

*RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.*

*UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques*

*Mémoire de Master en Mathématiques Appliquées
Option : Processus Aléatoires et Statistique de la Décision*

Marches Aléatoires et Chaînes de Markov dans un Groupe

*sous la direction de :
M^r BOUDIBA Mohand Arezki*

*présenté par :
TEDLOUT KAHINA*

le 11 /10 /2011 devant le Jury :

HAMADOUCHE Djamel
BOUDIBA Mohand Arezki
HARMIM Dahbia
MEHIRI Mohamed

Professeur, UMMTO
Maitre de Conférence A, UMMTO
Chargé de Recherches, UMMTO
Chargé de Recherches, UMMTO

Président
Rapporteur
Examinateur
Examinateur

Table des matières

Remerciements	2
Dédicace	3
Introduction	4
1 Marches Aléatoires dans le Groupe du Cube	6
1.1 Etude du groupe orthogonal- Propriétés générales	6
1.2 Cas de $O_2(E)$	9
1.2.1 Etude des rotations planes	9
1.2.2 Etude des symetries orthogonales	10
1.2.3 Structure de $O_2(E)$	12
1.3 Structure de $O_3(E)$	13
1.4 Le groupe des isométries du Cube	17
1.4.1 Les symetries de cube	17
1.4.2 Les rotations du cube	22
1.5 Marches aléatoires dans le groupe du cube	23
1.5.1 Temps moyen de retour à l'origine d'une chaîne de Markov	24
1.5.2 Loi stationnaire d'une chaîne de Markov	28
1.5.3 Application au temps de retour du cube à la position de départ	35
2 Marches aléatoires dans un groupe	36
2.1 Noyaux de transitions et operateurs associé	36
2.2 Composition de noyaux de transition	40
2.3 Action d'un groupe sur un ensemble	43
2.4 Marches aléatoires dans un groupe	44
3 Chaîne de Markov Image	50

Conclusion	52
Bibliographie	53

Remerciements

Je remercie M^r HAMADOUCHE Djamel pour la disponibilité et l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également M^{me} HARMIM Dehbia et M^r MEHIRI Mohamed, pour l'honneur qu'ils me font en s'intéressant à ce travail et leur participation de jury.

Je remercie M^r BOUDIBA Mohand Arezki pour m'avoir confié ce travail et aussi pour les conseils et les critiques qu'il n'a en cessé de me prodiguer tout au long de la rédaction de ce memoire.

Dédicaces

Je tiens à remercier chaleureusement ma très chère famille pour son soutien discret mais réel et constant ; soutien qui, dans la plus pure tradition familiale.

Ces remerciements vont plus particulièrement à mes parents TEDLOUT Khelifa et REZZIK Saifa avec qui j'ai vécu dans un climat toujours serein à l'abri de tous soucis affectifs, il m'est impossible de trouver des mots pour dire à quel point je suis fier d'eux et à quel point je les aime.

Je dois remercier aussi mes deux grandes mère YAMINA et FEROUJJA, mes frère LYES et MOUHAMED, mes soeurs TASSADIT, YAMINA et HOUA, mes tantes et oncles, qui m'ont assisté de leurs encouragements.

sans oublier mes amis et tous ceux qui m'ont encouragés et ceux qui m'ont accompagné durant ces années.

Introduction

Nous nous intéressons à la chaîne de Markov $(X_n)_n$ définie par

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_{n-1} X_{n-1}$$

où $X_0, X_1, (a_n), (b_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes (cf, P.Diaconis [6]).

Nous remarquons immédiatement que si nous définissons la suite $(Y_n)_n$ en posant

$$Y_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} \dots$$

alors

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}$$

L'étude de cette chaîne de Markov, nous ramène donc à l'étude d'une marche aléatoire $(Z_n)_n$ sur des sous-ensembles de matrices carrées d'ordre 2, si on pose

$$Z_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les marches aléatoires sur des ensembles de matrices, plus généralement sur des groupes sont intensément étudiées.

Nous nous sommes attachés à faire une synthèse de quelques notions de base et à leurs exploitation dans des cas simples, en guise d'introduction à l'étude de la chaîne de Markov ci-dessus.

Chapitre 1

Marches Aléatoires dans le Groupe du Cube

Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème suivant : Un cube est soumis à des transformations aléatoires qui le laissent globalement invariant. On veut savoir quel est le temps moyen de retour à sa position de départ. Dans ce qui suit nous mettons en place le modèle mathématique pour répondre à cette question.

1.1 Etude du groupe orthogonal- Propriétés générales

Soit E un espace euclidien, avec $\dim E = n$. On note $\langle x|y \rangle$ le produit scalaire de $x, y \in E$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $End(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E i.e. $End(E) = \{\varphi : E \rightarrow E \text{ lineaires}\}$.

Définition 1. $\varphi \in End(E)$ est une isométrie de E si φ conserve le produit scalaire, c'est à dire

$$\forall x, y \in E \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Remarque

$\varphi \in End(E)$ conserve le produit scalaire $\Leftrightarrow \varphi$ conserve la norme. c'est à dire

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|$$

En effet, si φ conserve le produit scalaire, on a

$$\forall x, y \in E \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

En faisant $x = y$, on a

$$\forall x \in E \quad \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle x, x \rangle$$

et par définition de la norme, $\forall x \in E, \|\varphi(x)\|^2 = \|x\|^2$

et donc $\forall x \in E, \|\varphi(x)\| = \|x\|$

donc φ conserve la norme .

Réciproquement si $\varphi \in \text{End}(E)$ conserve la norme, $\forall x \|\varphi(x)\| = \|x\|$ on a

$$\forall x, y \in E$$

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle &= \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle + \langle \varphi(y), \varphi(y) \rangle \\ &= (\|\varphi(x)\|)^2 + 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle + (\|\varphi(y)\|)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x+y), \varphi(x+y) \rangle &= \langle x+y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= (\|x\|)^2 + (\|y\|)^2 + 2\langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Donc

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

et par conséquent φ préserve le produit scalaire.

Proposition 1. Soit E un espace euclidien, $\dim E = n < \infty$

$\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x, y et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Soit $O_n(E)$ l'ensemble d'isométrie de E , alors $(O_n(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration.

1. $\varphi_1, \varphi_2 \in O_n(E)$ alors $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in O_n(E)$ En effet

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \circ \varphi_2(x), \varphi_1 \circ \varphi_2(y) \rangle &= \langle \varphi_1(\varphi_2(x)), \varphi_1(\varphi_2(y)) \rangle \\ &= \langle \varphi_2(x), \varphi_2(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned} \tag{1.3}$$

2. Si $\varphi \in O_n(E)$ alors φ^{-1} existe et $\varphi^{-1} \in O_n(E)$

– Existence de φ^{-1} :

Montrons que si $\varphi \in O_n(E)$ alors φ est bijective .

$\varphi \in \text{End}(E)$ et E étant de dimension finie, il suffit de montrer que φ est injective

Il revient au même de montrer que si $\varphi \in O_n(E)$ alors $\ker(\varphi) = \{0\}$..

Nous avons par définition

$$\ker(\varphi) = \{x \in E \text{ tel que } \varphi(x) = 0\} .$$

Si $\varphi \in O_n(E)$ et $x \in \ker(\varphi)$, nous avons

$\varphi(x) = 0$, donc $\|\varphi(x)\| = 0$. Donc $\|x\| = 0$ car φ conserve la norme, et donc $x = 0$, d'après les propriétés de la norme. Donc $\ker(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective et donc bijective. Par suite φ^{-1} existe

– Montrons que si $\varphi \in O_n(E)$ alors $\varphi^{-1} \in O_n(E)$

φ^{-1} existe, $\forall \varphi \in O_n(E)$.

$$\text{Donc } \forall x \in E \quad \|\varphi \circ \varphi^{-1}(x)\| = \|x\|$$

et d'autre part $\|\varphi \circ \varphi^{-1}\| = \|\varphi^{-1}(x)\|$ car $\varphi \in O_n(E)$

$$\text{donc } \|\varphi^{-1}(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$$

donc $\varphi^{-1} \in O_n(E)$ d'où $(O_n(E), \circ)$ est un groupe.

□

Proposition 2. Soit B une base orthonormale de E . Pour $\varphi \in \text{End}(E)$ soit A la matrice de φ par rapport à B et soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Si

$$\Gamma = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tel que } AA^t = I_n\},$$

nous avons

$$\varphi \in O_n(E) \Leftrightarrow A \in \Gamma$$

Démonstration. Soit B une base orthonormale de E et A la matrice de φ par rapport à B .

$\Rightarrow$] Si $\varphi \in O_n(E)$, alors $\forall x, y \in E \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Donc, si $X, \overline{Y}$ sont les matrices colonnes représentant x et y dans la base B , nous avons

$$\forall X, Y, (AX)^t AY = X^t Y,$$

c'est à dire $\forall X, Y, X^t A^t AY = X^t Y$, et donc $A^t A = I_n$ i.e. $A \in \Gamma$.

