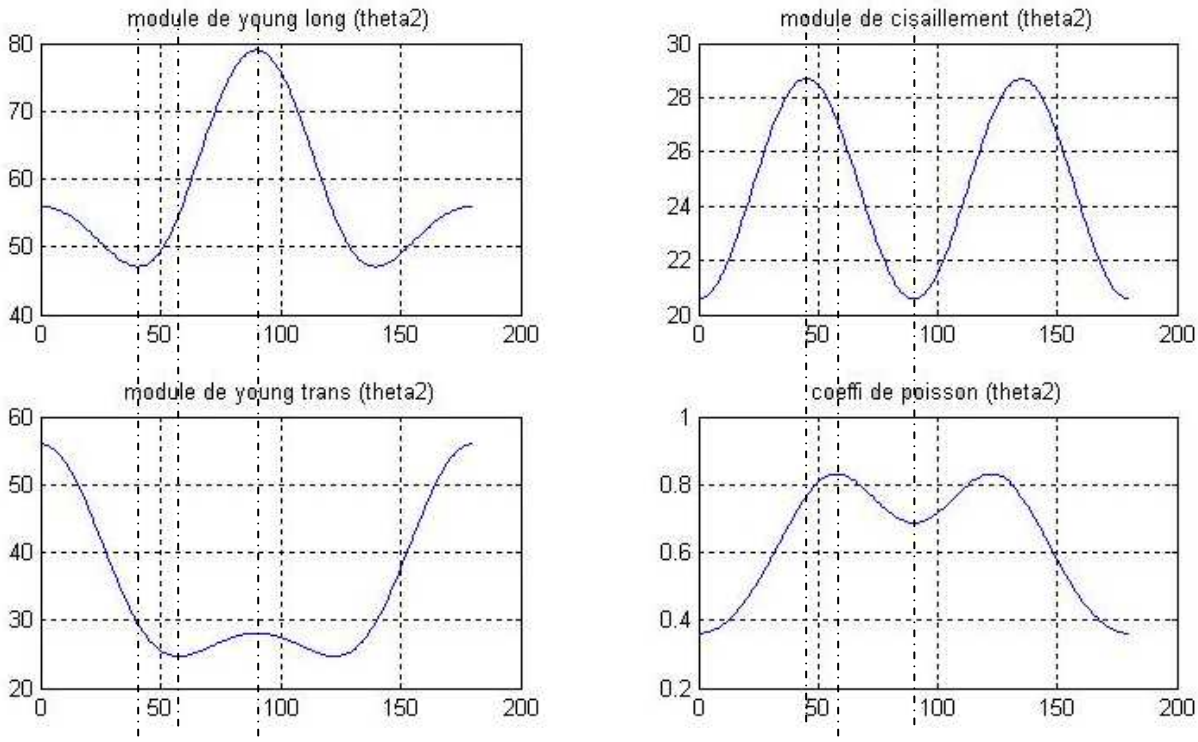


Figure IV.12 : Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 2 et 7

Cas 3 : en fait varié θ_3 de 45° à 225° :

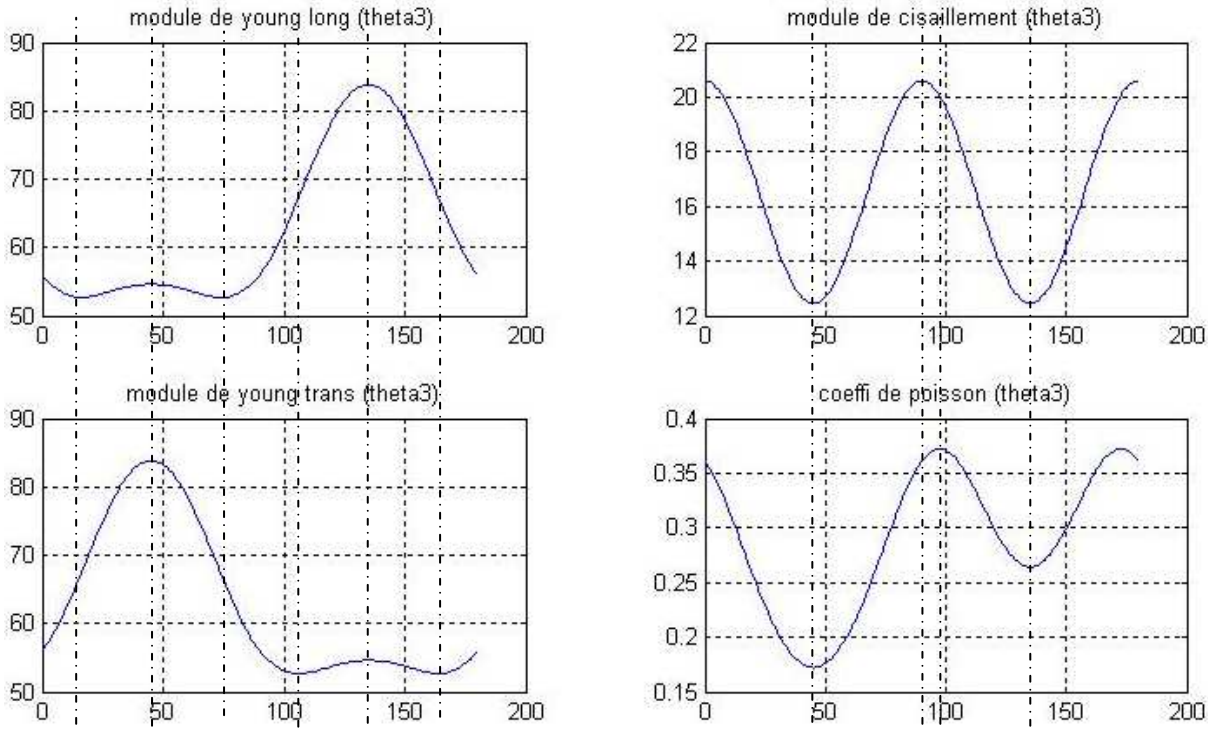


Figure IV.13 : Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 3 et 6

Cas 4 : en fait varié θ_4 de -45° à 135° :

