

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Automatique**

Spécialité : **Automatique et Informatique
Industrielle**

Présenté par

Katia DAFEUR

Thème

Méthode de décomposition de signaux : Application à la détection d'anomalies cardiaques

Mémoire soutenu publiquement le 02/10/2024 devant le jury composé de :

M. Farida DORBANE
UMMTO, Président

M. Kamal HAMMOUCHE
UMMTO, Encadrant

M. Saida BOUDEHENE
UMMTO, Examineur

M. Nouara ARKOUB
UMMTO, Examineur

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERRI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DU GENIE ELECTRIQUE ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etudes de MASTER ACADEMIQUE

Domaine : **Sciences et Technologies**
Filière : **Automatique**

Spécialité : **Automatique et Systèmes**

Présenté par

Katia BOUALI

Thème

Méthode de décomposition de signaux : Application à la détection d'anomalies cardiaques

Mémoire soutenu publiquement le 02/10/2024 devant le jury composé de :

M. Farida DORBANE

UMMTO, Président

M. Kamal HAMMOUCHE

UMMTO, Encadrant

M. Saida BOUDEHENE

UMMTO, Examineur

M. Nouara ARKOUB

UMMTO, Examineur

Dedicace

À ceux qui illuminent ma vie par leur amour et leur soutien inconditionnels, je dédie ce travail avec une profonde gratitude :

À ma mère, la personne la plus chère à mon cœur, ma source de bonheur et d'espoir. Tu es le soleil qui éclaire ma vie et ma boussole dans les moments sombres.

À mon cher père, ma source de courage et de sagesse, ainsi que mon pilier de confiance lorsque les défis se présentent.

À mes frères Mouloud et Boudjema, qui ont toujours été à mes côtés, me soutenant et m'encourageant dans chaque étape de mon parcours. Votre présence et vos encouragements m'ont donné la force de poursuivre mes rêves.

BOUALI Katia

Dedicace

À mes chers parents,
ma mère, dont la force indomptable et l'amour inconditionnel me portent chaque jour. Merci d'être toujours là pour me soutenir. Ton cœur généreux et ta capacité à croire en moi illuminent mon chemin.

À mon père, qui a été mon pilier à chaque étape. Ta présence constante, m'a appris la valeur de la persévérance. Je te suis infiniment reconnaissant pour toutes les leçons de vie, les moments partagés, et pour avoir toujours cru en moi.

À ma petite sœur, Nesrine, ma précieuse étoile, tu es ma source de bonheur et de fierté. Ton rire et ta curiosité illuminent ma vie, et je te chéris plus que les mots ne peuvent l'exprimer.

À mes frères, Khaled et Rayane, merci pour les merveilleux souvenirs de notre enfance. Même si nous ne nous voyons pas autant que je le souhaiterais, je vous garde toujours près de mon cœur.

Enfin, à ma merveilleuse binôme, Katia BOUALI, sans toi, je n'aurais pas pu arriver à ce stade. Merci pour ta camaraderie, ta générosité et toutes les rires partagés.

Merci à chacun de vous d'être une partie si importante de ma vie.

DAFEUR Katia

Remerciement

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre encadrant, M. K. HAMMOUCHE, pour son soutien inestimable et ses conseils avisés tout au long de la rédaction de ce mémoire. Sa disponibilité, son expertise et la qualité de son accompagnement ont été des atouts majeurs dans la réalisation de ce travail. Nous lui sommes particulièrement reconnaissantes pour sa patience et sa pédagogie, qui nous ont permis de progresser et de mener à bien ce projet.

Nous souhaitons également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce mémoire. Leur regard critique et leurs remarques constructives lors de cette soutenance nous aideront à enrichir et à perfectionner nos travaux futurs.

Nous tenons à exprimer une reconnaissance particulière à tous les enseignants qui nous ont accompagnés tout au long de notre parcours universitaire. Leur engagement, leur passion pour l'enseignement, et la rigueur avec laquelle ils nous ont transmis leur savoir sont autant de valeurs qui nous ont permis de mener à bien cette formation.

Table des matières

Dedicace	2
Remerciement	3
Liste des tableaux	7
Table des figures	8
Introduction générale	12
1 Méthodes classiques d'analyse temps-fréquence	13
1.1 Introduction	13
1.2 Transformée de Fourier	13
1.3 Transformée de Hilbert et le signal analytique	16
1.3.1 Transformée de Hilbert	16
1.3.2 Signal analytique	18
1.3.3 Fréquence et Amplitude instantanées	20
1.3.4 Signal mono-composante et multi-composantes	22
1.4 Signaux stationnaires et non stationnaires	23
1.5 Limites de la TF et intérêt de la représentation temps-fréquence	24
1.6 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)	25
1.7 Transformée de Wigner-Ville (TWV)	27
1.8 Filtres de Gabor	31

1.9	Transformée de Stockwell (ST)	32
1.9.1	Transformée de Stockwell continue	33
1.9.2	Transformée de Stockwell discrète	34
1.10	Transformée en ondelettes (T.O)	35
1.10.1	Transformée en ondelettes discrète	38
1.10.2	Inconvénients de la transformée en ondelettes	40
1.11	Conclusion	41
2	Méthodes de décomposition des signaux	42
2.1	Introduction	42
2.2	Décomposition Empirique en Modes (EMD)	42
2.2.1	Définition de l’Intrinsic Mode Function (IMF)	43
2.2.2	Algorithme de l’EMD	44
2.2.3	Critère d’arrêt du processus de tamisage	48
2.2.4	Inconvénients de l’EMD	49
2.3	Décomposition en Modes Variationnels (VMD)	50
2.4	Méthode de Décomposition de Fourier (FDM)	52
2.4.1	Définition des FIBFs	53
2.4.2	La FDM à temps continu	53
2.4.3	La FDM discrète	54
2.5	La Transformée en Ondelettes Empiriques (EWT)	57
2.5.1	Algorithme de la méthode de EWT	60
2.6	La Décomposition de Fourier Empirique (EFD)	61
2.6.1	Technique de Segmentation de l’EFD	62
2.6.2	Construction d’une Banque de Filtres Idéaux	62
2.7	Conclusion	65
3	Classification des signaux électrocardiogrammes (ECG)- réseaux de neurones convo-	

lutifs	66
3.1 Introduction	66
3.2 Anatomie du cœur	67
3.2.1 Électrocardiogrammes (ECG)	68
3.2.2 Les différentes réflexions de l'ECG	68
3.2.3 Les intervalles de l'ECG	69
3.2.4 Acquisition du signal ECG	70
3.2.5 Pathologies cardiaques les plus fréquentes	71
3.3 Réseaux de neurones convolutifs (CNN)	73
3.3.1 Structure des CNNs	73
3.3.2 Partie Convulsive	74
3.3.3 Partie Classification	76
3.3.4 Modeles de CNNs et transfert d'apprentissage	77
3.3.5 Fonctionnement d'un CNN	83
3.3.6 Prétraitement des images	83
3.3.7 Entraînement et apprentissage	84
3.4 Classification des signaux ECG à base d'un CNN	85
3.4.1 Description de la méthode proposée	85
3.4.2 Base de données utilisée	86
3.4.3 Résultats	89
3.5 Conclusion	92
 Conclusion generale	 94
 Bibliographie	 95

Liste des tableaux

- 1.1 Transformée de Hilbert de quelques signaux usuels. 18
- 3.1 Répartition des données dans les deux bases d'apprentissage et de test. 89
- 3.2 Taux de classification obtenu par chaque méthode de décomposition. 89
- 3.3 Taux de classification obtenu par chaque méthode de décomposition 90

Table des figures

1.1	Illustration de la TF, (a) Signal non-stationnaire, (b) Spectre d'amplitude, (c) Spectre de phase	15
1.2	Principe d'estimation de la Fi et de l'AI via le signal analytique $x_a(t)$ de $x(t)$	21
1.3	Illustration de la notion de signaux mono-composantes multi-composantes	23
1.4	(a) Signal stationnaire , (b) signal non-stationnaire	24
1.5	Spectre de fréquences des deux signaux, (a) Stationnaire et (b) Non-Stationnaire	24
1.6	Principe de la transformée de Fourier sur une fenêtre glissante.	25
1.7	Spectrogramme de la TFCT obtenue sur le signal non-stationnaire	27
1.8	Transformée de Wigner Ville et Pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée du signal non-stationnaire.	30
1.9	Filtre de Gabor-1D	31
1.10	Transformée de fourrier d'un filtre de Gabor 1D	32
1.11	Spectre temps-fréquence obtenu par la ST sur le signal non stationnaire	35
1.12	Exemples de fonctions ondelettes	36
1.13	Exemple d'une ondelette mère contractée et dilatée : $a = 0.5$ correspond à une ondelette contractée, $a = 1$ correspond à l'ondelette de base ou l'ondelette mère et $a = 2$ correspond à une ondelette dilatée.	37
1.14	Scalogramme de la CWT sur un signal non-stationnaire	38
1.15	Décomposition d'un signal en approximation et détails.	40
1.16	Résultat de la décomposition en ondelette discrète du signal non-stationnaire.	40

2.1	Organigramme de l'EMD.	46
2.2	Illustration du processus de tamissage	47
2.3	Affichage des 3 IMFs et du résidu obtenus par l'application de l'EMD sur le signal stationnaire de la figure 1.4 (a).	48
2.4	Resultat de l'application de l'EMD sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b) . . .	49
2.5	Application de la VMD sur le signal non-stationnaire.	52
2.6	Affichage des 3 FBIFs obtenues par l'algorithme HTL-FS sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)	57
2.7	Affichage des 3 FBIFs obtenues par l'algorithme LTF-FS sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)	57
2.8	Construction de base de EWT	58
2.9	Affichage des 3 IMFs obtenues par l'application EWT sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)	61
2.10	Illustration graphique de la banque de filtres idéaux.	64
2.11	Affichage des 3 IMFs obtenues par l'application EFD sur un signal non stationnaire composé de la somme des 3 signaux sinusoïdale	64
3.1	Anatomie du cœur	67
3.2	Les différentes déflexions de l'ECG	69
3.3	Intervalles de l'ECG	70
3.4	ECG a 12 derivation	70
3.5	Structure d'un réseau de neurones convolutifs	74
3.6	Cartes de caractéristiques obtenues par des opérations de convolution.	75
3.7	Fonction d'activation ReLU.	75
3.8	Illustration de l'opération de pooling	76
3.9	Couches entièrement connectées	77
3.10	Architecture du LeNet-5	78
3.11	Architecture d'AlexNet	79

3.12 Architecture du VGGNet	79
3.13	81
3.14 Architecture du ResNet	82
3.15 Organigramme de la méthode de classification des signaux ECG proposée	86
3.16 Allure de trois signaux ECG relatifs aux classes ARR, CHF, NSR.	87
3.17 Représentation des temps-fréquences obtenues par les méthodes de décomposition sur les signaux ECG	88
3.18 Matrices de confusion obtenues avec les méthodes de décomposition.	91

Introduction générale

Le traitement du signal est une discipline fondamentale dans le domaine de l'ingénierie, axée sur le développement et l'application de techniques pour manipuler, analyser et interpréter les signaux.

Ces signaux décrivent des phénomènes physiques ou physiologiques et sont souvent non stationnaires et peuvent comporter Plusieurs composantes fréquentielles qui se manifestent par des oscillations évoluant dans le temps et qui sont typiquement de courte durée et se répètent rarement. Parmi ces signaux, on peut citer la parole, la musique, les signaux biomédicaux (ECG, EEG, EOG, EMG, etc.), les sons des animaux (dauphins, chauve-souris, baleines,...etc), ainsi que les signaux radar et acoustiques. Les méthodes classiques d'analyse temporelle ou fréquentielle(transformée de Fourier (TF)) ne permettent pas toujours de discerner les différentes composantes oscillantes et leurs évolutions temporelles. Pour surmonter cette limitation, des méthodes d'analyse temps-fréquence ont été développées. Ces méthodes permettent d'étudier simultanément les caractéristiques temporelles et fréquentielles d'un signal. Parmi les techniques d'analyse temps-fréquence les plus courantes, on trouve la transformée de Fourier à court terme (TFCT), les filtres de Gabor, la transformée de Wigner-Ville (TWV), la transformée de Stockwell (ST) et la transformée en ondelettes (TO). Chacune de ces méthodes propose une solution partielle pour analyser les variations temporelles des fréquences, mais elles requièrent souvent des choix complexes de paramètres et ne permettent pas toujours une extraction précise des composantes du signal d'origine. Pour remédier à ces problèmes, des techniques plus récentes proposent de décomposer un signal en un ensemble de sous-signaux monocomposantes caractérisés chacun par une seule fréquence ou par une bande de fréquence très étroite. On trouve dans cette catégorie de méthodes temps-frequence : la Décomposition Modale Empirique (EMD), la Décomposition Modale Variationnelle (VMD), la Méthode de Décomposition de Fourier (FDM), la Décomposition en Ondelettes Empiriques (EWT) et la

Décomposition Fourier Empirique (EFD).

On s'intéressera dans ce mémoire à ces méthodes de décomposition et à leurs implications dans la caractérisation des différentes arythmies du cœur. Il s'agira plus exactement d'utiliser ces méthodes pour transformer des signaux électrocardiogrammes (ECG) en images (représentations temps-fréquence), afin de les classer à l'aide des réseaux de neurones convolutifs (CNN).

Les CNNs ont révolutionné le domaine de la vision par ordinateur grâce à leur capacité à apprendre automatiquement des caractéristiques complexes à partir des images. Leur architecture unique, qui combine des couches de convolution, de pooling et entièrement connectées, leur permet d'extraire des informations pertinentes et de faire des prédictions précises. Avec des applications allant de la reconnaissance d'images à la détection d'objets et à l'analyse d'image médicale, les CNNs sont devenus des outils indispensables dans de nombreux secteurs.

Ce mémoire comporte principalement trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation des différentes méthodes classiques d'analyse temps-fréquence. Quelques notions liées aux méthodes de décomposition telles que les signaux analytiques, les signaux stationnaires et non stationnaires et la transformée de Hilbert y sont également présentées. Le deuxième chapitre, introduit la méthode de décomposition modale empirique (EMD), la méthode de décomposition modale variationnelle (VMD), la méthode de décomposition de Fourier (FDM), la décomposition en ondelettes empiriques (EWT) et la décomposition de Fourier empirique (EFD). Le troisième chapitre aborde la classification des arythmies cardiaques à base des méthodes VMD, EMD, FDM, EWT et EFD, et d'un CNN. Une conclusion générale présentant un récapitulatif des principaux points abordés tout au long du mémoire sera donnée, tout en mettant en évidence certaines perspectives envisageables pour des travaux futurs.

Chapitre 1

Méthodes classiques d'analyse temps-fréquence

1.1 Introduction

Les signaux que l'on rencontre couramment dans le monde physique sont souvent complexes et non stationnaires, ce qui rend leur exploitation directe difficile. L'analyse temporelle seule n'est généralement pas suffisante pour extraire toutes les informations pertinentes de ces signaux. Bien que la transformée de Fourier soit largement utilisée en traitement du signal, elle présente aussi des limitations lorsqu'il s'agit de signaux complexes. Pour faire face à ce problème, plusieurs outils d'analyse temps-fréquence ont été développés. Nous allons présenter brièvement dans ce chapitre les méthodes classiques d'analyse temps-fréquence.

1.2 Transformée de Fourier

L'analyse d'un signal dans le domaine temporel permet de décrire son évolution au fil du temps. Elle fournit des informations sur son amplitude, sa valeur crête, sa moyenne, ainsi que sur des caractéristiques comme la parité, la causalité, la périodicité et la durée. Toutefois, cette approche présente des limitations importantes, car elle ne révèle rien sur les fréquences présentes dans le signal. Par exemple, elle ne permet

pas de distinguer entre des sons graves et des sons aigus. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une représentation fréquentielle du signal, grâce à un outil mathématique fondamental en traitement du signal : la transformée de Fourier (TF)[1]

La transformée de Fourier d'un signal temporel $x(t)$ est définie par l'intégrale de Fourier suivante :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

où f est la fréquence.

La transformée de Fourier inverse est donnée par l'expression suivante :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df \quad (1.2)$$

La transformée de Fourier possède des propriétés très intéressantes, dont les principales sont :

— Linéarité : $TF\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha X(f) + \beta Y(f)$

— Translation : $TF\{x(t + t_0)\} = X(f)e^{j2\pi ft_0}$

— Changement d'échelle : $TF\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X(f)$

— Convolution : $TF\{x(t) * y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)$

— Symétrie Hermitienne :

$$X(-f) = X^*(f)$$

$$\text{Reel}\{X(f)\} = \text{Reel}\{X(-f)\}$$

$$\text{Img}\{X(f)\} = -\text{Img}\{X(-f)\}$$

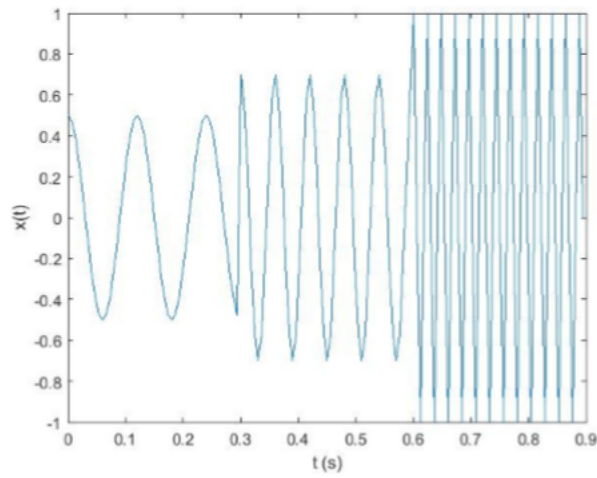
— Conservation d'énergie (théorème de Parseval) : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

La transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal réel $x(t)$ peut être complexe. Son module (spectre d'amplitude) $|X(f)|$ permet de déterminer les fréquences contenues dans le signal $x(t)$ et sa phase (spectre de phase) $\Psi(f) = \arg(X(f))$ permet de voir comment la phase du signal $x(t)$ évolue en fonction de la fréquence.

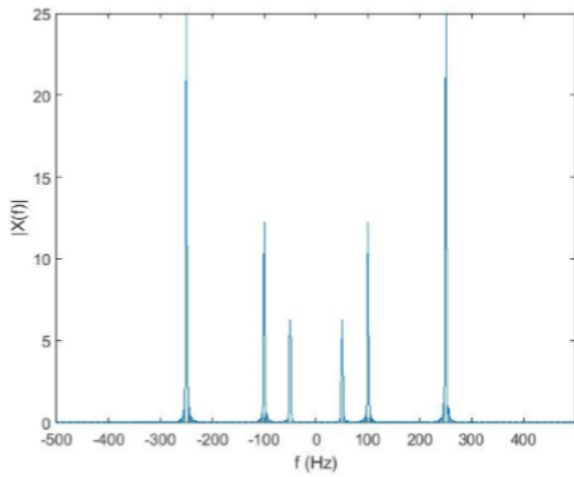
La figure 1.1 montre un exemple des spectres d'amplitude et de phase d'un signal monodimensionnel non stationnaire $x(t)$, composé de 3 signaux sinusoïdaux de fréquences $f_1 = 50Hz$, $f_2 = 100Hz$ et

$f_3 = 250\text{Hz}$ tel que :

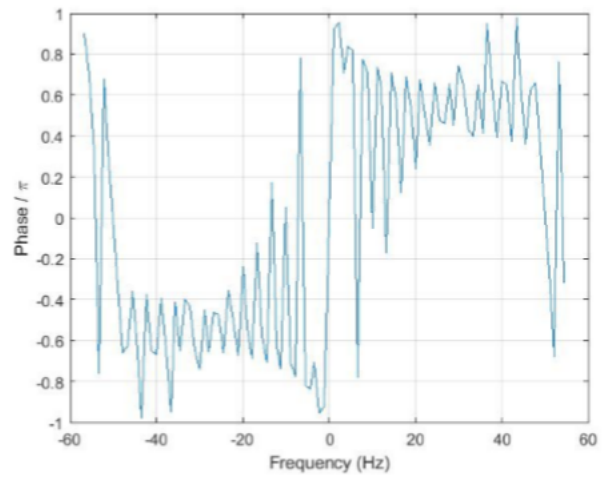
$$x(t) = \begin{cases} 0.5 \cos(2\pi f_1 t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3 \text{ s} \\ 0.7 \cos(2\pi f_2 t) & \text{si } 0.3 \text{ s} < t \leq 0.6 \text{ s} \\ \cos(2\pi f_3 t) & \text{si } 0.6 \text{ s} < t \leq 0.9 \text{ s} \end{cases} \quad (1.3)$$



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.1 – Illustration de la TF, (a) Signal non-stationnaire, (b) Spectre d'amplitude, (c) Spectre de phase

1.3 Transformée de Hilbert et le signal analytique

1.3.1 Transformée de Hilbert

La transformée de Hilbert est une transformation linéaire utilisée pour convertir un signal réel en un signal complexe [2]. Elle joue un rôle essentiel dans la construction du signal analytique, qui est la version complexe associée au signal réel.

La transformée de Hilbert d'un signal réel $x(t)$ est définie par :

$$H\{x(t)\} = y(t) = \frac{1}{\pi} V.P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' \quad (1.4)$$

$V.P$ est la valeur principale de Cauchy définie par :

$$V.P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t+\epsilon} \frac{x(t')}{t-t'} dt' + \int_{t+\epsilon}^{+\infty} \frac{x(t')}{t-t'} dt' \right] \quad (1.5)$$

D'après la relation 1.4, nous pouvons observer que la fonction $y(t)$ est équivalente à la convolution de $x(t)$ avec un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{\pi t}$:

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (1.6)$$

La TH se comporte ainsi comme un filtre linéaire invariant dans le temps, dont la réponse impulsionnelle est non causale et possède un support non borné.

L'application du théorème de Plancherel permet de calculer la densité spectrale $Y(j\omega)$ de $y(t)$ comme suit :

$$Y(j\omega) = TF\{y(t)\} = TF\{x(t)\} \cdot TF\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} \quad (1.7)$$

Soit :

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot TF\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} \quad (1.8)$$

Notons que ω est la pulsation telle que $\omega = 2\pi f$.

Le gain complexe du filtre de Hilbert est :

$$TF \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\} = -j \operatorname{sgn}(\omega) \quad (1.9)$$

Sachant que

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ -1 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

La transformée de Fourier $TF\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}$ prend la forme suivante :

$$TF \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\} = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ j & \text{si } \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Ainsi, le filtre de Hilbert possède un spectre d'amplitude égal à 1 et un spectre de phase égal à $-\frac{\pi}{2}$ pour les fréquences positives et $\frac{\pi}{2}$ pour les fréquences négatives. La densité spectrale $Y(j\omega)$ prend alors la forme suivante :

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot [-j \operatorname{sgn}(\omega)] \quad (1.12)$$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} -jX(j\omega) & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ jX(j\omega) & \text{si } \omega < 0 \end{cases} = \begin{cases} X(j\omega)e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ X(j\omega)e^{j\frac{\pi}{2}} & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce résultat montre que la fonction de la densité spectrale du signal $Y(j\omega)$ est obtenue par le changement de phase de la densité spectrale de $X(j\omega)$ par $\pm\frac{\pi}{2}$.

La TH du signal réel $x(t)$ peut être ainsi obtenue par la TF inverse de la densité spectrale $Y(j\omega)$:

$$H\{x(t)\} = y(t) = TF^{-1}\{Y(j\omega)\} \quad (1.14)$$

La Table 1.1 présente la transformée de Hilbert de quelques signaux usuels.

Signal	Transformée de Hilbert $\mathcal{H}(u(t))$
$u(t)$	$\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$
$\sin(t)$	$-\cos(t)$
$\cos(t)$	$\sin(t)$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\frac{t}{t^2+1}$
$\frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{1-\cos(t)}{t}$
$\text{Rec}(t)$	$\frac{1}{\pi} \ln \left \frac{t+1}{t-1} \right $
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$

TABLE 1.1 – Transformée de Hilbert de quelques signaux usuels.

La transformée inverse de Hilbert est définie comme suit :

$$x(t) = H^{-1}\{y(t)\} = -\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t')}{t-t'} dt' = -H\{y(t)\} = -(y(t) * \frac{1}{\pi t}) \quad (1.15)$$

Où par la relation suivante :

$$x(t) = \begin{cases} TF^{-1}\{jY(j\omega)\} & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ TF^{-1}\{-jY(j\omega)\} & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

1.3.2 Signal analytique

Tout signal sinusoïdal réel $A \cos(\omega t + \varphi)$ peut être transformé en un signal complexe $Ae^{j(\omega t + \varphi)}$ en générant une composante en quadrature de phase $A \sin(\omega t + \varphi)$, servant de partie imaginaire telle que :

$$Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + jA \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.17)$$

On peut généraliser cette opération pour des signaux réels quelconques. On parle alors de signaux analytiques.

Considérons un signal réel $x(t)$. Le signal analytique associé, noté $x_a(t)$, est un signal complexe dont la partie réelle est $x(t)$, tandis que sa partie imaginaire est un signal $y(t)$, en quadrature de phase avec $x(t)$, obtenu via la transformée de Hilbert comme suit :

$$x_a(t) = x(t) + jy(t) = x(t) + jH\{x(t)\} = a(t)e^{j\theta(t)} \quad (1.18)$$

D'un point de vue fréquentiel, le signal analytique $x_a(t)$ contient seulement les fréquences positives de $x(t)$. En effet, la transformée de Fourier de $x_a(t)$ est :

$$X_a(j\omega) = TF\{x_a(t)\} = X(j\omega) + jY(j\omega) \quad (1.19)$$

En se référant à la relation 1.12, on a :

$$X_a(j\omega) = X(j\omega) + j[-j\text{sgn}(\omega)]X(j\omega) = X(j\omega)[1 + \text{sgn}(\omega)] \quad (1.20)$$

$$X_a(j\omega) = \begin{cases} 2X(j\omega) & \text{si } \omega > 0 \\ X(j\omega) & \text{si } \omega = 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

Cette relation montre que le signal analytique ne retient que les composantes fréquentielles positives du signal réel $x(t)$, puisque les fréquences négatives du spectre $X(j\omega)$ sont éliminées. Cela n'engendre aucune perte d'information, car pour un signal $x(t) \in \mathbb{R}$, la propriété suivante est vérifiée :

$$X_a^*(j\omega) = X(j\omega) - jY(j\omega) \quad (1.22)$$

$$\begin{cases} X(j\omega) & = \frac{1}{2} [X_a(j\omega) + X_a^*(-j\omega)] \\ Y(j\omega) & = \frac{1}{2j} [X_a(j\omega) - X_a^*(-j\omega)] \end{cases} \quad (1.23)$$

La représentation analytique facilite l'accès à certaines propriétés du signal et simplifie l'utilisation de diverses techniques d'analyse. Elle permet notamment de calculer l'amplitude instantanée $a(t)$ ainsi que

la phase instantanée $\theta(t)$ du signal réel $x(t)$.

1.3.3 Fréquence et Amplitude instantanées

Pour introduire les concepts de fréquence instantanée (FI) et d'amplitude instantanée (AI), il est utile de considérer un signal $x(t)$ qui représente un régime stationnaire et stable au fil du temps [2].

Soit un signal strictement sinusoïdal (ou monochromatique) décrit par :

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.24)$$

Ce signal se décrit par trois paramètres : l'amplitude a , la fréquence f , ou la pulsation ω donnée par $\omega = 2\pi f$, ainsi que la phase initiale φ .

