

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMARI, Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**Mémoire de Fin d'Etude**

En vue de l'obtention du diplôme

*Master académique en Automatique*  
*Option commande des systèmes*

# *Thème*

*Conception de filtres à réponse impulsionnelle  
infinie à base d'un algorithme d'optimisation par  
essaim de particules*

Dirigé par :

M<sup>r</sup> HAMMOUCHE Kamal

Présenté par :

M<sup>r</sup> HAMMOU Farid

Soutenu le : 20 / 10 / 2010.

*Promotion 2009*

## REMERCIEMENTS

*Au terme de ce modeste travail, nous tenons à remercier tout d'abord ALLAH le tout Puissant, qui nous a donné la volonté et la patience pour réaliser ce travail.*

*J'adresse mes remerciements à mon directeur de la recherche*

*M. HAMMOUCHE maître conféréncier 'A' à la faculté des sciences et techniques de Tizi-Ouzou qui a accepté de m'encadrer. Mes sincères remerciements vont également à M. MAIDI maître conféréncier 'B' à l'université de Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, pour son aide et ses précieux conseils.*

*Je tiens aussi à remercier les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon travail.*

*Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et chaleureux remerciements à mas familles, ainsi que toutes les personnes ayant contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail, pour leur confiance et leurs conseils.*

*Farid.*

## Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail :*

*A mon cher père, papa sache que les sacrifices que tu as faits pour la réussite de tes enfants ne sont pas restés vains.*

*A ma chère mère, la plus gentille et adorable de toutes les mamans, qui a su m'encourager, avec ses prières, tout au long de mon cursus.*

*Que Dieu vous garde et qu'Il vous accorde une longue vie pleine de santé, d'amour et de paix.*

*A mes frères et sœurs.*

*En hommage, à ma défunte chère grand mère, à mon défunt cher grand père que Dieu vous bénisse et accueille en Son Vaste Paradis.*

*A toute ma famille.*

*A tous mes amis, particulièrement, Karim, Akli, Samira, Farida, Wahid et Eve.*

---

# *Liste des Abbreviations*

---

## Liste des abréviations

$T_e = \Delta t$  : période d'échantillonnage.

$F_e$  : fréquence d'échantillonnage.

$F_{\max}$  : fréquence maximale du signal.

$x(t)$  : signale numérique monodimensionnelle.

$k$  : nombre des échantillons.

$x(k)$  : signal d'entrée échantillonné.

$y(k)$  : signal de sortie échantillonné.

$X(f)$  : transformé de Fourier du signal  $x(k)$ .

$\theta$  : pulsation du signal  $X(f)$ .

$G(f)$  : fonction de transfert du filtre en fréquence.

$Y(f)$  : transformé de Fourier du signal  $y(k)$ .

$g(k)$  : réponse impulsionnelle.

$G(z)$  : fonction de transfert en  $z$ .

$N, M$  : nombres d'échantillons des signaux  $Y(f)$  et  $X(f)$  respectivement.

$a_n, b_n$  : les coefficients du dénominateur et du numérateur respectivement .

$\delta_1$  : erreur d'approximation (bande de fréquence bloqué).

$\pm\delta_2$  : erreur entre les deux bandes passante et bloqué.

$z$  : la variable dans le plan des  $z$

$C, D$  : des constantes.

$D(z), N(z)$  : le dénominateur et le numérateur respectivement.

$P_i$  : pôles du système.

$Q(z)$  : le polynôme caractéristique.

$A, B, C,$  et  $D$  : des matrices de dimension approprié.

$\lambda_i$  : les valeurs propre.

RIF : filtre a réponse impulsionnelle fini.

RII : filtre a réponse impulsionnelle infini.

$M$  : ordre du filtre RIF.

$Re, Im$  : partie réel et imaginaire respectivement.

$g_d$  : réponse impulsionnelle désiré.

$g_d(f)$ : réponse fréquentielle désiré.

$f_e(t)$  : signal fenêtre.

rect : fenêtre rectangulaire.

$g_r(t)$  : réponse impulsionnelle obtenu par pondération ou troncature.

FI : fonction intégrale.

SI, SC : fonction sinus intégrale et sinus cardinale.

Tri : fenêtre triangulaire.

$\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  : paramètres fixe.

TFD : transformé de Fourier discrète.

TFR : transformé de Fourier rapide.

$\hat{g}(k)$  : approximation de  $g(k)$ .

L : longueur de la réponse du filtre RIF.

$\psi$  : la relation d'interpolation.

$d(k)$ ,  $y(k)$  : réponse désiré et calculé par le filtre respectivement.

$G_a(s)$  : fonction de transfert du filtre analogique.

arg : argument.

arctan : arc tangent.

$x_a(t)$  : signale analogique.

$X_a(f)$  : transformé de Fourier du signal analogique.

exp : exponentielle.

$C(t)$  : fonction saut analogique.

J : critère à minimiser.

$L_1$  : norme 1.

$L_2$  : norme euclidienne.

$L_\infty$  : norme infini.

$R^i$  : matrice défini positif.

$\theta^i$  : solution du problème optimale.

I : matrice identité.

$\alpha^i$  : paramètre à fixer.

$H_f(\theta)$  : matrice Hessian.

$\vec{x}_1$  : vecteur des positions des particules.

$\vec{v}_1$  : vecteur des vitesse des particules.

$\varphi_1, \varphi_2$  : variables aléatoire.

$w$  : poids d'inertie.

$x_{\text{best}}$  : la meilleur solution.

$\vec{p}_g$  : la meilleur position des particules.

$X^*$  : la meilleur position de toutes les particules.

1D : une dimension.

2D : deux dimensions.

$f(x,y)$  : signal numérique deux dimensions.

$F(u,v)$  : transformé de Fourier de  $f(x,y)$  .

$u,v$  : les composante fréquences.

$\varphi$  : la phase.

$h(x,y)$  : réponse impulsionnelle 2D.

$\delta(x,y)$  : impulsion 2D.

$b(x,y)$  : brosse d'impulsions.

$x(k,l)$  : signal numérique 2D.

$d(k,l)$  : impulsion unité 2D.

$u(k,l)$  : échelon unité 2D

TZ : transformé en z.

PSO : optimisation par essaim de particules.

---

# *Liste des Figures et Tableaux*

---

## Liste des figures

Fig. 1.1 : Réponses fréquentielle idéalisées des différents filtres idéaux

Fig. 1.2 : Gabarit d'un filtre passe haut

Fig. 1.3 : Schéma bloc d'une réalisation non récursive

Fig. 1.4 : Schéma bloc d'une réalisation récursive

Fig. 1.5 : Structure canonique parallèle

Fig. 1.6 : Structure canonique parallèle

Fig. 1.7 : Décomposition en série

Fig. 1.8 : Décomposition parallèle

Fig. 1.9 : Tableau du critère de Jury

Fig. 2.1 : Gabarit fréquentiel d'un filtre passe bas

Fig. 2.2 : Allures des fonctions sinus Cardinal et sinus Intégral

Fig. 2.3 : Réponse en fréquence d'un filtre RIF passe bas

Fig. 2.4 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre rectangulaire

Fig. 2.5 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de triangulaire (Bartlett)

Fig. 2.6 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de Hann (ou Hanning)

Fig. 2.7 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de Hamming

Fig. 2.8 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de Blackman

Fig. 2.9 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de KAISER

Fig. 2.10 : Bloque de diagramme utilisé pour l'identification du filtre RIF

Fig. 2.11 : Décomposition de la fonction de transfert

Fig. 3.1 : Equivalence du plant des  $s$  au plant des  $z$

Fig. 3.2 : Equivalence d'une fonction avec son intégrale

Fig. 3.3 : Domaine de stabilité du filtre dans  $s$  et dans  $z$

Fig. 3.4 : L'erreur due au recouvrement

Fig. 3.5 : Synthèse d'un filtre RII par optimisation temporelle

Fig. 3.6 : Synthèse d'un filtre RII par optimisation dans le domaine fréquentielle

Fig. 3.7 : Schéma de principe du déplacement d'une particule

Fig. 3.8 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction du poids d'inertie

Fig. 3.9 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de la taille de la population initiale

Fig. 3.10 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de l'ordre du filtre

Fig. 3.11 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction du nombre d'itérations

Fig. 3.12 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de la longueur du signal d'entrée

Fig. 3.13 : Evolution de la fitness dans chaque itération

Fig. 3.14 : Les réponses impulsionnelle désiré et obtenue

Fig. 3.15 : L'erreur entre les deux réponses impulsionnelle désiré et obtenue

Fig. 3.16 : L'erreur entre les deux sorties désiré et obtenue

- Fig. 4.1 : Signal sinusoïdal bidimensionnelle
- Fig. 4.2 : Modification des paramètres d'une sinusoïde bidimensionnelle
- Fig. 4.3 : Illustration de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences
- Fig. 4.4 : La causalité
- Fig. 4.5 : Section horizontale du filtr circulaire passe-bas
- Fig. 4.5a : Réponse fréquentielle du filtre circulaire passe-bas
- Fig. 4.6 : Section horizontale de la fenêtre Gaussienne
- Fig. 4.7 : Section horizontale du filtre circulaire passe-haut idéale
- Fig. 4.7a : Réponse fréquentielle du filtre circulaire passe-haut idéale
- Fig. 4.8: Filtre passe-bande idéal
- Fig. 4.8a : Réponse fréquentielle du filtre passe-bande idéal
- Fig. 4.9 : Filtre coupe-bande idéal
- Fig. 4.9a : Réponse fréquentielle du filtre coupe-bande idéal
- Fig. 4.10 : Diagramme illustratif de l'évolution de la méthode des PSO.
- Fig. 4.11 : Le schéma bloc du filtrage avec un filtre numérique
- Fig. 4.12 : Réponse fréquentielle du filtre désiré
- Fig. 4.13 : La réponse fréquentielle du filtre RII obtenu
- Fig. 4.14 : Evolution de la fitness dans chaque itération
- Fig. 4.15 : Réponse fréquentielle du filtre passe bande désiré
- Fig. 4.15 : Réponse fréquentielle du filtre passe bande conçu
- Fig. 4.16 : Evolution de la fitness en fonction des itérations

## Liste des tableaux

- Table. 3.1: Temps de calcul moyen en fonction du poids d'inertie
- Table. 3.2 : Fitness moyenne en fonction du poids d'inertie
- Table. 3.3 : Temps de calcul moyen en fonction de la taille de la population initiale
- Table. 3.4 : Fitness moyenne en fonction de la taille de la population initiale
- Table. 3.5 : Temps de calcul moyen en fonction de l'ordre du filtre RII
- Table. 3.6 : Fitness moyenne en fonction de l'ordre du filtre RII
- Table. 3.7 : Fitness moyenne en fonction du nombre d'itérations
- Table. 3.8 : Temps de calcul moyen en fonction du nombre d'itérations
- Table. 3.9 : Fitness moyenne en fonction de la longueur du signal d'entrée
- Table. 3.10 : Temps de calcul moyen en fonction de la longueur du signal d'entrée
- Table. 3.11 : Récapitulatif des meilleurs valeurs des paramètres après les testes

---

# *Sommaire*

---

Introduction générale.....	1
<b>Chapitre I : Notions de base du filtrage numérique</b>	
1.1. Introduction .....	3
1.2. Généralités .....	3
1.2.1 Définitions.....	3
1.2.2 Relations fondamentales .....	3
1.3. Classification des filtres numériques .....	6
1.3.1 Classification selon la réponse fréquentielle.....	6
1.4. Structures de réalisation .....	9
1.4.1 Structures récursive et non récursive .....	9
1.4.2 Structures canoniques .....	12
1.4.2.1 Décomposition en série.....	12
1.4.2.2 Décomposition parallèle .....	13
1.5. Stabilité d'un filtre numérique .....	14
1.5.1. Critère de jury .....	15
1.5.2. La stabilité interne.....	16
1.6. Objectif du filtrage numérique .....	17
1.7. Conclusion1 .....	18
<b>Chapitre II : Filtres RIF monodimensionnelle</b>	
2.1 Introduction .....	19
2.2 Définition .....	19
2.3 Synthèse des filtres RIF .....	21
2.3.1 Synthèse par la méthode des fenêtres .....	21
2.3.2 Synthèse par série de Fourier .....	33
2.3.3 Synthèse par échantillonnage en fréquence .....	35
2.3.4 Synthèse basée sur les techniques d'optimisation .....	37
2.4 Réalisation récursive des filtres RIF .....	38
2.5 Conclusion.....	40
<b>Chapitre III : Filtre à RII monodimensionnelle</b>	
3.1 Introduction .....	41
3.2 Définition d'un filtre RII.....	41

3.3 Méthodes basées sur la transformation d'un filtre analogique en un filtre numérique .	42
3.3.1 Équivalence de la dérivation.....	43
3.3.2 Équivalence de l'intégrale (transformation bilinéaire numérique).....	47
3.3.2.1 Correspondance des fréquences.....	50
3.3.3 Echantillonnage de la réponse impulsionnelle.....	50
3.3.3.1 Recouvrement.....	52
3.4 Méthodes basées sur les techniques d'optimisation.....	55
3.4.1 Méthodes de descente.....	56
3.4.1.1 Méthode de descente du gradient.....	57
3.4.1.2 Méthode de Newton-Raphson (NR).....	57
3.4.1.3 Method Davidon-Fletcher-Powell (DFP).....	59
3.4.1.4 Méthode de Levenberg-Marquardt (LM).....	59
3.4.2 Métaheuristiques d'optimisation.....	59
3.4.3 Optimisation par essaim de particules.....	60
3.4.4 Algorithme : <i>Optimisation par essaim particulaire (en variable continues)</i> .....	61
3.5 Tests et résultats.....	62
3.5.1 Choix du poids d'inertie.....	62
3.5.2 Choix de la taille de la population.....	63
3.5.3 Ordre du filtre.....	64
3.5.6 Choix du nombre d'itérations.....	65
3.5.7 Longueur du signal d'entrée.....	66
3.6 Résultats de simulation.....	67
3.7 Conclusion.....	69

## **Chapitre IV : Filtrage numérique en 2 dimensions**

4.1 Introduction générale.....	70
4.2 Généralités.....	70
4.2.1 Signaux bidimensionnels continus.....	70
4.2.1.1 La transformée de Fourier 2D.....	70
4.2.1.2 Convolution 2D.....	73
4.2.1.3 Echantillonnage des signaux 2D.....	73
4.2.2 Signaux bidimensionnels numériques.....	76
4.2.2.1 Transformée de Fourier numérique d'un signal 2D.....	76
4.2.2.2 Transformée de Fourier discrète d'un signal numérique 2D.....	77
4.3 Filtrage numérique des signaux bidimensionnels.....	78

4.3.1 Propriétés .....	78
4.3.1.1 Linéarité .....	78
4.3.1.2 Stationnarité .....	78
4.3.1.3 Causalité.....	79
4.3.1.4 Equation récurrente.....	79
4.3.2 Transformé en z bidimensionnelle.....	80
4.3.2.1 Lien avec la transformé de Fourier .....	80
4.3.2.2 Fonction de transfert des filtres RII .....	81
4.3.2.3 Stabilité .....	81
4.3.3 Exemples de filtres 2D.....	82
4.3.3.1 Filtres passe-bas .....	83
4.3.3.2 Filtre passe-haut .....	84
4.3.3.3 Filtre passe-bande .....	85
4.3.3.4 Filtre coupe-bande .....	86
4.4 Synthèse des filtres RII bidimensionnels .....	87
4.4.1 Critères d'optimisation.....	88
4.4.1.1 Domaine spatial .....	88
4.4.1.2 Domaine fréquentiel.....	89
4.5 Test et résultats.....	91
4.5.1 Filtre passe bas.....	92
4.5.2 Filtre passe bande.....	94
4.6 Conclusion.....	95
Conclusion générale .....	96

---

---

# *Introduction Générale*

---

---

## Introduction générale

Les filtres numériques ont constitué la branche la plus étudiée du traitement numérique des signaux. Ils ont été développés et étudiés dans but de pouvoir simuler ou remplacer les filtres analogiques sur les systèmes numériques. Les applications du filtrage numérique sont innombrables comme par exemple dans le domaine de l'acoustique (*lecteurs MP3 et DVD*), l'imagerie et le traitement visuelle (*appareilles photos numérique et applications biomédicales*), les téléphones mobiles, le traitement des données sismique et le diagnostic des machines, etc.. La principale tache du filtrage reste la réduction du bruit, ils existent cependant d'autres taches comme le rehaussement ou la détection des contours des images. Leur conception revient à chercher la fonction de transfert de manière à satisfaire des caractéristiques fréquentielles désirées.

Les filtres numériques peuvent être regroupés en deux grandes familles. Les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII). Les filtres RIF présentent plusieurs avantages par rapport aux filtres RII mais restent très couteux car ils nécessitent un grand nombre de coefficients dans la fonction de transfert.

On s'intéressera dans ce mémoire aux filtres RII. La synthèse de ces filtres consiste soit transposer les méthodes de synthèse des filtre analogiques au cas numérique soit à faire appel à des procédures d'optimisation. Ces méthodes cherchent à rendre minimum l'erreur d'approximation des caractéristiques du filtre désiré par celle d'un filtre réalisable, selon un critère approprié.

Le but de notre travail est de synthétiser un filtre numérique à réponse impulsionnelle **in**finie à base d'un algorithme d'optimisation qui est l'algorithme à essaims de particules (PSO). Pour cela, nous allons scinder notre mémoire en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur le filtrage numérique. Les différents types de filtres numériques, leurs relations fondamentales, les différents filtres numériques, leurs classifications ainsi que leurs diverses structures de réalisation sont principalement présentés. Nous allons aussi évoquer la stabilité des ces systèmes et les méthodes permettent de la tester.

Dans le deuxième chapitre nous rappelons quelques définitions sur les filtres numériques à réponse impulsionnelle finie (RIF) tout en présentant leurs avantages et leurs inconvénients. Les principales méthodes de synthèse de ces filtres seront brièvement revues.

Le troisième chapitre est dédié aux filtres à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) monodimensionnelle. Les principales méthodes de synthèse de ces filtres seront présentées. On décrira en détails ensuite une méthode de conception d'un filtre RII à base de la méthode d'optimisation par essaims de particules (PSO). Les résultats de cette approche seront présentés à la fin de ce chapitre.

Le chapitre 4 est une extension du chapitre précédent aux cas bidimensionnelle. Nous aborderons sur les généralités sur les filtres numériques bidimensionnels à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII 2D).

L'approche PSO pour la synthèse d'un filtre RII présentée dans le chapitre 3 sera à nouveau appliquée à la conception d'un filtre RII 2D. Les résultats de cette approche clôtura ce chapitre.

---

*Chapitre I:*

*Notions de base du filtrage  
numérique*

---

## 1.1 Introduction

Les filtres numériques ont constitué la branche la plus étudiée du traitement numérique des signaux. Ils ont été développés et étudiés dans but de pouvoir simuler ou remplacer les filtres analogiques sur les systèmes numériques.

On présentera dans ce chapitre quelques généralités sur les filtres numériques, leurs relations fondamentales sont rappelées, les différents types de filtres numériques sont présentés ainsi que leurs différentes structures de réalisation.

## 1.2 Généralités

### 1.2.1 Définitions

Un filtre est un système qui modifie le contenu spectral d'un signal injecté en son entrée en atténuant ou éliminant certaines composantes spectrales indésirables.

Un filtre numérique est un élément qui effectue un filtrage à l'aide d'une succession d'opérations mathématiques sur un signal discret. Contrairement aux filtres analogiques, qui sont réalisés à l'aide d'un agencement de composants physiques ([résistance](#), [condensateur](#), [inductance](#), [transistor](#), etc.), les filtres numériques sont réalisés soit par des circuits intégrés dédiés, des processeurs programmables ([FPGA](#), [microprocesseur](#), [DSP](#), [microcontrôleur](#), etc.), soit par logiciel dans le cas d'un ordinateur.

Les filtres numériques peuvent, en théorie, réaliser la totalité des effets de filtrage pouvant être définis par des fonctions mathématiques ou des algorithmes. La seule principale limitation des filtres numériques est la vitesse. La vitesse du filtre est limitée par la vitesse du processeur.

### 1.2.2 Relations fondamentales

Un signal discret  $x(k \Delta t)$  peut être obtenu par échantillonnage d'un signal continue  $x(t)$  avec une période d'échantillonnage  $\Delta t$ . Cette période doit évidemment respecter le théorème de Shanon suivant :

$$F_e = \frac{1}{T_e} \geq 2 F_{max} \quad (T_e = \Delta t) \quad (1.1)$$

$F_{max}$  étant la fréquence maximale du signale  $x(t)$ .

Pour des raisons de simplicité ( $\Delta t=1$ ), on note

$$x(k) = x(k\Delta t) \quad (1.2)$$

La transformé de Fourier d'un signal discret  $x(k)$  est

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi k\Delta t f} = X(e^{-j\vartheta}) \quad (1.3)$$

avec  $\vartheta = 2\pi f k \Delta t = \omega k \Delta t$  (1.4)

ou bien simplement

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi k f} \quad (1.5)$$

La réponse fréquentielle ou harmonique  $G(f)$  d'un système linéaire invariant dans le temps est liée aux transformées de Fourier  $Y(f)$  et  $X(f)$  des signaux de sortie et d'entrée par la relation bien connus suivante :

$$Y(f) = G(f) X(f) \quad (1.6)$$

Cette relation indique que les répartitions fréquentielle de l'amplitude et de la phase du signal d'entrée  $x(k)$  sont modifiées par le système, selon la forme particulier de la fonction complexe  $G(f)$ , pour satisfaire au mieux les exigences du traitement particulier envisagé. C'est la forme particulière de la réponse fréquentielle  $G(f)$  (*réponse harmonique*) qui détermine les atténuations ou les amplifications des composantes de diverses fréquences. Si, par exemple, un signal d'entrée est la somme d'un signal utile et d'un signal indésirable occupant des bandes de fréquences différentes dans  $X(f)$ , on peut en atténuant complètement la bande de fréquence indésirable, isoler le signal utile. Ceci est un peu à l'image de la séparation des grains de sable et des cailloux par filtrage. Toutefois, le filtrage numérique n'est nullement limité à ce cas particulier de traitement.

Dans le domaine temporel, la relation correspondante à (1.6) est le produit de convolution bien connus :

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g(l) x(k-l) \quad (1.7)$$

où  $g(k)$  est la réponse impulsionnelle du système.

La transformation en  $z$  des deux membres de cette relation conduit à :

$$Y(z) = G(z) X(z) \quad (1.8)$$

où  $G(z)$  est la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $g(k)$ , elle correspond à la fonction de transfert du système.

Pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps, les signaux d'entrée et de sortie sont liés par l'équation aux différences linéaires à coefficients constants d'ordre  $N$  suivante :

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (1.9)$$

où l'ensemble des coefficients  $a_n$  et  $b_m$  représentent le comportement du système.

L'application de la transformée de Fourier aux deux membres de l'équation (1.9) nous permet de d'aboutir à  $G(f)$  telle que :

$$G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{-j2\pi f m}}{\sum_{n=0}^N a_n e^{-j2\pi f n}} \quad (1.10)$$

L'application de la transformée en  $z$  aux deux membres de l'équation (1.4) nous permet d'aboutir à  $G(z)$  telle que :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (1.11)$$

Les relations (1.6) et (1.9) sont fondamentales pour le filtrage numérique.

## 1.3 Classification des filtres numériques

On peut classer les filtres selon plusieurs critères ;

### 1.3.1 Classification selon la réponse fréquentielle

Il est d'usage de classer les filtres par leurs réponses fréquentielles en quatre catégories, filtres passe-bas, passe-haut, passe bandes et coupe bandes. En plus ces spécifications sont souvent réalisées en ce sens tout ce qui doit être atténué doit l'être complètement tout ce qui doit être transféré à la sortie doit l'être sans modification. Les réponses fréquentielles idéalisées correspondant aux classes mentionnées ci-dessus sont présentées sur la figure (1.1). Sur cette figure uniquement la période principale  $[-1/2, +1/2]$  de  $G(f)$  est représentée. Si le filtrage est effectué sur un signal numérique provenant de l'échantillonnage d'un signal analogique, pour une correspondance correcte des fréquences, il faut faire intervenir la période d'échantillonnage  $\Delta t$ . Dans ce cas la période principale devient  $[-1/2 \Delta t, +1/2 \Delta t]$ . Il ne faut pas oublier en plus que la réponse impulsionnelle  $g(k)$  est un signal numérique et que sa transformée de Fourier, c'est-à-dire sa réponse fréquentielle  $G(f)$  est un signal périodique.

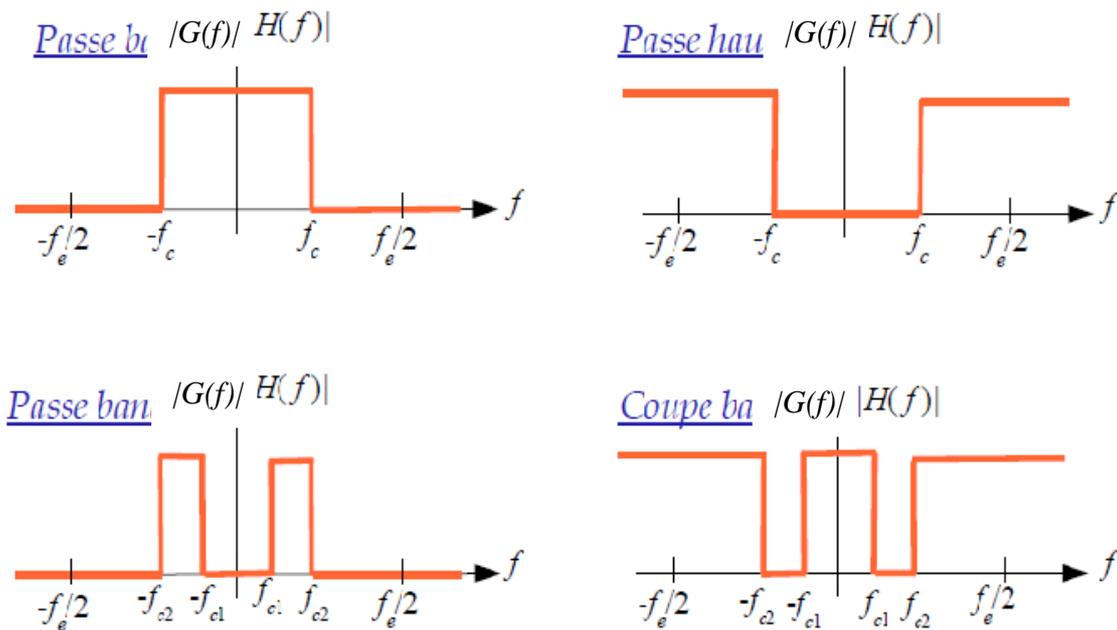


Fig. 1.1 : Réponses fréquentielle idéalisées des différents filtres idéaux

A cause de la nature idéalisée de ces réponses fréquentielles, les filtres pratiquement réalisables ne peuvent satisfaire ce type de spécifications que d'une manière approximative. C'est pour quoi, dans des problèmes pratiques, les spécifications sont données par tolérances. Ceci constitue *un gabarit* que doit satisfaire la réponse fréquentielle  $G(f)$ . Par exemple dans les cas d'un filtre passe-haut, le gabarit que l'on peut avoir est présenté dans la figure (1.2). Une réponse fréquentielle qui satisfait ces spécifications dans les limites des tolérances y est également indiquée. Dans la partie où une atténuation totale idéale est souhaitée, on peut tolérer une erreur d'approximation  $\delta_1$ . C'est la bande des fréquences bloquées. Dans la bande passante ou l'on souhaite idéalement une amplitude unité, on peut tolérer une erreur de  $\pm\delta_2$ . Entre deux bandes, il y a une zone de transition de largeur finie non nulle  $(f_1, f_2)$ , dans la quelle la réponse fréquentielle passe de bande coupée à la bande passante.