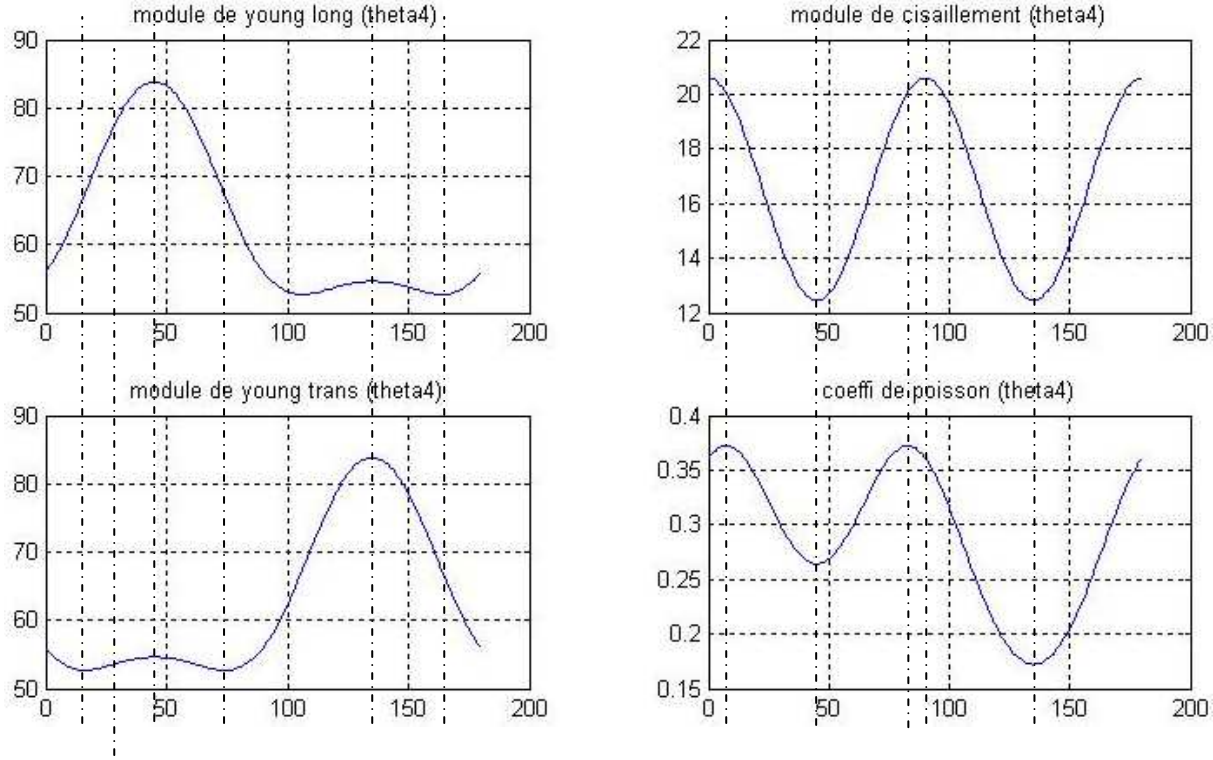


Figure IV.14: Variation des caractéristiques du stratifié en fonction de l'orientation des couches 4 et 5

Les tableaux ci-dessous donnent les résultats numériques obtenus de différentes orientation de chaque pli constituant le composite stratifié, les tableaux (IV.6) et (IV.7) représentent les résultats du module d'Young homogénéisé dans la direction longitudinal et transversal.

θ / EHL	0°	45°	90°	135°	180°
1ier Cas	56,00	27,24	28,11	27,24	56,00
2ième Cas	56,00	47,57	79,01	47,57	56,00
3ième Cas	56,00	54,61	56,00	83,81	56,00
4ième Cas	56,00	83,81	56,00	54,61	56,00

Tableau IV.6: Module d'Young longitudinal homogénéisé (EHL)

EHT	0°	45°	90°	135°	180°
1ier Cas	56,00	47,57	79,01	47,57	56,00
2ième Cas	56,00	27,24	28,11	27,24	56,00
3ième Cas	56,00	83,81	56,00	54,61	56,00
4ième Cas	56,00	54,61	56,00	83,81	56,00

Tableau IV.7 : Module d'Young transversal homogénéisé (EHT)

Le module de cisaillement et le coefficient de poisson sont donnés par les deux tableaux suivants.