$\Leftarrow$] Soient x et $y \in E$ et X et Y les matrices colonnes représentant x et y dans la base B . Soit $A \in \Gamma$ et φ l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base orthonormale B est A . Par définition de l'image d'un vecteur par une application linéaire et par définition du produit scalaire de E , nous avons

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = (AX)^t AY = X^t A^t AY.$$

Comme $A \in \Gamma$, donc $A^t A = I_n$ et par suite

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = X^t Y = \langle x, y \rangle. \quad \square$$

1.2 Cas de $O_2(E)$

1.2.1 Etude des rotations planes

Soit r_θ une rotation d'angle θ autour de l'origine O , on assimile $\mathbb{R}^2$ euclidien à l'espace des vecteurs d'origine O dans le plan affine euclidien, muni d'une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$. On dit que r_θ est une rotation plane d'angle

θ autour de O si l'image de tout point M du plan affine est le point M' du plan affine tel que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$$

Nous remarquons immédiatement que $r_\theta \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$. Par suite une manière de caractériser r_θ est de déterminer sa matrice par rapport à une base orthonormale $\{e_1, e_2\}$ donnée. Soit donc $\{e_1, e_2\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Si M est un point du plan tel que :

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2.$$

alors M' est le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = xr_\theta(e_1) + yr_\theta(e_2).$$

Nous avons

$$r_\theta(e_1) = \cos \theta(e_1) + \sin \theta(e_2).$$

$$r_\theta(e_2) = -\sin \theta(e_1) + \cos \theta(e_2).$$

donc r_θ a pour matrice

$$\text{Mat}(r_\theta, (e_i)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.2.2 Etude des symétries orthogonales

Soit $D = \{\overrightarrow{u}\}$, la droite engendrée par $\overrightarrow{u}$, d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$. On dit que s_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D si pour tout point du plan affine euclidien M , son image $s_D(M) = M'$ est tel que

$$s_D(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OM}$$

où H est la projection orthogonale de M sur la droite D .

Si $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$ alors

$$s_D(\overrightarrow{OM}) = xs_D(e_1) + ys_D(e_2)$$

On calcule $s_D(e_1)$ et $s_D(e_2)$

$$s_D(e_1) = 2proj_D(e_1) - e_1$$

$$s_D(e_2) = 2projet_D(e_2) - e_2$$

$proj_D(e_1) = \cos \frac{\theta}{2} \vec{u}$ avec $\vec{u}$ est le vecteur unitaire sur D

$$\vec{u} = \cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2$$

donc

$$\begin{aligned} s_D(e_1) &= 2 \cos \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2) - e_1 \\ &= 2(\cos \frac{\theta}{2})^2 e_1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e_2 - e_1 \\ &= 2((\cos \frac{\theta}{2})^2 - 1)e_1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e_2 \\ s_D(e_1) &= \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} proj_D(e_2) &= \sin \frac{\theta}{2} \vec{u} \\ &= \sin \frac{\theta}{2} (\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2) \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_1 + (\sin \frac{\theta}{2})^2 e_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

donc

$$\begin{aligned} s_D(e_2) &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_1 + (\sin \frac{\theta}{2})^2 e_2 - e_2 \\ &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e_1 + ((\sin \frac{\theta}{2})^2 - 1)e_2 \\ &= \sin \theta e_1 - \cos \theta e_2 \end{aligned} \tag{1.6}$$

donc s_D a pour matrice

$$\mathcal{Mat}(s_D, (e_i)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Remarque Si $\varphi \in O_n(E)$, $\det \varphi = \pm 1$.

En effet, si M est la matrice de φ par rapport à la base B .

$$MM^t = I_2 \Rightarrow \det(M)^2 = 1$$

donc $\det M = \pm 1$.

On note

$$SO_n(E) = \{M \in O_n(E) \mid \det M = 1\} \text{ le groupe des déplacements.}$$

1.2.3 Structure de $O_2(E)$

Proposition 3. *Si $\varphi \in O_2(E)$ alors φ est une rotation plane ou une symétrie orthogonale.*

Démonstration. Soit E un espace euclidien de dimension 2, $B = \{e_1, e_2\}$ une base orthonormale de E fixée et $\varphi \in O_2(E)$.

Soit

$$A = \mathcal{Mat}(\varphi, B) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

On sait que $A \in \Gamma$ donc nous avons $AA^t = I_n$ Par suite

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 & (1) \\ ab + cd = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après l'équation (1) nous avons

$$\exists \theta \text{ tel que : } a = \cos \theta, c = \sin \theta, \text{ et } \exists \alpha \text{ tel que } b = \sin \alpha, d = \cos \alpha$$

D'après l'équation (2) nous avons

$$\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha = 0 .$$

$$\text{Donc } \sin(\theta + \alpha) = 0$$

$$\text{et par suite } \theta + \alpha = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Nous avons alors :

-ou bien $\theta + \alpha = 2n\pi$, et dans ce cas, $\alpha = -\theta \ (2\pi)$

-ou bien $\theta + \alpha = (2n + 1)\pi$, et dans ce cas, $\alpha = \pi - \theta \ (2\pi)$.

Par conséquent, la matrice de A est de la forme

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On remarque que $\det A_1 = 1$, par conséquent $A_1 \in SO_n(E)$; c'est la matrice d'une rotation d'angle θ autour de l'origine.

De même $\det A_2 = -1$. Par suite $A_2 \in O_n(E)/SO_n(E)$.

A_2 est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$. $\square$

1.3 Structure de $O_3(E)$

Soit E un espace euclidien de dimension 3, orienté par le choix d'une base orthonormale $B = (e_1, e_2, e_3)$.

Commençons par le résultat général suivant

Théorème 1. *Les valeurs propres λ , d'une isométrie $\varphi \in O_n(E)$, vérifient que $|\lambda| = 1$. Si $n = \dim(E)$ est impair alors φ admet au moins une valeur propre réelle et donc $\lambda = \pm 1$.*

Démonstration.

- Soit φ une isométrie de E , λ une valeur propre de φ et x le vecteur propre associé à la valeur propre λ . Nous avons alors $\varphi(x) = \lambda x$. Donc $\|\varphi(x)\| = |\lambda| \|x\|$.
Or $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, car $\varphi \in O_n(E)$. Donc $|\lambda| \|x\| = \|x\|$. D'où $|\lambda| = 1$, car par hypothèse x est un vecteur propre et donc par définition $x \neq 0$.

- On sait que tout polynome de degré n admet n racines complexes, conjuguées deux à deux.

Si n impair, alors le polynome de degré n , P_φ défini par

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda Id)$$

à coefficients réels admet au moins une racine réelle. Cela découle du fait qu'il y a une racine λ conjuguée avec elle-même ; i.e. $\lambda = \bar{\lambda}$ et λ est donc réel. Comme $|\lambda| = 1$, on a $\lambda = \pm 1$.

□

Proposition 4. *Si φ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ alors la matrice de φ par rapport à une base orthonormale directe est du type suivant :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

où λ est la valeur propre de φ tel que $\lambda = \pm 1$.

Démonstration. Soit $\varphi \in O_3(\mathbb{R})$ et e_1 le vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda = \pm 1$, et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

Nous avons $\varphi(e_1) = \pm e_1$, car e_1 est par construction le vecteur propre associé à la valeur propre ± 1 . La droite vectorielle $F = \mathbb{R}e_1$ est donc globalement fixe par φ . Soit $\varphi' = \varphi|_{\{e_2, e_3\}}$, φ' est une isométrie du plan euclidien sur $\{e_2, e_3\}$. Soit A la matrice de φ par rapport à la base orthonormale directe B . Nous avons $AA^t = I_3$. Donc pour $\lambda = \pm 1$ et si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

alors

$$AA^t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 & (1) \\ ab + cd = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après l'équation (1) nous avons

$\exists \theta$ tel que : $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$, et $\exists \alpha$ tel que $b = \sin \alpha$, $d = \cos \alpha$.

D'après l'équation (2) nous avons

$$\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha = 0 .$$

$$\text{Donc } \sin(\theta + \alpha) = 0$$

et par suite $\theta + \alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Nous avons alors :

- ou bien $\theta + \alpha = 2n\pi$, et dans ce cas, $\alpha = -\theta \ (2\pi)$

- ou bien $\theta + \alpha = (2n + 1)\pi$, et dans ce cas, $\alpha = \pi - \theta \ (2\pi)$.

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

Par conséquent, la matrice A de φ relativement à la base B est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On distingue alors quatre cas selon les valeurs $\lambda = \pm 1$.

Cas où $\det A = 1$.

$$\text{Si } \lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

φ est une rotation d'angle θ d'axe la droite engendrée par e_1 .

$$\text{Si } \lambda = -1, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

φ est la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par $\{e_2, e_3\}$ et d'une rotation dans ce plan d'angle θ .

