

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etudes**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'Ingénieur d'Etat en Automatique*

***Thème***

***Commande Multiboucle basée sur le  
placement de pôles dominants***

Proposé par : M<sup>r</sup> A.HADDOUCHE

Dirigé par : M<sup>r</sup> A.MAIDI

Présenté par :

M<sup>r</sup> DJAROUN Rabah

M<sup>lle</sup> BRAHAMI Cherifa

Soutenu le : 13 /07 /2010

*Promotion 2010*

# *Remerciements*

*Il nous est agréable d'exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur M. MAIDI.A qui nous a aidé et soutenu tout au long de notre travail, et qui n'a jamais manqué de nous orienter et de nous conseiller. Qu'il trouve ici l'expression de notre respect et de notre profonde reconnaissance.*

*Nos remerciements les plus sincères vont à Mesdames et Messieurs les membres du jury, qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger ce modeste travail. Pour cela, ainsi que pour leurs commentaires sur le mémoire, nous leur exprimons notre profonde gratitude.*

*Nous sommes aussi reconnaissants à tous les enseignants qui nous ont soutenus tout au long de nos études. Qu'ils trouvent ici l'expression de nos sentiments les plus respectueux.*

*Nous tenons à exprimer nos remerciements les plus profonds à tous les membres de nos familles, pour leurs soutiens indéfectibles.*

*En fin, nos remerciements s'adressent aussi à tous ceux et celles qui nous ont aidés de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail.*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail réalisé grâce au Dieu à :*

- *Ma très chère mère,*
- *Mon père,*
- *Ma très chère Grand-mère,*
- *Mes frères : Belkacem, et Mohand*
- *Mes sœurs : Nadine, Khelloudja, Lilia, Yamina, Hayet et son mari Hakim*
- *Mon neveu Syphax qui j'adore beaucoup,*
- *Mes oncles : ramdane, Azouaou, Mokrane.*
- *A tous mes amis(es).*

*Cherifa*

*Je dédie ce modeste travail réalisé grâce au Dieu à :*

- *Ma très chère mère,*
- *A la mémoire de Mon père, Grand-mère, et mon grand père*
- *Mes frères :Med Said, Ali, M'hamed et Arezki .*
- *Mes sœurs : Tassadidt, Dahbia et Sadia*
- *Mes neveux :Belaid ,Rayane et la petite Imane*
- *A tous mes amis(es)*

*Rabeh*

# ***SOMMAIRE***

<b><i>Introduction générale :</i></b> .....	<b>01</b>
---	-----------

## ***Chapitre I : Introduction aux systèmes multivariable***

<b>I.1</b> Introduction .....	<b>03</b>
<b>I.2</b> Systèmes multivariables .....	<b>03</b>
<b>I.3</b> Représentation .....	<b>04</b>
<b>I.3.1</b> Représentation par matrice de fonction de transfert .....	<b>04</b>
<b>I.3.2</b> Représentation par modèle d'état.....	<b>05</b>
<b>I.3.3</b> Passage de la représentation d'état à la matrice fonction de transfert .....	<b>07</b>
<b>I.4</b> Caractéristiques des systèmes multivariables.....	<b>08</b>
<b>I.4.1</b> La directionalité .....	<b>09</b>
<b>I.4.1.1</b> Réponse à un échelon généralisé .....	<b>09</b>
<b>I.4.1.2</b> Valeurs singulières .....	<b>09</b>
<b>I.4.1.2.1</b> Représentation mathématique .....	<b>10</b>
<b>I.4.1.2.2</b> Décomposition en valeur singulières .....	<b>11</b>
<b>I.4.1.3</b> Nombre de conditionnement .....	<b>12</b>
<b>I.4.2</b> Degré de couplage .....	<b>12</b>
<b>I.4.2.1</b> Gains relatifs .....	<b>12</b>
<b>I.5</b> Commande des systèmes multivariables.....	<b>13</b>
<b>I.5.1</b> Commande multivariable .....	<b>13</b>
<b>I.5.1.1</b> Découplage pour un système (2×2).....	<b>14</b>
<b>I.5.2</b> La commande multiboucle .....	<b>16</b>
<b>I.6</b> Conclusion.....	<b>17</b>

## **Chapitre II :**

<b>II.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>18</b>
<b>II.2</b>	<b>Commande multiboucle.....</b>	<b>18</b>
<b>II.3</b>	<b>Choix des couples entrées-sorties .....</b>	<b>19</b>
<b>II.4</b>	<b>Définition de l'interaction dans un système multivariable .....</b>	<b>21</b>
<b>II.4.1</b>	<b>Explication du phénomène d'interaction .....</b>	<b>22</b>
<b>II.4.2</b>	<b>Méthodes d'analyse des interactions .....</b>	<b>24</b>
<b>II.4.2.1</b>	<b>Méthode de la Matrice des Gains Relatifs (RGA).....</b>	<b>24</b>
<b>II.4.2.1.1</b>	<b>Calcul de la Matrice des Gains Relatifs (RGA) .....</b>	<b>25</b>
<b>II.4.2.1.2</b>	<b>Interprétation de la matrice des gains relatifs (RGA) .....</b>	<b>26</b>
<b>II.4.2.2</b>	<b>Méthode de la Matrice des Gains Relatifs Dynamiques (RDGA) .....</b>	<b>26</b>
<b>II.4.2.2.1</b>	<b>Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs dynamiques (RDGA) .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5</b>	<b>Synthèse d'un régulateur monovariable dans un environnement multivariable .....</b>	<b>27</b>
<b>II.5.1</b>	<b>Méthode de Ziegler et Nichols .....</b>	<b>28</b>
<b>II.5.2</b>	<b>Méthode du plus grand module (BLT).....</b>	<b>29</b>
<b>II.6</b>	<b>Avantages pratiques de la commande multiboucle .....</b>	<b>32</b>
<b>II.7</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>33</b>

### **Chapitre III :**

<b>III.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>34</b>
<b>III.2</b>	<b>Régulateur industriel PID.....</b>	<b>34</b>
<b>III.2.1</b>	<b>Action Proportionnelle P .....</b>	<b>35</b>
<b>III.2.1.1</b>	<b>Effets de l'action proportionnelle .....</b>	<b>36</b>
<b>III.2.2.</b>	<b>Action intégrale.....</b>	<b>36</b>
<b>III.2.2.1</b>	<b>Effets de l'action intégrale.....</b>	<b>37</b>
<b>III.2.3</b>	<b>Action dérivée.....</b>	<b>37</b>
<b>III.2.3.1</b>	<b>Effets de l'action dérivée.....</b>	<b>38</b>
<b>III.2.4</b>	<b>Régulateur PID .....</b>	<b>38</b>
<b>III.3</b>	<b>Méthode approximatif de placement de pôles dominants.....</b>	<b>40</b>
<b>III.3.1</b>	<b>Pôles dominants .....</b>	<b>41</b>
<b>III.3.2</b>	<b>L'influence de position des pôles sur le système à régler .....</b>	<b>41</b>
<b>III.4</b>	<b>Systèmes à temps mort (retard pur) .....</b>	<b>42</b>
<b>III.5</b>	<b>La méthode de placement de pôle dominants .....</b>	<b>43</b>
<b>III.5.1</b>	<b>Principe de la méthode de placement de pôle dominant .....</b>	<b>44</b>
<b>III.5.1.1</b>	<b>Position du problème .....</b>	<b>44</b>
<b>III.5.1.2</b>	<b>Procédure.....</b>	<b>46</b>
<b>III.6</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>60</b>

## ***Chapitre IV :***

<b>IV.1</b>	<b>Introduction .....</b>	<b>61</b>
<b>IV.2</b>	<b>Généralités sur le fonctionnement des colonnes de distillation.....</b>	<b>61</b>
<b>IV. 3</b>	<b>Schéma de la colonne de distillation .....</b>	<b>62</b>
<b>IV.4</b>	<b>Commande de la colonne de distillation .....</b>	<b>66</b>
<b>IV.5</b>	<b>Modèle de la colonne de distillation .....</b>	<b>67</b>
<b>IV.6</b>	<b>Résultats de simulation.....</b>	<b>72</b>
<b>IV.6.1</b>	<b>Commande multiboucle de la colonne de distillation .....</b>	<b>72</b>
<b>IV.7</b>	<b>Conclusion .....</b>	<b>76</b>
	<b><i>Conclusion générale .....</i></b>	<b><i>77</i></b>



# *Indices*

$A(t)$	:	est la matrice d'état dynamique (d'évolution).
$a_{ij}$	:	l'élément $(i, j)$ de la matrice.
$B(t)$	:	est la matrice de commande ou d'entrée.
$B$	:	débit de résidu.
BLT	:	méthode du plus grand module.
$C(t)$	:	est la matrice de mesure ou de sortie.
$c_j$	:	la $j$ -ième consigne du système.
$D(t)$	:	est la matrice de transition directe.
$D_{ij}(s)$	:	Fonction de transfert du découpleur entre la $j$ -ième commande et la $i$ -ième sortie.
$D$	:	débites de distillat.
$e(t)$	:	Signal d'erreur
$F$	:	facteur de déréglage.
$G(s)$	:	est appelée matrice fonction de transfert.
$G_{cij}(s)$	:	Fonction de transfert du correcteur de la boucle $[u_j, y_i]$
$g_{ij}(s)$	:	fonction de transfert entre la $j$ -ième commande et la $i$ -ième sortie
$I_n$	:	est une matrice identité.
$K_s$	:	est la matrice des gains statiques.
$K_{sij}$	:	est le gain statique entre $u_j$ et $y_i$ .
$K_{cr}$	:	gain critique
$K_p$	:	gain proportionnel du régulateur <b>PID</b>
$K_{ZN}$	:	gain de réglage déterminé par la méthode de Ziegler-Nichols
$L^{cm}$	:	module logarithmique en boucle fermée du système multivariable
$L$	:	retard (temps mort).
$N$	:	est le coefficient correspondant au gain du module dérivé filtrée.

$p$	:	le nombre de sorties
PI	:	correcteur proportionnel intégral
PID	:	correcteur proportionnel intégral dérivé
$s, i$	:	Les pôles d'un système réel en boucle fermée.
$P_{s,i}$	:	Les pôles désirés du système.
$q$	:	le nombre d'entrées
$\dot{Q}_B$	:	énergie nécessaire à l'opération de séparation
$\dot{Q}_c$	:	chaleur absorbée
RG	:	Matrice des Gains Relatifs
$R_i$	:	consigne
$s$	:	est la variable de Laplace.
$t$	:	temps
$T_i$	:	Constante d'intégration
$T_d$	:	Constante de temps d'action dérivée.
$T$	:	constante du temps équivalente
$T_{rm}$	:	Temps de résidence moyen.
$u(t)$	:	est le vecteur de commande.
$u_0$	:	Valeur initiale de $u(t)$
$V_1$	:	le débit de vapeur au bouilleur.
$V_n$	:	le débit de vapeur condensée en tête.
$w_0$	:	La pulsation propre du système
$W(j\omega)$	:	$W(j\omega) = -1 + \det[I + G(j\omega)G_c(j\omega)]$
$x(t)$	:	est le vecteur d'état.
$y(t)$	:	est le vecteur de sortie.
$Z_f$	:	Les perturbation attaquant les sorties
$\lambda_{ij}$	:	gain relatif en boucle ouverte entre $u_j$ et $y_i$

$\cdot^*$  : est le produit élément par élément

$(\cdot)^T$  : la transposée d'une matrice

$(\cdot)^{-1}$  : l'inverse d'une matrice

.

L'avènement, ces dernières années, de nouvelles techniques de synthèse des régulateurs monovariables a permis de résoudre plusieurs problèmes de commande. Pour tirer profit de ces méthodes dans le cas des systèmes multivariables, qui représentent la quasi-totalité des procédés industriels, l'adoption de la technique de commande multiboucle représente une solution intéressante. Cette technique consiste à utiliser des régulateurs monovariables pour commander un système multivariable, c'est-à-dire à créer autant de boucles de retour que de couples entrée-sortie.

Cependant, les caractéristiques propres aux systèmes multivariables sont le degré de couplage et la directionnalité qui posent un épineux problème pour la synthèse d'un système de commande qui répond aux exigences pratiques (stabilité, rapidité et minimisation des interactions entre les boucles de commandes). La commande multiboucle est largement utilisée en industrie car elle présente certains avantages que ne possèdent pas la commande multivariable. Elle est plus simple et son implantation sur un équipement industriel est nettement plus facile et rapide. Il est aussi plus aisé d'utiliser des périodes d'échantillonnage différentes pour chaque boucle individuelle, et plus facile de spécifier des performances différentes pour chaque sortie indépendamment des autres.

Le choix des couples entrée-sortie est l'une des étapes les plus importantes pour la synthèse d'un système de commande multiboucle. Ce choix est défini pour les couples assurant de faibles niveaux d'interactions entre les variables du système. Ce choix est souvent dicté par une méthode d'analyse des interactions. Une fois la configuration de commande est choisie, la deuxième étape consiste à synthétiser des correcteurs monovariables assurant la stabilité et les performances désirées. Une des méthodes la plus intéressante est la méthode BLT proposée par Luyben en 1986. Comme cette méthode est basée sur la méthode de Ziegler-Nichols, bien qu'elle assure la stabilité en boucle fermée, mais les performances généralement sont limitées.

L'objectif de notre travail est d'étudier une méthode de synthèse des correcteurs PID pour la commande, en adoptant la commande multiboucle, des systèmes linéaires multivariables présentant des retards importants. La synthèse est basée sur le placement de pôles dominants.

Notre travail fera l'objet de quatre chapitres organisés comme suit :

Dans le chapitre **I**, nous donnons quelques généralités sur les systèmes multivariables.

Le chapitre **II** est consacré à la synthèse d'une commande.

Le chapitre **III** expose la méthodologie de synthèse d'un PID monovariable basée sur le placement de pôles dominants avec des exemples illustratifs.

Dans le chapitre **IV**, on s'intéresse à la commande multiboucle d'une colonne de distillation de haute pureté.

Le mémoire se termine par une conclusion générale sur le travail réalisé.

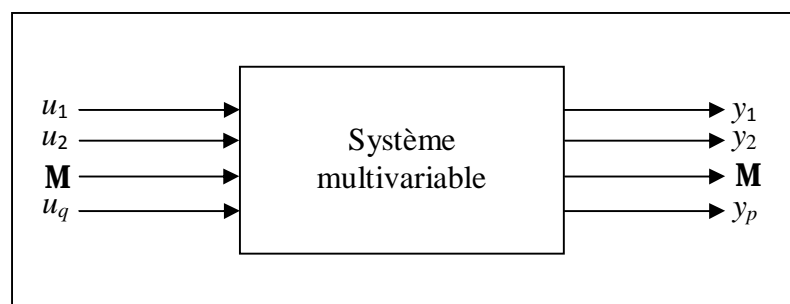
## I.1 Introduction :

Les procédés industriels au niveau des variables stratégiques sont très fréquemment multivariables.

Ce chapitre sera donc consacré aux généralités sur les systèmes multivariables ainsi qu'à la présentation des deux structures de commande ; la commande multivariable et la commande multiboucle.

## I.2 Systèmes multivariables :[1]

Un système multivariable est un système dont une variable manipulée agit sur plus d'une sortie ou inversement, autrement dit tout procédé comportant plusieurs entrées  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  et plusieurs sorties  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  comme le montre la figure I.1.



**Figure I.1 :** Système multivariable.

Les entrées et sorties d'un système multivariable sont généralement regroupées dans deux vecteurs comme suit :

$$\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_q], \quad \mathbf{y}^T = [y_1, y_2, \dots, y_p].$$

Avec

$u$  : le vecteur de commande de dimension  $(q \times 1)$  ;

$y$ : le vecteur de sortie de dimension  $(p \times 1)$

$q$  : le nombre d'entrées

$p$  : le nombre de sorties

- Ø si  $q > p$  : le nombre d'entrées est supérieur au nombre de sorties ce qui donne une infinité de solution pour obtenir des consignes déterminées
- Ø si  $q = p$  : le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties, dans ce cas il y a une seule et unique solution.
- Ø si  $q < p$  : le nombre d'entrées est inférieure au nombre de sorties, dans ce cas le système n'a pas de solution, et l'objectif n'est plus de réguler chacune des sorties, mais de contrôler certaines d'entre elles à l'intérieur d'un certain couloir.

### I.3 Représentation

Les principales représentations d'un système multivariable sont :

#### I.3.1 Représentation par matrice de fonction de transfert

La notion de fonction de transfert utilise la transformée de Laplace et le calcul opérationnel pour caractériser le comportement entrée-sortie du système.

Pour les systèmes multivariables, on définit la relation entrée-sortie comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (\text{I.1})$$

Où :

$s$  : est la variable de Laplace.

$G(s)$ : est appelée matrice fonction de transfert. Elle est sous la forme représentée par l'équation (I.2) :

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1q} \\ g_{21} & g_{22} & g_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & \cdots & g_{pq} \end{bmatrix} \quad (\text{I.2})$$

La notion matricielle pour la  $i^{\text{ème}}$  sortie peut être explicitée élément par élément :

$$y_i(s) = \sum_{j=1}^q g_{ij}(s)u_j(s) \quad (\text{I.3})$$

### Remarque I.1

La représentation par la matrice fonction de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles.

### I.3.2 Représentation par modèle d'état

Il s'agit de décrire le système en considérant sa dynamique interne et non seulement le comportement entrée-sortie. Ainsi il convient de redonner de l'importance à des grandeurs qui ne sont ni l'entrée ni la sortie, tout en tenant compte des phénomènes dynamiques et statiques qui confèrent au système.



Si le système vérifie l'hypothèse de linéarité alors sa représentation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{I.4}$$

Où :

$A(t)$  : est la matrice d'état dynamique (d'évolution) de dimension  $(n \times n)$ .