G_{xy}	0°	45°	90°	135°	180°
1ier Cas	20,57	28,69	20,57	28,69	20,57
2ième Cas	20,57	28,69	20,57	28,69	20,57
3ième Cas	20,57	12,45	20,57	12,45	20,57
4ième Cas	20,57	12,45	20,57	12,45	20,57

Tableau IV.8 : Module de cisaillement homogénéisé (GH)

ν_{xy}	0°	45°	90°	135°	180°
1ier Cas	0,36	0,43	0,24	0,43	0,36
2ième Cas	0,36	0,76	0,68	0,76	0,36
3ième Cas	0,36	0,17	0,36	0,26	0,36
4ième Cas	0,36	0,26	0,36	0,17	0,36

Tableau IV.9 : Coefficient de poisson homogénéisé (νH)

C. Interprétation et discussion des résultats

Les figures (IV.11) et (IV.12) correspondant aux cas 1 et 2, illustrent une symétrie par rapport à thêta =90° de module de Young longitudinal, transversal et de coefficient de poisson en fonction de l'orientation des fibres. Cependant, le module de cisaillement varie symétriquement de part et d'autre de thêta = 45°. Pour le cas 3 et 4 représentés par les figures (IV.13) et (IV.14) respectivement, la symétrie est vérifiée seulement pour le module de cisaillement, en raison de nombres de plis orientés dans la direction ±45°.

Notons que le module d'Young longitudinal homogénéisé décroît de 0° à 45°, où il enregistre sa valeur minimale. Par conséquent de 45° à 90° nous remarquons une légère croissance qu'est dû à l'effet de d'autres plis orientés dans différents sens (voir la figure IV.11), de même pour la figure (IV.13), mais pour cette dernière : on a une forte croissance du E_L^H de 45° à 90° (voir le tableau IV.6). La valeur maximale de E_L^H est enregistré en 3ième et 4ième cas des figures (IV.13 et IV.14) en raison de nombre de plis orientés dans la direction longitudinal et de la contribution des autres orientations de plis du stratifie à consolider le module en question, entre autre les orientations à ±45° (voir le tableau (IV.6). Par conséquent, le module transversal agit de manière similaire au module longitudinal, mais ce dernier il enregistre une vive croissance jusqu'à θ=90°, selon l'effet de nombre de plis met en sens transverse.

D'après les graphes tracés ci-dessus relatifs au module de cisaillement, nous remarquons une certaine compatibilité entre les figures (IV.11 et IV.12) et également entre les figures (IV.13 et IV.14). Nous constatons que, l'évolution du module de cisaillement est symétrique à θ=45° et sa valeur maximale est enregistrée en deuxième cas représenté par la figures (IV.12) sous l'effet de l'orientation de fibres du deuxième pli,

et également en raison du nombre de plis orientés à ± 45°. Nous constatons, également que le module de glissement ne présente aucune préférence aux autres orientations de plis à 0° ou à 90° (voir le tableau (IV.8)).

Cependant, le rapport des modules transversal et longitudinal (coefficient de poisson) rapporté sur les figures (IV.13 et IV.14) montrent que le coefficient de poisson enregistre sa faible valeur à θ= 45° et θ= -45° respectivement. Notons ainsi l'apport important des plis orientés à 0° pour avoir une valeur minimale de ce dernier comparativement aux figures (IV.10 et IV.11) voir le tableau (IV.9).

D. Analyse des résultats

A partir des résultats obtenus et selon le type de sollicitations auxquelles il est soumis le stratifie étudié, on peut prédire les séquences d'empilement les plus adéquates pour une telle sollicitation donnée:

Pour une sollicitation dans la direction longitudinale et transversale, la séquence d'empilement adéquate est $[0/90/\pm45]_s$ qui procure un module d'Young de 56 Gpa dans les deux directions; donc il s'agit d'un matériau orthotrope, et il présente également une bonne résistance au cisaillement.

La séquence $[0/90/45/0]_s$ donne un module d'Young longitudinal le plus élevé, avec une déformation transversale faible (coefficient de poisson ν) voir la figure (IV.14).

La séquence $[0/0/\pm45]_s$ présente une bonne résistance au sollicitation longitudinale et ainsi que au glissement au détriment de coefficient de poisson et du module transversal voir la figure (IV.12).

La séquence $[0/90/45/90]_s$ représente un stratifié ayant un module transversal important avec un coefficient de poisson le plus faible.

IV.5 Conclusion

Le programme de calcul que nous avons réalisé sous Matlab, nous a permis d'étudier l'influence de l'orientation et la nature des fibres sur le pli, et du pli vis-à- vis du comportement global du stratifié en utilisant le théorème de love-Kirchhoff.

Nous nous sommes limités dans cette étude aux cinématiques de premier ordre (bidimensionnel) laissant celles d'ordres supérieurs, plus complexes nécessitent souvent des calculs par éléments finis (tridimensionnel).

Si en ajoute le fait que ces modèles, aussi sophistiqués soient-ils, décrivent assez mal les bords de pièces, les accords, les assemblages, les voisinages des tous habités ou non par des boulons, des rivets, etc. On constate depuis plusieurs années une utilisation croissante des calculs à l'aide d'éléments finis tridimensionnels. Cette tendance est justifiée par le fait que dans ces zones à forts gradients de contraintes, l'état de ces dernières est complètement tridimensionnel, mettant en défaut l'hypothèse de contraintes planes adaptée par les formulations bidimensionnelles.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans ce travail de mémoire, un modèle discret bidimensionnel dédié à la prédiction des propriétés élastiques linéaires de matériaux composites (matrice+fibres). Une méthode d'homogénéisation discrète (loi des mélanges) est employée pour l'estimation des propriétés d'un pli composite, et une théorie classique des stratifiés est utilisée pour modéliser le comportement du multicouche ainsi que l'influence de l'orientation du pli sur le comportement global du stratifié. Et afin de parvenir à concrétiser ce travail, nous avons réalisé un programme de calcul sous MATLAB.