Cas où $\det A = -1$.

$$\text{Si } \lambda = 1, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

φ est la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par e_1 et le vecteur

$$\cos \frac{\theta}{2} e_2 + \sin \frac{\theta}{2} e_3.$$

$$\text{Si } \lambda = -1, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

φ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendré par

$$\cos \frac{\theta}{2} e_2 + \sin \frac{\theta}{2} e_3.$$

□

Proposition 5. *Toute rotation de E avec $\dim E = n$ est la composée de deux symétries orthogonales. Plus précisément, si r est une rotation, il existe deux symétries orthogonales s et s' telle que $r = s \circ s'$.*

Démonstration.

Soit une rotation r . Considérons une symétrie orthogonale s . Il existe un endomorphisme ϕ de E tel que $r = \phi \circ s$. En effet si $\phi = r \circ s^{-1} = r \circ s$ (s est une involution et donc $s^{-1} = s$), alors ϕ vérifie que $r = \phi \circ s$. ϕ est orthogonal comme composé d'endomorphismes orthogonaux.

D'autre part $\det \phi = \det(r) \det(s) = -1$ et donc ϕ est une symétrie orthogonale. Cela montre donc que toute rotation est composée de deux symétries orthogonales.

□

1.4 Le groupe des isométries du Cube

Définition 2. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{C} = ABCDA'B'C'D'$ un cube. On appelle isométrie du cube $\mathcal{C}$ toute transformation $\varphi \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ qui préserve globalement $\mathcal{C}$. L'ensemble de toutes ces transformations est appelé le groupe du cube noté G

Proposition 6. Soit φ une isométrie du cube $ABCD A'B'C'D'$. φ est entièrement déterminée, si on connaît l'image d'un sommet ($\varphi(A)$ par exemple) et des trois arêtes partant de ce sommet (A), c'est à dire (AB, AA', AD) . Par suite $|G| = 48$.

Démonstration. Le cube a 8 sommets et 12 arêtes et l'image d'un sommet est un sommet car φ est une isométrie qui laisse globalement le cube invariant, et comme cela est vérifié et que φ est une isométrie donc elle préserve la norme, donc si AB est une arête alors $\varphi(AB)$ est une arête.

Donc φ est entièrement déterminée si $\varphi(A)$ est définie et aussi $\varphi(AB)$, $\varphi(AA')$, $\varphi(AD)$ qui sont des arêtes .

Ce sommet peut être l'un quelconque des 8 sommets du cube. La première arête a alors 3 images possibles, la seconde arête a deux images possibles et l'image de la dernière arête est alors déterminée.

Donc le cube a : $8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ isométries. □

Toute rotation étant la composée de deux symétries orthogonales, il en résulte que le groupe G du cube est engendré par l'ensemble des symétries du cube. C'est pourquoi nous nous y intéressons. A défaut d'une méthode générale de dénombrement, nous faisons une étude directe.

1.4.1 Les symétries de cube

Soit $ABCD A'B'C'D'$ un cube

1. Les symétries par rapport à des plan

- Soit π_1 le plan qui passe par les droites $[I_1I_2]$ et $[I_3I_4]$, où I_1, I_2, I_3, I_4 sont les milieux des arêtes respectivement $AB, DC, A'B', D'C'$. On note S_1 la symétrie par rapport au plan π_1 qui transforme A en

B, D en C , A' en B' et D' en C'

- π_2 un plan qui passe par les milieux des arêtes AD , BC , $A'D'$, $B'C'$, S_2 est la symétrie par rapport au plan π_2 qui transforme B en C , A en D , B' en C' et A' en D' .

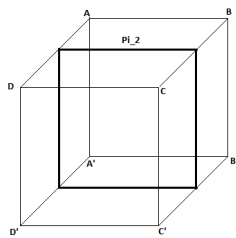


FIG. 1.1 – La symétrie par rapport à un plan π_2

- π_3 le plan qui passe par les milieux des arêtes AA' , BB' , CC' et DD' , S_3 est la symétrie orthogonale par rapport au plan π_3 qui transforme A en A' , B en B' , D en D' et C en C' .
- On peut aussi couper le cube en deux par les plans $P_1 = (CAA'C')$ et $P_2 = (BDB'D')$ qui sont définies respectivement par les quatres diagonales $(CA , C'A' , BD , B'D')$ de deux faces parallèles du cube.
La symétrie par rapport à P_1 noté s_{P_1} transforme D en B et D' en B' et laisse C , A , C' , D' invariants.
La symétrie par rapport à P_2 noté s_{P_2} transforme A en C et A' en C' et laisse B , D , D' , B' invariants.

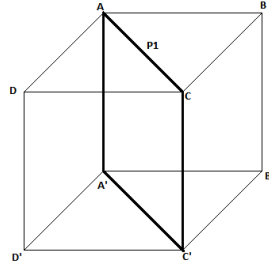


FIG. 1.2 – La symétrie par rapport à un plan π_1

- Soit P_5 (respect P_6) les plans qui passent respectivement par $A'D'$, BC et AD , $B'C'$, la symétrie par rapport à P_5 (respect P_6) noté s_{P_5} et s_{P_6} transforme A en C' et B' en D (respect B en D' et A' en C'')

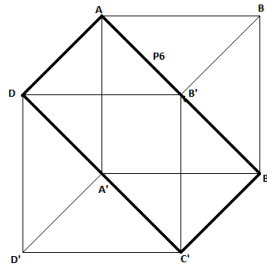


FIG. 1.3 – La symétrie par rapport à un plan P_6

2. Les symetries par rapport aux droites orthogonales :

- Six axe de symetries passant par les milieux de deux arêtes opposées (rotation d'angle π) qui passent par O telle (BA) , $(C'D')$
- Quatres axes de symetries passent par les sommets opposés $(AC'$, BD' , DB' , CA'), c'est à dire une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Pour la symetrie par rapport à AC' transforme D' en B , A' en C , D en B' et laisse A et C' invariant.
La symetrie par rapport à BD' transforme C' en A , C en A' , B' en D et laisse invariant B et D' .

1.4.2 Les rotations du cube

- L'identité .
- Les six rotations d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ autour des trois axes passant par les milieux de deux faces opposées.
- Les trois rotations d'angle π autour des ces même axes.
- Les six rotations d'angle π autour des six axes joignant les milieux de deux arêtes opposées .
- Les huit rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour des quatres axes joignant deux sommets opposées.

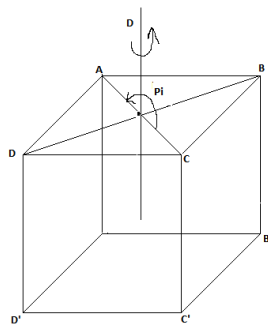


FIG. 1.4 – Rotation d'angle π

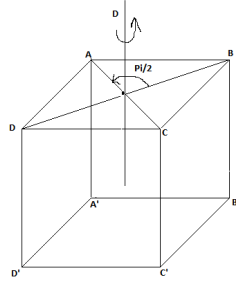


FIG. 1.5 – Rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$

1.5 Marches aléatoires dans le groupe du cube

Considérons le cube de sommets $ABCD A' B' C' D'$, sujet aux 48 transformations du groupe du cube G , de manière indépendantes et aléatoires. On suppose que le cube est au départ dans la position $ABCD A' B' C' D'$, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien et orienté. On confond la position du cube avec la transformation $Y \in G$ qui la produit à partir de la position initiale. L'ensemble des positions du cube E s'identifie avec le groupe G . Soit alors $(Y_n)_n$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans G indépendantes et de même loi. Soit e_0 la position initiale du cube, au pas 1, la position du cube est $X_1 = Y_1.e_0$. Au pas 2, sa position est $X_2 = Y_2.X_1$, ainsi de suite. Les positions successives du cube sont donc décrites par la Marche aléatoires gauche $(X_n)_n$, engendrées par la suite $(Y_n)_n$. La question posée est de savoir quel est le temps moyen de retour à une position de départ donnée si le cube est soumis aux transformations ainsi définies.

Pour cela nous avons besoin des éléments de base sur les chaînes de Markov. Nous en faisons une synthèse. Pour de plus amples détails Cf [1], [2], [3]...

1.5.1 Temps moyen de retour à l'origine d'une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov, d'espace des états E . Si y est un état, soit T_y la variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$, définie par

$$T_y = \inf\{n > 0, X_n = y\}, \text{ si } \exists n > 0, \text{ tel que } \{\omega, X_n(\omega) = y\} \neq \emptyset$$

donc

$$T_y = \inf\{n > 0, X_n = y\}, \text{ si } \bigcup_n \{\omega, X_n(\omega) = y\} \neq \emptyset$$

et si

$$\bigcup_n \{n > 0, X_n(\omega) = y\} = \emptyset$$

on définit T_y en posant $T_y = +\infty$.