$B(t)$  : est la matrice de commande ou d'entrée de dimension  $(n \times q)$ .

$C(t)$  : est la matrice de mesure ou de sortie de dimension  $(p \times n)$ .

$D(t)$  : est la matrice de transition directe de dimension  $(p \times q)$ .

$x(t)$  : est le vecteur d'état de dimension  $(n \times 1)$ .

$u(t)$  : est le vecteur de commande de dimension  $(q \times 1)$ .

$y(t)$  : est le vecteur de sortie de dimension  $(p \times 1)$ .

Si les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  et  $D(t)$  sont constantes, le système est dit Linéaire Temps-Invariant (L.T.I). Donc la relation (I.4) devient :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}\tag{I.5}$$

### I.3.3 Passage de la représentation d'état à la matrice fonction de transfert

Supposons que le système dynamique est modélisé par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Où

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible de l'appliquer aux équations (I.6)

$$\begin{aligned} s X(s) - x_0 &= A X(s) + B U(s) \\ Y(s) &= C X(s) + D U(s) \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

On obtient :

$$[s I_n - A] X(s) = x_0 + B U(s)$$

avec :

$I_n$  est une matrice identité de dimension  $(n \times n)$ .

$$\text{et : } X(s) = \mathcal{L} [x(t)]$$

$$U(s) = \mathcal{L} [u(t)]$$

$$Y(s) = \mathcal{L} [y(t)]$$

D'où :

$$X(s) = [s I_n - A]^{-1} x_0 + [s I_n - A]^{-1} B U(s) \quad (\text{I.8})$$

En remplaçant (I.8) dans (I.7), on obtient la formule suivante :

$$Y(s) = C (s I_n - A)^{-1} x_0 + [C (s I_n - A)^{-1} B + D] U(s) \quad (\text{I.9})$$

Comme la représentation par matrice fonction de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles, alors :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C [s I_n - A]^{-1} B + D \quad (\text{I.10})$$

#### I.4 Caractéristiques des systèmes multivariables:

Les caractéristiques propres à ces systèmes sont **le degré de couplage et la directionnalité**.

Dans ce chapitre, divers indices caractérisant les procédés multivariables sont présentés.

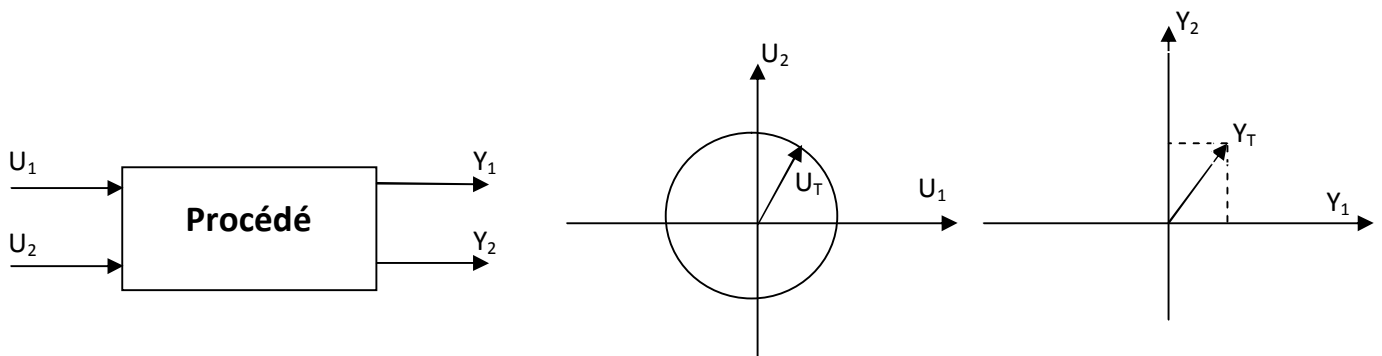
En ce qui concerne la directionnalité, les indices sont la réponse à un échelon généralisé, les valeurs singulières et le nombre de conditionnement. Pour ce qui est du degré de couplage les gains relatifs sont utilisés.

Ces indices permettent de choisir la meilleure configuration de commande

### I.4.1 La directionalité :

#### I.4.1.1 Réponse à un échelon généralisé :

Pour pouvoir donner une mesure de la directionalité, la réponse à l'échelon généralisé s'avère un outil de choix, pour cela considérant un système à deux entrées ( $q=2$ ) et deux sorties ( $p=2$ ) comme le montre la figure I.2.



**Figure I.2 :** mesure de la directionalité

En faisant varier  $U_1$  et  $U_2$  de façon à ce que le vecteur  $U_T$  parcourt  $2\pi$  radians tout en gardant le module  $U_T$  constant, on obtient une mesure de l'amplification du procédé en fonction de la direction de l'entrée.

#### I.4.1.2 Valeurs singulières :

Les valeurs singulières d'un procédé sont la généralisation des diagrammes de Bode appliqués aux procédés multivariables. En utilisant la même représentation géométrique que pour l'échelon généralisé où deux sinusoïdes d'amplitude  $u_1$  et  $u_2$  sont appliquées à la pulsation  $w$ . Deux sinusoïdes d'amplitude  $y_1$  et  $y_2$  sont observées en sorties du procédé.

Le rapport entre le vecteur total de sortie et celui d'entrée correspond à l'amplification du procédé à la pulsation  $w$  pour une entrée dans la direction de  $u_{\text{Total}}$ .

L'amplification maximale à une pulsation donnée est appelée valeur singulière maximale  $\bar{\sigma}$  et l'amplification minimale est appelée valeur singulière minimale  $\underline{\sigma}$ .

#### I.4.1.2.1 Représentation mathématique :

Soit une matrice fonction de transfert  $G(s)$  tel que :

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1q} \\ g_{21} & g_{22} & g_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1} & \cdots & g_{pq} \end{bmatrix}$$

L'élément  $g_{ij}(s)$  ( $i=1,\dots,P$ ,  $j=1,\dots,q$ ) est la fonction de transfert entre la  $i$ -ième sortie et la  $j$ -ième entrée.

Les valeurs singulières sont calculées comme suit :

$$\sigma_i (G(w)) = \sqrt{\lambda_i G^T(w)G(w)} \quad (\text{I.11})$$

avec :

$$i=1,2,\dots,K$$

$$K = \min(p, q)$$

Les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $G^T(w)G(w)$  sont égales aux racines de l'équation caractéristique suivante:

$$\det[\lambda I - G^T(w)G(w)] = 0 \quad (I.12)$$

#### I.4.1.2.2 Décomposition en valeur singulières

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice met en évidence une matrice diagonale qui lui est équivalente, elle permet d'obtenir en plus des valeurs singulières du procédé, les vecteurs singuliers pour chacune des fréquences.

Pour une matrice de transfert  $G(s)$  de dimension  $(q \times p)$ , sa décomposition en valeur singulière est donnée par :

$$G = U \Sigma V^T \quad (I.13)$$

Où

$$U = [\text{vecteurs propres de } G G^T] \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \right) = [\bar{U} \dots \underline{U}]$$

$$V = [\text{vecteurs propres de } G^T G] \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \right) = [\bar{V} \dots \underline{V}]$$

$$\Sigma = [\text{valeurs singulières de } G] = \sqrt{[\text{valeurs propres de } G^T G]} = [\text{diag } \sigma_i]$$

$$\Delta = \sqrt{\det \text{ de la matrice des vecteurs propres}}$$

### I.4.1.3 Nombre de conditionnement :

Le nombre de conditionnement est le rapport entre les valeurs singulières maximales et minimales d'un système.

$$\gamma(G(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}(G(j\omega))}{\underline{\sigma}(G(j\omega))} \quad (I.14)$$

On dit qu'un système bien conditionne si  $\gamma \approx 1$ .

### I.4.2 Degré de couplage :

L'indice qui nous permet de mesurer le degré de couplage est le gain relatif et ses dérivées

#### I.4.2.1 Gains relatifs :

La notion du gain relatif a été introduite par Bristol. Ces gains relatifs mesurent l'influence d'une variable commandée choisie sur une variable contrôlée particulière par rapport aux autres variables commandées agissant sur le procédé.

Les gains relatifs s'intéressent aux changements de gain lorsque les autres boucles passent de ouvertes à fermées et ils cherchent à quantifier l'effet de la fermeture des autres boucles.

La somme des gains relatifs sur une ligne ou une colonne est égale à "1"

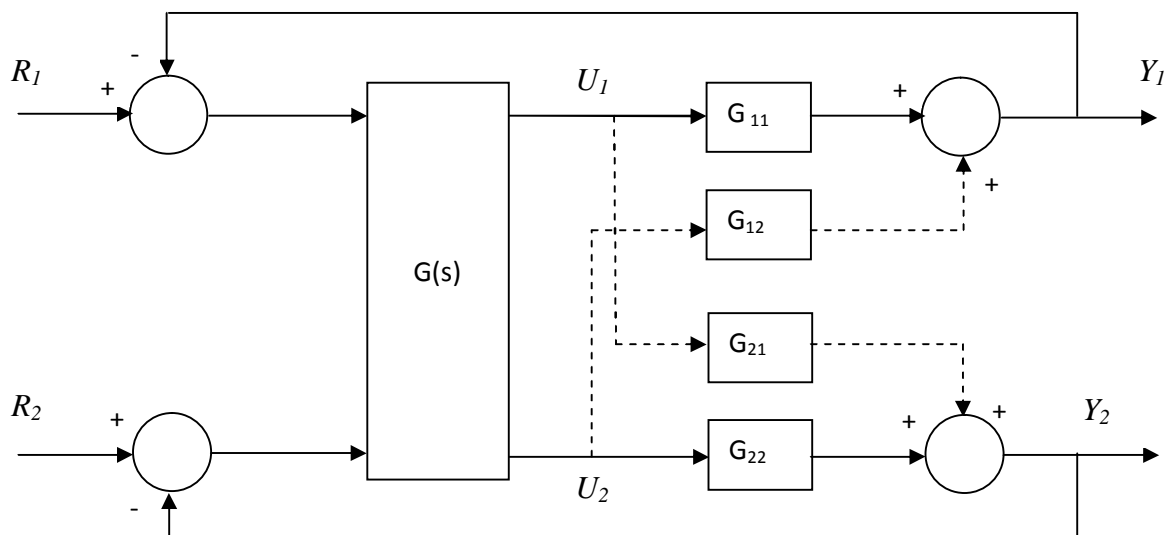
### I.5 Commande des systèmes multivariables :

L'existence de fortes interactions entre les variables d'un système multivariable rend la commande de ces derniers très difficile. Pour surpasser ce problème deux structures de commande sont présentées :

- La commande multivariable.
- La commande multiboucle.

#### I.5.1 Commande multivariable :

La commande multivariable utilise un régulateur à « p » entrées et « q » sorties pour asservir un procédé à « q » entrées et « p » sorties. Le schéma de la commande multivariable pour un procédé ( $2 \times 2$ ) est donné par la **figure (I.3)**.



**Figure I.3 :** Commande multivariable

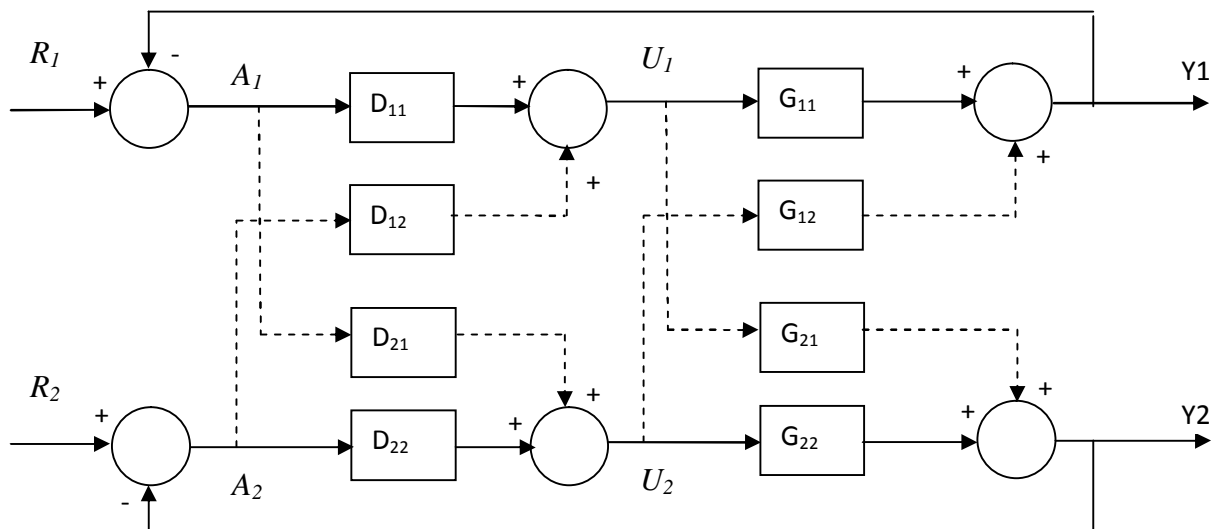


**Remarque I.2**

Lorsque la commande multivariable est algébrique, elle consiste habituellement en l'introduction des découpleurs entre les régulateurs monovariabiles et le procédé.

**I.5.1.1 Découplage pour un système (2×2)**

Afin de faciliter le réglage des régulateurs et de rendre  $Y_j$  indépendante de la variation de la consigne  $R_i$ , ( $j \neq i$ ) découpleur est inséré entre le système et les correcteurs tel que montré à la **figure I.4**. Ainsi, pour le système (2×2), la sortie  $Y_1$  devra être seulement influencée par les variations de  $U_1$ , donc de la consigne  $R_1$  et non de  $U_2$ . L'utilisation des découpleurs nécessite non seulement l'identification des  $G_{ii}(s)$  mais également les  $G_{ij}(s)$ .



**Figure I.4:** Commande multivariable.

On a :

$$Y_1(s) = G_{11}(s) U_1(s) + G_{12}(s) U_2(s) \quad (\text{I.15})$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s) U_1(s) + G_{22}(s) U_2(s)$$

Et :

$$U_1(s) = D_{11}(s) A_1(s) + D_{12}(s) A_2(s) \quad (\text{I.16})$$

$$U_2(s) = D_{21}(s) A_1(s) + D_{22}(s) A_2(s)$$

En remplaçant (I.16) dans (I.15), on obtient :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= [D_{11}(s) G_{11}(s) + D_{21}(s) G_{12}(s)] A_1(s) \\ &\quad + [D_{22}(s) G_{12}(s) + D_{12}(s) G_{11}(s)] A_2(s) \\ Y_2(s) &= [D_{11}(s) G_{21}(s) + D_{21}(s) G_{22}(s)] A_1(s) \\ &\quad + [D_{22}(s) G_{22}(s) + D_{12}(s) G_{21}(s)] A_2(s) \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Comme l'objectif est d'avoir  $Y_2(s)$  indépendant de  $A_1(s)$  et  $Y_1(s)$  indépendant de  $A_2(s)$ , on a :

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_1(s) A_1(s) \\ Y_2(s) &= G_2(s) A_2(s) \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Où :

$$\begin{aligned}
 D_{11}(s) G_{11}(s) + D_{21}(s) G_{12}(s) &= G_1(s) \\
 D_{22}(s) G_{12}(s) + D_{12}(s) G_{11}(s) &= 0 \\
 D_{11}(s) G_{21}(s) + D_{21}(s) G_{22}(s) &= 0 \\
 D_{22}(s) G_{22}(s) + D_{12}(s) G_{21}(s) &= G_2(s)
 \end{aligned}
 \tag{I.19}$$

Et

$$D_{12}(s) = \frac{-G_{12}(s) D_{22}(s)}{G_{11}(s)} \tag{I.20}$$

$$D_{21}(s) = \frac{-G_{21}(s) D_{11}(s)}{G_{22}(s)} \tag{I.21}$$

### Remarques I.3

- Le réglage des contrôleurs doit être fait sur  $G_1(s)$  et  $G_2(s)$ ,
- Habituellement, les termes  $D_{11}(s)$  et  $D_{22}(s)$  sont pris unitaires sauf dans le cas où les retards sont plus important dans les branches directes que dans les branches croisées.

### I.5.2 La commande multiboucle :

La commande multiboucle (distribuée) consiste à utiliser des régulateurs monovariabiles. Elle est donc formée de « p » régulateurs monovariabiles pour commander un procédé à « q » entrées et « p » sorties. Les caractéristiques de cette commande ainsi que ses avantages feront l'objet du chapitre suivant.