La plus part des filtres pratiques sont spécifiés d'une manière similaire à la figure (1.2), sans intervenir la phase. Celle-ci est généralement spécifiée par des contraintes de causalité et stabilité. Ces contraintes découlent des restrictions posées par la fonction de transfert  $G(z)$  correspondante, qui doit avoir des pôles à l'intérieure du cercle de l'unité.

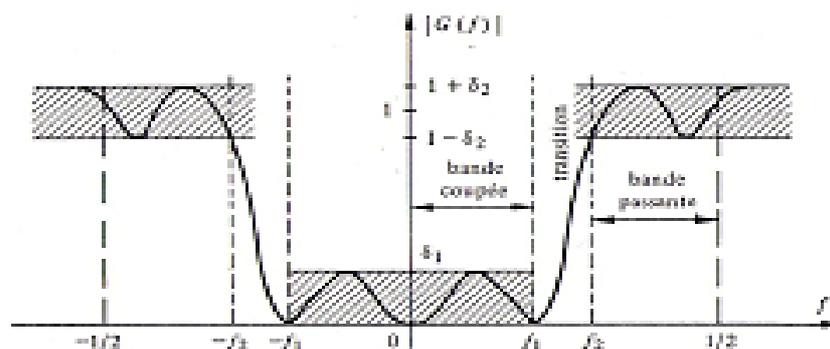


Fig. 1.2 : Gabarit d'un filtre passe haut

### 1.3.2 Classification selon la réponse impulsionnelle

Pour qu'un système soit réalisable, il faut qu'il soit simultanément causal et stable [Coequerez et Philipp, 1995],[Najim, 2006]. Il faut également que le filtrage soit effectué avec un nombre fini d'opérations arithmétiques de précision nécessairement fini (*limitée*). Par exemple on ne peut pas utiliser le produit de convolution pour un système causal et stable, si la réponse impulsionnelle est de durée infinie.

Pour un tel système on a :

$$y(k) = \sum_{l=0}^{+\infty} g(l) x(k-l) \quad (1.12)$$

La mise en œuvre de la relation (1.12) nécessite une infinité de coefficients de  $g(l)$  caractérisant le système. On recourt alors une relation récursive du type (1.9) pour obtenir les mêmes résultats. Ceci montre

l'importance de la durée de la réponse impulsionnelle d'un système. C'est pour quoi on subdivise les systèmes en deux larges catégories selon la durée de la réponse impulsionnelle. Ces deux catégories sont les suivantes :

- *Système à réponse impulsionnelle infinie (RII)* : ces systèmes sont caractérisés par des réponses impulsionnelles infinies. Autrement dit, les échantillons de  $g(k)$  sont non nuls sur un intervalle infini.

$$k_0 \leq k \leq +\infty$$

- *Système à réponse impulsionnelle finie (RIF)* : ces systèmes sont caractérisés par des réponses impulsionnelles finies. Autrement dit, les échantillons de  $g(k)$  sont non nuls seulement sur un intervalle de durée finie  $L$  avec :

$$k_0 \leq K \leq k_0 + L - 1$$

### 1.3.3 Classification selon leurs réalisations

Une deuxième classification permet de distinguer entre les divers moyens de mise en œuvre d'un système donnée pour réaliser l'opération de filtrage. On distingue généralement trois cas [Coequerez et Philipp, 1995] :

- *Réalisation transversale ou non récursive* : dans un système réalisé d'une manière non récursive, l'opération de filtrage est réalisée à l'aide de la relation suivante :

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} g(l) x(k-l) \quad (1.13)$$

Le signal de sortie dépend seulement de la valeur présente et des valeurs précédentes du signal d'entrée.

- *Réalisation récursive* : dans un système réalisé d'une manière récursive, le filtrage est effectué par une équation aux différences de type (1.9) que l'on peut, avec l'hypothèse que  $a_0 \neq 0$ , met sous la forme :

$$y(k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x(k-m) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0} y(k-n) \quad (1.14)$$

Dans ces systèmes, le signal de sortie dépend non seulement du signal d'entrée, mais également des valeurs précédentes du signal de sortie.

- *Réalisation par Transformée de Fourier Discrète (TFD)* : Celle-ci consiste à calculer la TFD du signal d'entrée, de multiplier le résultat par les coefficients de la réponse fréquentielle du filtre utilisé et de calculer la TFD inverse de nouveau. La TFD peut être efficacement calculée à l'aide d'un algorithme de

calcul *Transformée de Fourier rapide* (TFR). Les opérations utilisées se résument de la manière suivante :

$$\begin{cases} X(n) = F[x(k)] \\ Y(n) = G(n) X(n) \\ y(k) = F^{-1}[Y(n)] \end{cases} \quad (1.15)$$

La réalisation par TFD est plus avantageuse qu'une réalisation non récursive, si la durée  $L$  de la réponse impulsionnelle est supérieure à environ 30 coefficients.

## 1.4 Structures de réalisation

### 1.4.1 Structures récursive et non récursive

En examinant les relations (1.12) et (1.13) on remarque que le filtrage, récursif et le non récursif, est effectué à l'aide de trois opérations élémentaires simples qui sont le retard, la multiplication et l'addition (*la soustraction est considérée comme une addition avec changement de signe*) [Coequerez et Philipp, 1995]. La fonction de transfert d'un système effectuant un retard unité est :  $G(z) = z^{-1}$ . C'est pour quoi il est d'usage de présenter les retards unités dans les schémas-blocs des filtres par la notation  $z^{-1}$ . Les figures (1.3) et (1.4) montrent respectivement les schéma-blocs d'une réalisation non récursive (équation 1.13) et d'une réalisation récursive (équation 1.14). La multiplication est représentée par le symbole  $\otimes$ . Un coefficient inscrit sur la branche indiquera le produit par ce coefficient.

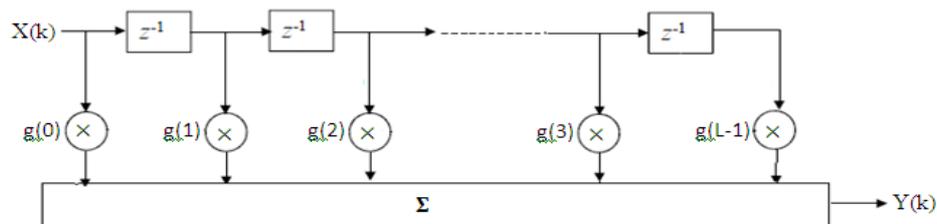


Fig. 1.3 : Schéma bloc d'une réalisation non récursive

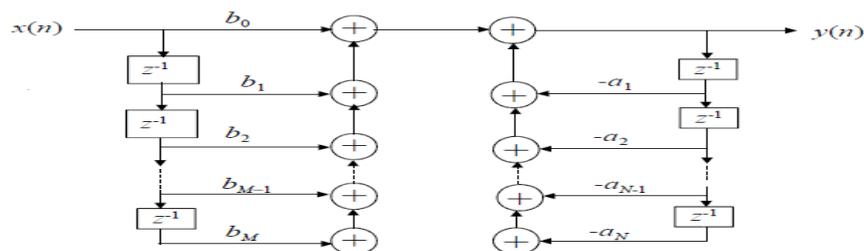


Fig. 1.4 : Schéma bloc d'une réalisation récursive

Il est possible de considérer la fonction de transfert  $G(z)$  correspondante à la relation (1.14) comme la mise en série de deux systèmes. Ceci permet d'obtenir une autre structure pour la réalisation de la même équation (1.14). On peut écrire la transformation en  $z$  des deux membres de la manière suivante :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = G_1(z) G_2(z) \quad (1.16)$$

avec

$$G_1(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (1.17)$$

et

$$G_2(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (1.18)$$

si  $w(k)$  présente la sortie du premier système, on a :

$$G_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (1.19)$$

En prenant la transforme inverse de cette relation, on obtient :

$$\sum_{n=0}^N a_n w(k-n) = x(k) \quad (1.20)$$

ou encore

$$w(k) = \frac{1}{a_0} x(k) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0} w(k-n) \quad (1.21)$$

Le signal  $w(k)$  est en même temps le signal d'entrée du deuxième système.

On a ainsi :

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} \quad (1.22)$$

La transforme en  $z$  de cette relation conduit au produit de convolution suivant :

$$y(k) = \sum_{m=0}^M b_m w(k-m) \quad (1.23)$$

La figure (1.5) montre le schéma-bloc global et le schéma-bloc détaillé correspondant à la relation (1.21) et aux équations (1.21) et (1.23) respectivement.

Comme cette structure utilise deux séries élémentaires de retard pour le même signal, on peut la mettre sous la forme présentée sur la figure (1.6). C'est une structure compacte pour réaliser une équation aux différences d'ordre  $N$ . Elle utilise un nombre minimum d'éléments de retard. Il existe plusieurs structures possédant un nombre minimum d'éléments de retard. Elles sont appelées *forme canonique* d'une réalisation.

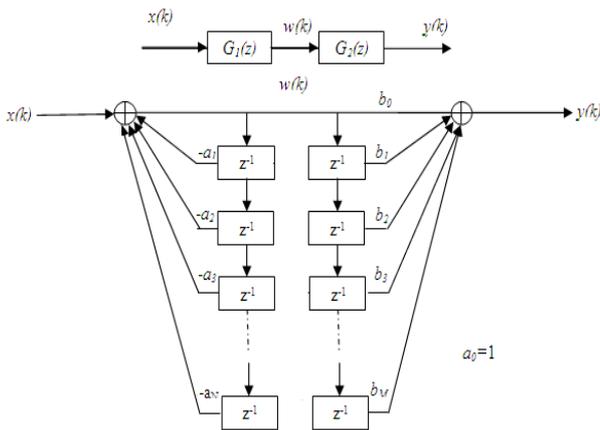


Fig. 1.5 : Structure canonique parallèle

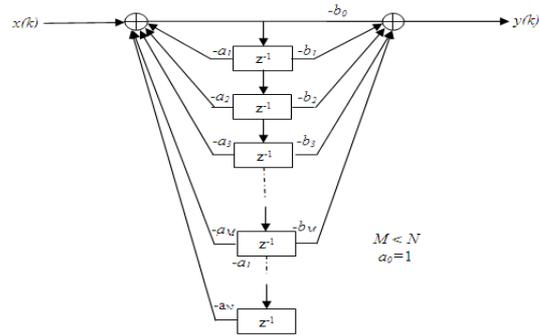


Fig. 1.6 : Structure canonique parallèle

### 1.4.2 Structures canoniques

Les structures de réalisation présentées précédemment, sont connues par leurs sensibilités aux erreurs d'arrondi dans les opérations arithmétiques à précision limitée. Car l'erreur sur un coefficient agit sur la position de tous les zéros et de tous les pôles. Cette sensibilité augmente avec l'ordre du système, c'est-à-dire avec l'ordre de l'équation aux différences. Les erreurs d'arrondi sont d'une importance secondaire, si le filtrage est effectué avec un logiciel sur un ordinateur qui permet une précision relativement grande. Toutefois, elles sont relativement grandes si le filtrage est effectué par un dispositif électronique spécialisé pour lequel la précision est coûteuse. Un moyen pour atténuer la sensibilité aux erreurs arrondi est de décomposer le système en systèmes plus simples. On peut considérer deux types de décompositions qui sont la décomposition en série et la décomposition en parallèle.

#### 1.4.2.1 Décomposition en série

Pour une décomposition en série, on exprime la fonction de transfert  $G(z)$  du système comme un produit de fonctions de transfert plus simple. On a :

$$G(z) = C \cdot G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot \dots \cdot G_k(z)$$

$$= C \cdot \prod_{i=1}^k G_i(z) \tag{1.24}$$

ou  $C$  est une constante.

La figure (1.7) illustre cette décomposition. Dans la plupart des cas, les fonctions de transfert partielles sont soit du premier ordre, soit du deuxième ordre. Pour un système du premier ordre, on a :

$$G_i(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}z^{-1}} \quad (1.25)$$

Pour simplifier, on a considéré  $a_{i0} = b_{i0} = 1$  ; la constante multiplicative globale  $C$  permet de tenir compte des constants dans  $G(z)$ . La fonction de transfert d'un système partielle de deuxième ordre est la suivante :

$$G_i(z) = \frac{1 + b_{j1}z^{-1} + b_{j2}z^{-2}}{1 + a_{j1}z^{-1} + a_{j2}z^{-2}} \quad (1.26)$$

Un système du deuxième ordre est plus compliqué qu'un système du premier ordre. Ils sont quand même utilisés car ils permettent d'avoir des pôles et des zéros complexes pour la fonction de transfert globale  $G(z)$ , tout en utilisant des coefficients réels  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  dans la réalisation récursive de la relation (1.22). Ainsi, on n'est pas limité à l'axe réel du plan des  $z$ .

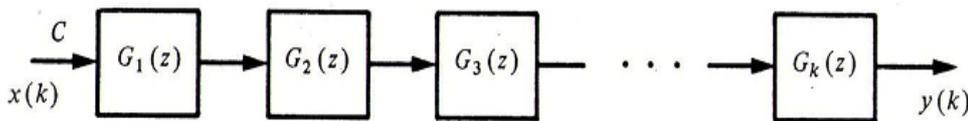


Fig. 1.7 : Décomposition en série

#### 1.4.2.2 Décomposition parallèle

La décomposition parallèle est obtenue en exprimant la fonction de transfert globale  $G(z)$  comme une somme de fonctions de transfert plus simples. On a :

$$G(z) = D + G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_k(z) \quad (1.27)$$

$$= D + \sum_{i=0}^k G_i(z)$$

où  $D$  est une constante. La figure (1.8) illustre cette décomposition. Dans ce cas également, les fonctions de transfert partielles sont, soit du premier ordre, soit du deuxième ordre pour les mêmes raisons que précédemment. Dans ce cas toutefois, grâce à la présence de la constante  $D$ , on a des expressions plus simples. Pour un système de premier ordre, on peut utiliser la fonction de transfert suivante :

$$G_i(z) = \frac{b_{i0}}{1 + a_{i1}z^{-1}} \quad (1.28)$$

Pour un système de deuxième ordre, on a :

$$G_i(z) = \frac{b_{j_0} + b_{j_1}z^{-1}}{1 + a_{j_1}z^{-1} + a_{j_2}z^{-2}} \quad (1.29)$$

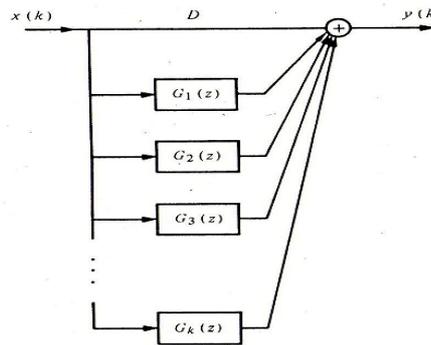


Fig. 1.8 : Décomposition parallèle

### Remarque 1.1

Pour pouvoir obtenir les formes séries et parallèle d'une fonction de transfert complexe, il faut qu'elle soit décomposable [Coequerez et Philipp, 1995]. Si les pôles et les zéros sont connus, on peut obtenir la décomposition série en groupant par paires les pôles et les zéros qui sont conjugués pour les systèmes de deuxième ordre et en regroupant les pôles et les zéros réels pour les systèmes de deuxième ordre. Pour la décomposition en parallèle, il faut faire appel à la décomposition en fractions partielles qui nécessite également la connaissance à priori des pôles de  $G(z)$ . On peut de nouveau grouper les termes par paires de pôles conjugués pour les systèmes de deuxième ordre et de conserver les termes réels pour les systèmes de première ordre. Comme pour une fonction de transfert  $G(z)$  donnée, sa décomposition en fractions partielles est unique, la décomposition parallèle d'un système récursif est unique aussi. Toutefois il, peut y avoir plusieurs décompositions en série selon les différents regroupements de termes.

### 1.5 Stabilité d'un filtre numérique

La stabilité est une caractéristique importante pour un filtre. Un système ou un filtre continu ou discret est dit stable si pour toute excitation bornée, sa sortie est bornée. D'un point de vue mathématique cette condition s'écrit [De Coulon, 1998]

$$\text{Si pour } |x(k)| < \infty \quad \forall k \text{ alors } |y(k)| < \infty \quad \forall k$$

Pour un système linéaire et invariant, la condition de stabilité devienne :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(k)| < \infty \quad (1.30)$$

$g(k)$  est la réponse impulsionnelle du système [Lim, 1990].

Cette dernière condition est satisfaisante si et seulement si les pôles ( $P_i$ ) de la fonction de transfert  $G(z)$  sont tous à l'intérieure d'un cercle unité dans le plan complexe des  $z$ .

Autrement dit:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} = G_0 \frac{\prod_{i=1}^{Nz} (Z - Z_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^{Np} (P - P_i)^{n_i}} \quad (1.31)$$

$G_0$  est un constante multiplicative.

$P_i$  et  $Z_i$  sont respectivement les pôles et les zéros,  $n_i$  et  $m_i$  sont les ordres des pôles et des zéros tels que  $M = \sum_{i=1}^{Nz} m_i$  et  $N = \sum_{i=1}^{Np} n_i$ .

si  $|P_i| < 1, \forall i$  alors le système est dit stable.

Les filtres à réponse impulsionnelle finie est pratiquement stable du fait que sa fonction de transfert ne présente pas de pôles « linéaire ». Ceci constitue l'un des avantages des filtres RIF. En revanche, dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle infinie RII, il y'a apparition des pôles dans la structure de la fonction de transfert, ceux qui tendent à les rendent instables. Ces pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité «  $z = 1$  » pour que ces filtres deviennent stables. Il est très important de prendre en considération cette contrainte de la stabilité lors de sa conception.

Parmi les méthodes de test de la stabilité existant, on peut citer le critère de *Routh-Hurwitz* pour les systèmes continus « en  $s$  ou  $p$  » et le critère de *Jury* pour les systèmes discrets « en  $z$  ». Une autre méthode qui rassemble les deux cas (en  $s$  et en  $p$ ) est celle basé sur la représentation d'état minimale commandable ou observable (*stabilité interne*)

### 1.5.1 Critère de jury

Le critère de jury permet de déterminer l'existence des racines de module strictement inférieur à 1 du polynôme  $A(z)$  de degré  $N$  à coefficients réels, et ceci sans expliciter ses racines [Jouvencel, 2002-2003]

Soit la fonction de transfert sous sa forme polynomiale :

$$G(z) = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + b_2 z^{M-2} + \dots + b_{M-1} z + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_{N-1} z + a_N} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1.32)$$

La stabilité de  $G(z)$  est conditionnée par les racines de  $A(z)$ . En inversant l'ordre des coefficients de ce dernier, on aura l'équation caractéristique  $Q(z)$  définit comme suit :

$$Q(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + a_{N-2} z^{N-2} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (a_n > 0) \quad (1.33)$$

( $N$  entier  $> 0$ ), (les coefficients  $a_i$  sont réels).

On construit le tableau de  $2N-3$  lignes suivant :

Le système décrit par  $Q(z) \ll A(z) \gg$  est stable si et seulement si les conditions suivants sont vérifiées :

1.  $a_N > |a_0|$
2.  $Q(z)|_{z=1} > 0$
3.  $Q(z)|_{z=-1} > 0$  si  $N$  est pair  
 $Q(z)|_{z=-1} < 0$  si  $N$  est impair

et si  $N \geq 3$

4.  $\equiv (N-2)$  sous-conditions, (si  $N < 3$  la condition 4 est inexistante)

$$\left\{ \begin{array}{l} |b_{N-1}| > |b_0| \text{ avec } b_k = \begin{vmatrix} a_N & a_{N-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = N-1 \text{ et } k = 0 \\ \text{et} \\ |c_{N-2}| > |c_0| \text{ avec } c_k = \begin{vmatrix} b_{N-1} & b_{N-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = N-2 \text{ et } k = 0 \\ \text{et ... .. jusqu'à} \\ |q_2| > |q_0| \text{ avec } q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix} \quad k = 2 \text{ et } k = 0 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Tous les coefficients définis précédemment sont regroupés dans le tableau suivant :

Ligne	$z^n$	$z^{n-1}$	$z^{n-2}$	...	...	...	$z^1$	$z^0$
1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	...	$a_1$	$a_0$	...	$a_0$
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	...	$a_i$	$a_{i+1}$	...	$a_n$
3	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	...	...	$b_{n-1-i}$	$b_{n-2-i}$	...	$b_0$
4	$b_0$	$b_1$	...	...	$b_i$	$b_{i+1}$	...	$b_{n-1}$
5	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	...	...	$c_{n-2-i}$	$c_{n-3-i}$	...	
6	$c_0$	$c_1$	...	...	$c_i$	$c_{i+1}$	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$2n-3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$					

Fig. 1.9 : Tableau du critère de Jury

### 1.5.2 La stabilité interne

Cette technique est basée sur la représentation du modèle d'état de l'équation de récurrence du filtre en choisissant la représentation minimale commandable ou observable.

En générale elle est donnée par la formule suivante dans le cas d'un système linéaire à temps invariant :

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) + D u(k) \end{cases} \quad (1.35)$$

$x(k)$  : Vecteur d'état, de dimension  $k \times 1$ .

$u(k)$  : Vecteur de commande, de dimension  $k \times 1$ .

$y(k)$  : Vecteur de sortie ou d'observation, de dimension  $k \times 1$ .

$A, B, C$  et  $D$  : Sont des matrices de dimensions appropriées indépendantes du temps.

A partir de cette représentation, on peut facilement montrer que :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = C^T (zI - A)^{-1} B + D \quad (1.36)$$

$I$  : matrice identité

Le dénominateur de  $G(z)$  est alors :

$$U(z) = \det(zI - A) \quad (1.37)$$

$U(z) = 0$  : est le polynôme caractéristique de la matrice  $A$

Les pôles  $P_i$  de  $G(z)$  sont alors identique aux valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $A$ .

Par conséquent le système est dit stable si  $|\lambda_i| < 1, \forall i$ .

## 1.6 Objectif du filtrage numérique

L'objectif principal de la réalisation des filtres numériques est d'élaborer un système linéaire invariant dans le temps possédant la réponse fréquentielle désirée et se prêtant à une réalisation efficace. A cause de cette dernière contrainte, on ne peut obtenir la réponse fréquentielle idéale que d'une manière approchée.

Nous avons vu précédemment les expressions mathématiques à mettre en œuvre et les principaux types de structures de filtres pour effectuer le filtrage numérique. Le problème majeur est alors la détermination des coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_m\}$  apparaissant dans les relations (1.9) ou les valeurs  $g(k)$  dans la réponse impulsionnelle dans (1.12) de manière à ce que le filtrage effectué satisfasse les spécifications données. Les spécifications d'un filtre sont seulement données dans le cas fréquentiel. C'est pour quoi la relation (1.6) est d'une importance capitale. Elle permet de contrôler entièrement le filtrage. Pour résoudre ce problème, on dispose de deux approches possibles. La première est de développer des méthodes d'approximation typique pour les filtres numériques en utilisant comme outil les mathématiques appliquées. La seconde est de tirer partie des méthodes déjà développées, abondamment étudiées et utilisées et maintenant bien connues, des filtres analogiques. Dans ce deuxième cas, on peut souvent utiliser des relations analytiques préétablies et faciles à manipuler. Ceci permet en même temps de pouvoir simuler numériquement les filtres analogiques, opération qui, historiquement, est à la base de traitement numérique des signaux.

## 1.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions fondamentales sur les filtres numériques. Une distinction importante est faite selon la durée fini ou infini de la réponse impulsionnelle d'un filtre. Ceci est

justifié par la différence de caractéristiques entre ces deux types de systèmes nécessitent des méthodes de synthèse et de réalisation différentes. Les filtres RIF seront présentés dans le prochain chapitre alors que les filtres RII feront l'objet du chapitre 3.

---

*Chapitre II:*  
*Filtres RIF*  
*monodimensionnelle*

---

## 2.1 Introduction

On présentera dans ce chapitre quelques rappels et définitions sur les filtres RIF ainsi que les principales méthodes de synthèse de ces filtres.

## 2.2 Définition

Un filtre RIF (*Filtre à réponse impulsionnelle finie*) est un système linéaire invariant discret dont le comportement entrée-sortie est caractérisé par les coefficients  $g(k)$  de sa réponse impulsionnelle. [Binet, 2008-2009]. Puisque ces coefficients sont en nombre limité, la réponse impulsionnelle du filtre s'annule au bout de  $L$  valeurs. On dit qu'elle est finie et le filtre est lui-même appelé filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF (Finite Impulse Response : FIR pour les Anglo-saxons).

La sortie d'un filtre RIF est donnée par la relation de convolution entre sa réponse impulsionnelle  $g(k)$  et le signal d'entrée  $x(k)$  suivante :

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} g(l) x(k-l) \quad (2.1)$$

La suite des coefficients  $\{g(k)\}$  est limitée. Le calcul de la sortie  $y(k)$  consiste à prendre les échantillons de  $x(t)$  dans une fenêtre de dimension finie ( $L$ ), de pondérer par les  $g(k)$ , puis d'effectuer la somme : c'est une moyenne pondérée. Cette opération se réalise à chaque instant  $t = k\Delta t$  et, pour passer à l'instant suivant, on décale d'une période d'échantillonnage la fenêtre d'acquisition : On dit que la moyenne pondérée est mobile. Cela justifie les noms parfois utilisés de filtre à moyenne mobile ou de filtre MA (Mobile Average) [Coequerez et Philipp, 1995] et [Kunt, 1984].

A partir de l'équation aux différences linéaires à coefficients constants d'ordre  $N$  ( $a_0 \neq 0$ ), on peut écrire :

$$y(k) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_0} x(k-m) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0} y(k-n) \quad (2.2)$$

Pour un filtre RIF qui possède une réponse impulsionnelle à durée finie, l'équation aux différences sera d'ordre  $N=0$  dont l'équation de récurrence est :

$$\begin{aligned} y(k) &= b_0 \cdot x(k) + b_1 \cdot x(k-1) + b_2 \cdot x(k-2) + \dots + b_M \cdot x(k-M) \\ &= \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dans ce cas les coefficients  $a_n$  sont nuls et on dira que  $M$  est l'ordre du filtre.

Un filtre RIF d'ordre  $M$  possède alors que  $M+1$  coefficients  $b_m$ .

En comparant les relations (2.1) et 2.3), on déduit que  $g(l) = b_m$  et  $M = L - 1$ .

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} g(l) x(k-l) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (2.4)$$

Ainsi, les coefficients de pondération ne sont rien d'autre que les valeurs de la réponse impulsionnelle du filtre.

Sa réponse indicielle, c'est-à-dire sa réponse au signal d'entrée  $u(k) = (1, 1, 1, \dots, 1)$  est :

$$y_d(k) = \sum_{m=0}^M b_m u(k-m) = \sum_{m=0}^k b_m \quad k = 0, 1, \dots, M \quad (2.5)$$

Ainsi la valeur finale de la réponse indicielle est égale à la somme des coefficients du filtre RIF.

La fonction de transfert en  $z$  d'un filtre RIF s'écrit :

$$G(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \quad (2.6)$$

En remplaçant  $z$  par  $e^{j2\pi f k \Delta t}$  dans  $G(z)$ , on obtient la réponse fréquentielle, d'où :

$$G(f) = \sum_{k=0}^{L-1} g(k) e^{-j2\pi f k \Delta t} \quad (2.7)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned} G(f) &= \sum_{k=0}^{L-1} g(k) \cos(2\pi f k \Delta t) - j \left[ \sum_{k=0}^{L-1} g(k) \sin(2\pi f k \Delta t) \right] \\ &= \text{Re}[G(f)] + j \text{Im}[G(f)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.3 Synthèse des filtres RIF

Plusieurs méthodes de synthèse des filtres RIF ont été développées. Les plus connues sont les méthodes des fenêtres, par série de Fourier, par échantillonnage en fréquence et celles basées sur l'optimisation.

