

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude de MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : **automatique option commande des
Systèmes**

Présenté par
HADJEROUIT Amar
HAMANI Sabrina

Mémoire proposé et dirigé par **Ahmed MAIDI**

Thème

Simulation d'un problème de Stefan en utilisant la méthode d'immobilisation de la frontière.

Mémoire soutenu publiquement le 12 septembre 2015 devant le jury composé de :

M Boualem SALHI

MA, UMMTO, Président

M Ahmed MAIDI

MCA, UMMTO, Promoteur

M Hamid HAMICHE

MCA, UMMTO, Examineur

M Mourad ALED

MA, UMMTO, Examineur

*Ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire de conception et de conduite des systèmes de
production (L2CSP)*

REMERCEMENT

Nous remercions DIEU le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer nos profondes reconnaissances à notre promoteur M^r A. MADI. Nous le remercions chaleureusement de nous avoir encadrés durant ce travail ; pour sa disposition, pour ses précieux conseils et son aide, pour l'intéressante documentation qu'il a mise à notre disposition et pour toutes les commodités et aisances qu'il nous a apportées durant notre étude et réalisation de ce projet. Trouve ici l'expression de nos profondes gratitude.

Nous exprimons également notre gratitude à tous les professeurs et enseignants qui ont contribué à nos études à leurs conseils et encouragement.

Nous étendons nos vifs remerciements aux membres du jury qui nous ferons l'honneur d'accepter de lire et d'évaluer notre travail.

Nous remercions également toutes les personnes, qui nous ont encouragées pour aller jusqu'au bout, en l'occurrence, nos famille qui nous ont aidés moralement et financièrement, ainsi tous nos amis.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A ma chère et tendre mère

A celle qui a tout souffert, sans me faire souffrir, qu'elle trouve dans ce mémoire le témoignage de ma reconnaissance et de mon affection pour tous les sacrifices, l'extrême amour et la bonté qu'elle m'a offert pour me voir réussir.

A mon cher père

*A l'homme que je dois ma réussite, mon bonheur, et tout le respect :
Qu'il trouve ici l'expression de mon affection et une récompense des sacrifices consentis pour moi puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.*

A mon frère et ma sœur

Karim et Duhia

A qui je souhaite toutes les réussites et le bien-être.

A toi cher défunt grand père

Je pris le tout puissant d'accueillir votre âme en son vaste paradis

A mon binôme SABRMA, et toute sa famille.

A tous mes ami(e)s et camarades.

AMAR

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

A la mémoire de celui à qui je dois tous, celui qui aurait été content aujourd'hui et fier de moi, mon très cher et regretté père, qui continuera de vivre dans mon cœur et dans mes pensées, que dieu l'accueille dans son vaste paradis.

A ma très chère MÈRE, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçoit à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude, puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mes très chers et adorables Frères et Sœurs :

FARID, DABIA, SAMIRA, LINDA et SOFIANE

Zui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

A ma très chère belle sœur : ZAKIA

A mes chers beaux frères :

MOHAMED, HACENE et AREZKI.

A mes très chers et adorables neveux :

RAYAN, MOUMOUH, EDDY, MASSILAS et YANNI.

A une personne chère et exceptionnelle qui a été toujours à mes côtés : LSH.

A mon binôme AMAR, et toute sa famille.

A tous mes ami(e)s et camarades.

SABRINA

SOMMAIRE

Sommaire

Introduction générale.....	01
----------------------------	----

Chapitre 1 : Généralités sur les systèmes à paramètres repartis

1.1. Introduction	04
1.2. Définition des systèmes à paramètres répartis.....	05
1.3. Définition mathématique d'un SPR.....	05
1.4. Représentation mathématique des systèmes à paramètres répartis	05
1.5. Conditions aux limites.....	06
1.5.1. Conditions aux limites de Dirichlet.....	07
1.5.2. Conditions aux limites de Neumann.....	07
1.5.3. Conditions aux limites de Robin.....	08
1.6. Commandes d'un système à paramètres répartis.....	08
1.6.1. Commandes réparties	08
1.6.2. Commande par zone	09
1.6.3. Commande ponctuelle.....	09
1.6.4. Commande par balayage.....	09
1.6.5. Commande à la frontière.....	09
1.7. Observations d'un système à paramètres répartis	09
1.7.1. Observations réparties	10
1.7.2. Observations ponctuelles	10
1.7.3. Observations par balayage	10
1.7.4. Observations par moyennage spatial	10
1.8. Classification des systèmes à paramètres repartis	11
1.9. Actionneurs et capteurs des systèmes à paramètres répartis	12
1.9.1. Actionneurs	12
1.9.2. Capteurs	13
1.10. Conclusion	14

Chapitre 2 : Méthode des lignes

2.1. Introduction	15
-------------------------	----

Sommaire

2.2.	Calcul des dérivées finies en utilisant les polynômes de Lagrange	15
2.2.1.	Définition de la méthode des différences finies.....	15
2.2.2.	Pratique de la méthode aux différences finies	16
2.2.3.	Schéma numérique	16
2.2.4.	Polynômes de Lagrange	17
2.2.4.1.	Interpolation de Lagrange	18
2.2.4.2.	Calcul des dérivées utilisant les polynômes de Lagrange.....	18
2.2.5.	Méthode d'approximation aux différences finies	19
2.3.	Méthode des lignes	20
2.3.1.	Définition de la méthode des lignes.....	20
2.3.2.	Base de la méthode des lignes.....	21
2.3.3.	Propriétés et utilisation de la méthode des lignes.....	21
2.3.4.	Application de la méthode des lignes	22
2.4.	Exemple illustratif	22
2.5.	Conclusion.....	24

Chapitre 3 : Modélisation de l'équation de chaleur

3.1.	Introduction.....	25
3.2.	Modélisation d'un processus.....	25
3.3.	Notion de chaleur.....	25
3.4.	Présentation des mécanismes de transfert thermique.....	25
3.4.1.	Conduction : la chaleur et les solides.....	26
3.4.2.	Convection : la chaleur et les fluides.....	27
3.4.3.	Rayonnement ou radiation.....	28
3.5.	Champ de température.....	28
3.6.	Gradient de température	29
3.7.	Flux de chaleur.....	29
3.8.	Diffusion de chaleur par conduction.....	30
3.9.	Problème de Stefan.....	30
3.10.	Modélisation du problème de Stefan.....	31
3.10.1.	Equation de chaleur.....	31
3.10.1.1.	Hypothèse.....	32

Sommaire

3.10.1.2. Lois physiques	32
3.10.1.3. Modélisation.....	33
3.10.2. Equation de fusion.....	36
3.11. Conclusion.....	37

Chapitre 4 : Méthode d'immobilisation de la frontière

4.1. Introduction	38
4.2. Rappel sur le modèle qui est le problème de Stefan.....	38
4.3. Méthode d'immobilisation de la frontière	39
4.3.1. Principe.....	39
4.3.2. Application de la méthode d'immobilisation de la frontière du problème de Stefan	39
4.3.3. Mise en équations du problème.....	39
4.4. Application de la méthode des lignes.....	43
4.5. Simulation	44
4.6. Conclusion.....	51
Conclusion générale.....	52

Bibliographie

Liste des figures

Figure 1.1 Système monodimensionnel excité par deux actionneur ponctuelle.....	12
Figure 1.2 Système monodimensionnel excité par un actionneur zone.....	13
Figure 1.3 système bidimensionnel excité par un actionneur filament.....	13
Figure 2.1 Représentation des trois points utilisés pour calculer le polynôme de Lagrange...	18
Figure 3.1 Schéma de la conductivité.....	26
Figure 3.2 Conductivité d'une pièce.....	26
Figure 3.3 Convection dans une casserole d'eau Marine.....	27
Figure 3.4 Convection dans l'air.....	27
Figure 3.5 Conduction dans la casserole.....	27
Figure 3.6 Convection dans la casserole.....	27
Figure 3.7 Représentation schématique du transfert thermique par rayonnement.....	28
Figure 3.8 Isotherme et gradient thermique.....	29
Figure 3.9 Unidimensionnelle flux de chaleur.....	32
Figure 3.10 Phase liquide régi par une équation de la chaleur non linéaire avec le contrôle de frontière, en contact avec une phase solide infini.....	37
Figure 4.1 Schéma synaptique de la frontière mobile.....	40
Figure 4.2 Evolution de la frontière en fonction du temps : solutions numérique et analytique.....	46
Figure 4.3 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 10$	47
Figure 4.4 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 25$	47
Figure 4.5 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 40$	48
Figure 4.6 Evolution de la température en fonction du l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.15$	49
Figure 4.7 Evolution de la température en fonction du l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.55$	49
Figure 4.8 Evolution de la température en fonction du l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.95$	50

INTRODUCTION

GÉNÉRALE

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, l'automatique des systèmes a évolué vers l'étude et la maîtrise des systèmes de plus en plus complexes parmi lesquels on retrouve les systèmes à paramètres répartis (SPR) dont le comportement dynamique est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP).

En effet, dans de nombreuses applications industrielles (réacteur chimique, bio-réacteur, bio-filtre, décanteurs, propagation d'ondes, diffusion de la chaleur, mécanique des fluides, robotique...), les variables caractéristiques du système dépendent fréquemment de coordonnées spatiales d'où la nécessité de caractériser leurs évolutions par des modèles dynamiques à paramètres répartis. Ceci fait intervenir des EDP. Comme un système dynamique réel est généralement délimité physiquement dans l'espace, la description mathématique d'un système à paramètres répartis (SPR) doit être complétée par des conditions aux limites qui représentent des contraintes physiques auxquelles sont soumises les frontières du système, et permettant la résolution des équations du modèle. Par conséquent, elles doivent être en nombre suffisant, dépendant de l'ordre des EDP par rapport à la variable d'espace.

La simulation numérique des phénomènes de changement de phase liquide/solide, a été un sujet stratégique de recherche grâce à son vaste champ d'application dans les différents domaines industriels et médicaux, et il a une importance considérable dans de nombreux domaines techniques.

A cause de la nature complexe des phénomènes de changement de phase liquide/solide, il y a trois sources des difficultés dans la simulation numérique.

La première source est la non-linéarité des systèmes des équations différentielles gouvernant les phénomènes de changement de phase et qui varient dans le temps et dans l'espace.

Deuxièmement, la création des fronts mobiles au cours de changement de phase avec une discontinuité de gradient de température où leurs positions et leurs mouvements entrent dans le processus de simulation.

Troisièmement, la nécessité de choisir des techniques de calcul précises, fiables et inconditionnellement stable pour obtenir la solution numérique des équations différentielles associées.

Introduction générale

A cause de la non-linéarité des équations différentielles et la présence des fronts mobiles caractérisés par des discontinuités dans le gradient de température au cours de changement de phase, l'utilisation des méthodes numériques comme les différences finis, les volumes finis et les éléments finis basées sur le schéma numérique exige une adaptation du modèle mathématique, soit par l'introduction des variables additionnelles, soit par l'ajout des équations supplémentaires au problème étudié.

Ces modèles mathématiques appartiennent à deux grandes familles. La première famille consiste à introduire l'enthalpie comme variable additionnelle à l'équation d'énergie pour prendre en compte le dégagement ou l'absorption de la chaleur latente de changement de phase, ce qui élimine l'imposition explicite de la condition de température au niveau de l'interface d'une part, et le suivi de mouvement de front d'un autre part.

Dans notre présent travail, on s'intéresse à la deuxième famille qui consiste à formuler le problème de changement de phase comme un problème à frontière mobile où la position de l'interface doit être calculée comme étant un élément de calcul. Ce type de modèle est basé essentiellement sur le modèle de Stefan où l'équation de chaleur est définie en chaque phase avec la prise en considération de la température de fusion/solidification et la condition de Stefan en niveau d'interface. Notre objectif consiste à simuler le problème de Stefan (équations aux dérivées partielles avec de frontières mobiles) en utilisant la méthode des lignes combinée avec la méthode d'immobilisation de la frontière.

Ainsi, nous avons organisé notre mémoire comme suit :

- Le chapitre 1, porte sur des généralités sur les Systèmes à Paramètres Répartis (SPR), et les différents types de commandes et observations possibles. Ensuite nous intéressent à la classification des systèmes à paramètres répartis établie sur la base des équations aux dérivées partielles (EDP) de deuxième ordre qui modélise une grande partie des systèmes physiques.

- Le chapitre 2, présente les concepts généraux de la méthode des lignes, et on s'intéresse aussi dans ce chapitre à la méthode des différences finies illustrée par un exemple d'application.

Introduction générale

- Le chapitre 3, est consacré à la modélisation d'un transfert de chaleur par conduction dans une tige. Nous commençons par la présentation des différents modes de transfert de chaleur, puis nous intéressons à la modélisation du problème du Stefan qui est une modélisation du phénomène de diffusion de la chaleur.

- Le chapitre 4, est dédié à la simulation du problème de Stefan en utilisant la méthode d'immobilisation de la frontière et la méthode des lignes.

Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion générale récapitulant nos principaux résultats et quelques perspectives de continuité.