**I.6 Conclusion :**

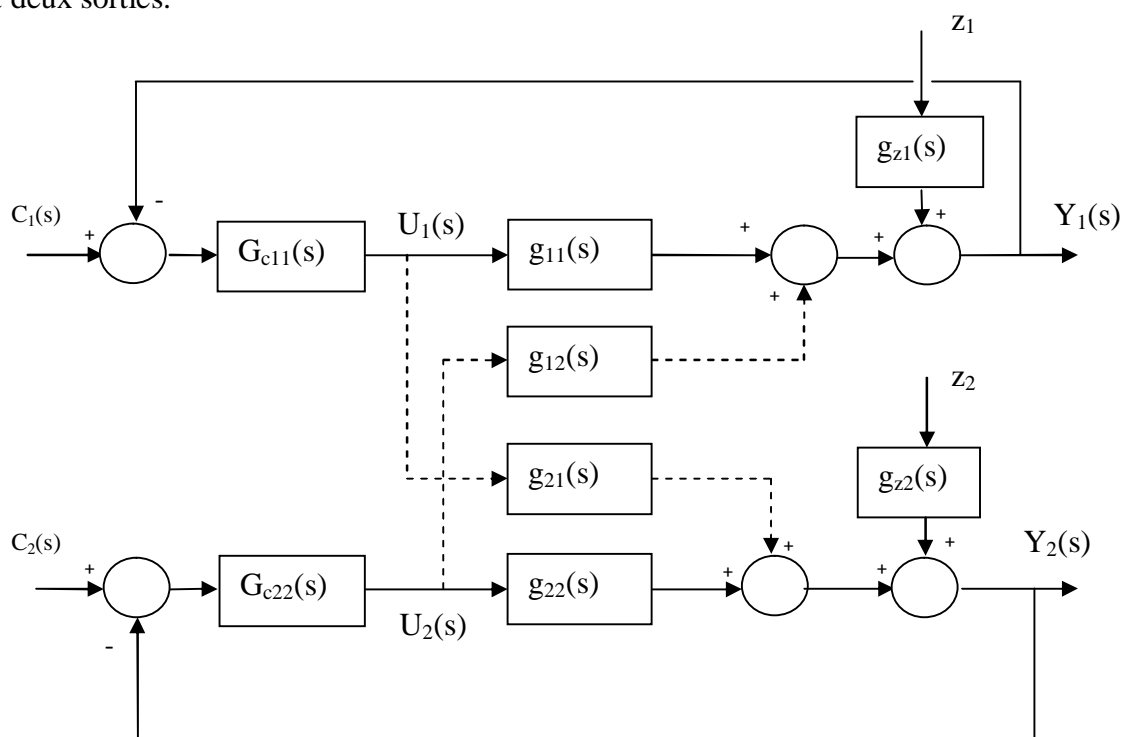
Dans ce chapitre on a présenté des généralités sur les systèmes multivariables ainsi que les différents indices qui mesurent leurs caractéristiques principales. Nous avons aussi introduit les deux types de commande permettant d'aider au réglage des contrôleurs. Le chapitre suivant abordera en détail la commande multiboucle.

## II.1 Introduction :

Le présent chapitre est consacré à la présentation de la deuxième technique de commande des systèmes multivariables qui est la commande multiboucle. Le but est de montrer son efficacité et son niveau de performance pour l'analyse et la stabilité des procédés.

## II.2 Commande multiboucle [2]

La commande multiboucle est la méthode la plus utilisée dans la commande des processus industriels. Elle consiste à utiliser « p » régulateurs monovariables pour un procédé à « q » entrées et « p » sorties. Dans le cas où  $p = q = m$ , nous considérons le système multivariable comme constitué de « m » sous-systèmes monovariables évoluant en parallèle. **La figure (II.1)** représente la commande multiboucle d'un système à deux entrées et deux sorties.



**Figure II.1 :** Commande multiboucle.

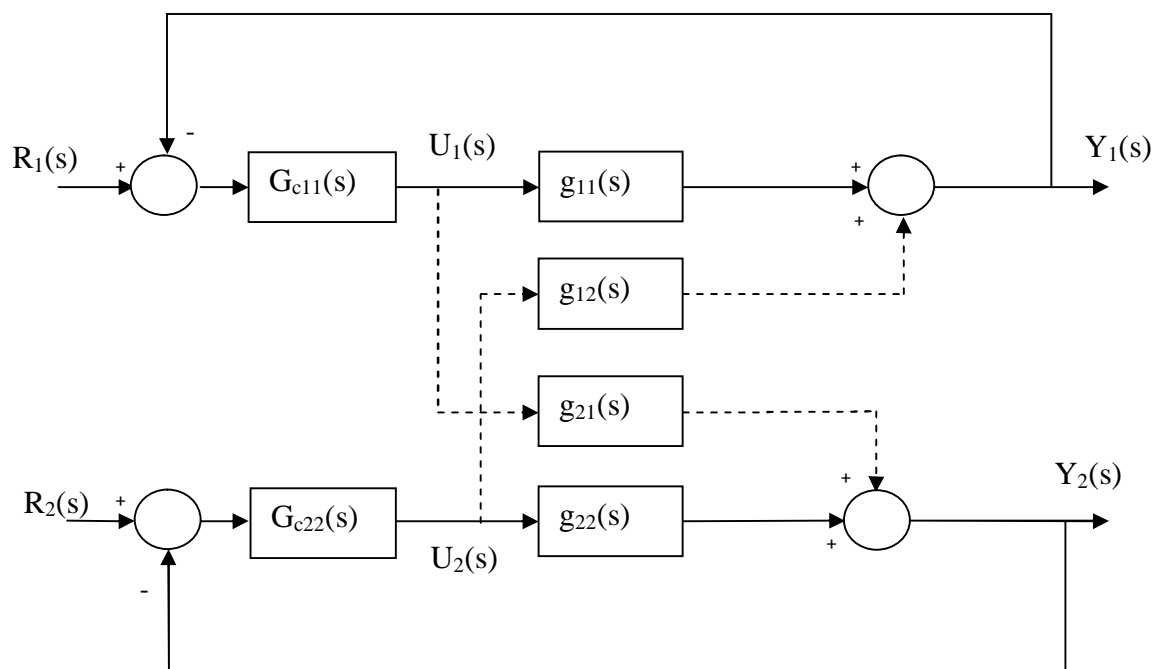
La matrice fonctions de transfert des régulateurs  $G_{CD}(s)$  est diagonale :

$$G_{CD}(s) = \begin{bmatrix} G_{C1}(s) & 0 \\ 0 & G_{C2}(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

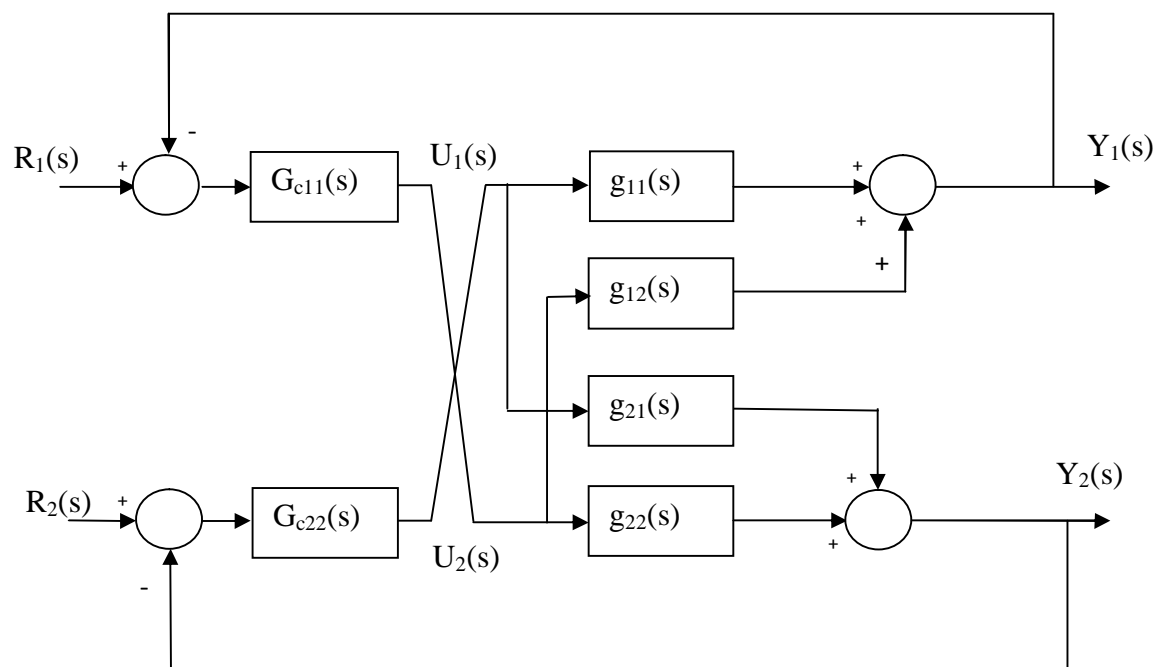
### II.3 Choix des couples entrées-sorties

Pour un système à « m » entrées et « m » sorties, nous avons « m ! » configurations possibles. Ce choix de couples entrées-sorties est primordial et déterminant pour les performances recherchées, et garantissant la stabilité du système en boucle fermée.

Considérons le cas d'un système à deux entrées et deux sorties. Il existe deux combinaisons possibles de couples entrée-sortie, telque montré aux **figures II.2a** et **II.2b**.



**Figure II.2a:** Commande multiboucle ( $Y_1U_1$  ,  $Y_2U_2$ )



**Figure II.2b:** Commande multiboucle ( $Y_1U_2$  ,  $Y_2U_1$ )

## II.4 Définition de l'interaction dans un système multivariable [3]

Plusieurs définitions sont données dans la littérature. Parmi ces dernières, on peut citer les plus rencontrées :

### Définition 1

Les interactions dans un système multivariable sont définies comme étant l'effet total de la consigne  $c_j(s)$  sur l'ensemble de sorties  $\{y_i(s): i \neq j\}$  du système ou c'est l'effet total de l'ensemble des consignes  $\{c_j(s): i \neq j\}$  sur une sortie spécifique  $y_i(s)$ .

### Définition 2

Les interactions dans un système multivariable en boucle fermée, sont déterminées par les transmittances qui influent lorsqu'une consigne  $c_j(s)$  ou une perturbation  $z_j(s)$  affecte l'ensemble de sorties  $\{y_i(s): j \neq i\}$ , ou alternativement les interactions sont déterminées par les transmittances qui influent lorsqu'une sortie  $y_i(s)$  est affectée par l'ensemble de consignes  $\{c_j(s): j \neq i\}$  ou des perturbations  $\{z_j(s)\}$ .

### Définition 3

Les boucles de commande dans un système multivariable sont dites interactives, si une action de commande  $u_k(s)$  dans la  $k$ -ième boucle (résultat d'une perturbation  $z_k(s)$  ou d'un changement de consigne  $c_k(s)$ ) provoque une action de commande  $u_l(s)$  ( $l \neq k$ ) dans une ou



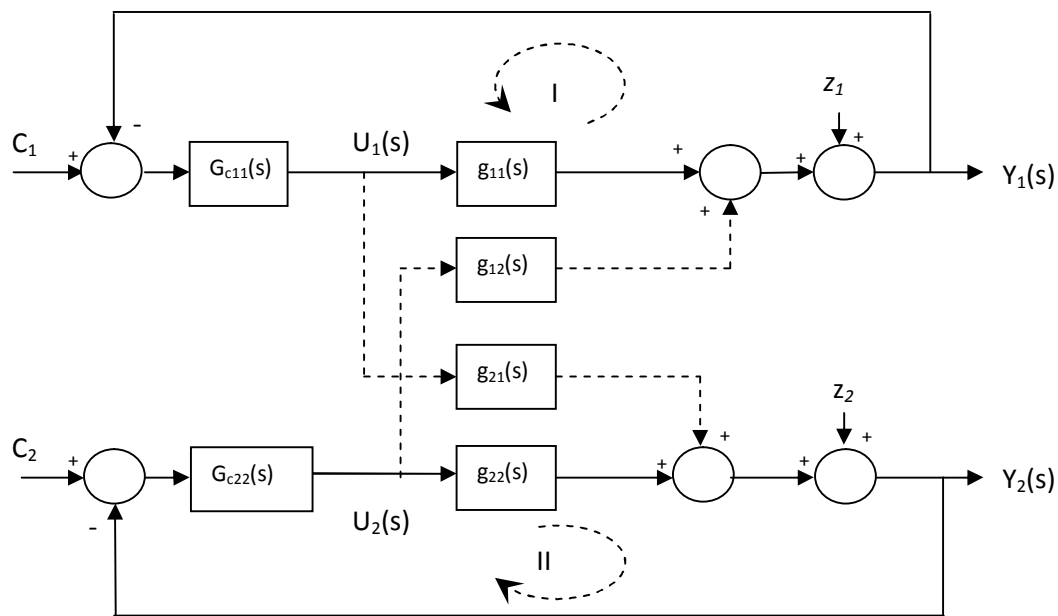
plusieurs boucles, dans le but de maintenir les variables de sorties  $y_l(s)$  ( $l \neq k$ ) assignées à ces dernières à leurs points de consignes.

En conclusion de toutes les définitions données, le mot **interaction** dans un système multivariable signifie: Une entrée en général affecte plusieurs sorties ou une perturbation (ou une condition initiale) agissant sur une sortie peut, en se propageant dans le système, perturber d'autres sorties.

#### II.4.1 Explication du phénomène d'interaction

Pour éclaircir le phénomène d'interaction dans un système multivariable, considérons le système de la figure (II.1).

Lorsque la perturbation  $z_1$  affecte la sortie  $y_1$ , cette dernière s'écarte de sa valeur de consigne  $c_1$ , le régulateur  $G_{c11}(s)$  génère donc une commande  $u_1$  d'une manière à annuler cet écart. Néanmoins, la commande  $u_1$  générée affecte en plus la sortie  $y_2$  à travers la transmittance  $g_{21}(s)$ , donc la sortie  $y_2$  s'écarte aussi de sa valeur de consigne  $c_2$ . Ceci oblige le régulateur  $g_{c22}(s)$  de générer une commande  $u_2$  pour maintenir la sortie  $y_2$  à la position désirée  $c_2$ . L'action correctrice du régulateur  $G_{c22}(s)$  de la deuxième boucle (II) (la commande  $u_2$ ) affecte aussi la sortie  $y_1$  à travers la transmittance  $g_{12}(s)$ . Alors le maintien des sorties  $y_1, y_2$  à leurs positions désirées, en dépit de la perturbation  $z_1$  qui doit être annulé par le régulateur  $G_{c11}(s)$ , est une tâche difficile.



**Figure(II.1) :** Commande multiboucle (Cas d'un système 2 x 2)

Par cet exemple, on a montré comment une commande affecte plusieurs sorties et comment une perturbation affectant une sortie se propage dans le système pour perturber d'autres sorties. Cela est dû essentiellement à l'existence des interactions entre les deux boucles (I) et (II) de la configuration de commande.

Dans ce cas de figure les transmittances  $g_{12}(s)$  et  $g_{21}(s)$  en se référant à la définition 2 sont des transmittances qui influent sur les performances du système commandé en causant des interactions entre les deux boucles, dont leurs effets sont considérables sur la robustesse de la stratégie de commande considérée. Par conséquent, le phénomène d'interaction est une contrainte qui pose un sérieux problème pour la commande des systèmes multivariables, c'est pourquoi l'analyse des interactions joue un rôle de premier plan lors de la synthèse d'un système de commande multivariable, en particulier un système de commande multiboucle.

## II.4.2 Méthodes d'analyse des interactions :

Afin de synthétiser un système de commande multiboucle performant, une étape d'analyse des interactions est nécessaire pour déterminer la meilleure configuration de commande. Pour cela, plusieurs méthodes ont été développées, parmi elles on a choisis deux, la première est la méthode de la matrice des gains relatifs (**RGA**) et la deuxième est celle de la matrice des Gains Relatifs dynamiques (**RDGA**) qui seront représentées ci-dessous

### II.4.2.1 Méthode de la Matrice des Gains Relatifs (RGA)

La méthode de la Matrice des Gains Relatifs, développée par Bristol en 1966, permet de dégager une configuration de commande avec un faible niveau d'interaction. Le calcul de la **RGA** est basé sur la matrice des gains statiques du système. Chaque élément de la **RGA** est déterminé par l'expression suivante :

$$\lambda_{ij} = \frac{\left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, k \neq j}}{\left( \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_k=0, k \neq i}} \quad (\text{II.2})$$

Le numérateur représente le gain statique en boucle ouverte entre  $u_j$  et  $y_i$ , et le dénominateur c'est le gain statique entre  $u_j$  et  $y_i$  lorsque les autres sorties sont contrôlées par des correcteurs parfaits. Le gain relatif  $\lambda_{ij}$  indique si le gain d'une boucle ouverte  $[u_j - y_i]$  change lorsque toutes les autres boucles sont fermées.

### II.4.2.1.1 Calcul de la Matrice des Gains Relatifs (RGA)

La Matrice des Gains Relatifs se calcule directement en utilisant la matrice des gains statiques  $K_s$  comme suit :

$$RGA = K_s \cdot [K_s^{-1}]^T \quad (II.3)$$

avec :

$$RGA = [\lambda_{ij} : i, j = 1, \dots, m]; \quad (II.4)$$

$$K_s = [K_{sij} : i, j = 1, \dots, m]; \quad (II.5)$$

Où :

$\cdot$  : est le produit élément par élément

$K_s$  : est la matrice des gains statiques.

$K_{sij}$  : est le gain statique entre  $u_j$  et  $y_i$ .

Les éléments de  $K_s$  sont déterminés par la relation suivante :

$$K_{sij} = \lim_{s \rightarrow 0} g_{ij}(s). \quad (II.6)$$

#### II.4.2.1.2 Interprétation de la matrice des gains relatifs (RGA) :

1. Les éléments  $\lambda_{ij}$  vérifient la relation :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{ij} = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} = 1 \quad (\text{II.7})$$

2. Dans le cas où les éléments de la diagonale de la **RGA** ( $\lambda_{ij} : i = j$ ) sont proches de 1, le niveau d'interaction dans le système est très faible, et dans le cas contraire, les interactions sont fortes.
3. Si  $\lambda_{ij} = 1$ , les autres boucles du système n'influencent pas sur la boucle  $[u_j, y_i]$  considérée.
4. Si le gain relatif  $\lambda_{ij}$  est négatif pour la boucle  $[u_j, y_i]$  considérée, alors la boucle peut être instable si les autres boucles sont fermées, et le système global peut devenir instable si la boucle considérée s'ouvre.
5. Le choix de la configuration de commande porte sur les couples ayant un gain relatif  $\lambda_{ij}$  proche de 1.