### 2.3.1 Synthèse par la méthode des fenêtres

Le principe de cette méthode consiste à déterminer un filtre RIF ayant une réponse en fréquence aussi proche possible de la réponse fréquentielle désirée notée  $G_d(f)$  ou  $\vartheta = w \Delta t$ . Connaissant  $g_d(f)$ , on peut alors déterminer  $g_d(k)$  en utilisant la Transformée de Fourier inverse. Cependant, on ne peut pas réaliser pratiquement un filtre à base de  $g_d(k)$  car celle-ci peut être de durée infinie et non causal. L'idée serait alors

de limiter la longueur de  $g_d(k)$  en un nombre de  $L$  échantillons et introduire un décalage suffisant pour obtenir une réponse impulsionnelle causale. [Binet, 2008-2009] et [Najim, 2006].

Prenons le cas particulier du filtre passe-bas, les autres filtres pouvant s'en déduire par simple transposition.

Le filtre passe-bas idéal est complètement défini par son gabarit fréquentiel idéal (Fig. 2.1):

$$G_d(e^{j\omega T_e}) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_B}\right)$$

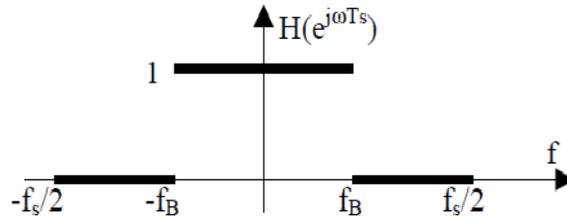


Fig. 2.1 : Gabarit fréquentiel d'un filtre passe bas

La réponse impulsionnelle du filtre peut se calculer de la manière suivante:

$$\begin{aligned} g(k) &= T_e \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} G(e^{j\omega T_e}) e^{j2\pi f k T_e} df = T_e \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} e^{j2\pi f k T_e} df = T_e \left. \frac{e^{j2\pi f k T_e}}{j2\pi k T_e} \right|_{-f_B}^{f_B} \\ &= 2f_B T_e \frac{\sin(2\pi f_B k T_e)}{2\pi k T_e} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Elle contient une infinité d'échantillons  $g_d(k)$ , ce qui est contradictoire à une réponse impulsionnelle finie. On doit donc l'approximer en ne retenant qu'un nombre fini de coefficients. Cette opération peut être obtenue par troncature de  $g_d(k)$  du cas idéal.

En notant  $g_r(t)$  la réponse impulsionnelle finie obtenue par pondération et troncature de la réponse idéale  $g(t)$  par une fenêtre  $fe(t)$  :

$$g_r(t) = g(t) \cdot fe(t) \Rightarrow G_r(e^{j\omega T_e}) = G(e^{j\omega T_e}) * Fe(e^{j\omega T_e})$$

Pour un gabarit passe-bas idéal,  $G(e^{j\omega T_e})$  est égal à  $\mathbf{1}$  pour  $f \in [-f_B, +f_B]$  d'où :

$$G_r(e^{j\omega T_e}) = \int_{-f_B}^{+f_B} Fe(f - \mu) d\mu = \int_{f-f_B}^{f+f_B} Fe(k) dk \quad (2.10)$$

$$G_r(e^{j\omega T e}) = \int_0^{f+f_B} Fe(k) dk - \int_0^{f-f_B} Fe(k) dk = FI(f + f_B) - FI(f - f_B) \quad (2.11)$$

Nous appelons fonction intégrale de la fenêtre  $FI(a) = \int_0^a Fe(k) dk$

Le spectre du filtre RIF réel n'est pas exactement le gabarit mais la différence entre deux fonctions intégrales de la fenêtre.

La troncature la plus simple est la troncature par fenêtre rectangulaire, d'autres troncatures peuvent être envisagées par pondération des échantillons.

### 2.3.1.1 Fenêtre rectangulaire

C'est la troncature simple où la fonction de fenêtre est une fonction rectangle, sa transformée de Fourier est un sinus cardinal et la fonction intégrale une superposition de sinus intégral (SI) :

$$fe(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\vartheta}\right) \Rightarrow TF[fe(t)] = Fe(f) = \vartheta \frac{\sin(\pi f \vartheta)}{\pi f \vartheta} \quad (2.12)$$

$$\text{Par définition } SI(a) = \int_0^a \frac{\sin(u)}{u} du \Rightarrow FI(\alpha) = \int_0^\alpha F(k) dk = \int_0^\alpha \vartheta \frac{\sin(\pi k \vartheta)}{\pi k \vartheta} dk \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha \pi \vartheta} \frac{\sin(\pi k \vartheta)}{\pi k \vartheta} d(\pi k \vartheta) = \frac{1}{\pi} SI(\pi \alpha \vartheta)$$

$$\Rightarrow G_r(f) = \frac{1}{\pi} [SI[\pi(f + f_B)\vartheta] - SI[\pi(f - f_B)\vartheta]]$$

Les fonctions sinus cardinal et sinus intégral ont les propriétés suivantes :

Sinus cardinal :  $\text{sinc}(0)=1$   $\text{sinc}(\pi x)=0 \Rightarrow x=[1,2,3\dots]$  parité :  $\text{sinc}(-\pi x) = \text{sinc}(\pi x)$ .

Sinus Intégral :  $SI(0)=0$   $x \rightarrow +\infty SI(\pi x) \rightarrow \pi/2$  parité :  $SI(-\pi x) = -SI(\pi x)$ .

La figure (2.2) montre l'allure de ces deux fonctions.

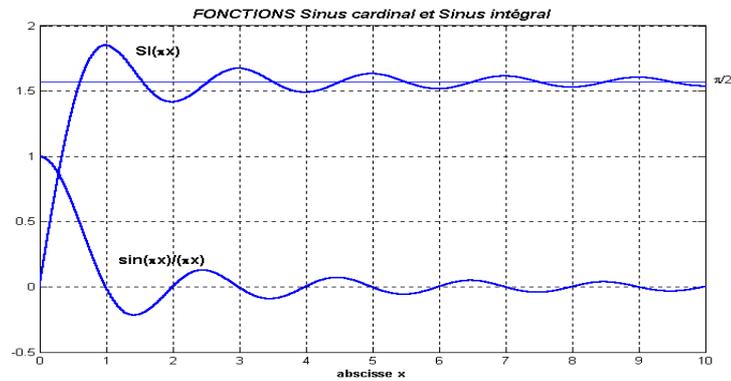


Fig 2.2 : Allures des fonctions sinus Cardinal et sinus Intégral

La fonction fréquentielle réelle du filtre est représentée sur la figure (2.3) :

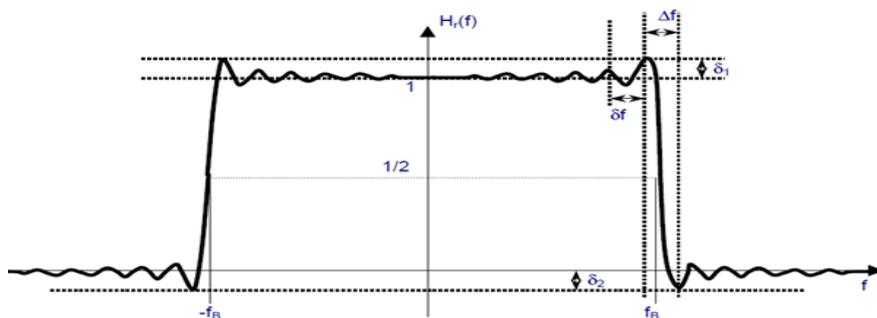


Fig 2.3 : Réponse en fréquence d'un filtre RIF passe bas

L'examen de la réponse en fréquence permet de mettre en évidence les points essentiels suivants : [Binet, 2008-2009]

Une bande passante de largeur  $[0, f_B - \Delta f/2]$  avec des dépassements (ou « oscillations ») en bande passante caractérisés par leur maximum  $\delta_1$  et leur resserrement  $\delta f$

Une bande coupée de largeur  $[f_B + \Delta f/2; f_s/2]$  avec des dépassements (ou « oscillations ») en bande coupée caractérisés par leur maximum  $\delta_2$  et leur resserrement  $\delta f$ .

Une bande de transition de largeur  $\Delta f : [f_B - \Delta f/2; f_B + \Delta f/2]$ .  $\Delta f$  est caractéristique de la « rapidité » de la coupure entre bande passante et bande coupée.

Le filtre idéal souhaité est tel que  $\delta_1 = \delta_2 = 0$  et  $\Delta f = 0$ . Ces paramètres vont être une manière d'évaluer la qualité de l'approximation réalisée selon le choix de fenêtre effectué.

Pour la fenêtre rectangulaire afin de conserver l'échantillon en  $t=0$  et une symétrie paire à la réponse impulsionnelle, nous choisirons un filtre constitué d'un nombre impair  $N+1$  d'échantillons.

La largeur de la fenêtre de troncature est donc  $\theta=NT_e$ . Les paramètres de qualité de l'approximation sont :

Les dépassements  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont identiques et correspondent au maximum de la fonction SI qui est indépendant du nombre d'échantillons.

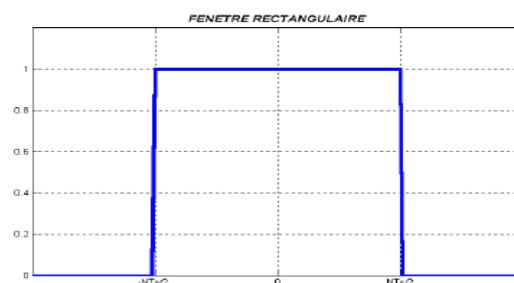
Quelque soit  $N$ , ces dépassements subsisteront : c'est le phénomène de Gibbs lié au fait qu'une série peut converger en énergie vers une fonction sans que l'on ait la convergence uniforme. Leur importance est liée à la surface des lobes latéraux de  $Fe(f)$  transformée de Fourier de la fonction de fenêtre de troncature. Pour le  $SI/\pi$  le premier dépassement vaut 0,09 soit  $\delta_1=\delta_2=21dB$  (exprimé positivement par convention sachant qu'il s'agit bien d'une atténuation).

$\delta f$ , le resserrement des dépassements en bande passante ou coupée, dépend de la distance entre les maxima de la fonction SI et donc de la distance entre les valeurs qui annulent la fonction  $Fe(f)$ . Pour le sinus cardinal cela correspond à  $\delta x=2=\delta(f\theta)=\delta f.\theta \Rightarrow \delta f=2/(NT_s)=(2/N)(1/T_s)$ . Si on élargit la fenêtre de troncature,  $N$  augmente et ces « oscillations » se resserrent.

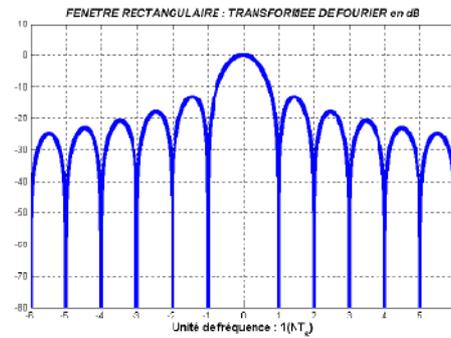
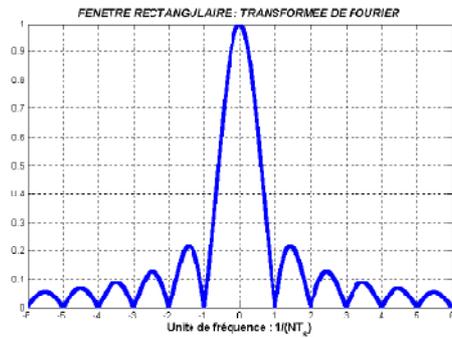
$\Delta f$ , la largeur de la bande de transition est caractérisée par deux fois la distance entre l'origine et le premier maximum de la fonction SI : c'est aussi deux fois la distance entre le maximum et le premier point nul de la fonction  $Fe(f)$  soit la largeur du lobe central.

Pour le sinus cardinal  $\Delta x=2=\Delta(f\theta)=\Delta f.\theta \Rightarrow \Delta f=2/\theta=2/(NT_s)=(2/N)(1/T_s)$ . Augmenter le nombre de points améliorera aussi ce paramètre.

La figure (2.4) ci-dessous montre les diverses étapes de la conception d'un filtre passe-bas avec une fenêtre rectangulaire.

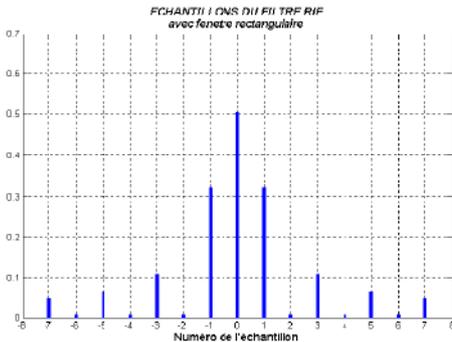


La fenêtre rectangulaire



Largeur du lobe central =  $2/N$

Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -13\text{dB}$



$$N+1 = 15 \quad \delta f = 2/N = 0,14$$

$$f_B = 0,25 \quad \delta_1 = \delta_2 = 21 \text{ dB}$$

Fig. 2.4 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre rectangulaire

### 2.3.1.2 Autres fenêtres, [Binet, 2008-2009]

L'étude du cas de la fenêtre rectangulaire nous a donné de précieuses indications qualitatives :

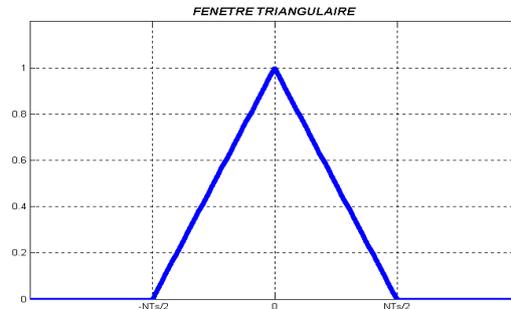
- ✓ La largeur  $\Delta f$  de la bande de transition est directement liée à la largeur du lobe central de  $Fe(f)$  transformée de Fourier de la fonction de fenêtre.
- ✓ Les dépassements en bande passante ou coupée sont directement liés à l'importance des lobes latéraux de la fonction  $Fe(f)$ .

#### A. Fenêtre triangulaire (Bartlett) :

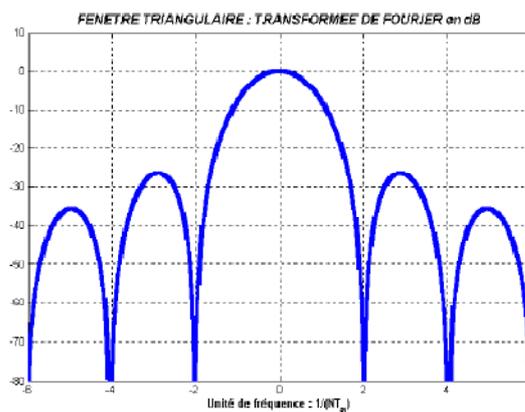
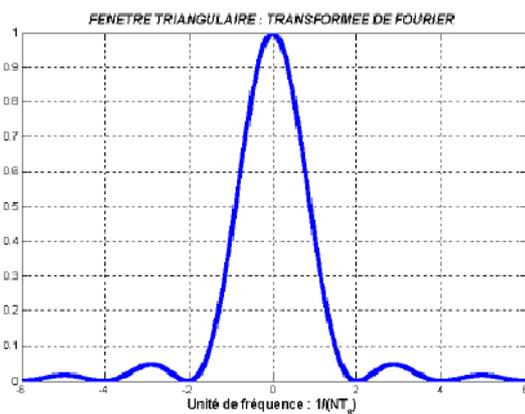
$$Fe(t) = \text{Tri}\left(\frac{t}{\theta}\right) = \text{rect}\left(\frac{2t}{\theta}\right) \otimes \text{rect}\left(\frac{2t}{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow TF[Fe(t)] = Fe(f) = \left[ \frac{\vartheta \sin\left(\frac{\pi f \vartheta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f \vartheta}{2}\right)} \right]^2 \quad (2.14)$$

La transformée de Fourier fait intervenir le carré de la transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire de largeur moitié, par conséquent, le lobe central sera deux fois plus large et les lobes latéraux d'amplitude plus faible. On aura moins d'oscillations en bande passante au prix d'une pente de coupure deux fois plus faible (Fig. 2.5).

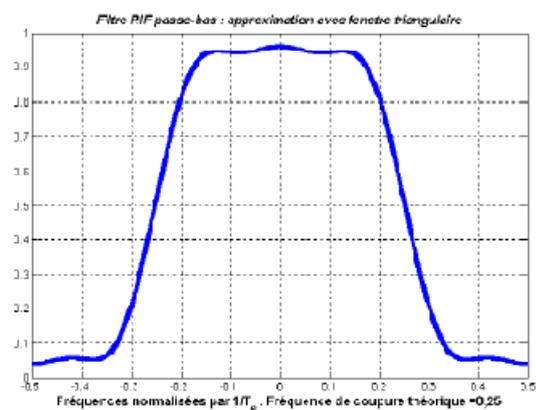
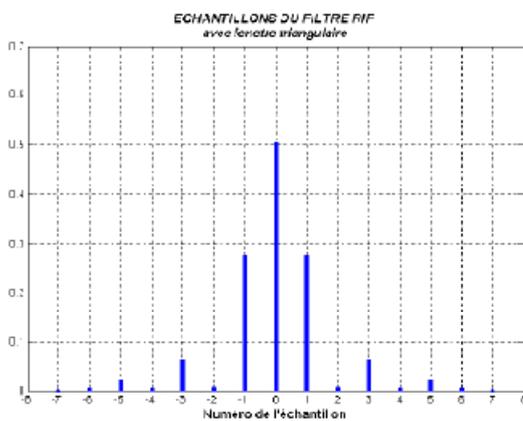


La fenêtre triangulaire



Largeur du lobe central =  $4/N$

Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -26$  dB



$N+1=15$      $\Delta f=4/N=0,28$

$f_B=0,25$      $\delta_1=\delta_2=25$  dB

Fig. 2.5 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de triangulaire (Bartlett)

### B. Fenêtre de Hann (ou Hanning) :

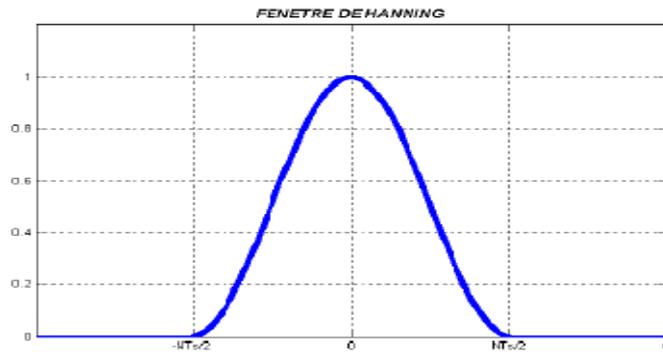
C'est une fenêtre en « cosinus » d'allure proche de la fenêtre triangulaire :

$$fe(t) = \left[ 0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2t\pi}{\theta}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{t}{\theta}\right) \quad (2.15)$$

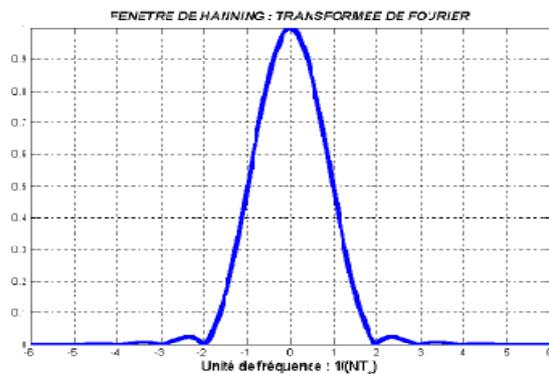
$$\Rightarrow TF[fe(t)] = Fe(f) = \left\{ \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4}\left[\delta\left(f - \frac{1}{\theta}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{\theta}\right)\right] \right\} \otimes \left[ \vartheta \frac{\sin(\vartheta\pi f)}{\vartheta\pi f} \right]$$

$$Fe(f) = \left[ \frac{\vartheta}{2} \frac{\sin(\vartheta\pi f)}{\vartheta\pi f} + \frac{\vartheta}{4} \frac{\sin\left(\vartheta\left(f - \frac{1}{\theta}\right)\pi\right)}{\left(\vartheta\left(f - \frac{1}{\theta}\right)\pi\right)} + \frac{\vartheta}{4} \frac{\sin\left(\vartheta\left(f + \frac{1}{\theta}\right)\pi\right)}{\left(\vartheta\left(f + \frac{1}{\theta}\right)\pi\right)} \right] \quad (2.16)$$

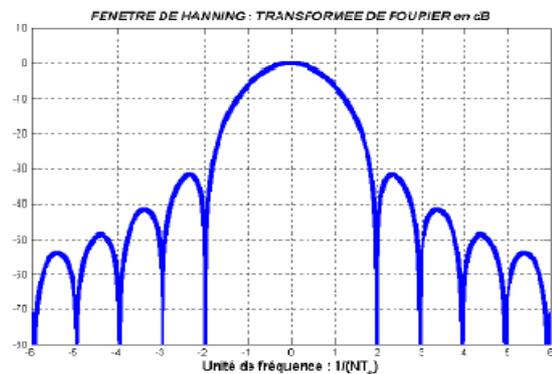
Elle présente une plus forte atténuation des lobes latéraux ce qui diminuera les dépassements dans la bande-passante (Fig.2.6).



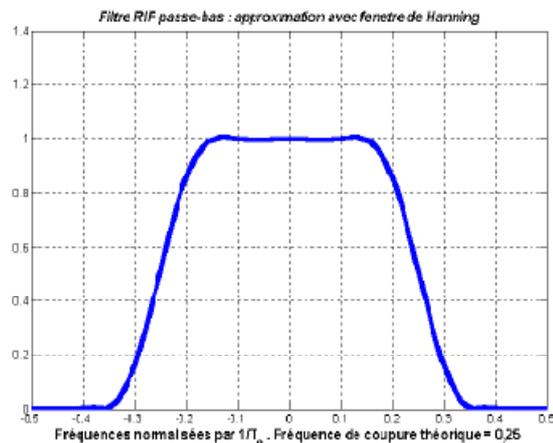
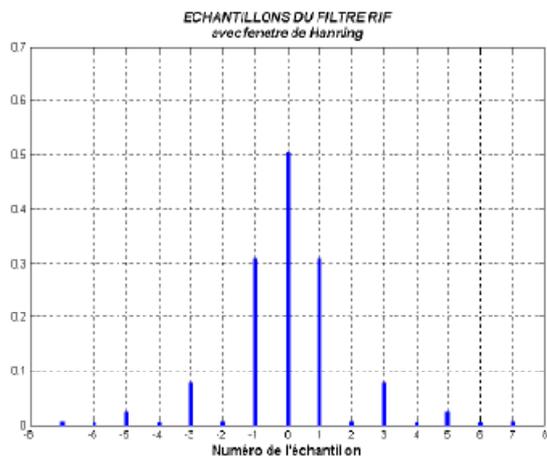
Fenêtre de Hanning



Largeur du lobe central =  $4/N$



Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -30\text{dB}$



$$N+1 = 15 \quad \Delta f = 4/N = 0,28$$

$$f_B = 0,25$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 44 \text{ dB}$$

Fig. 2.6 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtré de Hann (ou Hanning)

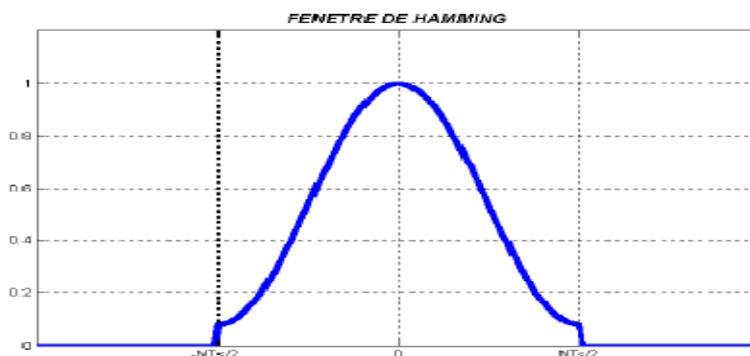
### C. Fenêtré de Hamming :

Devant les résultats très satisfaisants de la pondération avec fenêtré de Hanning, on peut rechercher une meilleure optimisation de ses performances en choisissant :

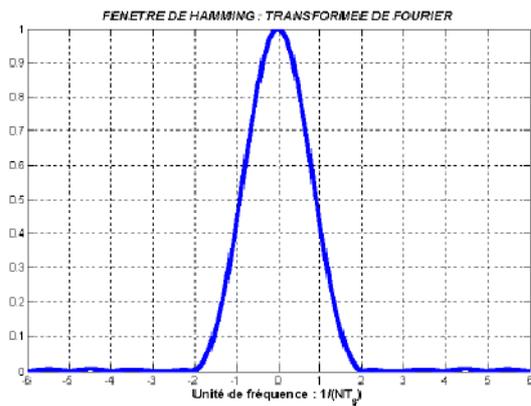
$$fe(t) = \left[ \alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2t\pi}{\theta}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{t}{\theta}\right) \quad (2.15)$$

Le paramètre  $\alpha$  est ajusté pour minimiser les lobes latéraux en particulier le second (Fig. 2.7)

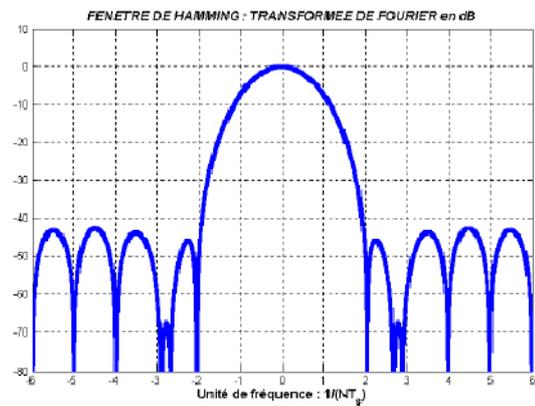
$$\alpha = 0,54 \Rightarrow fe(t) = \left[ 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2t\pi}{\theta}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{t}{\theta}\right)$$