CHAPITRE 1 :
GÉNÉRALITÉS SUR LES
SYSTÈMES À PARAMÈTRES
REPARTIS

1.1.Introduction :

La dynamique de nombreux systèmes physiques est décrite par des équations aux dérivées partielles. Ces systèmes sont appelés Systèmes à Paramètres Répartis (SPR) dénommés aussi systèmes à paramètre distribués. La complexité de ces systèmes a entraîné le développement d'outils théoriques qui permettent d'analyser leurs propriétés et de synthétiser des outils de surveillance et de commande adaptés. Les systèmes à paramètres répartis concernent un large spectre d'applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur, dont notamment :

- La thermique, où les phénomènes de diffusion, de conduction et de convection font souvent de la température une variable distribuée ;
- L'électromagnétisme, où les équations de Maxwell régissent la propagation des ondes.
- De nombreuses applications industrielles y sont rattachées (les hautes fréquences et leurs applications en télécommunications, radio, TV, radar ; les circuits électroniques et leurs composants...)
- La mécanique des fluides et ses applications à l'aérodynamique, aux turbo-machines, aux échangeurs de chaleurs, aux réacteurs thermiques, mais aussi aux procédés chimiques.

L'étude des systèmes à paramètres répartis (SPR) a connu un regain d'intérêt de la part de la communauté scientifique lors de ces dernières années, notamment en ce qui concerne ses applications en régulation des systèmes. Il y a plusieurs raisons à cela : tout d'abord, de nombreux procédés ayant des applications industrielles essentielles sont, à la base, des systèmes à paramètres répartis et la nécessité de les placer dans les meilleures conditions opératoires possibles incitent à prendre en compte leur caractère distribué afin d'améliorer leur efficacité. Ensuite, les aspects numériques liés à l'approximation des équations aux dérivées partielles (EDP) (qui décrivent typiquement les SPR) et à leur résolution sont mieux compris, et de plus en plus de logiciels de simulation numérique sont disponibles sur le marché, facilitant l'usage et l'exploitation des EDP. Enfin, la théorie des systèmes à paramètres répartis a été particulièrement développée ces dernières décennies, produisant des résultats applicables à la régulation des systèmes.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les hypothèses et les outils mathématiques ainsi le type de commande et d'observation et la classification des systèmes à paramètre répartis (SPR).

1.2. Définition des systèmes à paramètres répartis :

Un système à paramètres répartis est un système à variables spatio-temporelles ; car ses variables ne dépendent pas seulement du temps mais aussi de leurs coordonnées spatiales, et les variables spatiales peuvent être mono ou multidimensionnelles.

1.3. Définition mathématique d'un SPR :

Pour l'analyse des systèmes à paramètres répartis (SPR) : une étude peut être basée sur un modèle de dimension infinie décrit par des Equations aux Dérivées Partielles (EDP). Les systèmes aux EDP sont représentés dans des espaces fonctionnels de dimension infinie. En effet, les concentrations en composants et en biomasse, ainsi que la température, n'y sont généralement pas uniformes, car elles sont affectées par des phénomènes de transport (diffusion et/ou convection). C'est pourquoi la dynamique des SPR n'est pas décrite par des EDO (équations aux dérivées ordinaires), mais par des équations aux dérivées partielles (faisant intervenir à la fois dérivées spatiales et temporelles).

1.4. Représentation mathématique des systèmes à paramètres répartis:

D'une façon générale, on peut décrire les systèmes à paramètres répartis (SPR) par les données suivantes [1] :

- Un domaine géométrique Ω borné de R^n , de frontière $F_r \Omega (\partial\Omega)$.
- Un intervalle de temps $t =]0, t_f[$.

On considère la classe des systèmes définie par l'équation d'évolution à l'intérieur du domaine $\Omega \times]0, t_f[$ suivante :

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = Mx(z, t) + H(z)u(z, t) \quad (1.1)$$

Sur un domaine spatial Ω tel que :

$$z \in \Omega \subset R$$

Et un domaine temporel :

$$t \in \mathbb{R}$$

Soit $x_0 = x(z, t_0)$ l'état initial.

Les conditions aux limites établissant les relations entre l'état et la commande aux limites doivent aussi être fixées sur la frontière de Ω :

$$L[x(z', t)] = u_1(z', t)z' \in F_r(\Omega) \text{ ou bien } \partial\Omega \quad (1.2)$$

M, H et L sont des opérateurs matriciels différentiels agissant sur le vecteur d'état x , ne comportant que des dérivées par rapport à z .

L'état x du système est représenté par la fonction vectorielle :

$$x(z, t) = \begin{bmatrix} x_1(z, t) \\ x_2(z, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(z, t) \end{bmatrix}$$

Les variables $u(z, t)$ et $u_1(z', t)$ sont les entrées ou commandes du système.

1.5. Conditions aux limites :

En mathématiques, une **condition aux limites** est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière.

Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du nombre de variables misent en jeu, et (de manière plus importante) de la nature de l'équation, parmi lesquelles on peut citer les plus rencontrées [2] :

- Condition aux limites de Dirichlet.
- Condition aux limites de Neumann.
- Condition aux limites de Fourier (ou robin).
- Condition aux limites de mixtes.

- Condition aux limites de Danckaerts.

Pour illustrer les conditions aux limites citées ci-dessus, on prend pour exemple une barre métallique, assimilée à un segment de droite de longueur L , en négligeant la variation de la température dans les autres dimensions de la barre.

1.5.1 Conditions aux limites de Dirichlet :

Considérons les extrémités de la barre métallique fixées à des températures données $T_0(t), T_1(t)$.

On aura :

$$T(0, t) = T_0 \quad (1.3)$$

$$T(l, t) = T_1(t) \quad (1.4)$$

Les conditions aux limites de Dirichlet sont les conditions les plus faciles à comprendre.

1.5.2. Conditions aux limites de Neumann :

Si le flux de chaleur est donné aux bords, alors dans ce cas c'est le gradient de la température qui sera fixé et on aura les conditions aux limites suivantes :

$$-c \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varphi_0(t) \quad (1.5)$$

$$-c \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=l} = \varphi_1(t) \quad (1.6)$$

Les **conditions aux limites de Dirichlet** et de **Neumann** sont utilisées pour les équations différentielles partielles elliptiques.

1.5.3. Condition aux limites de Robin :

Si on dispose maintenant de la température extérieure $T_{ex}(t)$, alors le gradient de la température (flux de chaleur) sera proportionnel à la différence $(T - T_{ex})$ les conditions aux limites seront donc :

$$-c \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_z = -k(T - T_{ex}) \quad (1.7)$$

En $z = 0$ et $z = l$.

Avec :

k : Constante $\in \mathbb{R}$.

c : Caractérise la diffusion de la chaleur.

z : La frontière du domaine de variation de T .

1.6. Commandes d'un système à paramètres répartis :

Les problèmes de contrôle sont multiples et variés. Ils dépendent à la fois de la nature du système, des contraintes réelles liées à son fonctionnement et à l'objectif visé.

On distingue alors plusieurs types de commandes [3]:

1.6.1. Commandes réparties :

Représentées par les fonctions définies sur $\Omega \times T$; dans de nombreux cas la commande $u(z, t)$ peut-être décomposée comme suit :

$$u(z, t) = q(z).u_e(t) \quad (1.8)$$

$q(z)$: représente la structure géométrique du système d'actionneurs.

$u_e(t)$: représente le signal d'entrée.

Cette formulation permet une simplification de calcul dans la transformation du modèle et la détermination de la commande.

1.6.2. Commande par zone :

Représentées par un ensemble de fonctions définies sur un sous-ensemble de Ω .

Si la commande est appliquée sur p zones, on a dans ce cas :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p q_i(z).u_{ei}(t) \quad (1.9)$$

1.6.3. Commande ponctuelle:

Dans le cas particulier où la zone de commande se réduit à un point situé dans Ω , la fonction $q_i(z)$ est remplacée dans l'équation précédente formellement par l'impulsion de Dirac :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p u_{ei}(t) \cdot \delta(z - z_i) \quad (1.10)$$

1.6.4. Commande par balayage :

Dans ce cas les zones ou/et point d'action sont mobiles dans Ω .

1.6.5. Commande à la frontière :

Définie sur $\partial\Omega \times t$, elle peut être par zone, ponctuelle, fixes ou à balayage.

1.7. Observations d'un système à paramètres répartis :

L'observabilité est une notion très importante dans l'analyse des systèmes. De façon générale, elle peut être vue comme la possibilité que l'on a de reconstruire l'état $x(t)$ du système à partir de sa sortie y et de son entrée u .

Le problème de l'observabilité se pose lorsque certaines variables de l'état $x(t)$ ne sont pas mesurées pour des raisons physiques (manque de capteurs adaptés) ou économiques (capteurs trop coûteux ou de durée de vie trop courte). Il peut alors être utile de les reconstruire (au moyen d'un estimateur d'état) dans un objectif de surveillance ou de commande. Cependant, dans un système non-observable, les mesures dont on dispose sont incapables de rendre compte de l'ensemble de la dynamique interne du système.

Et généralement le vecteur de sortie du système coïncide avec l'ensemble des observations. Par concordance aux commandes exposées ci-dessus, on citera les différents types d'observations [3] :

1.7.1. Observations réparties :

Sur $\Omega \times t$ ou sur un sous-ensemble de $\Omega \times t$.

$$y(z, t) = p(z).x(z, t) \quad (1.11)$$

$p(z)$: représente la structure géométrique du système d'observation.

1.7.2. Observations ponctuelles :

Elles nécessitent de prendre quelques points particuliers z_i sur l'espace Ω sur lesquelles on va définir la sortie comme suit :

$$y(z, t) = \int_{\Omega} x(z, t)\delta(z - z_i)dz = x(z, t) \quad (1.12)$$

1.7.3. Observations par balayage :

Les points d'observations sont mobiles dans Ω .

1.7.4. Observations par moyennage spatial :

Définie par l'équation suivante :

$$y_m(t) = \int_{\Omega} c(z) y(z, t)dz \quad (1.13)$$

$c(z)$: est la structure géométrique des capteurs.

Dans ce cas, le capteur fournit la moyenne de la grandeur sur la totalité du domaine.

1.8. Classification des systèmes à paramètres repartis :

Il existe un très grand nombre d'équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrées en physique comme les équations de chaleur, d'ondes, de Laplace et de poisson. Elles sont linéaire et du deuxième ordre, c'est pour cela les EDP les plus largement utilisées sont celles du second ordre et la fonction inconnu x dépend de deux variables indépendantes z et t , qui peuvent s'écrire dans le cas linéaire sous la forme générale suivante [4] :

$$a \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t \partial z} + c \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + [\dots] = 0 \quad (1.14)$$

Où le terme entre crochets dépend de $T(z, t)$, t , z et des dérivées premières de $T(z, t)$, et les coefficients $(a, b, c) \neq 0$, ils sont supposés constants et indépendants de la variable d'espace z .

Par analogie avec les coniques, l'équation (1.14) est dite :

-parabolique si $b^2 - ac = 0$.

-hyperbolique si $b^2 - ac > 0$.

-elliptique si $b^2 - ac < 0$.

Le choix d'une technique analytique dépend fortement de la nature des EDP. Si les équations ne comportent pas des dérivées partielles du deuxième ordre, le système est dit hyperbolique. Sinon les équations sont classifiées selon la forme caractéristique de l'équation. Dans le cas des systèmes de type convection-diffusion-réaction, les équations sont dites de type parabolique.

Les problèmes stationnaires (indépendant du temps) sont modélisés par des EDP de nature elliptique, tandis que les problèmes dynamiques (d'évolution) sont modélisés par des EDP de nature parabolique ou hyperbolique.

Enfin notons qu'un système dynamique concret est généralement délimité physiquement dans l'espace. La description d'un SPR n'est donc pas complète sans des conditions aux limites. Leur rôle n'est pas seulement d'intégrer au modèle les contraintes physiques auxquelles sont soumises les frontières du système, mais aussi de permettre la résolution des équations : pour cela, elles doivent être en nombre suffisant dépendant de l'ordre des EDP.

1.9. Actionneurs et capteurs des systèmes à paramètres répartis :

Pour un bon fonctionnement d'un système à paramètre répartis, il faut savoir à chaque instant l'état du système et agir par conséquent en fonction de ces informations. Le recueil des informations se fait par l'intermédiaire des capteurs, par contre les actionneurs excitent le système. Ils peuvent être de forme, de nature, et conception différentes [5].

1.9.1. Actionneurs :

Ils permettent d'exciter le système. Les actionneurs rencontrés dans les systèmes physiques, peuvent être de type :

- Ponctuel fixe, tel un brûleur dans un système de diffusion, tel qu'il est montré dans la figure 1.1 :

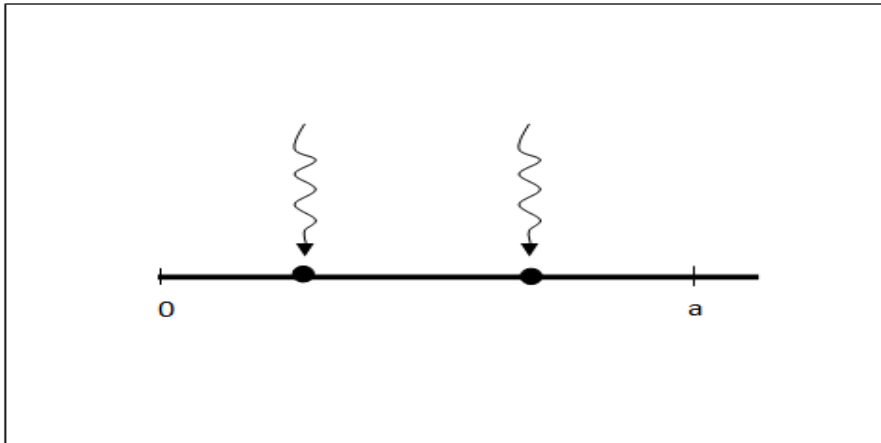


Figure 1.1 Système monodimensionnel excité par deux actionneurs ponctuels.