Il est possible d'étendre cette approche à des signaux non stationnaires en faisant dépendre l'amplitude a du temps et en modifiant l'argument du cosinus de manière à ce que sa dérivée varie également avec le temps. Ainsi, le signal serait à la fois modulé en amplitude et en fréquence.

$$x(t) = a(t) \cos(\theta(t)) \quad (1.25)$$

$\theta(t)$ est la phase instantanée du signal $x(t)$. Bien entendu, la connaissance de $a(t)$ et $\theta(t)$ permet de reconstruire de manière unique le signal $x(t)$. Toutefois, cette représentation n'est pas exclusive. Contrairement au signal sinusoïdal, un nombre infini de couples $(a(t), \theta(t))$ peut correspondre à un même signal $x(t)$. En outre, ces différentes paramétrisations ne sont pas toutes équivalentes en termes d'interprétation, et seules certaines peuvent réellement être considérées comme amplitude et phase instantanées.

Ces notions de FI et d'AI peuvent aussi être généralisées aux signaux réels en utilisant leurs représentations analytiques.

Soit $x(t)$ un signal réel et $x_a(t)$ le signal analytique correspondant tel que :

$$x_a(t) = x(t) + jy(t) \quad (1.26)$$

avec $y(t) = \text{TH}\{x(t)\}$.

$$x_a(t) = a(t)e^{j\theta(t)} \quad (1.27)$$

De cette manière, l'amplitude et la phase du signal réel $x(t)$ sont intrinsèquement liées à un signal complexe unique $x_a(t)$, dont le module et l'argument fournissent directement ces deux quantités.

L'amplitude instantanée du signal $x(t)$ est alors définie par :

$$a(t) = |x_a(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \quad (1.28)$$

Et la phase instantanée par :

$$\theta(t) = \arg(x_a(t)) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad (1.29)$$

La fréquence instantanée de $x_a(t)$, et donc de $x(t)$, n'est autre que la dérivée de la phase instantanée $\theta(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (1.30)$$

La figure 1.2 résume le principe d'estimation de la FI et de l'AI par l'intermédiaire d'un signal analytique.

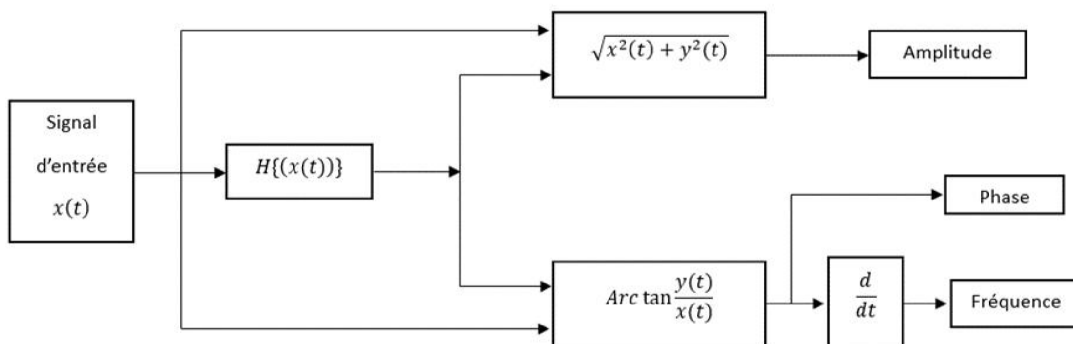


FIGURE 1.2 – Principe d'estimation de la FI et de l'AI via le signal analytique $x_a(t)$ de $x(t)$

1.3.4 Signal mono-composante et multi-composantes

Les notions de mono/multi composantes d'un signal passent par la définition des signaux dits à modulation d'amplitude et/ou modulation de fréquence (AM – FM) [2]. Un signal AM – FM multi-composantes $x(t)$ peut être représenté mathématiquement par la relation suivante :

$$x(t) = \sum_{k=1}^N x_k(t) + b(t) \quad (1.31)$$

Avec $b(t)$ un bruit additif (représentant toutes les composantes indésirables) et N le nombre de composantes. Dans cette représentation, $x_k(t)$ est un signal mono-composante défini par son amplitude instantanée $a_k(t)$ et sa fréquence instantanée $\nu_k(t)$ telle que la forme complexe $z_k(t)$ associée à $x_k(t)$ est :

$$z_k(t) = a_k(t)e^{j\omega_k t} \quad (1.32)$$

Avec :

$$\omega_k(t) = 2\pi \cdot f_k(t) \quad (1.33)$$

Dans ce modèle, si $N = 1$, le signal est dit mono-composante et si $N \geq 2$, le signal est dit multi-composantes. Sur la figure 1.3, nous pouvons remarquer qu'un signal mono-composante possède à un instant donné une seule valeur de la fréquence, contrairement au signal multi-composantes où il y a au moins deux valeurs de fréquences correspondantes à un seul instant.

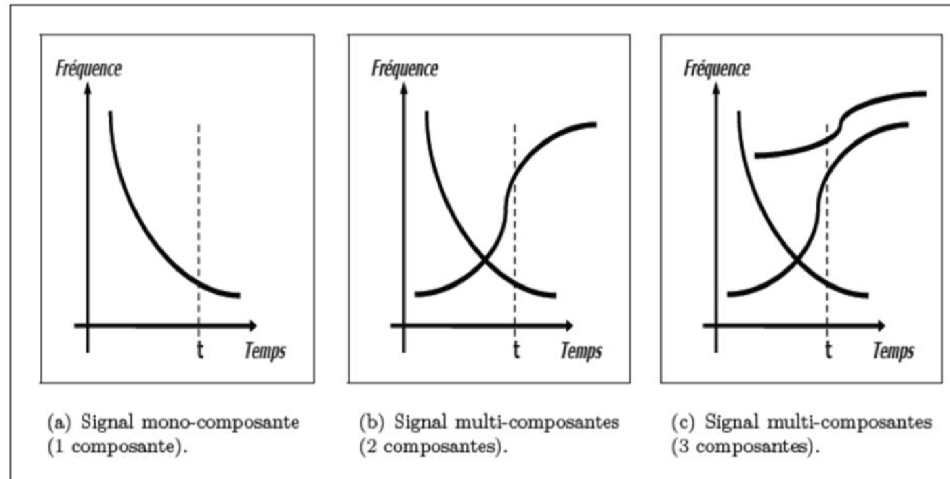


FIGURE 1.3 – Illustration de la notion de signaux mono-composantes multi-composantes

1.4 Signaux stationnaires et non stationnaires

La stationnarité est une caractéristique des processus aléatoires. Un signal est qualifié de stationnaire lorsque ses propriétés statistiques (telles que la moyenne, la variance ou l'écart type) restent inchangées lors d'une translation dans le temps. En revanche, un signal non stationnaire présente une dépendance temporelle de ces propriétés. La figure 1.1 illustre un exemple de signaux stationnaire et non stationnaire [2].

Le signal stationnaire de la figure 1.4 (a) est composé d'une somme de 3 signaux sinusoïdaux :

$$x(t) = 0.5 \cos(2\pi f_1 t) + 0.7 \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t) \quad (1.34)$$

Alors que le signal non stationnaire de la figure 1.4(b) est obtenu par :

$$x(t) = \begin{cases} 0.5 \cos(2\pi f_1 t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3 \text{ s} \\ 0.7 \cos(2\pi f_2 t) & \text{si } 0.3 \text{ s} < t \leq 0.6 \text{ s} \\ \cos(2\pi f_3 t) & \text{si } 0.6 \text{ s} < t \leq 0.9 \text{ s} \end{cases} \quad (1.35)$$

Dans les deux cas, $f_1 = 50\text{Hz}$, $f_2 = 100\text{Hz}$, $f_3 = 250\text{Hz}$.

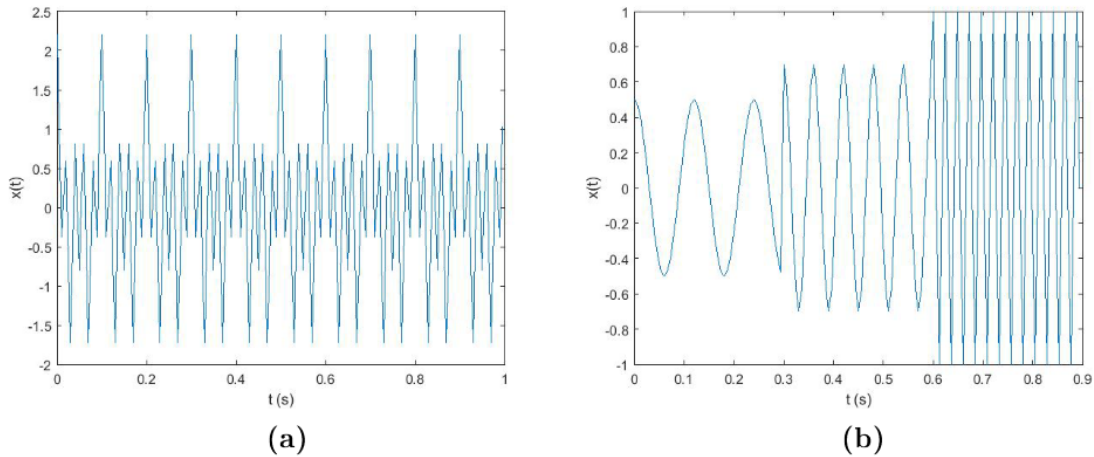


FIGURE 1.4 – (a) Signal stationnaire , (b) signal non-stationnaire

1.5 Limites de la TF et intérêt de la représentation temps-fréquence

L'analyse spectrale à l'aide de la transformée de Fourier (TF) décrit efficacement les signaux stationnaires et pseudo-stationnaires. Cependant, elle montre des limites importantes lorsqu'il s'agit de signaux non stationnaires, qui sont prédominants dans la réalité. Pour illustrer ces limites, la figure 1.5 présente la TF des signaux stationnaire et non stationnaire visualisés dans la figure 1.4.

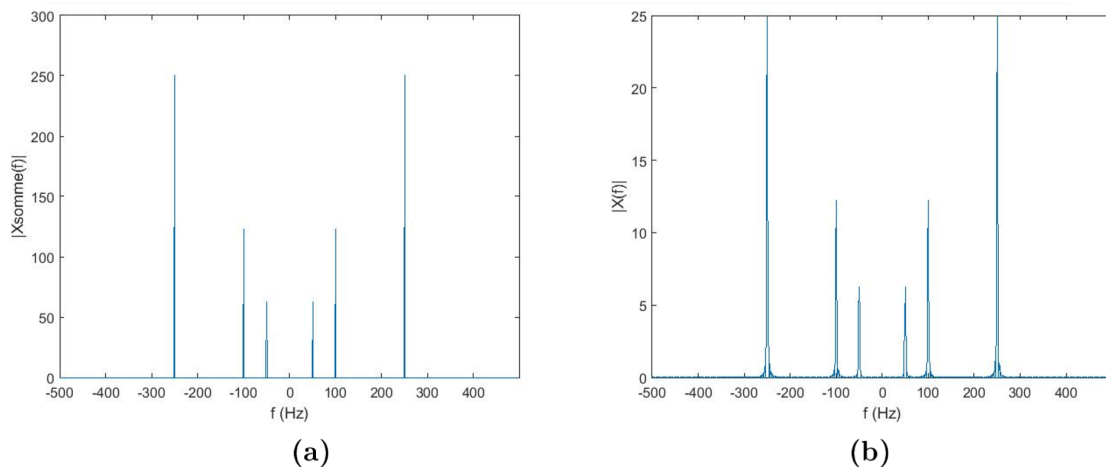


FIGURE 1.5 – Spectre de fréquences des deux signaux, (a) Stationnaire et (b) Non-Stationnaire

On observe que les spectres de fréquences des deux signaux sont presque identiques, révélant chacun la présence de trois composantes fréquentielles ($f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 100$ Hz, $f_3 = 250$ Hz), malgré la

différence entre les signaux. Afin de surmonter les limitations de la TF, diverses techniques d'analyse temps-fréquence ont été développées. Parmi ces méthodes, on peut citer :

- La transformée de Fourier à courte terme.
- La transformée de Wigner-Ville.
- La transformée de Gabor.
- La transformée en ondelettes.
- La transformée de Stockwell.

1.6 Transformée de Fourier à court terme (TFCT)

Comme mentionné précédemment, la transformée de Fourier est inadéquate pour l'analyse des signaux non stationnaires. Une approche pour résoudre ce problème consiste à appliquer la transformée de Fourier non pas sur l'ensemble du signal, mais sur des segments de celui-ci. Cette méthode est appelée transformée de Fourier à court terme ou analyse à fenêtre glissante. Elle consiste à diviser le signal en petites sections supposées stationnaires et à appliquer la transformée de Fourier sur chacune d'elles, permettant ainsi de caractériser les propriétés fréquentielles locales (spectre local). La concaténation des spectres locaux montre alors comment le spectre évolue dans le temps [2]. Ce concept est illustré dans la figure 1.6.

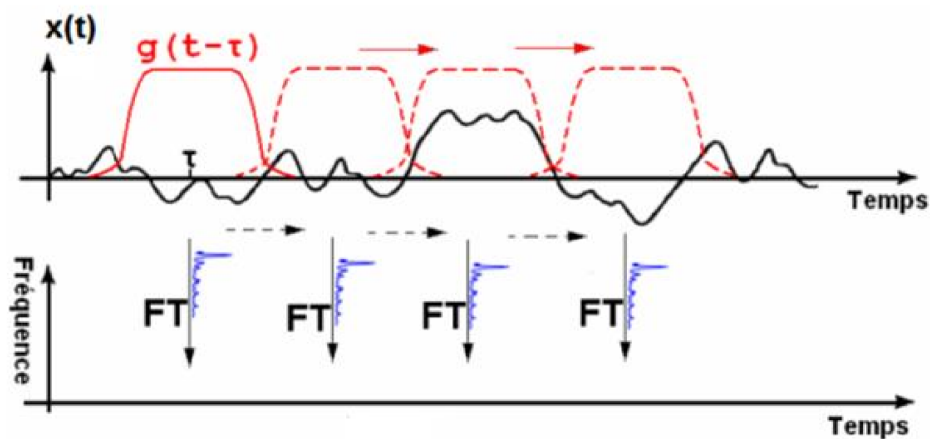


FIGURE 1.6 – Principe de la transformée de Fourier sur une fenêtre glissante.

La TFCT continue d'un signal $x(t)$ est donnée par la formule suivante :

$$G_x(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(\tau - t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.36)$$

t représente le paramètre de localisation de la fenêtre $g(\tau)$.

$G_x(f, t)$ représente le spectre du signal $x(\tau)$ centré autour de t . Pour obtenir cette représentation, il suffit de translater la fenêtre g le long du signal et d'appliquer la transformée de Fourier sur la portion du signal sélectionnée par cette fenêtre.

En pratique, on utilise le spectrogramme, qui correspond au module au carré de $G_x(f, t)$, car les coefficients de la TFCT sont généralement complexes. Le module au carré garantit que le spectrogramme est toujours une quantité réelle. Ainsi, le spectrogramme est interprété comme une densité d'énergie, soit :

$$S_x(f, t) = |G_x(f, t)|^2 \quad (1.37)$$

$$S_x(f, t) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(\tau - t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right|^2 \quad (1.38)$$

Dans le cas discret, les expressions de la TFCT et du spectrogramme discret sont respectivement :

$$G_x(k, f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)g(n - k)e^{-j2\pi fn} \quad (1.39)$$

$$S_x(k, f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)g(n - k)e^{-j2\pi fn} \right|^2 \quad (1.40)$$

La TFCT ou le spectrogramme suppose qu'un signal non stationnaire peut être approximé comme une série de segments quasi-stationnaires à l'échelle de la fenêtre courte g . La résolution temporelle dépend de la largeur de la fenêtre, tandis que la résolution fréquentielle est déterminée par la largeur de

la transformée de Fourier de cette fenêtre. Comme ces deux résolutions sont en opposition, il existe un compromis entre la précision temporelle et fréquentielle. C'est la relation d'incertitude d'Heisenberg qui stipule qu'il est impossible d'obtenir simultanément une haute résolution dans les deux domaines. De plus, la forme, la longueur de la fenêtre et le pas de déplacement doivent être choisis et rester constants pendant toute l'analyse.

La figure 1.7 montre le spectrogramme obtenu sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (a). On distingue clairement la présence des 3 fréquences et leurs instants d'apparition.

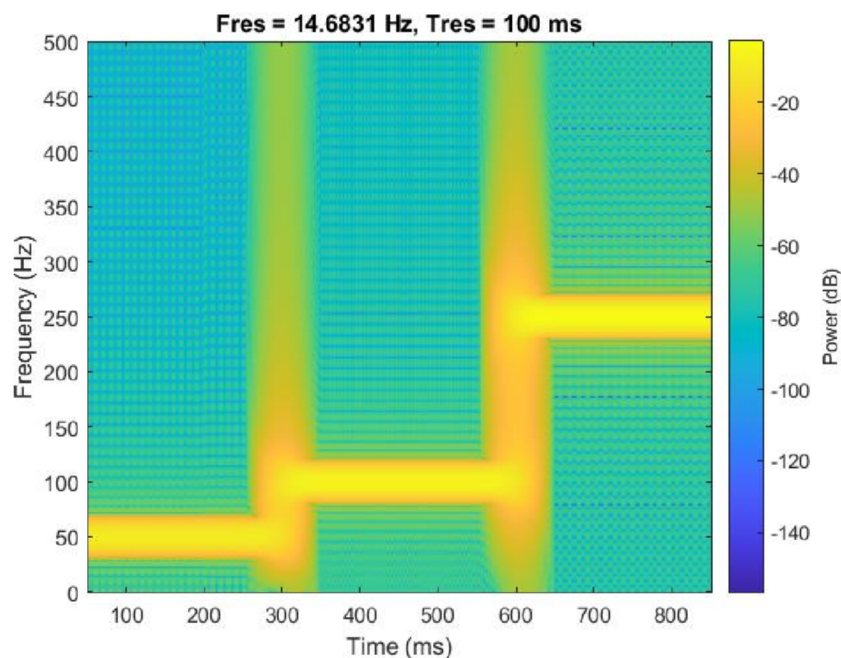


FIGURE 1.7 – Spectrogramme de la TFCT obtenue sur le signal non-stationnaire

1.7 Transformée de Wigner-Ville (TWV)

La transformée de Wigner-Ville (TWV) offre une autre méthode pour analyser les phénomènes non stationnaires en permettant de représenter l'évolution du spectre instantané du signal en fonction du temps. Elle permet de localiser simultanément l'énergie du signal à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel [3] [4]. La transformée de Wigner-Ville d'un signal $x(t)$ est une fonction à deux variables

$W_x(t, f)$, définie par :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.41)$$

où le symbole $*$ représente l'opération de conjugaison complexe.

La transformée de Winger-Ville peut être aussi définie à partir du spectre $X(f)$ du signal $x(t)$ par :

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{\eta}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\eta}{2}\right) e^{-j2\pi f\eta} d\eta \quad (1.42)$$

Cette intégrale, également nommée représentation de Wigner-Ville (RWV) ou distribution de Wigner-Ville (DWV) par différents auteurs, est définie pour tous les signaux physiques (d'énergie finie) et fournit une représentation temps-fréquence de ces signaux.

Par sa définition, la TWV est étroitement liée à la transformée de Fourier (TF). En effet, pour un instant t fixé, la TWV est la TF (ou TF inverse) du produit du signal décalé (avancé de $\frac{\tau}{2}$) par sa version décalée conjuguée (retardée de $\frac{\tau}{2}$), c'est-à-dire du signal $\Gamma_t = x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$. Cela explique que les propriétés de la TWV soient directement liées à celles des TF directes et inverses. On peut ainsi en déduire certaines de ses propriétés opératoires à partir de celles de la TF. Parmi elles, on retrouve :

- Réelle et satisfaisant le principe de la conservation de l'énergie.
- Invariance par translation temporelle : $W_x(t - t_0, f) = W_x(t, f)$.
- Invariance par translation fréquentielle : $W_x(t, f - f_0) = W_x(t, f)$.
- Accès à la fréquence instantanée $f_x(t)$ du signal $x(t)$ par :

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg x(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f W_{x_a}(t, f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t, f) df} \quad (1.43)$$

- Accès au retard de groupe : le retard de groupe peut être déterminé par :

$$t_x(f) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f W_{x_a}(t, f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_{x_a}(t, f) df} \quad (1.44)$$

où $x_a(t)$ est le signal analytique de $x(t)$.

Transformée Pseudo Wigner-Ville (TPWV)

Elle consiste à n'effectuer l'étude que sur un signal vu à travers une fenêtre de durée fixée et définie. La pseudo-distribution de Wigner-Ville est définie par :

$$PW_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.45)$$

$h(\tau)$: étant la fenêtre réduisant les termes des interférences dans le domaine temporel. La distribution ainsi obtenue tout en gardant à l'esprit que la distribution de Wigner-Ville est une analyse par l'intermédiaire d'une fenêtre glissante à court terme, ce qui en fait une proche voisine du spectrogramme.

Pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée (PDWVL)

La pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée (PDWVL) correspond à une version lissée de la TWV, à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel. Cette distribution réduit considérablement les termes d'interférence présents dans la distribution originale et offre une meilleure résolution que la TFCT. Les processus de lissage en temps et en fréquence sont indépendants et peuvent être ajustés séparément. La PDWVL s'exprime sous la forme suivante :

$$PWL_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t - t') x\left(t' + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t' - \frac{\tau}{2}\right) dt' \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.46)$$

$g(t)$ est la fenêtre réduisant les termes d'interférences dans le domaine fréquentiel et $h(\tau)$ la fenêtre réduisant les termes d'interférences dans le domaine temporel.

La fenêtre d'analyse doit être ajustée en fonction du signal étudié. Cependant, ces méthodes ont pour inconvénient d'élargir les représentations temps-fréquence du signal, comme dans le cas de la TWV, en raison des lissages temporel et fréquentiel. Il est donc fréquent de devoir ajuster plusieurs fois les paramètres de la fenêtre avant d'obtenir un résultat satisfaisant.

La figure 1.8 affiche le résultat d'application de la TWV et du pseudo de Wigner-Ville lissée sur le signal non-stationnaire de la figure 1.4 (b).

On peut aussi constater la présence des 3 fréquences et leurs instants d'apparition.

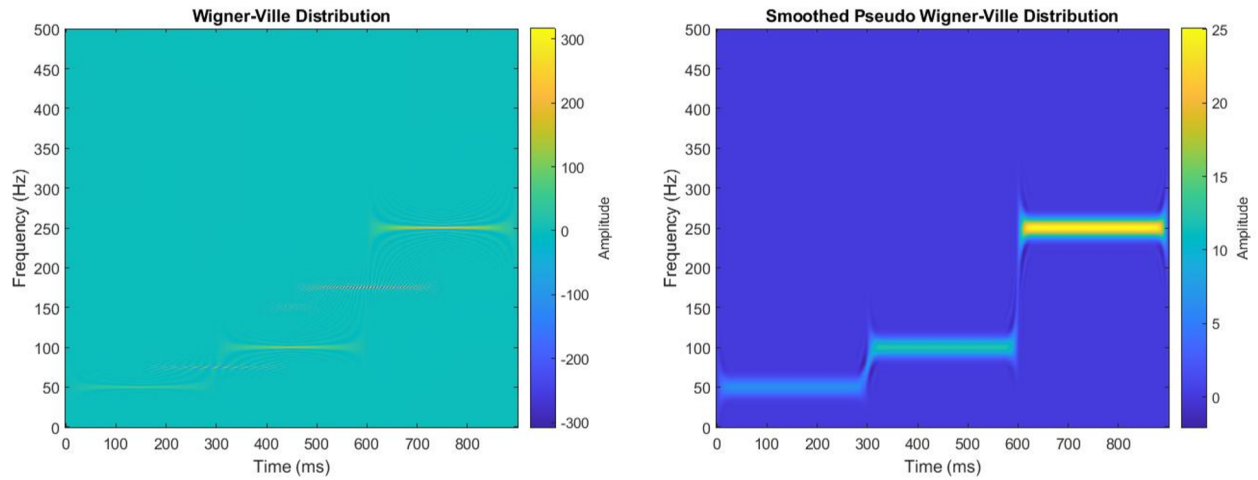


FIGURE 1.8 – Transformée de Wigner Ville et Pseudo-distribution de Wigner-Ville lissée du signal non-stationnaire.

1.8 Filtres de Gabor

Un filtre de Gabor est un filtre linéaire dont la réponse impulsionnelle est définie par une sinusoïde modulée par une fonction gaussienne, aussi appelée ondelette de Gabor [2]. L'expression d'un filtre de Gabor-1D est donnée par le produit d'une fonction gaussienne avec une fonction exponentielle complexe, telle que :

$$g(t) = \left[\frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}} \right] e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.47)$$

Où σ_t est l'écart-type de la gaussienne, il contrôle la sélectivité du filtre. Plus σ_t est grand, plus le filtre est sélectif. f_0 est la fréquence centrale ou radiale du filtre.

La figure 1.9 montre l'allure du module et des parties réelles et imaginaires d'un filtre de Gabor.

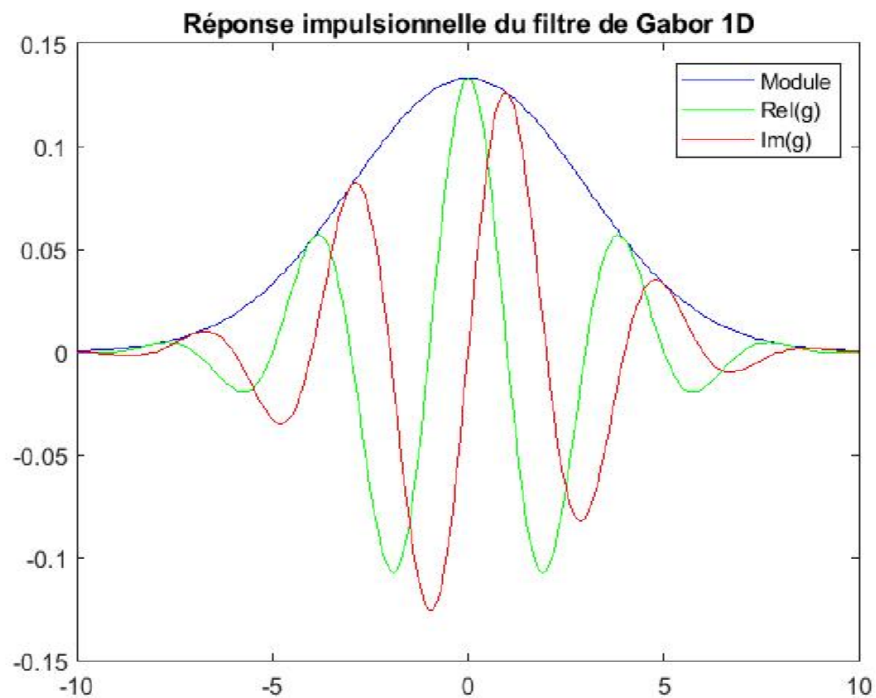


FIGURE 1.9 – Filtre de Gabor-1D

La transformée de Fourier de $g(t)$ est donnée comme suit :

$$G(f) = \exp(-2\pi^2 \sigma_t^2 (f - f_0)^2) \quad (1.48)$$

Graphiquement, la transformée de Fourier d'un filtre de Gabor-1D est constituée d'une gaussienne centrée sur t_0 (Fig.1.10).