#### II.4.2.2 Méthode de la Matrice des Gains Relatifs Dynamiques (RDGA) :

L'une des limitations de la matrice des Gains Relatifs de Bristol réside dans son ignorance totale de la dynamique du système. Witcher, Mcavoy et Bristol ont proposé une extension dynamique de la **RGA** appelée Matrice des Gains Relatifs Dynamiques (**RDGA**) définie par :

$$\mathbf{RDGA} = \mathbf{G}(s) \cdot [\mathbf{G}^{-1}(s)]^T \quad (\text{II.8})$$

Avec :

$$\mathbf{RDGA} = [\lambda_{ij}(s) : i, j = 1, \dots, m].$$

#### II.3.2.2.1 Interprétation de la Matrice des Gains Relatifs dynamiques (RDGA) :

1. Si le module de chaque élément  $\lambda_{ij}(s)$  ( $i = j$ ) est proche de 1 et les modules des autres éléments  $\lambda_{ij}(s)$  ( $i \neq j$ ) sont proches de zéro dans la bande de fréquence du travail, alors les interactions sont faibles.
2. Le choix de couple entrée-sortie correspond aux éléments  $\lambda_{ij}(s)$  dont le module est proche de 1 dans la bande de fréquence utile.
3. Dans le cas où  $s = 0$ , la **RDGA** se réduit à la **RGA**
4. Pour un système à deux entrées et à deux sorties on a :

$$\lambda_{11}(s) = \lambda_{22}(s) \quad \text{et} \quad \lambda_{12}(s) = \lambda_{21}(s)$$

### II.5 Synthèse d'un régulateur monovariable dans un environnement multivariable [4]

La synthèse d'un asservissement consiste à déterminer les paramètres d'un régulateur répondant aux spécifications d'un cahier des charges

Des méthodes de synthèse sont très nombreuses, On peut citer :

### II.5.1 Méthode de Ziegler et Nichols

C'est une méthode empirique qui ne nécessite pas une connaissance parfaite du modèle, Elle est proposée par Ziegler et Nichols en 1942, consiste à concevoir, calculer et réaliser le correcteur pour satisfaire un cahier des charges contenant les performances désirées.

Les paramètres de régulation sont choisis à partir d'une réponse indicielle, Cette méthode consiste à augmenter progressivement le gain d'un correcteur proportionnel pur jusqu'à la juste oscillation. On relève alors le gain ( $K_{cr}$ ) valeur limite de stabilité du processus et la période des oscillations résultantes appelée  $P_u$ .

A partir de ces valeurs, Ziegler et Nichols proposent des valeurs permettant le réglage des correcteurs P, P.I et P.I.D selon la table suivante :

Type du régulateur	$K_c$	$\frac{1}{T_i}$	$T_d$
P	$0.5 K_{cr}$		
PI	$\frac{K_{cr}}{1.2}$	$\frac{P_u}{1.2}$	
PID	$0.6 K_{cr}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$

**Tableau II.1** : Réglage de Ziegler-Nichols basé sur le pompage limite.

Cette méthode n'est utilisable que si le système étudié supporte les dépassements, par conséquent il y a beaucoup de cas pour lesquels les réglages du (**tableau II.1**) ne sont pas primordiaux, car ils sont trop oscillants. C'est la raison pour laquelle d'autres réglages (**tableau II.2**) conduisant à une réponse très amortie, sont employés. On peut choisir soit une réponse à un changement de consigne avec léger dépassement (deuxième ligne), soit une réponse sans dépassement (dernière ligne).

Type du régulateur	$K_c$	$\frac{1}{T_i}$	$T_d$
Originale (diminution ¼ pic à pic)	$0.6 K_{cr}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{8}$
Léger dépassement	$0.33 K_{cr}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{3}$
Sans dépassement	$0.2 K_{cr}$	$\frac{P_u}{2}$	$\frac{P_u}{3}$

### III.5.2 Méthode du plus grand module (BLT)

La méthode du plus grand module (BLT) s'apparente à la méthode de Ziegler et Nichols pour les correcteurs monovariables, elle a été proposée par Luben en **1990** pour la synthèse des correcteurs PID dans un environnement multivariable.

Pour déterminer les paramètres du régulateur, On suit les étapes suivante :



1. Calcul des paramètres du correcteur PI d'après la méthode de Ziegler - Nichols Pour chaque boucle individuelle. Ainsi, on commence par la détermination de la fréquence critique  $\omega_{cr}$  qui est la fréquence correspondante à la phase  $-\pi$ , et le gain critique  $K_{cr}$  qui est l'inverse de la partie réelle de  $g_{ii}(s)$  qui correspond à la fréquence critique, puis on calcule les paramètres de Ziegler-Nichols par les formules suivantes :

$$K_{ZN} = \frac{K_{cr}}{2.2} \quad (\text{II.9})$$

$$T_{ZN} = \frac{2p}{1.2\omega_{cr}} \quad (\text{II.10})$$

2. On choisit un facteur de réglage  $F > 1$  (ordre de 1.5 à 4), tous les gains des correcteurs sont divisés par  $F$  :

$$K_c = \frac{K_{ZN}}{F} \quad (\text{II.11})$$

Les constantes de temps des correcteurs sont multipliées par le même facteur  $F$  :

$$T_i = T_{ZN} F \quad (\text{II.12})$$

3. On représente la fonction :

$$W(j\omega) = -1 + \det[I + G(j\omega)G_c(j\omega)] \quad (\text{II.13})$$

Tel que :

$G_c(s)$  :est la matrice fonction de transfert diagonale des correcteurs.

$I$  : est la matrice identité.

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} g_{c11}(s) & 0 \dots & 0 \\ 0 & g_{c22}(s) \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & \dots & g_{cmm} \end{bmatrix} (m \times m) \quad (\text{II.14})$$

$$g_{cii}(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad (\text{II.15})$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} (m \times m) \quad (\text{II.16})$$

Dans le plan complexe ; plus la fonction est proche du point de Nyquist  $(-1, 0)$ , plus on est proche de l'instabilité. Par analogie avec les systèmes monoentrée- monosortie en boucle fermée, on définit le module multivariable en boucle fermée :

$$L^m = 20 \log \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right| \quad (\text{II.17})$$

4. On fait varier le facteur de déréglage  $F$  jusqu'à ce que le maximum de  $L^{cm}$ ,  $L_{max}^{cm}$  soit égal à  $2m$ ,  $m$  étant l'ordre du système multivariable : pour un système monovariable, cela correspond à la recommandation habituelle  $L_{max}^{cm} = 2db$

Cette méthode du plus grand module garantit la stabilité de l'ensemble du système de commande dans son environnement multivariable, mais également celui de chaque correcteur considéré individuellement. A la suite de cette méthode, il est en fait possible de poursuivre l'amélioration du système de commande.

## II.6 Avantages pratiques de la commande multiboucle

La commande distribuée présente certains avantages que ne possède pas une commande multivariable. Parmi ces avantages, on peut citer :

1. La simplicité et la rapidité de son implantation sur un équipement industriel, et qui ne revient pas chère.
2. Elle permet de maintenir certaines sorties constantes alors que les autres sont délibérément modifiées.
3. Aucune perturbation agissant sur une sortie dans un système ne se propage d'une manière forte.
4. Après avoir choisi les bonnes configurations des couples entrées/sorties, une des boucles peut être supprimée sans engendrer un état instable.

## II.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a présenté la commande multiboucle ainsi que les méthodes d'analyse des interactions notamment la **RGA** et la **RDGA** pour choisir les bonnes configurations de commande c'est-à-dire les couples entrée/sortie ayant un faible niveau d'interaction. Après ce choix, vient la synthèse des correcteurs des boucles de commandes.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation d'une méthode de synthèse d'un régulateur PID par placement de pôles pour les systèmes monovariabiles possédant des retards qui sera par la suite appliquée aux systèmes multivariables.

### III.1 Introduction

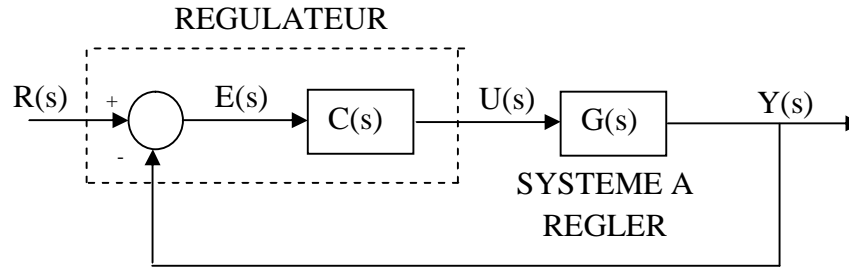
L'objectif de ce chapitre est de présenter le régulateur PID et une technique de synthèse de ce dernier, i.e. une méthode permettant de calculer les paramètres  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_d$ .

Dans le but de garantir les spécifications imposées par le cahier des charges d'un asservissement (stabilité, rapidité, précision, etc.) on ne peut choisir et dimensionner le régulateur au hasard, l'obtention des meilleures performances nécessite au contraire de tenir compte des propriétés et paramètres du système à régler (gain statique, retard pur, constante du temps,...). Ces paramètres peuvent ou doivent être en principe obtenus en réalisant des expériences et des mesures

### III.2 Régulateur industriel PID [2]

Le régulateur PID (proportionnel-Intégrale-Dérivée) est la combinaison de trois actions qui permettent l'annulation de l'erreur statique tout en autorisant grâce à l'action D, des performances de rapidité supérieures à celle d'un régulateur PI.

En général, le régulateur dont la fonction de transfert est désignée par  $C(s)$  est situé en amont du système à régler  $G(s)$



**Figure (III.1) :** Schéma fonctionnel d'un système mono variable, On distingue le régulateur  $C(s)$  et le système à régler  $G(s)$

L'entrée du régulateur comprend forcément la consigne  $R(t)$  et la mesure  $Y(t)$  de la grandeur réglée. Le plus souvent la comparaison  $E(t)=R(t)-Y(t)$  directe est effectuée, appelée écart ou erreur.

### III.2.1 Action Proportionnelle P

L'action proportionnelle est l'action de base du correcteur, elle agit principalement sur le gain du système asservi, elle permet donc d'améliorer notablement la précision.

Dans le cas d'un correcteur proportionnel, la loi de commande corrigée  $u(t)$  est proportionnelle à l'écart  $e(t)$ :

$$u(t) = K_P e(t) + u_0 \quad (\text{III.1})$$

Où :

$e(t)$  : Signal d'erreur

$K_p$  : Gain proportionnel

$u_0$  : Valeur initiale de  $u(t)$

La fonction de transfert du correcteur est donc :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (\text{III.2})$$

#### III.2.1.1 Effets de l'action proportionnelle

L'effet d'une augmentation du gain entraîne une diminution de l'erreur statique, et accélère la réponse du procédé mais augmente l'instabilité du système en produisant un écart à l'état stationnaire (sauf pour les procédés qui possèdent un terme intégrateur (1/s) dans leur fonction de transfert).

#### III.2.2. Action intégrale

Son rôle principal est d'éliminer l'écart statique, cette élimination se fait en général au prix de dépassements supérieurs.

Dans le cas d'un correcteur intégrale, l'équation temporelle de la commande est donnée par :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + u_0 \quad (\text{III.3})$$

Avec :

$T_i$  : Constante d'intégration

### III.2.2.1 Effets de l'action intégrale

Les réponses sont trainantes, avec de longues oscillations, et l'augmentation du gain rend le comportement plus oscillatoire et peut conduire à des instabilités.

### III.2.3 Action dérivée

L'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée.

Cette action permet d'anticiper les erreurs futures.

L'équation temporelle d'un correcteur dérivateur est donnée par :

$$u(t) = T_d \frac{de(t)}{dt} + u_0 \quad (\text{III.4})$$

$T_d$  : Constante de temps d'action dérivée.

Sa fonction de transfert est donnée par :



$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = T_d s \quad (\text{III.5})$$

### III.2.3.1 Effets de l'action dérivée

La présence de l'action dérivée permet d'augmenter la rapidité du système

#### Remarque III.1

En pratique, il n'est pas possible de réaliser un régulateur dérivé idéal. On utilise en fait un module de dérivée filtrée :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \quad (\text{III.6})$$

Avec:

$N$  : est le coefficient correspondant au gain du module dérivé filtré.

#### Remarque III.2

Les actions intégrale et dérivée ne s'emploient jamais seules, mais toujours associées à une action proportionnelle.

### III.2.4 Régulateur PID

Le régulateur a pour charge de maintenir le signal d'erreur aussi proche de zéro que possible, dans ce but il fournit au système à régler la commande  $u(t)$  telle que l'image de  $y(t)$  de la grandeur réglée obtenu par mesure tend à correspondre à la consigne  $R(t)$

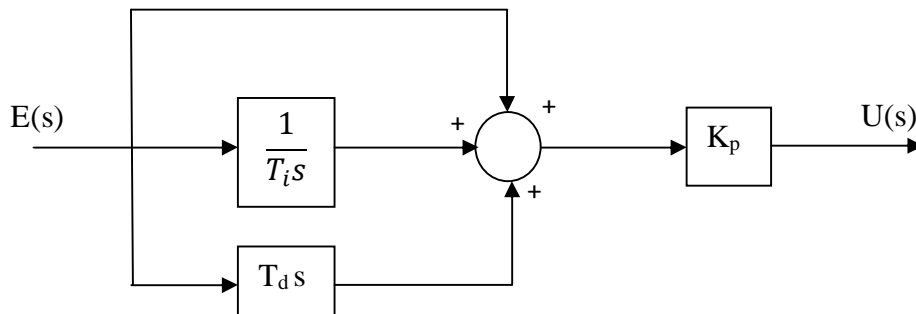
La loi de commande du régulateur PID :

$$u(t) = K_p \cdot (e(t) + \frac{1}{T_i} \int_{-\infty}^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt}) \quad (\text{III.7})$$

Fonction de transfert du régulateur PID :

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1+s T_i+s^2 T_i T_d}{s T_i} \quad (\text{III.8})$$

Schéma fonctionnel du régulateur PID :



**Figure III.2 :** Schéma fonctionnel du régulateur PID

L'objectif du régulateur est d'améliorer les performances globales (stabilité, rapidité, ...) et plus particulièrement :

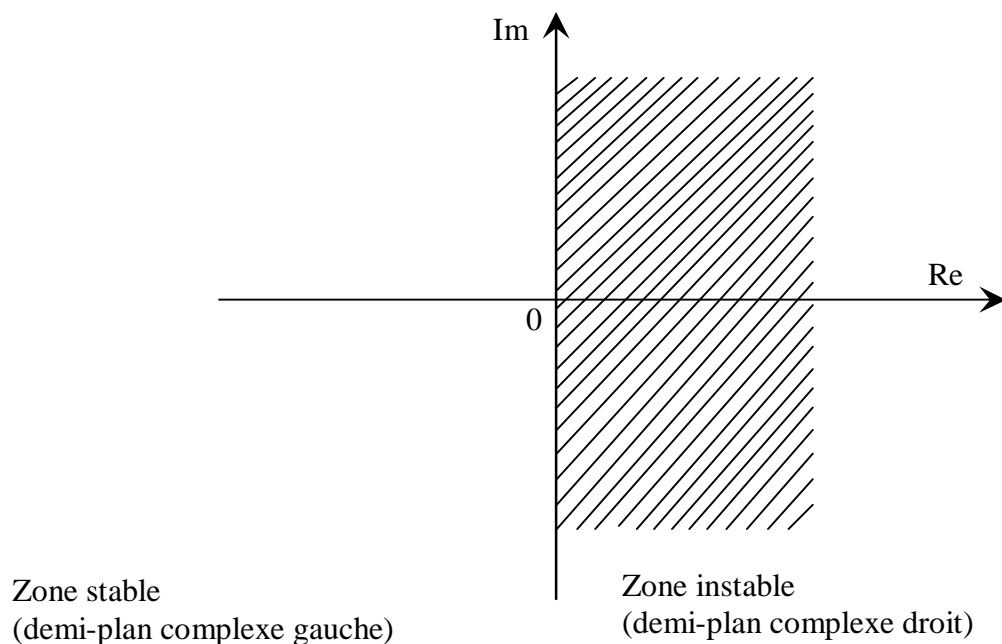
§ diminuer l'influence de la perturbation

Les méthodes du réglage nécessitent souvent de connaître le procédé par sa fonction de transfert

### III.3 Méthode approximative de placement de pôles dominants [5]

Pour que les systèmes soient utilisables en asservissement, il est en effet absolument nécessaire que toutes les fonctions de transfert en boucle fermée soient stables.