Soit $m_y = \mathbb{E}_y[T_y]$. m_y est le temps moyen que met la chaîne de Markov partant de y à revenir à y . Nous avons alors le résultat suivant

Théorème 2. [7] $\forall x, y \in E$, si y est récurrent, on a

$$I) \lim_n \left[\frac{1}{n} \sum_{v=1}^{v=n} p_{xy}^{(v)} \right] = \frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}$$

$$II) \lim_n E_y \left[\frac{N_n(y)}{n} \right] = \frac{f_{xy}^*}{m_y}$$

Rapellons que

$$f_{xy}^* = \sum_n f_{xy}^{(n)} \text{ avec } f_{xy}^{(n)} = P[T_y = n | X_0 = x].$$

Si y est un état, soit $\xi_v(y)$ la variable aléatoire définie par

$$\xi_v(y) = \mathbb{1}_{\{X_v = y\}}.$$

Soit

$$N_n(y) = \sum_{v=1}^{v=n} \xi_v(y).$$

$N_n(y)$ est le nombre de fois où la chaîne visite y durant les n premiers pas, on peut aussi l'interpréter comme le temps d'occupation de l'états y durant les n premier instants.

Soit

$$m_y = \mathbb{E}_y[T_y] = \sum_{k=1}^{\infty} kP[T_y = k/X_0 = y]$$

l'espérance par rapport à la probabilité $P_y[\cdot] = P[\cdot/X_0 = y]$
donc pour $x \in E$, si

$$G_n(x, y) = \mathbb{E}_y[N_n(y)]$$

alors

$$\begin{aligned} G_n(x, y) &= \mathbb{E}_y\left[\sum_{v=1}^{v=n} \mathbb{1}_{\{X_v=y\}}\right] \\ &= \sum_{v=1}^{v=n} \mathbb{E}_y[\mathbb{1}_{\{X_v=y\}}] \\ &= \sum_{v=1}^{v=n} P[X_v = y/X_0 = x] \end{aligned}$$

alors

$$G_n(x, y) = \sum_{v=1}^{v=n} p_{xy}^{(v)}.$$

Démonstration.

I) Si y est un état récurrent, la chaîne partant de y revient à y une infinité de fois.

Pour $r \geq 1$, soit T_y^r l'instant du r -ème retour à y .

$$T_y^r = \inf\{k \geq 1, N_k(y) = r\}.$$

On définit la suite de variable aléatoire $(W_y^r)_r$ par

$$W_y^1 = T_y^1 = T_y, \text{ et pour } W_y^r = T_y^r - T_y^{r-1}.$$

$(W_y^r)_r$ est la suite des temps d'attentes entre deux retours consécutifs de la chaîne à y . Nous avons $(W_y^r)_r$ est une suite de variable indépendantes (relativement à la probabilité P_y). En effet

$$\begin{aligned}
P[W_y^{r+1} = m_{r+1} | W_y^r = m_r, \dots, W_y^1 = m_1] &= P[W_y^{r+1} = m_{r+1} | W_y^r = m_r] \\
&= P_y[W_y^1 = m_1] = P_y[T_y = m_1]
\end{aligned}$$

donc

$$P_y[W_y^1 = m_1, \dots, W_y^r = m_r] = P_y[W_y^1 = m_1] \dots P_y[W_y^r = m_r].$$

d'autre part les W_y^r sont de même loi

$$\mathcal{L}(W_y^r) = \mathcal{L}(T_y^1) = \mathcal{L}(T_y).$$

Si

$$E_y[W_y^r] = E_y[T_y] < \infty.$$

Dans ce cas on peut appliquer la loi forte des grands nombre, par conséquent

$$\begin{aligned}
\frac{W_y^1 + \dots + W_y^k}{k} &= \frac{T_y^1 + T_y^2 - T_y^1 + \dots + T_y^k - T_y^{k-1}}{k} \\
&= \frac{T_y^k}{k} \\
&= E_y[W_y^1] \\
\Rightarrow E_y[W_y^1] &= E_y[T_y] = m_y
\end{aligned}$$

presque sûrement.

Observons alors que sur l'événement $\{N_n(y) = r\}$, c'est à dire si au cours des n premiers pas la chaîne revient r fois en y .

donc $T_y^r \leq n$ et $T_y^{r+1} > n$, donc on a toujours

$$T_y^{N_n(y)+1} > n, \text{ et } T_y^{N_n(y)} \leq n$$

donc

$$\frac{T_y^{N_n(y)}}{N_n(y)} \leq \frac{n}{N_n(y)} < \frac{T_y^{N_n(y)+1}}{N_n(y)}.$$

Mais $N_n(y) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, car y est récurrent, et on a montré que

$$\frac{T_y^k}{k} \rightarrow m_y \text{ p.s}$$

alors

$$\frac{T_y^{N_n(y)}}{N_n(y)} \rightarrow m_y \text{ p.s}$$

et aussi

$$\frac{T_y^{N_n(y)+1}}{N_n(y)} \rightarrow m_y \text{ p.s}$$

car $N_n(y) \sim N_n(y) + 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

il en résulte que

$$\frac{n}{N_n(y)} \rightarrow m_y \text{ p.s}$$

par conséquent si $x \rightarrow y$ et y récurrent,

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y} \text{ p.s}$$

Si la chaîne démarre de $X_0 = x$ et, si $x \not\rightarrow y$, alors le nombre de retours à y est 0, et dans ce cas il n'y a rien à montrer.

II) montrons que

$$\mathbb{E}_y\left[\frac{N_n(y)}{n}\right] \rightarrow \frac{f_{xy}^*}{m_y}$$

on a

$$\mathbb{E}_y\left[\frac{N_n(y)}{n}\right] = \int_{\Omega} \frac{N_n(y)}{n} P_y(d\omega).$$

Pour montrer II) il suffit de montrer que

$$\lim_n \int_{\Omega} \frac{N_n(y)}{n} P_y(d\omega) = \int_{\Omega} \lim_n \frac{N_n(y)}{n} P_y(d\omega).$$

En appliquant la convergence dominée, on montre l'égalité ci-dessus.

1) $\forall n, \frac{N_n(y)}{n} \in \mathbb{L}_{P_y}^1$, i.e les $\frac{N_n(y)}{n}$ sont intégrable par rapport à P_y

On a $\frac{N_n(y)}{n} \leq 1$

alors $\frac{N_n(y)}{n}$ est bornée, donc

$$\frac{N_n(y)}{n} \in \mathbb{L}_{P_y}^1 \text{ et bornée.}$$

2) on a

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y} \text{ d'après (I),}$$

c'est à dire $\frac{N_n(y)}{n}$ converge presque sûrement vers $\frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}$ donc le théorème de convergence dominée s'applique, alors on a

$$\lim_n \mathbb{E}_y\left[\frac{N_n(y)}{n}\right] = \lim_n \int_{\Omega} \frac{N_n(y)}{n} dP_y = \int_{\Omega} \lim_n \frac{N_n(y)}{n} dP_y.$$

On a d'après (I)

$$\frac{N_n(y)}{n} \rightarrow \frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}.$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y\left[\frac{N_n(y)}{n}\right] &\rightarrow \mathbb{E}_y\left[\frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y}\right] = \int_{\Omega} \frac{\mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}}}{m_y} dP_y \\ &= \frac{1}{m_y} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{T_y < \infty\}} dP_y \\ &= \frac{1}{m_y} P_y[T_y < \infty] \\ &= \frac{f_{xy}^*}{m_y} \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} P_y[T_y < \infty] &= P_y[T_y = 1 \text{ ou } T_y = 2 \dots \text{ ou } T_y = n \dots] \\ &= P_y\left[\bigcup_k \{T_y = k\}\right] = \sum_k P[T_y = k / X_0 = x] \\ &= \sum_k f_{xy}^{(n)}. \end{aligned}$$

□

1.5.2 Loi stationnaire d'une chaîne de Markov

Définition 3. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov irréductible, d'espace des états E , de probabilité de transition $(p_{xy})_{x,y \in E}$. La famille de nombres

$$\pi = (\pi_x)_{x \in E},$$

est une loi stationnaire pour $(X_n)_n$ si

$$\forall x \in E, \pi_x \geq 0, \sum_x \pi_x = 1, \text{ et } \forall y \in E, \pi_y = \sum_{x \in E} \pi_x p_{xy}^{(n)}.$$

i.e si π est la loi de X_0 , c'est aussi la loi de $X_n, \forall n$

Théorème 3. [7] Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov irréductible, d'espace des états E , de probabilité de transition $(p_{xy})_{x,y \in E}$ et récurrente, alors la famille de nombres $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$, définis pour $x \in E$ par

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}$$

définit une probabilité stationnaire pour $(X_n)_n$, qui est par conséquent unique.

Démonstration.

On montre que la famille de nombres $\pi = (\pi_x)_{x \in E}$, définis pour $x \in E$ par

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}$$

définit une probabilité stationnaire pour $(X_n)_n$.