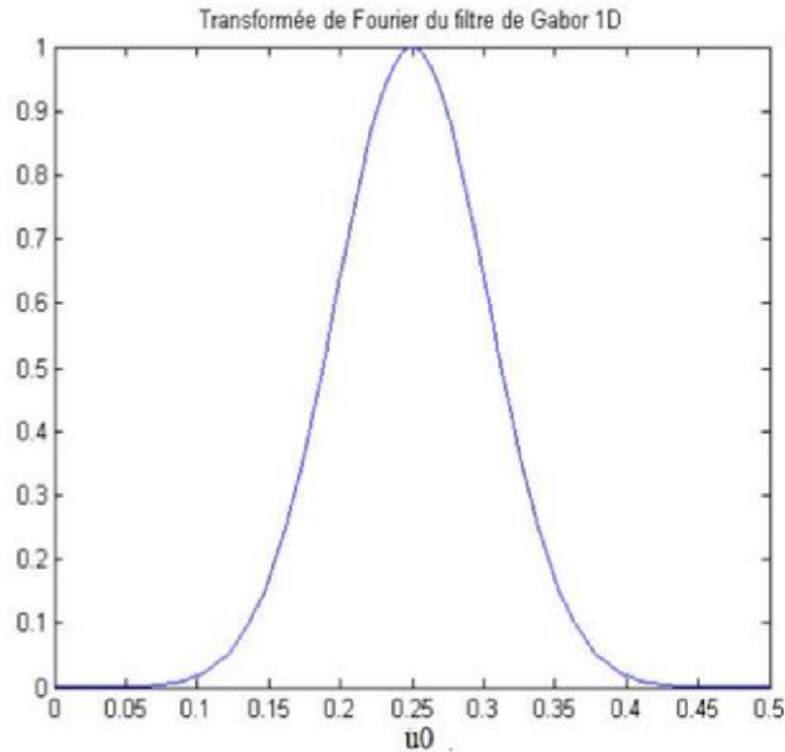


FIGURE 1.10 – Transformée de fourrier d'un filtre de Gabor 1D

Il est important de noter que, selon le principe d'incertitude d'Heisenberg ($\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$), un signal ne peut pas être parfaitement localisé simultanément en temps et en fréquence. Le filtre de Gabor minimise cette incertitude en atteignant l'égalité dans cette relation, offrant ainsi un compromis optimal entre la résolution temporelle et fréquentielle. La transformée de Gabor est obtenue par la convolution du signal $x(t)$ avec un ensemble de filtres de Gabor ayant différentes valeurs de σ_t et f_0 :

$$TG\{x(t)\} = x(t) * g(t) = TF^{-1}\{X(f) \cdot G(f)\} \quad (1.49)$$

1.9 Transformée de Stockwell (ST)

La transformée de Stockwell (ST), également appelée transformée en S, est une méthode temps-fréquence développée en 1996 par R.G. Stockwell, Lalu Mansinhaet et Robert P. Lowe [5].

1.9.1 Transformée de Stockwell continue

La transformation de Stockwell d'un signal $x(t)$ est définie comme dans la TFCT par :

$$S_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) |f| \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{(t-\tau)^2 f^2}{2}} e^{-j2\pi f t} dt \quad (1.50)$$

où f est la fréquence et τ sont des variables temporelles.

La transformée de Stockwell permet de représenter conjointement un signal en fonction du temps τ et en fréquence f .

La partie gaussienne à l'intérieur de l'intégrale agit comme une fonction de fenêtre dépendant du temps, centrée en τ sensible à la fréquence (étroite pour les grandes valeurs de f) et (large pour les petites valeurs de f), telle que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2 f^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{|f|} \quad (1.51)$$

Par conséquent, l'accumulation de tous les coefficients de Stockwell en τ aboutit à la transformée de Fourier $X(f)$ de $x(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\tau, f) d\tau = X(f) \quad (1.52)$$

En général, les coefficients de Stockwell $S(\tau, f)$ sont complexes, et que l'on peut exprimer pour une fréquence donnée f_0 par :

$$S(\tau, f_0) = A(\tau, f_0) e^{j\Phi(\tau, f_0)}, \quad (1.53)$$

Où $A(\tau, f_0)$ est l'amplitude et $\Phi(\tau, f_0)$ est la phase. La fréquence instantanée est donnée par :

$$IF(\tau, f_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \{2\pi f_0 \tau + \Phi(\tau, f_0)\} \quad (1.54)$$

La transformée de Stockwell inverse est définie par :

$$x(t) = S^{-1}\{S_x(\tau, f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau, f) d\tau \right) e^{j2\pi f t} df \quad (1.55)$$

La transformée de Stockwell peut être également définie à partir de la TF de $x(t)$ par :

$$S_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\alpha + f) e^{-2\pi^2 \alpha^2 f^2} e^{j2\pi \alpha \tau} d\alpha \quad (1.56)$$

1.9.2 Transformée de Stockwell discrète

Pour un signal discret $x(n)$, $n = 0, \dots, N-1$ constitué de N échantillons, la transformée de Stockwell discrète (DST) peut être définie suivant la version discrète de l'équation (1.56) :

$$S(m, k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n+k) e^{-\frac{2\pi^2 n^2}{k^2}} e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (1.57)$$

avec k et $m = 0, 1, \dots, N-1$, et $X(k)$ la transformée de Fourier discrète (DFT) de $x(n)$.

Pour $k = 0$, nous avons :

$$S(m, 0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \quad (1.58)$$

et :

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S(m, k) = X(k) \quad (1.59)$$

Le signal original $x(n)$ peut être récupéré à partir des coefficients de Stockwell par :

$$x(n) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{m=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{N-1} S(m, k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (1.60)$$

Pour déterminer les N^2 coefficients de $S(m, k)$, on peut utiliser la FFT. Plus précisément, pour une valeur fixe de m dans l'équation (1.57), les coefficients DST pour différentes valeurs de m peuvent être considérés comme la transformée de Fourier inverse du terme $X[n+k] e^{-2\pi^2 m^2/k^2}$, ce qui permet de les calculer avec une complexité de $O(N \log N)$, similaire à celle de la FFT [6]. La figure 1.11 montre le spectre temps-fréquence obtenu par la ST sur le signal non stationnaire. On constate non seulement la

présence des 3 fréquences du signal mais aussi d'autres fréquences.

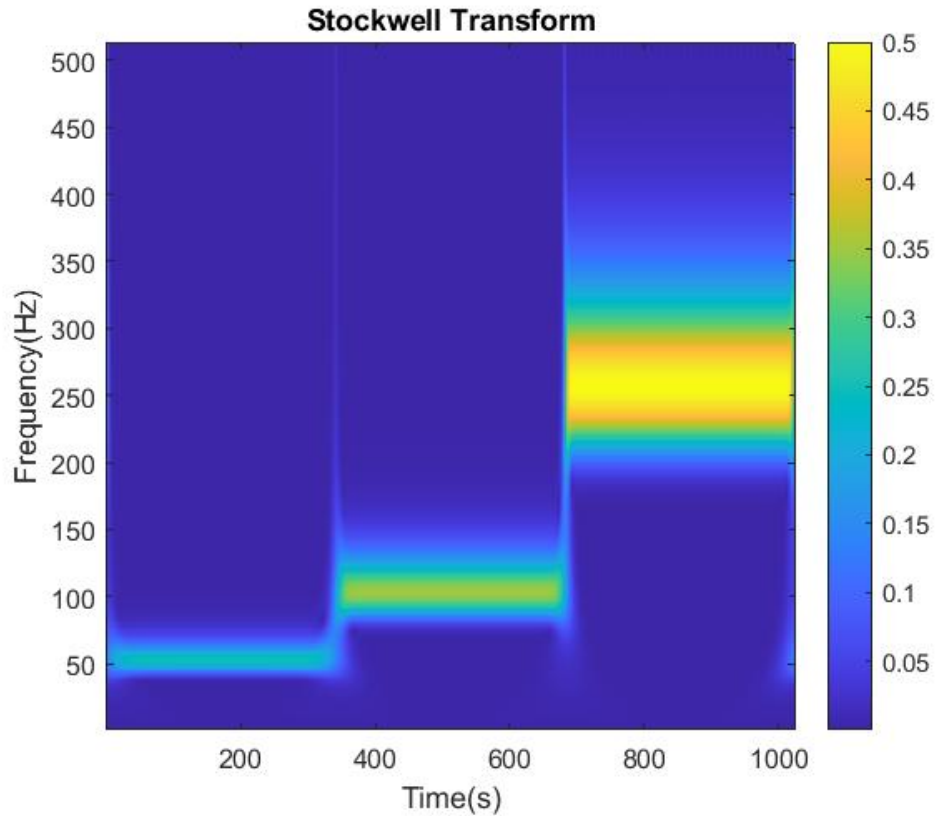


FIGURE 1.11 – Spectre temps-fréquence obtenu par la ST sur le signal non stationnaire

1.10 Transformée en ondelettes (T.O)

La T.O est réalisée au moyen d'une fonction $\Psi(t)$ appelée ondelette de base (ou ondelette mère) qui permet de spécifier les caractéristiques du signal que l'on souhaite détecter [7]. Une ondelette $\Psi(t)$ est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{Moyenne nulle}) \quad (1.61)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{Énergie finie}) \quad (1.62)$$

La figure 1.12 montre quelques exemples d'ondelettes.

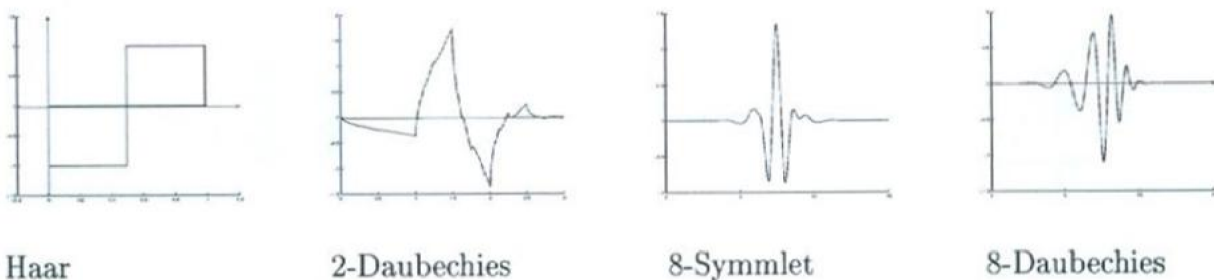


FIGURE 1.12 – Exemples de fonctions ondelettes

L'analyse en ondelettes consiste à positionner, dans le domaine temporel, l'ondelette mère en regard de la partie du signal à traiter. On parlera alors de la translation par l'utilisation du facteur b . L'ondelette mère est ensuite dilatée ou contractée, par l'utilisation du facteur d'échelle noté a , permettant de concentrer l'analyse sur une gamme donnée d'oscillations. Quand l'ondelette est dilatée, l'analyse explore les oscillations rapides comme celle contenue dans une discontinuité du signal. La transformée en ondelettes continue ou continuous wavelet transform (CWT) d'un signal $x(t)$ est formulée par :

$$\omega(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi_{a,b}^*(t) dt \quad (1.63)$$

$\Psi_{a,b}^*(t)$ est le complexe conjugué de $\Psi_{a,b}(t)$. $\Psi_{a,b}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ est appelée ondelette analysante, elle traduit la translation et la dilatation de l'ondelette mère $\Psi(t)$. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ est un facteur de normalisation permettant d'avoir la même énergie à toutes les échelles.

Le coefficient d'ondelette $\omega(a, b)$ du signal $x(t)$ dépend de la forme de celui-ci au voisinage du temps b . Quand $x(t)$ varie peu dans le temps, son produit par l'ondelette Ψ engendre une petite aire, autrement dit $\omega(a, b)$ est petit. Au contraire, lorsque la séquence du signal est irrégulière et que ses variations de fréquence sont comparables à celles de l'ondelette, l'aire du produit entre le signal et l'ondelette est importante. La valeur d'un coefficient est d'autant plus grande que la fréquence du signal analysé qui coïncide avec celle de l'ondelette. L'ondelette est localisée autour de sa fréquence centrale f_0 , le fait de parcourir l'axe des échelles a revient à explorer l'axe des fréquences f . On fait alors correspondre au paramètre d'échelle a une fréquence $f = f_0 a$. La transformation temps-échelle devient une transformation temps-fréquence au même titre que la transformation de Fourier à court terme.

Une autre caractéristique de l'ondelette dilatée est d'être plus diffusée dans le temps est donc d'avoir un spectre plus concentré autour de sa fréquence centrale. L'inverse est constaté pour l'ondelette contractée. La figure 1.13 illustre les propriétés temporelles (image de gauche) et fréquentielles (image de droite) de 3 échelles différentes d'une ondelette.

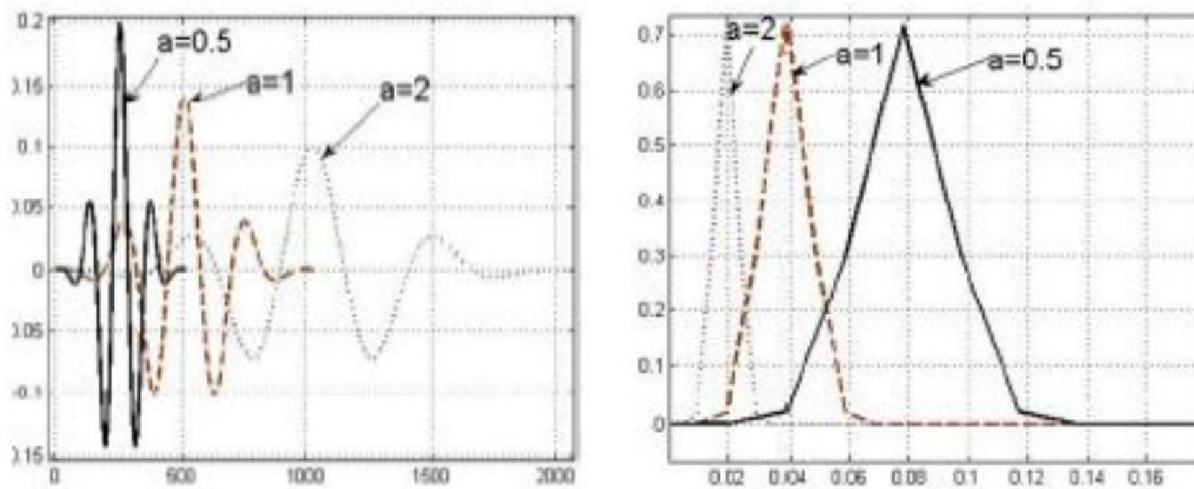


FIGURE 1.13 – Exemple d'une ondelette mère contractée et dilatée : $a = 0.5$ correspond à une ondelette contractée, $a = 1$ correspond à l'ondelette de base ou l'ondelette mère et $a = 2$ correspond à une ondelette dilatée.

La T.O de l'équation (1.63) est décrite comme un produit de convolution entre le signal $x(t)$ et un filtre de réponse impulsionnelle $\Psi_{a,b}^*(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(-\frac{t}{a}\right)$.

La figure 1.14 montre le scalogramme de la transformée en ondelettes continue $|\omega(a,b)|^2$ sur le signal non-stationnaire de la figure 1.4 (b). On distingue également les 3 fréquences et leurs instants d'apparition.

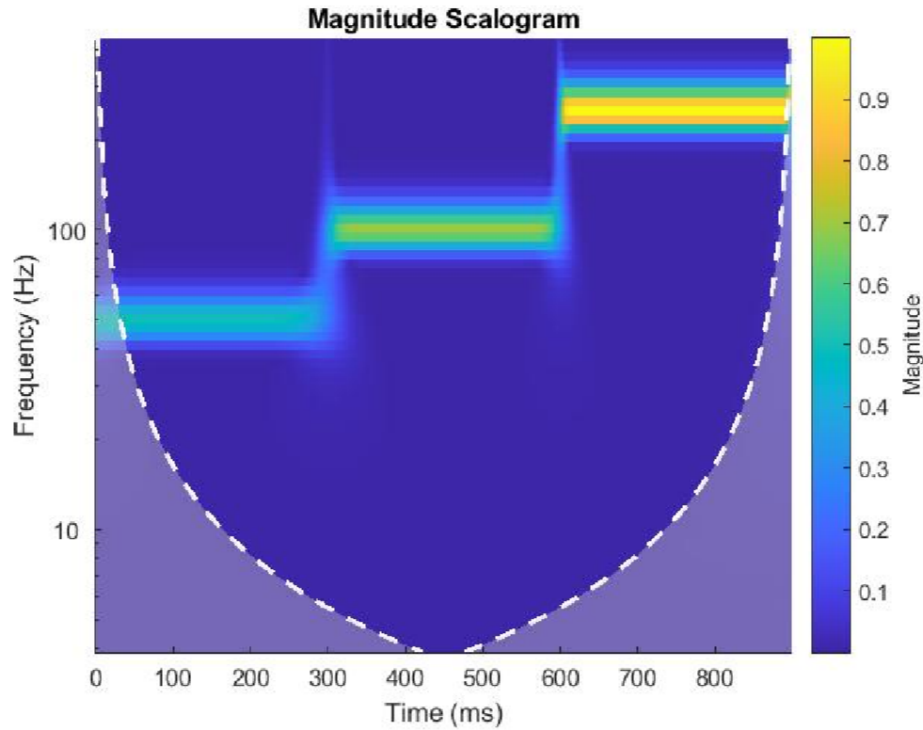


FIGURE 1.14 – Scalogramme de la CWT sur un signal non-stationnaire

Le signal $x(t)$ peut être reconstruit à partir des coefficients $w(a, b)$ et des fonctions d'ondelettes utilisées lors de la décomposition. Cette reconstruction s'effectue par le biais de la transformée en ondelettes inverse formulée comme suit :

$$x(t) = \frac{1}{C_{\Psi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(a, b) \frac{1}{a^2} \Psi_{a,b}(t) da db \quad (1.64)$$

C_{Ψ} est une constante telle que :

$$C_{\Psi} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Psi(w)}{|w|} dw \quad (1.65)$$

1.10.1 Transformée en ondelettes discrète

Dans la CWT, les paramètres de dilatation et de translation (a, b) varient continuellement. La T.O discrète (TOD) a été proposée afin de faciliter l'implémentation en utilisant un ensemble discret d'échelles (a) et de translations (b) . En d'autres termes, cette transformée décompose le signal en un ensemble d'ondelettes mutuellement orthogonales, ce qui constitue la différence principale avec la transformée en

ondelettes continue.

La T.O.D d'un signal $x(t)$ utilise une fonction ondelette $\Psi_{a,b}(t)$ telle que :

$$a = a_0^j; \quad b = kb_0a_0^j$$

avec $b_0 \in \mathbb{R}^*$ et $j, k \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, la T.O.D prend la forme suivante.

$$C_x(j, k) = a_0^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi_{j,k}^*(t) dt \quad (1.66)$$

En pratique, $a_0 = 2$ et $b_0 = 1$, pour aboutir à

$$C_x(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi(2^{-j}t, k) dt \quad (1.67)$$

La reconstruction du signal à partir de ses coefficients est obtenue par :

$$x(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C(j, k) \Psi_{j,k}(t) \quad (1.68)$$

En pratique, la T.O.D est réalisée en s'appuyant sur une analyse multi-résolution. Celle-ci est décrite par l'algorithme de décomposition bien connu proposé par Yves Meyer et Stéphane Mallat. Cet algorithme utilise un banc de filtres comprenant un filtre passe-bas (PB) et un filtre passe-haut (PH), ainsi qu'une opération de sous-échantillonnage afin de décomposer le signal d'entrée $x(t)$ en une série de signaux détails et approximations. À chaque résolution, la taille des signaux approximations et détails est divisée par deux. La figure 1.15 illustre le principe de cet algorithme. La figure 1.16 montre le résultat de la décomposition du signal non-stationnaire de la figure 1.4(b).

On constate que les premiers signaux détails oscillent plus rapidement que les derniers et que le signal approximation final contient seulement les basses fréquences. Les signaux détails $D4$, $D3$ et $D1$ correspondent aux 3 signaux sinusoïdaux qui composent le signal non stationnaire.

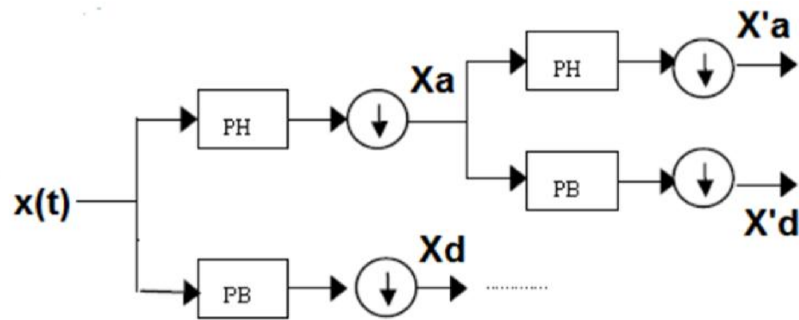


FIGURE 1.15 – Décomposition d'un signal en approximation et détails.

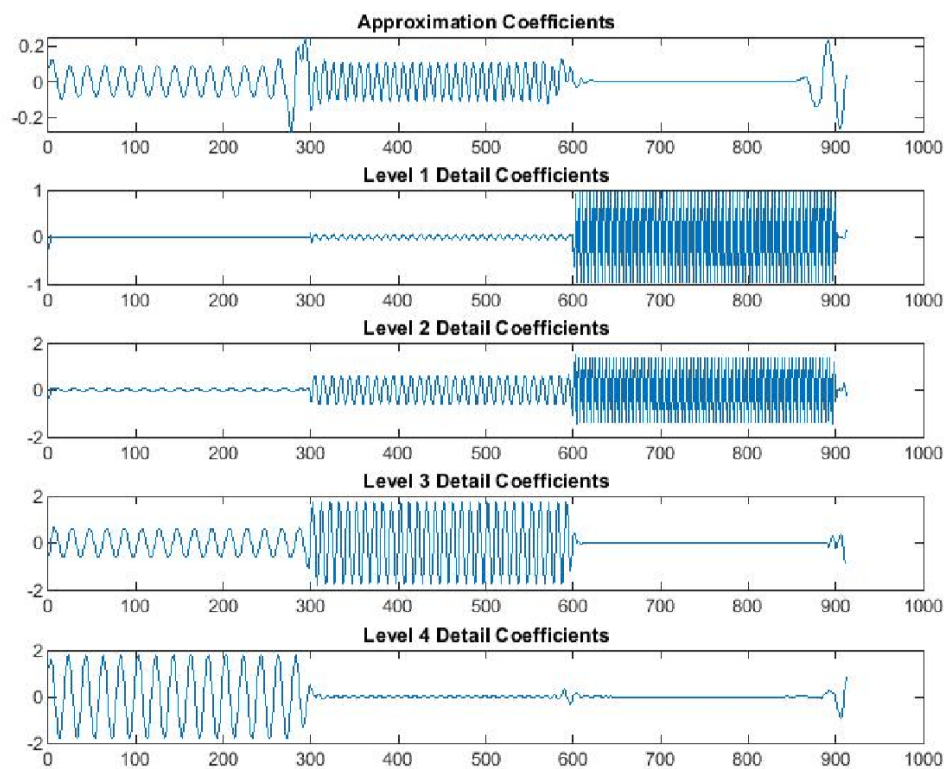


FIGURE 1.16 – Résultat de la décomposition en ondelette discrète du signal non-stationnaire.

1.10.2 Inconvénients de la transformée en ondelettes

L'inconvénient majeur de la transformée en ondelettes est que son application nécessite la spécification de la fonction de base ou ondelette mère. De plus, l'ondelette mère doit être la même pour toute la durée du signal, ce qui n'est pas tout à fait juste vu le caractère non-stationnaire du signal. La forme de l'ondelette mère est importante, mais il est aussi important de bien choisir sa durée et sa largeur de

bande. Ces paramètres déterminent les résolutions de la transformée dans le temps et les fréquences. De plus, cette méthode est conçue pour les signaux linéaires non-stationnaires.

1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques notions sur les signaux en général et mis en évidence les limites de la transformée de Fourier (TF) pour représenter correctement les signaux non stationnaires. Cela nous a amené à étudier les représentations temps-fréquence. Nous avons ainsi examiné quelques transformées temps-fréquence bien connues, telles que la transformée de Fourier à court terme (TFCT), la transformée en ondelettes (TO), la transformée de Wigner-Ville (TWV), la transformée de Gabor et la transformée de Stockwell (ST). Ces méthodes offrent une meilleure représentation des signaux non stationnaires. Cependant, la TFCT, la ST et les variantes de la TWV (comme la TPWV et la PDWVL) présentent l'inconvénient de nécessiter le choix d'une fenêtre glissante appropriée. De plus, la TWV souffre de termes d'interaction qui peuvent fausser les résultats. La transformée de Stockwell présente l'inconvénient de faire apparaître des fréquences parasites. La transformée en ondelettes propose une analyse temps-échelle, mais le choix de l'ondelette mère reste complexe. En outre, à l'exception de la transformée en ondelettes discrète (TOD), aucune de ces méthodes ne permet de retrouver toutes les composantes formant le signal d'origine. Pour pallier tous ces inconvénients, nous étudierons dans le prochain chapitre des nouvelles techniques récentes d'analyse temps-fréquence basée sur la décomposition des signaux en un ensemble de signaux monocomposantes ou caractérisés par une bande de fréquences très étroite.

Chapitre 2

Méthodes de décomposition des signaux

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons constaté que les méthodes classiques d'analyse temps-fréquence ont la capacité de représenter un signal conjointement en temps et en fréquence, mais ne permettent pas de retrouver toutes les composantes du signal. On s'intéressera dans ce chapitre à d'autres techniques plus récentes ayant la capacité de décomposer un signal en un ensemble de signaux mono-composantes. Ces cinq méthodes d'analyse temps-fréquences sont la décomposition modale empirique (EMD) et la décomposition modale variationnelle (VMD), la méthode de décomposition de Fourier (FDM), la transformée en ondelettes empiriques (EWT) et la décomposition de Fourier empirique (EFD).

2.2 Décomposition Empirique en Modes (EMD)

L'Empirical Mode Decomposition (EMD) est une méthode de traitement du signal développée en 1996 par Norden Huang de l'Université Centrale Nationale de Taïwan. Cette approche novatrice a pour objectif de décomposer tout signal oscillant en un nombre fini de composantes, caractérisées par des oscillations de fréquence instantanée décroissante. Ce qui distingue l'EMD des autres méthodes temps-fréquence classiques est son absence de dépendance à l'égard de filtres fréquentiels prédéfinis, comme c'est le cas dans la transformation en ondelettes. Au lieu de cela, l'EMD est entièrement pilotée par

les données, avec une identification des composantes rapides effectuée localement et relativement à une échelle temporelle définie par l'intervalle entre les extrema successifs du signal [8].

L'idée fondamentale de l'EMD est de décomposer un signal en un ensemble fini de signaux mono-composantes appelés IMFs (Intrinsic Mode Functions). Chaque IMF est de type AM-FM (Amplitude Modulation - Frequency Modulation) avec une moyenne nulle. La reconstruction du signal original sans perte d'information est possible en sommant toutes les IMFs avec le résidu. Bien que l'extraction des IMFs soit une opération non linéaire, leur combinaison pour la reconstruction du signal est linéaire.

L'EMD est souvent associée à la transformée de Hilbert (TH) pour estimer l'amplitude et la fréquence instantanée de chaque IMF. Cette association, connue sous le nom de transformée de Huang-Hilbert (THH), permet une description temps-fréquence du signal. Cette méthode a été largement utilisée dans divers domaines tels que l'océanographie, la sismologie, la biologie, et plus généralement pour l'analyse de signaux non stationnaires.

Concrètement l'EMD vise à décomposer un signal $x(t)$ en un ensemble de composantes intrinsèques $u_n(t)$, appelées fonctions de mode intrinsèque (IMFs), telles que :

$$x(t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) + r(t), \quad \text{avec } N \in \mathbb{N}^* \quad (2.1)$$

Où $r(t)$ est un résidu (tendance) et N est le nombre total d'IMFs.

2.2.1 Définition de l'Intrinsic Mode Function (IMF)

Une IMF est une fonction de moyenne locale nulle caractérisée par deux propriétés principales :

- Nombre égal d'extrema et de passages par zéro : Dans une IMF, le nombre de maxima et de minima est approximativement égal au nombre de passages par zéro, ce qui garantit que l'IMF représente bien les oscillations locales du signal.
- Fréquence modulée : Les IMFs peuvent contenir des oscillations dont la fréquence peut varier avec le temps, ce qui permet de capturer les variations non stationnaires du signal.