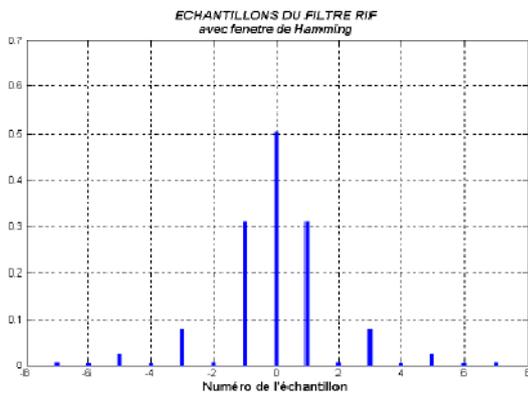
Fenêtré de Hamming



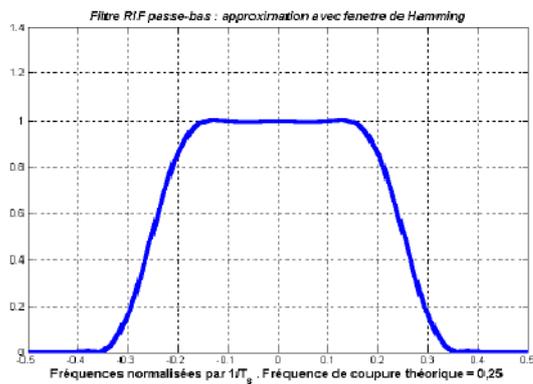
Largeur du lobe central =  $4/N$



Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -45$  dB



$N+1 = 15$      $\Delta f = 4/N = 0,28$



$f_B = 0,25$      $\delta_1 = \delta_2 = 53$  dB

Fig. 2.7 : : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de Hamming

#### D. Fenêtre de Blackman :

Elle est donnée par la fonction suivante

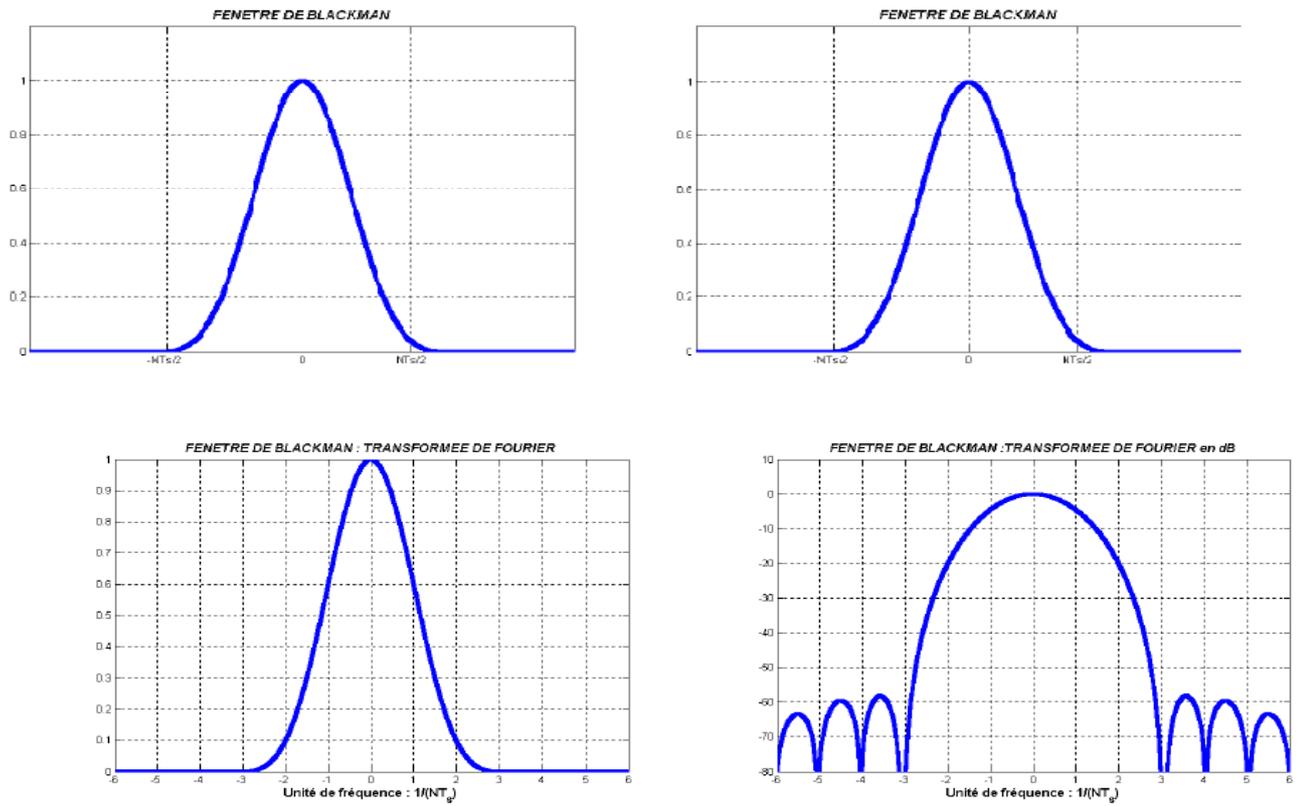
$$f_e(t) = \sum_{m=0}^M a_m \cos\left(\frac{2m\pi t}{\vartheta}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\vartheta}\right) \quad (2.16)$$

avec 
$$\sum_{m=0}^M a_m = 1 \text{ et } \vartheta = M \cdot T_e$$

Ce qui, avec trois coefficients donne :

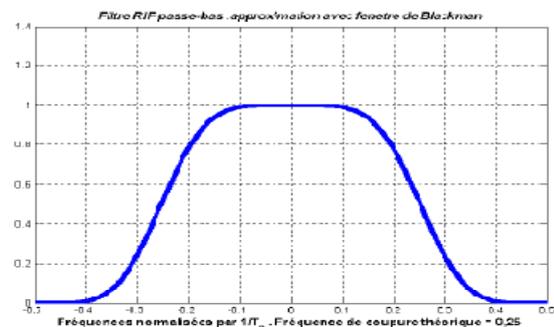
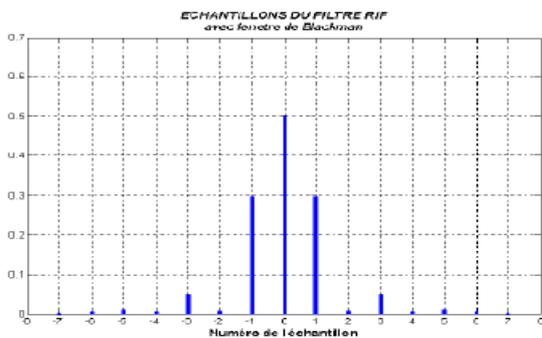
$$f_e(t) = \left[ 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2t\pi}{\vartheta}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4t\pi}{\vartheta}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{t}{\vartheta}\right)$$

Les lobes latéraux de la transformée de Fourier sont bien atténués au prix d'un lobe central élargi (Fig. 2.8).



Largeur du lobe central =  $6/N$

Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -60\text{dB}$



$N+1 = 15$        $\Delta f = 6/N = 0,43$

$f_B = 0,25$        $\delta_1 = \delta_2 = 74 \text{ dB}$

Fig. 2.8 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de Blackman

**Remarque 2.1:** [Binet, 2008-2009]

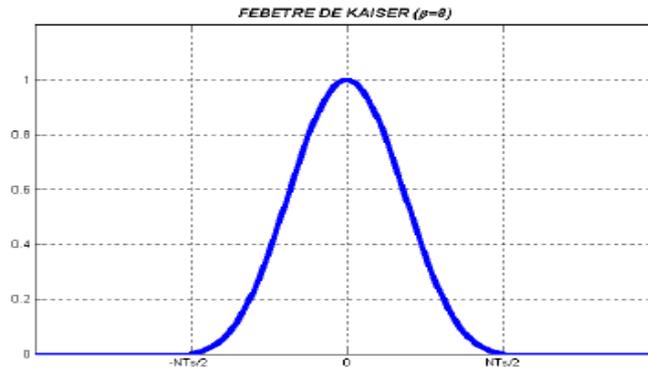
Tous les cas précédents peuvent être inclus dans celui-ci :

- ⇒ Fenêtre rectangulaire :  $\alpha=1$  ;  $\beta=\gamma=0$ .
- ⇒ Fenêtre de Hanning :  $\alpha=\beta=0,5$  ;  $\gamma=0$ .
- ⇒ Fenêtre de Hamming :  $\alpha=0,54$  ;  $\beta=0,46$  ;  $\gamma=0$ .

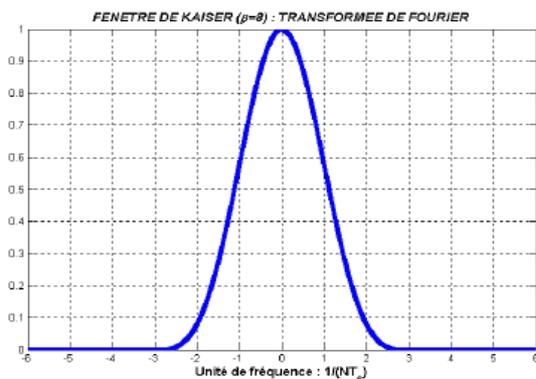
## E. Fenêtre de Kaiser

Kaiser utilise des fonctions sphéroïdales. Il introduit un paramètre  $\beta$  d'atténuation des lobes latéraux qui optimise le rapport des énergies du lobe central et du second lobe qui s'exprime à partir du choix  $\alpha_{dB}$  de l'atténuation du premier lobe (en énergie) et  $\Delta f$  la largeur de la bande de transition (Fig.2.9):

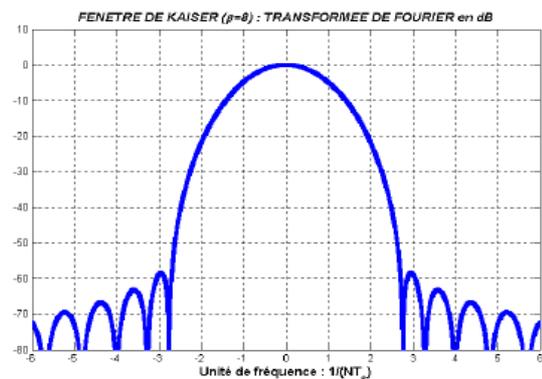
$$N = \frac{\alpha - 8}{14,357 \Delta f} + 1 \text{ et } \begin{cases} \beta = 0,1102(\alpha - 8,7) & \text{si } \alpha > 50 \\ \beta = 0,5842(\alpha - 21)^{0,4} + 0,07886(\alpha - 21) & \text{si } 21 < \alpha < 50 \end{cases}$$



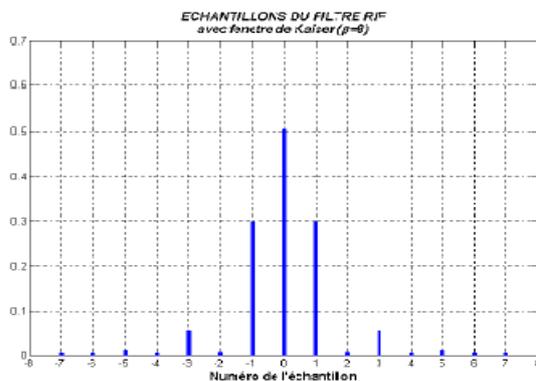
Fenêtre de KAISER



Largeur du lobe central =  $5,6/N$

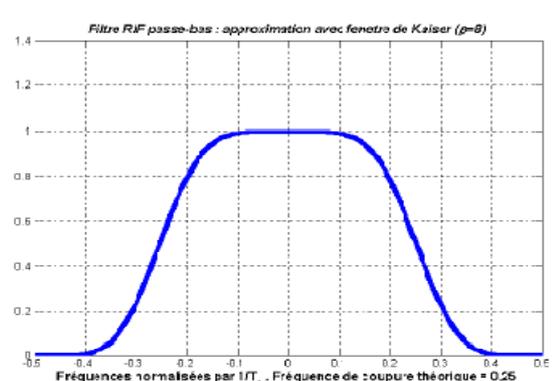


Amplitude du premier lobe latéral  $\approx -58$  dB



$N+1 = 15$

$\Delta f = 6/N = 0,44$



$f_B = 0,25$

$\delta_1 = 78$  dB

Fig. 2.9 : Etapes de conception du filtre passe bas avec une fenêtre de KAISER

### 2.3.2 Synthèse par série de Fourier

Lorsqu'un filtre est spécifié dans le domaine des fréquences par sa réponse fréquentielle  $G(f)$ , cette réponse doit être considérée comme périodique pour réaliser le filtrage par voie numérique [De Coulon, 1998]. En générale, la période correspond à l'intervalle de fréquence où la fonction souhaité  $G(f)$  est spécifiée. Dans l'intervalle principale, la réponse impulsionnelle idéale es donnée par :

$$g(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} G(f) e^{j2\pi f k} df \quad (2.17)$$

S'il s'agit d'un filtre dont la réponse fréquentielle est l'une des réponses idéalisées de la figure (2.4) (*fenêtre rectangulaire*) ou si elle est formée des segments de droite, l'évaluation de  $g(k)$  par le calcul de l'intégrale (2.9) ne pose en générale pas de problèmes. Toutefois comme les valeurs  $g(k)$  sont les coefficients de développement en série de Fourier de la fonction périodique  $G(f)$ , il faut en générale une infinité de coefficient pour présenter des fonctions  $G(f)$  possédant des discontinuités ou des transitions rapides. Par conséquent,  $g(k)$  sera une réponse impulsionnelle de durée infinie. Pour qu'elle puisse être celle d'un filtre RIF, il faut limiter sa durée par un moyen approprié : c'est le problème classique de la convergence de la série de Fourier. C'est le problème aussi de calcul de la TFD d'un signal à durée illimitée. On dispose ainsi de toutes les méthodes qui y sont décrites pour multiplier la réponse impulsionnelle à durée infinie  $g(k)$  par une fonction fenêtre convenablement choisie, de manière a ce que la transformée de Fourier du produit satisfasse les spécifications donnée de  $G(f)$  dans les limites des tolérances. Par conséquent, on ne reviendra pas ici sur le même sujet. Par contre, il est utile de discuter certains problèmes pratique associe a ces méthodes.

La synthèse par série de Fourier nécessite une expression analytique pour la réponse impulsionnelle à durée infinie (2.9). Ceci limite l'emploi de la méthode au cas des réponses fréquentielles de forme relativement simple pour lesquelles on peut évaluer l'intégrale (2.9) analytiquement. Une manière approximative de surmonter ce problème est de calculer cette intégrale numériquement. Dans ce cas, la surface de la fonction  $G(f) e^{-2j\pi f k}$  sur la période principale est approximée par la somme des surfaces d'un grand nombre de rectangle juxtaposés. Pour faciliter les calculs, il est préférable de choisir la même largeur pour tous les rectangles. Les longueurs des rectangles sont les valeurs prises par l'intégration au milieu de chaque intervalle correspondant à la largeur. Si  $N$  présente le nombre de rectangles, la forme approchée de la relation (2.9) est la suivante :

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{\frac{N}{2}-1} G(n) e^{(j2\pi \frac{nk}{N})} \quad (2.18)$$

Cette relation n'est rien que d'autre que l'expression de transformée de Fourier discrète (TFD) inverse de  $G(n)$ .

D'autre part la relation entre  $g(k)$  et  $G(n)$  est connue. Elle est de la forme suivante :

$$\hat{g}(k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} g(iN + k) \quad (2.19)$$

Si  $N$  est suffisamment grand par rapport à la durée présumée  $L$  de la réponse impulsionnelle cherchée, on peut admettre l'approximation :

$$\hat{g}(k) \cong g(k) \quad (2.20)$$

Ainsi, la durée  $L$  de la fonction fenêtre doit être faible par rapport à  $N$ , si on est obligé de calculer la relation (2.9) numériquement.

Un inconvénient de la synthèse par série de Fourier est son manque de flexibilité. Au produit simple dans le domaine temporel du signal par la fonction fenêtre correspond dans le domaine fréquentielle au produit de convolution périodique qu'il est souvent difficile à manipuler analytiquement. Ceci intervient en particulier pour la détermination des fréquences de coupure des différentes bandes de fréquence.

### 2.3.3 Synthèse par échantillonnage en fréquence

Dans la synthèse d'un filtre par échantillonnage en fréquence, la réponse fréquentielle  $G_d(f)$  désirée est présentée par des échantillons  $G_d(n)$ . Il a été établi qu'un signal à durée finie est entièrement présentée par des échantillons de sa transformée de Fourier. Ceci est également valable pour une réponse impulsionnelle de durée limitée à  $L$ . [Kunt, 1984]. Elle peut être caractérisée complètement par  $L$  échantillons de sa transformée de Fourier, c'est-à-dire de la réponse fréquentielle. On a :

$$g(k) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G_d(n) e^{(j2\pi \frac{nk}{L})} \quad (2.21)$$

Avec  $k_0 \leq k \leq k_0 + L - 1$

où  $G_d(n)$  présente des échantillons prélevés périodiquement avec une période  $1/L$  sur la période principale  $[-1/2, 1/2]$  de  $G_d(f)$ . Il est également possible d'obtenir la transformée en  $z$  par interpolation entre les échantillons  $G_d(n)$ . La relation d'interpolation est obtenue en substituant la relation (2.21) dans la relation

de la transformée en  $z$ . Dans ce cas, sous l'hypothèse simplificatrice  $k_0=0$ , la relation de transfert est donnée par :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-L}}{L} \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G_d(n) \frac{1}{1 - e^{(j\frac{2\pi n}{L})} z^{-1}} \quad (2.22)$$

En évaluant la fonction de transfert sur le cercle unité  $z = \exp(j2\pi f)$ , on obtient la réponse fréquentielle  $G(f)$  suivante :

$$G(f) = \frac{j\pi f(1-L)}{L} \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G_d(n) \frac{\sin \pi f L}{\sin \pi (f - \frac{n}{L})} e^{(-j\frac{2\pi n}{L})} \quad (2.23)$$

On remarque que cette relation représente une interpolation du type

$$G(f) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G_d(n) \psi(f - \frac{n}{L}) \quad (2.24)$$

avec 
$$\psi\left(f - \frac{n}{L}\right) = \frac{\sin \pi f L}{\sin \pi (f - \frac{n}{L})} \exp\{j\pi[(f - \frac{n}{L}) - fL]\} \quad (2.25)$$

La fonction  $\psi$  est la fonction d'interpolation. Elle possède la propriété d'être nulle sur toutes les fréquences d'échantillonnage  $n'/L$ , sauf là où elle est centré ou elle vaut l'unité. En effet, on a :

$$\psi\left(\frac{n}{L}\right) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \quad (2.26)$$

A cause du terme  $\sin \pi f L$  au numérateur. On a également

$$\lim_{f \rightarrow \frac{n}{L}} \left(f - \frac{n}{L}\right) = 1 \quad (2.27)$$

Ceci peut être montré en utilisant le développement en série de puissance de la fonction  $\sin u$  pour les faibles valeurs de  $u$ .

Il découle du développement précédent qu'il est possible d'approximer une réponse fréquentielle désirée  $G_d(f)$  par une fonction  $G(f)$  obtenue par interpolation entre les échantillons  $G_d(n)$  prélevés sur  $G_d(f)$  aux fréquences  $f_n = n/L$ . l'erreur de cette approximation est nulle aux fréquences  $f_n$  est reste finie pour toute les autres fréquences.

Ainsi, on peut prélever  $L$  échantillons sur la réponse fréquentielle donnée et obtenir la réponse impulsionnelle du filtre cherché en calculant la TFD inverse à l'aide de la transformée de Fourier rapide (TFR). Le filtrage peut alors être effectuée à l'aide du produit de convolution (2.1) ou encore la TFD.

### Remarque 2.2

Si, pour comparer  $G(f)$  à  $G_d(f)$ , on utilise la TFD avec le même nombre d'échantillons  $L$  qu'initialement, on trouvera les échantillons initiaux  $G_d(n)$  coïncide exactement avec les valeurs  $G_d(f)$ . Ceci peut laisser croire que l'approximation est parfaite, ce qui est complètement faux. Dans un tel cas, avant de calculer la TFD, il faut élargir la durée de  $g(k)$  artificiellement par des échantillons nuls, afin d'augmenter la résolution fréquentielle dans l'estimation de  $G(f)$ . [Kunt, 1984]

### 2.3.4 Synthèse basée sur les techniques d'optimisation

La synthèse des filtres à réponse impulsionnelle infini optimaux est basé sur le calcul des coefficients de ce dernier de manière à satisfaire les conditions de stabilité, la convergence et un temps de calcul minimal [Kaboga, 2008].

Différentes approches sont élaborées dans ce contexte, parmi elles la méthode des moindres carrés tente à minimiser l'erreur quadratique définie par la différence entre la réponse désirée  $d(k)$  et la sortie du filtre à concevoir  $y(k)$  comme le montre le schéma suivant

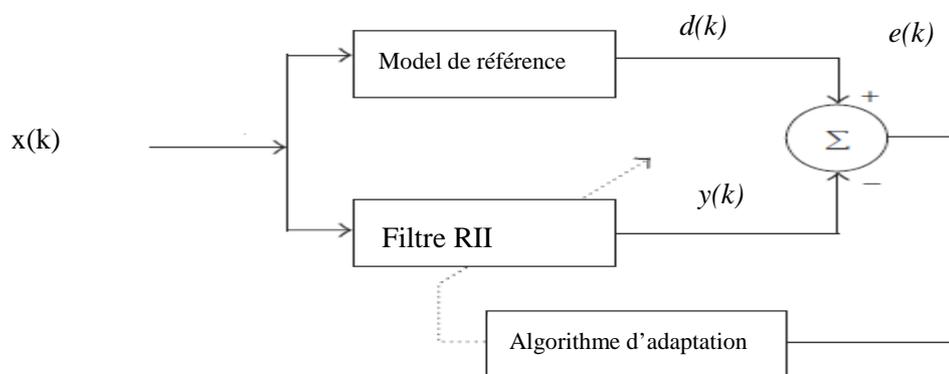


Fig.2.10 : Bloque de diagramme utilisé pour l'identification du filtre RIF

$d(k)$  et  $y(k)$  sont respectivement la réponse désirée et la réponse calculé par le filtre.

$e(k)$  est l'erreur entre  $d(k)$  et  $y(k)$ .

Dans le domaine spatial « temporelle » le critère à minimiser est l'erreur globale suivante :

$$e(k) = J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (d(k) - y(k))^2 \quad (2.28)$$

Dans le domaine fréquentiel, le critère utilisé est :

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (G_d(f_k) - G(f_k))^2 \text{ ou } J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |G_d(f_k) - G(f_k)| \quad (2.29)$$

$G_d(f)$  et  $G(f)$  représentent respectivement la réponse fréquentielle désirée et calculée du filtre.

$N$  est le nombre d'échantillons fréquentielles

$$G(f) = \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{j2\pi f k \Delta t} \quad (3.30)$$

La minimisation d'un des deux critères peut se faire par plusieurs méthodes. Quelques unes, seront présentées dans le chapitre prochain.

## 2.4 Réalisation récursive des filtres RIF

Dans ce qui précède le filtrage est réalisée soit en utilisant le produit de convolution (2.1), soit la TFD à l'aide de la TFR. Il est également possible de réaliser un filtre d'une manière récursive en utilisant la relation qui exprime la fonction de transfert  $G(z)$  d'un filtre RIF en fonction des échantillons de sa réponse fréquentielle [Coequerez et Philipp, 1995].

Dans la réalisation récursive d'un filtre RIF, on suppose que réponse impulsionnelle  $g(k)$  de durée finie  $L$  a été obtenue par un moyen approprié, selon un gabarit donné. Au lieu de le réaliser en utilisant un produit de convolution du type (1.2) ou en utilisant la TFD, on cherche à le mettre en œuvre en faisant appel à une ou plusieurs équations aux différences de type (2.2) d'ordre plus faible par rapport à  $L$ . Les avantages de cette technique apparaîtront ultérieurement. [Kunt, 1984]

La relation (2.22) qui exprime la fonction de transfert d'un filtre comme une fonction obtenue par interpolation entre les échantillons de la réponse fréquentielle est rappelée ci-dessous :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-L}}{L} \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G(n) \frac{1}{1 - e^{(j\frac{2\pi n}{L})} z^{-1}} \quad (2.31)$$

Où les coefficients  $G(n)$  sont obtenus en calculant la TFD de la réponse impulsionnelle  $g(k)$ . On peut présenter ce système comme la mise en série de deux systèmes de la manière suivant :

$$G(z) = \frac{1}{L} G_a(z) G_b(z) \quad (2.32)$$

avec

$$G_a(z) = 1 - z^{-L} \quad (2.33)$$

et

$$G_b(z) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G(n) \frac{1}{1 - e^{(j\frac{2\pi n}{L})} z^{-1}} \quad (2.34)$$

Cette dernière relation montre que le système partiel de fonction de transfert  $G_b(z)$  est formé par la mise en parallèle de  $L$  système de premier ordre. On a :

$$G_b(z) = \sum_{n=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} G_n(z) \quad (2.35)$$

avec

$$G_n(z) = \frac{G(n)}{1 - e^{(j\frac{2\pi n}{L})} z^{-1}} \quad (2.36)$$

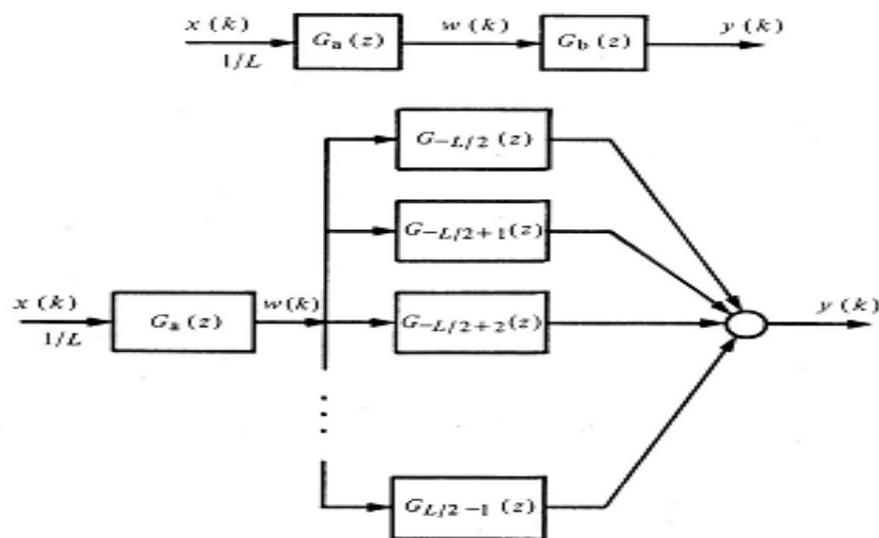


Fig. 2.11 : Décomposition de la fonction de transfert

La décomposition (2.32) et la décomposition complète, compte tenu de la relation (2.35), sont présentées sur la figure (2.11)

## 2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions sur les filtres RIF monodimensionnelle.

Les filtres RIF sont non récurrents, c'est-à-dire que la sortie dépend uniquement de l'entrée du signal, il n'y a pas de contre-réaction.[Kunt, 1984]. Ils possèdent une fonction de transfert polynomiale, ils ne présentent donc pas de pôles mais seulement des zéros, ils sont par conséquent toujours stables. Ils ne peuvent pas être obtenus par transposition d'un filtre continu. Par rapport aux filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII), ils

présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Ceci est dû au fait que leur fonction de transfert ne possède pas de pôles.

➤ les avantages : [Lardière, 2002]

- toujours stable, leur réponse impulsionnelle est finie ;
- phase linéaire avec la fréquence → pas de distorsion de phase;
- Simple à mettre en œuvre, possibilité de réaliser toutes sortes de filtres 'ébouriffants' en dessinant simplement des gabarits de réponse en amplitude  $|G(f)|$  et en calculant la transformée de Fourier inverse  $y(k)$  ;
- Le délai de la réponse est le même pour toutes les fréquences ;
- Un signal n'est pas dispersé par le filtrage (*conservation des propriétés du signal*).
- Ces filtres non récursifs n'ont pas de contre-réaction.

➤ Les inconvénients : [Lardière, 2002]

- Cher en réalisation.
- Le retard entre l'entrée et la sortie est de la taille de  $N_f$  échantillons (*peut être relativement long*).
- ils nécessitent un grand nombre de coefficients pour obtenir les caractéristiques fréquentielles désirées

---

*Chapitre III:*  
*Filtre à RII*  
*monodimensionnelle*

---

### 3.1 Introduction

Les méthodes de synthèse des filtres à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) peuvent être groupées en deux catégories. La première, la plus utilisée et la plus traditionnelle, comprend les techniques de transposition des méthodes de synthèse de filtre analogique au cas des filtres numériques [Kunt, 1984]. Ces méthodes tirent partie de tout l'arsenal des méthodes de synthèse de filtres analogiques [De Coulon, 1998], en établissant une correspondance appropriée entre les deux domaines analogique et numérique. La deuxième catégorie est celle des méthodes algorithmiques qui font appel à des procédures d'optimisation. Ces méthodes cherchent à rendre minimum l'erreur d'approximation des caractéristiques du filtre désiré par celle d'un filtre réalisable, selon un critère approprié.