Nous avons d'après le théorème précédent

$$\lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} = \frac{1}{m_x}$$

avec $m_x = \mathbb{E}_x[T_x]$.

m_x est le temps moyen que met la chaîne de Markov partant de x à revenir à x .

pour $x, z \in E$, si π_z est une probabilité stationnaire alors on a

$$\forall n, \pi_x = \sum_z \pi_z p_{zx}^{(n)} = \sum_z \pi_z \frac{G_n(z, x)}{n}$$

en effet :

$$\begin{aligned}
\sum_z \pi_z \frac{G_n(z, x)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_z \pi_z G_n(z, x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_z \pi_z \sum_{m=1}^{m=n} p_{zx}^{(m)} \\
&= \sum_{m=1}^{m=n} \sum_z \pi_z \frac{p_{zx}^{(m)}}{n} \\
&= \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{n} \pi_x \\
&= \frac{n \pi_x}{n} \\
&= \pi_x
\end{aligned}$$

donc

$$\forall n, \pi_x = \sum_z \pi_z p_{zx}^{(n)} = \sum_z \pi_z \frac{G_n(z, x)}{n}$$

et comme

$$\lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} = \frac{1}{m_x}$$

alors par convergence bornée , nous avons

$$\pi_x = \lim_n \sum_z \pi_z \frac{G_n(z, x)}{n} = \sum_z \pi_z \lim_n \frac{G_n(z, x)}{n}.$$

$$\pi_x = \sum_z \pi_z \frac{1}{m_x} = \frac{1}{m_x} \sum_z \pi_z = \frac{1}{m_x}$$

car si π_z est une probabilité stationnaire alors

$$\sum_z \pi_z = 1.$$

Il nous reste à montrer ce passage à la limite par la convergence bornée.

Soit $f_n = \frac{G_n(z, x)}{n}$, et on a $\lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} = \frac{1}{m_x}$

et $|f_n| = \frac{G_n(z,x)}{n} < \frac{1}{m_x}$.

les nombres

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}$$

étant positifs, pour qu'ils définissent une probabilité stationnaire, il reste à montrer que

$$\sum_x \frac{1}{m_x} = 1$$

et vérifie l'équation aux probabilités stationnaires

$$\frac{1}{m_x} = \sum_z \frac{1}{m_y} \pi_{zx}.$$

Nous avons

$$\forall m, \sum_x p_{zx}^{(m)} = 1$$

donc $\forall m$

$$\begin{aligned} \sum_x p_{zx}^{(m)} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{n} &= 1 \\ \Rightarrow \sum_x \sum_{m=1}^{m=n} \frac{p_{zx}^{(m)}}{n} &= 1 \\ \Rightarrow \sum_x \sum_{m=1}^{m=n} \frac{p_{zx}^{(m)}}{n} &= \sum_x \frac{G_n(z,x)}{n} = 1 \end{aligned}$$

d'autre part, d'après la relation de Chapman-Kolmogorov.

$$\sum_x p_{zx}^{(m)} p_{xy} = p_{zy}^{(m+1)}$$

donc

$$\begin{aligned}
\sum_x \frac{G_n(z, x)}{n} p_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_x G_n(z, x) p_{xy} \\
&= \frac{1}{n} \sum_x \sum_{m=1}^{m=n} p_{zx}^{(m)} p_{xy} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} \sum_x p_{zx}^{(m)} p_{xy} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)} \\
&= \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{p_{zy}}{n}.
\end{aligned}$$

En effet

$$G_{n+1}(z, y) = \sum_{m=0}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)} = p_{zy} + \sum_{m=1}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)}$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)} = \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{p_{zy}}{n}$$

donc

$$\sum_x \frac{G_n(z, x)}{n} p_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)} = \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{p_{zy}}{n} \quad (2).$$

Deux cas sont alors possibles

1) cas où E est fini.

Dans ce cas d'après (1.25), par passage à la limite on a :

$$\lim_n \sum_x \frac{G_n(z, x)}{n} = \sum_x \lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} = \sum_x \frac{1}{m_x} = 1$$

ce qui résulte que

$$\sum_x \frac{1}{m_x} = 1.$$

et d'après (2), par passage à la limite

$$\lim_n \sum_x \frac{G_n(z, x)}{n} p_{xy} = \sum_x \lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} p_{xy}$$

c'est à dire

$$\sum_x \frac{1}{m_x} p_{xy} = \frac{1}{m_y}$$

car on a d'après les résultats précédents que

$$\lim_n \frac{G_n(z, x)}{n} = \frac{1}{m_x}$$

donc la famille de nombres $(\frac{1}{m_x})_x$ satisfait à l'équation de probabilité stationnaires.

2) cas où E est infini.

Dans ce cas soit $E_1 \subset E$ finie, alors d'après (1.25) on a

$$\sum_{x \in E_1} \frac{G_n(z, x)}{n} \leq 1$$

on a donc pour toute partie E_1 finie de E

$$\sum_{x \in E_1} \frac{1}{m_x} \leq 1 \Rightarrow \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \leq 1$$

car on peut pas avoir $\sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} > 1$.

Soit alors

$$c = \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \leq 1.$$

D'autre part, d'après (2), pour toute partie E_1 de E

$$\sum_{x \in E_1} \frac{G_n(z, x)}{n} p_{xy} \leq \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{m=n} p_{zy}^{(m+1)} \leq \frac{G_{n+1}(z, y)}{n} - \frac{p_{zy}}{n}$$

donc par passage à la limite

$$\sum_{x \in E_1} \frac{1}{m_x} p_{xy} \leq \frac{1}{m_y}$$

par conséquent

$$\sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} p_{xy} \leq \frac{1}{m_y}.$$

Supposons que $\exists y \in E$ tel que

$$\sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} p_{xy} < \frac{1}{m_y}$$

alors on a

$$\begin{aligned} \sum_y \frac{1}{m_y} &> \sum_y \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} p_{xy} = \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \sum_y p_{xy} \\ &\Rightarrow \sum_y \frac{1}{m_y} > \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} \end{aligned}$$

car $\sum_y p_{xy} = 1$ donc

$$\sum_y \frac{1}{m_y} > \sum_x \frac{1}{m_x}$$

ce qui est une contradiction et par conséquent

$$\forall y \in E, \sum_{x \in E} \frac{1}{m_x} p_{xy} = \frac{1}{m_y}$$

Soit alors

$$\pi = (\pi_x)_{x \in E} \text{ tel que } \pi_x = \frac{c}{m_x}$$

alors π est une probabilité stationnaire pour $(X_n)_n$
en effet :

$$\sum_{x \in E} \frac{c}{m_x} p_{xy} = \frac{c}{m_y}$$

et

$$\sum_x \frac{c}{m_x} = c \sum_x \frac{1}{m_x}$$

par conséquent $c = 1$ et

$$\pi \text{ tel que } \forall x \in E, \pi_x = \frac{1}{m_x}$$

est une probabilité stationnaire pour $(X_n)_n$, et elle est unique.

□

1.5.3 Application au temps de retour du cube à la position de départ

Soit C le cube $ABCD A' B' C' D'$ et soit G le groupe des isométries, $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans G . Nous assimilons une position du cube avec l'isométrie g qui la produit. Considérons e est l'identité de G et $X_0 = e$ et $X_1 = Y_1.X_0 \cdots$

$$X_n = Y_n \cdots Y_1.X_0$$

X_n est la position du cube après avoir subi des transformations $Y_1 \cdots Y_n$.

$(X_n)_n$ est donc une marche aléatoire sur le groupe G .

$(X_n)_n$ est une chaîne de Markov d'espace des états G , donc finie. Elle est donc récurrente positive.

Si $P = (p_{gg'})_{g,g' \in G}$ est sa matrice de transition, alors le système linéaire

$$\pi_g = \sum_{g' \in G} \pi_{g'} p_{gg'}$$

admet une solution non triviale.

Donc si

$$m_g = \mathbb{E}_g[T_g]$$

alors on a

$$m_g = \frac{1}{\pi_g}$$

d'après le théorème en rappel.

Donc la donnée d'une matrice de transition P de $(X_n)_n$ en résolvant le système linéaire

$$\pi_g = \sum_{g' \in G} \pi_{g'} p_{gg'} \quad (1)$$

permet de déterminer la loi stationnaire π_g par suite

$$m_g = \frac{1}{\pi_g}.$$

Chapitre 2

Marches aléatoires dans un groupe

Rappelons qu'une marche aléatoire $(X_n)_n$ dans $\mathbb{Z}^d$ est la donnée d'une variable aléatoire X_0 et d'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ indépendantes et de même loi, tel que $\forall n, X_n = Y_n + X_{n-1}$. On dit que X_0 et $(Y_n)_n$ engendrent la marche aléatoire $(X_n)_n$. Si G est un groupe, $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans G et X_0 une variable aléatoire à valeur dans G indépendante des Y_n , nous voulons définir les marches aléatoires dans G , engendrées par ces variables suivant le modèles des marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$. Pour cela nous faisons une synthèse [cf. Revuz [2]] des notions de base nécessaires.