Les IMFs sont obtenues à partir du signal original par un processus itératif appelé "Tamissage". Chaque itération de l'EMD produit une nouvelle IMF, et ce processus se poursuit jusqu'à ce que le résidu obtenu soit suffisamment petit pour être considéré comme négligeable.

2.2.2 Algorithme de l'EMD

Le processus de tamisage, également appelé "sifting process" en anglais, est une étape clé de l'EMD. Il consiste à extraire une IMF à partir d'un signal donné. L'IMF ainsi obtenue peut être considérée comme les détails du signal, représentant les variations rapides de celui-ci. Ce processus de tamisage implique une série d'itérations où une IMF est extraite à chaque étape. Pour cela, les extrêmes locaux (maxima et minima) du signal sont identifiés, puis une moyenne entre les enveloppes supérieure et inférieure est calculée. Cette moyenne est ensuite soustraite du signal pour obtenir une première IMF. Ce processus est répété itérativement sur le résidu obtenu jusqu'à ce qu'une IMF satisfaisante soit extraite. Ainsi, le processus de tamisage permet de capturer les détails significatifs et les variations rapides du signal, en les isolant dans des IMFs distinctes. Ces IMFs sont ensuite combinées pour reconstruire le signal original.

Les étapes permettant d'extraire les IMFs sont

- **Étape 1** : On initialise le signal $h(t)$ et le signal résidu $r(t)$ par $x(t)$.
- **Étape 2** : Les maxima et minima locaux du signal à décomposer sont identifiés. Ces points d'extrémité constituent la base pour la création des enveloppes du signal $h(t)$.
- **Étape 3** : Les maxima et les minima sont interpolés respectivement pour former les enveloppes supérieure $U_{\max}(t)$ et inférieure $U_{\min}(t)$ du signal, en utilisant généralement des splines cubiques afin de garantir une courbe lisse reliant les points d'extrémité.
- **Étape 4** : La moyenne des enveloppes supérieure et inférieure est calculée. Cette moyenne représente la tendance locale du signal.

$$m(t) = \frac{1}{2}(U_{\max}(t) + U_{\min}(t)) \quad (2.2)$$

- **Étape 5** : La moyenne des enveloppes est soustraite du signal original pour obtenir un signal résiduel, qui est considéré comme un candidat IMF.

$$d(t) = h(t) - m(t) \quad (2.3)$$

- **Étape 6** : Remplacer $h(t)$ par $d(t)$ et appliquer les étapes précédentes (2 à 6) à $h(t)$ jusqu'à ce qu'une IMF soit obtenue.
- **Étape 7** : À l'issue de l'étape 6, qui indique la fin du processus de tamisage, on recueille la première composante IMF $h_1(t) = d(t)$ et on calcule le signal résidu

$$r(t) = h(t) - d(t) \quad (2.4)$$

Cette première IMF forme la composante haute fréquence du signal et le résidu $r(t)$ contient les composantes des plus basses fréquences. Le premier signal de la figure 2.2 montre la première composante (IMF1) $h_1(t)$.

- **Étape 8** : On remplace $h(t)$ par $r(t)$ et on refait les étapes 2 à 8 afin d'extraire les autres composantes IMFs $h_i(t)$. Ces étapes sont répétées jusqu'à atteindre le nombre d'IMFs désiré ou jusqu'à ce que le nombre d'extréma de $h(t)$ soit inférieur à 2.
- **Étape 9** : Le signal résiduel $r(t)$ final est souvent interprété comme la tendance non oscillatoire du signal d'origine.

$$r(t) = x(t) - \sum_{i=1}^N h_i(t) \quad (2.5)$$

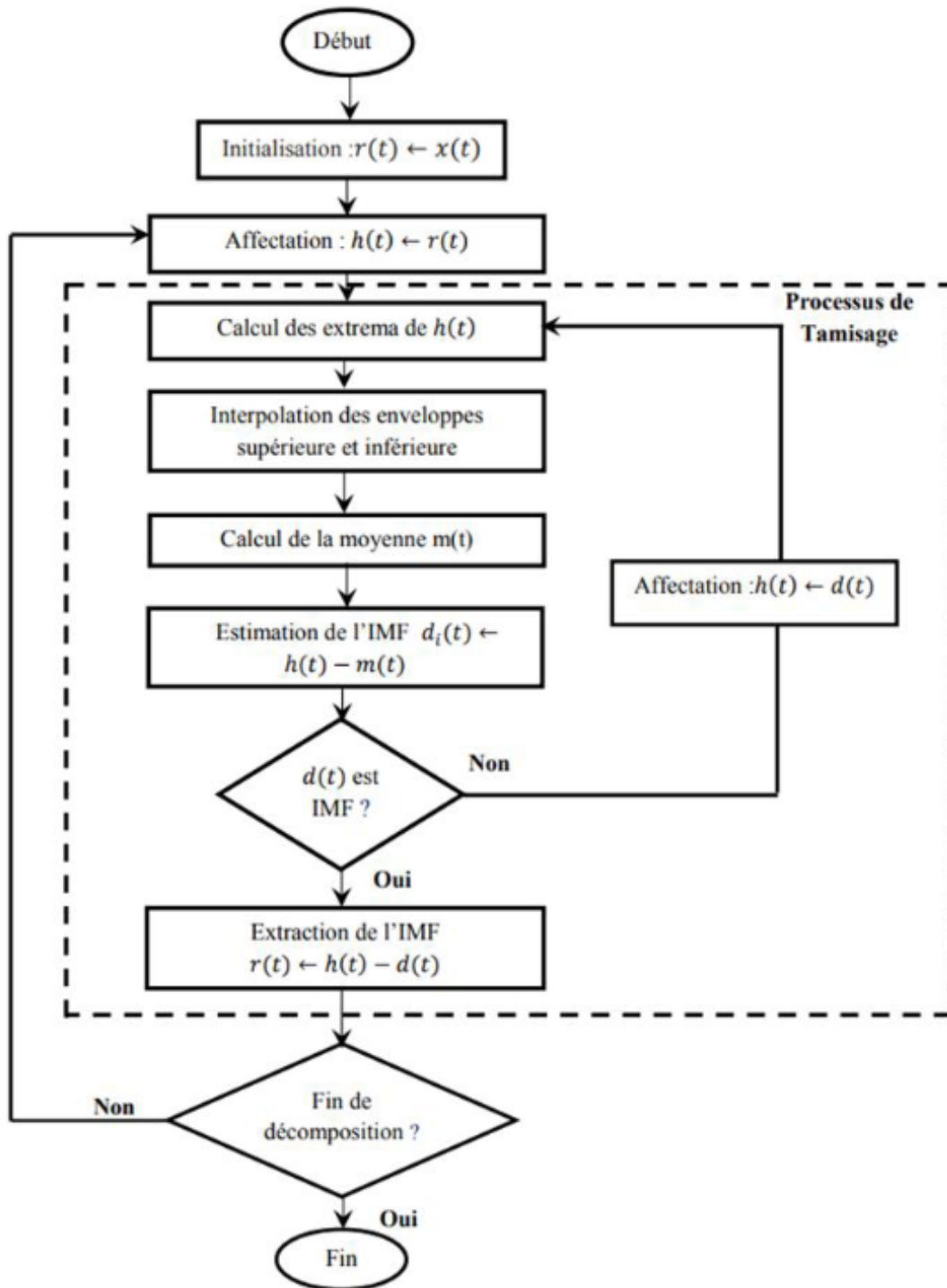


FIGURE 2.1 – Organigramme de l'EMD.

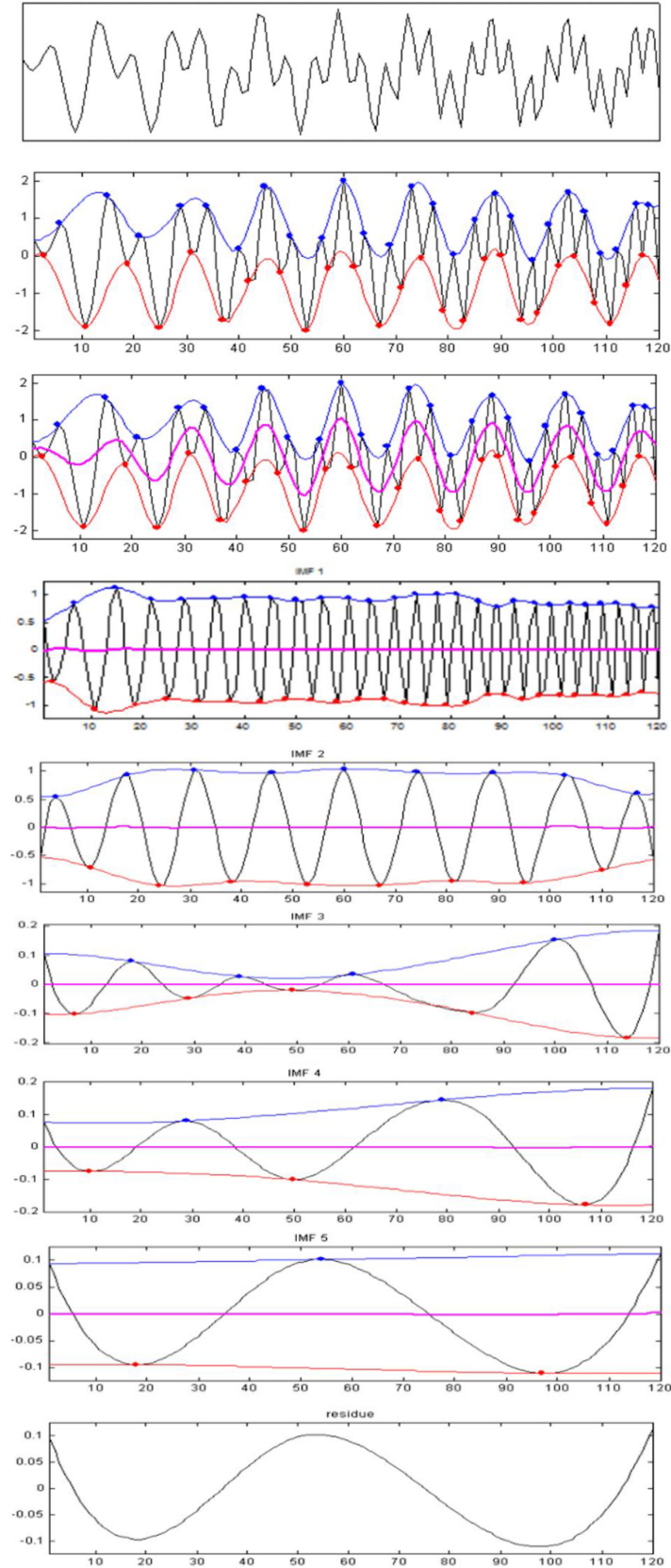


FIGURE 2.2 – Illustration du processus de tamissage

2.2.3 Critère d'arrêt du processus de tamisage

Dans l'étape 6 de l'algorithme EMD, un critère d'arrêt doit être défini pour assurer que le signal obtenu vérifie bien les propriétés d'une IMF, tout en limitant le nombre d'itérations. Le critère proposé par Huang et al. est basé sur le calcul de la variation relative du signal entre deux itérations successives de l'algorithme.

$$SD(j) = \sum_{t=0}^T \left[\frac{|h_{j-1}(t) - h_j(t)|^2}{h_{j-1}^2(t)} \right] \quad (2.7)$$

Le processus de tamissage s'arrête lorsque la différence entre deux tamisages consécutifs est inférieure à un seuil prédéfini ϵ , dont la valeur est comprise entre 0,2 et 0,3.

La figure 2.3 affiche les 3 IMFs ainsi que le résidu obtenus par l'application de l'EMD sur le signal stationnaire composé de la somme des 3 signaux sinusoïdaux de la figure 1.4(a). La première IMF représente la plus grande composante fréquentielle (250 Hz), la seconde la composante fréquentielle de (100 Hz) et la troisième la composante fréquentielle la plus basse (50 Hz). Le résidu est un signal nul.

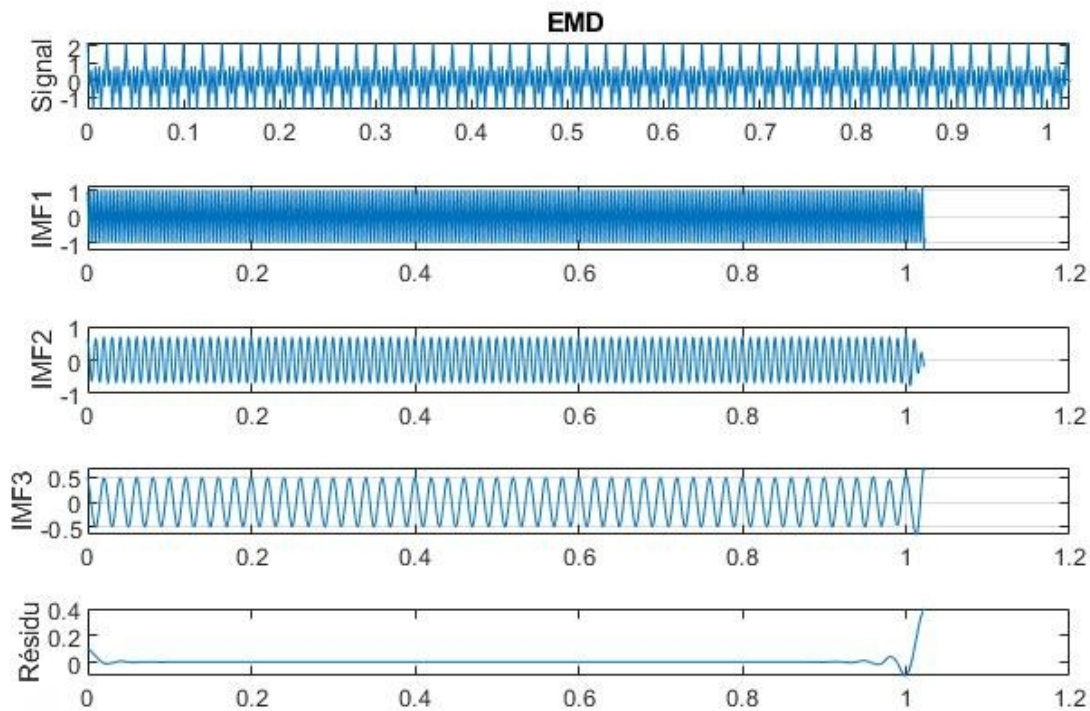


FIGURE 2.3 – Affichage des 3 IMFs et du résidu obtenus par l'application de l'EMD sur le signal stationnaire de la figure 1.4 (a).

2.2.4 Inconvénients de l'EMD

L'EMD présente plusieurs avantages (peu de paramètres de réglage, facile à implémenter,...etc) mais aussi des inconvénients. Elle est sensible au bruit, ce qui peut entraîner des IMFs de mauvaise qualité ou une décomposition incorrecte, surtout lorsque le rapport signal sur bruit est faible. L'EMD implique souvent des choix subjectifs, comme le nombre d'IMFs à extraire ou les critères pour déterminer si une IMF est satisfaisante. Sa nature intrinsèquement non linéaire peut rendre la théorie d'analyse plus complexe. L'EMD suppose que le signal est non stationnaire, ce qui peut ne pas être approprié dans certains cas. Le phénomène de "mode mixing" peut compliquer la séparation des différentes composantes du signal et affecter la qualité de la décomposition. En effet, si l'on applique l'EMD sur un signal non stationnaire, nous constatons que les IMFs obtenues ne reflètent pas les trois composantes fréquentielles que contient le signal (Fig.2.4). Pour faire face à ces inconvénients, plusieurs techniques ont été proposées. Parmi celles-ci, on peut citer la Décomposition en Modes Variationnels (VMD), la Méthode de Décomposition de Fourier (FDM), la Méthode de Transformation en Ondelettes Empiriques (EWT) et la Décomposition de Fourier Empirique (EFD).

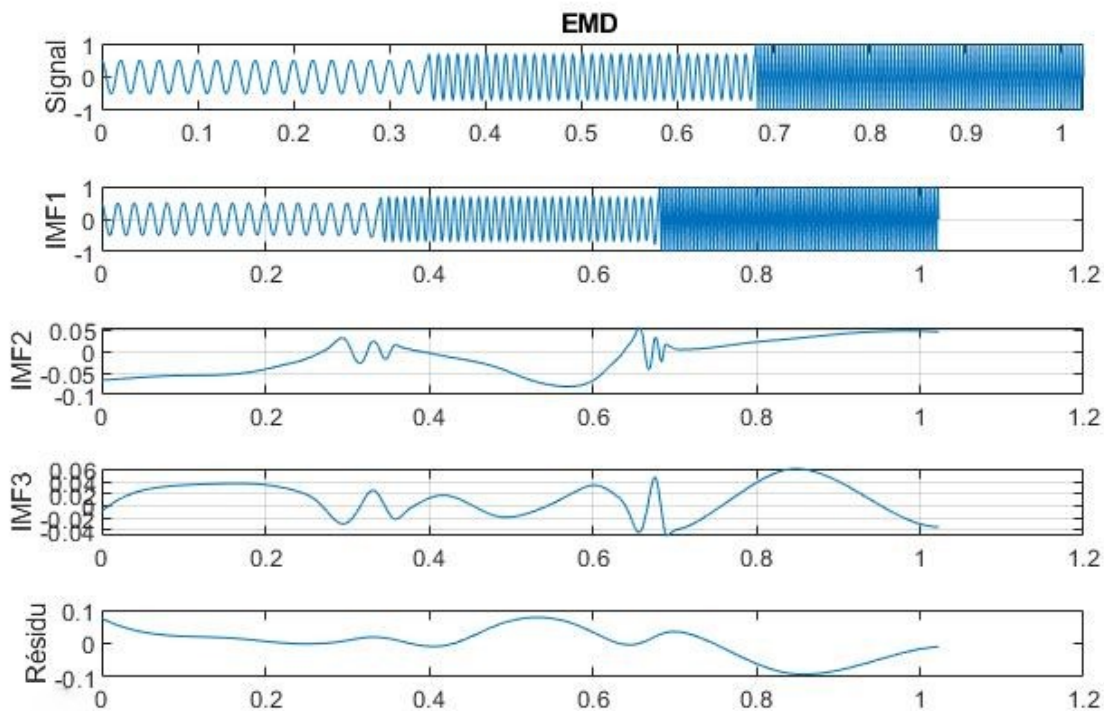


FIGURE 2.4 – Résultat de l'application de l'EMD sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)

2.3 Décomposition en Modes Variationnels (VMD)

La décomposition en mode variationnel (VMD) est une méthode d'analyse temps-fréquence proposée par Dragomiretskiy et Zosso en 2014 [9]. Cette méthode permet de décomposer un signal en un ensemble d'IMFs de manière similaire à l'EMD. Cependant, contrairement à l'EMD qui utilise une procédure de tamisage, la VMD se base sur un calcul variationnel. Le processus de la VMD consiste à décomposer un signal en un petit nombre de fonctions modes intrinsèques de bandes passantes étroites, où chaque mode est une combinaison d'amplitude et de modulation de fréquence. Ces modes ont des enveloppes positives et varient lentement, avec des fréquences instantanées non décroissantes concentrées autour d'une valeur centrale. La méthode VMD calcule simultanément toutes les formes d'onde des modes et leurs fréquences centrales en minimisant un problème variationnel contraint. Cette approche itérative permet d'obtenir les modes intrinsèques du signal tout en conservant les caractéristiques essentielles du signal original. Elle est particulièrement utile pour l'analyse de signaux non stationnaires et non linéaires.

La méthode VMD cherche à décomposer un signal $x(t)$ en un ensemble de N composantes intrinsèques $\mu_n(t)$, $n=1,2,\dots,N$.

Chaque IMF $\mu_n(t)$ est considérée comme un signal de type passe-bande de largeur étroite et de fréquence centrale f_n ou de pulsation $\omega_n = 2\pi f_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$). Pour évaluer la bande passante d'un mode, les auteurs proposent de déterminer le signal analytique $\mu_{n,a}(t)$ de chaque mode $\mu_n(t)$ en appliquant la Transformée de Hilbert afin d'obtenir un spectre de fréquence unilatéral. Cette opération est exprimée par le produit de convolution suivant :

$$\mu_{n,a}(t) = \mu_n(t) * \left(\delta(t) + \frac{1}{\pi t} \right) \quad (2.6)$$

Le spectre du signal analytique $\mu_{n,a}(t)$ est également de type passe-bande mais non centré. Pour obtenir un spectre passe-bande centré, $\mu_{n,a}(t)$ doit être déphasé en le multipliant par la fonction $e^{j\omega_n t}$.

En effet, si la Transformée de Fourier du signal $\mu_{n,a}(t)$ est $U_{n,a}(\omega)$, alors la Transformée de Fourier de $\mu_{n,a}(t)e^{j\omega_n t}$ est $U_{n,a}(\omega + \omega_n)$.

L'estimation de la largeur de bande de chaque mode, c'est-à-dire de chaque IMF $\mu_n(t)$, peut être obtenue

en minimisant la norme L_2 du gradient au carré du signal analytique déphasé. Le problème de la décomposition modale variationnelle est alors posé sous forme d'un problème de calcul variationnel ou de minimisation avec contraintes, comme suit :

$$\min_{\{\mu_n\}, \{\omega_n\}} \left\{ \sum_n \left\| \left(\partial_t \left[(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}) * \mu_n(t) \right] \right) e^{-j\omega_n t} \right\|^2 \right\} \quad (2.7)$$

Les IMFs ainsi que les fréquences sont mises à jour itérativement en utilisant les équations ci-dessous :

$$\hat{\mu}_k^{n+1}(\omega) = \frac{\hat{X}(\omega) - \sum_{i \neq k} \hat{\mu}_i^n(\omega) + \frac{\hat{\lambda}(\omega)}{2}}{1 + 2\alpha(\omega - \omega_k^n)^2} \quad (2.8)$$

$$\omega_k^{n+1} = \frac{\int_0^\infty \omega |\hat{\mu}_k(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\hat{\mu}_k(\omega)|^2 d\omega} \quad (2.9)$$

$$\lambda^{n+1}(\omega) = \lambda^n(\omega) + \tau \left(\hat{X}(\omega) - \sum_{k=1}^K \hat{\mu}_k^{n+1}(\omega) \right) \quad (2.10)$$

La solution du problème d'optimisation peut être trouvée en utilisant des techniques d'optimisation numérique telles que la descente de gradient.

Une fois les composantes intrinsèques $\mu_n(t)$ obtenues, le signal d'entrée peut être reconstruit à partir de la somme de ces composantes :

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^N \mu_n(t) \quad (2.11)$$

La figure 2.5 montre le résultat de l'application de la VMD sur le signal non-stationnaire de la figure 1.4 (b). Contrairement au résultat de l'EMD (Fig.2.4), on constate clairement que les IMFs obtenues correspondent aux 3 signaux sinusoïdaux qui composent le signal original.

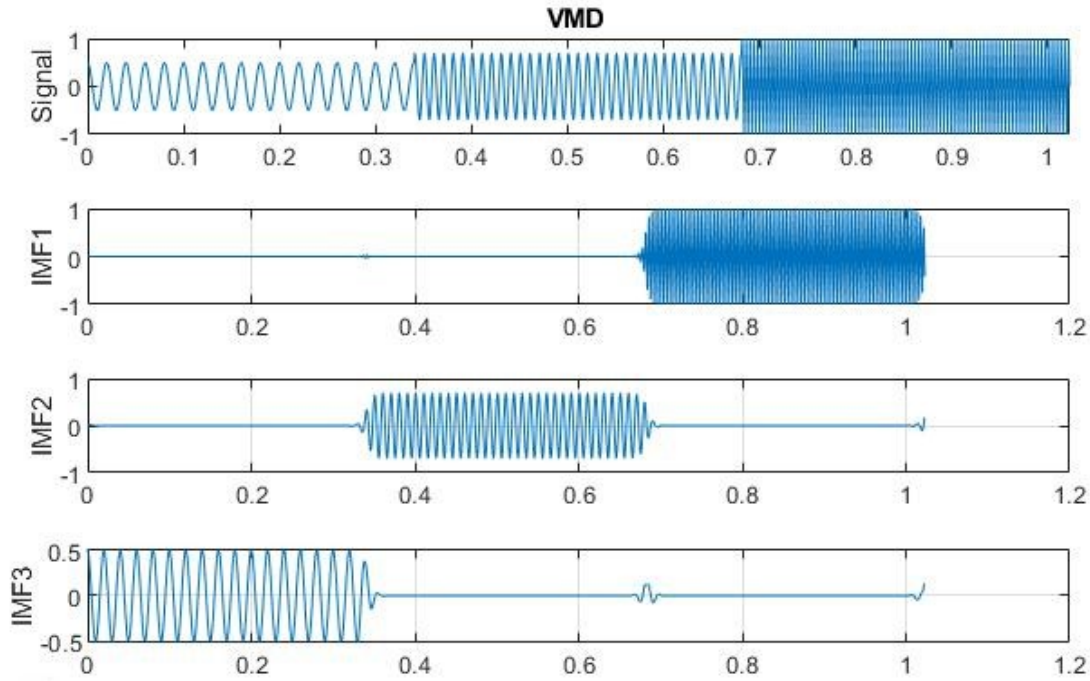


FIGURE 2.5 – Application de la VMD sur le signal non-stationnaire.

2.4 Méthode de Décomposition de Fourier (FDM)

La Méthode de Décomposition de Fourier (FDM) est une technique d'analyse temps fréquence adaptée pour les signaux non stationnaires et qui a été développée par Singh et ses collaborateurs en 2017 [10]. La FDM se base sur la théorie de Fourier et la transformée de Hilbert. Contrairement aux méthodes traditionnelles, elle permet de représenter les variations locales en fréquence et en amplitude des signaux. Dans son principe, la FDM analyse les signaux à l'échelle de leurs composantes fréquentielles, sans que celle-ci soient nécessairement stationnaires au sens traditionnel de la transformée de Fourier. D'une manière plus précise, la FDM cherche à décomposer un signal réel limité dans le temps $x(t)[a b]$ en une somme de signaux orthogonaux monocomposantes ou à bande fréquentielles limitées $y_i(t)$ nommées fonctions de bande intrinsèques de Fourier (FIBFs), telles que :

$$x(t) = \sum_{i=1}^M y_i(t) + a_0 \quad (2.12)$$

où M représente le nombre de FIBFs et a_0 la valeur moyenne de $x(t)$.

2.4.1 Définition des FIBFs

Les Fonctions de Bande Intrinsèque de Fourier (FIBFs), $y_i(t) \in C^\infty[a, b]$, sont des fonctions satisfaisant les conditions suivantes :

- Moyenne Nulle : Les FIBFs ont une moyenne nulle, c'est-à-dire $\int_a^b y_i(t) dt = 0$.
- Orthogonalité : Les FIBFs sont des fonctions orthogonales, c'est-à-dire $\int_a^b y_i(t)y_j(t) dt = 0$ pour $i \neq j$.

Les FIBFs admettent une représentation analytique (AFIBFs) c'est-à-dire $z_i(t) = y_i(t + j\hat{y}_i(t)) = a_i(t) \exp(j\phi_i(t))$, où $y_i(t)$ est la transformée de Hilbert de $y_i(t)$, $a_i(t) > 0$ est l'amplitude instantanée et $\omega_i(t) = \phi_i(t) \geq 0$ est la fréquence instantanée.

Ainsi, les AFIBFs sont des signaux monocomposants parce que, physiquement, une IF n'a de signification que pour les signaux monocomposants composés d'un composant à fréquence unique ou d'une étroite plage de fréquences, variant en fonction du temps.