Le but de ce chapitre est de présenter les principales méthodes de synthèse des filtres RII.

### 3.2 Définition d'un filtre RII

Un filtre RII, de l'anglais "*Infinite Impulse Response*" (*Filtre à réponse impulsionnelle infinie*) est un système linéaire invariant discret dont le comportement entrée-sortie est caractérisé par les coefficients  $g(k)$  de sa réponse impulsionnelle et qui ne se stabilisera jamais, et ce, même à l'infini [Coequerez et Philipp, 1995].

Les filtres RII sont régis par une équation aux différences d'ordre  $N$  du type :

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k-m) \quad (3.1)$$

Le problème général de la synthèse de tels filtres consiste à déterminer l'ensemble des coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_m\}$  de manière à ce que la réponse fréquentielle du filtre obtenue satisfasse le gabarit donné. En plus, pour que le filtre soit réalisable, il faut qu'il soit causal et stable.

La causalité est satisfaite si la réponse impulsionnelle  $g(k)$  satisfait la condition :

$$g(k)=0 \text{ pour } k < 0 \quad (3.2)$$

La condition de stabilité des filtres RII est plus sévère que celle des filtres RIF. Il faut non seulement que chaque valeur  $g(k)$  de la réponse impulsionnelle soit finie, mais aussi que :

$$\sum_{m=0}^M |g(k)| < \infty \quad (3.3)$$

La fonction de transfert  $G(z)$  d'un filtre RII, qu'on peut aisément obtenir à partir de (3.1), est un quotient de deux polynômes en  $z$  ou en  $z^{-1}$ . On a :

$$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (3.4)$$

Cette fonction possède en générale  $M$  zéros et  $N$  pôles. Dans le cas d'un filtre causal, la condition de stabilité (3.3) implique que  $N$  pôles sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan des  $z$ .

Dans ce qui suit, on utilisera l'indice  $a$  pour dénoter toutes les fonctions ou variables caractérisant des systèmes analogiques.

### 3.3 Méthodes basées sur la transformation d'un filtre analogique en un filtre numérique [De Coulon, 1998]

Dans la transformation d'un filtre analogique en un filtre numérique, on cherchera à établir un pont entre la transformation de Laplace et la transformé en  $z$ . Du point de vue mathématique, un tel pont est une application dans le plan des  $s$  de Laplace au plan des  $z$ . Il est cependant essentiel que les propriétés principales du filtre analogique (*stabilité notamment*) soient conservées [Binet, 2008-2009]. Dans ce cas, il est souhaitable que l'axe imaginaire du plan des  $s$  soit appliqué sur le cercle unité et que le demi-plan gauche du plan des  $s$  soit appliqué à l'intérieur du cercle unité dans le plan des  $z$ . Ceci garantit qu'un filtre analogique stable se transforme en un filtre numérique stable. La période d'échantillonnage  $\Delta t$  est également une variable importante qui sera introduite dans ces transformations.

Le problème de filtrage revient alors à trouver d'abord un filtre analogique qui remplit les spécifications du problème donné. On détermine ensuite sa fonction de transfert  $G_a(s)$  qui est la transformé de Laplace de sa réponse impulsionnelle  $g_a(t)$ . Une fois que l'application du plan des  $s$  sur le plan des  $z$  est établie sous forme d'une relation fonctionnelle  $s=f(z)$ , il faut substituer celle-ci dans l'expression de  $G_a(s)$ . On obtient alors la fonction de transfert  $G(z)$  du filtre digital correspondant [Coequerez et Philipp, 1995]

$$G(z) = G_a(s)|_{s=f(z)} \quad (3.4)$$

A l'aide des manipulations algébriques sur  $G(z)$ , il faut finalement exprimer comme un quotient de deux polynômes et déterminer les coefficients  $\{a_n\}$  et  $\{b_n\}$  par identification. Le filtrage peut être ainsi effectué à l'aide de l'équation aux différences (3.1).

La synthèse des filtres analogiques est généralement basée sur des modèles de filtres tels que les filtres de Butterworth, Tchebychef, etc., [De Coulon, 1998].

#### 3.3.1 Équivalence de la dérivation

Un système analogique, invariant dans le temps, est caractérisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Les filtres numériques RII sont eux caractérisés par une équation aux différences à

coefficients constants. Il est dès alors naturel d'établir une correspondance entre les dérivés et les différences. La variable complexe de Laplace  $s$ , est associée à la dérivée temporelle  $d/dt$ . Nous pouvons chercher à approximer cette dérivée de manière discrète et lui associer un opérateur polynomial. Parmi les approximations possibles des dérivées, les trois plus élémentaires sont:

✓ Dérivée "arrière" (backward) :

$$\frac{d}{dt}x_a(t) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_e} \Rightarrow s \mapsto \frac{1 - z^{-1}}{T_e} = \frac{z - 1}{zT_e}, \quad T_e = \Delta t$$

✓ Dérivée "avant" (forward) :

$$\frac{d}{dt}x_a(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T_e} \Rightarrow s \mapsto \frac{z - 1}{T_e}$$

✓ Dérivée "centrale" :

$$\frac{d}{dt}x_a(t) = \frac{x(k+1) - x(k-1)}{2T_e} \Rightarrow s \mapsto \frac{z - z^{-1}}{2T_e} = \frac{z^2 - 1}{2zT_e}$$

La première approximation est la plus utilisée car elle est causale, [Binet, 2008-2009] ce qui n'est pas le cas des deux dernières. Si on note par  $x_a(t)$  le signal analogique et par  $x(k)$  un signal numérique, on :

$$\frac{d}{dt}x_a(t) = \frac{x(k) - x(k-1)}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad x(k) = x_a(k\Delta t) \quad (3.5)$$

Considérons l'opérateur numérique pour une différence de premier ordre. Si  $y(k)$  est un signal obtenu par la dérivée première d'un signal  $x(t)$ , on a :

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{\Delta t} \quad (3.6)$$

La fonction de transfert  $G(z)$  d'un opérateur numérique de différences peut être déterminée en calculant la transformé en  $z$  des deux membres de cette relation [Coequerez et Philipp, 1995] et [Kunt, 1984] On obtient :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Il est bien connu que la dérivation dans le domaine temporel correspond au produit de la transformée de Laplace par  $s$  dans le domaine des  $s$ . Ainsi par identification, on a :

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Cette relation n'est rien d'autre qu'une application du plan des  $s$  dans le plan des  $z$ .

Pour obtenir l'image de l'axe imaginaire du plan des  $s$  dans le plan des  $z$ , il faut d'abord résoudre l'équation (3.8) par rapport à  $z$ . On obtient :

$$z = \frac{1}{1 - s\Delta t} \quad (3.9)$$

L'axe imaginaire est caractérisé par  $s=jw_a$ . Ainsi, pour l'image, on a :

$$z = \frac{1}{1 - jw_a\Delta t} = \frac{1}{1 - w_a^2 \Delta t^2} + j \frac{w_a\Delta t}{1 + w_a^2 \Delta t^2} \quad (3.10)$$

Pour trouver le lieu de  $z$  quand  $s$  décrit l'axe imaginaire, on peut exprimer  $z$  en coordonnées polaires avec module et argument. On obtient :

$$|z| = \sqrt{Re^2[z] + Im^2[z]} = \sqrt{\frac{1}{1 + w_a^2 \Delta t^2}} \quad (3.11)$$

et

$$arg[z] = arctan\left(\frac{Im[z]}{Re[z]}\right) = arctan(w_a\Delta t) \quad (3.12)$$

donc

$$\frac{Im[z]}{Re[z]} = w_a\Delta t \quad (3.13)$$

En substituant cette dernière relation dans (3.11), on obtient :

$$(Re^2[z] + Im^2[z]) = Re^2[z] \quad (3.14)$$

On peut prendre la racine carrée des deux membres en distinguant les racines positives et négative. Tout fois, la partie réelle de  $z$  est toujours positive (3.1). Comme le carré du nombre complexe est également toujours positive, il faut considérer uniquement la racine carrée positive. On a ainsi :

$$(Re^2[z] + Im^2[z]) = Re[z] \quad (3.15)$$

Avec les deux premiers termes, on peut faire apparaitre un carré. On obtient alors :

$$\left(Re[z] - \frac{1}{2}\right)^2 + Im^2[z] = \frac{1}{4} \quad (3.16)$$

C'est l'équation du cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  centré au point réel  $z= 1/2$ . On peut vérifier aisément que le demi-plan gauche du plan des  $s$  appliqué à l'intérieur de ce cercle dans le plan des  $z$ . La figure 3.1 montre la correspondance des plan des  $s$  et  $z$  selon la relation (3.9). Ceci montre que même si l'image de l'axe imaginaire  $s=jw_a$  n'est pas le cercle unité  $|z| = 1$ , l'application (3.9) satisfait la condition de stabilité en appliquant le demi- plan gauche du plan des  $s$  à l'intérieure du cercle unité  $|z| = 1$ .

### Remarque 3.1 :

La figure 3.1 montre également un désavantage de l'équivalence de la dérivation. D'une manière générale, à une certaine étape de l'application du plan des  $s$  dans le plan des  $z$ , il faut faire intervenir l'échantillonnage d'une fonction analogique. Ceci, doit être effectué conformément au théorème d'échantillonnage. Au cours de l'échantillonnage, des segments de longueur identique de l'axe imaginaire  $s=j\omega_a$  sont appliqués sur le cercle unité. La transformée de fourrier intégrale  $X_a(f)$  d'un signal analogique est obtenue en équivalant sa transformée de la place sur l'axe imaginaire  $s=j\omega_a$ . Pour éviter le recouvrement dus à l'échantillonnage, il faut choisir la longueur des segments de manière à inclure toutes les valeurs non nulles de  $X_a(f)$ . Ainsi, par échantillonnage,  $X_a(f)$  est transposé autour du cercle unité dans le plan des  $z$ .

Ceci est toujours valable pour la réponse impulsionnelle et fréquentielle des systèmes. L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage correspond à l'augmentation de la longueur des segments de l'axe  $s=j\omega_a$ . Comme un tel segment est appliqué sur le cercle unité quelle que soit sa longueur, l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage correspond sur le cercle unité à la concentration de la transformée de Fourier dans le voisinage du point  $z=1$ . Comme la relation (3.9) applique l'axe imaginaire sur le petit cercle de la figure 3.1, l'approximation des dérivés par les différences n'est satisfaisante qu'aux alentours du point  $z=1$ , ou les deux cercles ont une tangente commune. Pour une bonne approximation, ceci nécessite donc une grande période d'échantillonnage ou, ce qui revient au même de petite période  $\Delta t$ . Or, le sur-échantillonnage est une présentation très inefficace d'un signal analogique, produisant un grand nombre d'échantillons redondantes. C'est la limitation de base de la méthode de l'équivalence de la dérivation.

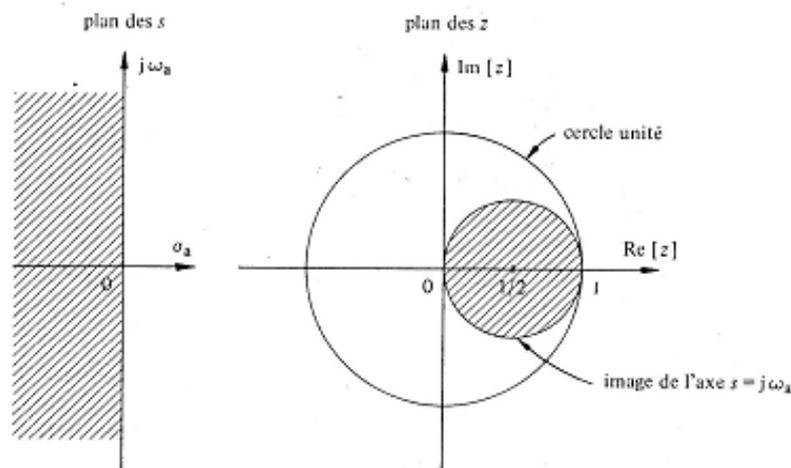


Fig. 3.1 : *Equivalence du plant des s au plant des z*

La fonction de transfert (3.7) utilisée pour la différence première correspond à un système stable et causal. On peut utiliser également une différence première du type :

$$\frac{x(k+1) - x(k)}{\Delta t} \quad (3.17)$$

Toutefois, celle ci conduit a un système non causal et on peut montrer que facilement qu'un filtre analogique stable peut être transformé en un filtre numérique instable.

**Exemple 3.1,** [Kunt, 1984]

Considérant un filtre analogique dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G_a(s) = \frac{1}{s + 1} \tag{3.18}$$

La réponse fréquentielle de ce filtre est obtenue en évaluant  $G_a(s)$  sur l'axe imaginaire  $s=j2\pi f_a$  du plan des  $s$ .

On a :

$$G_a(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f_a} \tag{3.19}$$

Pour obtenir la fonction de transfert  $G(z)$  du filtre numérique correspondant à partir de  $G_a(s)$ , il faut utiliser la substitution (3.8) dans l'expression de  $G_a(s)$ . On a :

$$G(z) = G_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{\Delta t}} = \frac{\Delta t}{1 + \Delta t - z^{-1}} \tag{3.20}$$

Le filtre numérique peut être alors réalisé à l'aide de l'équation aux différences du premier ordre suivante :

$$y(k) = \frac{1}{1 + \Delta t} [\Delta t x(k) + y(k - 1)] \tag{3.21}$$

La réponse fréquentielle de ce filtre numérique est obtenue en évaluant sa fonction de transfert  $G(z)$  sur le cercle de l'unité du plan des  $z$ . En plus, pour qu'un tour complet du cercle unité correspond à la période principale  $[-1/2 \Delta t, 1/2 \Delta t]$  de l'axe des fréquences, il faut évaluer  $G(z)$  en posant  $z=\exp(j2\pi f \Delta t)$  pour tenir compte de la période d'échantillonnage  $\Delta t$ . Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{\Delta t}{1 + \Delta t - \exp(-j2\pi f \Delta t)} \\ &= \frac{\Delta t}{1 + \Delta t - \cos 2\pi f \Delta t + j \sin 2\pi f \Delta t} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Le paramètre  $\Delta t$  joue un rôle très important pour la fonction  $G(f)$ . Il détermine sa période qu'est de  $1/\Delta t$  et également la qualité de l'approximation de  $G_a(f_a)$  par  $G(f)$ . Des considérations théoriques présentées précédemment indiquent que pour une bonne approximation, la valeur de  $\Delta t$  doit être faible.

**3.3.2 Équivalence de l'intégrale (transformation bilinéaire numérique)**

Soit  $y_a(t)$ , un signal analogique, correspondant à l'intégrale d'un signal  $x_a(t)$ , tel que :

$$y_a(t) = \int_{\alpha}^t x_a(u) du \tag{3.23}$$

L'équivalent numérique de cette relation est la règle de trapézoïdale d'intégration [Kunt, 1984]. Elle est généralement utilisée dans le cas où l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement. Cette règle consiste à calculer la somme des surfaces des trapèzes obtenue par interpolation linéaire des échantillons d'un signal numérique  $x(k)$ . On peut l'exprimer par la relation de récurrence suivante :

$$y(k) = y(k-1) + \frac{\Delta t}{2} [x(k) + x(k-1)] \quad (3.24)$$

Cette relation indique que la valeur actuelle de l'intégrale  $y(k)$  est obtenue en additionnant les surfaces des trapèzes formés entre  $x(k)$  et  $x(k-1)$  à la valeur précédente  $y(k-1)$ . En comparant les deux relations (3.23) et (3.24), on peut établir la correspondance :

$$x(k) = x_a(k\Delta t) \quad (3.25)$$

et

$$y(k) \cong y_a(k\Delta t)$$

qui est illustré par la figure 3.2

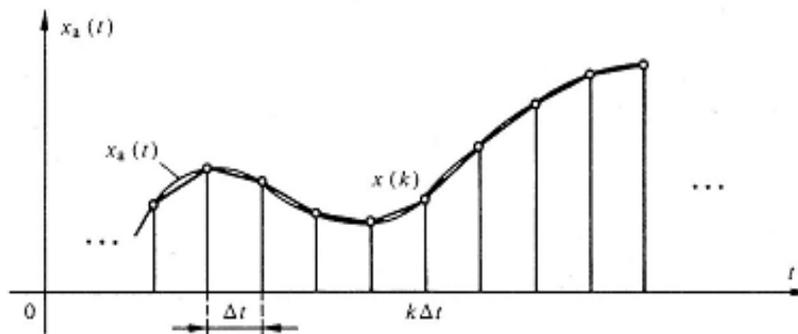


Fig .3.2 : Equivalence d'une fonction avec son intégrale

La fonction de transfert d'un intégrateur numérique trapézoïdal peut être déduite de la transformation en  $z$  des deux membres de la relation (3.24). On obtient :

$$G(z) = \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.26)$$

Dans le plan des  $s$ , l'intégration correspond à la division de la transformée de Laplace par la variable  $s$ . Ainsi, après identification :

$$\frac{1}{s} = \frac{\Delta t}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (3.27)$$

On peut établir la correspondance entre la relation (3.23) et (3.24). La relation équivalence de l'intégrale (3.27) est connue sous le nom de *transformation bilinéaire*.

Cette terminologie vient du fait que la relation (3.27) est une équation linéaire en  $s$  aussi bien qu'en  $z$ . En effet, on peut écrire :

$$s = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow z = \frac{1 + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) s}{1 - \left(\frac{\Delta t}{2}\right) s} \quad (3.28)$$

En posant  $s=j\omega_a$  dans le plan des  $z$ , on a d'après (3.28) :

$$z = \frac{1 + j (\Delta t/2) \omega_a}{1 - j (\Delta t/2) \omega_a} \quad (3.29)$$

Cette expression n'est rien d'autre que le quotient de deux nombres conjugués complexes. Ainsi, le module de  $z$  est l'unité et son argument est le double de l'argument de  $1+j(\Delta t/2)\omega_a$ . On a :

$$z = \exp \left[ j2 \arctan \left( \frac{\Delta t}{2} \omega_a \right) \right] \quad (3.30)$$

Cette relation montre que pour  $s$  décrivant l'axe imaginaire (ou pour  $\omega_a$  décrivant l'axe réel),  $z$  décrit le cercle unité. En plus, si la partie réelle de  $s$  est négative, la relation (3.28) indique que le module de  $z$  est inférieur à l'unité. Ainsi, le demi-plan gauche du plan des  $s$  est appliqué à l'intérieur du cercle unité dans le plan des  $z$ . L'application définie par (3.28) satisfait la condition de transformer un filtre analogique stable en un filtre numérique stable. Ceci est illustré par la figure 3.3

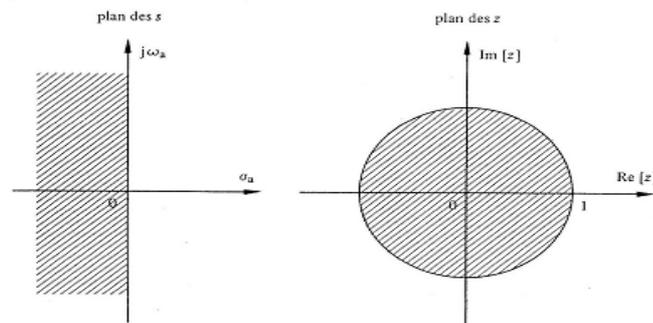


Fig. 3.3 : *Domaine de stabilité du filtre dans  $s$  et dans  $z$ .*

### 3.3.2.1 Correspondance des fréquences

La transformation bilinéaire (3.27) introduit une relation non linéaire pour la correspondance des fréquences entre les plans  $s$  et  $z$ . Cette relation peut être mise en évidence de la manière suivante. La transformée de Fourier d'un signal numérique est obtenue en évaluant la transformée en  $z$  sur le cercle unité, c'est-à-dire en posant  $z = \exp(j 2 \pi f \Delta t)$ . Dans cette représentation, la variable continue  $f$  est la fréquence dans le cas numérique. En plus, le paramètre  $\Delta t$  a été inclus pour indiquer que la période principale d'échelle des fréquences dans le cas numérique est  $[-1/2 \Delta t, 1/2 \Delta t]$ .

En identifiant cette expression à (3.30), avec  $\omega_a = 2 \pi f_a$ , on obtient :

$$f = \frac{1}{\pi \Delta t} \arctan(\pi \Delta t f_a) \Rightarrow f_a = \frac{1}{\pi \Delta t} \tan(\pi \Delta t f) \quad (3.31)$$

### Exemple 3.2

Considérant un filtre analogique dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G_a(s) = \frac{1}{1+s}$$

En remplaçant  $s$  par son expression 3.28, on aura :

$$G(z) = G_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{2(1-z^{-1})}{2(1-z^{-1}) + \Delta t(1+z^{-1})}$$

La sortie de ce filtre est donnée par la relation de récurrence suivante :

$$y(k) = \frac{1}{2 + \Delta t} [2[x(k) - x(k-1)] - (\Delta t - 2) y(k-1)]$$

### 3.2.3 Echantillonnage de la réponse impulsionnelle (Invariance de la réponse impulsionnelle)

Une autre méthode transposition d'un filtre analogique au cas numérique consiste à obtenir la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique en échantillonnant périodiquement la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique. Cette méthode est une application directe du théorème d'échantillonnage, on fait appel à la relation qui existe entre la transformée de Laplace d'un signal échantillonné et la fonction  $G(z)$  correspondante [Binet, 2008-2009] et [Kunt, 1984]

Même si la méthode consiste à échantillonner la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique pour obtenir celle d'un filtre numérique correspondante, le filtrage ne peut pas être effectué par un produit de convolution. Pour qu'on puisse échantillonner un signal dans le cas particulier (une réponse impulsionnelle continue), il faut que sa transformée de Fourier soit limitée en fréquence. Les réponses impulsionnelles qui possèdent cette propriété sont de durée infinie, conduisant ainsi par échantillonnage à des filtres numériques RII. Il est par conséquent nécessaire d'obtenir la fonction de transfert  $G(z)$  pour effectuer le filtrage par une équation aux différences.

Considérons un filtre analogique de réponse impulsionnelle  $g_a(t)$  et de fonction de transfert  $G_a(s)$ . Il s'agit de trouver les coefficients de  $G(z)$  d'un filtre numérique sachant que sa réponse impulsionnelle est donnée par :

$$g(k) = g_a(k \Delta t) \tag{3.32}$$

La fonction de transfert recherchée  $G(z)$  peut être obtenue en calculant la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $g(k)$ . Dans le cas général, ce calcul peut présenter des difficultés selon la forme de  $g_a(t)$ . Supposant aussi que la fonction de transfert  $G_a(s)$  est décomposable sous la forme suivante :

$$G_a(s) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{s - s_j} \tag{3.33}$$

où les  $s_j$  sont les pôles simple. La réponse impulsionnelle  $g_a(t)$  peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$g_a(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(s_j t) \epsilon(t) \quad (3.34)$$

où  $\epsilon(t)$  est la fonction saut unité analogique. L'échantillonnage de  $g_a(t)$  donne :

$$g(k) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(s_j k \Delta t) \epsilon(k \Delta t) \quad (3.35)$$

La fonction de transfert du filtre numérique est donnée par :

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^N \alpha_j \exp(s_j k \Delta t) z^{-k} \end{aligned} \quad (3.36)$$

En inversant l'ordre des sommes on aura :

$$G(z) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{k=0}^{+\infty} [\exp(s_j \Delta t) z^{-1}]^k \quad (3.37)$$

La somme sur  $k$  dans cette expression est une progression géométrique. Finalement on a :

$$G(z) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha_j}{1 - \exp(s_j \Delta t) z^{-1}} \quad (3.38)$$

### Remarque 3.3

La comparaison des relations (3.33) et (3.38) montre qu'un pôle  $s=s_j$  des plan des  $s$  correspond à un pôle  $z = \exp(s_j \Delta t)$ . La relation  $z = \exp(s \Delta t)$  a pour effet d'appliquer une infinité de bande horizontale de largeur  $1/\Delta t$  du plan des  $s$  sur le même plan des  $z$ . si la partie réelle de  $s_j$  est négative, alors le module de  $z_j = \exp(s_j \Delta t)$  est toujours inférieur à l'unité, ce qui implique la stabilité du filtre numérique obtenue.

#### 3.2.3.1 Recouvrement

A cause de l'échantillonnage, la réponse fréquentielle  $G(f)$  du filtre est obtenue par une répétition périodique de la réponse fréquentielle  $G_a(f)$  du filtre analogique. D'après (3.36), on a :

$$G(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_a\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right) \quad (3.39)$$

Ce n'est que si  $G_a(f)$  est limité en fréquence dans un intervalle de  $|f| \leq \frac{1}{2} \Delta t$  que l'on peut avoir

$$G(f) = \frac{1}{\Delta t} G_a(f) \quad (3.40)$$

Comme les filtres analogiques utilisés en pratique n'ont pas de limite en fréquence, un recouvrement a lieu dans la relation (3.39). Alors, la réponse  $G(f)$  n'est pas une réplique exacte de  $G_a(f)$  et la relation (3.40) ne peut être utilisée que d'une manière approchée. En plus, pour des fréquences d'échantillonnage élevées ( $\Delta t$

petit), le gain du filtre numérique peut être très grand. Pour éviter le terme  $\Delta t$  dans la relation (3.40), il est utile de modifier la relation (3.32) comme suit :

$$g(k) = \Delta t g_a(k \Delta t) \quad (3.41)$$

**Exemple 3.4** [De Coulon, 1998]

Considérons la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique passe-bas : le filtre RC.

on a :

$$g_a(t) = \exp(-t/RC) \quad (3.42)$$

et

$$G_a(s) = \frac{1}{s + 1/RC}$$

L'unique pôle de la fonction de transfert est donné par

$$z_0 = \exp(-\Delta t/RC) \quad (3.43)$$

d'où

$$G(z) = \frac{1}{1 - \exp(-\Delta t/RC) z^{-1}} \quad (3.44)$$

Le filtrage peut alors effectuer à l'aide de l'équation aux différences, de premier ordre, suivante :

$$y(k) = x(k) + \exp(-\Delta t/RC) y(k-1) \quad (3.45)$$

La réponse fréquentielle du filtre analogique est donnée par :

$$G_a(f) = \frac{1}{1 + j 2 \pi RC f_a} \quad (3.46)$$

Alors que pour le filtre numérique correspondant :

$$G(f) = \frac{1}{1 - \exp(-\Delta t/RC) \exp(-j2\pi f \Delta t)} \quad (3.47)$$

La figure (3.4) montre les modules des fonctions  $G_a(f)$  et  $G(f)$  pour deux valeurs de  $\Delta t$ . On voit apparaître l'erreur de recouvrement qui diminue si est  $\Delta t$  suffisamment petit.