Les résultats obtenus dans notre étude, nous ont montre une variabilité du comportement mécanique des matériaux composites (stratifié), permettant de considérer les différents types de renfort. La résistance de tels types de matériaux est assurée par le bon choix des constituants et la disposition adéquate des fibres. De cette façon, on peut modifier le degré d'anisotropie du matériau, selon la nature du composite utilisé du point de vue type de renforcement, fraction volumique et l'orientation des plis. En fonction de degré d'anisotropie de chaque type d'agencement du stratifié, une approche mathématique, basée sur la théorie classique des stratifiés est mise au point pour prévoir les caractéristiques mécaniques.

La validation et limitation du modèle sont discutées à travers des comparaisons avec des modèles expérimentaux, ces dernières montrent que les estimations du modèle analytique utilisé sont acceptables.

Dans des situations industrielles particulières pour les quelles la sécurité joue un rôle prépondérant. De telles utilisations doivent nécessairement s’accompagner d’une bonne connaissance du comportement du matériau, il est nécessaire également de prévoir les premiers mécanismes de rupture et d'endommagement afin de déterminer et à choisir le type de renforcement qui permet d’obtenir des propriétés mécaniques assez optimales.

Beaucoup de questions restent néanmoins ouvertes à l'issu de notre travail et les perspectives sont nombreuses.

1. La première piste à explorer concerne les aspects expérimentaux relatifs à l'identification des caractéristiques mécaniques des milieux fibreux.
2. Elaboration d'une méthode de calcul du comportement d'un pli, en utilisant les méthodes d'homogénéisation à l'échelle microscopique,
3. Considérer d'autres paramètres influençant sur le comportement global du pli et de stratifié tels que: types de fibres (mats, tissus, longues....), forme géométrique de fibres et de leurs dimensions,
4. Elargissement de l'étude réalisée à d'autres matériaux composites (matériaux sandwiches) et aux d'autres critères tel que le critère de rupture, l'endommagement et fatigue.

Références Bibliographiques

[1] : DANIEL GAY
« Matériaux composites »
4e édition revue et augmentée, Edition Hermes. 1997

[2] : J.-M. BERTHELOT
« Comportement mécanique et analyse des structures de matériaux composites »
3ième édition. Ed. TEC et DOC Paris.1999

[3] : J.-M. BERTHELOT
« Comportement mécanique et analyse des structures de matériaux composites »
Ed. Masson Paris.1992

[4] : Pierre JACQINET
« Utilisation de matériaux composites »
Ed. HERMES.1991

[5] : Pierre JACQINET
« Utilisation de matériaux composites »
Ed. HERMES.

[6] : P-E. BOURBAR, L. CARISSON, J-P. MERCIER et J-A-E. MANSON
« Matériaux composite à matrice organique »
Presses polytechniques et universitaires ROMANDES

[7] : L. BERREUR : B. De MAILLARD; S. NESPERGER
« L'industrie française des matériaux composites »
Rapport DIGITIP : Décembre 2001

[8]: TOURNIER P.
« Comportement sous sollicitation cyclique des composites unidirectionnels
Verre/époxy cas des résines à ténacité améliorée ». Lyon 1987

[9] MAURICE REYNE.
« Technologie des composites»
Edition HERMES 1990

[10] Thèse de doctorat
«Conception et élaboration de CMT renforcée par des fibres de carbone»

[11] PASCAL REYBAUD, J.F. GERARD
«Interface dans les composites à fibres»
Edition HERMES 1997

[12] J. WEISS & C.BORD
«Matériaux composites I et II calculs, essais, contrôles et conception »
Ed. De l'Usine Paris.1983

[13] : Jacques RENARD
« Elaboration, microstructure et comportement des matériaux composites à matrice polymère »
Edition FLOSH Ä MAYENNE. Juillet 2005

[14] : Christian DECOLON
« Calcul des plaques et des poutres multicouches »
Ed. HERMES 2000

[15] : A. S. CARRARA and F.J. MCGARRY
« Matrix and interface stresses in a discontinuous fiber composite model »
Edition. 1968

[16] : T.F MACLAUGHLIN and R.M BARKERM Jacques RENARD
« Effect of modulus ratio on stress near a discontinuous fiber »
Edition MECH 1972

[17] : KELLY A, MACMILLAN NH
« Strong solids »
Edition Oxford University press; 1986

[18] : BENNET T. JA, YOUNG. RJ
« The effect of fiber-matrix adhesion upon crack bridging in the fiber reinforce composites »
Composite Part A 1998

[19] : SIRIVEDIN S, FENNER DN, GALIOTIS C.
« Matrix crack propagation criteria for model short-carbone fiber/epoxy composites»
Edition: Compos Sci Technol 2000.

[20]: KITAE T. KIM A, ROBERT M. MCMEEKING.
« Department of Mecanical and Environnemental Engineering »
University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA Received 01 October 1993

[21] : SOFRONIS. P, and R.M MCMEEKING.
« The effect of interface diffusion and slip on the creep resistance of particulate composite materials »
Edition: Mech Mater 1994.