2.1 Noyaux de transitions et operateurs associé

La définition suivante introduit la notion de noyau de transition sur un ensemble quelconque E muni d'une tribu $\mathcal{E}$

Définition 4. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Un noyau de transition sur E est une application

$$\mathbb{P} : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$$

tel que :

(1) $\forall x \in E$, l'application $A \mapsto \mathbb{P}(x, A) : \text{de } \mathcal{E} \text{ dans } [0, 1]$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$

(2) $\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto \mathbb{P}(x, A)$: de E dans $[0, 1]$ est une fonction mesurable

$\mathbb{P}(x, A)$ représente la probabilité de transition de x vers A .

Proposition 7. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction positive bornée et mesurable, soit $\mathbb{P}$ l'opérateur $\mathbb{P}f : E \rightarrow \mathbb{R}$ défini par la formule :

$$\mathbb{P}f(x) = \int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy) \quad (\forall x \in E).$$

Alors $\mathbb{P}f$ est une fonction positive, bornée et mesurable

Démonstration. Montrons d'abord que $\forall x, \mathbb{P}f(x)$ positive et bornée. On a f positive et $\mathbb{P}(x, dy)$ est une mesure positive, alors

$$\int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy) \geq 0.$$

On a aussi f bornée $\Rightarrow \exists M > 0$ tel que $\forall x \in E, |f(x)| \leq M$ donc

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}f(x)| &= \left| \int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy) \right| \\ &\leq \int_E |f(y)| \mathbb{P}(x, dy) \\ &\leq M \int_E \mathbb{P}(x, dy) \\ &\leq M. \end{aligned}$$

car $\int_E \mathbb{P}(x, dy) = 1$.

Il reste à montrer que $\mathbb{P}f$ est mesurable.

1/. Cas où $f = \mathbb{1}_A(x)$, $A \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\mathbb{1}_A(x) &= \int_E \mathbb{1}_A(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \int_A \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \mathbb{P}(x, A). \end{aligned}$$

Donc si $f = \mathbb{1}_A(x)$, $A \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}f(x) = \mathbb{P}(x, A)$$

et par définition de $\mathbb{P}$, $A \mapsto \mathbb{P}(x, A)$ est mesurable $\forall x \in E$, et pour A fixée.

2/. Cas où f est une fonction simple i.e. $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, tel que $\forall i, A_i \in \mathcal{E}$ et les A_i disjoints.

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}f(x) &= \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_E \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(y) \mathbb{P}(x, dy) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{P}(x, A_i) \end{aligned}$$

Par suite, $x \mapsto \mathbb{P}f(x)$ est une fonction mesurable comme somme finie de fonctions mesurables.

3/. Cas général : f est une fonction mesurable, positive et bornée.

Toute fonction f mesurable est limite simple d'une suite de fonctions simples. Plus précisément,

$\exists$ une suite croissante de fonctions simples $(f_n)_n$ tel que $f = \lim_n f_n$,

Par définition de $\mathbb{P}f(x)$, nous avons

$$\mathbb{P}f(x) = \mathbb{P} \lim_n f_n(x) = \int_E \lim_n f_n(y) \mathbb{P}(x, dy).$$

Par convergence monotone nous avons

$$\int_E \lim_n f_n(y) \mathbb{P}(x, dy) = \lim_n \int_E f_n(y) \mathbb{P}(x, dy)$$

Donc

$$\mathbb{P}f(x) = \mathbb{P} \lim_n f_n(x) = \lim_n \mathbb{P}f_n(x)$$

Comme $\mathbb{P}f_n(x)$ est mesurable d'après le 2/., il en résulte que $x \mapsto \mathbb{P}f(x)$ est mesurable, comme limite d'une suite de fonctions mesurables.
Il reste à établir la validité du passage à la limite par convergence monotone ci-dessus affirmé.
Nous avons,

1) $\forall n, f_n \leq f$ et $\exists M$ tel que $|f| \leq M$, donc $\forall n, |f_n| \leq M$.

Par suite $|\int_E f_n(y)\mathbb{P}(x, dy)| \leq M$.

2) $f_n \nearrow f$, simplement sur E , par construction.

□

Exemple de noyaux de transition 1) Soit λ la mesure positive σ -finie sur $(E, \mathcal{E})$ et g une fonction positive à valeur réelle et mesurable par rapport à la σ -algèbre $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ et à valeur réelle définie dans $E \times E$. On peut alors définir le noyau de transition $\mathbb{P}$ sur E par

$$\mathbb{P}(x, A) = \int_A g(x, y)\lambda(dy).$$

On l'appelle noyau integral avec la base λ .

Quand $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, λ est la mesure de Lebesgue et $g(x, y) = |x - y|^{-d+2}$, on obtient le noyau de la théorie du potentiel newtonien

De même nous avons

Proposition 8. *Si ν est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et si on définit $\nu\mathbb{P}$ sur $(E, \mathcal{E})$ par*

$$\forall A \in \mathcal{E}, \nu\mathbb{P}(A) = \int_E \nu(dx)\mathbb{P}(x, A) \quad ,$$

alors $\nu\mathbb{P}$ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$

Démonstration.

- 1/. $A \rightarrow \nu\mathbb{P}(A)$ est une fonction d'ensemble sur $\mathcal{E}$.
2/. $\nu\mathbb{P}$ est σ -additive. En effet

$$\begin{aligned}\nu\mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) &= \int_E \nu(dx) \mathbb{P}(x, \bigcup_i A_i) \\ &= \sum_i \int_E \nu(dx) \mathbb{P}(x, A_i) \\ &= \sum_i \nu\mathbb{P}(x, A_i)\end{aligned}$$

$\forall (A_i)_i \in \mathcal{E}$ disjoints.

$$3/. \nu\mathbb{P} \neq \infty \text{ car } \nu\mathbb{P}(\phi) = \int_E \nu(dx) \mathbb{P}(x, \phi) = 0.$$

□

2.2 Composition de noyaux de transition

Proposition 9. *La composition ou le produit de deux noyaux de transition positifs $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sur E définie par*

$$\mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A) = \int_E \mathbb{Q}(x, dy) \mathbb{P}(y, A)$$

est aussi un noyau de transition positif

Démonstration. On montre que la composition de deux noyaux de transition positifs $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ est un noyau de transition, ce qui revient à montrer que :

(1) $\forall x \in E$, l'application $A \mapsto \mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$: de $\mathcal{E}$ dans $[0, 1]$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$

(2) $\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto \mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$: de E dans $[0, 1]$ est une fonction mesurable.

On a $\mathbb{P}(x, A)$ est un noyau de transition i.e

$$\forall A \in \mathcal{E}, \text{ l'application } x \mapsto \mathbb{P}(x, A) : \text{ de } E \text{ dans } [0, 1]$$

est une fonction mesurable.

Si on pose $g(x) = \mathbb{P}(x, A)$ pour A fixé, alors d'après la proposition précédente

$\forall A \in \mathcal{E}$, l'application $x \mapsto \mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$: de E dans $[0, 1]$ est une fonction mesurable.

Et on a aussi

$\forall x \in E$, l'application $A \mapsto \mathbb{Q}(x, A)$: de $\mathcal{E}$ dans $[0, 1]$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Si on pose $\nu = \mathbb{Q}(x, A)$ pour x fixé, alors d'après la proposition précédente,

$\forall x \in E$, l'application $A \mapsto \mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$: de $\mathcal{E}$ dans $[0, 1]$ est une mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{E})$.

Ce qui résulte que $\mathbb{Q}\mathbb{P}(x, A)$ est un noyau de transition.

□

On notera $\mathbb{P}^n$ le noyau de transition obtenu en effectuant $(n - 1)$ produit de $\mathbb{P}$ avec lui même. On a pour tout $n \geq 1$: $\forall x \in E, \forall A \in \mathcal{E}$,

$$\mathbb{P}^n(x, A) = \mathbb{P}\mathbb{P}^{n-1}(x, A).$$

Et comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^{n-1}$ sont des noyaux de transitions et d'après la proposition précédente on obtient que $\mathbb{P}^n(x, A)$ qui est défini par

$$\mathbb{P}^n(x, A) = \int_E \mathbb{P}(x, dy) \mathbb{P}^{n-1}(y, A).$$

et aussi un noyau de transition En prenant pour $\mathbb{P}^0(y, A)$ la mesure de Dirac en y

$$\mathbb{P}^0(y, A) = \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}^n(x, A) = \overbrace{\mathbb{P}(x, A) \times \mathbb{P}(x, A) \times \cdots \times \mathbb{P}(x, A)}^{n \text{ fois}}.$$

$\mathbb{P}^n(x, A)$ s'interprète comme la probabilité de l'événement $X_n \in A$ conditionnelle à $X_0 = x$, c'est à dire

$$\mathbb{P}^n(x, A) = P[X_n \in A / X_0 = x].$$

Une généralisation utile est la relation de Chapman -Kolmogorov : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$, $\forall x \in E$, $\forall A \in \mathcal{E}$

$$\mathbb{P}^n(x, A) = \int_E \mathbb{P}^m(x, dy) \mathbb{P}^{n-m}(y, A).$$

Cette équation admet une interprétation intéressante : pour atteindre A en n étapes, partant de x , la chaîne doit nécessairement passer par une valeur y en m étapes, puis tout se passe comme si la chaîne démarrait en y , pour atteindre A en $n - m$ étapes.