On dit qu'un système dynamique linéaire est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative, comme le montre la **figure (III.3)**



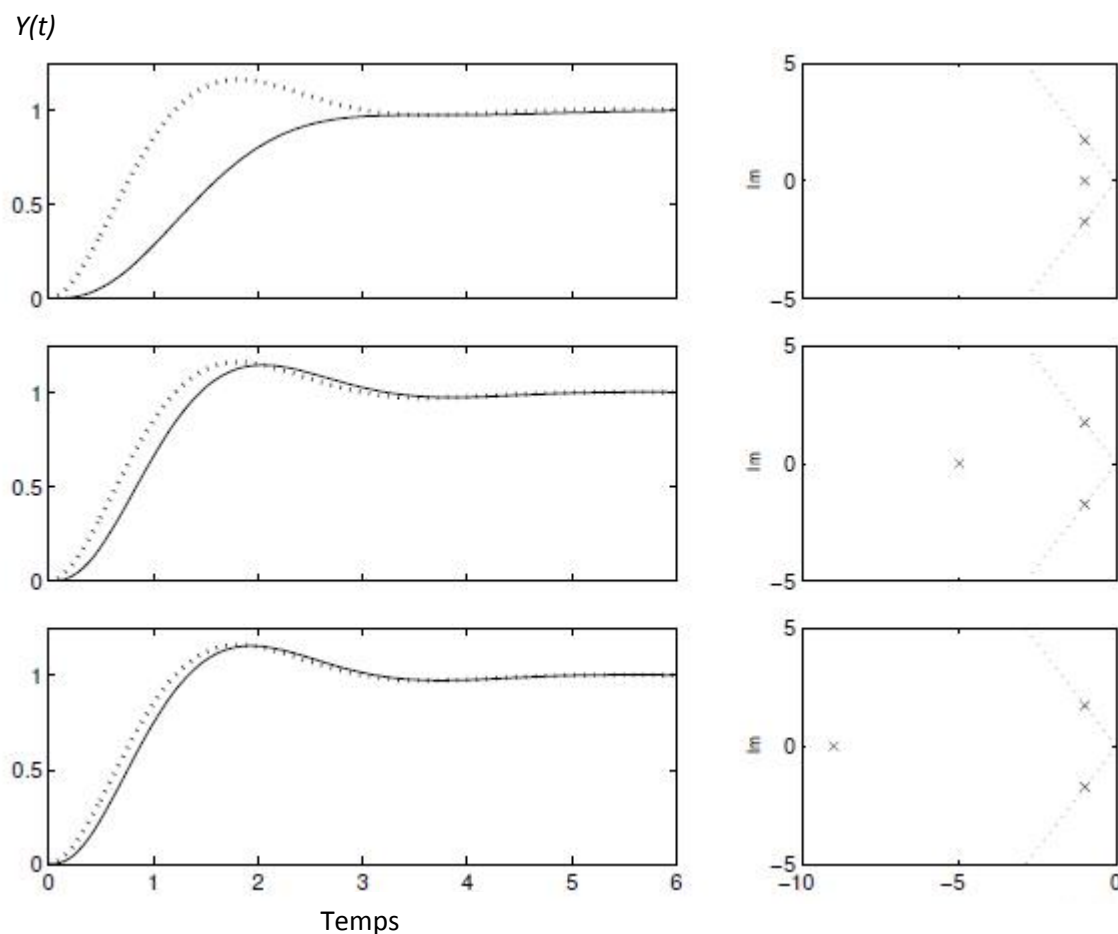
**Figure (III.3) :** Plan complexe.

### III.3.1 Pôles dominants

Un système dynamique linéaire d'ordre  $n$  possédant  $n$  pôles est dit à pôles dominants lorsque son comportement dynamique est largement influencé par un nombre limité de pôles ( i.e. inférieur à  $n$ ). appelés alors dominants.

Dans ces cas, on peut représenter le système de manière suffisamment fidèle par ses pôles dominants, ce qui présente l'avantage de simplifier les calculs

### III.3.2 L'influence de position des pôles sur le système à régler



**Figure (III.4) :** Réponse indicielle d'un système d'ordre 3

On remarque que, plus le 3<sup>ème</sup> pôle réel s'éloigne des 2 autres, son effet sur le régime transitoire diminue. En pointille, la réponse indicielle des 2 pôles dominants seuls, mettant clairement en évidence l'influence de plus en plus faible du pôle non dominant.

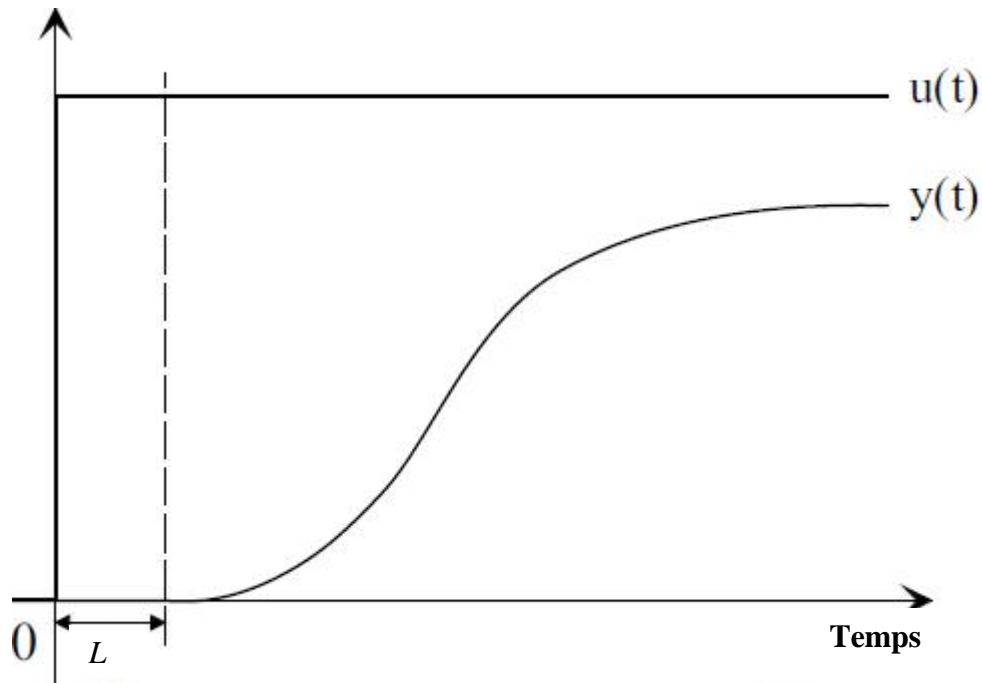
#### III.4 Systèmes à temps mort (retard pur)

Un temps mort, ou retard pur, est l'intervalle de temps  $L$  compris entre l'instant où l'on provoque une variation de la grandeur d'entrée  $u(t)$  d'un système et celui où débute la variation de la grandeur de sortie  $y(t)$ . Le retard pur se traduit au niveau des fonctions de transferts des systèmes dynamiques par le terme :  $e^{-Ls}$

Car :

$$\mathcal{L} \{ u(t - L) \} = U(s) \cdot e^{-Ls}$$

Un exemple de système à retard pur est schématisé sur la **figure (III.5)**



**Figure (III.5) :** Réponse indicielle d'un système possédant un retard pur  $L$

### III.5 La méthode de placement de pôles dominants [6]

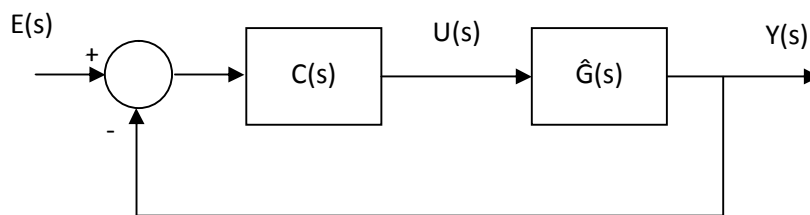
Il n'y a pas un moyen facile pour garantir la dominance des pôles désirés pour les systèmes possédant un retard pur car, ils présentent des spectres infinis et il n'est pas possible d'affecter chaque spectre infini avec un correcteur de dimension finie. Dans ce chapitre, nous allons proposer une méthode analytique de calcul du PID pour réaliser le placement de pôle assurant une dominance.

L'idée est de contourner le problème du spectre infini par la conversion du procédé continu avec retard sous la forme discrète, ensuite le contrôleur PID est conçu pour assurer le placement de pôle dans le domaine discret. Le PID ainsi obtenu est finalement converti en PID continu.

Dans un premier temps, nous allons illustrer cette méthode pour le cas monovariante puis nous la généralisons pour le cas multivariable.

### III.5.1 Principe de la méthode de placement de pôle dominant

**III.5.1.1 Position du problème :** le schéma bloc d'un système commandé par un PID est donné par la **figure (III.6)**



**Figure (III.6) :** Schéma bloc d'un système de commande à base d'un correcteur PID.

Avec :

$\hat{G}(s)$  est la fonction de transfert du procédé.

$C(s)$  : est la fonction de transfert du correcteur PID.

Les spécifications désirées du système de commande sont données par le taux de dépassement et la constante du temps de la réponse à l'échelon en boucle fermée.

- ü Le taux de dépassement est réalisé en choisissant un coefficient d'amortissement  $\zeta$  approprié dont les valeurs raisonnables se situent dans la plage  $[0.4 \ 1]$ .
- ü La constante du temps ne peut être prise arbitrairement mais, elle est souvent limitée par les caractéristiques du procédé et l'amplitude de la commande.

- ▼ Si  $T_s$  est grande, la réponse est lente ce qui est une mauvaise performance et devrait être évitée.
- ▼ Si  $T_s$  est petite, la réponse est rapide et cela nécessite une amplitude de la commande importante et le système devient moins robuste.

De point de vue placement de pôle, le pôle dominant est difficile à réaliser quand  $T_s$  est très petite.

Pour cela, nous adoptons la formule empirique suivante pour choisir  $T_s$  :

$$T_s = T \left( 4.5 + 7.5 \frac{L}{T} \right) \left( \frac{0.35}{\zeta} + 0.5 \right) \quad (\text{III.9})$$

Où :  $T$  : constante du temps équivalente

$L$  : retard (temps mort).

La pulsation propre  $w_0$  est calculée comme suit :

$$w_0 = \frac{4}{\zeta \cdot T_s} \quad (\text{III.10})$$

Par la suite, les spécifications (performances) peuvent être transformées à une dynamique de second ordre désirée caractérisée par l'équation suivante :

$$S^2 + 2\zeta w_0 S + w_0^2 = 0 \quad (\text{III.11})$$

Ses deux racines sont  $\mathbf{P_{s,1}}$  avec une partie imaginaire positive et  $\mathbf{P_{s,2}}$ , qui représentent les pôles désirés en boucle fermée à réaliser et seront dominants.



Le problème ci-dessus réside dans l'existence d'un nombre infini de pôles en boucle fermée pour un procédé continu avec retard. Cependant, ce procédé est converti à un système discret de petite dimension avec un temps d'échantillonnage choisit.

### III.5.1.2 Procédure :

Soit un procédé continu avec retard  $\hat{G}(s)$ , et son modèle du 1<sup>er</sup> ordre  $G(s)$  tel que :

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} e^{-Ls} \quad (\text{III.12})$$

Nous choisissons le temps d'échantillonnage comme  $h = L$ , pour avoir le procédé discret  $G(z)$  du plus bas ordre. Le procédé continu a le pôle «  $-\frac{1}{T}$  ». Ce pôle est transformé par «  $z = e^{hs}$  » à un pôle équivalent discret comme suit :

$$\check{T} = e^{-L/T} \quad (\text{III.13})$$

Donc  $\frac{k}{(Ts+1)}$  est convertit à  $\frac{\check{K}}{(z-\check{T})}$

En faisant l'égalité :  $\left. \frac{k}{(Ts+1)} \right|_{s=0} = \left. \frac{\check{K}}{(z-\check{T})} \right|_{z=1}$ , on obtient :

$$\check{K} = K (1 - e^{-L/T}) \quad (\text{III.14})$$

Sachant que  $e^{-Ls} \xrightarrow{Tz} 1/z$  ( $h = L$ ) alors :

$$G(z) = \frac{\dot{K}}{z(z-\check{T})} \quad (\text{III.15})$$

Le correcteur discret est donné sous forme :

$$C(z) = \frac{K_1 z^2 + K_2 z + K_3}{z-1} \quad (\text{III.16})$$

Le polynôme caractéristique du système discret en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} A_{BF}(z) &= z (z - \check{T}) (z - 1) (1 + G(z) C(z)) \\ &= z^3 + (k_1 \dot{K} - 1 - \check{T}) z^2 + (\check{T} + k_2 \dot{K}) z + k_3 \dot{K} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

d'une part, d'autre part les pôles  $P_{s,1}$  et  $P_{s,2}$  ont le polynôme caractéristique discret désiré suivant :

$$\begin{aligned} A_{des}(z) &= (z - p_{z,1}) (z - p_{z,2}) (z - p_{z,3}) \\ &= z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3 \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

$$\text{Où : } p_{z,1} = e^{LPs,1}, \quad p_{z,2} = e^{LPs,2}, \quad p_{z,3} = e^{10LRe(Ps,1)} \quad (\text{III.19})$$

En remplaçant (III.22) dans (III.21), on obtient :

$$A_{des}(z) = z^3 - (e^{10L\alpha} + 2e^{L\alpha} \cos(Lb))z^2 + (e^{2L\alpha} + 2e^{11L\alpha} \cos(Lb))z - e^{12L\alpha} \quad (\text{III.20})$$

$$\text{Telque : } \begin{cases} \alpha = \text{Re}(P_{s,1}) \\ b = \text{Im}(P_{s,1}) \end{cases}$$

En faisant l'égalité :

$A_{BF}(z) = A_{des}(z)$  on obtient :

$$k_1 = \frac{P_1 + 1 + \check{T}}{\check{K}} \quad (\text{III.21})$$

$$k_2 = \frac{P_2 - \check{T}}{\check{K}} \quad (\text{III.22})$$

$$k_3 = \frac{P_3}{\check{K}} \quad (\text{III.23})$$

Une fois  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  sont calculés, le régulateur PID de la forme discrète (III.16) sera convertit à un régulateur continu, En utilisant la méthode d'EULER 1 :

$$z = Ts + 1 \quad (\text{III.24})$$

Finalement,  $C(s)$  peut être réarrangé comme suit :

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (\text{III.25})$$

- **Exemple III.1 :**

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-0.5s}$$

Par identification avec un système de premier ordre  $(\frac{K}{1+Ts} e^{-Ls})$ , on trouve :

$$T = 1 \text{ [s]}; K = 1; L = 0.5 \text{ [s]}$$

En utilisant les formules (III.9) et (III.10) et (III.11) et on pose  $\zeta = 0.7$  on obtient :

$$T_s = 8.25 \text{ [s]}, w_0 = 0.6926 \text{ [rad/s]}$$

$$s^2 + 1.3852 s + 0.4796 = 0$$

Ses racines sont :

$$P_{s,1} = -0.4848 + 0.4946 i$$

$$P_{s,2} = -0.4847 - 0.4946 i$$

$$P_{s,3} = -4.848$$

la formule (III.20) nous donne :

$$A_{des}(z) = z^3 - 1.6103z^2 + 0.7505z - 0.0545$$

Par identification avec la formule (III.18) , :

$$P_1 = - 1.6103$$

$$P_2 = 0.7505$$

$$P_3 = - 0.0545$$

D'après (III.13) et (III.14) :

$$\check{T} = 0.6065 \text{ [s]} \quad , \quad \check{K} = - 0.0096$$

D'après (III.21), (III.22) et (III.23)

$$k_1 = - 0.0096$$

$$k_2 = 0.3660$$

$$k_3 = - 0.1385$$

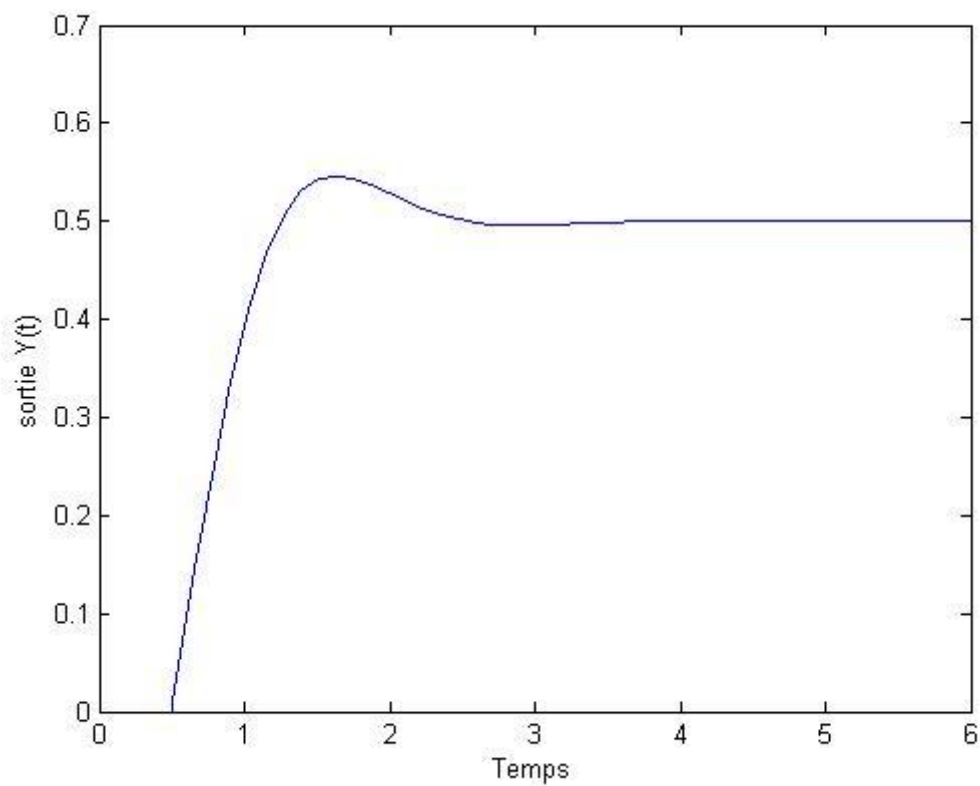
$$\text{Finalement : } C(z) = \frac{-0.0096z^2 + 0.3660z - 0.1386}{z-1}$$

En utilisant la méthode d'Euler 1 de la formule (III.24), le correcteur s'écrit comme suit :