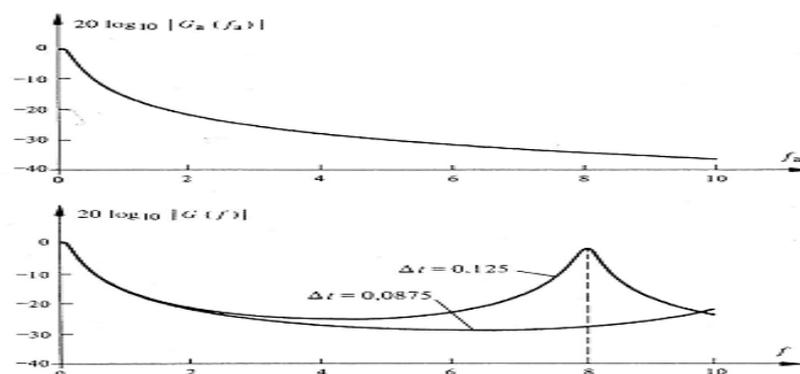


Fig .3.4 : l'erreur due au recouvrement

### 3.4 Méthodes basées sur les techniques d'optimisation

La synthèse des filtres RII par optimisation sont identiques aux méthodes de synthèse des filtres RIF basées sur les techniques d'optimisation. Il s'agit ainsi de déterminer les valeurs des coefficients du filtre de manière à minimiser un critère qui tient compte des conditions de stabilité, la convergence et un temps de calcul. Deux critères sont généralement utilisés en pratique selon qu'on considère le domaine spatial ou fréquentiel. [Kaboga, 2008] et [Tsai et al, 2008].

Dans le domaine spatial le critère à minimiser est l'erreur globale suivante :

$$J = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K (d(k) - y(k))^2 \quad (3.48)$$

$d(k)$  et  $y(k)$  sont respectivement le réponse désirée et la réponse calculée du filtre,  $K$  est le nombre d'échantillons.

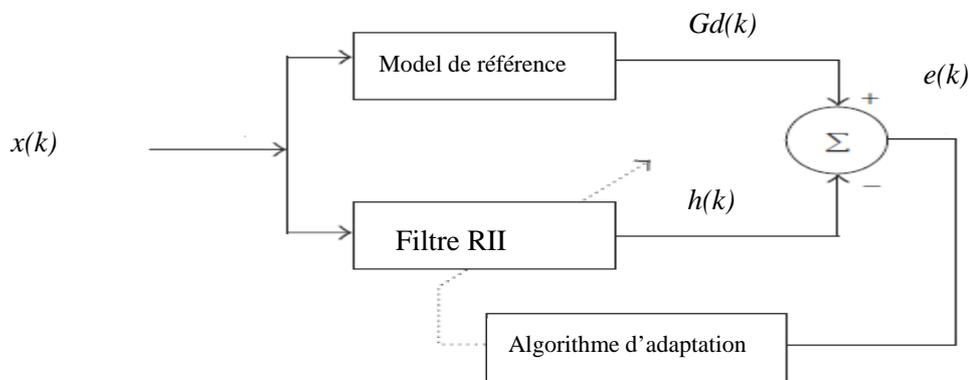


Fig. 3.5: Synthèse d'un filtre RII par optimisation temporelle

Dans le domaine fréquentiel, le critère utilisé est :

$$J = Lp = \|E[X]\|_p = \left[ \sum_{k=1}^K |G(f_k) - G_d(f_k)|^p \right]^{1/p} \quad (3.50)$$

$p$  étant un entier.

Pour  $p=1$ , on obtient la  $L_1$  norme :

$$L_1 = \|E[X]\|_p = \left[ \sum_{k=1}^K |G(f_k) - G_d(f_k)| \right] \quad (3.50a)$$

Pour  $p = 2$ , on obtient la norme euclidienne :

$$L_2 = \|E[X]\|_p = \left[ \sum_{k=1}^K |G(f_k) - G_d(f_k)|^2 \right]^{1/2} \quad (3.50b)$$

Pour  $p = \infty$ , on parle de problème de [min max](Chebychev)  $L_\infty$  :

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq K} |G(f_k) - G_d(f_k)| \quad (3.50c)$$

$G_d(f)$  et  $G(f)$  représentent respectivement la réponse fréquentielle désirée et calculée du filtre.

$K$  est le nombre d'échantillons fréquentielles

$$G(f) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m e^{j2\pi f}}{\sum_{n=0}^N a_n e^{j2\pi f}} \quad (3.51)$$

Certains auteurs utilisent un filtre d'ordre  $N$  qui a la forme suivante :

$$G(z) = G_0 \prod_{j=1}^{J=N/2} \frac{b_{0j} + b_{1j}z + z^2}{a + a_{1j}z + z^2} \quad (3.51a)$$

ou  $a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont des coefficients réels et  $G_0$  est une constante positive.

On cherche alors le vecteur  $X = [a \ a_1 \ \dots \ a_{1J} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{1J} \ G_0]^T$  en minimisant la norme  $L_p$  dans (3.50)

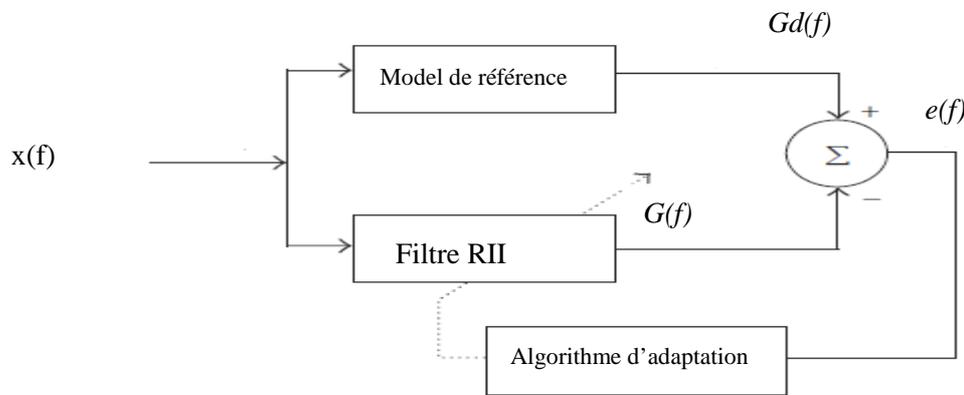


Fig. 3.6 : Synthèse d'un filtre RII par optimisation dans le domaine fréquentielle

La minimisation d'un des critères précédents peut se faire par plusieurs méthodes. Ainsi dans le cas de la norme  $L_2$ , on fait appel à la méthode des moindres carrés. D'autres méthodes plus générales peuvent être utilisées, quelque soit la norme. Parmi elles, on peut citer la méthode de descente qui s'applique à une large classe de problème d'optimisation.

### 3.4.1 Méthodes de descente

Le problème d'estimer des paramètres en minimisant une fonction scalaire apparaît dans de différents contextes où beaucoup d'approches ont été développées. Parmi eux, on trouve les méthodes de descente. [Lim, 1990]

Théoriquement ces méthodes sont non seulement utilisées pour la synthèse des filtres RII dans le domaine spatiale mais aussi pour la conception des filtres RII optimaux, par contre elle n'est pas du tout utile à la synthèse des filtres RIF à cause de l'existence d'autres techniques plus simples et plus efficaces, telle que la méthode des fenêtres. En revanche dans la synthèse des filtres RII, elle demande l'évaluation initiale

de la dérivé du premier ou deuxième ordre par rapport aux inconnus, ce qui la rend très couteuse en terme de calcul lors de la minimisation de l'erreur (3.50c).

Supposant qu'on veut minimiser une fonction scalaire  $f(\theta)$  par rapport à  $\theta$ , le problème se pose comme suit

$$\min_{\theta} f(\theta), \quad (3.52)$$

$\theta$  est le vecteur d'inconnues de dimension (N) :

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \dots \dots \theta_N]^T \quad (3.53)$$

Dans le cas de synthèse de filtres RII,  $\theta$  comprend les  $p$  paramètres  $a(k)$  et les  $q+1$  paramètres  $b(k)$ . L'approche standard pour résoudre (3.68) est l'algorithme de descente défini par l'équation récurrente suivante :

$$\theta^{i+1} = \theta^i + \alpha^i p^i \quad (3.54)$$

où  $\alpha^i$  est le pas de descente à chaque itérations " $i$ ",  $p^i$  est la direction de recherche à chaque itérations et  $\theta^{i+1}$  est le résultat de l'itération.

Pour la classe des méthodes de descente connues sous le nom de méthodes du gradient, la direction de recherche  $p^i$  peut être exprimée en termes de gradient de  $f(\theta)$  pour  $\theta = \theta^i$  telle que

$$p^i = -R^i \nabla f(\theta^i) \quad (3.55)$$

où  $R^i$  est une matrice (NxN) et  $\nabla f(\theta^i)$  est le gradient de  $f(\theta)$  pour  $\theta = \theta^i$  qui est donné par

$$\nabla f(\theta^i) = \left[ \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_2}, \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_3} \dots \dots \dots, \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta_N} \right]_{\theta=\theta^i}^T$$

A partir de (3.54) et (3.55), on déduit

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \alpha^i R^i \nabla f(\theta^i) \quad (3.56)$$

$R^i$  est une matrice définie positif.

Dans ce cas si  $\nabla f(\theta^i) \neq 0$ , il est garanti que

$$f(\theta^{i+1}) < \nabla f(\theta^i) \quad (3.57)$$

pour  $\alpha^i$  suffisamment petit. En outre il est raisonnable de choisir  $\alpha^i$  de manière à vérifier la relation (3.57).

Quatre méthodes connues sont déduites de l'algorithme de descente qui sont :

- ✓ Méthode de descente du gradient
- ✓ Méthode de Newto-Raphson (NR)
- ✓ Méthode de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)
- ✓ Méthode de Levenberg-Marquardt

### 3.4.1.1 Méthode de descente du gradient

Elle repose sur le fait qu'une fonction diminue localement le plus dans la direction négative du gradient. Elle est définie par la relation suivante :

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \alpha^i \nabla f(\theta^i) \quad (3.58)$$

En comparant (3.56) et (3.58), on remarque que  $R^i$  est égale à la matrice identité I. Il est préférable que le pas de descente  $\alpha^i$  soit choisi soigneusement car si comme par hasard  $\alpha^i$  est grand,  $\theta^{i+1}$  peut dépasser la bonne solution (elle aura par conséquent tendance à osciller autour de bonne solution).  $\alpha^i$  peut être fixe ou diminuer à chaque itération, on peut également le déterminer en minimisant  $f(\theta^{i+1}) = f(\theta^i - \alpha^i \nabla f(\theta^i))$ . Cela présente un problème d'optimisation séparé mais dans la majorité des cas, cette approche réduit le nombre d'itérations. Elle est très utile dans le cas où  $\nabla f(\theta^i)$  est difficile à calculer.

### 3.4.1.2 Méthode de Newton-Raphson (NR)

La méthode NR exploite les informations obtenues des dérivées du premier et du second ordre de  $f(\theta)$  pour déterminer la direction de recherche, ce qui améliore la convergence vers la bonne solution. Elle est basée sur le développement de Taylor de la fonction  $f(\theta)$  à  $\theta = \theta^i$  qui peut se présenter comme suit

$$f(\theta^{i+1}) = f(\theta^i) + \nabla f(\theta^i)(\theta - \theta^i) + \frac{1}{2}(\theta - \theta^i)^T H_f(\theta^i)(\theta - \theta^i) + \dots + b(\theta^i) \quad (3.59)$$

où  $H_f(\theta^i)$  est la matrice Hésienne donnée par

$$H_f(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_N \partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_N^2} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Quand  $\theta$  est très proche de  $\theta^i$ , les autres termes  $b(\theta^i)$  sont négligés dans (3.59)

Dans ce cas, on aura :

$$f(\theta^{i+1}) = f(\theta^i) + \nabla f(\theta^i)(\theta - \theta^i) + \frac{1}{2}(\theta - \theta^i)^T H_f(\theta^i)(\theta - \theta^i) \quad (3.61)$$

Comme (3.61) est une forme quadratique par rapport à  $\theta$ , la minimisation de  $f(\theta)$  dans (3.61) peut être réalisée par l'équation itérative.

$$\theta^{i+1} = \theta^i - H_f^{-1}(\theta^i) \nabla f(\theta^i) \quad (3.62)$$

En comparant (3.56) et (3.62), on remarque que  $\alpha^i R^i = H^{-1}_f(\theta^i)$ , le pas de descente est choisit automatiquement dans la méthode NR, par contre  $R^i$  peut ne pas avoir la caractéristique d'être défini positif pour vérifier la convergence.

La méthode de NR ne peut pas converger si la solution itérative n'est pas près de la solution optimale. Elle est considérablement plus complexe par rapport à celle de descente du gradient, car elle demande le calcul de  $\frac{N(N+1)}{2}$  dérivées partielles de seconde ordre et l'inverse de la matrice  $H_f(\theta^i)$  à chaque itération. Mais quand la solution itérative est près de la bonne solution, la méthode atteint fortement la convergence souhaitée.

### 3.4.1.3 Method Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

La méthode DFP à été élaborée par Davidon et modifiée par Fletcher et Powell. Elle combine les deux méthodes discutées précédemment (descente du gradient et Newton-Raphson). Pendant la première étape l'algorithme se comporte comme dans la méthode de descente du gradient et dans les étapes postérieures il se comporte comme dans la méthode de Newton-Raphson. Le vecteur solution est donné par la relation suivante

$$\theta^{i+1} = \theta^i - \alpha^i R^i \nabla f(\theta^i) \quad (3.63)$$

L'idée principale est de construire  $R^i$  en utilisant la dérivé de premier ordre de  $f(\theta)$ , sachant que initialement  $R^i$  est prise comme matrice identité I. La matrice  $R^i$  dans (3.82) est mise à jour récursivement comme suit

$$R^i = R^{i-1} + \frac{r^i (r^i)^T}{(r^i)^T s^i} - \frac{(R^{i-1} s^i)(R^{i-1} s^i)^T}{(s^i)^T R^{i-1} s^i} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.64a)$$

ou

$$\begin{cases} r^i = \theta^i - \theta^{i-1} \\ s^i = \nabla f(\theta^i) - \nabla f(\theta^{i-1}) \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.64 b) \\ (3.64 c) \end{matrix}$$

Fletcher et Powell ont montré que si  $R^i$  est mise à jour par la relation (3.83), si  $\alpha^i$  est choisi comme la valeur  $\alpha$  qui minimise  $f(\theta^i - \alpha R \nabla f(\theta^i))$  et si  $R^0$  est choisit initialement comme matrice identité, alors  $R^i$  est toujours une matrice définie positive. Notons que, sous certaines conditions  $R^i$  devient identique à l'inverse de la matrice Hessienne  $H^{-1}_f(\theta^i)$

### 3.4.1.4 Méthode de Levenberg-Marquardt (LM)

Elle combine également la méthode de descente du gradient avec celle de Newton-Raphson de la manière suivante :

$$\theta^{i+1} = \theta^i - [\alpha I + H^{-1}_f(\theta^i)] \nabla f(\theta^i) \quad (3.64)$$

### 3.4.2 Métaheuristiques d'optimisation

Les métaheuristiques sont la plus part du temps issues des métaphores provenant de la nature et notamment de la biologie. Elles proviennent de l'étude du comportement animal (éthologie). Plusieurs méthodes d'optimisation basées sur ces métaheuristiques telles que les Algorithmes génétiques, les essaims de particules, les colonies de fourmis, la recherche tabou [Gardeux], le recuit simulé etc., ont été développées. L'optimisation par essaim de particules «Particle Swarm Optimization» est une des métaheuristiques qui consiste à mimer le déplacement d'un groupe d'animaux comme le déplacement d'un banc de poissons ou le vol des oiseaux. Elle a été développée par les docteurs EBERHART et KENNEDY en 1995. [Kennedy et Eberhart, 1995].

### 3.4.3 Optimisation par essaim de particules

Les auteures de la méthode d'optimisation par essaim de particulaires se sont inspirées de ces comportements en mettant en évidence la théorie de socio-psychologie sur le traitement de l'information et les prises de décisions dans des groupes sociaux. Elle utilise la capacité des systèmes fortement distribué et de large groupes de particules explorant l'espace de recherche avec une dynamique de déplacement qui tend à les faire rapprocher les unes des autres [Calas] et [Kamal et al, 2010]. Elle met en jeux de larges groupes de *particules* sous forme de vecteurs se déplacent sur l'espace de recherche. Chaque particule  $j$  correspondante à une solution est caractérisée par sa position  $x_j$  (valeur prise par la solution) et le vecteur de changement de position (appelé vitesse)  $\vec{v}_j$ . A chaque itération la particule se déplace par  $x(j) = x(j-1) + v(j-1)$ . Le point essentielle de cette méthode est chercher comment définir  $\vec{v}_j$ , sachant que les déplacements des individus sont influencé par leurs comportement passé et celui de leurs voisins. On tient donc en compte, dans la mise à jour de la position des particules de la direction de leurs mouvements et de leurs vitesses. La meilleure position précédente  $\vec{p}_i$  et la meilleur position  $\vec{p}_g$  parmi les voisins. [Kamal et al, 2010]

$$\vec{x}_i = f(\vec{x}_i(t-1), \vec{v}_i(t-1), \vec{p}_i, \vec{p}_g) \quad (4.65)$$

Le changement de position (vitesse) s'effectue donc comme suit

$$v(t+1) = w * v(t) + \varphi_1(x_{best} - x(t)) + \varphi_2(x^* - x(t)) \quad (4.66)$$

$\varphi_n$  sont des variables aléatoires tirés dans  $U_{[\varphi_{min}, \varphi_{max}]}$  qui a comme rôle de pondérer le rôle relatif de l'expérience individuelle ( $\varphi_1$ ) et de la communication sociale ( $\varphi_2$ ), Ils déterminent le poids d'attraction de chaque particule vers sa meilleure position de  $x_{best}$  et vers la meilleure position de toutes les particules  $X^*$ . Notons que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont générés à chaque itération. Le paramètre  $W$  représente le poids d'inertie qui

contrôle combien les particules tendent à suivre sa direction comparée à la position mémorisé de  $x_{best}$  et  $X^*$ .  
La vitesse (*velocity*) est tronquée entre les deux valeurs  $v_{min}$  et  $v_{max}$ .

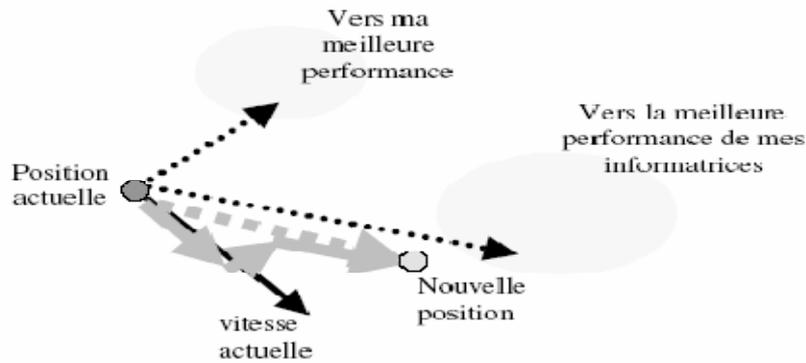


Fig. 3.7 : Schéma de principe du déplacement d'une particule [Tsai et al, 2008]

### 3.4.4 Algorithme : Optimisation par essaim particulaire (en variable continues)

[Kamal et al, 2010].

- 1- Initialisation de la population de solutions  $pop$
- 2- Evaluer la population  $pop$  « Calculer la fitness de chaque solution »
- 3- Sauvegarder la meilleure solution  $x_{best}$  de chaque particule
- 4- Mise à jour des particules mémoire

Pour un nombre d'itérations  $N$  fixe

Pour toute particule  $J$  de la population  $pop$

Pour chaque variable  $k$  de la solution

➤ Mise à jour de la vitesse « *velocity* »

$$\varphi_1 = rand(\varphi_{min}, \varphi_{max}) \text{ et } \varphi_2 = rand(\varphi_{min}, \varphi_{max})$$

$$pop\_v_k = w * pop\_v_k + \varphi_1(x_{best\_x,k} - pop\_x_k) + \varphi_2(X^*_k - pop\_x_k)$$

➤ Troncature des valeurs de la vitesse

$$\text{Si } pop\_v(j)\_v_k > v_{max} \text{ alors } pop\_v(j)\_v_k = v_{max}$$

$$\text{Si } pop\_v(j)\_v_k < v_{min} \text{ alors } pop\_v(j)\_v_k = v_{min}$$

➤ Mise à jour de la position

$$pop(j)\_x_k = pop(j)\_x_k + pop\_v(j)\_v_k$$

➤ Troncature des valeurs des positions

$$\text{Si } pop(j)\_x_k > g_{max} \text{ alors } pop(j)\_x_k = g_{max}$$

Si  $pop(j)_{-}x_k < g_{min}$  alors  $pop(j)_{-}x_k = g_{min}$

Fin // pour  $k$

Fin // pour  $j$

Evaluer la population  $pop$  « Calculer la fitness de chaque solution »

Mettre à jour la meilleure solution  $xbest$  de chaque particule

Déterminer la meilleure solution  $X^*$ .

Fin // pour  $N$

$pop$  : la matrice de la population initiale, générée de manière aléatoire.

$pop_v$  : la matrice de la vitesse (*velocity*) de chaque particule de la population initiale, générée de manière aléatoire et tranqué dans l'interval  $[0 v_{max}]$ .

$xbest$  : la meilleure solution de  $pop$

$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  : constante d'accélération générés de manière aléatoire dans l'interval  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$  a chaque itération, tell que ( $\varphi_{min} = 0$  et  $\varphi_{max} = 2$ )

$W$  : le poids d'inertie, un paramètrès très important le premier avec le quel la convergence seras contrôlable, il décroît en fonction du temps. (*fixé entre 0.4 et 0.9*[Das et Konar, 2007])

### 3.5 Tests et résultats

Nous allons présenter dans cette section les résultats de la méthode d'optimisation par essaim de particules (PSO) pour la synthétise d'un filtre a réponse impulsionnelle infini monodimensionnelle (RII\_1D) en considérant les signaux dans le domaine temporel. Pour cela, nous considérons un filtre de référence stable d'ordre 3. Sa fonction de transfert est la suivante :

$$G(z) = \frac{0.196}{0.196 + 0.648z + 0.814z^2 + z^3} \quad (4.67)$$

#### 3.5.1 Choix du poids d'inertie

Les tableaux 3.1 et 3.2 regroupent respectivement le temps de calcul moyen et la fitness moyenne en fonction du poids d'inertie  $w$ . La figure 3.8 illustre la variation de ces 2 critères.

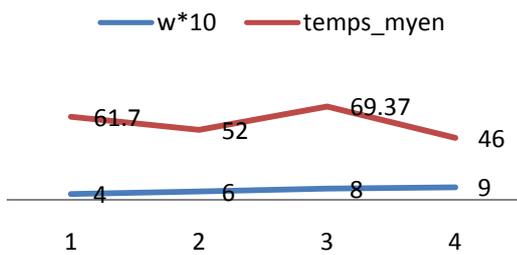
w*10	temps_myen(s)
4	61.7
6	52
8	69.37
9	46

Table 3.1

w	Fitn moyenne
0.4	0.00011
0.6	0.00037
0.8	0.034
0.9	0.34

Table 3.2

**Temps de calcul moyen**  
 $=f(w*10)$



**Fitness moyenne =f(w)**

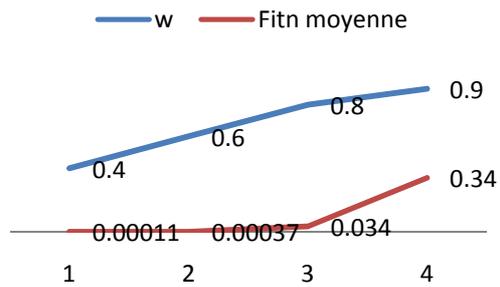


Fig. 3.8 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de  $w$

D'après les deux graphes, le temps de calcul en fonction de  $w$  (le poids d'inertie) et la fitness moyenne en fonction de  $w$ , on tire la meilleure valeur de  $w$  de manière à avoir un compromis entre la fitness moyenne et le temps de calcul moyen. La valeur de  $w = 0.6$  semble être la meilleure (Temps de calcul moyen = 52 secondes, Fitness moyenne = 0.00037). Cette valeur de  $w$  est gardée pour le reste des tests.

### 3.5.2 Choix de la taille de la population

Les tableaux 3.3 et 3.4 ainsi que la figure 3.9 montrent comment varie le temps de calcul moyen et la fitness moyenne en fonction de la taille de la population initiale  $Npop$

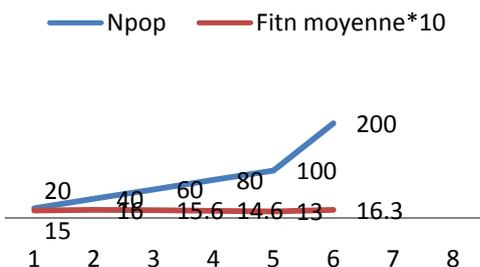
Npop	Fitn moyenne*10
20	15
40	16
60	15.6
80	14.6
100	13
200	16.3

Table 3.3

Npop	temps de calcul moyen(s)
20	41
40	85
60	132
80	159
100	201
200	426

Table 3.4

**Fitness moyenne\*10**  
 $=f(Npop)$



**Temps de calcul moyen**  
 $= f(Npop)$

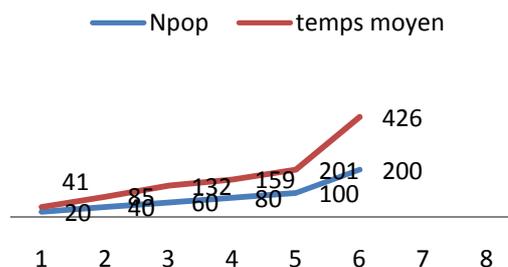


Fig. 3.9 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de  $Npop$

D'après les deux graphes, Temps de calcul moyen en fonction de  $N_{pop}$  (nombre d'individus dans la population initiale) et la fitness moyenne en fonction de  $N_{pop}$ , on tire la meilleure valeur de  $N_{pop}$  de manière à avoir un compromis entre la fitness moyenne et le temps de calcul moyen. La valeur de  $N_{pop} = 100$  semble être la meilleure (Temps de calcul moyen = 201 secondes, Fitness moyenne = 0.13). Cette valeur  $N_{pop}$  sera gardée pour le reste des tests.

### 3.5.3 Ordre du filtre

Dans les tests précédents, l'ordre du filtre déterminé par le PSO est fixé à celui de la  $G(z)$ . Nous allons voir maintenant comment varie le temps de calcul moyen et la fitness moyenne en fonction de l'ordre du filtre RII ( $N_{app-1}$ ) synthétisé. La variation de ces deux critères est illustrée sur les tableaux 3.5 et 3.6 Et la figure 3.10

ordre du filtre	Fitn moyen
1	1.3
2	0.43
3	$1.6 \cdot 10^{-9}$
4	0.1

Table 3.5

ordre du filtre	temps moyen(s)
1	201
2	207
3	215
4	299

Table 3.6

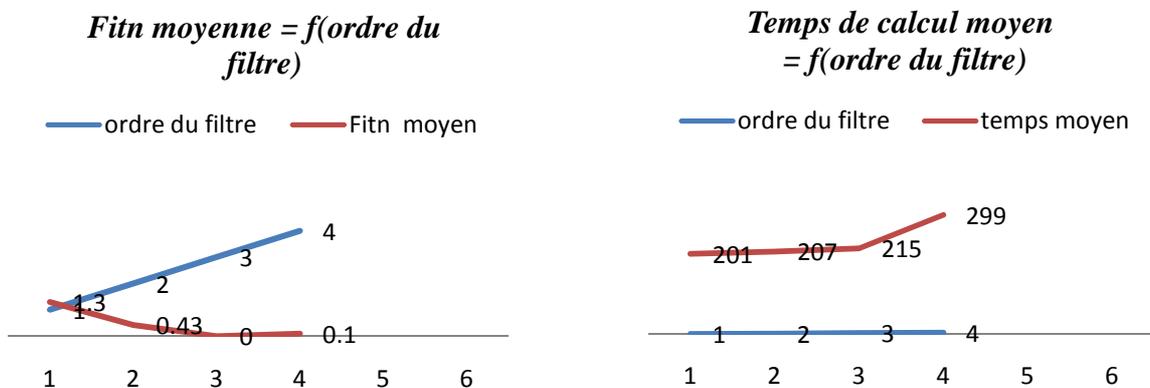


Fig. 3.10 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de l'ordre du filtre

D'après les deux graphes, la valeur de  $N_{app} = 4$ , (ordre du filtre RII = 3) semble être la meilleure (Temps de calcul moyen = 215 secondes, Fitness moyenne =  $1.6 \cdot 10^{-9}$ ). Nous avons donc choisi cette valeur pour mener le reste des tests.