Alors d'après la définition de l'opérateur $\mathbb{P}f(x)$ tel que

$$\mathbb{P}f(x) = \int_E f(y) \mathbb{P}(x, dy)$$

on a

$$\mathbb{P}^n(x, A) f(x) = \int_E f(y) \mathbb{P}^n(x, dy).$$

Donc d'après la définition de l'espérance conditionnelle.

$$\mathbb{P}^n(x, A) f(x) = \int_E f(y) \mathbb{P}^n(x, dy) = \mathbb{E}_x[f(X_n)].$$

Si Z une variable aléatoire positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$, son espérance mathématique relativement à la mesure de probabilité P_μ est $E_\nu[Z]$. Si $\nu = \epsilon_x$ la mesure de Dirac, alors on écrit $E_x[Z]$ et

$$E_\nu[Z] = \int_E \nu(dx) E_x[Z].$$

Pour l'étude des marches aléatoires un peu plus générales, nous aurons besoin des notions d'action de groupe dans un ensemble

2.3 Action d'un groupe sur un ensemble

Définition 5. Soient E un ensemble et $(G, .)$ un groupe multiplicatif d'élément neutre 1. L'action du groupe G sur l'ensemble E est une application :

$$\begin{aligned} G \times E &\rightarrow E \\ (g, x) &\rightarrow g * x \end{aligned}$$

qui vérifie les axiomes suivantes :

$$(1) \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in E, g_1 * (g_2 * x) = (g_1.g_2) * x$$

$$(2) \forall x \in E, 1 * x = x.$$

Dans ce cas on dit que le groupe G opère à gauche sur E .

La relation $\exists g \in G$ tel que $y = g.x$ est une relation d'équivalence sur E . Les classes d'équivalences pour cette relation sont appelées les orbites de E suivants G ou G -orbites de E .

L'orbite de l'action de G est $O_x = \{y \in E / \exists g \in G \ g.x = y\}$.

On dit que G opère transitivement sur E s'il y a une seule orbite, c'est-à-dire que $\forall x, y \in E, \exists g \in G$ tel que $y = g.x$, et dans ce cas on dit qu'on a un espace homogène.

Exemples d'action de groupe

1) L'action naturelle d'un groupe $(G, .)$ est l'action de G sur lui même, définie par

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 * g_2 = g_1.g_2 \end{aligned}$$

2) Soit E un ensemble à n éléments et soit S_n le groupe des permutations de E . Pour $s \in S_n$ et $x \in E$, soit $*$ l'opération définie par

$$(s, x) \rightarrow s * x = s(x).$$

2.4 Marches aléatoires dans un groupe

Définition 6. Soient E un ensemble et $(G, .)$ un groupe. On suppose que G opère à gauche sur E par la loi $*$.

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d dans G , et X_0 une variable aléatoire à valeur dans E . On appelle marche aléatoire à gauche sur E la suite de variable aléatoire $(X_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} X_0 \\ X_n = Y_n * X_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

La proposition suivante donne la condition suffisante pour que la marche aléatoire soit irréductible

Proposition 10. [10]

Soit $(G, .)$ un groupe discret engendré par la famille dénombrable $\{g_1, g_2, \dots\}$, muni d'une loi de probabilité P et E un ensemble. On suppose que G opère à gauche sur E par l'action de $*$ définie par :

$$\forall g \in G, x \in E, (g, x) \rightarrow g * x.$$

Soit $(Y_n)_n$ une suite de variable aléatoire à valeur dans G , i.i.d telle que

$$P(Y_1 = g_i) > 0, \forall i \geq 1.$$

On considère la marche aléatoire à gauche $(X_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} X_0 \\ X_n = Y_n * X_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Si l'action de G est transitive, alors la marche aléatoire (X_n) est irréductible .

Démonstration. Soit $x, y \in E$, on a l'action de G sur E est transitive, donc $\exists g \in G$ tel que,

$$y = g * x \text{ et } g = g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_m} \circ g_{i_k} \in \{g_1, g_2, \dots\} \quad \forall i_k = i_1, i_2, \dots, i_m.$$

$$P[X_m = y / X_0 = x] = P(Y_m \dots Y_1 * X_0 = y / X_0 = x) = P(Y_m \dots Y_1 * x = y)$$

$$\begin{aligned}
&= P(Y_m \dots Y_1 * x = y, Y_m \dots Y_1 = g) + P(Y_m \dots Y_1 * x = y, Y_m \dots Y_1 \neq g) \\
&\geq P(Y_m \dots Y_1 * x = y, Y_m \dots Y_1 = g) \\
&= P(Y_m \dots Y_1 = g) \\
&\geq \prod_{j=1}^m P(y_j = g_{i_k}) > 0
\end{aligned}$$

Donc tous les états communiquent entre eux et donc $(X_n)_n$ est irréductible.

□

Remarque Si l'action de G sur E n'est pas transitive, on aura plusieurs orbites.

L'action de G sur chaque orbite est transitive. d'après la proposition précédente, il en résulte donc que les classes essentielles de la chaîne de Markov $(X_n)_n$ sont les orbites de E suivant G .

Définition 7. Soient $(G, \cdot)$ un groupe topologique multiplicatif, $(Y_n)_n$ une suite de variable aléatoire indépendante et de même loi à valeur dans G , et Y_0 une variable aléatoire à valeur dans G et indépendantes des Y_n . On appelle marche aléatoire à gauche (resp à droite) sur G , la suite $(X_n)_n$ de variable aléatoire définie par

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 \\ X_n = Y_n \cdot X_{n-1} \end{cases} \quad \text{si } n \geq 1$$

(respect $X_n = X_{n-1} \cdot Y_n$ si $n \geq 1$)

Remarque

Si le groupe G est commutatif, la marche aléatoire à gauche est la même que la marche aléatoire à droite.

Pour caractériser $(X_n)_n$ on a besoin de préciser le noyau de transition associé $\mathbb{P}$. On définit $\mathbb{P}$ par

$$\mathbb{P}(A, g) = P[X_1 \in A / X_0 = g]$$

pour $A \in \mathcal{B}_G$ et $g \in G$.

Et Soit μ la loi des Y_n i.e.

$$\mu(A) = P[Y_n \in A] \quad , \quad A \in \mathcal{B}_G$$

où $\mathcal{B}_G$ sont les boréliens de G .

On vérifie immédiatement que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov d'espace des états G i.e.

$$P[X_{n+1} \in A/X_0, X_1, \dots, X_n] = P[X_{n+1} \in A/X_n].$$

Nous avons alors

Proposition 11. $\forall A \in \mathcal{B}_G, \forall g \in G$.

$$\mathbb{P}(A, g) = \mu(A.g^{-1}).$$

Démonstration.

Si $G = \mathbb{R}$, le groupe additif.

Par définition de la probabilité conditionnelle on a $\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P[X_{n+1} \in A/X_n]$ est l'unique v.a $\sigma(X_n)$ -mesurable qui vérifie

$$P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] = \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A/X_n] dP$$

Soit φ la fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ (φ existe) tel que

$$\varphi(X_n) = P[X_{n+1} \in A/X_n].$$

Nous avons

$$\varphi(x) = P[X_{n+1} \in A/X_n = x] = P[X_1 \in A/X_0 = x].$$

$$\begin{aligned}
P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] &= \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A / X_n \in B] dP \\
&= \int_{\{X_n \in B\}} E[\mathbb{1}_A(X_{n+1}) / X_n] dP \\
&= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(X_{n+1}) dP \\
&= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\{X_{n+1} \in A\} \cap \{X_n \in B\}} dP \\
&= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(Y_{n+1} + X_n) dP. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A / X_n \in B] dP &= \int_B \varphi(x) P[X_n \in dx] \\
&= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(Y_{n+1} + X_n) dP \\
&= \int_G \int_B \mathbb{1}_A(y + x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy].
\end{aligned}$$

Par indépendance de Y_{n+1} et X_n nous avons

$$\int_G \int_B \mathbb{1}_A(y + x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] = \int_G \int_B \mathbb{1}_A(y + x) P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy].$$

Et en appliquant Fubini, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_G \int_B \mathbb{1}_A(y + x) P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy] &= \int_B P[X_n \in dx] \int_G \mathbb{1}_A(y + x) P[Y_{n+1} \in dy] \\
&= \int_B P[X_n \in dx] \int_G \mathbb{1}_{A-x}(y) P[Y_{n+1} \in dy] \\
&= \int_B P[X_n \in dx] \mu(A - x) \\
&= \int_B P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in A - x].
\end{aligned}$$

Par unicité de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = P[Y_{n+1} \in A - x].$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A, x) = P[Y_{n+1} \in A - x].$$

Si G est un groupe multiplicatif.