2.4.2 La FDM à temps continu

Soit x_{T_0} un signal réel $x(t)$ défini sur un intervalle de temps $[t, t+T_0]$. Contrairement la FDM effectuée la décomposition du signal analytique $z_{T_0} = x_{T_0}(t) + j\hat{x}_{T_0}(t)$ en un ensemble de M AFIBFs telles que :

$$z_{T_0}(t) = \sum_{i=1}^M z_i(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) e^{j\phi_i(t)} \quad (2.13)$$

Pour déterminer les amplitudes instantanées $a_i(t)$ et les phases instantanées $\phi_i(t)$, des AFIBFs, Singh et al effectuent une décomposition en série de Fourier de $x_{T_0}(t)$ et montrent que le signal analytique que $z_{T_0}(t)$ peut être défini par :

$$z_{T_0}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad (2.14)$$

ou c_k est le coefficient complexe de la série de Fourier de x_{T_0} telle que :

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x_{T_0}(t) e^{-j\omega_0 t} dt \quad (2.15)$$

En égalisant les équations 2.13 et 2.14 on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{i=1}^M a_i(t) e^{j\varphi_i(t)} \quad (2.16)$$

En divisant l'axe des fréquences en M intervalles, on déduit :

$$a_i(t) e^{j\varphi_i(t)} = \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, M \quad (2.17)$$

avec $N_0 = 0$ et $N_M = \infty$ dans le cas où les fréquences sont ordonnées dans l'ordre croissant (Low to high frequency scan ou LTH-FS), $N_0 = \infty$ et $N_M = 1$ dans le cas où les fréquences sont ordonnées dans l'ordre décroissant (High to low frequency scan ou HTL-FS).

2.4.3 La FDM discrète

En pratique, on considère le signal discrète $x(n)$ composé de N échantillons. Dans ce cas, $x(n)$ peut être défini à partir de la transformée de Fourier discrète (TFD) inverse :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.18)$$

$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$ étant la TFD de $x(n)$.

Le développement de $x(n)$ donne :

$$x(n) = X(0) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} x(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} + X\left(\frac{N}{2}\right) \exp(j\pi n) + \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.19)$$

Comme $x(n)$ est réel, le quatrième terme du coté droit de l'équation précédente n'est rien d'autre que le conjugué du signal analytique $z(n)$ de $x(n)$ où :

$$x(n) = X(0) + 2 \operatorname{Re}\{z(n)\} + X\left(\frac{N}{2}\right) (-1)^n \quad (2.20)$$

et

$$z(n) = \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (2.21)$$

Par conséquent on déduit que :

$$z(n) = \sum_{k=1}^N X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{i=1}^M a_i(n) e^{j\phi_i(n)} \quad (2.22)$$

ou $a_i(n)$ et $\phi_i(n)$ représentent respectivement les amplitudes et la phase instantanée de la i ème AFIBF qui sont déterminés à partir de l'équation suivante :

$$AFIBF_i(n) = a_i(n) e^{j\phi_i(n)} = \sum_{k=N_{i-1}+1}^{N_i} X(k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, M \quad (2.23)$$

avec $N_0 = 0$ et $N_M = \frac{N}{2} - 1$ dans le cas LTH-FS et $N_M = \frac{N}{2}$ et $N_M = 1$ dans le cas HTL-FS. Notons que les FIBFs sont obtenues en déterminant les parties réelles des AFIBFs résultants des deux algorithmes et que les indices de fréquence sont déterminer N_1, N_2, \dots, N_{M-1} d'une manière itérative en variant pour chaque i , k de N_{i-1} à N_M et garder la valeur maximale qui vérifié les deux conditions suivantes :

$$\omega_i[n] = \frac{\varphi_i[n+1] - \varphi_i[n-1]}{2} \geq 0 \quad (2.24)$$

et

$$a_i(n) \geq 0 \quad (2.25)$$

Les deux schémas LTH-FS et HTL-FS conduisent à deux algorithmes pour la FDM décrits ci-dessous :

Algorithm 1: An FDM algorithm (LTH-FS) to decompose a signal into a set of AFIBFs.

```

input : A signal  $x[n]$  of size  $N$ 
output:  $\{AFIBF_i[n], \omega_i[n]\}_{i=1}^M$ 
begin
   $N_0 = 0; i = 0; n = [0, 1, \dots, (N - 1)]; k = [0, 1, \dots, (N - 1)]; X[k] = FFT(x[n]);$ 
  if  $N$  is even then
    |  $N_M = (N/2) - 1;$ 
  else
    |  $N_M = (N - 1)/2;$ 
  while  $(k < N_M)$  do
    |  $i = i + 1; tmp[n] = 0;$ 
    | for  $k = (N_{i-1} + 1)$  to  $N_M$  do
      |  $tmp[n] = tmp[n] + X[k] \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right); tmp\phi[n] = unwrap\_phase(tmp[n]);$ 
      |  $tmp\omega[n] = \frac{(tmp\phi[n+1] - tmp\phi[n-1])}{2};$ 
      | if  $(tmp\omega[n] \geq 0, \forall n)$  then
        | |  $AFIBF_i[n] = tmp[n]; \omega_i[n] = tmp\omega[n]; N_i = k;$ 
    |
  end

```

Algorithm 2: An FDM algorithm (HTL-FS) to decompose a signal into a set of AFIBFs.

```

input : A signal  $x[n]$  of size  $N$ 
output:  $\{AFIBF_i[n], \omega_i[n]\}_{i=1}^M$ 
begin
   $i = 0; n = [0, 1, \dots, (N - 1)]; k = [0, 1, \dots, (N - 1)]; X[k] = FFT(x[n]);$ 
  if  $N$  is even then
    |  $N_0 = N/2;$ 
  else
    |  $N_0 = (N + 1)/2;$ 
  while  $(k > 1)$  do
    |  $i = i + 1; tmp[n] = 0;$ 
    | for  $k = (N_{i-1} - 1)$  to 1 do
      |  $tmp[n] = tmp[n] + X[k] \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right); tmp\phi[n] = unwrap\_phase(tmp[n]);$ 
      |  $tmp\omega[n] = \frac{(tmp\phi[n+1] - tmp\phi[n-1])}{2};$ 
      | if  $(tmp\omega[n] \geq 0, \forall n)$  then
        | |  $AFIBF_i[n] = tmp[n]; \omega_i[n] = tmp\omega[n]; N_i = k;$ 
    |
  end

```

Les FIBFs obtenues par ces deux algorithmes sur le signal non stationnaire sont affichées sur les figures 2.6 et 2.7.

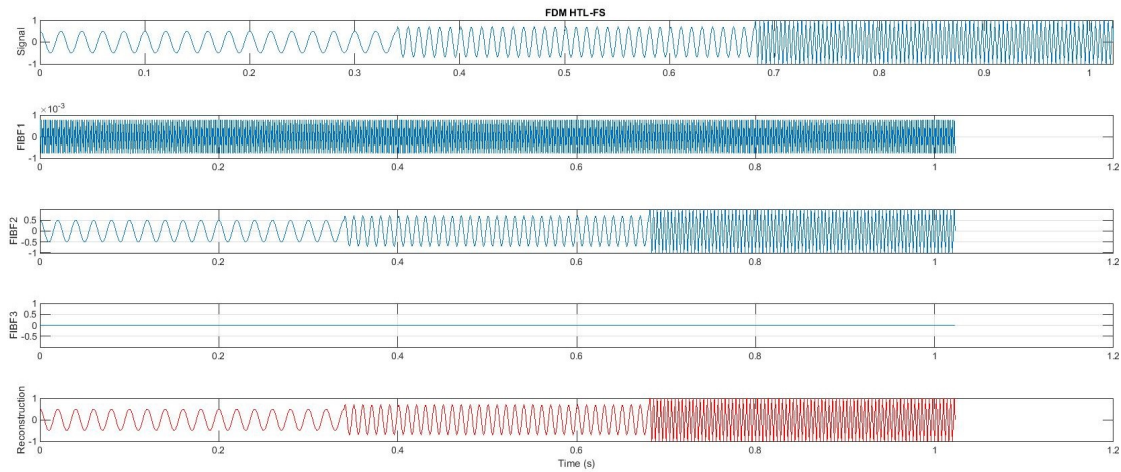


FIGURE 2.6 – Affichage des 3 FBIFs obtenues par l'algorithme HTL-FS sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)

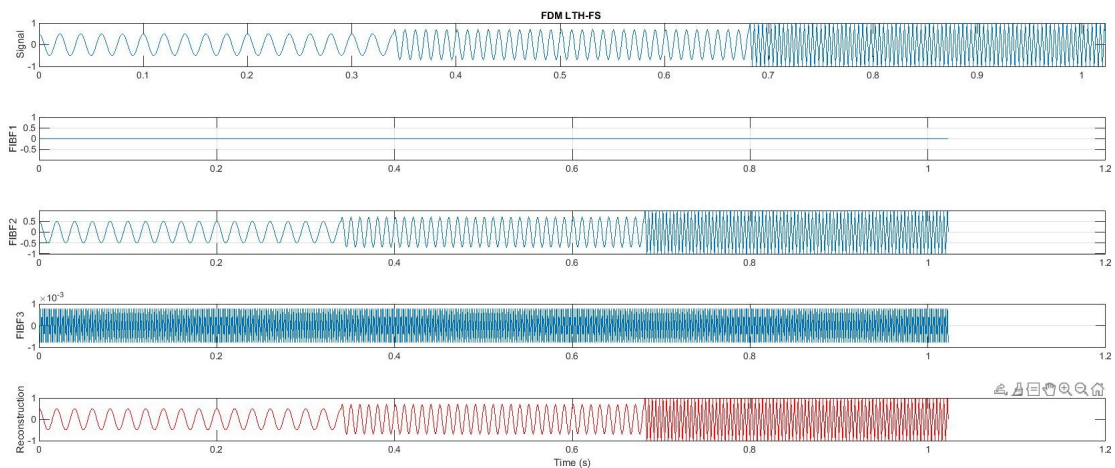


FIGURE 2.7 – Affichage des 3 FBIFs obtenues par l'algorithme LTF-FS sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)

Ces figures montrent clairement que la FDM n'a pas pu isoler les 3 composantes du signal. Notons que même les 3 composantes du signal stationnaires n'ont pas pu être correctement retrouvées par la FDM.

2.5 La Transformée en Ondelettes Empiriques (EWT)

La transformée en ondelettes empiriques (EWT) est une autre méthode proposée par Gilles en 2013 [11] pour décomposer un signal en un ensemble d'IMFs, . EWT est un algorithme adaptatif basé sur la

segmentation du spectre de fourrier. Il suppose que le support de fourrier $[0, \pi]$ est divisé en N partitions contiguës. Chaque segment est désigné par $S_n = [\omega_{n-1}, \omega_n]$ ($n \in [1, N]$, $\omega_0 = 0, \omega_N = \pi$). Une zone de transition T_n est définie autour de ω_n symétriquement avec une largeur de $2\tau_n$ (Fig.2.8).

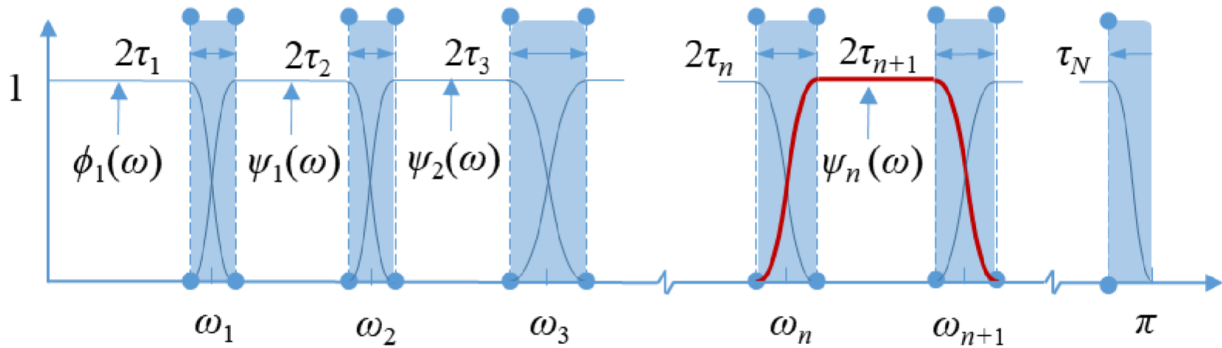


FIGURE 2.8 – Construction de base de EWT

La technique de segmentation originale dans l'EWT se base sur les maxima locaux. Dans cette méthode, Gilles calcule tous les maxima locaux M_i du signal analysé dans le domaine de Fourier et en déduit leurs positions correspondantes Ω_i . Ensuite, les $N - 1$ plus grands maxima sont définis sur tous les Ω_i correspondants et ré-indexés en ω_n où $1 \leq n \leq N - 1$. Ainsi, l'ensemble des limites $\Upsilon = \{\omega_n\}_{n=0, \dots, N}$ est défini par :

$$\omega_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{\Omega_n + \Omega_{n-1}}{2} & \text{si } 1 \leq n \leq N - 1 \\ \pi & \text{si } n = N \end{cases} \quad (2.26)$$

EWT définit ensuite des filtres bande passante $\hat{\varphi}_n(\omega)$ et $\hat{\psi}_n(\Omega)$ sur chaque S_n . À l'exception du dernier filtre passe-bande $\hat{\psi}_N(\omega)$ avec une bande de fréquences $[\omega_{N-1}, \pi]$, les autres filtres passe-bande $\psi_n(\omega)$ ont une bande de fréquences de $[\omega_n, \omega_{n+1}]$.

Ces deux filtre correspondant aux deux fonctions ondelettes de Meyer et Littlewood-Paley utilisées dans la transformée en ondelettes. La fonction d'échelle empirique $\hat{\varphi}_n(\omega)$ et la fonction ondelette empirique $\hat{\psi}_n(\omega)$ sont définies comme suit :

$$\hat{\phi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \omega_n - \tau_n \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\tau_n} (|\omega| - \omega_n + \tau_n) \right) \right] & \text{si } \omega_n - \tau_n \leq |\omega| \leq \omega_n + \tau_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\hat{\psi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n + \tau_n \leq |\omega| \leq \omega_{n+1} - \tau_{n+1} \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\tau_{n+1}} (|\omega| - \omega_{n+1} + \tau_{n+1}) \right) \right] & \text{si } \omega_{n+1} - \tau_{n+1} \leq |\omega| \leq \omega_{n+1} + \tau_{n+1} \\ \sin \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\tau_n} (|\omega| - \omega_n + \tau_n) \right) \right] & \text{si } \omega_n - \tau_n \leq |\omega| \leq \omega_n + \tau_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.28)$$

En choisissant $\tau_n = \gamma \omega_n$, les équations 2.27 et 2.28 deviennent :

$$\hat{\phi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq (1 - \gamma) \omega_n \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\gamma \omega_n} (|\omega| - (1 - \gamma) \omega_n) \right) \right] & \text{si } (1 - \gamma) \omega_n \leq |\omega| \leq (1 + \gamma) \omega_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\hat{\psi}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n + \tau_n \leq |\omega| \leq \omega_{n+1} - \tau_{n+1} \\ \cos \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\gamma \omega_{n+1}} (|\omega| - (1 - \gamma) \omega_{n+1}) \right) \right] & \text{si } (1 - \gamma) \omega_{n+1} \leq |\omega| \leq (1 + \gamma) \omega_{n+1} \\ \sin \left[\frac{\pi}{2} \beta \left(\frac{1}{2\gamma \omega_n} (|\omega| - (1 - \gamma) \omega_n) \right) \right] & \text{si } (1 - \gamma) \omega_n \leq |\omega| \leq (1 + \gamma) \omega_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.30)$$

La fonction $\beta(x)$ la plus utilisée est :

$$\beta(x) = x^4(35 - 85x + 70x^2 - 20x^3) \quad (2.31)$$

$0 < \gamma < 1$ est un paramètre suffisamment petit pour qu'il puisse empêcher le chevauchement entre les limites de $\hat{\phi}_n(\omega)$ et $\hat{\psi}_n(\omega)$.

La transformée en ondelettes empiriques peut être définie de la même manière que la transformée

ondelettes, qui à pour objective de décomposer un signal $x(t)$ en signaux basses fréquences (coefficients d'approximation) et signaux hautes fréquences (coefficients détails). Les coefficients détails $W_x^\varepsilon(x, t)$ sont obtenues par le produit scalaire :

$$W_x^\varepsilon(x, t) = \langle x(t), \psi_n(t) \rangle = \int x(\tau) \cdot \bar{\psi}_n(\tau - t) d\tau = \mathcal{F}^{-1} \left(X(\omega) \hat{\psi}_n(\omega) \right) \quad (2.32)$$

$\bar{\psi}_n(\cdot)$ représente le conjugué de $\psi_n(\cdot)$ et \mathcal{F}^{-1} symbolise la TF inverse. Les coefficients d'approximation $W_x^\varepsilon(0, t)$ sont définis par :

$$W_x^\varepsilon(0, t) = \langle x(t), \phi_1(t) \rangle = \int x(\tau) \bar{\phi}_1(\tau - t) dt = \mathcal{F}^{-1} \left(X(\omega) \hat{\phi}_1(\omega) \right) \quad (2.33)$$

La reconstruction du signal peut être réalisée comme suit :

$$x(t) = W_x^\varepsilon(0, t) \phi_1(t) + \sum_{n=1}^N W_x^\varepsilon(x, t) \cdot \psi_n(t) = \mathcal{F}^{-1} \left(W_x^\varepsilon(0, \omega) \hat{\phi}_1(\omega) + \sum_{n=1}^N W_x^\varepsilon(x, \omega) \cdot \hat{\psi}_n(\omega) \right) \quad (2.34)$$

Finalement les IMFs ($\mu_k(t)$) de l'EWT sont définis par :

$$\mu_k(t) = \begin{cases} W_x^\varepsilon(0, t) \cdot \phi_1(t) & \text{si } k = 0 \\ W_x^\varepsilon(k, t) \cdot \psi_1(t) & \text{si } 1 \leq k \leq N \end{cases} \quad (2.35)$$

ou bien :

$$\mu_k(t) = \mathcal{F}^{-1} \begin{cases} W_x^\varepsilon(0, \omega) \cdot \hat{\phi}_1(\omega) & \text{si } k = 0 \\ W_x^\varepsilon(k, \omega) \cdot \hat{\psi}_n(\omega) & \text{si } 1 \leq k \leq N \end{cases} \quad (2.36)$$

2.5.1 Algorithme de la méthode de EWT

- **Étape 1** : Déterminer le spectre de fourrier $X(\omega)$ de $x(t)$ en utilisant la transformée de fourrier
- **Étape 2** : Déterminer les fréquences ω_k en segmentant le spectre $X(\omega)$ obtenu à l'étape 1 selon la technique de segmentation des maxima locaux.
- **Étape 3** : Construire les filtres d'ondelettes $\hat{\phi}_1(\omega)$ et $\hat{\psi}_1(\omega)$ en utilisant les équations 2.29 et 2.30.

— **Étape 4** : Déterminer les IMFs ($\mu_k(t)$) en utilisant la TF inversée obtenue en équation 2.36.

La figure 2.9 montre les 3 IMFs obtenues par l'application de l'EWT sur le signal non stationnaire. Ces IMFs reflètent bien les 3 composantes du signal.

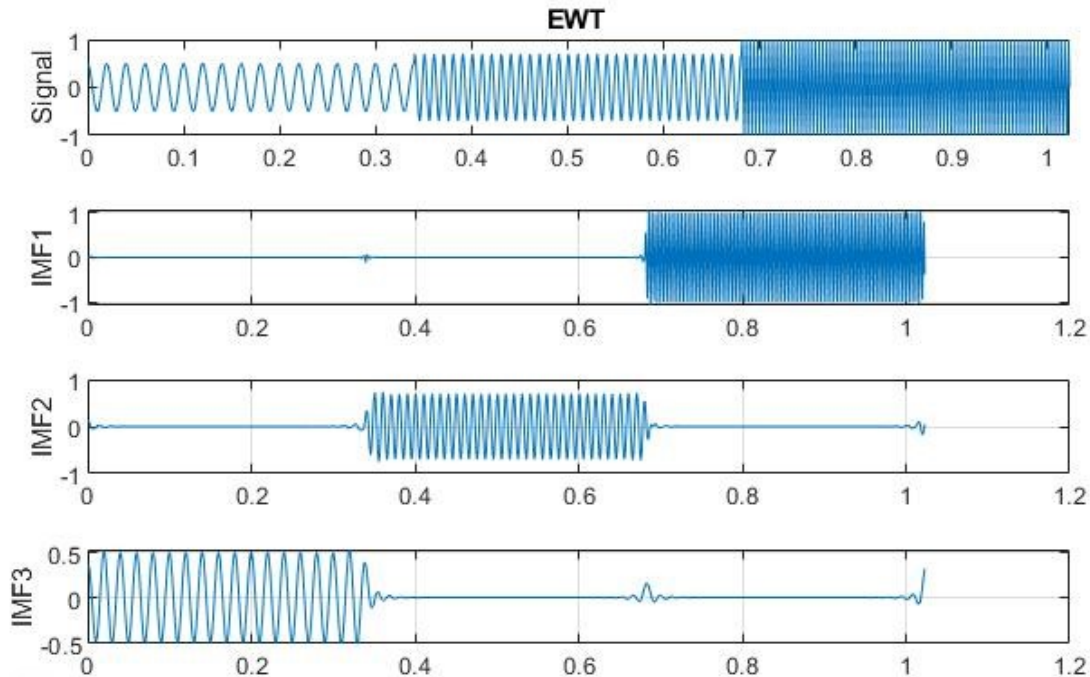


FIGURE 2.9 – Affichage des 3 IMFs obtenues par l'application EWT sur le signal non stationnaire de la figure 1.4 (b)

2.6 La Décomposition de Fourier Empirique (EFD)

L'EFD est une méthode de décomposition plus récente, proposée par Wei Zhou et ses collaborateurs, en 2022 [12]. Tout comme la Transformée en ondelettes Empiriques (EWT) et la décomposition en modes de Fourier (FDM), la décomposition de Fourier empirique (EFD) se compose de deux étapes essentielles : une étape de segmentation et une étape de construction d'une banque de filtres. Dans l'EFD, le spectre de Fourier d'un signal à décomposer est défini sur une plage de fréquences normalisée $[-\pi, \pi]$. Cependant la technique de segmentation ainsi que la construction d'une banque de filtres sont réalisées sur la plage de fréquences $[0, \pi]$.

2.6.1 Technique de Segmentation de l'EFD

La technique de segmentation de l'EFD est proposée sur la base de la technique des minima les plus bas. Dans cette technique, $[0, \pi]$ est divisé en N segments de fréquence contigus. Contrairement aux techniques des maxima locaux et des minima les plus bas, ω_0 et ω_N ne sont pas nécessairement égaux à 0 et π , respectivement, et leurs valeurs sont déterminées par un processus de tri adaptatif. Dans ce processus de tri, les magnitudes du spectre de Fourier aux points $\omega = 0$ et $\omega = \pi$ ainsi que leurs maxima locaux sont identifiés et extraits en série. Toutes les magnitudes de la série sont triées par ordre décroissant. Les fréquences correspondant aux N plus grandes valeurs dans la série triée sont notées $[\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N]$. Avec en plus, $\Omega_0 = 0$ et $\Omega_{N+1} = \pi$. Les limites ω_n de chaque segment sont déterminées par :

$$\omega_n = \begin{cases} \arg \min_{\omega} X_n(\omega) & \text{si } 0 \leq n \leq N \text{ et } \Omega_n \neq \Omega_{n+1} \\ \Omega_n & \text{si } 0 \leq n \leq N \text{ et } \Omega_n = \Omega_{n+1} \end{cases} \quad (2.37)$$

où $X_n(\omega)$ désigne les magnitudes du spectre de Fourier entre Ω_n et Ω_{n+1} .

2.6.2 Construction d'une Banque de Filtres Idéaux

L'EWT que la FDM comprennent toutes les deux une étape de construction d'une banque de filtres. Dans l'EWT, une banque de filtres en ondelettes est formée par la fonction d'échelle empirique et les fonctions d'ondelettes. Dans la FDM, une banque de filtres de transformation de Hilbert est construite sur la base du spectre de Fourier du signal analytique associé au signal à décomposer. Dans l'EFD, une banque de filtres idéaux est construite sur la base des segments de fréquences. Dans chaque segment un filtre idéal est assimilé à un filtre passe-bande avec ω_{n-1} et ω_n servant de fréquences de coupure, sans phases de transition. Ainsi, le filtre idéal peut conserver le principal composant du spectre de Fourier dans le segment, tandis que tous les autres composants du spectre de Fourier au-delà du segment sont exclus.

La transformée de Fourier d'un signal à décomposer $x(t)$ s'exprime comme suit :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.38)$$

Un filtre idéal est défini par sa réponse fréquentielle $\hat{h}_n(\omega)$:

$$\hat{h}_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_{n-1} \leq |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.39)$$

où $1 \leq n \leq N$ et les valeurs de ω_n sont déterminées par l'équation 2.37.

Une illustration graphique de la banque de filtres idéale est présentée sur la figure 2.10 :

Les spectres des signaux filtrés par chaque filtre $\hat{h}_n(\omega)$ sont calculés par cette relation :

$$X_n(\omega) = \hat{h}_n(\omega)X(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } \omega_{n-1} \leq |\omega| \leq \omega_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.40)$$

Les composants IMFs représentées dans le domaine temporel peuvent être obtenus en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$\mu_n(t) = F^{-1}X_n(\omega) = \int_{-\omega_n}^{\omega_n} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.41)$$

Le signal reconstruit est calculé comme une somme de tous les composants décomposés :

$$X(t) = \sum_{n=1}^N \mu_n(t) \quad (2.42)$$

L'EFD peut être considérée comme une combinaison partielle de la EWT et de la FDM. Dans le cadre de cette méthode, les concepts de segmentation du spectre de Fourier présents dans l'EWT et de la Banque de Filtrés Idéale (FIBF) dans la FDM sont intégrés. L'EFD utilise la segmentation du spectre de Fourier, chaque partition représentant une région d'une FIBF.

D'après la Figure 2.10, cette méthode fonctionne comme un filtre passe-bande dans chaque segment. Comparée à l'EWT, l'EFD est plus concise et ne nécessite pas de phases de transition complexes ni de cadre rigide.

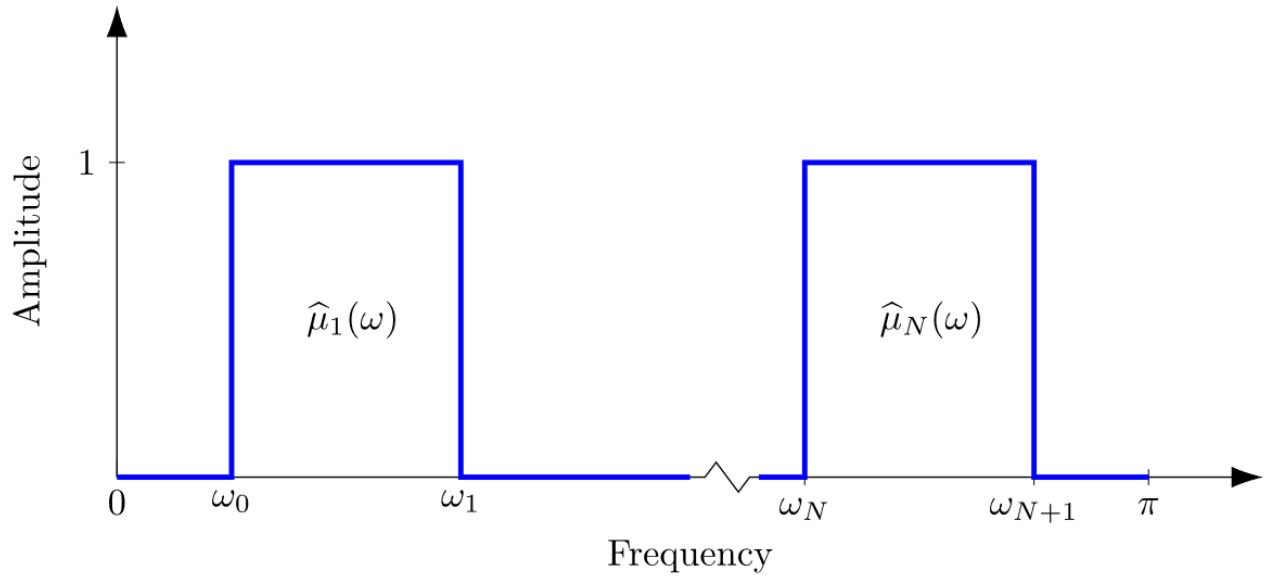


FIGURE 2.10 – Illustration graphique de la banque de filtres idéaux.