[22] : RM CHRISTENSEN
« Tensor transformations and failure criteria for the analysis of fiber composite materials »
Journal des matériaux composites 1990

[23] : S.C TAN
« A new approch of three-dimensional strength theory for anisotropic materials »
International Journal of fracture, 1990

[24]: C.T Chon and C.T Sun
« Stress distribution along a short-fiber reinforced plastics »
Edition: J. Mater. Sci 15, 1980

[25]: F. Hirochi and T.W Chou
« An advanced shear-lag model applicable to discontinuous fiber composites »
Edition: J. Compos.Mater. 15, 1981

[26] : W.J Liou and C.T Sun
« A three-dimensional hydrid sterss iosparametric element for analysis of laminated composite plates »
Edition: Comput.Struct. 25, 1987

[27] : Tripathi D, Jones FR
« Measurement of the load bearing capability of the fiber/matrix interface by single-fiber fragmentation »
Edition: Compos.Sci Technol 1997

[28] : Kelly A, Tyson WR
«Tensile properties of fiber-reinforced metals copper/tingsten and copper/molybdenum »
Edition: J Mech Phys Solids 1965

[29] : Goh KL, Aspden RM, Mathias KJ, Hukins DWL
«Finite element analysis of the effect of fiber shape on stresses in an elestic fiber surrounded by a plastic matrix »
Edition: J Mater Sci 2000

[30]: Pinzelli R.
«Kavlar aramid fiber for external strenghtening & Repair of Concrete Structures »
Edition: International Conference on structural Fault & repair, London, 1990

[30]: Pinzelli R.
«Kavlar aramid fiber for external strengthening & Repair of Concrete Structures »
Edition: International Conference on structural Fault & repair, London, 1990

[31]: Turnialan G, Nanni A, Ibell T and Fukuyama H.
«Composite for strengthening Civil Infrastructure Around world»
Edition: Sampe Journal, Vol 38 September/ October, 2002

[32]: S.C Tan.
«A new approach of three dimensional strength theory for anisotropic materials »
Edition: International Journal of Fracture, 1990

Annexe A

I.1 Loi des mélanges [1]

A une échelle suffisamment fine, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogène. Pour s'en convaincre, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules. Si les matériaux usuels devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tache serait insurmontable. Pour contourner cette difficulté, on introduit les hypothèses de continuité de la matière. Le caractère d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point. Les variations des propriétés peuvent être de deux types: soit continues ou discontinues comme le cas des matériaux composites. Dans ce cas, les propriétés ponctuelles du matériau varient d'une manière discontinue aux interfaces entre les diverses phases. Chaque phase est supposée être homogène et isotrope.

I.1.1 Composite unidirectionnel à fibres longues

Dans le cas d'un matériau où les fibres sont continues (enroulements, plaques), l'approximation en parallèle dans laquelle les déformations sont uniformes d'une phase à l'autre est bien respectée. Si les effets latéraux sont négligés, on peut évaluer le module d'Young équivalent dans la direction des fibres par une approximation de déformation uniforme. Si au contraire la sollicitation s'applique en sens travers, les phases seront en séries, dans une configuration bien adaptée pour appliquer l'approximation de contrainte uniforme.

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à déterminer les expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, etc. les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice sont caractérisés par leurs modules d'élasticité (modules d'Young), glissement et coefficient de poisson.

Dans ce qu'il suit, nous allons présenter des relations qui permettent de déterminer les caractéristiques d'un matériau composite unidirectionnel en fonction des caractéristiques des fibres et de la matrice.

I.1.2 Masse volumique

En désignant par:

- M, M_f, M_m les masses du stratifié, des fibres et de la matrice,
- ρ, ρ_f, ρ_m les masses volumiques du stratifié, des fibres et de la matrice,
- v, v_f, v_m les volumes du stratifié, des fibres et de la matrice.

La masse de stratif est égale à :

$$M = M_f + M_m$$

Soit :

$$\rho v = \rho_f v_f + \rho_m v_m \ .$$

En appelant :

- $V_f = \frac{v_f}{v}$ la fraction de fibres en volume,
- $V_m = \frac{v_m}{v}$ la fraction de la matrice en volume,

Et remarquant que $V_f + V_m = 1$, la masse volumique du composite est :

$$\rho = V_f \rho_f + V_m \rho_m = V_f \rho_f + (1 - V_f)\rho_m ,$$

I.1.3 Module d'Young longitudinal (E_L)

Dans la théorie envisagée, on suppose, comme on l'a représenté sur la figure (1), que les fibres sont regroupées dans la partie inférieure du composite et que la matrice occupe la partie supérieure de celui-ci. Le stratifié est soumis à la force de traction longitudinale F.

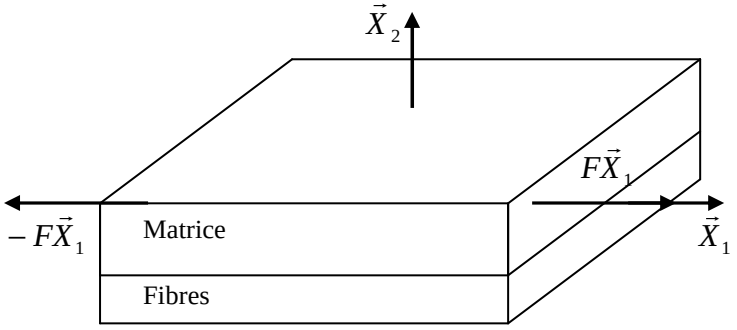


Figure (1) : Traction longitudinale

Dans la modélisation adaptée, on fait l'hypothèse que les dilatations longitudinales sous l'action de la force de traction F sont les même dans le stratifié, les fibres et la matrice, ce que se traduit par :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^m$$

On désigne par :

- E_f, E_m les modules d'Young des fibres et de la matrice,
- S, S_f, S_m les aires des surfaces, du bord orthogonal à $\vec{X}_1$, occupées par le stratifié, les fibres et la matrice.