- Ponctuel mobile : C'est un actionneur dont la position varie avec le temps. On peut citer comme exemple, un système excité par un rayon laser de direction variable.
- Actionneur zone, c'est le cas, par exemple, d'un système de diffusion avec une zone de chauffe importante comme il est représenté dans la figure 1.2 :

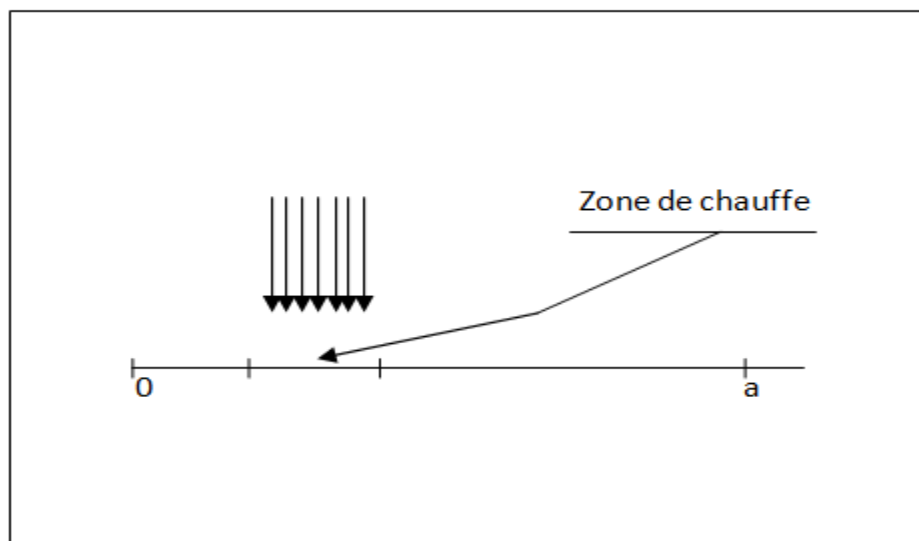


Figure 1.2 Système monodimensionnel excité par un actionneur zone.

- Filament, tel un four chauffé par une résistance électrique comme dans la figure 1.3

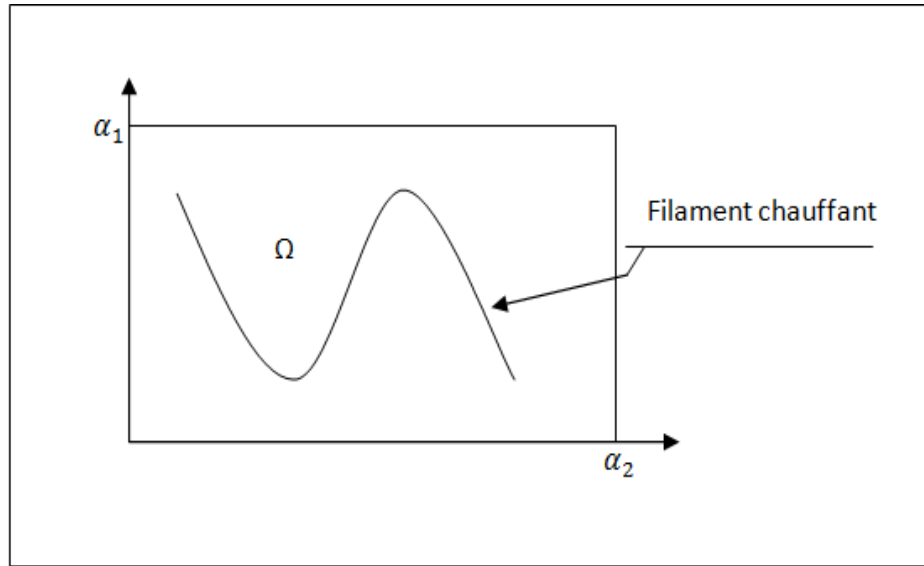


Figure 1.3 système bidimensionnel excité par un actionneur filament.

Ces divers types d'actionneurs peuvent être localisés à l'intérieur du domaine Ω représentant le domaine géométrique du système ou bien sur sa frontière.

1.9.2. Capteurs :

Ils sont les intermédiaires physiques qui permettent de recueillir des informations sur le système et son évolution.

Comme les actionneurs, on peut envisager divers types de capteurs pour les systèmes à paramètres répartis, on cite :

- Dans des zones $D_i \subset \Omega$, ce cas correspond à une lecture directe sur une partie D_i .
- Capteur ponctuel, comme l'exemple d'un thermocouple.
- Capteur suivant une ligne $L_i \subset \Omega$, ce cas est celui d'une lecture d'un miroir pivotant.

1.10. Conclusion :

Dans ce premier chapitre quelques notions de base sur les systèmes à paramètres répartis ont été présentées. Ces dernières ont été limitées à la description mathématique, aux différentes commandes et observations, ainsi qu'aux différents types de conditions aux limites. Pour étudier le comportement d'un SPR, différentes méthodes de transformations existent.

Une des méthodes les plus utilisées, particulièrement pour la simulation, est la méthode des lignes. Cette dernière fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 2 :
MÉTHODE DES LIGNES

2.1.Introduction :

La plupart des phénomènes naturels sont régis par des lois de la physique. Ces lois permettent de relier les grandeurs physiques qui décrivent ces phénomènes, et une résolution de ces équations différentielles devient nécessaire afin de comprendre et d'expliquer ces phénomènes physiques. Les modèles mathématiques des systèmes physiques sont très avantageux car ils permettent de faire l'analyse du comportement des procédés sans avoir à manipuler les grandeurs physiques qui les décrivent.

La résolution des EDP fait appel à plusieurs méthodes numériques, à savoir la méthode des différences finie (MDF), les méthodes des volumes finis (MVF), la méthode des éléments finis (MEF). Sur le plan numérique on étudie les méthodes des différences finies. Dans cette méthode chaque dérivée est approchée par une expression discrète appelée schéma numérique. L'étude se porte alors sur la convergence de ces schémas vers la solution exacte et leur stabilité.

On aboutit à des systèmes d'équations aux dérivées ordinaires (EDO). Les systèmes d'équations obtenues peuvent être résolus à l'aide d'un ordinateur. Cette démarche de résolution du modèle mathématique est appelée simulation numérique du comportement du procédé.

La méthode des lignes est une procédure semi-analytique, est bien connue par les experts en matière de résolution d'équations aux dérivées partielles. Les domaines d'application ont augmenté considérablement ces dernières années.

2.2. Calcul des dérivées finies en utilisant les polynômes de Lagrange :

2.2.1 Définition de la méthode des différences finies :

En mathématiques, et plus précisément en analyse, une différence finie est une expression de la forme $f(\lambda + b) - f(\lambda + a)$. Où f est une fonction numérique ; la même expression divisée par $b - a$ s'appelle un taux d'accroissement (ou *taux de variation*), et il est possible, plus généralement, de définir de même des différences divisées. L'approximation des dérivées par des différences finies joue un rôle central dans les méthodes des différences

finies utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles, tout particulièrement pour les problèmes de conditions aux limites [6].

2.2.2. Pratique de la méthode aux différences finies :

Dans le domaine de l'analyse numérique on peut être amené à rechercher la solution d'une équation aux dérivées partielles. Parmi les méthodes de résolution couramment utilisées, la méthode aux différences finies est la plus facile, puisqu'elle repose sur deux notions :

- La discrétisation des opérateurs dérivation/différentiation (assez intuitive) par différences finies d'une part.

- Et la convergence du schéma numérique ainsi obtenue d'autre part.

La méthode aux différences finies fournit une approximation de la solution en un nombre fini du domaine Ω . Pour cela on commence par établir un maillage (pas de discrétisation) uniforme de l'espace, de même pas Δz sur Ω (il est parfois utile de considérer des maillages non uniformes).

2.2.3. Schéma numérique:

Un schéma numérique peut être défini comme la formulation algébrique d'un problème discret conçu à l'aide de la méthode des différences finies. La démarche comprend les étapes suivantes :

- Choisir les opérateurs discrets qui sont des approximations des opérateurs différentiels de la formulation exacte.
- Générer un maillage du domaine de définition en étant attentif aux nœuds frontières et à la manière de traduire les conditions aux limites.
- En se fondant sur les expressions issues des opérateurs discrets, établir les relations liant les valeurs des fonctions aux nœuds du maillage (les inconnues).
- S'assurer que l'ensemble des inconnues et des relations qui les relient constitue un problème numérique qui ne soit pas sur- ou sous-déterminé. Cette vérification est une condition minimale pour espérer trouver une solution, mais elle ne donne aucune garantie sur la convergence globale.

Une fois que le schéma numérique est établi et que le problème discret est formulé, il s'agit non seulement de le résoudre, mais encore de s'assurer que la solution discrète converge vers la solution exacte lorsque les pas du maillage tendent vers 0.

Pour certains schémas dits *explicites*, il est possible d'ordonner les inconnues de telle sorte que chacune d'elle puisse être déterminée récursivement à partir des précédentes qui sont supposées être déjà calculées (matrice triangulaire). Pour les schémas *implicites*, il est parfois possible d'éviter de résoudre l'ensemble du système de toutes les équations. C'est en particulier le cas pour un système évolutif dont l'état, caractérisé par des variables spatiales, est défini par des conditions initiales ($t = 0$), puis évolue progressivement au cours du temps : le schéma numérique reste *explicite* dans la variable temporelle et son caractère *implicite* ne concerne que les variables spatiales.

Dans tous les cas, chaque équation du schéma numérique ne concerne qu'un petit nombre d'inconnus. Dans un environnement linéaire, cette propriété conduit à formuler le problème discret à l'aide de matrices creuses et à en tirer profit pour le résoudre en utilisant des méthodes appropriées.

La résolution des schémas numériques s'appuie en général sur des méthodes algébriques classiques. Cependant d'autres formulations équivalentes peuvent faire appel à des méthodes d'optimisation.

2.2.4. Polynômes de Lagrange :

Le calcul analytique d'une dérivée d'une fonction $f(\lambda)$ peut se faire quelque soit la complexité de la fonction. Le problème se pose lorsque la fonction $f(\lambda)$ est connue numériquement (pas d'expression analytique). Pour cela on utilise les valeurs de $f(\lambda)$ pour calculer les dérivées $f^{(n)}(\lambda)$ en utilisant certaines formules appelées schémas de dérivations.

Pour déterminer la dérivée numérique, on peut utiliser la méthode d'interpolation de Lagrange [7].

2.2.4.1. Interpolation de Lagrange :

Les fonctions les plus faciles à évaluer numériquement sont les polynômes. Il est donc important de savoir approximer une fonction arbitraire par des polynômes. Dans ce cas, l'un des outils de base est la méthode d'interpolation de Lagrange.

Les polynômes de Lagrange, permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points. Les polynômes de Lagrange associés à ces Points sont les polynômes définis par :

$$L_i(\lambda) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (2.1)$$

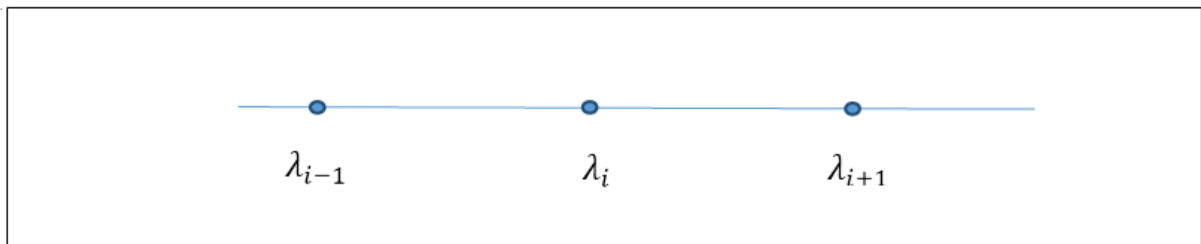


Figure 2.1 Représentation des trois points utilisés pour calculer le polynôme de Lagrange.

2.2.4.2. Calcule des dérivés utilisant les polynômes de Lagrange :

Pour applique cette méthode, on doit choisir les points à utiliser pour calculer la dérivée. Puis on détermine le polynôme de Lagrange qui passe par les trois points.

$$P(\lambda) = f(\lambda_{i-1}) \frac{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i+1})}{(\lambda_{i-1} - \lambda_i)(\lambda_{i-1} - \lambda_{i+1})} + f(\lambda_i) \frac{(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i+1})}{(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})} + f(\lambda_{i+1}) \frac{(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_i)}{(\lambda_{i+1} - \lambda_{i-1})(\lambda_{i+1} - \lambda_i)} \quad (2.2)$$

En considérant $\Delta\lambda = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ est constant, il vient

$$P(\lambda) = f(\lambda_{i-1}) \frac{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_{i-1})}{2\Delta\lambda^2} - f(\lambda_i) \frac{(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_{i+1})}{\Delta\lambda} + f(\lambda_{i+1}) \frac{(\lambda - \lambda_{i-1})(\lambda - \lambda_i)}{2\Delta\lambda^2} \quad (2.3)$$

Le calcul de la première dérivée donne

$$f'(\lambda_i) = P'(\lambda_i)$$

$$P'(\lambda) = f(\lambda_{i-1}) \frac{(2\lambda - \lambda_i - \lambda_{i+1})}{2\Delta\lambda^2} - f(\lambda_i) \frac{(2\lambda - \lambda_{i-1} - \lambda_{i+1})}{\Delta\lambda^2} + f(\lambda_{i+1}) \frac{(2\lambda - \lambda_{i-1} - \lambda_i)}{2\Delta\lambda^2} \quad (2.4)$$

$$P'(\lambda) = f(\lambda_{i-1}) \frac{\Delta\lambda}{2\Delta\lambda^2} - f(\lambda_i) \frac{0}{\Delta\lambda^2} + f(\lambda_{i+1}) \frac{\Delta\lambda}{2\Delta\lambda^2}. \quad (2.5)$$

Ainsi, la valeur de la dérivée de f en point λ_i est

$$f'(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_{i+1}) - f(\lambda_{i-1})}{2\Delta\lambda}. \quad (2.6)$$

Cette formule représente un schéma des différences finies centrées. Pour déterminer le schéma des différences finies arrière (respectivement avant) en utilise un seul point en arrière (respectivement en avant).

$$f'(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})}{\Delta\lambda^2} \quad (2.7)$$

$$f'(\lambda_i) = P'(\lambda_i) = \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_{i+1})}{\Delta\lambda^2} \quad (2.8)$$

2.2.5. Méthode d'approximation aux différences finies :

Il existe plusieurs méthodes d'approximation aux différences finis (méthodes de discrétisation).