La figure 2.11 montre les 3 IMFs obtenues par l'application de l'EFD sur le signal non stationnaire de la figure 1.4. Ces IMFs reflètent bien les 3 composantes du signal.

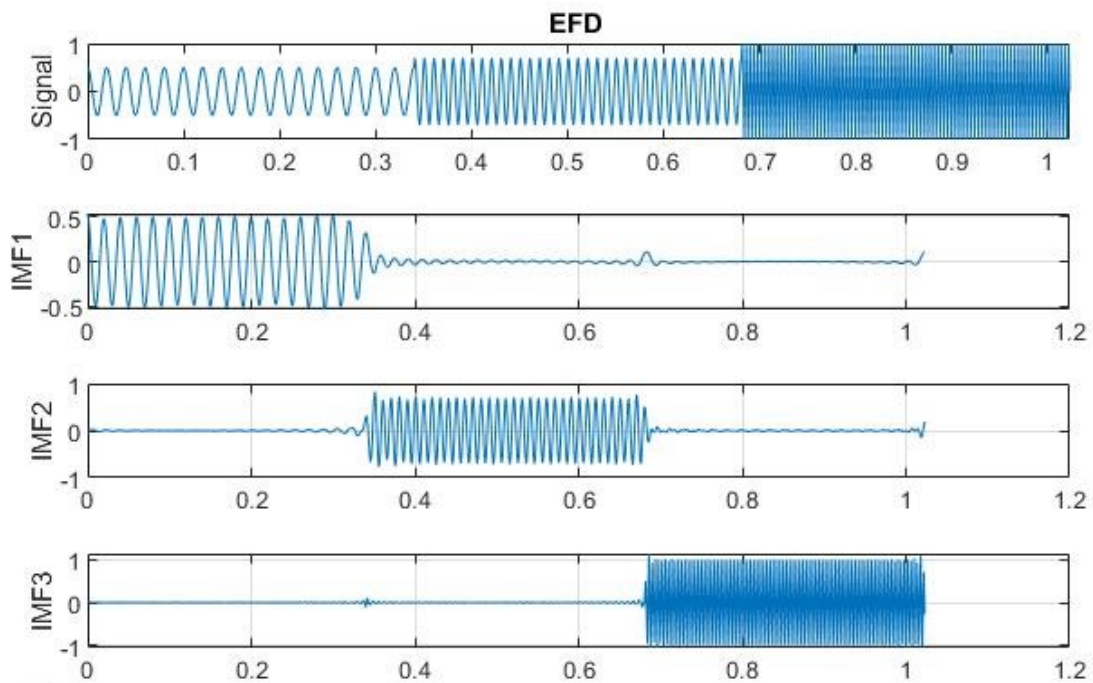


FIGURE 2.11 – Affichage des 3 IMFs obtenues par l'application EFD sur un signal non stationnaire composé de la somme des 3 signaux sinusoïdale

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté cinq méthodes assez récentes d'analyse d'un signal non linéaire et non-stationnaire qui sont la Décomposition Modale Empirique (EMD), la technique de Décomposition en Mode Variationnelle, la transformée en ondelettes empiriques (EWT), la méthode décomposition de Fourier (FDM) et la décomposition de Fourier empirique (EFD). Ces cinq méthodes décomposent un signal en un ensemble de composantes ou modes (IMFs), où chaque mode est caractérisé par une bande de fréquences étroite. Chacune de ces méthodes a ses propres forces et faiblesses. L'EMD est souvent utilisée pour sa simplicité et sa flexibilité, elle est néanmoins confronté au problème du mixage des modes, tandis que la VMD est privilégiée pour sa robustesse face au bruit. L'EWT offre une approche hybride intéressante. L'EFD se montre efficace en termes de précision et d'efficacité computationnelle, ce qui peut le rendre attrayant pour des applications nécessitant une analyse rapide et précise. La FDM est aussi confronté au problème du mixage des modes, même dans le cas d'un signal stationnaire. C'est la raison pour laquelle nous l'avons exclus de notre application dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Classification des signaux

électrocardiogrammes (ECG)- réseaux de neurones convolutifs

3.1 Introduction

La classification des signaux ECG est essentielle pour diagnostiquer les troubles cardiaques. Pour effectuer cette classification, nous proposons dans ce chapitre de combiner les méthodes de décomposition avec des réseaux de neurones convolutifs (CNNs).

Ces méthodes de décomposition permettent de décomposer les signaux ECG en différents composants, facilitant l'extraction des caractéristiques pertinentes pour identifier les anomalies. Les CNNs, de leur côté, apprennent automatiquement à partir des données pour classer les signaux.

Nous comparons dans ce chapitre, la pertinence de ces méthodes de décomposition à classer les signaux ECG en trois catégories : NSR (Normal Sinus Rhythm), CHF (Congestive Heart Failure) et ARR (Arrhythmia).

3.2 Anatomie du cœur

Le cœur est un organe musculaire puissant, complexe et magnifiquement conçu pour assurer la circulation sanguine. Il est composé de deux parties indépendantes (Fig. 3.1) : le côté droit, qui gère la circulation pulmonaire (le sang pauvre en oxygène), et le côté gauche, qui est responsable de la circulation systémique (le sang riche en oxygène). Chaque moitié comporte une oreillette et un ventricule. L'oreillette reçoit le sang et le transmet au ventricule via une valve, empêchant tout reflux. Le sang est ensuite pompé hors du cœur vers les poumons ou les tissus du corps à travers des valves situées à la sortie de chaque ventricule.[13]

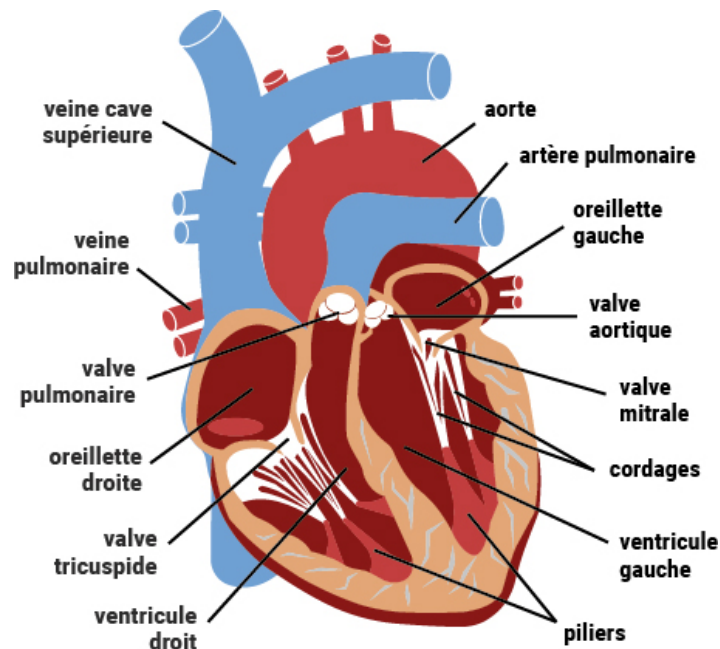


FIGURE 3.1 – Anatomie du cœur

Pour que le cœur puisse remplir son rôle de pompage, il a besoin d'une alimentation électrique excitatrice. Cette dernière correspond à une impulsion électrique préexistante provenant des cellules de tissu du cœur, plus exactement celui du nœud sinusal. Cette impulsion se propage le long des fibres musculaires provoquant la contraction du cœur. La genèse du signal électrique cardiaque débute au niveau du nœud sinusal, situé dans l'oreillette droite. Ce nœud joue le rôle d'oscillateur (pacemaker) en générant des impulsions électriques régulières qui déclenchent le battement cardiaque. Une fois l'impulsion produite, elle se propage à travers le cœur, provoquant la dépolarisation des cellules musculaires

cardiaques. Cette dépolarisation, dûe aux échanges d'ions comme le sodium (Na^+), le potassium (K^+), et le calcium (Ca^{2+}), entraîne la contraction des oreillettes puis des ventricules, permettant ainsi au sang de circuler dans le corps.

Après chaque contraction, les cellules cardiaques retournent à leur état de repos grâce à la repolarisation, un processus qui rétablit les conditions électriques initiales de la cellule. Ce cycle de dépolarisation et de repolarisation, essentiel pour l'activité cardiaque, se reflète dans les différentes ondes du signal électrocardiogramme (ECG), qui est exploité dans le suivi et l'analyse des rythmes cardiaques.

3.2.1 Électrocardiogrammes (ECG)

L'électrocardiogramme (ECG) est la représentation graphique du potentiel électrique qui commande l'activité musculaire du cœur. Ce potentiel est recueilli par des électrodes placées à la surface de la peau. Le signal est reçu par un appareil nommé l'électrocardiographie.

L'ECG se présente alors comme une suite de déflexions (ondes électriques) séparées par des intervalles, correspondant, chacune, à une phase de fonctionnement du cœur.

3.2.2 Les différentes réflexions de l'ECG

Les déflexions de l'ECG correspondent aux variations de l'activité électrique du cœur pendant le cycle cardiaque. Elles permettent de suivre la dépolarisation et la repolarisation des oreillettes et des ventricules [13]. Les principales déflexions observées sur un tracé ECG sont représentées sur la figure 3.2 et correspondent à :

- **Onde P** : Déflexion correspondant à la dépolarisation des oreillettes droite et gauche, d'une amplitude inférieure à 0,12 mV et d'une durée inférieure à 120 ms.
- **Onde Ta** : Déflexion correspondant à la repolarisation des oreillettes, habituellement non visible.
- **Complexe QRS** : Ensemble des déflexions correspondant à la dépolarisation des ventricules, sa durée doit être comprise entre 0,06 s et 0,1 s.
- **Onde T** : Déflexion correspondante à la repolarisation ventriculaire

OD : Oreillette Droite.
 OG : Oreillette Gauche.
 VD : Ventricule Droite.
 VG : Ventricule Gauche.

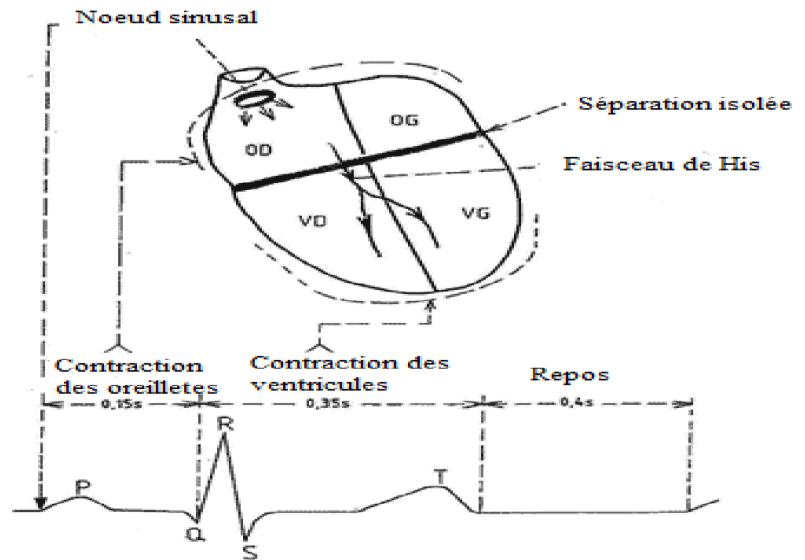


FIGURE 3.2 – Les différentes déflexions de l'ECG

3.2.3 Les intervalles de l'ECG

L'examen du signal ECG consiste généralement à mesurer les durées entre les différentes déflexions (ondes) [13]. Le signal ECG peut alors être décomposé en plusieurs intervalles (fig.3.3) :

- **Intervalle PR ou PQR** : Correspond au temps de conduction auriculo-ventriculaire (du début de l'onde P au début du complexe QRS), sa durée normale doit être comprise entre 0,12 s et 0,2 s.
- **Intervalle ST ou RST** : Il sépare la fin de la dépolarisation (fin du complexe QRS) et le début de la repolarisation ventriculaire (début de l'onde T).
- **Intervalle QT** : Il s'agit de la distance entre le début du complexe QRS et la fin de l'onde T, englobant la dépolarisation et la repolarisation ventriculaires. Sa durée est inversement proportionnelle à la fréquence cardiaque.
- **Intervalle RR** : Cet intervalle désigne le temps entre deux ondes R successives. La facilité de la détection de l'onde R confère une importance à cet intervalle qui sert à mesurer la fréquence cardiaque.

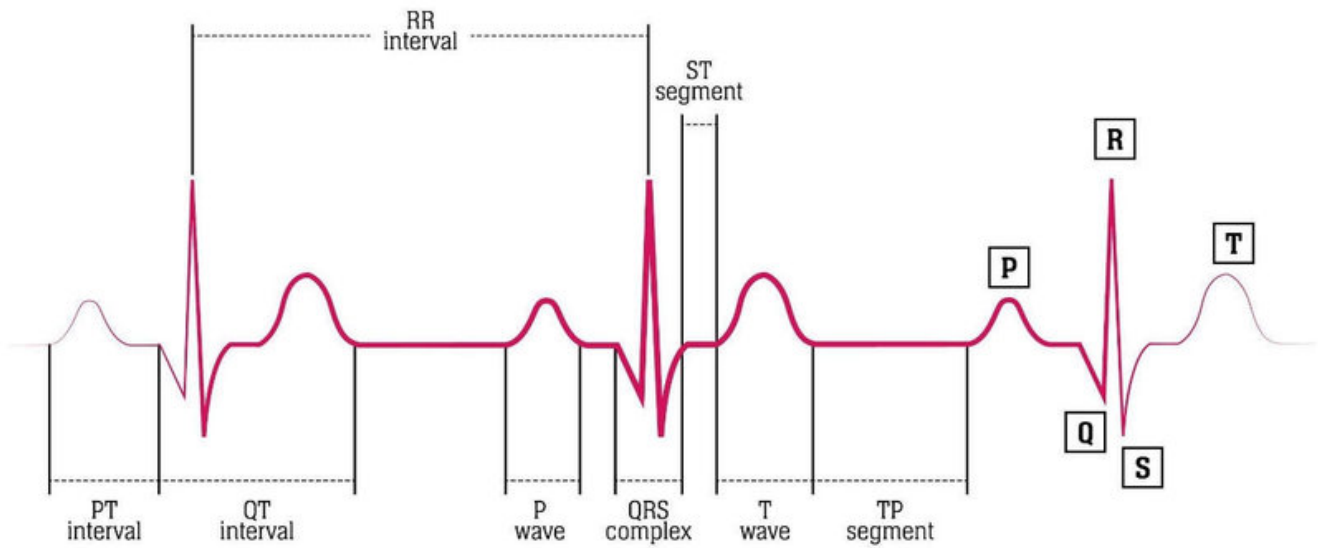


FIGURE 3.3 – Intervalles de l'ECG

3.2.4 Acquisition du signal ECG

L'acquisition du signal ECG est assurée par des électrodes de surface, dont l'emplacement sur le thorax du patient définit un type de dérivation. Les emplacements des électrodes sont choisis de manière à explorer la quasi-totalité du champ électrique cardiaque.

En cardiologie, l'examen le plus complet est l'ECG à 12 dérivation, pour lequel le signal est visualisé selon 12 axes privilégiés (Fig.3.4).

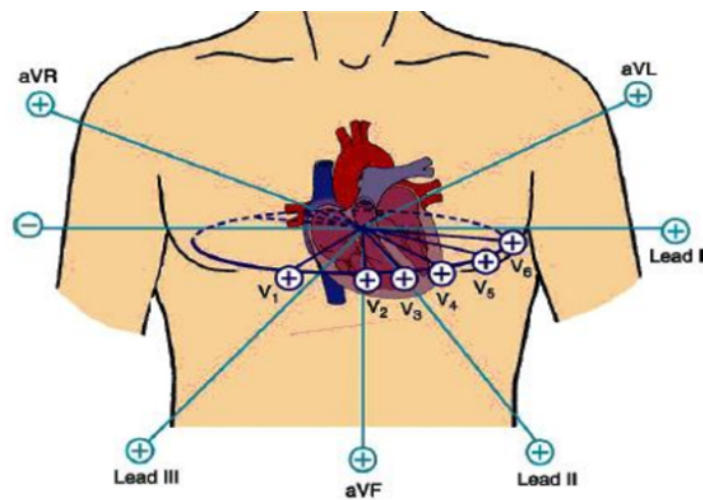


FIGURE 3.4 – ECG a 12 derivation

— Six axes dans le plan frontal qui correspondent :

D'une part, aux trois dérivations bipolaires I, II, III dites dérivations d'Einthoven.

DI : : enregistre les différences de potentiel électrique entre le poignet droit et le poignet gauche.

DII : : enregistre les différences de potentiel électrique entre le poignet droit et la jambe gauche.

DIII : : enregistre les différences de potentiel électrique entre le poignet gauche et la jambe gauche.

D'autre part aux dérivations unipolaires aVR, aVL, aVF dites de Wilson .

aVL : (arm, Ventricular, Left) pour l'avant-bras gauche.

aVR : (arm, Ventricular, Right) pour l'avant-bras droit.

aVF : (Foot) pour la jambe gauche.

Autre six axes sur le plan transversal qui sont les dérivations unipolaires précordial V 1 à V6 dites de Kossman :

V1 : 4ème espace intercostal droit, bord droit du sternum.

V2 : 4ème espace intercostal gauche, bord gauche du sternum.

V3 : à mi-chemin entre V2 et V4.

V4 : 5ème espace intercostal gauche, sur la ligne médio claviculaire.

V5 : même horizontale que V4, ligne axillaire antérieure.

V6 : même horizontale que V4, ligne axillaire moyenne.

3.2.5 Pathologies cardiaques les plus fréquentes

Les maladies cardiovasculaires les plus répandues sont :

- **Ischémie myocardique** : L'accumulation de plaques d'athérome (dépôts de graisse) dans les parois des artères coronaires entraîne une diminution du flux sanguin vers le cœur. Cela empêche le muscle cardiaque de recevoir suffisamment d'oxygène, perturbant son fonctionnement.
- **Infarctus du myocarde** : L'infarctus du myocarde est un événement soudain résultant d'une interruption prolongée de l'apport sanguin vers le cœur. Cette interruption entraîne la nécrose (mort cellulaire) d'une partie du muscle cardiaque (myocarde), altérant localement sa contractilité. Les ischémies prolongées sont généralement à l'origine des infarctus du myocarde.

- **Insuffisance cardiaque** : L'insuffisance cardiaque survient souvent à la suite d'un infarctus du myocarde ou d'une ischémie prolongée. Le cœur affaibli est alors incapable de pomper le sang efficacement à travers le système vasculaire, entraînant une accumulation de sang dans les poumons et une mauvaise circulation sanguine dans le corps.
- **Bradycardie** : La bradycardie se caractérise par une fréquence cardiaque inférieure à 60 battements par minute (bpm). Elle peut avoir plusieurs origines : sinusale (le nœud sinusal fonctionne trop lentement), jonctionnelle (le rythme cardiaque est initié par le nœud auriculo-ventriculaire) ou ventriculaire (les ventricules prennent le relais du rythme cardiaque, généralement en cas de dysfonctionnement des autres pacemakers cardiaques).
- **Tachycardie** : Contrairement à la bradycardie, la tachycardie se caractérise par une fréquence cardiaque supérieure à 100 bpm. Elle peut aussi avoir différentes origines : sinusale (accélération normale du rythme cardiaque due au stress, à l'effort physique ou à une fièvre), auriculaire (anomalies au niveau des oreillettes du cœur, comme dans le flutter auriculaire), ou bien ventriculaire (rythme rapide provenant des ventricules, ce qui peut être grave et nécessite une intervention médicale rapide).
- **Fibrillation auriculaire** : La fibrillation auriculaire est une arythmie fréquente caractérisée par des contractions rapides et irrégulières des oreillettes. Elle peut entraîner un risque accru de formation de caillots sanguins, augmentant ainsi le risque d'AVC (Accident Vasculaire Cérébral).
- **Fibrillation ventriculaire** : La fibrillation ventriculaire est une arythmie grave caractérisée par des contractions extrêmement rapides et désorganisées des ventricules, rendant le cœur incapable de pomper le sang de manière efficace. C'est une urgence médicale absolue nécessitant une défibrillation électrique immédiate, car elle est potentiellement mortelle. Un massage cardiaque est recommandé pour maintenir la circulation sanguine.

3.3 Réseaux de neurones convolutifs (CNN)

Plusieurs méthodes de reconnaissance ou de classification des pathologies cardiaques à partir d'un signal ECG ont été proposées. Parmi les méthodes de classification, on s'est intéressé aux réseaux de neurones et, plus particulièrement, aux réseaux de neurones convolutifs (CNNs). Les réseaux de neurones sont des modèles computationnels inspirés du fonctionnement du cerveau humain, conçus pour résoudre des problèmes complexes en apprenant à partir de données. Ils se composent d'unités de traitement appelées neurones, organisées en couches. Chaque neurone reçoit des entrées, effectue des calculs et produit une sortie qui peut être transmise à d'autres neurones [14].

Il existe plusieurs types de réseaux de neurones, chacun ayant ses propres caractéristiques et applications. Parmi les plus connus, on trouve les réseaux de neurones entièrement connectés, les réseaux de neurones récurrents (RNNs) et les réseaux de neurones convolutifs (CNNs). Les CNNs, en particulier, sont spécialement conçus pour traiter des données visuelles et ont démontré des performances exceptionnelles dans des tâches telles que la reconnaissance d'images et la détection d'objets.

Nous nous concentrerons sur les réseaux de neurones convolutifs, en explorant leur architecture unique, leur fonctionnement et leurs applications dans le domaine de la vision par ordinateur. Grâce à leur capacité à apprendre automatiquement des caractéristiques complexes à partir de données brutes, les CNNs sont devenus des outils indispensables dans de nombreux secteurs, allant de la médecine à la sécurité, en passant par les transports.

3.3.1 Structure des CNNs

Les CNNs, également appelés convnets (pour « Convolutional Network ») ou CNN (pour « Convolutional Neural Network »), s'inspirent directement du cortex visuel des vertébrés. Conçus spécifiquement pour traiter et analyser des données visuelles, ces réseaux se distinguent par leur architecture multicouches, souvent organisée en blocs de traitement (**CONVOLUTION** → **RELU** → **POOLING** → **FULLY CONNECTED**). Cette structure permet aux CNNs d'apprendre efficacement à partir d'images, en extrayant des caractéristiques pertinentes et en les classifiant. Un CNN se compose de deux parties principales, chacune ayant un rôle essentiel dans le traitement des données visuelles : la partie

convolutive et la partie classification (Fig.3.5).

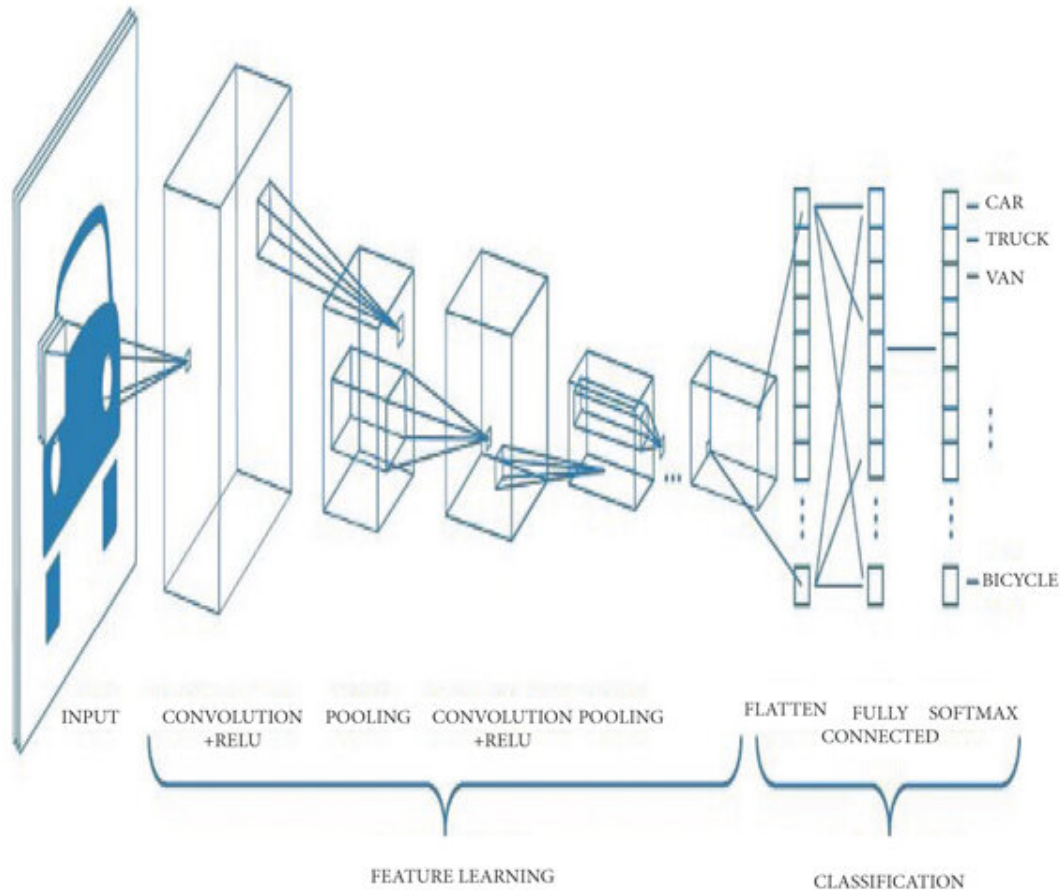


FIGURE 3.5 – Structure d'un réseau de neurones convolutifs

3.3.2 Partie Convolutive

La partie convolutive est le cœur du CNN, elle est responsable de l'extraction des caractéristiques des images d'entrée. Elle utilise plusieurs types de couches :

- **Couche de Convolution** : cette couche applique des filtres (ou noyaux) pour détecter des motifs spécifiques dans l'image, tels que des bords, des textures ou des formes. Chaque filtre est conçu pour capturer une caractéristique particulière, et les résultats de cette opération sont appelés *cartes de caractéristiques* (Fig.3.6). Les coefficients des filtres constituent des poids synaptiques

(Lien entre les neurones) et sont modifiés par l'algorithme d'apprentissage.