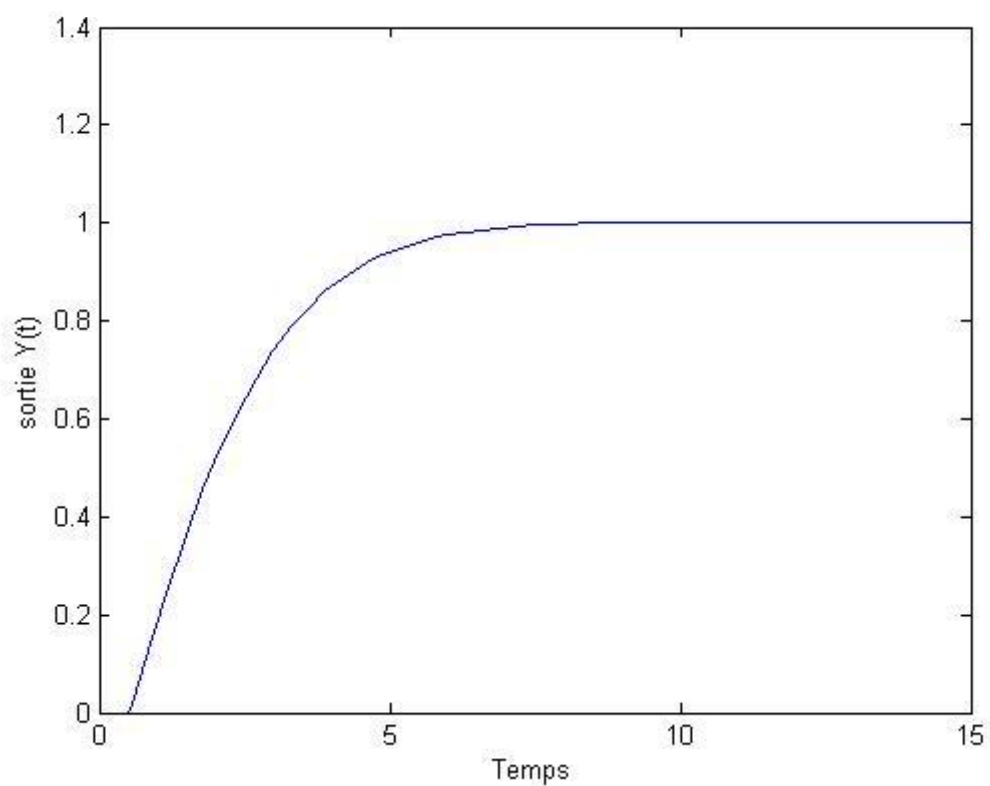
$$C(s) = \mathbf{0.3467} \left( \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0.7960s}} - \mathbf{0.0138s} \right)$$

- **Simulation :**

Les résultats de simulation sont montrés sur les **figures (III.7.a), (III.7.b), (III.7.c).**



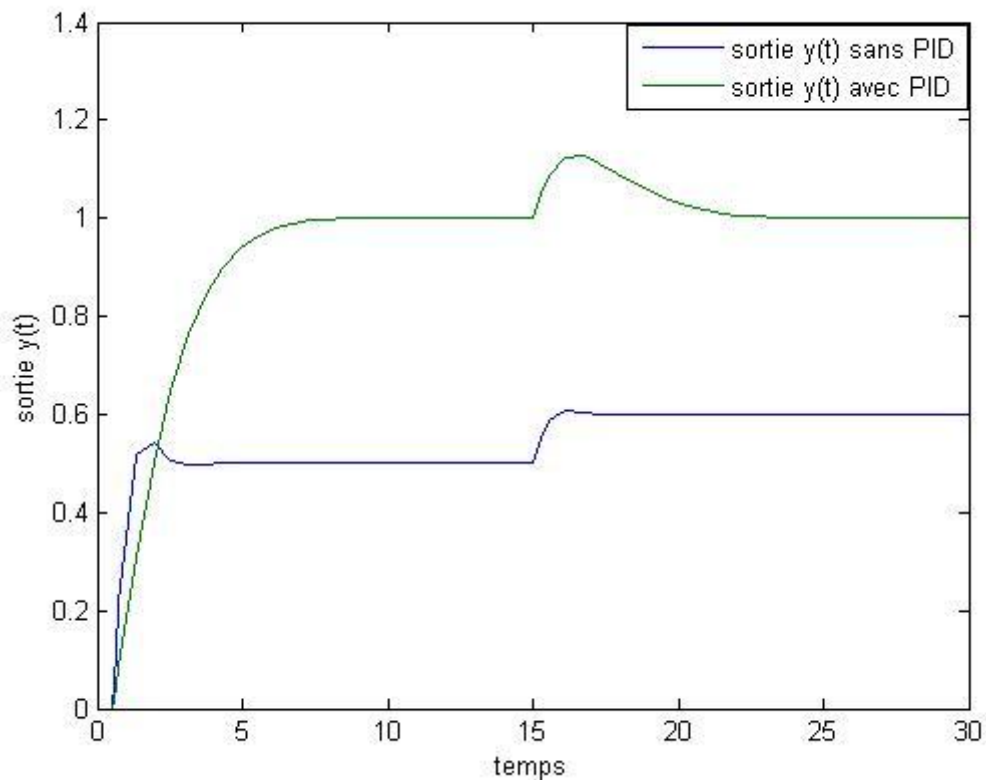
**Figure III.7.a :** La réponse à l'échelon de consigne sans PID



**Figure III.7.b :** La réponse à l'échelon de consigne avec PID

**Rejet de perturbation :**

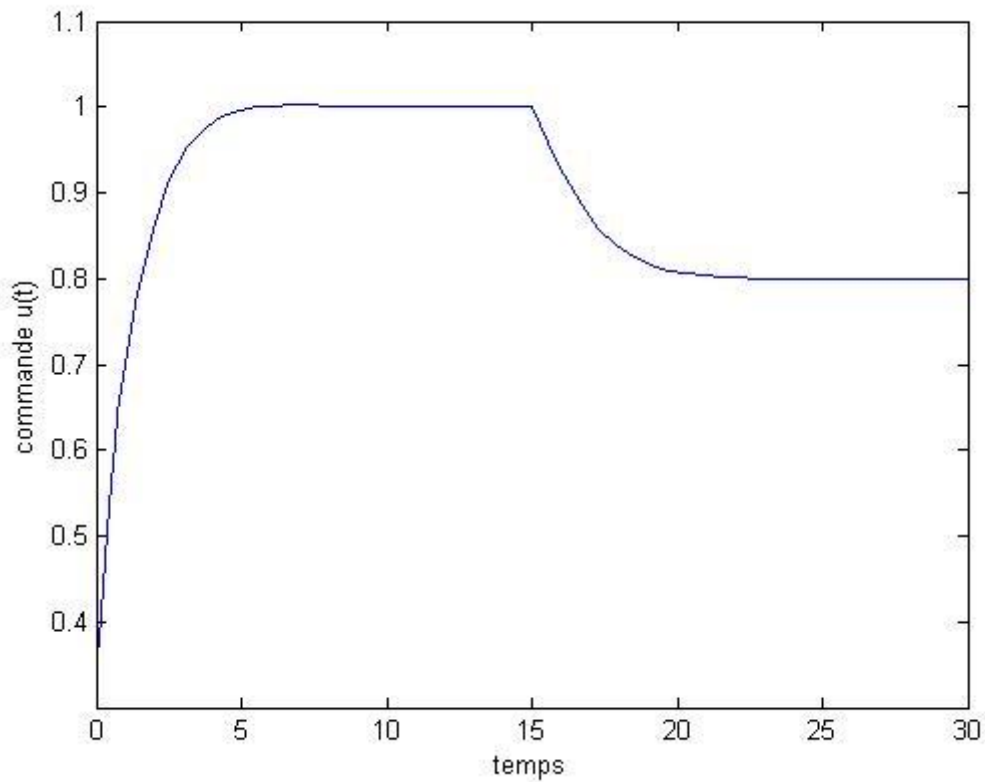
Ce test, concerne le rejet de perturbation. Ainsi, à l'instant 15 s, une perturbation a été appliquée. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur la **Figure III.7.c**



**Figure III.7.c :** La réponse à l'échelon de consigne sans et avec PID en présence de perturbation

- **Interprétation**

L'application de perturbation  $w(s)$  à l'instant « 15 s », affecte les deux sorties, mais la sortie à laquelle on a inséré le correcteur PID est compensée rapidement, Ce correcteur intervient pour maintenir la sortie à sa position de consigne, par contre la sortie sans le correcteur PID est soumise à un autre état stable.



**Figure III.7.d :** Commande générée par le correcteur PID

• Pour appliquer la méthode précédente à un procédé d'ordre supérieur à 1, on commence d'abord par la réduction de ce système pour le mettre sous la forme  $\frac{k}{Ts + 1} e^{-LS}$  en utilisant, par exemple, la méthode des moments qui conduit aux paramètres suivants :

$$k = G(0) \quad (\text{III.26})$$

$$T_{rm} = -\frac{G'(0)}{G(0)} = (T+L) \quad (\text{III.27})$$

$$T^2 = \frac{G''(0)}{G(0)} - \left(\frac{G'(0)}{G(0)}\right)^2 \quad (\text{III.28})$$



Une fois le modèle du premier ordre est obtenu, on applique la même procédure décrite précédemment.

### Exemple III.2 :

On considère  $G(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2(4s+1)} e^{-s}$

On cherche d'abord son modèle réduit sous la forme  $G(s) = \frac{k}{Ts+1} e^{-Ls}$

Pour calculer ses paramètres k, T et L on utilise la méthode des moments :

$$\ln[G(s)] = \ln(2s+1) - 2\ln(s+1) - \ln(4s+1) - s$$

$$\bullet \quad \{\ln[G(s)]\}' = \frac{G'(s)}{G(s)} = \frac{2}{2s+1} - \frac{2}{s+1} - \frac{4}{4s+1} - 1$$

$$\text{D'où: } \frac{G'(0)}{G(0)} = -5 \Rightarrow \mathbf{T_{rm} = (L+T) = 5[s]}$$

$$\bullet \quad \{\ln[G(s)]\}'' = \frac{G''(s)}{G(s)} - \left(\frac{G'(s)}{G(s)}\right)^2 = \frac{-4}{(2s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{16}{(4s+1)^2}$$

$$\frac{G''(0)}{G(0)} - \left(\frac{G'(0)}{G(0)}\right)^2 = 14 = T^2 \Rightarrow \mathbf{T = 3.74[s]}$$

$$\mathbf{T_{rm} = 5 = L+T \Rightarrow L = 1.26}$$

Finalement:

$$G(s) = \frac{1}{3.74s+1} e^{-1.26s}$$

Pour calculer les paramètres du PID, en utilisant la procédure décrite précédemment.

D'après les formules (III.9),(III.10) et (III.11) on trouve :

$$T_s = 26.28 \text{ [s]} , \quad w_0 = 0.2174 \text{ [rad/s]}$$

D'où l'équation caractéristique :  $s^2 + 0.3043s + 0.0472 = 0$

Ses racines sont :

$$p_{s,1} = -0.1522 + 0.1551 i$$

$$p_{s,2} = -0.1522 - 0.1551 i$$

$$p_{s,3} = -1.522$$

La formule (III.20) nous donne le polynôme caractéristique désiré :

$$A_{des}(s) = z^3 - 1.7664z^2 + 0.9193z - 0.1001$$

Et (III.13),(III.14),(III.21),(III.22) et (III.23) nous donnent :

$$\check{T} = 0.7139$$

$$\acute{K} = 0.2861$$

$$k_1 = -0.1835$$

$$k_2 = 0.7179$$

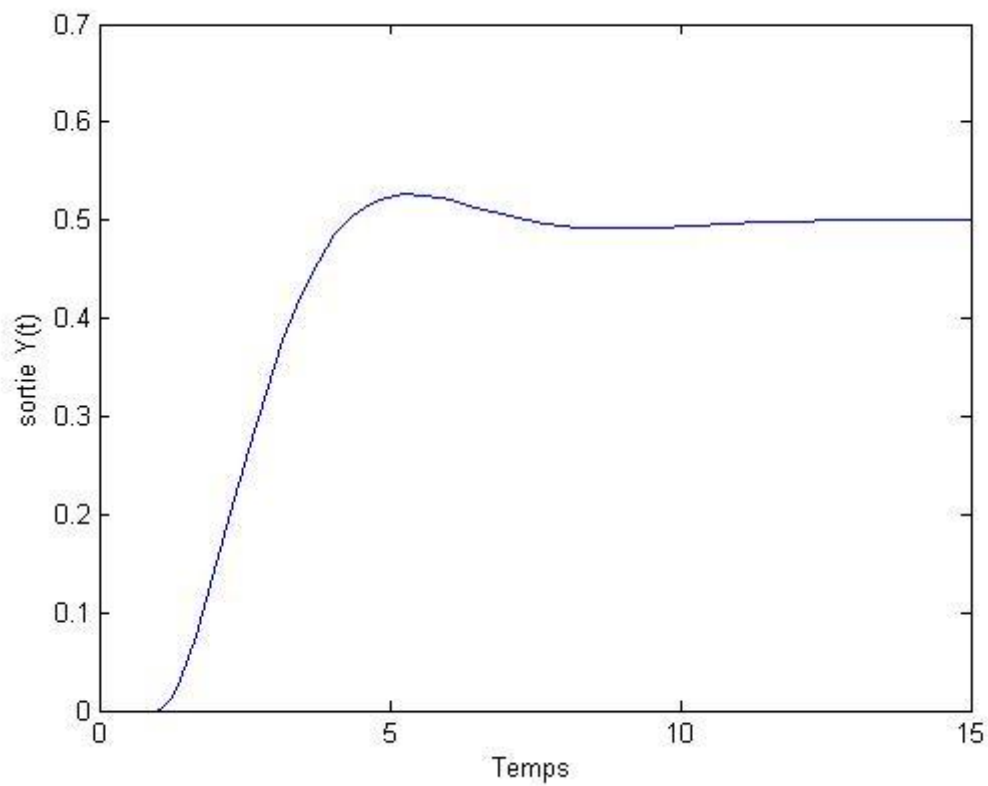
$$k_3 = -0.3498$$

$$\text{Finalement : } C(z) = \frac{-0.1835z^2 + 0.7179z - 0.3498}{z - 1}$$

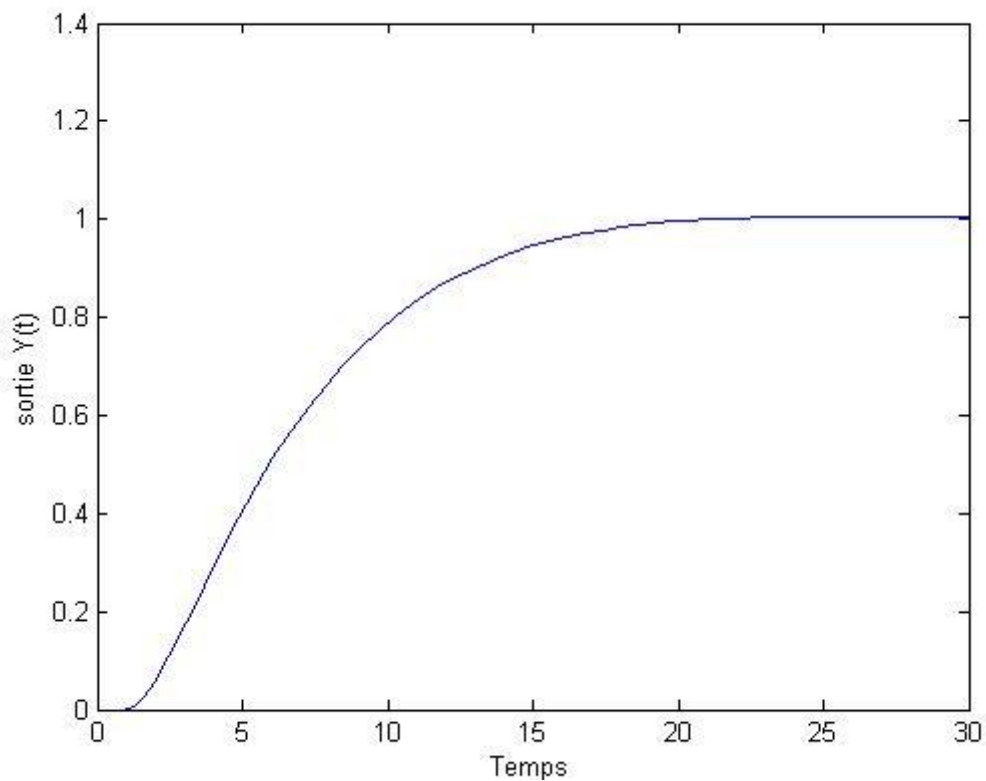
D'après la méthode d'Euler 1 (III.24), on trouve

$$C(s) = 0.3508 \left( 1 + \frac{1}{2.3946s} - 0.6587s \right)$$

Les résultats de simulation sont montrés sur les **figures (III.8.a), (III.8.b), (III.8.c)**.