En désigne aussi par l la longueur du composite, que :

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{S_f l}{Sl} = \frac{S_f}{S}, \qquad \text{et que} \qquad V_m = \frac{S_m}{S}.$$

Les contraintes de traction dans les fibres et dans la matrice sont égales à :

$$\sigma_1^f = E_f \varepsilon_1,$$

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1,$$

Et la force de traction est donnée par :

$$F = S_f \sigma_1^f + S_m \sigma_1^m$$

La contrainte de traction σ_1 dans le stratifié est:

$$\sigma_1 = \frac{F}{S} = V_f \sigma_1^f + V_m \sigma_1^m = \left(V_f E_f + V_m E_m\right)\varepsilon_1.$$

Le module d'Young longitudinal E_1 du stratifié étant défini par :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}.$$

Ou bien la relation :

$$E_1 = V_f E_f + V_m E_m = V_f E_f + \left(1 - V_f\right)E_m$$

Cette expression est connue sous le nom de *la loi des mélanges* pour le module d'Young dans la direction des fibres. Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure (2), la variation du module est linéaire entre les valeurs E_m module de la matrice et E_f module de fibres, lorsque la fraction volumique V_f de fibres varie de 0 à 1.

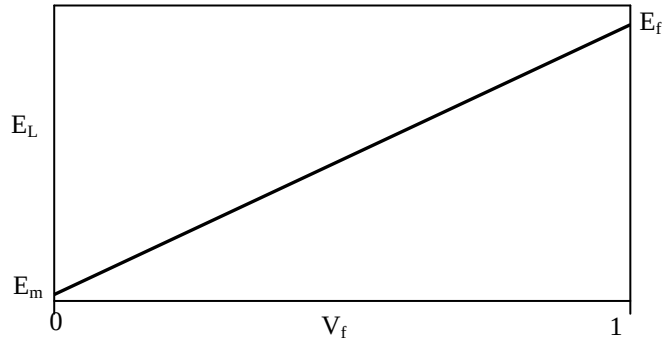


Figure (2) : Loi des mélanges pour le module d'Young

I.5 Module d'Young transversal

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. Une expression de ce module peut être obtenue du schéma à deux dimensions de la figure (3)

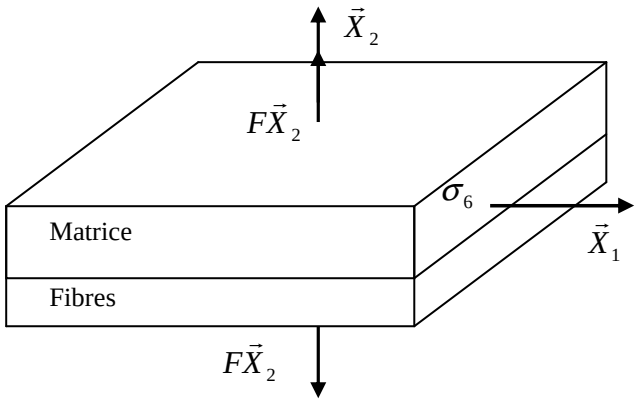


Figure (3) : Traction transversale

Avec la même modélisation, on fait hypothèse que les contraintes transversales dans les fibres et dans la matrice sont égales :

$$\sigma_2 = \sigma_2^f = \sigma_2^m .$$

Les dilatations transversales dans les fibres et la matrice sont :

$$\varepsilon_2^f = \frac{\sigma_2}{E_f} ,$$

$$\varepsilon_2^m = \frac{\sigma_2}{E_m} ,$$

La variation d'épaisseur étant égale à :

$$\Delta e = \Delta e_f + \Delta e_m = e_f \varepsilon_2^f + e_m \varepsilon_2^m$$

La dilatation transversale du stratifié est :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta e}{e} = V_f \varepsilon_2^{\mathrm{f}} + V_m \varepsilon_2^{\mathrm{m}} = \left(\frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_e \ .$$

Le module d'Young transversal E_2 du composite est défini par la relation :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \ ,$$

D'où :

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \ .$$

Le module d'Young transversal E_2 est donc égal à :

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} = \frac{E_m}{V_m + V_f \dfrac{E_m}{E_f}},$$

Soit

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - V_f \left(1 - \dfrac{E_m}{E_f} \right)}$$

I.6 Module de cisaillement G_{12}

Le module de cisaillement longitudinal G_{12} est déterminé dans un essai de cisaillement schématisé sur la figure (4) on utilisant la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ ou σ_6 imposées sur la cellule. Les déformations ou les distorsions en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant :

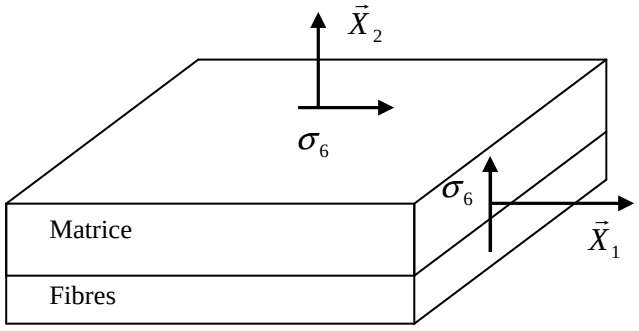


Figure (4) : Cisaillement

Les distorsions angulaires dans la fibre et la matrice sont données par :

$$\varepsilon_6^f = \frac{\sigma_6}{G_f} \quad , \qquad \varepsilon_6^m = \frac{\sigma_6}{G_m} \ ,$$

Où G_f et G_m respectivement les modules de cisaillement des fibres et de la matrice