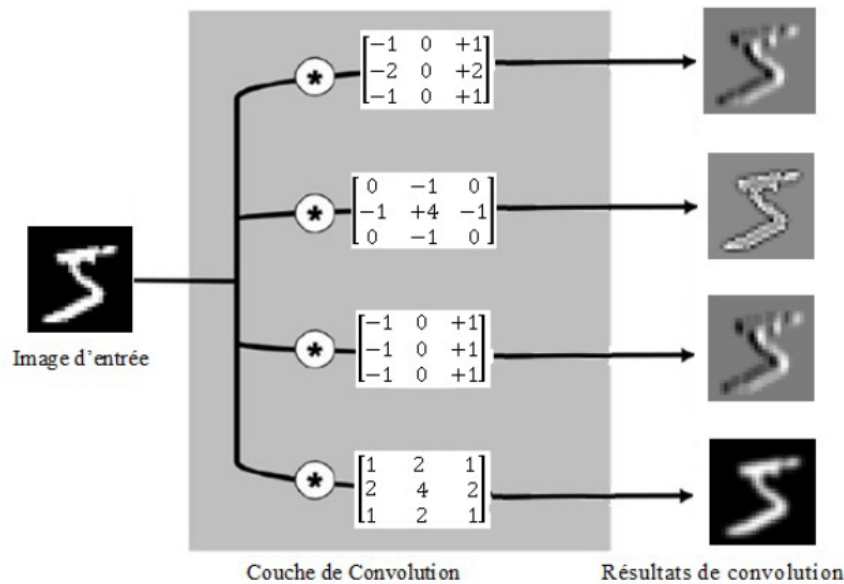


FIGURE 3.6 – Cartes de caractéristiques obtenues par des opérations de convolution.

- **Couche de Correction ReLU** : après la convolution, la fonction d'activation ReLU (Rectified Linear Unit) est appliquée sur chaque neurone des cartes de caractéristiques. Cette fonction représentée sur la figure 3.7 introduit de la non-linéarité dans le modèle, ce qui est crucial pour permettre au réseau d'apprendre des relations complexes entre les caractéristiques. En remplaçant les valeurs négatives par zéro, ReLU aide également à atténuer le problème de la *vanishing gradient*.

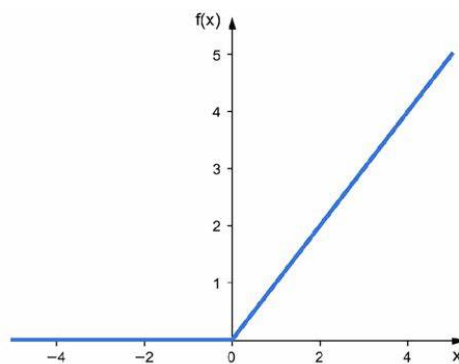


FIGURE 3.7 – Fonction d'activation ReLU.

- **Couche de Pooling** : cette couche réduit la dimensionnalité des cartes de caractéristiques, conservant uniquement les informations les plus significatives. Le pooling peut être de type max (qui retient la valeur maximale dans une région donnée), mean (qui calcule la moyenne), ou sum (calcule la somme) (Fig.3.8). Cette réduction de dimensionnalité permet de diminuer le nombre de paramètres à apprendre, ce qui limite le risque de sur-apprentissage et améliore l'efficacité du modèle.

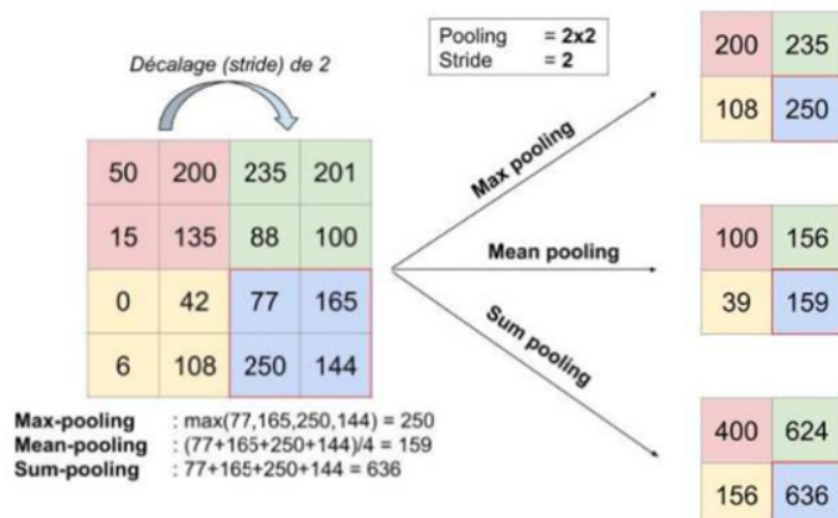


FIGURE 3.8 – Illustration de l'opération de pooling

3.3.3 Partie Classification

La seconde partie, la partie classification, est généralement constituée de couches entièrement connectées, formant un modèle de perceptron multicouche (MLP - Multi-Layer Perceptron) (Fig.3.9). Cette section joue un rôle crucial dans l'interprétation des caractéristiques extraites. Elle contient :

- **Couche d'aplatissement (FLATTEN)** : est une couche qui transforme une sortie multidimensionnelle (comme une image en 2D) en un vecteur unidimensionnel. Elle permet de passer des couches convolutionnelles, qui travaillent avec des images ou des matrices, aux couches entièrement connectées, qui attendent des vecteurs pour faire la classification.
- **Couches entièrement connectées** : Ces couches relient chaque neurone de la couche de sortie

à tous les neurones de la couche précédente. Elles combinent les caractéristiques extraites pour effectuer la classification finale. Grâce à cette interconnexion, le réseau peut apprendre des relations complexes et effectuer un raisonnement de haut niveau sur les données.

- **Fonction d'Activation Softmax** : À la fin de la partie Classification, la fonction d'activation Softmax est souvent utilisée. Elle produit un vecteur de probabilités, où chaque élément représente la probabilité que l'image d'entrée appartienne à une classe spécifique. La somme de ces probabilités est égale à 1, facilitant ainsi l'attribution d'une étiquette à chaque image.

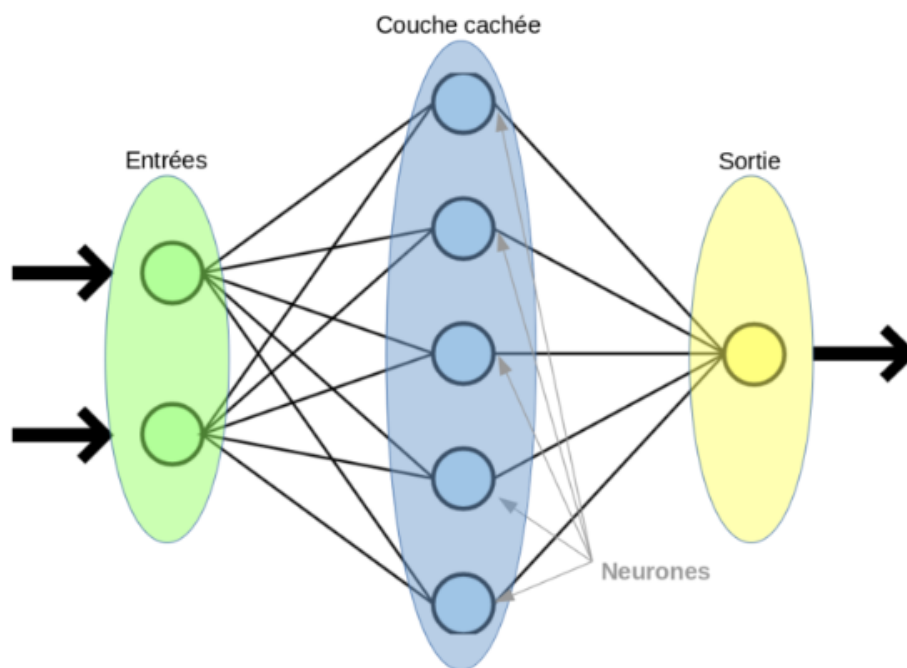


FIGURE 3.9 – Couches entièrement connectées

3.3.4 Modèles de CNNs et transfert d'apprentissage

Il existe un grand nombre de réseaux CNN pré-entraînés, les plus connus sont :

- **LeNet-5**

LeNet-5 est l'un des premiers réseaux convolutifs. Il a été proposé par Yann LeCun, Léon Bottou, Yoshua Bengio et Patrick Haffner pour la reconnaissance de caractères manuscrits et imprimés dans les années 1990.

LeNet-5 se compose de deux ensembles de couches regroupant celles de convolution et de pooling, suivis d'une couche convolutive et d'aplatissement, puis de deux couches entièrement connectées et, en dernier, d'un classificateur softmax (Figure 3.10).

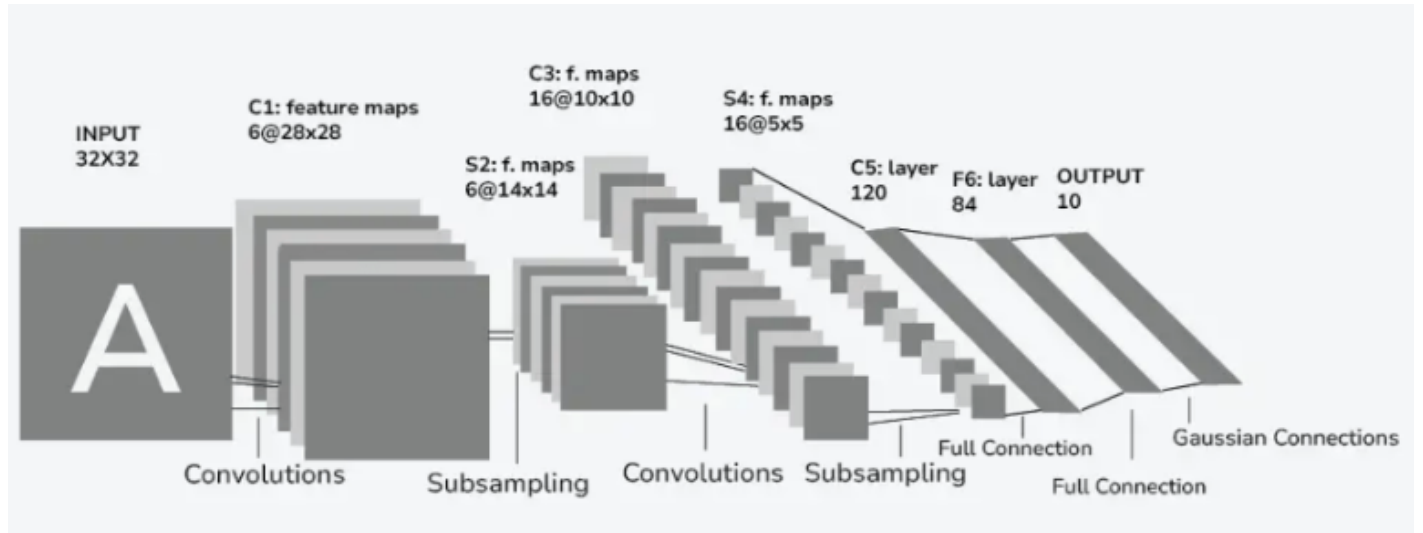


FIGURE 3.10 – Architecture du LeNet-5

— AlexNet

Très populaire, le réseau AlexNet possède une architecture très similaire à celle du réseau LeNet de Yann LeCun et al., mais avec un nombre de couches plus élevé (5 couches de convolution et 3 couches entièrement connectées) (Figure 3.11).

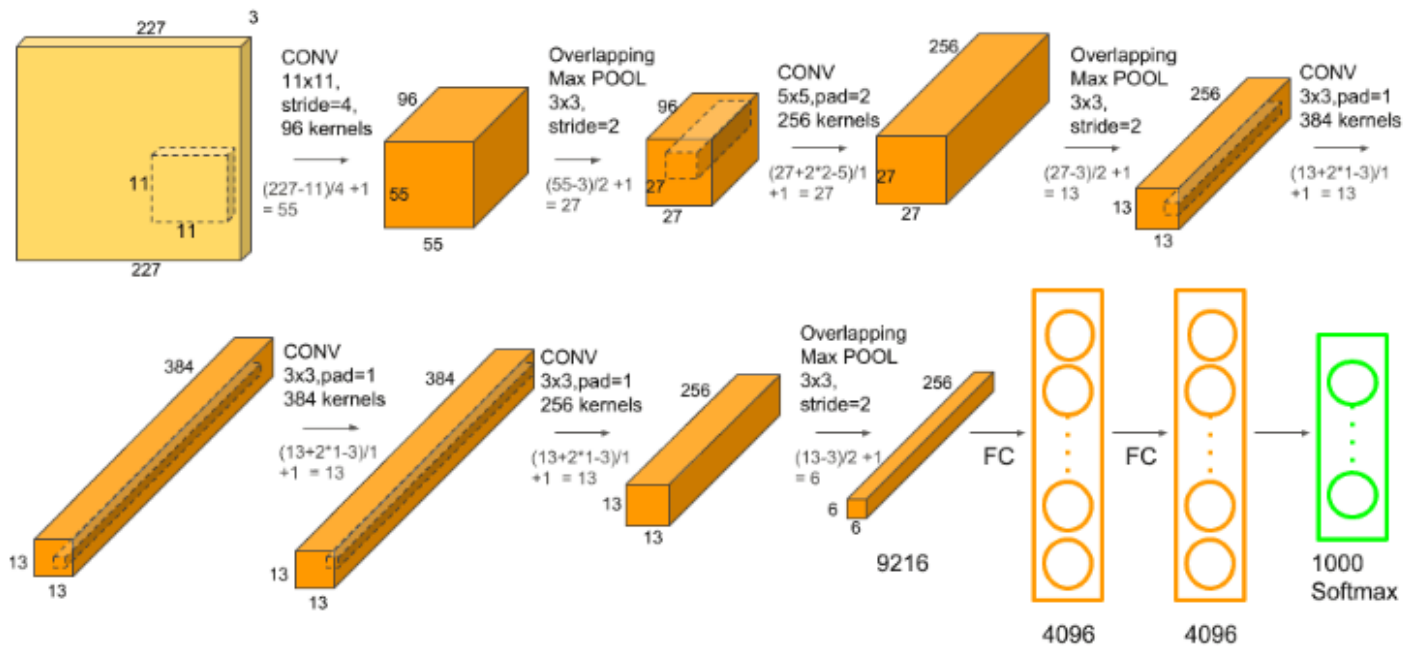


FIGURE 3.11 – Architecture d’AlexNet

— VGGNet

VGGNet-16 se compose de 16 couches, dont 13 couches de convolution et 3 couches entièrement connectées (Figure 3.12). Une version à 19 couches, VGGNet-19, similaire à AlexNet, est également proposée. Cependant, VGGNet-16 comprend 138 millions de paramètres, ce qui peut être difficile à entraîner.

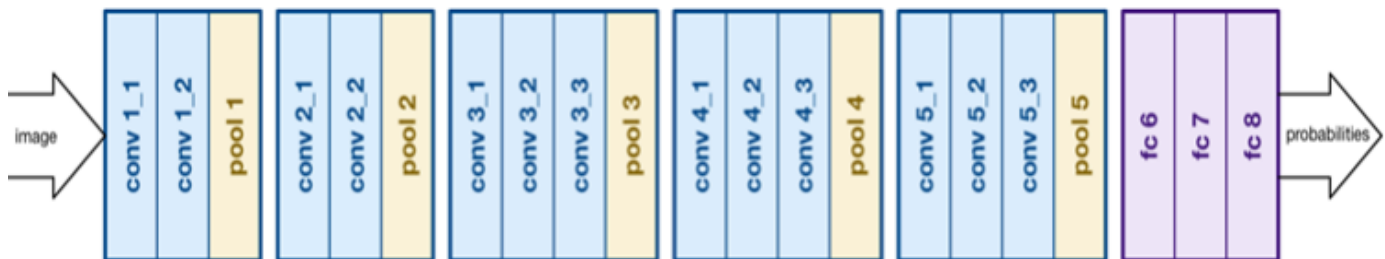


FIGURE 3.12 – Architecture du VGGNet

— GoogLeNet

GoogLeNet, également connu sous le nom d’Inception v1, est un modèle de réseau de neurones

convolutionnels (CNN) développé par les chercheurs de Google, qui a été introduit lors de la compétition ImageNet en 2014. Ce modèle se distingue par son architecture innovante basée sur des modules d’Inception, permettant au réseau de capturer des informations à différentes échelles grâce à l’utilisation de plusieurs filtres convolutifs de tailles variées (1x1, 3x3 et 5x5). En concaténant les résultats de ces différents filtres, GoogleNet parvient à obtenir des représentations riches et variées des données d’entrée.

Un autre aspect marquant de GoogleNet est son utilisation de convolutions 1x1 pour réduire le nombre de canaux (dimensions) des cartes de caractéristiques, ce qui aide à diminuer la complexité computationnelle et à prévenir le surapprentissage. Avec ses 22 couches, GoogleNet prouve qu’il est possible d’augmenter la profondeur des réseaux sans dégrader les performances, ce qui était un défi dans d’autres architectures (Figure 3.13).

L’architecture intègre également des techniques de normalisation, telles que la normalisation par lot (batch normalization), qui stabilisent l’apprentissage et améliorent la vitesse de convergence. Grâce à ces innovations, GoogleNet a remporté la compétition ImageNet, atteignant des performances de pointe, tout en étant efficace sur le plan des calculs.

GoogleNet est largement utilisé pour diverses applications, notamment la classification d’images dans des domaines tels que la médecine, la reconnaissance faciale et la conduite autonome. Bien qu’il soit principalement conçu pour la classification, des variantes de ce modèle ont été adaptées pour des tâches de détection d’objets. De plus, GoogleNet est souvent employé comme modèle pré-entraîné dans des tâches spécifiques grâce au transfert d’apprentissage, ce qui en fait un choix populaire parmi les chercheurs et les praticiens.

En termes d’implémentation, des frameworks comme TensorFlow ou PyTorch facilitent l’utilisation de GoogleNet. Par exemple, dans PyTorch, il est possible de charger facilement un modèle

pré-entraîné et de modifier sa dernière couche pour l'adapter à une nouvelle tâche de classification. Cela rend GoogleNet accessible pour divers projets d'apprentissage automatique.

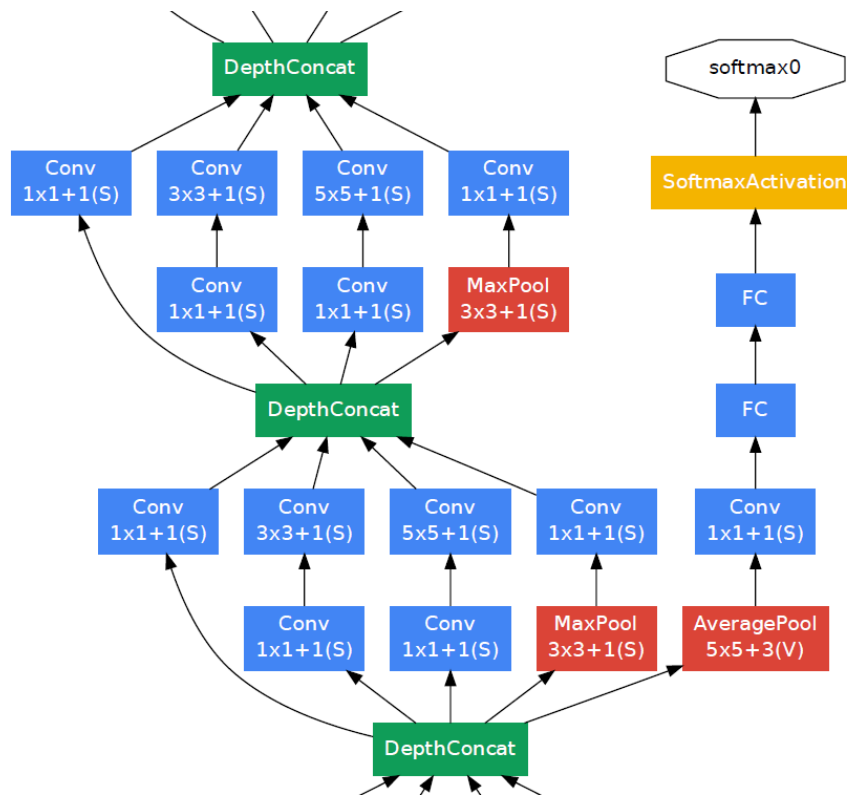


FIGURE 3.13 – Architecture de GoogleNet

— ResNet

Les ResNets permettent à un réseau d'être beaucoup plus profond tout en s'entraînant efficacement. Le ResNet-152 contient 152 couches organisées en blocs de convolution et d'identité. Chaque bloc de convolution comporte 3 couches de convolution (Figure 3.14). Il existe d'autres variantes, comme ResNet-50 et ResNet-101, qui contiennent respectivement 50 et 101 couches.

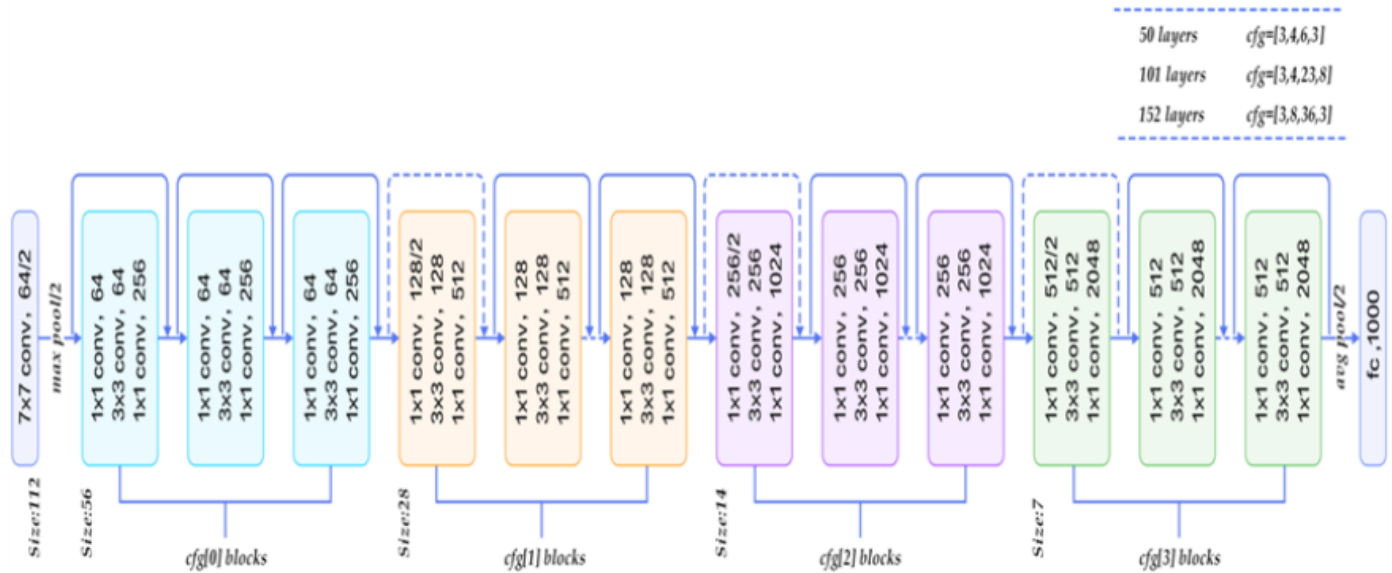


FIGURE 3.14 – Architecture du ResNet

Transfert d'apprentissage

Il existe différentes manières d'utiliser les CNNs. La méthode la plus évidente est de former un nouveau modèle CNN à partir de zéro. Cette approche est souvent adoptée pour de nouvelles applications pour lesquelles les modèles existants ne sont pas adaptés (performants). Cependant, ce n'est pas une approche très répandue, car elle nécessite de réaliser plusieurs tests avec une grande base d'apprentissage pour obtenir un modèle adéquat. De plus, l'entraînement de nouveaux modèles peut facilement s'étaler sur plusieurs jours, voire plusieurs semaines.

L'autre manière, qui est la plus adoptée par les scientifiques, est le transfert d'apprentissage. Cette approche repose sur le principe qui consiste à appliquer des connaissances obtenues en effectuant une tâche donnée afin de résoudre un problème différent, mais présentant des similitudes. Dans ce cas, un CNN pré-entraîné sur une base d'images autre que celle de l'application est utilisé comme nouveau modèle. Ce nouveau réseau est initialisé avec les poids du CNN pré-entraîné. La structure du modèle pré-entraîné est légèrement modifiée (nombre de neurones de la couche de sortie) pour s'adapter à la nouvelle tâche de classification. La nouvelle base d'apprentissage est ensuite utilisée pour entraîner le nouveau modèle. On parle alors de réglage fin du modèle de CNN (fine-tuning). Cette approche est la

plus utilisée, car elle présente l'avantage de nécessiter un volume de données d'apprentissage beaucoup plus faible et un temps de calcul beaucoup moins élevé.

3.3.5 Fonctionnement d'un CNN

Le fonctionnement d'un réseau de neurones convolutif nécessite une base d'images de référence avec laquelle le CNN apprend à reconnaître la classe d'une image inconnue. Le processus de traitement du CNN suit les étapes suivantes :

3.3.6 Prétraitement des images

Avant d'être introduites dans un CNN, les images doivent subir un prétraitement pour garantir que les données sont dans un format adéquat pour l'apprentissage. Les étapes typiques de prétraitement des images comprennent :

1. **Redimensionnement** : les images peuvent varier en taille, mais les CNNs nécessitent souvent que toutes les images d'entrée aient la même taille que la 1ère couche du modèle. Chaque image est donc redimensionnée à une taille standard, comme 224 x 224 pixels pour certains modèles.
2. **Normalisation** : cette étape consiste à ajuster les valeurs des pixels pour qu'elles se situent dans une plage commune, souvent entre 0 et 1 ou -1 et 1. Cela aide à accélérer la convergence pendant l'entraînement et à améliorer la stabilité du modèle. Pour certaines applications, il peut être utile de centrer et réduire les valeurs des données autour de zéro en soustrayant la moyenne des valeurs des pixels et en divisant par l'écart-type.
3. **Augmentation des données** : Cette procédure consiste à appliquer des transformations aléatoires aux images d'entraînement pour créer des variations. Cela aide à rendre le modèle plus robuste en lui apprenant à reconnaître des objets malgré des variations possibles. Les techniques courantes incluent la rotation, le zoom, le retournement et la modification de la luminosité et du contraste.

3.3.7 Entraînement et apprentissage

L'entraînement d'un CNN repose sur la rétropropagation. Ce processus itératif ajuste les poids du réseau pour minimiser une fonction de perte décrivant l'écart entre les prédictions du modèle et les valeurs réelles des données d'entraînement. Les algorithmes Sgdm et Adam sont les plus utilisés. Ils se basent sur l'algorithme de rétropropagation. Celui-ci consiste à calculer la perte entre les prédictions du réseau et les valeurs réelles des données d'entraînement. Cette perte est mesurée par une fonction de perte appropriée au problème, comme l'entropie croisée pour la classification ou l'erreur quadratique moyenne pour la régression. Une fois la perte calculée, l'algorithme de rétropropagation est utilisé pour ajuster les poids du réseau qui englobent principalement les poids des filtres de convolution et les poids synaptiques de la couche entièrement connectée. La rétropropagation se déroule comme suit :

- **Calcul du gradient** : le gradient de la fonction de perte par rapport à chaque poids est calculé en utilisant la dérivation partielle.
- **Mise à jour des poids** : les poids sont ajustés dans la direction opposée au gradient pour réduire la perte.
- **Taux d'apprentissage** : Un taux d'apprentissage est utilisé pour contrôler la taille des étapes de mise à jour. Un taux plus faible peut conduire à une convergence plus lente mais plus stable, tandis qu'un taux plus élevé peut accélérer la convergence, mais risque de sauter au-dessus du minimum global.

Ce processus de calcul de la perte et de mise à jour des poids est répété pour chaque échantillon du jeu de données d'entraînement sur plusieurs itérations appelées "époques". À chaque époque, les poids du réseau sont ajustés pour mieux représenter les données d'entraînement et réduire la perte globale.

En pratique, l'exploitation d'un CNN par transfert d'apprentissage nécessite le choix d'un modèle de CNN préentraîné, de choisir l'algorithme d'apprentissage, de fixer le nombre d'époques et le taux d'apprentissage.