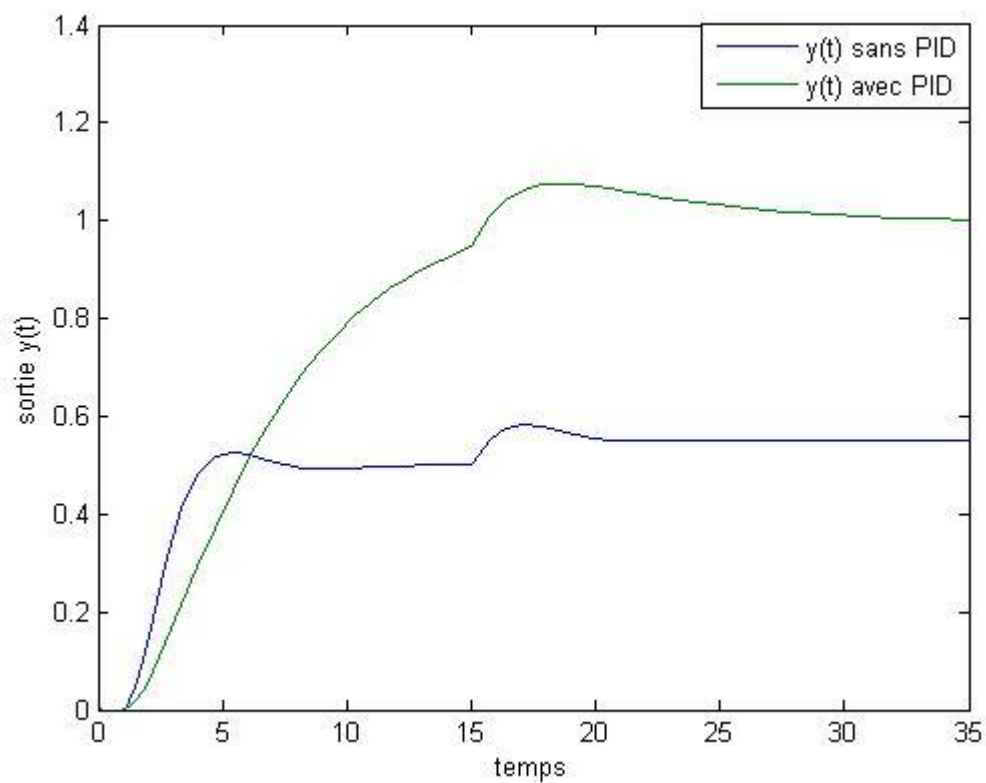
**Figure III.8.a :** La réponse à l'échelon de consigne sans PID



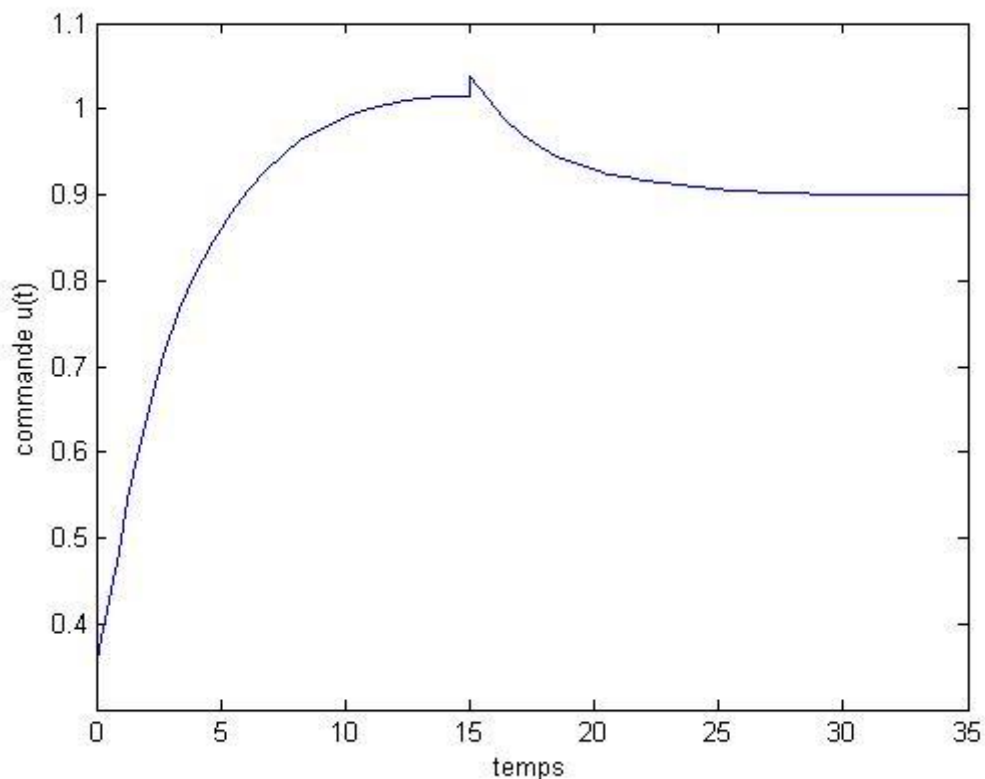
**Figure III.8.b :** La réponse à l'échelon de consigne avec PID

### Rejet de perturbation :

Ce test, concerne le rejet de perturbation. Ainsi, à l'instant 15 s, une perturbation a été appliquée. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur la Figure III.8.c



**Figure III.8.c :** La réponse à l'échelon de consigne avec et sans PID en présence de perturbation



**Figure III.8.d :** Commande générée par le correcteur PID

- **Interprétation**

Pour les deux exemples, l'application de perturbation  $w(s)$  à l'instant « 15 s », affecte les deux sorties, mais la sortie à laquelle on a inséré le correcteur PID est compensée rapidement, Ce correcteur intervient pour maintenir la sortie à sa position de consigne, par contre la sortie sans le correcteur PID est soumise à un autre état stable

### III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté d'une manière brève, des notions sur le correcteur PID, et ses différentes actions qui influencent sur le comportement dynamique du système à commander en boucle fermée. Ensuite on a exposé une méthode de synthèse du correcteur PID (méthode approximatif de placement de pôles dominants) pour le cas des systèmes monovariables.

Afin de démontrer la fiabilité et la justesse de cette méthode dans un système à grande échelle, un exemple pratique très utilisé dans l'industrie pétrochimique fera l'objet du prochain chapitre.

## IV.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'extension de la méthode de synthèse d'un correcteur PID présentée dans le chapitre précédent pour les systèmes multivariables.

Pour une illustration complète, la commande multiboucle d'une colonne de distillation de haute pureté sera étudiée.

## IV.2 Généralités sur le fonctionnement des colonnes de distillation [7]

La distillation est l'une des opérations unitaires utilisées pour le raffinage. Elle permet d'isoler les divers constituants d'un mélange de composés chimiques. Quand un mélange d'hydrocarbures est placé dans une enceinte sous certaines conditions de température et de pression, deux phases différentes apparaissent, l'une liquide et l'autre vapeur, et un équilibre thermodynamique s'établit entre elles. Cette opération de séparation, appelée flash, peut s'effectuer de façon continue. L'enceinte est alimentée par le mélange et deux flux en sortent, un flux de liquide, plus riche en composés lourds que le mélange de départ, et un flux de vapeur, plus riche en composés légers.

Les opérations flash ont physiquement lieu sur des plateaux, empilés à l'intérieur d'une colonne. Chaque plateau est alimenté à la fois par la phase vapeur sortant du plateau inférieur et par la phase liquide sortant du plateau supérieur. On parle d'opération à contre-courant. Un plateau spécial, le plateau d'alimentation, reçoit en plus le mélange à séparer. Un équilibre thermodynamique tend à s'établir sur chaque



plateau, autour de la surface de contact entre les quantités de liquide et de vapeur qui y sont retenues.

Définissons plus précisément ce que l'on entend par composés légers et composés lourds. Lorsque l'on veut diviser en deux produits le flux d'alimentation, deux composés jouent un rôle particulier. On les appelle les composés-clés. On commence ainsi par choisir une clé légère et une clé lourde, le but de la séparation par la colonne étant de minimiser à la fois la quantité de clé lourde dans le distillat et la quantité de clé légère dans le résidu.

### **IV. 3 Schéma de la colonne de distillation**

De nombreuses possibilités de distillations plus complexes sont utilisées. Nous nous intéressons à une colonne de distillation que nous pouvons considérer comme classique ou représentative d'un grand nombre de colonnes industrielles (Figure IV.1).

Le rebouilleur situé au pied de la colonne a pour tâche d'apporter à toute celle-ci l'énergie  $\dot{Q}_B$  nécessaire à l'opération de séparation, correspondant à l'enthalpie de vaporisation. Le condenseur est du type condenseur total ou partiel, selon qu'il condense la totalité ou une partie de la vapeur arrivant en tête de colonne, en liquide qui se sépare entre le distillat et le reflux. La chaleur  $\dot{Q}_c$  absorbée (apport de froid) au niveau du condenseur total permet de condenser la vapeur de tête.

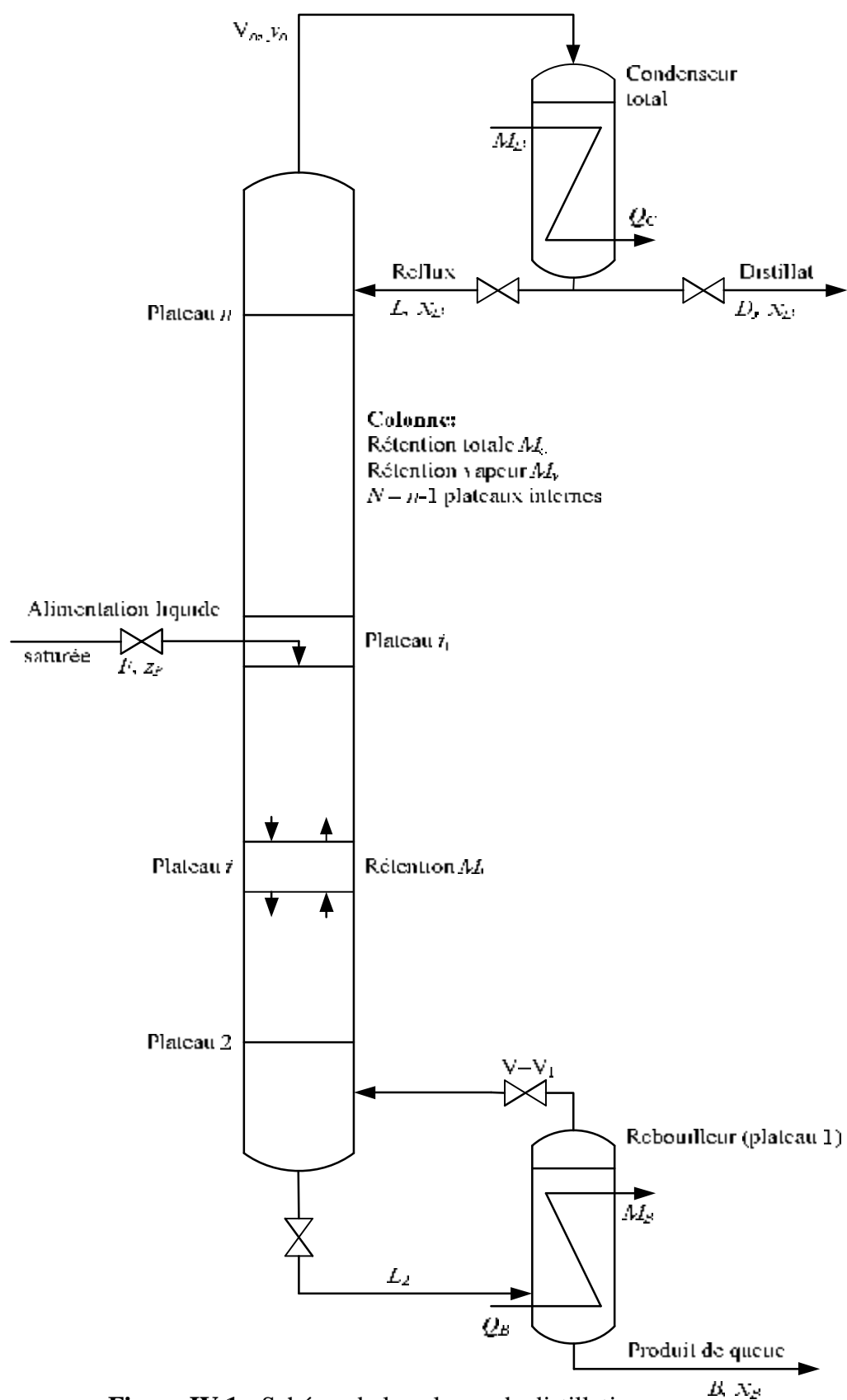


Figure IV.1 : Schéma de la colonne de distillation

En distingue traditionnellement deux zones dans une colonne :

- La zone de rectification est l'ensemble des plateaux situés au-dessus du plateau d'alimentation ;
- La zone d'épuisement est l'ensemble des plateaux situés au-dessous du plateau d'alimentation.

Dans le cas le plus simple, illustré sur la figure (IV.1), le flux de vapeur qui sort en haut de la colonne est totalement condensé. Le liquide ainsi obtenu est divisé en deux parties : le distillat, qui est un des produits de la séparation, et le flux, qui constitue l'alimentation liquide du plateau de tête. Le produit liquide soutiré en bas (ou au fond) de la colonne est un autre produit de séparation, le résidu. Il est en partie vaporisé dans un rebouilleur pour générer le flux de vapeur au fond de la colonne.

D'un point de vue automatique, la pression sur le plateau de tête et les deux niveaux sont des sorties du système. En comptant les entrées sur lesquelles on peut agir, les commandes du système, on s'aperçoit qu'il est possible de réguler deux autres sorties : on cherche généralement à réguler les taux impureté dans le distillat et dans le résidu.

A l'exclusion du débit et de la composition de l'alimentation, qu'il faut considérer comme des perturbations, les entrées du système sont :

- débits de distillat  $D$ ,
- débit de résidu  $B$ ,
- débit du reflux  $L$ ,

- le débit de vapeur au bouilleur  $V_1$  et
- le débit de vapeur condensée en tête  $V_n$

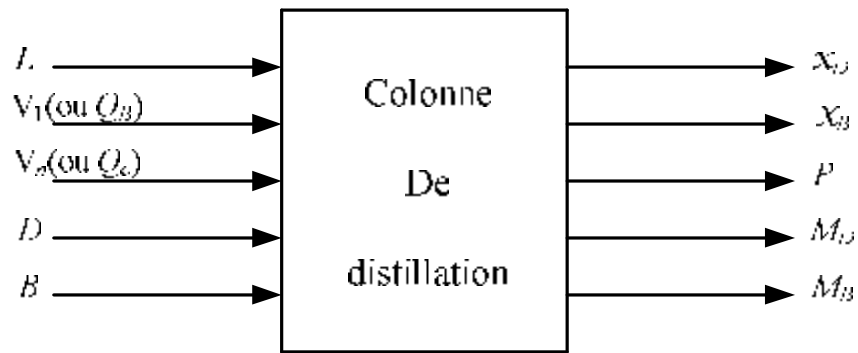
On dispose donc cinq commandes pour commander cinq sorties :

- rétention au rebouilleur  $M_B$
- rétention au condenseur  $M_D$ ,
- la pression  $P$  qui doit être commandée soigneusement pour maintenir la stabilité de l'opération. En fait, même des colonnes binaires dont la pression et les niveaux sont commandés peuvent présenter des états stationnaires multiples.

Il reste deux degrés de liberté pour les compositions de tête et de queue :

- le distillat  $x_D$ ,
- le résidu  $x_B$

Une colonne à distiller typique (Figure (IV.1)) peut être schématisée comme suit :



**Figure IV.2 :** Schéma bloc d'une colonne de distillation

#### IV.4 Commande de la colonne de distillation

La méthode décrite précédemment peut être étendue au cas multivariable, du fait que la plupart des procédés sont de nature multivariable.

Soit la fonction de transfert du procédé multivariable :

$$G(s)_{m \times m} = [g_{ij}(s)]$$

Le découpleur  $D(s) = [d_{ij}(s)]$  est inséré entre les régulateurs monovariables et le procédé, tel que :

$$d_{ji}(s) = \frac{G^{ij}(s)}{G^{ii}(s)} d_{ii}(s) \quad (\text{IV.1})$$

avec :  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, m$

Où  $G^{ij}(s)$  est la matrice des cofacteurs correspondant à  $g_{ij}(s)$  dans  $G(s)$ .

et

$$Q(s) = G(s) D(s) \quad (IV.2)$$

Par la suite, on applique la méthode des moments pour chaque élément de la matrice  $Q(s)$  pour réduire ses éléments à des fonctions de transfert du premier ordre avec retard (s).

En utilisant la méthode proposée, dans le chapitre précédent, on détermine les contrôleurs PID monovariabiles

$$k_{jj}(s)_{j=1,2,\dots,m}.$$

#### IV.5 Modèle de la colonne de distillation

Le modèle de la colonne étudiée est à deux entrées et deux sorties, il est donné sous forme matrice de transfert :

$$\begin{bmatrix} X_B \\ X_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} Z_f$$

D'après la formule (IV.1), avec ( $d_{11} = d_{22} = 1$ ), on retrouve la matrice fonctions de transfert du découpleur comme suit :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{315.63s+18.9}{268.8s+12.8} e^{-2s} \\ \frac{95.04s+6.6}{211.46s+19.40} e^{-4s} & 1 \end{bmatrix}$$

En appliquant la méthode des moments au système résultant de la formule (IV.2), il vient :

$$(s) = \begin{bmatrix} \frac{6.374}{5.414s+1} e^{-1.065s} & 0 \\ 0 & \frac{-9.691}{7.942s+1} e^{-3.12s} \end{bmatrix}$$

L'application de la méthode présentée dans le chapitre précédent, appliquées aux éléments monovariabiles de la diagonale de  $G(s)$ , Pour  $\zeta = 0.7$  donne :

$$1) \quad \square_{11}(s) = \frac{6.374}{5.414s+1} e^{-1.065s}$$

En utilisant les formules (III.9), (III.10) et (III.11) du chapitre précédent, on obtient :

$$T_s = 32,35 \text{ [s]}, \quad w_0 = 0.1766 \text{ [rad/s]}$$

$$s^2 + 0.2472 s + 0.0311 = 0$$

Ses racines sont :

$$P_{s,1} = -0.1236 + 0.1258$$

$$P_{s,1} = -0.1236 - 0.1258$$

$$P_{s,1} = -1.236$$

la formule (III.20) nous donne :

$$A_{\text{des}}(z) = z^3 - 2.0056z^2 + 1.2342z - 0.2060$$

Par identification avec la formule (III.18) :

$$P_{s,1} = -2.0056$$

$$P_{s,1} = 1.2342$$

$$P_{s,1} = -0.2060$$

D'après (III.13) et (III.14) :

$$\check{T} = 0.8214 \text{ [s]} \quad , \quad \check{K} = 1.1382$$

D'après (III.21), (III.22) et (III.23)

$$K_1 = -0.1618$$

$$K_2 = 0.3626$$

$$K_3 = -0.1809$$



Finalement : 
$$C(z) = \frac{-0.1618z^2 + 0.3626z - 0.1809}{z-1}$$

En utilisant la méthode d'Euler 1 de la formule (III.24), le correcteur s'écrit comme suit :

$$k_{11} = 0.0390 \left( 1 + \frac{1}{2.0855s} - 4.4179s \right)$$

$$2) \quad \square_{22}(s) = \frac{-9.691}{7.942s+1} e^{-3.12s}$$

Les formules (III.9) et (III.10) et (III.11) donnent :

$$T_s = 59.139 \text{ [s]}, \quad w_0 = 0.0966 \text{ [rad/s]}$$

$$s^2 + 0.1352s + 0.0093 = 0$$

Ses racines sont :

$$P_{s,1} = -0.0676 + 0.0688j$$

$$P_{s,1} = -0.0676 - 0.0688j$$

$$P_{s,1} = -0.676$$

la formule (III.20) nous donne :

$$A_{des}(z) = z^3 - 1.7036z^2 + 0.8477z - 0.0795$$

Par identification avec la formule (III.18), on trouve :

$$P_1 = -1.7036$$

$$P_2 = 0.8477$$

$$P_3 = -0.0795$$

D'après (III.13) et (III.14) :

$$\check{T} = 0.6751 \text{ [s]} \quad , \quad \check{K} = -3.1483$$

D'après (III.21), (III.22) et (III.23)

$$K_1 = 0.0090$$

$$K_2 = -0.0548$$

$$K_3 = 0.0252$$

$$\text{Finalement : } C(z) = \frac{0.0090 z^2 - 0.0548 z + 0.0252}{z - 1}$$

En utilisant la méthode d'Euler 1 de la formule (III.24), le correcteur s'écrit comme suit :