Ces méthodes permettent d'approximer le modèle initial, tout en conservant au mieux les propriétés essentielles du système initial

En distingue généralement deux types de discrétisation :

- **Discrétisation totale :**

Dans cette approximation les domaines d'espace de temps sont les deux discrétisés, on obtient dans ce cas une solution très précise du système initial.

- **Semi-discrétisation (méthode des lignes) :**

Pour cette approche l'un des domaines d'espace ou du temps est discrétisé. On obtient un système d'équations différentielles ordinaires d'autant plus élevé que la discrétisation plus fine.

2.3. Méthode des lignes :

2.3.1. Définition de la méthode des lignes :

La méthode des lignes se réfère le plus souvent à la construction ou l'analyse des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles dont le principe consiste à discrétiser les dérivées spatiales seulement et laissant le temps comme variable continue. Cela conduit à un système d'équations différentielles ordinaires, une méthode numérique pour les équations ordinaires de valeur initiale peut être appliquée [8].

De plus elle est bien adaptée pour tous type de systèmes hyperboliques ou paraboliques, et permet de valider le modèle approximé obtenu par d'autres techniques d'approximation des SPR [9].

Le principe de la méthode des lignes consiste à discrétiser le domaine spatiale Ω en introduisant un pas d'espace $\Delta z = \frac{L}{N+1} > 0$, ou N est un entier positif représentant le nombre de point de discrétisation.

2.3.2. Base de la méthode des lignes :

L'idée de base de la méthode des lignes est de remplacer les dérivées spatiales dans l'EDP par des approximations algébriques.

Dans ce cas les dérivées spatiales ne sont expressément plus indiquées en termes de variables spatiales indépendantes mais seulement en termes de variable temporelle. En d'autres termes, avec seulement une variable indépendante restante, nous avons un système d'équation aux dérivées ordinaires qui approchent ou approximent l'EDP initiale.

L'enjeu est alors de préparer le système rapprochant les équations aux dérivées partielles. Une fois que ceci est fait, nous pouvons appliquer n'importe quel algorithme d'intégration numérique pour calculer une solution numérique approximative pour l'EDP que les équations aux dérivées ordinaires munies des conditions initiales.

2.3.3. Propriétés et utilisation de la méthode des lignes :

La méthode des lignes a les propriétés suivantes qui justifient son utilisation [10] :

- *Efficacité de calcul :*

Le caractère semi-analytique de la formulation mène à un algorithme simple et compact, qui fournit des solutions précises avec moins d'effort de calcul que d'autres techniques.

- *Stabilité numérique :*

En séparant la discrétisation du temps et l'espace, il est facile d'assurer la stabilité et la convergence pour un large éventail de problèmes.

- *Effort réduit :*

En se servant des solveurs de problèmes d'EDO de pointe, l'effort de programmation peut être réduit.

- *Temps de calcul réduit :*

Puisque seulement une petite quantité de lignes de discrétisation est nécessaire calcul, il n'y a aucune nécessité de résoudre un grand système d'équation; par conséquent la durée de calcul est petite.

2.3.4. Application de la méthode des lignes :

Pour appliquer la méthode des lignes, on a les cinq règles suivantes [11] :

- Division du domaine des solutions en couches.
- Discrétisation de l'équation dans un sens du même rang.
- Transformation pour obtenir des équations ordinaires découplées.
- Transformation et introduction des conditions aux limites.
- Résolution des équations.

2.4. Exemple illustratif :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (2.10)$$

$$z \in [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_0(t) = T(0, t) = 25 \\ T_l(t) = T(l, t) = 50 \end{cases}$$

Et la condition initiale :

$$T(0) = 0$$

Un tel problème est appelé problème aux limites car la fonction inconnue (2.10) doit satisfaire les conditions aux limites posées à la frontière de l'intervalle sur lequel l'équation différentielle doit être satisfaite.

Décomposons le domaine d'espace en intervalles égaux correspondant à un pas de discrétisation $\Delta z = \frac{1}{N}$.

➤ **Discrétisation de la première dérivée :**

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2 \Delta z} \quad (2.11)$$

➤ **Discrétisation de la deuxième dérivée :**

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)}{\Delta z^2} \quad (2.13)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{T}_i(t) &= \frac{1}{\Delta z^2} [T_{i+1}(t) - 2T_i(t) + T_{i-1}(t)] \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

On aura :

$$\begin{aligned} \dot{T}_1(t) &= \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta z^2} \\ \dot{T}_2(t) &= \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta z^2} \\ \dot{T}_3(t) &= \frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{\Delta z^2} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \dot{T}_{N-1}(t) &= \frac{T_N - 2T_{N-1} + T_{N-2}}{\Delta z^2} \\ \dot{T}_N(t) &= \frac{T_{N+1} - 2T_N + T_{N-1}}{\Delta z^2} \end{aligned}$$

Soit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \\ \dot{T}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{T}_{N-1} \\ \dot{T}_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta z^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta z^2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{\Delta z^2} \end{bmatrix} T_1 \quad (2.14)$$

La matrice dynamique obtenue par ce schéma de discrétisation est tri diagonale symétrique.

Maintenant en considérant les conditions initiales, on peut résoudre par une méthode d'intégrations aux dérivées ordinaires.

2.5. Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté des généralités et des notion de base de la méthode des lignes, le principe de la méthode de lignes consiste à discrétiser les EDP qui représentent un système de dimension infinie (décomposition du domaine d'espace seulement). Cette semi-discrétisation conduit à des systèmes de dimension qui peut être élevée mais reste finie.

La discrétisation des systèmes par la méthode des lignes en utilisant les différences finies permet d'avoir une très bonne précision si le nombre de points de discrétisation est grand.

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation du problème de Stefan.

CHAPITRE 3 :
MODÉLISATION DU
PROBLÈME DE STEFAN

3.1. Introduction :

La désignation du problème de Stefan ne concernait, dans un premier temps, que les problèmes de conduction de la chaleur avec changement de phase liquide/solide.

Actuellement, cette appellation englobe tous les problèmes de diffusion dans un domaine déformable qui est désigné également par problèmes à frontières libres ou mobiles.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la modélisation du problème de Stefan, qui est une modélisation mathématique simplifiée de phénomène de changement de phase.

3.2. Modélisation d'un processus :

La modélisation est un élément fondamental de la démarche scientifique en particulier en physique et en chimie. Les modèles permettent de représenter sous forme simplifié un système ou un phénomène afin de le décrire de l'expliquer ou de prédire certains aspects.

Modéliser un processus, c'est le décrire de manière scientifique, quantitative, par exemple en termes d'équations (physique, chimique...etc.). Cela permet d'en étudier l'évolution, d'en simuler des variantes en modifiant certains paramètres.

3.3. Notion de chaleur :

Il s'agit de l'énergie transmise entre deux régions d'un même milieu ou entre deux milieux en contact. Cette énergie est transférée sous forme thermique, car en négligeant les dilatations, il n'y a pas de mouvements macroscopique, donc pas d'énergie propagée sous forme ordonnée de travail mécanique.

3.4. Présentation des mécanismes de transfert thermique :

Le transfert de la chaleur comprend l'ensemble des moyens de transport de la chaleur. Le transport d'une énergie telle que la chaleur peut se faire via différents support matériels ou immatériels. La méthode de transfert de la chaleur est directement liée au support, nous pourrons ainsi déterminer l'étendue des méthodes de transfert thermique ou de la chaleur qui peut s'effectuer suivant trois processus : *conduction, convection et rayonnement* [12].

3.4.1. Conduction : la chaleur et les solides

Il s'agit d'un monde de transfert dans lequel il n'y a pas de mouvement de matière ou de particules, celle-ci étant maintenues par les fortes liaisons correspondantes à l'état (solide) du milieu. La chaleur se répand à l'élément voisin (entre deux régions d'un même milieu, ou entre deux milieux en contact) en allant de l'élément le plus chaud au plus froid sous l'influence d'un gradient de température.

Ce phénomène a également lieu dans les milieux fluides mais il est généralement négligeable par rapport à la convection.

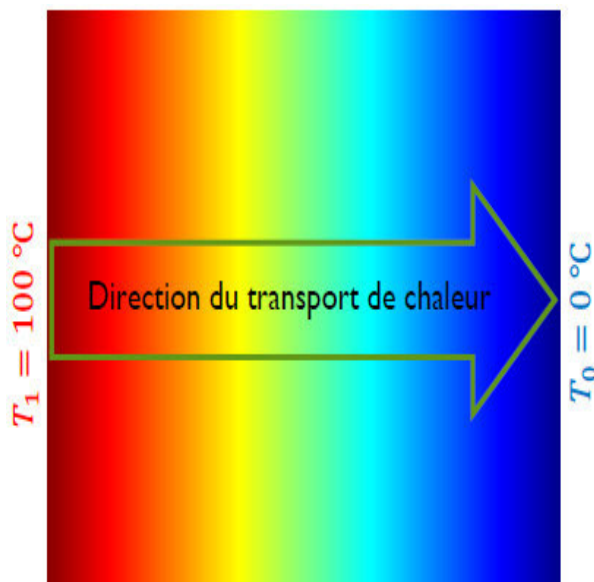


Figure 3.1 Schéma de la conductivité.



Figure 3.2 Conductivité d'une pièce.

On met ainsi en évidence les conditions d'existence de ce phénomène, il nous faut donc :

- Un milieu solide ou fluide
 - Une différence de température en deux régions de notre milieu
- Ou
- Un ensemble de milieux solide ou fluide en contact
 - Une différence de température en deux nos milieu.

3.4.2. Convection : la chaleur et les fluides

Dans un milieu fluide (liquide ou gaz incompressible), la chaleur se propage par le biais d'un mécanisme appelé « convection ». Ce mode de transfert impose un déplacement de matière dans le milieu considéré, ainsi les particules les plus chaudes s'élèvent et entraînent les plus froides vers le bas (s'éloignent de la source et les plus froides sont dirigées vers la source entraînées par le mouvement des plus chaudes.)

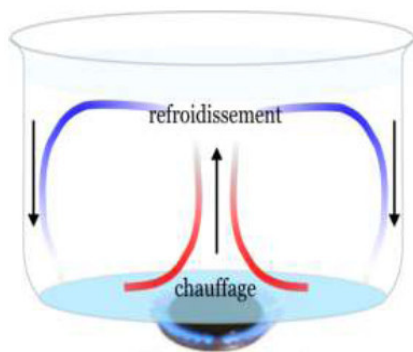


Figure 3.3 Convection dans une casserole d'eau marine.

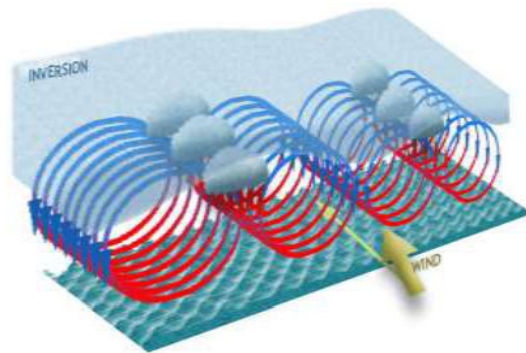


Figure 3.4 Convection dans l'air.

Exemple de la casserole d'eau :

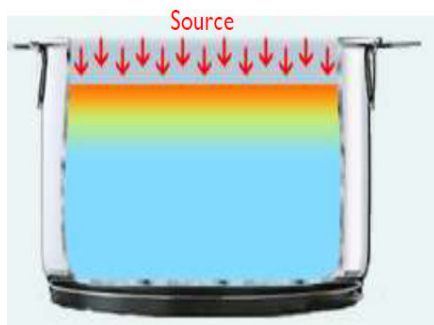


Figure 3.5 Conduction dans la casserole.

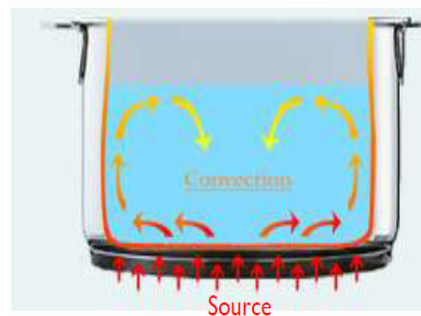


Figure 3.6 Convection dans la casserole.