3.4 Classification des signaux ECG à base d'un CNN

3.4.1 Description de la méthode proposée

L'ECG est un outil essentiel pour le diagnostic de diverses infections cardiaques. Les signaux ECG peuvent révéler des rythmes normaux, également appelés rythme sinusal normal et anormaux comme : l'ischémie myocardique, l'infarctus du myocarde, l'insuffisance cardiaque, la bradycardie, la tachycardie, la fibrillation auriculaire, la fibrillation ventriculaire et l'insuffisance cardiaque. L'objectif principal de notre application est de détecter si un signal ECG correspond au rythme normal (RSN), à une arythmie cardio-vasculaire (ARR) ou à une insuffisance cardiaque (CHF) à l'aide des CNNs. Notons que l'arythmie cardiovasculaire englobe l'ischémie myocardique, l'infarctus du myocarde, la bradycardie, la tachycardie, la fibrillation auriculaire et la fibrillation ventriculaire. Pour atteindre cet objectif, nous proposons de transformer les signaux ECG monodimensionnels (1D) en images bidimensionnelles (2D) en utilisant la représentation temps-frequence par le biais des différentes méthodes de décomposition (EMD, VMD, EWT, EFD), présentées dans le chapitre précédent. Cette méthode de classification de signaux ECG en 3 classes (RSN, ARR, CHF) est décrite par l'organigramme de la figure 3.15.

Concernant le CNN, nous avons opté pour le modèle préentraîné GoogLeNet (voir section 3.3.4). Cependant afin d'adapter ce modèle à notre application, nous avons effectué quelques modifications. En premier lieu, nous avons remplacé les couches de sortie, formée initialement de 1000 classes, en une couche comptant 3 neurones relatifs aux 3 classes de signaux ECG traités. Nous avons utilisé l'algorithme d'apprentissage Sgdm avec un taux d'apprentissage égale à 10^{-4} , un nombre d'époques fixé à 20 et une taille de mini-lot fixé à 15.

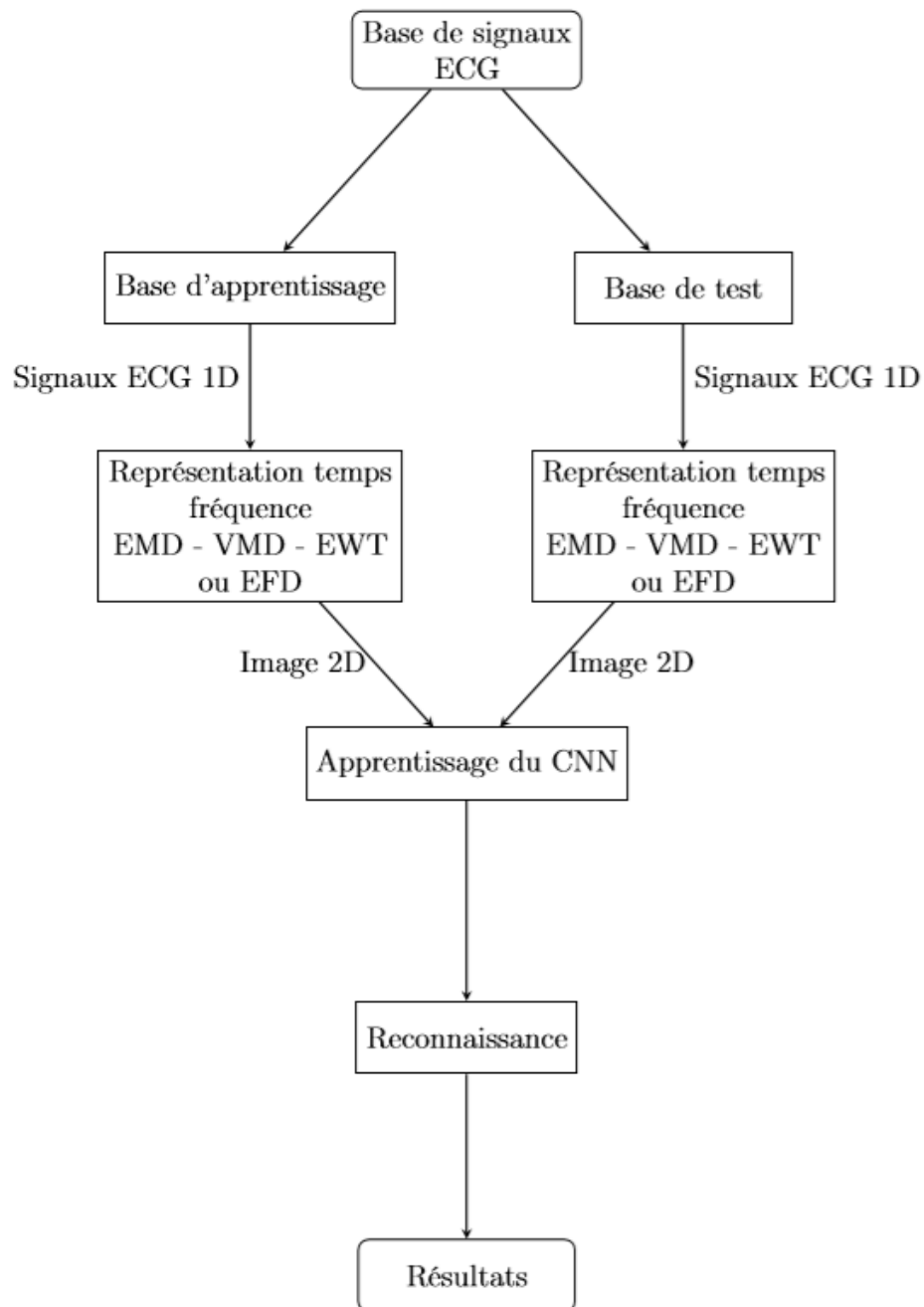


FIGURE 3.15 – Organigramme de la méthode de classification des signaux ECG proposée

3.4.2 Base de données utilisée

Pour évaluer les performances de notre méthode de classification des signaux ECG, nous avons utilisée une base de données tirée à partir de PhysioNet. PhysioNet est une ressource en libre accès

contenant des bases de données de signaux physiologiques et les informations cliniques. Elle propose des données variées, et notamment des enregistrements ECG. Pour notre étude, nous avons utilisé une base de données MIT-BIH contenant 162 enregistrements, dont 96 signaux appartiennent à la classe ARR(Arrhythmia), 30 signaux à la classe CHF (Congestive Heart Failure), et 36 signaux de la classe NSR(Normal Sinus Rhythm). Ces signaux contiennent 65536 échantillons obtenus avec une fréquence d'échantillonnage de 128 Hz.

La figure 3.16 montre l'allure de trois signaux ECG relatifs aux classes ARR, CHF, NSR. La figure 3.17 affiche les représentations temps-frequences obtenues par les méthodes de décomposition (EMD, VMD, EWT et EFD) sur ces trois signaux.

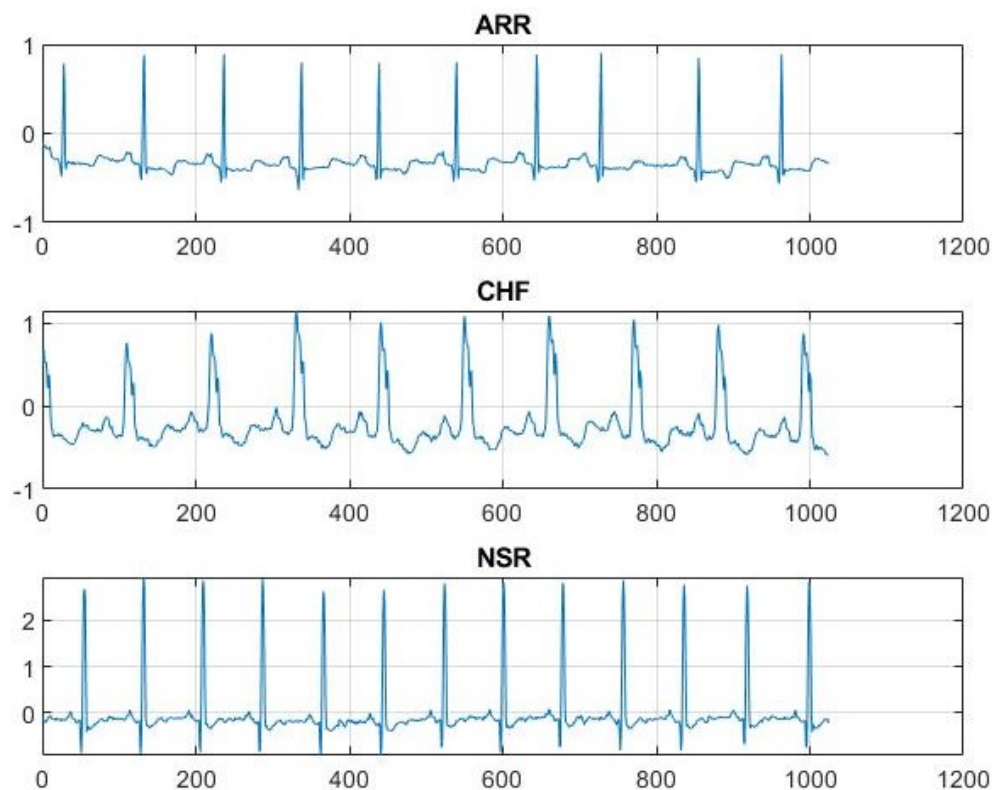


FIGURE 3.16 – Allure de trois signaux ECG relatifs aux classes ARR, CHF, NSR.

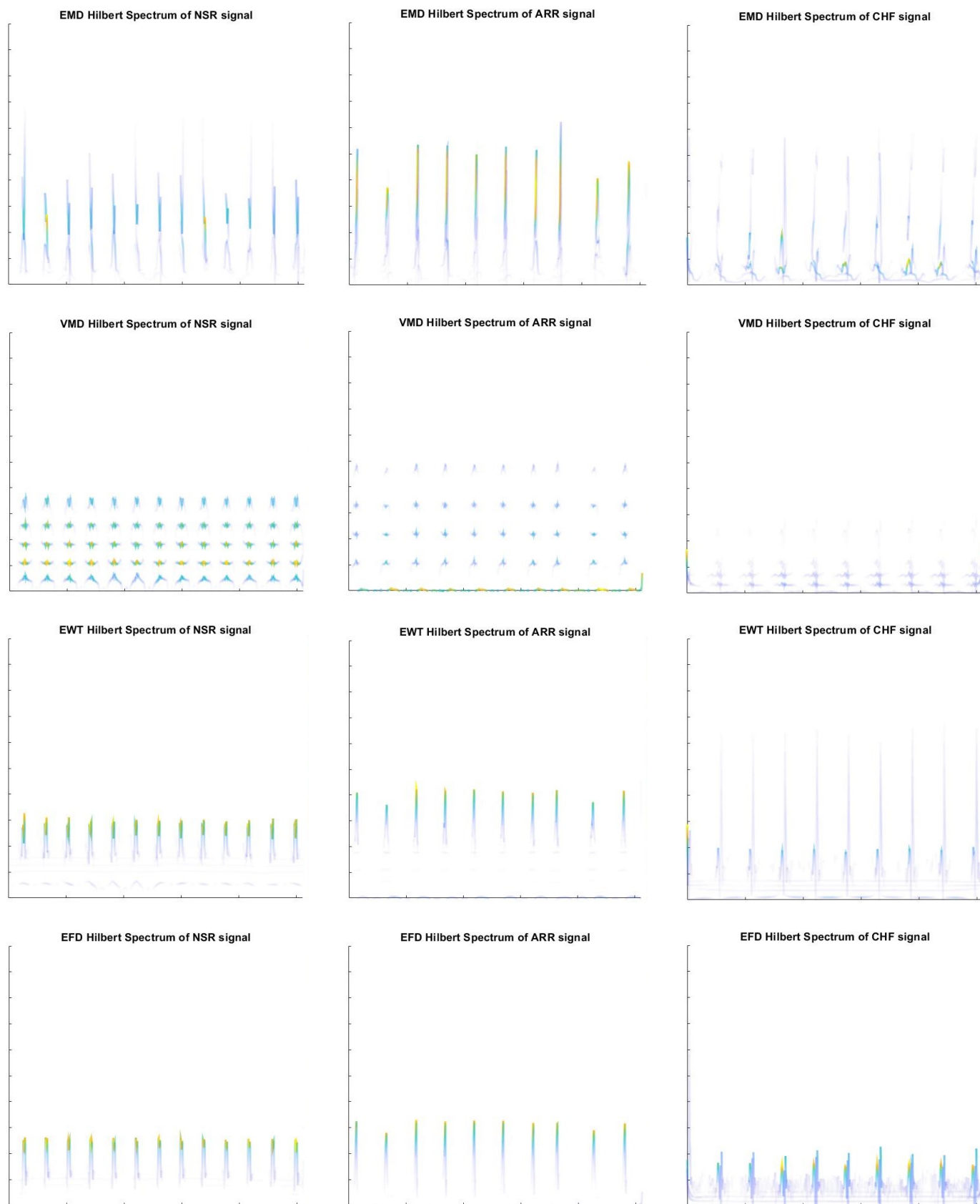


FIGURE 3.17 – Représentation des temps-fréquences obtenues par les méthodes de décomposition sur les signaux ECG

3.4.3 Résultats

Pour juger les performances de notre méthode de classification et évaluer la pertinence des méthodes de décomposition à caractériser les signaux ECG, nous avons scindé la base de données en deux sous ensembles. Un sous ensemble d'apprentissage (80% du nombre total de signaux) utilisé pour entraîner le CNN et une base de test pour mesurer le taux de classification. Ce taux est donné par le rapport du nombre de signaux de la base de test correctement classés sur le nombre total de signaux de cette base. Le tableau 3.1 mentionne le nombre de signaux dans chaque base.

	Base d'apprentissage	Base de test	Total
ARR	77	19	96
CHF	24	6	30
NSR	29	7	36

TABLE 3.1 – Répartition des données dans les deux bases d'apprentissage et de test.

Le tableau 3.2 regroupe les taux de classification obtenus avec chaque méthode de décomposition avec un nombre de composantes fixé à 3 et 5.

Nombre de composantes	EMD	VMD	EWT	EFD
3	62.5%	71.875%	78.125%	81.25%
5	68.75%	68.75%	68.5%	78.125%

TABLE 3.2 – Taux de classification obtenu par chaque méthode de décomposition.

A travers ce tableau, nous constatons que l'EFD est plus performante que les autres méthodes de décomposition quelque soit le nombre de composantes et que le nombre de composantes égal à 3 donne de meilleurs résultats que 5 pour l'ensemble des méthodes hormis l'EMD.

Les taux de classification obtenues sont médiocres et ne correspondent pas aux résultats escomptés. Pour mieux analyser ces résultats, nous présentons sur la figure 3.18 les matrices de confusion obtenues avec chaque méthode de décomposition avec un nombre de composantes égal à 3. Notons qu'une matrice de confusion M de taille $K \times K$ (K étant le nombre de classes) est une matrice dans laquelle chaque ligne représente la classe prédite par un classifieur et chaque colonne la classe réelle (Tab.3.3). Un élément m_{ij} de cette matrice représente le nombre d'images (signaux) de la classe i prédite comme appartenant réellement à la classe j . L'élément m_{ij} de la diagonale de la matrice de confusion représente ainsi le nombre d'images (signaux) de la classe i correctement identifiées.

À partir de cette matrice, on peut déduire les mesures FP, TP et FN, pour chaque classe où :

- TP_i (true positif) représente le nombre d'images (signaux) de la classe i correctement classées.
- FP_i (false positif) représente le nombre d'images (signaux) classées comme appartenant à la classe i alors que ce n'est pas le cas.
- FN_i (false negative) représente le nombre d'images classées comme n'appartenant pas à la classe i alors que c'est le cas.
- TN_i (true negative) représente le nombre d'images qui n'appartiennent pas à la classe i ni classées dans la classe i .

		True/Actual		
		Classe 1	Classe K
Predicted	Classe 1	m_{11}	m_{1K}

	Classe K	m_{K1}	m_{KK}

TABLE 3.3 – Taux de classification obtenu par chaque méthode de décomposition

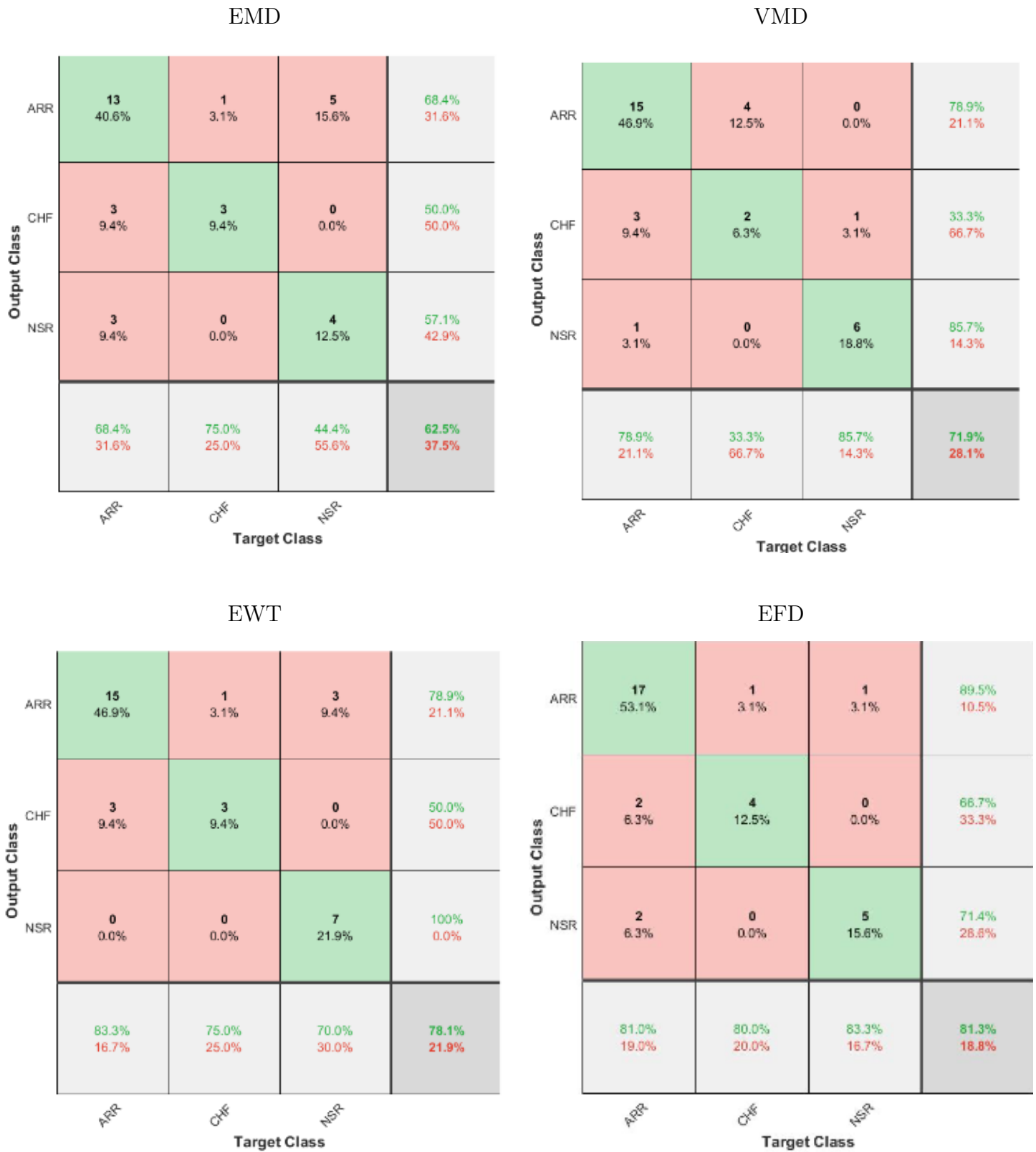


FIGURE 3.18 – Matrices de confusion obtenues avec les méthodes de décomposition.

Ces matrices de confusion montrent que la majorité des erreurs se produisent sur la classe CHF. Les résultats fournis par l'EFD sont appréciables puisque seulement 2 signaux par classe sont mal classés.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la classification des signaux ECG en deux catégories principales : arythmies et non-arythmies, en recourant à diverses méthodes de décomposition temps-fréquence, notamment la VMD, l'EMD, l'EWT et l'EFD. La première section a introduit les bases anatomiques et fonctionnelles du cœur, les anomalies de rythme cardiaque, et a détaillé les signaux ECG, en expliquant les dérivations, les intervalles et leur rôle crucial dans le diagnostic des arythmies.

Dans la deuxième partie, nous avons examiné les réseaux de neurones convolutifs (CNN), avec un accent particulier sur le modèle GoogleNet, qui a prouvé son efficacité pour extraire des caractéristiques pertinentes des signaux ECG, améliorant ainsi la précision de la classification des arythmies.

Enfin, la troisième partie a été consacrée à l'application des méthodes de décomposition des signaux ECG. Nous avons mis en œuvre des techniques telles que l'EMD, la VMD, l'EWT et l'EFD, permettant de décomposer les signaux non stationnaires en modes distincts. Combinée au modèle GoogleNet, cette approche a permis une analyse approfondie des signaux ECG. Les résultats obtenus sur la base de données PhysioNet ont révélé des performances de classification encourageantes, bien que les taux de classification demeurent médiocres dans l'ensemble. Les matrices de confusion ont mis en évidence que la majorité des erreurs se produisaient dans la classe CHF, soulignant ainsi les défis persistants dans l'amélioration de la classification des arythmies. Cependant, l'utilisation de l'EFD a démontré des résultats significatifs, avec seulement deux signaux mal classés par classe, ce qui ouvre des perspectives prometteuses pour de futures recherches dans ce domaine.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'étude de diverses méthodes d'analyse et de décomposition des signaux, particulièrement en lien avec les signaux électrocardiogrammes (ECG). L'objectif principal était de classer les arythmies cardiaques en s'appuyant sur des représentations temps-fréquence obtenues via plusieurs techniques de décomposition de signaux telle la décomposition modale empirique (EMD), la décomposition modale variationnelle (VMD), la méthode de décomposition de Fourier (FDM), ainsi que la décomposition en ondelettes empiriques (EWT) et la décomposition de Fourier empirique (EFD), et leur intégration dans des réseaux de neurones convolutifs (CNN).

Ces méthodes diffèrent par la manière d'extraire les IMFs. Alors que l'EMD utilise une procédure empirique dite de tamisage qui se base sur le calcul des extrema locaux, la VMD s'appuie sur la minimisation d'une fonction variationnelle en résolvant un problème d'optimisation basé sur des critères de délité de reconstruction et de régularité des modes. L'EFD segmente le signal en plusieurs bandes de fréquence, appelées Bandes fréquentielles idéales (Ideal Band Filters (IBF)), basées sur les caractéristiques du spectre du signal. L'EWT repose sur l'idée d'extraire les ondelettes empiriques à partir du spectre de Fourier du signal. Contrairement à la transformée en ondelettes traditionnelle qui utilise des ondelettes mères fixes, l'EWT adapte la construction des ondelettes aux caractéristiques du signal et La FDM repose sur la décomposition du signal en bandes de fréquence appelées Intrinsic Band Functions (FIBF).

Nous avons d'abord réexaminé les méthodes classiques d'analyse temps-fréquence, telles que la transformée de Fourier, la transformée de Stockwell, la transformée en ondelettes et la transformée de Wigner-Ville, qui, bien que largement utilisées, montrent certaines limitations face aux signaux non-stationnaires.

En réponse à ces limitations, nous avons étudié des techniques de décomposition plus récentes et plus

adaptées aux signaux complexes et non-stationnaires. Cela inclut la décomposition modale empirique (EMD), la décomposition modale variationnelle (VMD), la méthode de décomposition de Fourier (FDM), ainsi que la décomposition en ondelettes empiriques (EWT) et la décomposition de Fourier empirique (EFD).

Les performances des méthodes de décomposition ont été évaluées sur une base de données ECG comportant des signaux normaux et pathologiques. Nous avons utilisé ces méthodes pour transformer les signaux ECG en images (représentations temps-fréquence) qui ont ensuite été analysées et classifiées en 3 classes (ARR, CHF, NSR) par un réseau de neurones convolutifs (CNN).

Dans l'ensemble cette étude montre que l'EFD s'est révélée être la méthode la plus performante pour la classification des arythmies cardiaques. Cependant, les résultats par notre approche peuvent être grandement améliorés.

Les travaux réalisés dans cette thèse ouvrent la voie à plusieurs perspectives. Tout d'abord, il serait intéressant d'effectuer des tests sur des bases de données plus grandes et d'impliquer d'autres modèles de CNNs comme ResNet ou DenseNet.

De plus, l'application de ces méthodes à d'autres types de signaux biomédicaux, tels que les signaux d'électroencéphalographie (EEG) ou d'électromyographie (EMG), pourrait fournir de nouvelles approches pour la détection et la classification d'autres pathologies.

Enfin, des études futures pourraient se concentrer sur la réduction des coûts computationnels liés aux méthodes de décomposition, rendant ainsi ces approches plus accessibles pour des applications en temps réel, notamment dans les dispositifs médicaux embarqués.

Bibliographie

- [1] Pierre Maurel. Traitement et analyse d'images numériques : transformée de fourier pour l'imagerie numérique. Site :<https://perso.univ-rennes1.fr/pierre.maurel/IMA/>.
- [2] Massinissa Debiane and Zouhir Khelouat. Décomposition modale variationnelle : Application à la classification des lésions de la peau. Mémoire de fin d'Études de master académique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Faculté du Génie Électrique et d'Informatique, Département d'Automatique, Tizi-Ouzou, Algérie, septembre 2023.
- [3] Yue Min Zhu, Françoise Peyrin, and Robert Goutte. Transformation de wigner-ville : Description d'un nouvel outil de traitement du signal et des images. *Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons, UA CNRS 1216*, 1987.
- [4] Nassima Hamdad. Transformée de huang-hilbert : Application à la détection des défauts, 2013. Mémoire de magister en automatique : Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie.
- [5] R. G. Stockwell, L. Mansinha, and R. P. Lowe. Localization of the complex spectrum : The s-transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(4) :998–1001, 1996.
- [6] Yanwei Wang. *Efficient Stockwell Transform with Applications to Image Processing*. PhD thesis, University of Waterloo, Applied Mathematics, Waterloo, Ontario, Canada, 2011.
- [7] Samira Flissi and Lynda Fettouhi. Fusion d'images de la kinect par la transformée en ondelettes. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie, 2016.

-
- [8] Gada Saliha ép. Bouhedda. Décomposition modale empirique : application à l'analyse de la texture. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri, Tizi Ouzou, Algérie, 2013.
- [9] Konstantin Dragomiretskiy and Dominique Zosso. Variational mode decomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013.
- [10] P. Singh, S. D. Joshi, R. K. Patney, and K. Saha. The fourier decomposition method for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society A*, 473(2200), 2017.
- [11] Jerome Gilles. Empirical wavelet transform. *Article in IEEE Transactions on Signal Processing*, 61(16) :3999–4010, August 2013.
- [12] Wei Zhou, Zhongren Feng, Y. F. Xu, Xiongjiang Wang, and Hao Lv. Empirical fourier decomposition for time-domain signal decomposition. In B. J. Dilworth and M. Mains, editors, *Topics in Modal Analysis & Testing, Volume 8*. The Society for Experimental Mechanics, Inc., 2022.
- [13] Kahina Bensafia. Traitement avancé et aveugle de signaux biomédicaux : application à l'électrocardiogramme. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou (UMMTO), 2020.
- [14] Issam Seghairi and Slimane Baamara. Classification des arythmies cardiaques en utilisant les réseaux de neurones profonds. Mémoire du projet de fin d'Études pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en Électronique, École Nationale Polytechnique, Département d'Électronique, juillet 2020.