Le déplacement suivant $\vec{X}_1$ du plan supérieur du composite par rapport à son plan inférieur est :

$$u = u_f + u_m ,$$

Compte tenu des déplacements dus à la partie fibres et à la partie matrice :

$$u_f = e_f \varepsilon_6^f \ ,$$

$$u_m = e_m \varepsilon_6^m ,$$

Ou bien :

$$u = e_f \varepsilon_6^f + e_m \varepsilon_6^m = \left(\frac{e_f}{G_f} + \frac{e_m}{G_m} \right) \sigma_6 .$$

La distorsion angulaire étant égale à :

$$\varepsilon_6 = \frac{u}{e} = \left(\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right) \sigma_6 ,$$

Le module de cisaillement G_{12} du stratifié est donné par :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\varepsilon_6}{\sigma_6} ,$$

D'où :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} .$$

Le module de cisaillement est égal à :

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_m G_f + V_f G_m} = \frac{G_m}{V_m + V_f \dfrac{G_m}{G_f}} ,$$

Soit :

$$G_{12} = \frac{G_m}{1 - V_f \left(1 - \dfrac{G_m}{G_f} \right)} .$$

I.7 Coefficient de poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de poisson longitudinal ν_{12}, nous reprenons le schéma précédent (figure (4)). Le coefficient ν_{12} est déterminé dans un essai de traction longitudinale où la fibre et la matrice subissent des déformations identiques. Il en résulte que les déformations transversales dans la matrice et les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_2^f = -\nu_f \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2^m = -\nu_m \varepsilon_1,$$

Où v_f et v_m représentent les coefficients de poisson des fibres et de la matrice.

La variation d'épaisseur du stratifié est donnée par :

$$\Delta e = \Delta e_f + \Delta e_m = e_f \varepsilon_2^f + e_m \varepsilon_2^m,$$

Où e_f et e_m sont les épaisseurs des parties fibres et matrice.

En désignant par b la largeur du composite, on note que :

$$V_f = \frac{v_f}{v} = \frac{e_f bl}{ebl} = \frac{e_f}{e},$$

Ainsi que :

$$V_m = \frac{e_m}{e}$$

La dilatation transversale du composite est égale à :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta e}{e} = V_f \varepsilon_2^f + V_m \varepsilon_2^m = -\left(V_f \nu_f + V_m \nu_m\right)\varepsilon_1.$$

Le coefficient de poisson ν_{12} du stratifié est défini par :

$$\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

D'où la relation :

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m = V_f \nu_f + \left(1 - V_f\right)\nu_m$$

Qui détermine convenablement le coefficient de poisson ν_{12}.

Annexe B

I. Théorie classique des stratifiés (love-Kirchhoff)

I.1. Champ cinématique et déformation

L'analyse connue sous le nom de théorie classique des stratifiées consiste à adopter le champ de déplacement du premier ordre de la théorie de Mindlin donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3) &= u_1^0(x_1,x_2)+x_3\phi_1(x_1,x_2) \\ u_2(x_1,x_2,x_3) &= u_2^0(x_1,x_2)+x_3\phi_2(x_1,x_2) \\ u_3(x_1,x_2,x_3) &= w(x_1,x_2) \end{aligned} \qquad \text{(B.1)}$$

Avec une hypothèse supplémentaire, qui consiste à dire que la déformation d'une normale au plan moyen est un segment de droite qui reste normal à la déformée du plan moyen.

Il s'ensuit que les déformations transversales ε_4 et ε_5 sont nulles. Compte tenu des déformations déduisent du champ de déplacement par dérivation :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \varepsilon_1^0 + x_3 k_1 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = \varepsilon_2^0 + x_3 k_2 \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \varepsilon_4 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_2 \\ \varepsilon_5 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_1 \\ \varepsilon_6 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + x_3\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = \varepsilon_6^0 x_3 k_6 \end{aligned} \qquad \text{(B.2)}$$

Cela implique que :

$$\phi_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} \qquad \text{(B.3)}$$

Dans ce cas, les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 peuvent être déterminées comme étant la pente de la courbure transversale selon x_1 et x_2. Physiquement cela peut se traduit par le fait que

toute normale au plan moyen reste pendant la déformation de la structure. Cependant le champ de déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ u_2 &= u_2^0 - x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ u_3 &= w \end{aligned} \qquad \text{(B.4)}$$

On retrouve $u_\alpha^0(x_1, x_2)$, $\alpha = 1,\ 2$ les déplacements membranaires d'un point matériel situé dans le plan moyen $(x_1, x_2, 0)$ et w la déflexion dans l'épaisseur. On notera que dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. Le champ de déplacement du plan moyen étant connu, on peut déduire le déplacement pour tout point quelconque $M(x_1, x_2, x_3)$ dans l'épaisseur.

Compte tenu des expressions du champ de déplacement choisi, les déformations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ \varepsilon_6 &= \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1^2}\right) - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(B.5)}$$

Si bien que les déformations non nulles se déduisent à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6$, chacune d'elle pouvant résulter de la sommation d'une déformation de membrane et d'une déformation de flexion ou de torsion. On notera que les déformations de cisaillement dans l'épaisseur $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

Les efforts tranchant existent mais sont repris par les moments de flexion. Les déformations de membrane ε^0 sont uniquement fonction des déplacements u_1^0 et u_2^0 dans le plan (x_1, x_2).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_3^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_2^0}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B.6)}$$

Les déformations en flexion et en torsion s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^f \\ \varepsilon_2^f \\ \varepsilon_3^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_3 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -x_3 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2x_3 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B.7)}$$

Les courbures induites par la flexion et la torsion sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B. 8)}$$