3.4.3. Rayonnement ou radiation :

Le rayonnement est un transfert de chaleur entre deux corps, séparés par du vide ou un milieu transparent, par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques. Nous considérerons que les corps solides opaques au rayonnement.

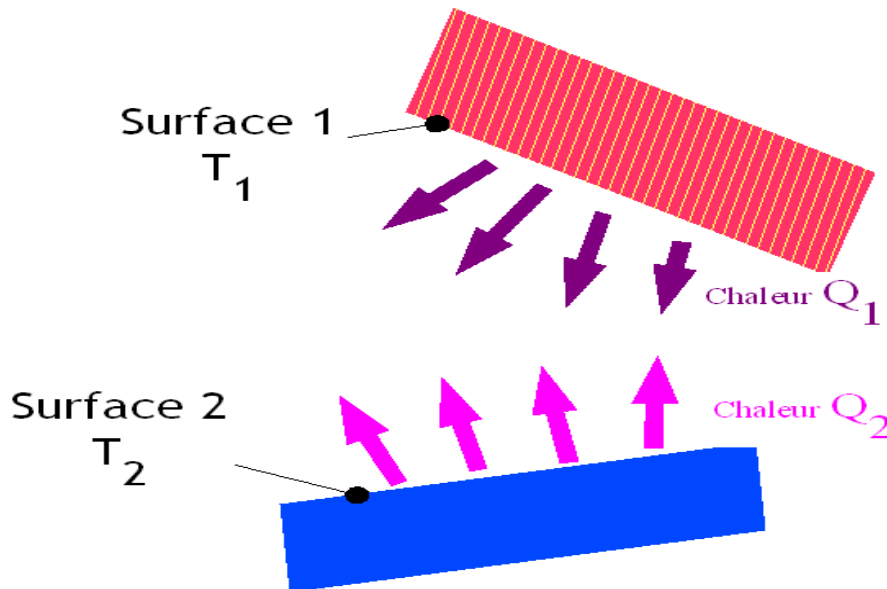


Figure 3.7 Représentation schématique du transfert thermique par rayonnement.

On distingue différents mécanismes de transferts de chaleur conduction/ convection / rayonnement. Nous allons plus précisément étudier dans ce chapitre la "conduction". La chaleur fournie à un endroit du corps est propagée de proche en proche dans le corps. Dans le cas du gaz, nous avons vu qu'il s'agissait de chocs entre molécules, dans le cas du solide, de vibrations des atomes. Lorsque l'on examine les choses à une échelle bien plus grande que l'écart entre les molécules et que le milieu paraissent continus, la température varie en fonction de la position. On n'a plus d'équilibre dans tous le corps comme dans le cas des systèmes minces.

3.5. Champ de température :

Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température : $T = f(x, y, z, t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température [13].

Nous distinguons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable ou transitoire.

3.6. Gradient de température:

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température [13] :

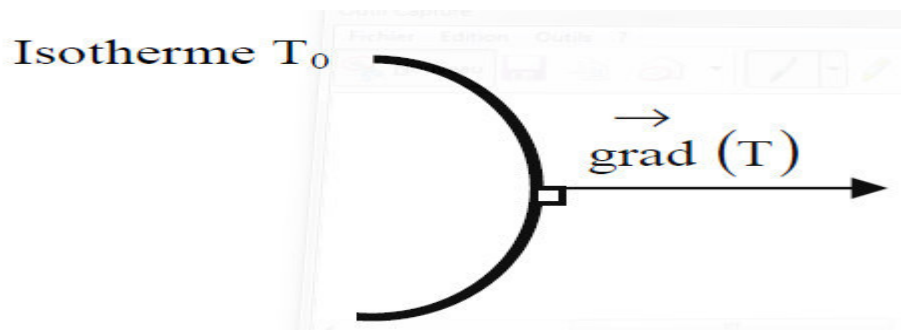


Figure 3.8 Isotherme et gradient thermique.

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.1)$$

Avec :

- \vec{n} : vecteur unitaire de la normale.
- $\frac{\partial T}{\partial n}$: dérivée de la température le long de la normale.

3.7. Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.2)$$

Où :

- A est l'aire de la surface (m^2).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface A par unité de temps :

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.3)$$

3.8. Diffusion de chaleur par conduction :

Le transfert de chaleur par conduction prend lieu dans les solides et les fluides au repos.

Sa modélisation a été pour la première fois abordée par «J. Fourier» dans son «traité analytique de la chaleur».

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température [13] :

$$\vec{\varphi} = -k A \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (3.4)$$

Ou sous forme algébrique :

$$\vec{\varphi} = -k A \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.5)$$

Avec :

- φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W).
- k : Conductivité thermique du milieu ($W m^{-1} K^{-1}$).
- z : Variable d'espace dans la direction du flux (m).
- A : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

3.9. Problème de Stefan :

Le modèle le plus simple des phénomènes de changements de phase est le problème classique de Stefan ou problème à frontière mobile. La formulation de Stefan d'un problème de changement de phase liquide solide se fonde sur l'écriture de l'équation de diffusion de l'énergie par conduction (dite formulation de Stefan à deux phases) dans chacune des phases,

c'est-à-dire une modélisation mathématique simplifiée de phénomènes de changement de phase [14].

Dans le cas monodimensionnel, les équations aux dérivées partielles régissant la conduction thermique dans les deux phases s'écrivent :

➤ Dans la phase solide :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha_s \frac{\partial T^2(z, t)}{\partial z^2}, \quad T < T_F \quad (3.6)$$

➤ Dans la phase liquide :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha_l \frac{\partial T^2(z, t)}{\partial z^2}, \quad T > T_F \quad (3.7)$$

Telle que α représente la diffusivité thermique et s'écrit en fonction de la conductivité du matériau $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$. Les indices **s** et **l** représentent les phases solide et liquide respectivement.

Ou :

- ρ : Densité du liquide ($kg \cdot m^{-3}$).
- C_p : La chaleur spécifique du matériau ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$).
- k : Conduction thermique du matériau .

3.10. Modélisation du problème de Stefan :

3.10.1. Équation de chaleur :

L'équation de la chaleur caractérise l'évolution de la température dans un corps solide ou fluide en fonction de deux variables, le temps t et de l'espace z , décrite par une équation aux dérivées partielles parabolique [15].

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial T^2(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.8)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}, \quad 0 \leq z \leq l(t) \leq L.$$

Équation (3.8) se produit dans la théorie du flux de chaleur qui est, la chaleur transférée par conduction dans une tige. La fonction $T(z, t)$ représente la température a un point z le long de la tige à l'instant t .

Même si nous avons à faire de nombreuses hypothèses simplificatrices, il est intéressant de voir comment l'équation tel que (3.8) est obtenue.

Alors pour la modélisation de cette dernière, nous considérons un domaine Ω de l'espace à N dimensions (noté R^n avec $N \neq 0$).

Supposons une tige mince circulaire d'une longueur L a une surface de section transversale A et coïncide avec l'axe des z sur l'intervalle $[0, L]$ Figure 3.9.

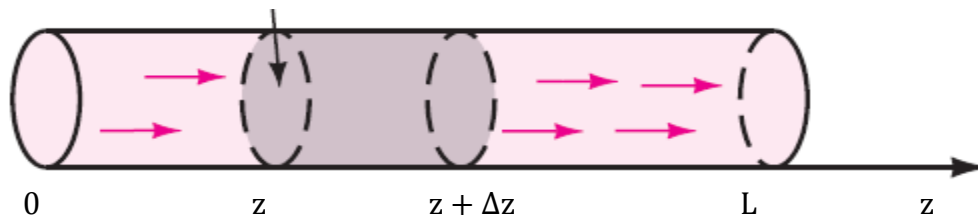


Figure 3.9 Unidimensionnel le flux de chaleur.

3.10.1.1. Hypothèses :

Plusieurs hypothèses simplificatrices sont utilisées pour modéliser l'évolution de la température dans la tige:

- Le flux de chaleur est négligé dans les directions x , .
- La barre est supposé isolée pas de changement de température avec l'environnement.
- La barre ne produit pas de chaleur.
- La masse volumique ρ est constante.
- La chaleur spécifique c_p et la conduction thermique k du matériau sont constantes.

3.10.1.2. Lois physiques :

L'étude de certains phénomènes physiques, biologiques, chimiques, mécaniques, etc., se ramène à l'étude des relations qui existent entre les variables caractérisant le phénomène étudié.

Pour déterminer l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la température $T(z, t)$

Nous avons besoin de deux lois empiriques de conduction de la chaleur :

- ✓ La quantité de chaleur Q dans un élément de masse m est :

$$Q = c_p m T \quad (3.9)$$

T : Température de l'élément.

- ✓ Le flux de chaleur $\frac{\partial Q}{\partial t}$ à travers la surface indiqué sur la figure 3.11 est proportionnelle à la surface A et à la dérivée de la température par rapport à z .

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.10)$$

Comme le flux de chaleur circule dans le sens de la diminution de la température, le signe moins dans l'équation précédente est utilisé pour garantir que le flux φ est positif pour $T < 0$ (le flux de chaleur vers la droite), et négatif pour $T > 0$ (le flux de chaleur vers la gauche).

$$\frac{\partial Q}{\partial t} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial z} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la température diminue.}$$

3.10.1.3. La modélisation :

Si la portion de la tige indiquée dans la figure 3.9 entre z et $z + \Delta z$ est très mince, alors $T(z, t)$ peut être considérée comme la température approximative à chaque point dans l'intervalle. Maintenant, on aura :

- ✓ la masse de l'élément est :

$$m = \rho \cdot (A) \cdot (z + \Delta z - z) \quad (3.11)$$

Après simplification on aura :

$$m = \rho(A \Delta z) \quad (3.12)$$

✓ Le flux de chaleur dans la direction positive de z :

Lorsque les flux de chaleur sont dans le sens des z positifs, nous remarquons à partir de l'équation de (3.5) que :

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} = \left[-kA \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right] - \left[-kA \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \right] = kA \left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \right] \quad (3.13)$$

On a :

$$Q = C_p m T$$

En remplaçant m par sa valeur on obtient :

$$Q = C_p \rho A \Delta z T \quad (3.14)$$

En calculant la dérivée de la quantité de chaleur (3.14) de l'élément de masse m on aura :

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} = C_p \rho A \Delta z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.15)$$

En remplaçant (3.13) dans (3.15) :

$$kA \left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \right] = C_p \rho A \Delta z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.16)$$

D'après l'équation (3.16) et comme la surface (A) est la même alors elle va se simplifier, et on va faire sortir $\frac{\partial T}{\partial z}$ (la dérivée de la température par rapport à z) on aura donc l'équation (3.17) :

$$\frac{k}{C_p \rho} \frac{\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial T(z + \Delta z, t)}{\partial z} \right]}{\Delta z} = \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.17)$$

Enfin, en prenant la limite $\Delta z \rightarrow 0$ on aura alors l'équation suivante :

$$\frac{k}{C_p \rho} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\Delta z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.18)$$

Posons :

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \text{ (la diffusivité thermique).}$$

Nous obtenons l'équation finale (3.19) suivante:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (3.19)$$

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles. Elle dépend de deux variables, z et t sont toutes les deux indépendantes.

Pour la résolution il faut ajouter à cette équation qui est valable dans le domaine Ω , une relation appelée conditions aux limites, qui indique ce qui se passe aux frontières $\partial\Omega$ du domaine, et une autre relation qui indique quel est l'état initial de la température. Par convention, nous choisissons l'instant $t = 0$ pour être le temps initial, et nous choisissons une condition initiale. Maintenons la température constante aux extrémités T_1 et T_2 , la température vérifie les conditions de Dirichlet.

Les conditions aux limites sont :

$$T(0, t) = T_1$$

$$T(l, t) = T_2$$

La condition initiale est :

$$T(z, 0) = T_0(x)$$

En rassemblant à la fin l'équation avec ces conditions (les conditions aux limites et la condition initiale), nous aurons l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} &= 0 \\ T(0, t) &= T_1 \\ T(l, t) &= T_2 \\ T(z, 0) &= T_0(x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avec :

$T(z, t)$ est la température dans la tige en un point donné de l'axe z à un instant donné t .

Le problème (3.20) est constitué d'une équation aux dérivées partielles munies de conditions aux limites et d'une condition initiale.

3.10.2. Equation de fusion :

Comme la position de l'interface est inconnue. Nous avons besoin d'une condition supplémentaire. Cette condition se détermine à partir de la physique de la phase de transition. La quantité de chaleur latente spécifique libérée pendant la phase de transition du liquide au solide doit être considérée lorsque la phase solide se fond [16], comme le montre la figure 3.10.