### 3.5.6 Choix du nombre d'itérations.

Ce paramètre est directement lié au test d'arrêt de l'algorithme. Il est également relié à sa convergence. En le faisant varier (voir tableaux 3.7 et 3.8 et figure 3.11), nous avons retenue une valeur optimale de 100. Cette valeur correspond au meilleure *Temps de calcul moyen* = 299 secondes et à la *meilleur Fitness moyenne* =  $1.6 \cdot 10^{-9}$ .

N_iter	Fitn moyen
20	0.039
50	$1.18 \cdot 10^{-4}$
100	$1.6 \cdot 10^{-9}$
200	$1.27 \cdot 10^{-18}$
400	0

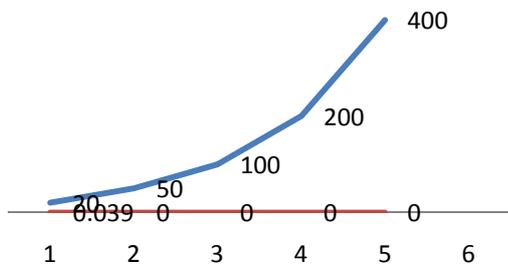
Table 3.7

N_iter	temps moyen(s)
20	45
50	122
100	299
200	446
400	846

Table 3.8

**Fitn moyenne = f(N\_iter)**

— N\_iter — Fitn moyen



**Temps de calcul moyen = f(N\_iter)**

— N\_iter — temps moyen

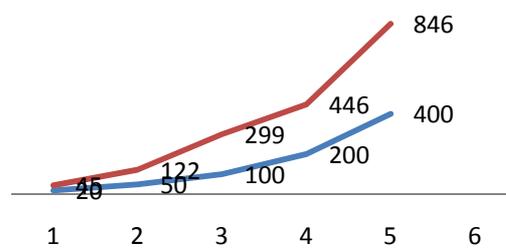


Fig. 3.11 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction du nombre d'itérations

### 3.5.7 Longueur du signal d'entrée

Nous avons également varié la longueur du signal d'entrée afin de voir s'il a une influence sur la qualité des résultats (voir tableaux 3.9 et 3.10 ainsi que la figure 3.12).

K	Fitn moyen* $10^{-10}$
20	2.29
50	2.64
100	1.6
200	18.2
400	59.2
600	386

K	temps moyen (s)
20	227
50	237
100	245
200	261
400	269
600	333

Table 3.9

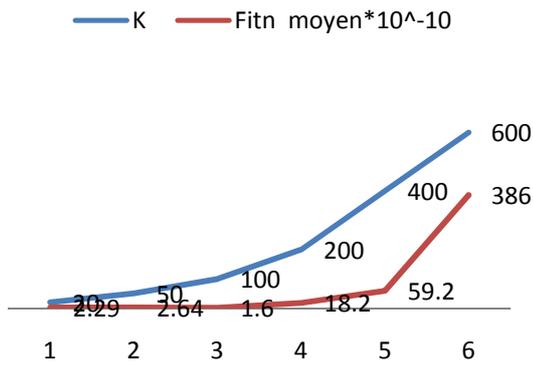
*Fitn moyenne = f(K)*

Table 3.10

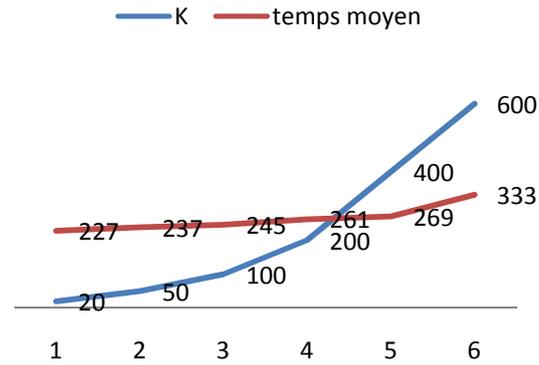
*Temps de calcul moyen = f(K)*

Fig. 3.12 : Temps de calcul moyen et fitness moyenne en fonction de la longueur du signal d'entrée

Les résultats montrent que la valeur de  $K = 100$ , semble être la meilleure (*Temps de calcul moyen = 245 secondes, Fitnessse moyenne =  $1.6 \cdot 10^{-10}$* ).

### 3.6 Résultats de simulation

Pour récapituler, nous avons rassemblé dans le tableau 3.11 ci-dessous les paramètres de l'algorithme.

<i>Paramètre</i>	<i>Meilleure valeur</i>	<i>Signification</i>
<i>Npop</i>	100	<i>Taille de la population initiale</i>
<i>Napp</i>	4	<i>Taille du dénominateur</i>
<i>Mapp</i>	1	<i>Taille du numérateur</i>
<i>K</i>	200	<i>Nombre d'échantillons</i>
<i>W</i>	0.6	<i>Poids d'inertie</i>
<i>N_iter</i>	100	<i>Nombre d'itérations</i>

Table. 3.11 : Récapitulatif des meilleures valeurs des paramètres après les testes

En utilisant les valeurs prescrites dans le tableau (3.11), les résultats des simulations sont présentés par les figures suivantes :

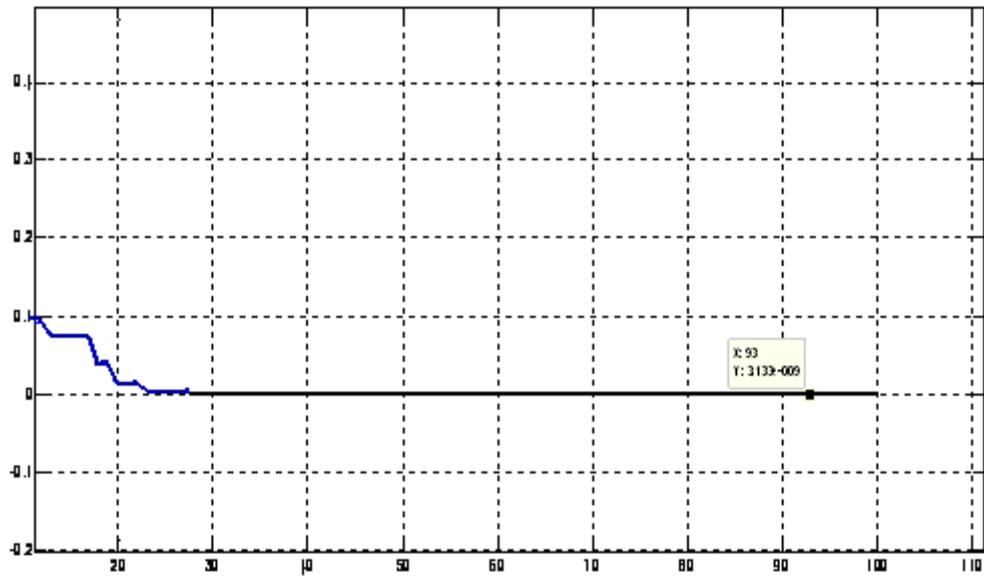


Fig. 3.13 : Evolution de la fitness dans chaque itération

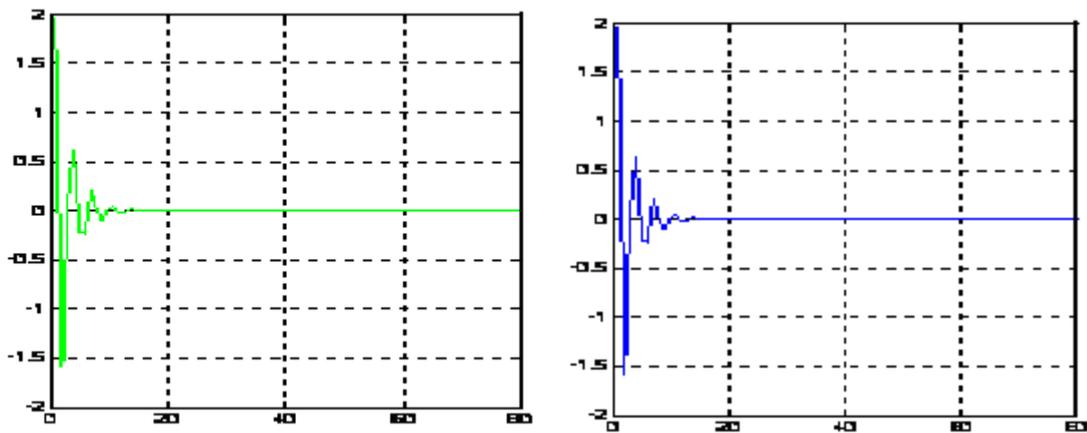


Fig. 3.14 : Les réponses impulsionnelle désiré et obtenue

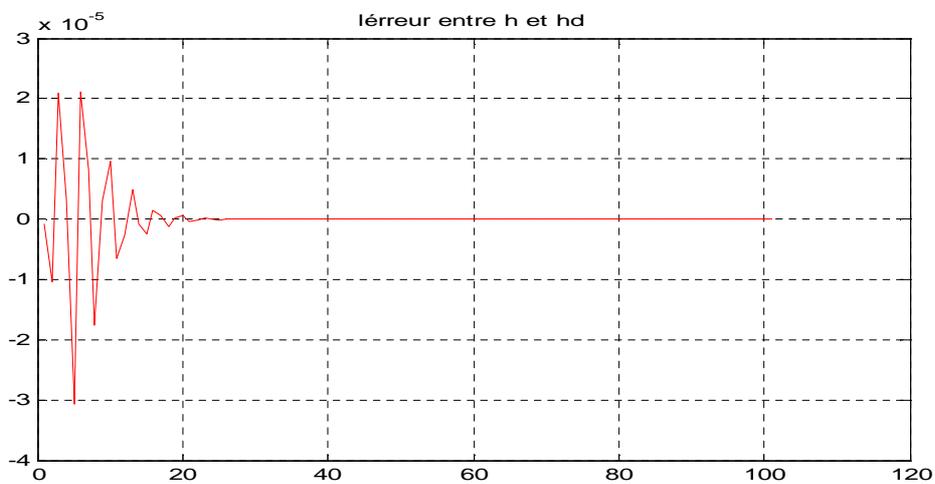


Fig. 3.15 : L'erreur entre les deux réponses impulsionnelle désiré et obtenue

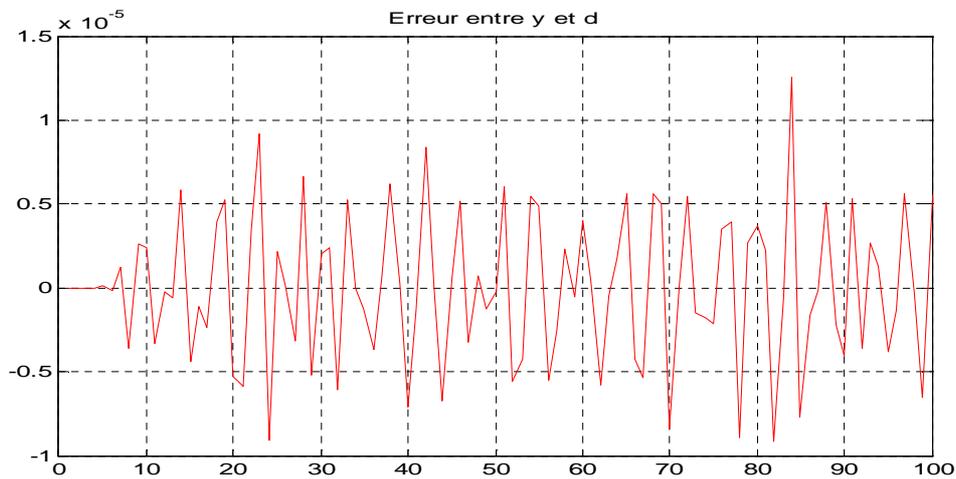


Fig. 3.16 : *L'erreur entre les deux sorties désiré et obtenue*

### 3.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes méthodes de synthèse des filtres numériques dans le cas monodimensionnelle. Certaines techniques cherchent à synthétiser en premier lieu un filtre analogique pour ensuite le transposer en un filtre numérique en établissant une correspondance entre les deux domaines analogique et numérique. D'autres méthodes font appel à des procédures d'optimisation, comme la méthode d'optimisation par essaim des particules PSO. Cette dernière est appliquée afin de concevoir un filtre RII\_1D dans le domaine temporel. Les résultats obtenus sont très satisfaisant et montre le degré de la robustesse, la fiabilité et précision de cette approche. On s'intéressera dans le prochain chapitre à ce type de méthodes afin de synthétiser un filtre RII bidimensionnel.

---

*Chapitre IV:*  
*Filtrage numérique en 2*  
*dimensions*

---

## 4.1 Introduction générale

Le filtrage d'image est très utilisé pour atténuer le bruit, détecter les contours ou restaurer des images.

Nous présenterons dans ce chapitre quelque notion sur le filtrage bidimensionnel. On évoquera les notions sur la synthèse, la causalité et la stabilité des filtres RII en 2D. Les résultats de l'application de la méthode de synthèse par approche des PSO seront présentés à la fin de ce chapitre.

## 4.2 Généralités

Un signal bidimensionnel est une fonction réelle ou complexe de deux variables continues (signal continu) ou entière (cas d'un signal numérique) généralement indépendantes. Le domaine de variation des deux variables est appelé étendu ou support.

### 4.2.1 Signaux bidimensionnels continus

#### 4.2.1.1 La transformée de Fourier 2D

La représentation fréquentielle des signaux 2D est l'extension directe de celle des signaux monodimensionnels.

La transformée de Fourier  $F(u,v)$  d'un signal  $f(x,y)$  est :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(xu+vy)} dx dy \quad (4.1)$$

Dans certaines présentations la quantité scalaire  $(ux + vy)$  est donnée sous la forme d'un produit scalaire ; on obtient alors une écriture similaire dans les cas mono et multidimensionnel. [Najim, 2006]

Cette formule permet de calculer l'amplitude de la composante du signal  $f(x,y)$  à la fréquence spatiale  $(u,v)$ .

La reconstitution du signal spatial se fait par addition des différentes fréquences spatiales pondérées par les amplitudes complexes ainsi calculées.

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{j2\pi(xu+vy)} du dv \quad (4.2)$$

#### Exemple 1.1

Le signal sinusoïdal temporel  $e^{j\omega t}$  est caractérisé par la fréquence  $\omega/2\pi$  donnant (en Hertz) correspond au nombre de vibrations du signal par unité de temps (en secondes).

La fréquence spatiale  $(u,v)$  caractérisant  $e^{j(ux+vy)}$  est une impulsion de Dirac de coordonnées  $(u,v)$ ; c'est un couple de paramètres qui peut être interprété comme une fréquence du signal donnée par  $\sqrt{u^2 + v^2}$  et un angle "d'arrivée" dont la tangente est  $v/u$ . En effet les points de même phase  $\varphi$  de la sinusoïde sont situés sur des droites parallèles entre elles et perpendiculaires au vecteur  $(u,v)$ . [Roux, 2000]

$$ux + vy = \varphi + 2\pi k \quad (4.3)$$

Un signal sinusoïdal réel a pour transformée un couple d'impulsions de Dirac situées en  $(u,v)$  et  $(-u,-v)$ . Si la phase à l'origine est nulle, les deux impulsions de Dirac sont réelles et ont la même amplitude. Si la phase est  $\pi/2$ , leurs amplitudes sont imaginaires pures et opposées.

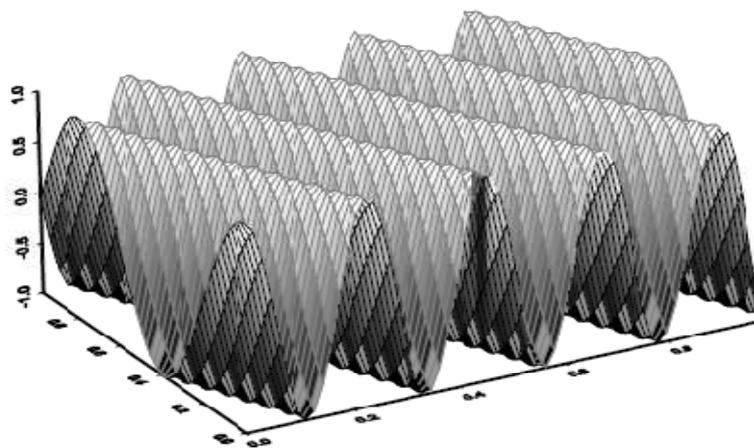


Fig. 4.1 : Signal sinusoïdal bidimensionnelle

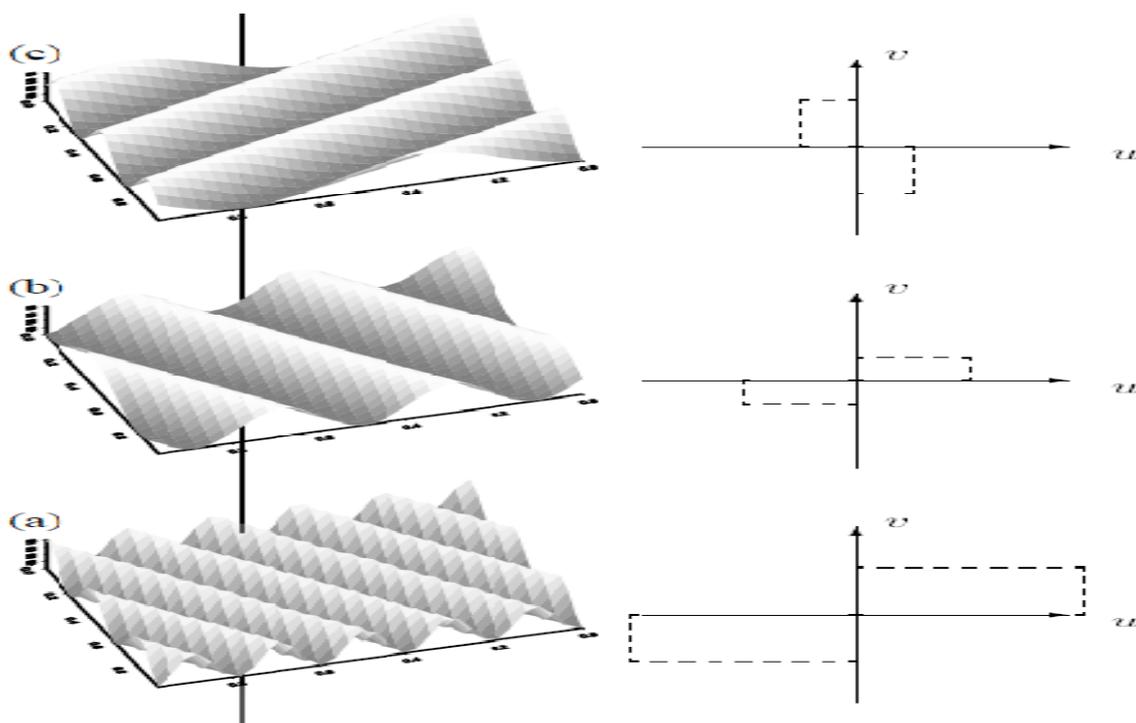


Fig. 4.2 : Modification des paramètres d'une sinusoïde bidimensionnelle : (a)  $u=2, v=4$  ; (b)  $u=1, v=2$  ; (c)  $u=2, v=-1$

## A. Propriétés de la transformée de Fourier 2D

On retrouve toutes les propriétés de la transformée de Fourier monodimensionnelle, en particulier :

- La symétrie : Si  $f(x, y)$  est une fonction réelle, sa transformée de Fourier vérifie :

$$f(u, v) = \overline{f(-u, -v)} \quad (4.4)$$

✓ Si  $f(x, y)$  est réelle et  $f(x, y) = f(-x, -y)$ , alors  $F(u, v)$  est aussi réelle et  $F(u, v) = F(-u, -v)$ .

✓ Si  $f(x, y)$  est réelle et  $f(x, y) = -f(-x, -y)$ , alors  $F(u, v)$  est imaginaire et  $F(u, v) = -F(-u, -v)$

- Translation d'un signal se traduit par un déphasage linéaire, si  $f(x, y)$  a pour transformé  $F(u, v)$ , donc  $g(x, y) = f(x-x_0, y-y_0)$  a comme transformé :

$$G(u, v) = F(u, v) e^{-j(ux_0 + vy_0)} \quad (4.5)$$

### 4.2.1.2 Convolution 2D

Comme dans le cas monodimensionnel, l'opération effectuée sur un signal bidimensionnel est une application linéaire invariante spatialement. Elle se traduit par une convolution. Une convolution 2D s'écrit comme suit :

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) h(x-s, y-t) ds dt \quad (4.6)$$

On remarquera que le résultat de la convolution d'une fonction  $f(x, y)$  avec une impulsion de Dirac à l'origine  $\delta(x, y)$  est la fonction elle-même.

La convolution de  $f(x, y)$  par une impulsion de Dirac décalée  $\delta(x-x_0, y-y_0)$  produit une fonction translatée  $f(x-x_0, y-y_0)$ .

La transformée de Fourier de la convolution est

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(ux+yv)} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) h(x-s, y-t) ds dt \right] dx dy \quad (4.7)$$
$$= F(u, v) H(u, v)$$

La transformée de Fourier inverse a une forme identique à la transformée de Fourier d'un produit  $f(x, y).h(x, y)$  qui est le produit de convolution des transformées des deux facteurs.

### 4.2.1.3 Echantillonnage des signaux 2D

Les problèmes posés par l'échantillonnage des signaux bidimensionnels sont similaires à ceux des signaux monodimensionnels. La théorie de Shannon s'applique de la même manière. Toutefois, une interprétation dans un espace à deux dimensions est nécessaire pour mieux comprendre les phénomènes liés à l'échantillonnage, comme les effets de la géométrie du motif d'échantillonnage.

Soit une impulsion de Dirac dans le plan telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) dx dy = f(0,0) \quad (4.8)$$

ce qui correspond à  $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$

On peut considérer l'échantillonnage comme le produit du signal par une "brosse"  $b(x, y)$  d'impulsions de Dirac.

$$g(x, y) = f(x, y) b(x, y) = f(x, y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \delta(y - n\Delta y) \quad (4.9)$$

Cette brosse  $b(x, y)$  peut être considérée comme le produit de deux peignes étendus l'un dans la direction  $O_x$  soit  $p_x(x, y)$  de période  $\Delta x$  et l'autre dans la direction  $O_y$  soit  $p_y(x, y)$  de période  $\Delta y$ .

$$p_x(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \quad (4.10)$$

$$p_y(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y)$$

alors

$$b(x, y) = p_x(x, y) p_y(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(y - n\Delta y) \quad (4.11)$$

#### A. Interprétation fréquentielle de l'échantillonnage

Le peigne étendu  $p_x(x, y)$  de période  $\Delta x$  a pour transformée de Fourier un peigne d'impulsions de Dirac  $P_x(u, v)$  (ce n'est pas un peigne étendu) [Roux, 2000] situés sur l'axe  $O_u$  et de période  $2\pi/\Delta x$  soit

$$P_x(u, v) = \delta(v) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k/\Delta x) \quad (4.12)$$

La Transformée de Fourier  $P_y(u, v)$  de  $p_y(x, y)$  est un peigne de période  $2\pi/\Delta y$  situé sur l'axe  $O_v$ .

$$P_y(u, v) = \delta(u) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(v - l/\Delta y) \quad (4.13)$$

La Transformée du produit des deux peignes étendus (*la brosse*) est donc une convolution de deux peignes perpendiculaires, c'est-à-dire une brosse. La transformée de Fourier de  $p(x, y)$  est la convolution de ces deux fonctions. En effet, la convolution d'une fonction et d'une impulsion de Dirac située au point  $(u, v)$  est égale à la translation de cette fonction de l'origine au point  $(u, v)$ . La convolution d'une fonction définie uniquement sur l'axe  $O_u$  et d'un peigne défini sur l'axe  $O_v$  est donc la répétition de cette fonction par une suite de translations suivant  $O_v$ . Si la fonction convoluée est un peigne suivant l'axe  $O_u$ , le résultat de la convolution sera une suite de reproductions de ce peigne horizontal le long de l'axe vertical

### B. Le repliement spectral dans le cas bidimensionnel

La transformée de Fourier  $G(u, v)$  de la fonction échantillonnée  $g(x, y)$  est la convolution de la brosse (*Transformée de la fonction d'échantillonnage*) dans le domaine des fréquences et de  $F(u, v)$  transformée de l'image avant échantillonnage. C'est donc la somme des reproductions de  $F(u, v)$  déduites de  $F(u, v)$  par translation aux points de coordonnées  $(2\pi k/\Delta x, 2\pi l/\Delta y)$ . [Roux, 2000]

Il y a périodisation bidimensionnelle de la transformée de Fourier de l'image initiale

$$G(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F(u - k/\Delta x, v - l/\Delta y) \quad (4.14)$$

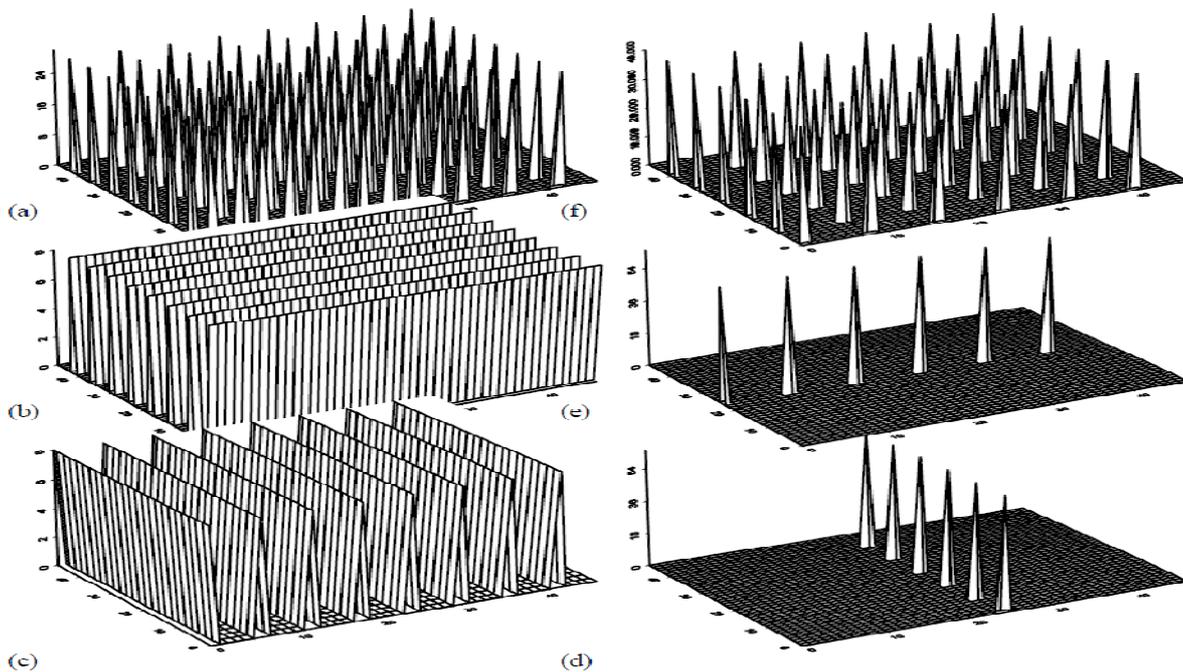


Fig.4.3 : Illustration de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences. (a) Brosse d'échantillonnage dans le domaine spatial ; (b) Peigne étendu suivant l'axe des abscisse ; (c) Peigne étendu suivant l'axe des ordonnées ; (d) Peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des ordonnées ; (e) Peigne transformée du peigne étendu suivant l'axe des abscisses ; (f) Transformée de la brosse : c'est aussi une brosse obtenue par convolution des deux peignes dans le domaine des fréquences