On suppose que G est un groupe topologique. Par définition de la probabilité conditionnelle nous avons

$\forall A \in \mathcal{B}_G, \forall x \in G, P[X_{n+1} \in A/X_n]$ est l'unique v.a $\sigma(X_n)$ -mesurable qui vérifie

$$P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] = \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A/X_n] dP$$

Soit φ la fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ (φ existe) tel que

$$\varphi(X_n) = P[X_{n+1} \in A/X_n].$$

Nous avons

$$\varphi(x) = P[X_{n+1} \in A/X_n = x] = P[X_1 \in A/X_0 = x].$$

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} \in A, X_n \in B] &= \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A/X_n \in B] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} E[\mathbb{1}_A(X_{n+1})/X_n] dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(X_{n+1}) dP \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(Y_{n+1} \cdot X_n) dP. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\{X_n \in B\}} P[X_{n+1} \in A/X_n \in B] dP &= \int_B \varphi(x) P[X_n \in dx] \\ &= \int_{\{X_n \in B\}} \mathbb{1}_A(Y_{n+1} \cdot X_n) dP \\ &= \int_G \int_B \mathbb{1}_A(y \cdot x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy]. \end{aligned}$$

Par indépendance de Y_{n+1} et X_n nous avons

$$\int_G \int_B \mathbb{1}_A(y+x) P[X_n \in dx, Y_{n+1} \in dy] = \int_G \int_B \mathbb{1}_A(y.x) P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy].$$

Et en appliquant Fubini, nous avons

$$\begin{aligned} \int_G \int_B \mathbb{1}_A(y.x) P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in dy] &= \int_B P[X_n \in dx] \int_G \mathbb{1}_A(y.x) P[Y_{n+1} \in dy] \\ &= \int_B P[X_n \in dx] \int_G \mathbb{1}_{A.x^{-1}}(y) P[Y_{n+1} \in dy] \\ &= \int_B P[X_n \in dx] \mu(A.x^{-1}) \\ &= \int_B P[X_n \in dx] P[Y_{n+1} \in A.x^{-1}]. \end{aligned}$$

Par unicité de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = P[Y_{n+1} \in A.x^{-1}].$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A, x) = P[Y_{n+1} \in A.x^{-1}].$$

□

Chapitre 3

Chaîne de Markov Image

Étant donnée une fonction mesurable f d'un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ dans un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$, et $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur E , il est naturel de se poser la question de savoir si la suite de variable aléatoire $(f(X_n))_n$, image de la suite $(X_n)_n$ par f , est une chaîne de Markov sur F . La proposition suivante donne des conditions suffisantes (cf G.Larabi [10]).

Proposition 12. [10]

Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurable, et soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov à valeurs dans E de noyau de transition $\mathbb{P}$. Soit f une application :

$$(E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$$

mesurable tel que

1. f est surjective

2. $x \mapsto \mathbb{P}(x, \cdot)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par f ,

$$\mathcal{G} = f^{-1}(\mathcal{F})$$

Si $(Y_n)_n$ est la suite de v.a à valeurs dans F , telle que $\forall n, Y_n = f(X_n)$, alors $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov sur F , de noyau de transition K défini par :

$$K(y, B) = \mathbb{P}(f^{-1}(y), f^{-1}(B)), \forall y \in F, \text{ et } \forall B \in \mathcal{F}.$$

Démonstration. On vérifie que K est un noyau de transition sur F

1) $\forall B \in \mathcal{F}, y \mapsto K(y, B)$ est $\mathcal{F}$ -mesurable. En effet, soient

$$g(x) = \mathbb{P}(x, \cdot) \quad \text{et} \quad h(y) = K(y, \cdot).$$

Nous avons

$$h = g \circ f^{-1}$$

Soit $B_1 \in \mathcal{B}_{[0,1]}$,

$$h^{-1}(B_1) = f \circ g^{-1}(B_1) = f(g^{-1}(B_1)).$$

$G_1 = g^{-1}(B_1) \in \mathcal{G}$ car g est $\mathcal{G}$ -mesurable. Donc $\exists F_1 \in \mathcal{F}$ tel que

$$G_1 = f^{-1}(F_1) \text{ et } h^{-1}(B_1) = f(G_1) = F_1$$

par conséquent h est $\mathcal{F}$ -mesurable.

2)

$$\forall y \in F, B \mapsto K(y, B) = \mathbb{P}(\cdot, f^{-1}(B))$$

définie une mesure de probabilité car $\mathbb{P}$ est un noyau de transition.

De (1) et (2) il en résulte que K est un noyau de transition sur F .

Il reste à montrer que $(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov d'espace des états F et de noyau de transition K .

Soient $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{B}_n$ les tribus engendrées respectivement par $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

On a $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n, \forall n$. En effet

$$Y_k = f \circ X_k, \forall k, 1 \leq k \leq n.$$

Donc Y_k est $\sigma(X_k)$ mesurable et alors $\mathcal{A}_n$ mesurable. D'où l'inclusion

$$\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$$

$(Y_n)_n$ est une chaîne de Markov si et seulement si

$$\mathbb{E}[\phi(Y_{n+1})|\mathcal{B}_n] = \mathbb{E}[\phi(Y_{n+1})|\sigma(Y_n)] \quad (*).$$

Pour toute fonction ϕ mesurable et bornée. Il suffit de vérifier (*) pour les fonctions indicatrices car toute fonction mesurable bornée est limite d'une suite de fonction indicatrices croissante.

Soient $A \in \mathcal{F}$ et $\phi = \mathbb{1}_A$. On a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_{n+1})|\mathcal{B}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in A\}}|\mathcal{B}_n] = P[Y_{n+1} \in A|\mathcal{B}_n]$$

et

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_{n+1})|\sigma(Y_n)] = P[Y_{n+1} \in A|\sigma(Y_n)].$$

En utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle et des chaînes de Markov, on aura

$$\begin{aligned} P[Y_{n+1} \in A|\mathcal{B}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_{n+1})|\mathcal{A}_n]|\mathcal{B}_n] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y_{n+1})|\sigma(X_n)]|\mathcal{B}_n] \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in A\}}|\sigma(X_n)] &= P[Y_{n+1} \in A|\sigma(X_n)] \\ &= P[X_{n+1} \in f^{-1}(A)|\sigma(X_n)] \\ &= \mathbb{P}[X_n, f^{-1}(A)] \\ &= \mathbb{P}[f^{-1}(Y_n), f^{-1}(A)] \\ &= K(Y_n, A). \end{aligned}$$

D'autre part

$$K(Y_n, A) = P[Y_{n+1} \in A|\sigma(Y_n)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in A\}}/\sigma(Y_n)].$$

Donc

$$\begin{aligned} P[Y_{n+1} \in A|\mathcal{B}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in A\}}|\sigma(Y_n)]|\mathcal{B}_n] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} \in A\}}/\sigma(Y_n)]|\mathcal{B}_n] \\ &= P[Y_{n+1} \in A|Y_n] \end{aligned}$$

D'où le résultat

□

Conclusion

A partir des notions de base exposées qui restent tout à fait partielles, le problème de décrire le comportement de la chaîne de Markov

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_{n-1} X_{n-1}$$

reste posé.

Nous pensons pour cela à tester d'abord l'étude de marches aléatoires sur des sous-ensembles de matrice en commençant par détailler le comportement de la marche aléatoire sur le groupe du cube, dans des cas d'espèce de la matrice de transition P et en considérant la marche aléatoire sur le sous- groupe des matrices carrées d'ordre 3 associée. De même pour la marche aléatoire $(Z_n)_n$, il s'agira d'abord de choisir des cas simples en spécifiant les lois des variables aléatoires $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Bibliographie

- [1] J.M.Arnaudies, H.Frayesse, *Algèbre linéaire et géométrie*, Dunod, 1990
- [2] Guivarch's et Roynette, *Marches aléatoires dans un groupe*, Lectures Notes, Springer Verlag Berlin-NY, 1975.
- [3] D.Revuz, *Markov Chains*, North Holland 1984
- [4] B.Doubrovine, S.Novikov et A fomenko, *Géométrie contemporaine, Méthodes et Application*, Mir Moscou, 1982
- [5] K.L.Chung, *First Cours In Probability and Markov Chains* Springer - Verlag, 1980
- [6] P.Diaconis, *Groups Représentation, Applications to Statistics and Probability* Lecture notes in Mathematics - Monograph serie Shanti S.Gupta, 1988
- [7] Boudiba Mohand Arezki, *Cours Polycopie de 3^{eme} Année, Licence de Maths, Calcul de Probabilités et Chaînes de Markov* Département de mathématique UMMTO, 2008
- [8] H.S.M.Coxeter, *Regular Poytopes* METHUEN, CO-LTD London, 1948
- [9] H.S.M.Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley et Sons, INC New York.London.Sydney.Toronto, 1969.

- [10] Ghenima LARABI, *Chaîne de Markov et Applications* , Memoire de Magister UMMTO, 2008