Comme l'interface liquide-solide se déplace avec une certaine vitesse, le flux de chaleur produit se déplace à la même vitesse, il est ainsi égale au flux de chaleur, puisque nous avons supposé que le solide a une température constante. Au niveau de l'interface, on a l'équation suivante :

$$\rho \Delta H_f \frac{dl}{dt} = -k \frac{\partial T}{\partial z}(l(t), t), \quad l(0) = 0 \quad (3.21)$$

ΔH_f : Chaleur latente $J \cdot kg^{-1}$

Posons $\beta = \rho \Delta H_f$ l'équation (3.21) devient :

$$\beta \frac{dl}{dt} = -k \frac{\partial T}{\partial z}(l(t), t) \quad (3.22)$$

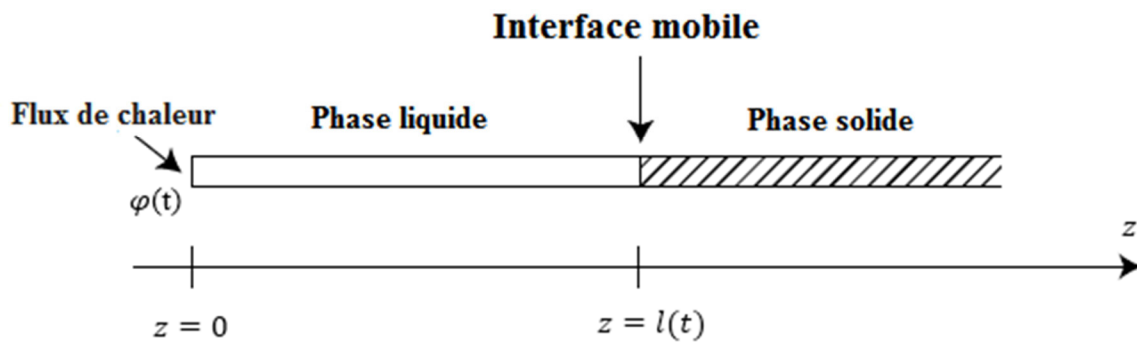


Figure 3.10 Phase liquide régi par une équation de la chaleur non linéaire avec le contrôle de frontière, en contact avec une phase solide infini

3.11. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons modélisé l'évolution de la température une tige métallique, Le problème de Stefan est constitué de deux équations :

Equation de chaleur et équation au niveau de la frontière entre la phase liquide et la phase solide.

L'équation de chaleur linéaire constitue le modèle type de la classe des équations aux dérivées partielles paraboliques qui décrivent, en général, un phénomène de diffusion (conduction). Son analyse mathématique et la compréhension des propriétés qualitatives de ses solutions ont conduit à développer des outils dont l'extension permet de mieux aborder les modèles les plus complexes à appréhender. L'équation de la chaleur est une équation ayant une grande importance dans les sciences de l'ingénieur.

CHAPITRE 4 :

MÉTHODE

D'IMMOBILISATION DE LA

FRONTIÈRE

4.1. Introduction :

L'un des phénomènes physiques important est le changement phase d'un état à un autre (solide – liquide- vapeur), avec absorption ou émission de chaleur.

Ces processus de changement de phases sont souvent rencontrés dans l'industrie. Citons à titre d'exemple, la solidification de l'eau dans les conduites d'un échangeur de chaleur, la solidification des métaux fondus et la cristallisation à partir de la phase liquide.

Le changement d'état liquide-solide d'un matériau pur est caractérisé par la transformation, à température constante, d'une phase liquide en une phase solide ou inversement. Cette réaction réversible s'accompagne d'une consommation (fusion) ou d'une restitution (solidification) d'énergie.

L'objectif du chapitre est de simuler un système dynamique, appelé problème de Stefan, caractérisé par un changement de phase. Dans ce problème, on a une phase solide pour laquelle on applique un flux de chaleur. Dans ce cas, on enclenche un phénomène de fusion, par conséquent on aura deux phases, i.e. liquide-solide, et l'objectif est de suivre l'évolution de la température de la phase liquide et le déplacement de la frontière liquide-solide.

Ce problème est modélisé par un ensemble hybride d'équations différentielles : une équation aux dérivées partielles (équation de chaleur) régissant l'évolution de la température dans la phase liquide, et une équation aux dérivées ordinaires qui caractérise le déplacement de la frontière. Ces deux équations sont couplées. Pour simuler le système, on propose d'utiliser la méthode des lignes après avoir appliquée la méthode d'immobilisation de la frontière.

4.2. Rappel sur le modèle qui est le problème de Stefan

Le problème de Stefan décrit l'évolution en temps d'une interface liquide - solide dans des processus de changement de phase. Le problème consiste à trouver la température et la position de l'interface entre deux phases d'un matériau pur.

4.3. Méthode d'immobilisation de la frontière :

4.3.1. Principe :

La notion d'immobilisation de la frontière est un passage de la frontière mobile à la frontière fixe par une transformation des coordonnées. Cette transformation de coordonnées consiste à définir un nouveau domaine spatial qui représente réellement une normalisation du domaine original.

4.3.2. Application de la méthode d'immobilisation de la frontière au problème de Stefan :

La formulation mathématique du problème de changement de phase est gouvernée par l'équation parabolique de la chaleur. La position du front de fusion ou de solidification (interface solide-liquide), est a priori inconnue, est doit être déterminée comme partie de la solution. En effet, les problèmes de changement de phase sont non-linéaires, ce qui rend l'élaboration de solutions analytiques très délicate.

La mise en équations du problème de transfert de chaleur par conduction en présence d'un front de fusion ou de solidification, s'appuie dans le cas d'un corps pur sur :

- D'une part, sur l'équation de la chaleur dans les phases solide et liquide.
- D'autre part, sur la continuité des flux à l'interface solide-liquide, en posant que la différence entre les flux de part et d'autre de l'interface est égale à la quantité de chaleur instantanée libérée ou absorbée sous forme d'enthalpie de changement d'état par la progression du front.

4.3.3. Mise en équations du problème :

Considérons une portion finie [14] d'un matériau pur de longueur L , qui est initialement à l'état solide. L'application d'un flux de chaleur à gauche de la bande $z = 0$ provoque un processus de fusion qui progresse dans la direction z positive. Ce phénomène est illustré par la figure 3.1

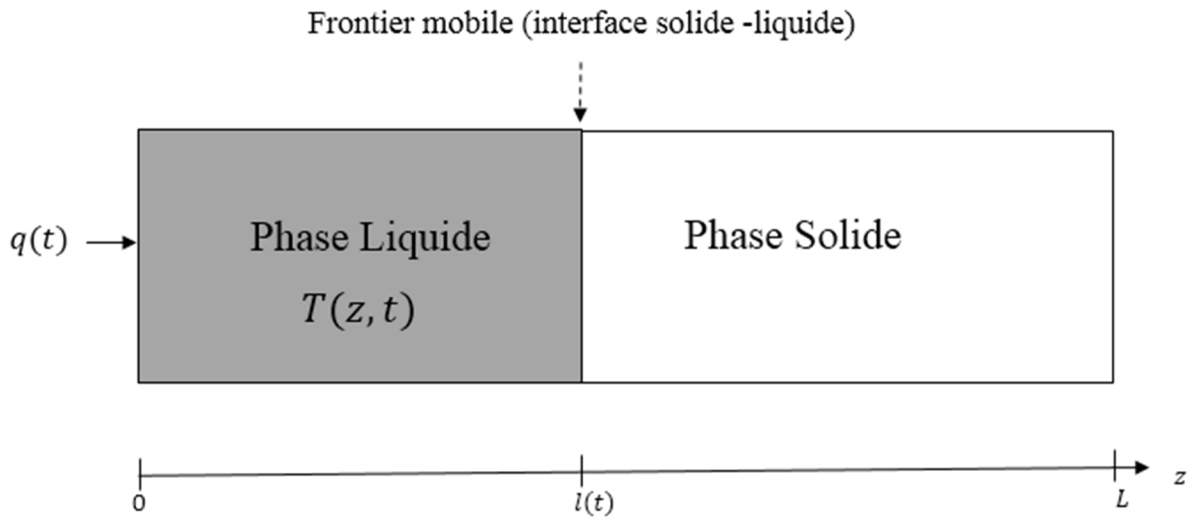


Figure 3.1 Schéma synoptique de la frontière mobil.

La Modélisation de ce processus sur la base de l'équation de la chaleur donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{k}{\rho c_p}, 0 \leq z \leq l(t) \leq L, t \geq 0$$

On dispose par ailleurs des conditions aux limites aux frontières du domaine spatial considéré. Ces conditions peuvent être soit des températures imposées, soit des flux spécifiés. Dans notre cas, on a

$$T(0, t) = q(t) \quad (4.2)$$

$$T(l(t), t) = T_f \quad (4.3)$$

Pour la condition initiales, c'est la distribution des températures à $t = 0$. Dans le cas général, la température initiale est homogène constante est bien définie dans le matériau.

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (4.4)$$

L'application du bilan énergétique à la position de l'interface liquide - solide donne l'équation suivant :

$$\rho \Delta H_f \frac{dl(t)}{dt} = -k \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l(t)} \quad (4.5)$$

Qui décrit le déplacement de la limite de la frontière mobile $z = l(t)$ ou la position de l'interface liquide-solide.

Dans ce modèle, $T(z, t)$ est la température de la phase liquide, $t \in [0, +\infty[$ est la variable temps, z est la variable d'espace et $l(t)$ est la position de la frontière mobile, $q(t)$ est la température appliquée à la frontière pour enclencher le phénomène de fusion, qui est la variable manipulée, $T_0(z)$ est la température de toute la portion à l'état solide. Le paramètre $\rho, c_p, k, \Delta H_f$ et T_f représentent respectivement la densité, capacité calorifique, conductivité thermique, chaleur latente et la température de fusion du matériau.

Dans ce problème la frontière $l(t)$ se déplace. La méthode d'immobilisation de la frontière consiste à fixer la position $l(t)$. Pour cela, on définit les transformations suivant :

$$z^* = \frac{z}{l(t)} \quad (4.6)$$

$$T(z, t) = T^*(z^*, t) \quad (4.7)$$

De l'équation (4.7) on a :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial t} \quad (4.8)$$

$$= \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial t} + \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*} \quad (4.9)$$

De (4.6) on aura :

$$\frac{\partial z^*}{\partial t} = \frac{z}{l^2(t)} \frac{dl}{dt} \quad (4.10)$$

La dérivée temporelle de la température devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} &= -\frac{z}{l^2(t)} \frac{dl}{dt} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*} + \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*} \\ &= -\frac{z^*}{l(t)} \frac{dl}{dt} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*} + \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*}\end{aligned}\quad (4.11)$$

La dérivée spatiale de la température devient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} &= \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial z} \\ &= \frac{1}{l(t)} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Et

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^2(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{l(t)} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*} \right) \\ &= \frac{1}{l^2(t)} \frac{\partial T^{*2}(z^*, t)}{\partial z^{*2}}\end{aligned}\quad (4.13)$$

La relation (4.1) devient :

$$\frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{l^2(t)} \frac{\partial T^{*2}(z^*, t)}{\partial z^{*2}} + \frac{z^*}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*}\quad (4.14)$$

Les conditions aux limites 4.2 et 4.3 deviennent :

$$T(z = 0, t) = T^*(z^* = 0, t) = q(t)\quad (4.15)$$

$$T(z = l(t), t) = T^*(z^* = l(t), t) = T_f\quad (4.16)$$

Et la condition initiale

$$T(z, 0) = T^*(z^*, 0) = T_0(z^*)\quad (4.17)$$

Le modèle final obtenu est maintenant caractérisé par une frontière à $z^* = 0$. On peut le simuler facilement avec la méthode des lignes.

4.4. application de la méthode des lignes :

Pour appliquer la méthode des lignes, on commence d'abord par la discrétisation des opérateurs en utilisant les différences finies.

Calcul de $\frac{dl(t)}{dt}$:

De l'équation (4.5), on a :

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \frac{k}{\rho \Delta H f} \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l(t)} \quad (4.18)$$

et de l'équation (4.12), on a :

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{l(t)} \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*} \quad (4.19)$$

Et de (4.6), il vient :

$$z = z^* * l(t)$$

Donc :

$$z = l(t) \quad \Rightarrow \quad z^* * l(t) = l(t) \quad \Rightarrow \quad z^* = 1 \quad (4.20)$$

On remplace les équations (4.19) et (4.20) dans (4.13) on aura :

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \frac{k}{\rho \Delta H f} \left. \frac{1}{l(t)} \frac{\partial T^*(z, t)}{\partial z^*} \right|_{z^*=1} \quad (4.21)$$

En utilisant les différences finies, on a :

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \frac{k}{\rho \Delta H f} \left. \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_i - 4T^*_{i-1} + T^*_{i-2}}{2\Delta z^*} \right|_{z^*=1}$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = -\frac{k}{\rho \Delta H f} \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_l - 4T^*_n + T^*_{n-1}}{2\Delta z^*} \quad (4.22)$$

Pour la première et la deuxième dérivée spatiale de l'équation (4.14), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{l^2(t)} \frac{\partial T^{*2}(z^*, t)}{\partial z^{*2}} + \frac{z^*}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \frac{\partial T^*(z^*, t)}{\partial z^*} \\ \frac{\partial T^*_i(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{l^2(t)} \frac{T^*_{i+1}(t) - 2T^*_i(t) + T^*_{i-1}(t)}{\Delta z^{*2}} + \frac{z^*}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \frac{T^*_{i+1}(t) - T^*_{i-1}(t)}{2\Delta z^*} \\ \frac{\partial T^*_i(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{\alpha}{l^2(t)} \frac{T^*_{i+1}(t) - 2T^*_i(t) + T^*_{i-1}(t)}{\Delta z^{*2}} \\ &+ \frac{z^*}{l(t)} \left(-\frac{k}{\rho \Delta H f} \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_l - 4T^*_n + T^*_{n-1}}{2\Delta z^*} \right) \frac{T^*_{i+1}(t) - T^*_{i-1}(t)}{2\Delta z^*} \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.5. Simulation :

Pour la simulation des équations différentielles obtenues, on a utilisé le logiciel MATLAB. Ces dernières ont été résolues en utilisant le solveur ode15s (méthode de Gear).