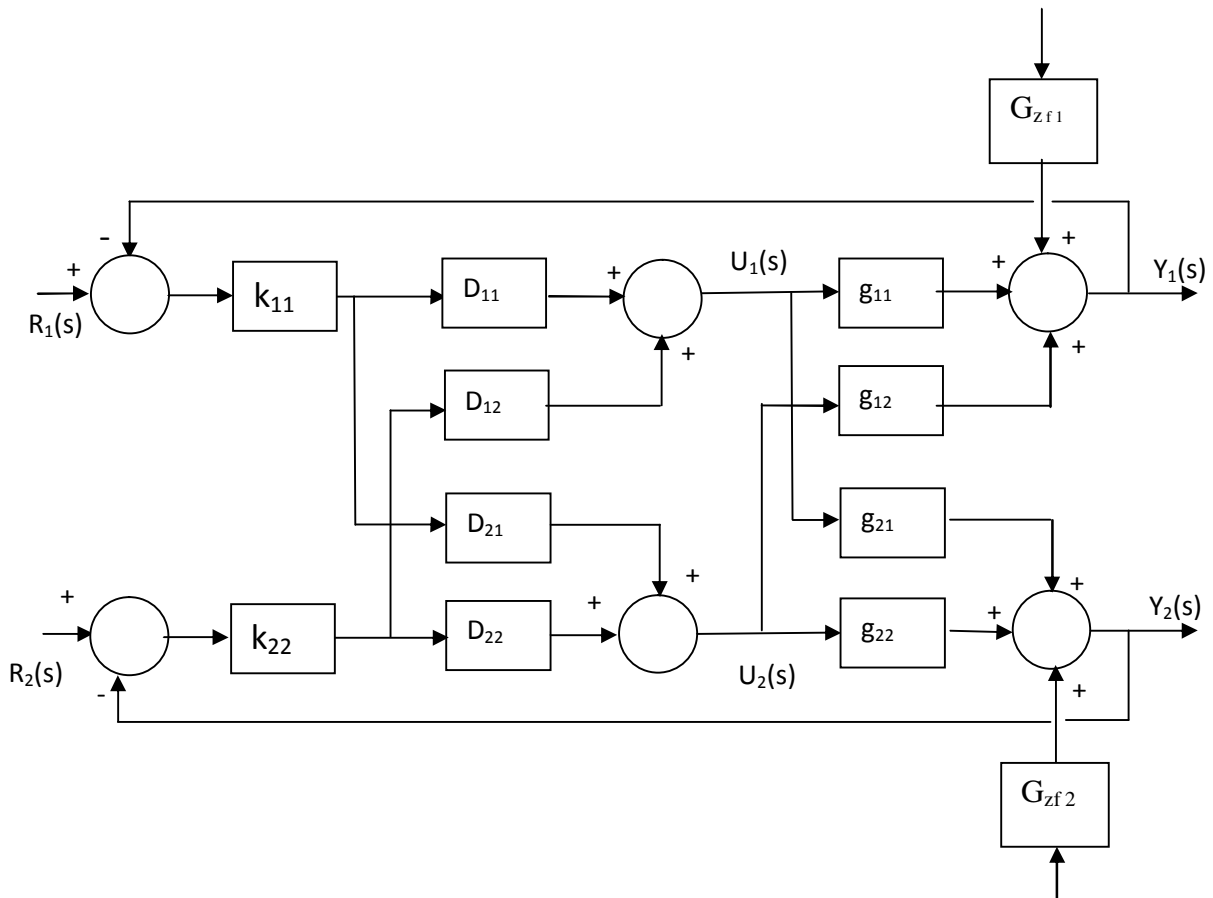
$$k_{22} = -0.0365 \left( 1 + \frac{1}{5.6153s} - 0.7753s \right)$$

## IV.6 Résultats de simulation

Dans cette section, on va évaluer les performances du système de commande par simulation. On considère les tests de poursuite de consigne et le rejet de perturbation.

### IV.6.1 Commande multiboucle de la colonne de distillation :

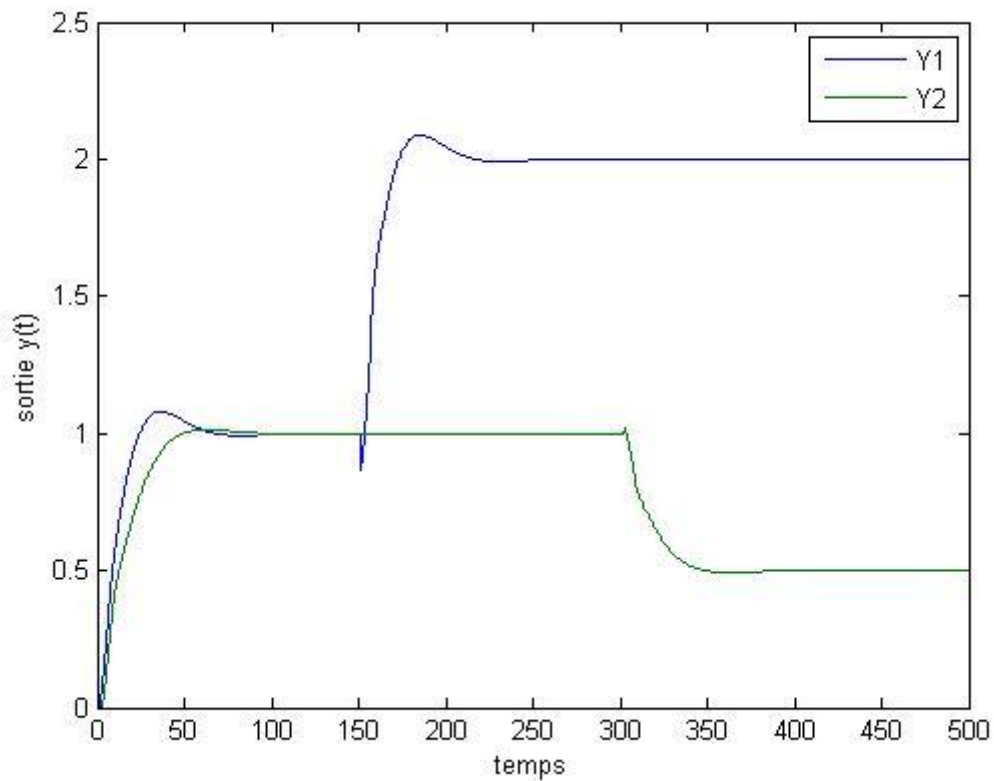
Le schéma bloc de la boucle fermée est donné par la Figure IV.3.



**Figure IV.3 :** Commande distribuée  $[Y1, U1], [Y2, U2]$

**Poursuite de consigne :**

Pour ce test, on réalise deux changements de consigne. Le premier concerne la sortie  $y_1$ , et intervient à l'instant 150 s, et le deuxième intervient à l'instant 300 s et concerne la sortie  $y_2$ . La perturbation est supposée nulle. Les résultats de la simulation sont donnés par la Figure IV.4.



**Figure IV.4 :** Evolutions des sorties après la variation des consignes  $R_1(s)$  et  $R_2(s)$

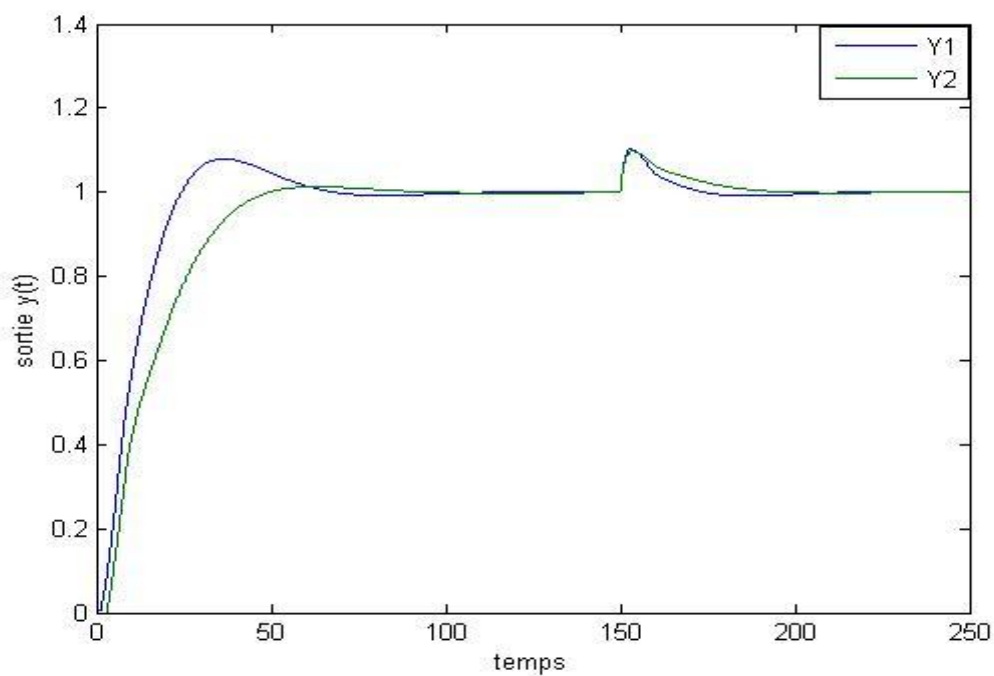
- **Interprétation :**

D'après la courbe, on remarque que si on fait un changement de consigne  $R_1(s)$  à l'instant « 150s », seule la première sortie est affectée. La même remarque est faite pour la deuxième boucle, si on change la consigne  $R_2(s)$  à l'instant « 300s », seule la deuxième sortie est affectée

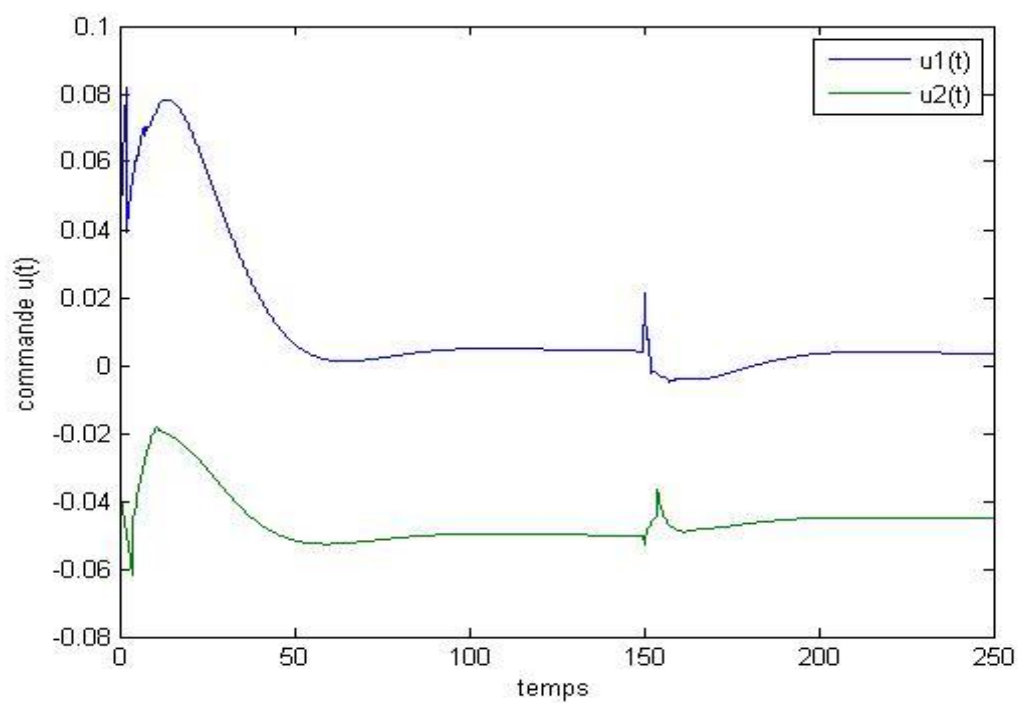
On conclut que lors d'un changement de consigne sur une entrée, seule la sortie correspondante est affectée. Ceci est expliqué par l'effet de découpleur qui élimine les interactions entre les boucles de commande. On constate aussi que les deux correcteurs assurent la poursuite des consignes imposées avec des performances acceptables.

**Rejet de perturbation :**

Le deuxième test réalisé concerne le rejet de perturbation. Ainsi, à l'instant 150 s, une perturbation a été appliquée. Les résultats de simulation obtenus sont représentés sur la Figure IV.5.



**Figure (IV.5) :** Evolutions des sorties en présence de perturbations sans changement de consigne



**Figure IV.6 :** Les grandeurs de commande  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  générées par les deux correcteurs

- **Interprétation :**

L'application de perturbation  $w(s)$  à l'instant « 150 s » sur les deux sorties, affectent les deux sorties, mais son effet sur les deux sorties est compensé rapidement par les deux correcteurs qui interviennent pour corriger les écarts observés, sans perturber davantage le fonctionnement de la colonne.

#### **IV.7 Conclusion**

L'étude menée dans ce chapitre a pour objectif de montrer que l'extension de la méthode présentée dans le chapitre précédent aux systèmes multivariables se fait de manière simple, et conduit à des résultats satisfaisants. Le procédé étudié est une colonne de distillation à deux variables de commande et deux variables de sortie.

Par cet exemple, nous avons montré la simplicité de synthèse d'un système de commande performant pour un système multivariable en adoptant la stratégie de commande multiboucle dont la synthèse des correcteurs PID est faite en se basant sur le placement de pôles dominants.

L'objectif de notre étude consiste à présenter une méthode générale de synthèse d'une commande multiboucle à base des correcteurs PID synthétisés par une approche basée sur le placement de pôles dominants. Puis, pour illustrer la validité de cette approche, une application concernant la commande d'une colonne de distillation de haute pureté a été abordée.

Après avoir présenté des généralités sur les systèmes multivariables, nous avons introduit le principe de la commande multiboucle. Puis, on a présenté une approche de synthèse d'un correcteur PID pour un système monovariable présentant un retard important. A la fin nous avons adopté cette approche pour la commande multiboucle d'une colonne de distillation.

Les résultats de simulation obtenus montrent clairement que l'approche de synthèse étudiée permet de synthétiser des correcteurs assurant les performances désirées spécifiées par le placement de pôles.

Dans le cas multivariable, un découpleur a été introduit pour éliminer les interactions entre les variables caractéristiques de la colonne de distillation. Ce découpleur conduit à des fonctions de transfert très difficile à manipuler, puisque le système découplé fait intervenir des fonctions de transfert présentant des retards différents. Ainsi, la méthode des moments a été adoptée pour se ramener à des systèmes de premier ordre avec retard qui sont simple à traiter par l'approche de synthèse présentée. Par conséquent, il est intéressant de penser à traiter directement le problème de commande en considérant directement le système à commander sans découpleur.



## ***BIBLIOGRAPHIE***

- [1] **POMERLEAU.** « La Commande de Procédés Industriels : Une approche Fréquentielle unifiée », Edition Hermès, 1997.
- [2] **F. BENBELKACEM et S. AIT KAID.** « Commande multiboucle d'un système multivariable », Faculté de Génie Electrique et Informatique, Département Electronique, Option Contrôle, 2009.
- [3] **MAIDI.** « Analyse des Interactions dans un Système à Grande Echelle : Application à la Commande Multiboucle des Systèmes Fortement Couplés. Thèse de Magister », Faculté des Hydrocarbures et de la Chimie (FHC), Université de Boumerdés, Février 2001.
- [4] **A.A.BADEG, F.ALI AHMED et H.AMMARI** « Commande multiboucle de la colonne de distillation », 2002.
- [5] **M. ETIQUE.** « Cours de Régulation Automatique » Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud, mars 2006.
- [6] **Q.-G WANG.** « PID Control for Multivariable Processes », Springer, 2008.
- [7] **J. -P. CORRIOU.** « Commande de procédés chimiques », Edition HERMES, 2001.

# Résumé

L'objectif de notre travail, est de présenter une méthode de synthèse d'une commande multiboucle à base des régulateurs PID synthétisés par une approche basée sur le placement de pôles dominants pour le système continu présentant des retards important.

Après avoir présenté des généralités sur les systèmes multivariables, nous avons introduit le principe de la commande multiboucle. par la suite, on présenté une approche de synthèse d'un correcteur PID pour un système monovariable, et qui sera par la suite étendu au cas multivariables. Et pour une illustration complète, nous avons adopté cette approche pour la commande multiboucle d'une colonne de distillation.