On obtient le champ de déformation sous forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} + x_3 \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{Bmatrix} \qquad \text{(B.9)}$$

I.2. Comportement global du stratifié

Selon l'hypothèse des contraintes planes et en absence de cisaillement transversal, la loi de comportement du pli k dans le repère global de la structure est réduite à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \qquad \text{(B.10)}$$

Si en replace les déformations par leur décomposition en membrane et flexion, on retrouve l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_6\end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix}\varepsilon_1^0\\ \varepsilon_2^0\\ \varepsilon_6^0\end{Bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{16}\\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26}\\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}_K \begin{Bmatrix}k_1\\ k_2\\ k_6\end{Bmatrix} \qquad \text{(B.11)}$$

Après l'intégration selon l'épaisseur, on retrouve l'expression suivante :

$$\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_6\\ M_1\\ M_2\\ M_6\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26}\\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{61} & B_{66}\\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26}\\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\varepsilon_1^0\\ \varepsilon_2^0\\ \varepsilon_6^0\\ k_1\\ k_2\\ k_6\end{Bmatrix} \qquad \text{(B.12)}$$

Les termes des matrices [A], [B] et [D] s'expriment comme suit:

$$A = \sum_{K=1}^{n} (x_3^{K+1} - x_3^K) Q_K$$

$$B = \sum_{K=1}^{n} \frac{1}{2} \left[(x_3^{K+1})^2 - (x_3^k)^2 \right] Q_K \qquad \text{(B.13)}$$

$$D = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^{n} \left[(x_3^{K+1})^3 - (x_3^K)^3 \right] Q_K$$

Pour le cas que nous avons étudié, il s'agit d'un empilement symétrique par rapport à son plan moyen, les couplages flexion-tension disparaissent puisque le tenseur [B] est nul. Si en plus d'être symétrique, l'empilement est équilibré (toutes les couches ont la même épaisseur), alors [B]=0 et $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$

On obtient alors:

$$\begin{cases} A_{11} = e_k \left(2Q_{11}^{1'} + 2Q_{11}^{2'} + Q_{11}^{3'} + Q_{11}^{4'} \right) \\ A_{12} = e_k \left(2Q_{22}^{1'} + 2Q_{22}^{2'} + Q_{22}^{3'} + Q_{22}^{4'} \right) \\ A_{12} = e_k \left(2Q_{12}^{1'} + 2Q_{12}^{2'} + Q_{12}^{3'} + Q_{12}^{4'} \right) \\ A_{66} = e_k \left(2Q_{66}^{1'} + 2Q_{66}^{2'} + Q_{66}^{3'} + Q_{66}^{4'} \right) \end{cases}$$

Evaluons alors le tenseur de rigidité en flexion:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n} Q_{\alpha\beta}^{k'} \frac{\left(h_{k+1}^3 - h_k^3 \right)}{3}$$

$$\begin{cases} D_{11} = \dfrac{74e_K^3}{3}Q_{11}^{1'} + \dfrac{38e_k^3}{3}Q_{11}^{2'} + \dfrac{14e_k^3}{3}Q_{11}^{3'} + \dfrac{2e_k^3}{3}Q_{11}^{4'} \\ D_{22} = \dfrac{74e_K^3}{3}Q_{22}^{1'} + \dfrac{38e_k^3}{3}Q_{22}^{2'} + \dfrac{14e_k^3}{3}Q_{22}^{3'} + \dfrac{2e_k^3}{3}Q_{22}^{4'} \\ D_{12} = \dfrac{74e_K^3}{3}Q_{12}^{1'} + \dfrac{38e_k^3}{3}Q_{12}^{2'} + \dfrac{14e_k^3}{3}Q_{12}^{3'} + \dfrac{2e_k^3}{3}Q_{12}^{4'} \\ D_{66} = \dfrac{74e_K^3}{3}Q_{66}^{1'} + \dfrac{38e_k^3}{3}Q_{66}^{2'} + \dfrac{14e_k^3}{3}Q_{66}^{3'} + \dfrac{2e_k^3}{3}Q_{66}^{4'} \end{cases}$$

Si en se place dans le cas où le stratifie est symétrique et équilibré et où seuls les efforts membranaires agissent, le comportement s'écrit avec uniquement la partie membranaire. On définit alors un matériau homogène équivalent à la plaque stratifiée en écrivant:

$$\frac{1}{2e}\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2e}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_6^0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1^{stf} \\ \sigma_2^{stf} \\ \sigma_6^{stf} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^H & Q_{12}^H & 0 \\ Q_{12}^H & Q_{22}^H & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^H \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{stf} \\ \varepsilon_2^{stf} \\ \varepsilon_6^{stf} \end{Bmatrix}$$

Les coefficients $Q_{\alpha\beta}^H$ représentent les coefficients de rigidité d'une plaque mince homogénéisée à l'aide de la théorie des plaques.

On peut également définir les modules d'Young E_1^H, E_2^H les coefficients de poisson ν_{12}^H, ν_{21}^H et le coefficient de glissement G_{12}^H de la structure homogène équivalente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{stf} \\ \varepsilon_2^{stf} \\ \varepsilon_6^{stf} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1^H} & -\dfrac{\nu_{12}^H}{E_1^H} & 0 \\ -\dfrac{\nu_{12}^H}{E_1^H} & \dfrac{1}{E_2^H} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{G_{12}^H} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_1^{stf} \\ \sigma_2^{stf} \\ \sigma_6^{stf} \end{Bmatrix}$$

L'exposant «stf» signifie que les caractéristiques mentionnées sont celles du stratifié