Pour valider la solution numérique, on considère un cas ayant une solution analytique. Dans cette optique, on considère qu'initialement la portion solide a une température de $T_0 = 0$. La température appliquée à la frontière $z = 0$ est $q(t) = e^{t-1}$

Le problème simulé est résumé comme suit

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (4.24)$$

Avec $0 \leq z \leq l(t)$

$$\beta \frac{dl(t)}{dt} = - \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=l(t)}$$

$$T(0, t) = f(t)$$

$$T(l(t), t) = 0$$

La solution analytique de ce problème pour :

$$\alpha = \beta = 1$$

Et

$$f(t) = e^t - 1 \quad (4.23)$$

Est :

$$T(z, t) = e^{t-z^*t} - 1 \quad (4.24)$$

$$l(t) = t \quad (4.25)$$

Pour $\alpha = 1$ l'équation (4.23) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*_i(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{1}{l^2(t)} \frac{T^*_{i+1}(t) - 2T^*_i(t) + T^*_{i-1}(t)}{\Delta z^{*2}} \\ &+ \frac{z^*}{l(t)} \left(-k \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_l - 4T^*_n + T^*_{n-1}}{2\Delta z^*} \right) \frac{T^*_{i+1}(t) - T^*_{i-1}(t)}{2\Delta z^*} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Résumés du modèle simulé avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*_0(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{1}{l^2(t)} \frac{T^*_2(t) - 2T^*_1(t) + q(t)}{\Delta z^{*2}} \\ &+ \frac{z^*}{l(t)} \left(-k \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_l - 4T^*_n + T^*_{n-1}}{2\Delta z^*} \right) \frac{T^*_2(t) - q(t)}{2\Delta z^*} \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*_n(z^*, t)}{\partial t} &= \frac{1}{l^2(t)} \frac{T^*_l(t) - 2T^*_n(t) + T^*_{n-1}(t)}{\Delta z^{*2}} \\ &+ \frac{z^*}{l(t)} \left(-k \frac{1}{l(t)} \frac{3T^*_l - 4T^*_n + T^*_{n-1}}{2\Delta z^*} \right) \frac{T^*_l(t) - T^*_{n-1}(t)}{2\Delta z^*} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le nombre de points considéré dans la simulation est $n = 50$.

Les résultats de simulation de l'équation (4.26) sont illustrés par les figures ci-après.

La figure 4.4 donne le déplacement de la frontière en fonction du temps à la frontière comparée à la solution analytique.

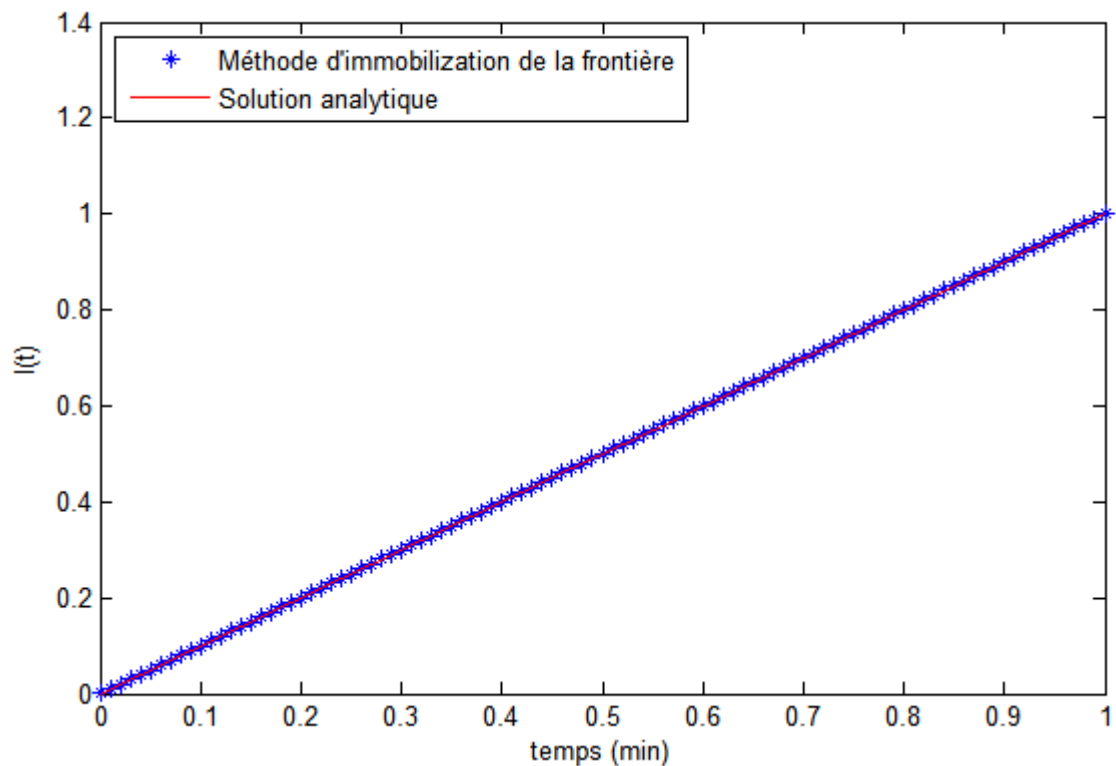


Figure 4.2 Evolution de la frontière en fonction du temps : solutions numérique et analytique.

On remarque que l'évolution du front de fusion dans le temps, pour $\alpha = 1$, est une droite, et que le profil de $l(t)$ suit la droite de la solution analytique.

Les figures 4.3, 4.4 et 4.5 donnent les profils temporels de la température pour quelques points de la phase liquide.

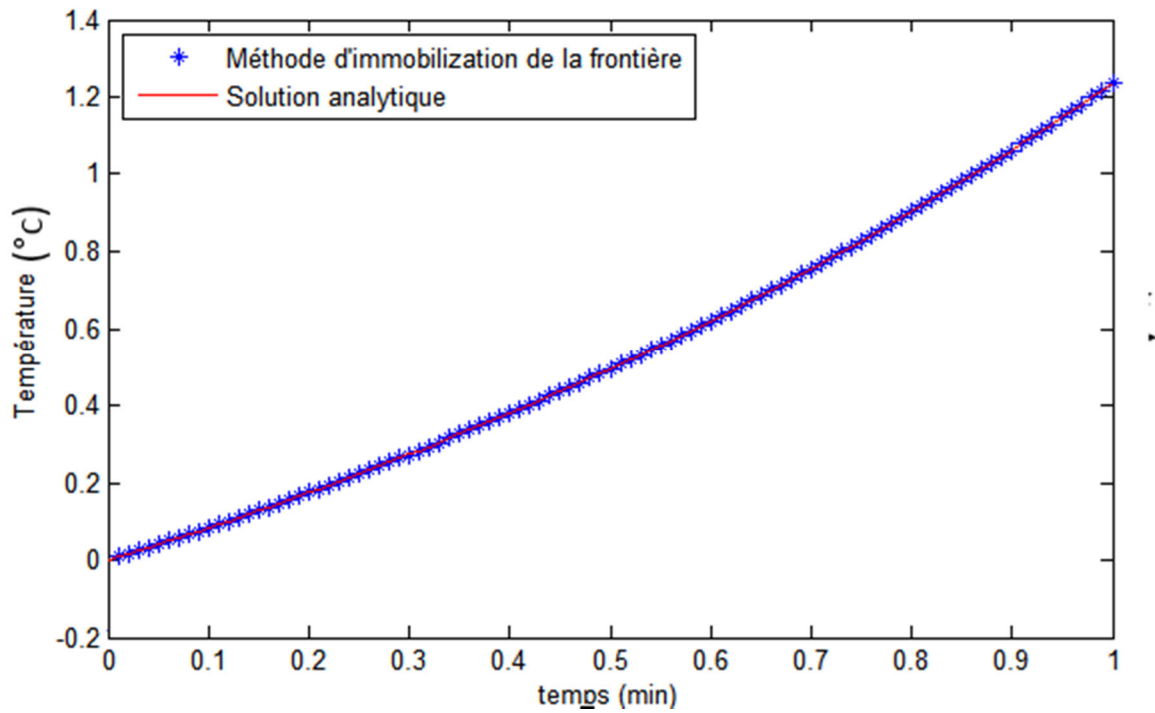


Figure 4.3 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 10$.

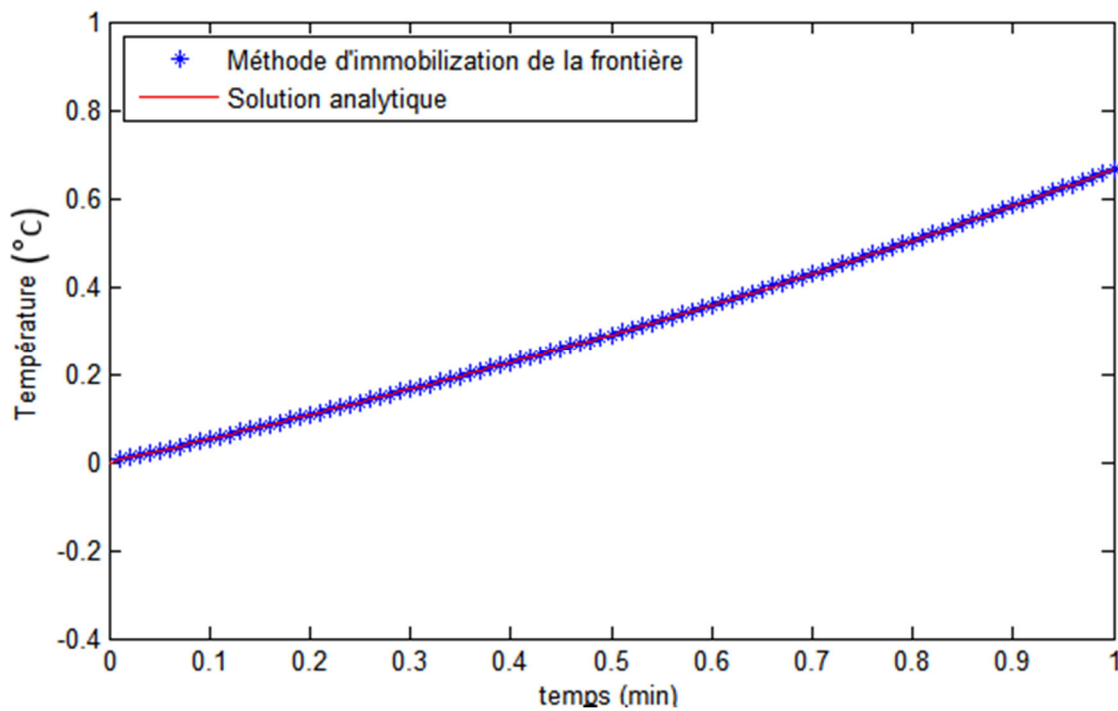


Figure 4.4 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 25$.

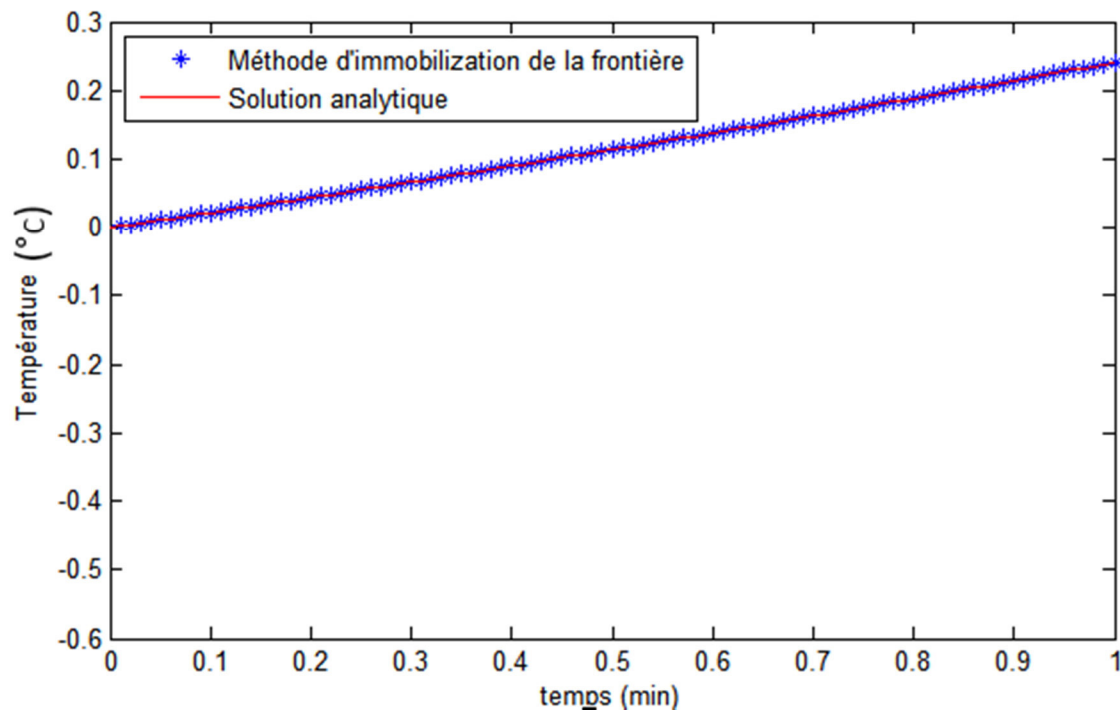


Figure 4.5 Evolution de la température en fonction du temps et la solution analytique au point $z = 40$.

On remarque que l'évolution temporelle de la température, obtenue numériquement, coïncide parfaitement la solution analytique. Le même constat est fait pour le cas des profils spatiaux obtenus à des instants différents donnés par les figures 4.5, 4.6 et 4.7

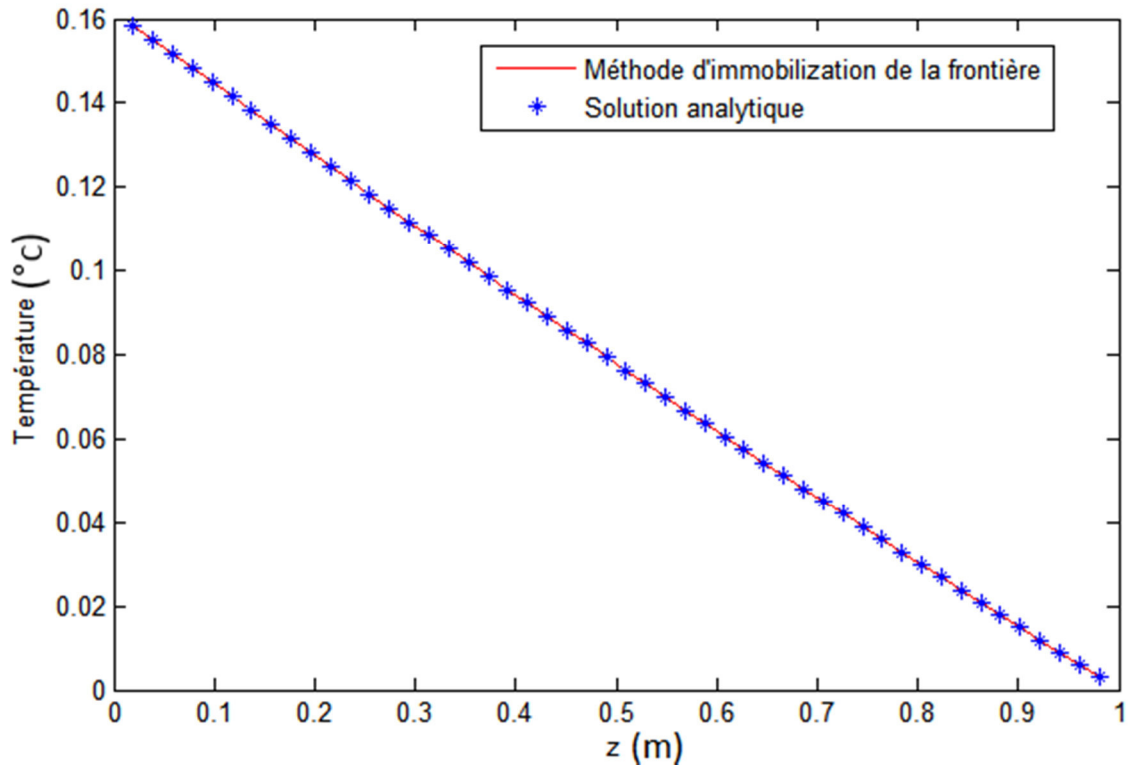


Figure 4.6 : Evolution de la température en fonction de l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.15$.

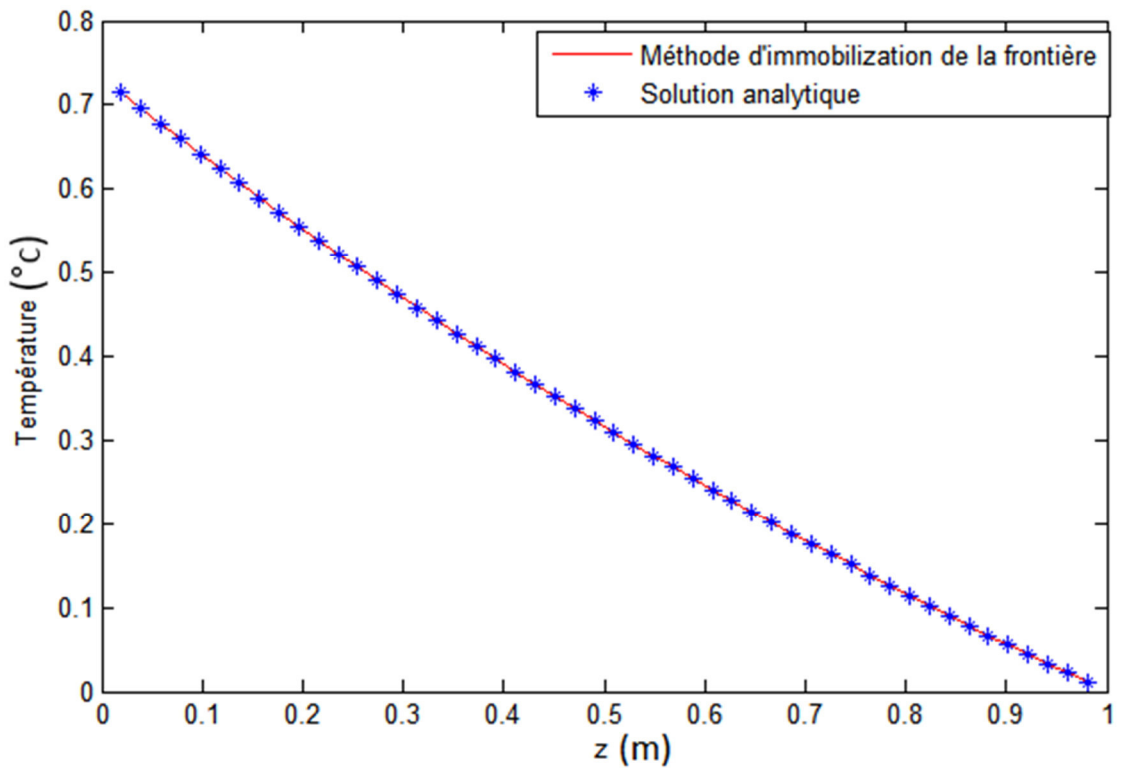


Figure 4.7 : Evolution de la température en fonction de l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.55$.

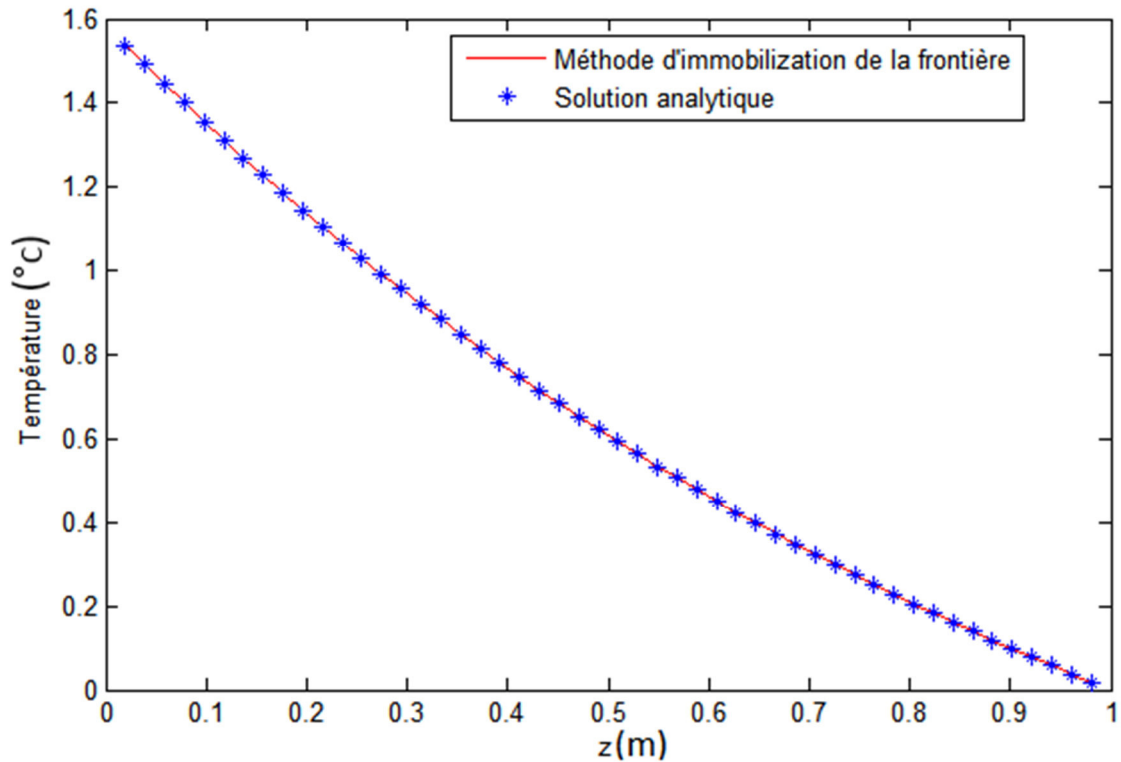


Figure 4.8 : Evolution de la température en fonction de l'espace et la solution analytique à l'instant $t = 0.95$.

En résumé, l'évolution de la frontière mobile suit bien la trajectoire $l(t) = t$ solution analytique du problème. De même pour l'évolution de la température dans la phase liquide, on constate qu'elle suit parfaitement le profil de la solution analytique $T(z, t) = e^{t-z*t} - 1$.

A travers cet exemple, on peut confirmer que la méthode d'immobilisation de la frontière permet de simuler correctement les systèmes à paramètres distribués avec des frontières mobiles.

4.6. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons simulé le problème de Stefan en utilisant la méthode des lignes après avoir immobilisé par la méthode d'immobilisation de la frontière.

En mobilisant la frontière, la méthode des lignes a été appliquée en utilisant les différences finies. La simulation a été réalisée en utilisant le solveur de Matlab ODE15s. A partir de la solution obtenue, on peut déterminer les évolutions des différentes variables en utilisant les inverses des transformées de variables de la méthode d'immobilisation de la frontière.

Pour valider la simulation, on a considéré un exemple d'application ayant une solution analytique. Les résultats numériques obtenus sont en concordance avec le résultat analytique et démontrent la justesse de la méthode d'immobilisation de la frontière.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de simulation numérique des systèmes à paramètre répartis avec frontières mobiles. L'objectif est d'appliquer la méthode d'immobilisation de la frontière pour simuler le comportement dynamique de ce type de systèmes. Comme exemple d'application, nous avons considéré le problème de Stefan qui décrit les phénomènes de changement de phases.

Dans un premier temps, nous avons présenté brièvement les systèmes à paramètres répartis. Puis, nous avons la méthode des lignes, basée sur les différences finies, qui est la plus utilisée pour la simulation des systèmes à paramètres répartis. Ensuite, nous avons présenté la modélisation du problème de Stefan suivi de sa simulation par la méthode de l'immobilisation de la frontière.

Pour démontrer la puissance de la méthode d'immobilisation de la frontière, nous avons considéré un exemple ayant une solution analytique. L'objectif est de confronter les résultats obtenus numériquement. Ainsi, les différents profils obtenus numériquement coïncident parfaitement avec ceux obtenus analytiquement. Le constat est le même pour l'évolution de la frontière, c'est-à-dire l'interface liquide-solide.

En conclusion, on peut confirmer que la combinaison de la méthode des lignes et la méthode de l'immobilisation de la frontière constitue une démarche intéressante pour la simulation des systèmes à paramètres répartis caractérisé par un domaine spatial variable.

Comme perspectives pour ce travail, on peut penser à l'extension de l'application de la méthode de l'immobilisation de la frontière des systèmes à paramètres répartis à deux dimensions.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] **A. EL JAI, M. AMOUROUX**, Automatique des systèmes distribués, Editions HERMES, Paris 1990.
- [2] **J.P. BABRY, W. PELCZEWSKI**, Commande optimal des systèmes continus déterministes, Edition MASSON, Paris, 1985.
- [3] **A. RACHID**, Système de régulation, Edition MASSON, Paris 1996.
- [4] **ABDECHAFIK DERKAOU**, Dimensionnement pour des critères dynamique et énergétique des systèmes mécatroniques comportant des sous-système à paramètres répartis - approche par méthode inverse-, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.
- [5] **A. EL JAI, A. J. PRITCHARD**, Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués, Edition MASSON, Paris 1986.
- [6] **FRANCIS B.HILDEBRAND**, Finite-difference equation and simulations, Edition Englewood Cliffs, New Jersey, 1968
- [7] **A. MAIDI**, Cour mathématique appliquée, génie micro-électronique, U.M.M.T.O-F.G.E.I, 2015.
- [8] **E. N. SARMIN, L. A. CHUDOY**, On the stability of the numerical integration of systems of ordinary differential equations arising in the use of the straight line method, Edition USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1963 .
- [9] **A. MAIDI**, Commande des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles, Hyperboliques thèse de doctorat, U.M.M.T.O-F.G.E.I, 2008
- [10] **R. SORRENTINO**, Numerical methods for passive microwave and millimeter wave structure. IEEE Press, New York, 1989.
- [11] **W. E. SCHIESSER**, The numerical method of lines. Academic Press, San Diego, 1991.
- [12] **MARIE-SAINTE JEREMY**, Transfert de chaleur et implémentation, Université Clopeau Thiery, Lyon1, 2012-2013.
- [13] **Y. JANNOT**, Transferts thermiques, Ecole des Mines Nancy, 2012.
- [14] **J. CALDWELL and D. K. S. Ng**. Mathematical modelling. Case studies and projects. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

Bibliographie

[15] **D. G. ZILL and W. S. WRIGHT**. Differential equations with boundary-value problems, Cengage Learning, 2012

[16] **R. M. M. MATTHEIJ, S. H. W. TEN THIJE BOONKKAMP**. Partial differential equations modeling analysis, Computation, SIAM, 2005.