## 4.2.2 Signaux bidimensionnels numériques

Dans notre travail, on s'intéresse à une image qui peut être considérée comme un signal numérique bidimensionnel  $x(k, l)$ . Si les domaines de variations des variables spatiales  $k$  et  $l$  sont finis, alors le signal  $x(k, l)$  peut être représenté par une matrice rectangulaire [Coequerez et Philipp, 1995] telle que :

$$x(k, l) \cong X = \begin{pmatrix} x(k_1, l_1) & x(k_1, l_2) & \dots & \dots & \dots & x(k_1, l_L) \\ x(k_2, l_1) & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x(k_K, l_1) & \dots & \dots & \dots & \dots & x(k_K, l_L) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

L'impulsion unité bidimensionnelle est :

$$d(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k, l) = (0, 0) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.16)$$

L'échelon unité bidimensionnelle peut s'écrire comme suit :

$$U(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \text{ et } l \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.17)$$

Un signal rectangulaire est défini par :

$$rect_{K,L}(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq K - 1 \text{ et } 0 \leq l \leq L - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.18)$$

Notons qu'un signal bidimensionnel est dit séparable si

$$x(k, l) = x_1(k) x_2(l) \quad (4.19)$$

### 4.2.2.1 Transformée de Fourier numérique d'un signal 2D

La transformée de Fourier d'un signal numérique bidimensionnel  $x(k, l)$  est :

$$X(f, g) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(k, l) * e^{-j2\pi(fk+gl)} \quad (4.20)$$

Cette transformée n'existe que si :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |x(k, l)| < \infty \quad (4.21)$$

Comme dans le cas bidimensionnelle, la fonction  $X(u, v)$  est périodique de période unité en  $u$  et en  $v$  [Roux, 2000] telle que:

$$X(u + 1, v + 1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(k, l) e^{-j2\pi[(u+1)k+(v+1)l]}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(k, l) e^{-j2\pi(uk+vl)} e^{-j2\pi(k+l)} \\
&= X(u, v)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

La transformée de Fourier inverse est alors :

$$x(k, l) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} X(u, v) e^{-j2\pi(uk+vl)} du dv \tag{4.23}$$

#### 4.2.2.2 Transformée de Fourier discrète d'un signal numérique 2D

Les variables fréquentielles  $u$  et  $v$  sont continues et un signal numérique  $x(k, l)$  contient un nombre infini d'échantillons. Il est alors difficile pratiquement d'utiliser les relations précédentes. Afin d'éviter ces problèmes, on discrétise les variables continues  $u$  et  $v$  et on limite le support du signal  $x(k, l)$ .

$$u = m \Delta u \quad \text{et} \quad v = n \Delta v \tag{4.24}$$

Avec

$$\Delta u = \frac{1}{M} \quad \text{et} \quad \Delta v = \frac{1}{N} \tag{4.25}$$

où  $M$  et  $N$  sont des entiers

La transformée de Fourier discrète d'un signal numérique bidimensionnel  $x(k, l)$  prend la forme suivante :

$$X(m, n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+M-1} \sum_{l=l_0}^{l_0+N-1} x(k, l) \exp \left[ -j2\pi \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right) \right] \tag{4.26}$$

La transformée de Fourier inverse devient :

$$x(k, l) = \frac{1}{MN} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} X(m, n) \exp \left[ j2\pi \left( \frac{mk}{M} + \frac{nl}{N} \right) \right] \tag{4.27}$$

### 4.3 Filtrage numérique des signaux bidimensionnels

Le filtrage des signaux bidimensionnels est en général un filtrage passe-bas ou passe-bande dont la réponse impulsionnelle présente des symétries spatiales (*symétrie par rapport à l'origine ou symétrie circulaire*). Ces réponses impulsionnelles, doivent en général être définies sur un support relativement restreint pour que les calculs puissent s'effectuer en un temps raisonnable. La plupart du temps, ces filtrages sont réalisés grâce à des filtres à réponse impulsionnelle finie. Mais on peut être amené à définir un filtre très sélectif dans le domaine des fréquences spatiales (*détection d'un signal d'une fréquence donnée venant d'une direction donnée*). [Lim, 1990] On peut dans ce cas envisager l'utilisation de filtres à réponse impulsionnelle infinie (*filtres récursifs*). Notons que la synthèse des RIF 2D peut être effectuée en généralisant les méthodes 1D

vues au chapitre 2 telles que les méthodes des fenêtres, par série de Fourier, par échantillonnage en fréquence et celles basées sur l'optimisation [Lim, 1990]. Par contre pour les filtres RII, la généralisation des méthodes 1D au cas des signaux bidimensionnels pose un certain nombre de problèmes en ce qui concerne la causalité, la linéarité et la stabilité des filtres.

### 4.3.1 Propriétés

Soit F un opérateur permettant d'associer une image résultante  $O(x,y)$  à une image source  $I(x,y)$ . Sous les hypothèses de linéarité et de stationnarité spatiale [M. B] on a :

#### 4.3.1.1 Linéarité

$$F(\alpha.I(x, y) + b.I(x, y)) = \alpha F(I(x, y)) + b F(I'(x, y)) \quad (4.28)$$

#### 4.3.1.2 Stationnarité

$$F(I(x + k, y + l)) = O(x + k, y + l) \text{ pour } l = \text{cte, et } k = \text{cte} \quad (4.29)$$

Avec ces hypothèses il est bien connu que l'opérateur F est une convolution :

$$O(x, y) = F(I(x, y)) = I(x, y) * g(x, y) \quad (4.30)$$

$$\text{et} \quad O(u, v) = I(u, v)G(u, v) \quad (4.31)$$

Où  $g(x, y)$  est la réponse impulsionnelle spatiale caractéristique de l'opérateur F.

Cette convolution peut s'écrire sous la forme suivante aussi :

$$O(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I(x, y) g(x - k, y - l) \quad (4.32)$$

Si la réponse impulsionnelle est limitée, cette convolution devient :

$$O(x, y) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{l=0}^{L-1} I(x, y) g(x - k, y - l) \quad (4.33)$$

#### 4.3.1.3 Causalité

Une des plus grandes différences entre le traitement numérique monodimensionnelle et le bidimensionnel c'est qu'il n'ya pas d'ordre naturel sur  $z^2$ , donc il est difficile de définir le passé d'un point de l'image [Binet, 2008-2009]. Deux types de causalité sont usuellement utilisés :

##### ✓ Causalité quart de plan :

La réponse impulsionnelle (Fig.4.4a) est telle que :

$$g(x, y) = 0 \text{ pour } x < 0 \text{ et } y < 0 \quad (4.34)$$

##### ✓ Causalité demi plan asymétrique :

Dans ce cas  $g(x, y)$  (Fig.4.4b) est tel que :

$$g(x, y) \neq 0 \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \quad (4.35)$$

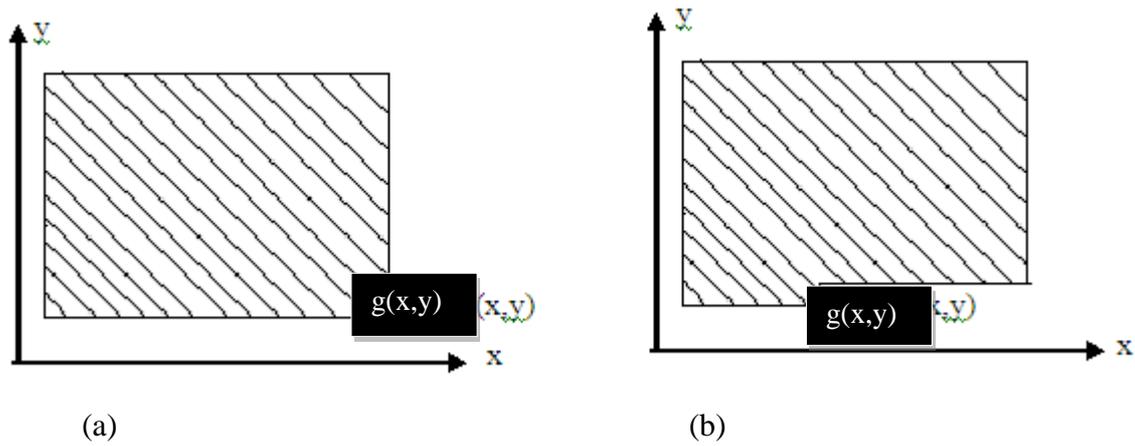


Fig. 4.4 : la causalité

a : causalité quart de plant, la zone achurée correspond au passé du point  $g(x,y)$

b : causalité demi-plant, la zone achurée correspond au passé du point  $g(x,y)$

#### 4.3.1.4 Equation récurrente

La relation entre un signal de sortie  $g(x,y)$  et un signal d'entrée  $f(x,y)$  d'un filtre linéaire et invariant bidimensionnel est donnée par l'équation aux différences suivante [Bernard] :

$$\sum_{m=0}^{M_1-1} \sum_{n=0}^{N_1-1} a(m,n)g(x-m,y-n) = \sum_{m=0}^{M_2-1} \sum_{n=0}^{N_2-1} b(m,n)f(x-m,y-n) \quad (4.36)$$

#### 4.3.2 Transformé en z bidimensionnelle

Comme le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle  $g(x,y)$ , on peut définir sa transformé en z de la manière suivante :

$$G(z_1, z_2) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} h(x,y) z_1^{-x} z_2^{-y} \quad (4.37)$$

Cette série entière ne converge que dans un certain domaine de l'espace  $(z_1, z_2)$  tel que

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \sum_{y=-\infty}^{+\infty} |g(x,y) z_1^{-x} z_2^{-y}| < \infty \quad (4.38)$$

La relation inverse permettant de définir la réponse impulsionnelle à partir de la fonction de transfert est de la forme :

$$g(x,y) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \oint_{c_1} \oint_{c_2} G(z_1, z_2) z_1^x z_2^y \frac{dz_1}{z_1} \frac{dz_2}{z_2} \quad (4.39)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux contours inclus dans le domaine de convergence de  $G(z_1, z_2)$ .

Cette transformation est évidemment linéaire, le décalage spatiale est équivalent au retard temporel en monodimensionnel.

$$TZ\{g(x - k, y - l)\} = z_1^k z_2^l TZ\{g(x, y)\} \quad (4.40)$$

Elle possède, aussi la propriété de changer le produit de convolution en un produit simple se qu'est similaire au cas monodimensionnelle.

$$TZ(G * I) = TZ(G).TZ(I)$$

#### 4.3.2.1 Lien avec la transformé de Fourier

Si on pose  $z_x = e^{ju}$  et  $z_y = e^{jv}$ , la transformé de Fourier sera écrite comme suit :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(ux+yv)} \quad (4.41)$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonné de la "brosse" d'impulsions de Dirac dont les amplitudes sont  $f(x, y)$ . Elle est donc périodique et peut être obtenue par addition des répétitions de la transformée de Fourier du signal analogique [Roux, 2000] et [Bernard].

#### 4.3.2.2 Fonction de transfert des filtres RII

Partant de l'équation de récurrence qui définit le filtre, l'application de transformé en  $z$  à cette dernière, donnera l'expression de la sortie en fonction de l'entrée en fonction de  $z$ . Elle est rationnelle dans le cas des filtres à réponse impulsionnelle infinie, c'est la fonction de transfert discrète du filtre causal.

$$G(z_1, z_2) = \frac{\sum_0^{N_1} \sum_0^{N_2} b_{ij} Z_1^i Z_2^j}{\sum_0^{N_3} \sum_0^{N_4} a_{ij} Z_1^i Z_2^j} \quad (4.42)$$

#### 4.3.2.3 Stabilité

Etant donnée la nature rationnelle des fonctions de transfert considérées, l'étude de leurs stabilité revient à étudier la nature de leurs pôles. Le critère utilisé est le suivant : a une entrée bornée correspond une sortie bornée. On montre, alors, que la réponse impulsionnelle est absolument intégrable [Bernard].

$$\sum \sum_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)| < \infty \quad (4.43)$$

Le filtre est stable si la somme des modules des échantillons de sa réponse impulsionnelle est finie. Cela peut être valable pour les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF), par contre pour les filtres causaux ce n'est plus le cas, de faite qu'il n'y a pas de théorème ou de factorisation en 2D, cette formule ne donne aucun critère concret permettent de vérifier la stabilité de ces filtres.

#### A. Stabilité des filtres à quart de plan

Soit la fonction de transfert discrète du filtre causal.

$$G(z_1, z_2) = \frac{N(z_1, z_2)}{D(z_1, z_2)} \quad (4.44)$$

**Théorème 1** : Un filtre a quart de plan est stable si et seulement si :

$$D(z_1, z_2) \neq 0 \text{ pour } \begin{cases} |z_1| \leq 1 \\ |z_2| \leq 1 \end{cases} \quad (4.45)$$

Ce qui s'applique même dans le cas monodimensionnelle, mais il est évidemment lourd à mettre en œuvre car il y a une infinité de pôles à tester. [Jury, 1978], [Anderson et Jury, 1973]

**Théorème 2**, [Bernard]: Le filtre quart de plan défini par  $G(z_1, z_2)$  est stable si et seulement si :

$$\begin{aligned} \checkmark D(z_1, 0) \neq 0 \text{ pour } |z_1| \leq 1 \\ \checkmark D(z_1, z_2) \neq 0 \text{ pour } |z_1| = 0 \text{ et } |z_2| \leq 1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

La première condition est relativement simple à tester car on se ramène à un filtre monodimensionnelle, par contre la deuxième condition reste difficile à évaluer.

Une manière de tester la deuxième condition consiste à poser :

$$D(z_1, z_2) = \sum_0^M \sum_0^L d(m, n) z_1^m z_2^n \quad (4.47)$$

Pour  $z_1 = e^{-ju}$ , on peut alors écrire :

$$D(e^{-ju}, z_2) = \sum_0^L \left[ \sum_0^M d(m, n) e^{-jum} \right] z_2^n = \sum_0^L c_n(u) z_2^n \quad (4.48)$$

avec

$$c_n(u) = \sum_0^M d(m, n) e^{-jum} \quad (4.49)$$

dans ce cas, si on pose  $u = 2k\pi / L$ , le terme  $c_n(u)$  n'est rien d'autre que la TFD de  $b(m, n)$ .

Ainsi le test de la stabilité revient à tester  $L$  polynômes de  $M$  coefficients. Cette opération peut se faire par le critère de jury [Jury, 1978] et [Anderson et Jury, 1973] monodimensionnel ce qui est relativement simple puisque  $u$  varie entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

#### Remarque 4.1

De ce bref aperçu, il semble bien qu'il n'existe pas une méthode bien déterminée pour l'étude de la stabilité de ces filtres à la fois sûre à 100% et simple à mettre en œuvre [Bernard]. Dans tous les cas la précision de calcul et la puissance du calculateur doit être prise en compte pour le choix d'un algorithme particulier.

### 4.3.3 Exemples de filtres 2D

La base du filtrage dans le domaine fréquentielle est le théorème de la convolution. Une de ces propriétés citées dans le chapitre 1, c'est qu'elle transforme un produit de convolution en un produit simple dans le domaine fréquentielle.

### 4.3.3.1 Filtres passe-bas

#### A. Filtre idéal circulaire

De tel filtres ne laissent passer que les fréquences  $(u, v)$  proche de l'origine (*basse fréquences*). Leur fonction de transfert en fonction de la fréquence de coupure  $D_0$  est définie par :

$$G(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.60)$$

Dans le cas d'une image a  $N$  lignes et a  $M$  colonnes, nous définissons ce filtre par la figure (4.5), sa réponse fréquentielle est présentée par la figure (5.4a)

Le centre du cercle a comme coordonnées  $(N/2+1, M/2+1)$

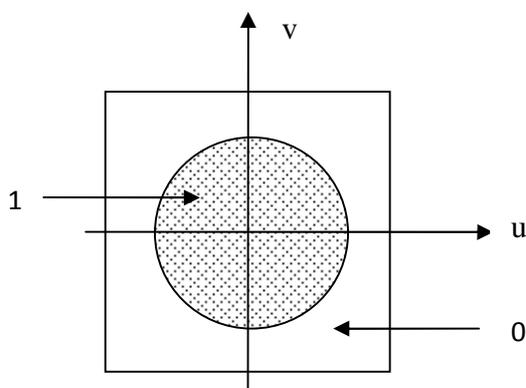


Fig 4.5 : Section horizontale du filtre circulaire passe-bas

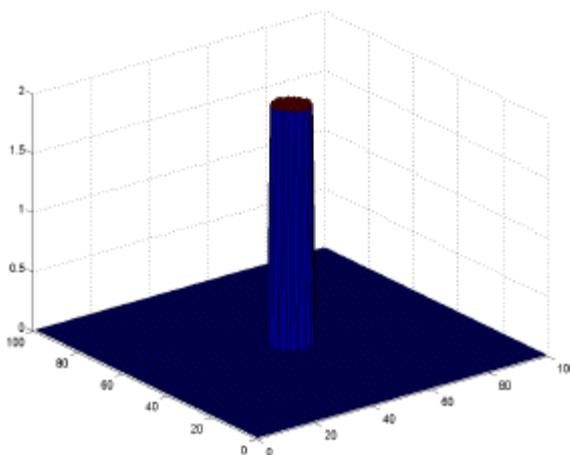


Fig 4.5a : Réponse fréquentielle du filtre circulaire passe-bas

#### B. Fenêtre Gaussienne

La fonction de transfert de ce filtre dans le cas ou la forme des fenêtres est circulaire est la suivante :

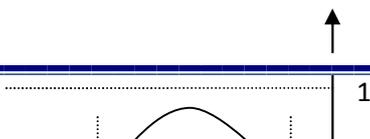
$$G(u, v) = FR(u, v) \exp[(-2N^2/T^2) (u^2 + v^2)] \quad (4.61)$$

avec  $FR(u,v)$  : fenêtre rectangulaire de largeur  $T$  ;

$N$  : paramètre permettant de déterminer la forme de la fenêtre Gaussienne ;

$T$  : diamètre de la fenêtre.

Dans le cas des images l'action de filtrage se fait suivant la figure (4.6)



Le centre du cercle a  
comme coordonnées  
(N/2+1, M/2+1)

Fig. 4.6: Section horizontale de la fenêtre Gaussienne

#### 4.3.3.2 Filtre passe-haut

##### A. Filtre idéal circulaire

Contrairement au passe-bas ces filtres ne laissent passer que les fréquences  $(u,v)$  loin de l'origine (*hautes fréquences*). Leur fonction de transfert en fonction de la fréquence de coupure  $D_0$  est définie par :

$$G(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.62)$$

Dans le cas d'une image a N lignes et a M colonnes, ce filtre est présenté sur la figure (4.7) et sa réponse fréquentielle est présentée par la figure (5.7a)

Le centre du cercle a comme coordonnées (N/2+1, M/2+1)

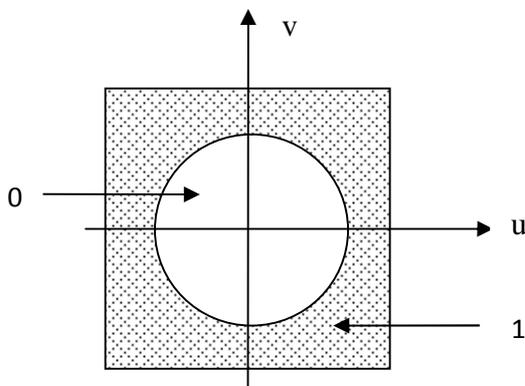


Fig. 4.7 : Section horizontale du filtre circulaire passe-haut idéale

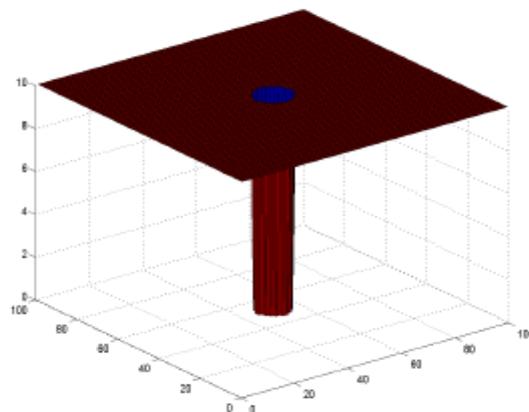


Fig. 4.7a : Réponse fréquentielle du filtre circulaire passe-haut idéale

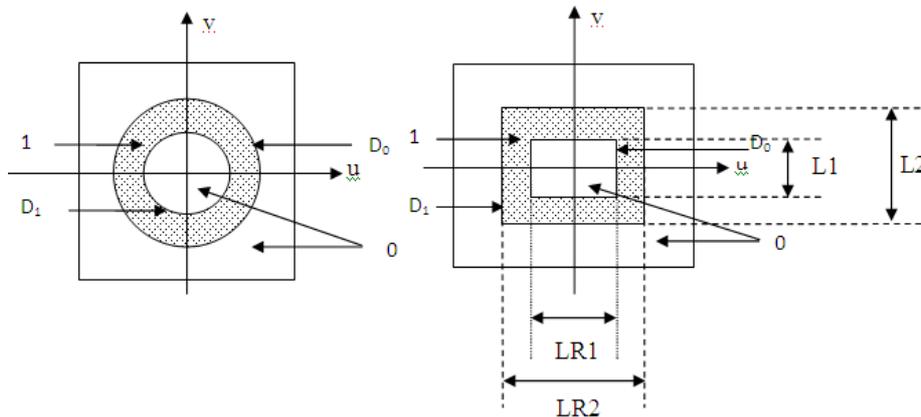
#### 4.3.3.3 Filtre passe-bande

Ce type de filtres ne laisse passer les fréquences situées à l'extérieur de l'intervalle des deux fréquences de coupures  $[D_0, D_1]$ . Sa fonction de transfert est donnée sous la forme suivante :

$$G(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_1 \\ K(u, v) & \text{si } D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \end{cases} \quad (4.63)$$

$K(u, v)$  : une fonction des fréquences  $u$  et  $v$ .

Le filtre idéal passe-bandes ( $K(u, v) = 1$ ) est le plus utilisé. Dans le cas des images, son interprétation est illustrée dans la figure (4.8). La réponse fréquentielle de ce filtre est présentée sur la figure (4.8a).



a : Fenêtre circulaire idéale

b : Fenêtre rectangulaire idéale

Fig. 4.8: Filtre passe-bande idéal

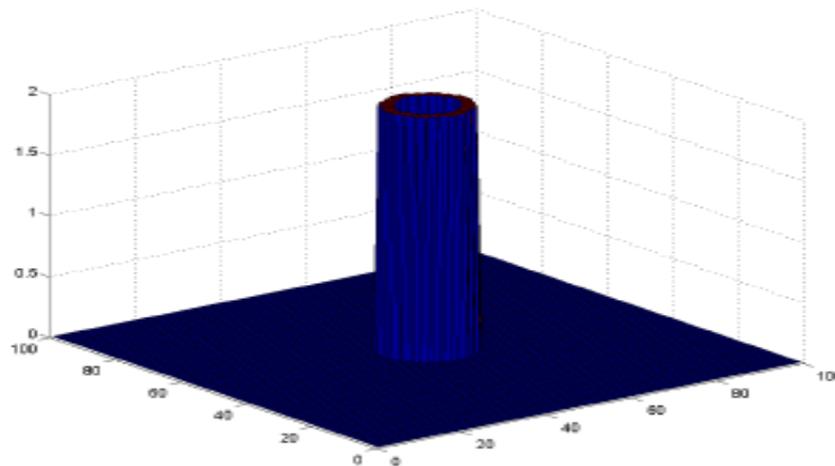


Fig. 4.8a: Réponse fréquentielle du filtre passe-bande idéal

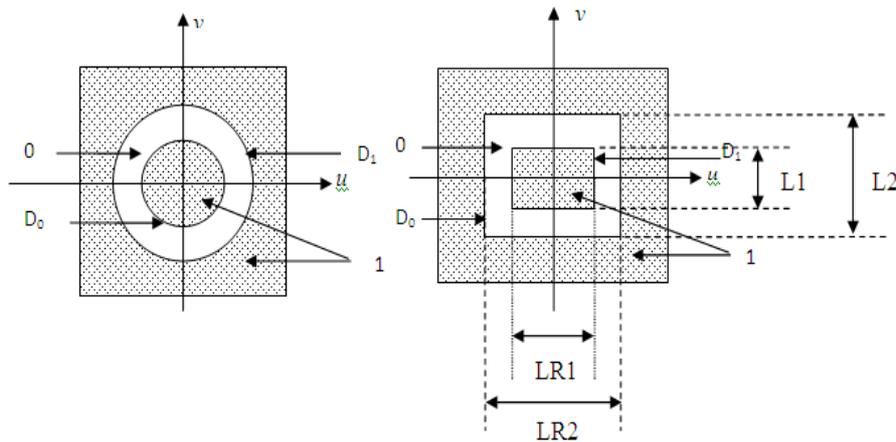
#### 4.3.3.4 Filtre coupe-bande

Contrairement au filtre passe-bande, ceux-ci ne laissent passer que les fréquences situées à l'extérieur de l'intervalle des deux fréquences de coupures  $[D_0, D_1]$ . Sa fonction de transfert est la suivante :

$$G(u, v) = \begin{cases} K(u, v) & \text{si } D(u, v) < D_0 \\ 0 & \text{si } D_0 \leq D(u, v) \leq D_1 \\ K(u, v) & \text{si } D(u, v) > D_1 \end{cases} \quad (4.64)$$

$K(u, v)$  : une fonction des fréquences  $u$  et  $v$ .

Dans le cas des images, son interprétation est illustrée dans la figure (4.9), ainsi sa réponse fréquentielle est présentée sur la figure (4.9a).



a : Fenêtre circulaire

b : Fenêtre rectangulaire

Fig. 4.9 : Filtre coupe-bande idéal

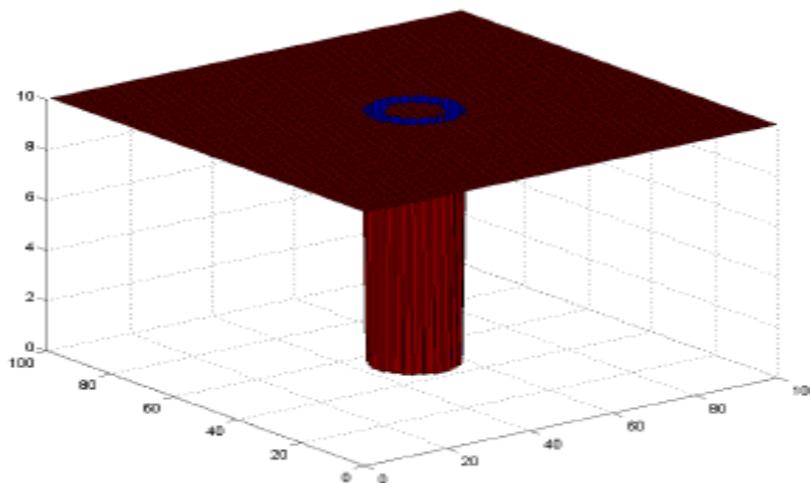


Fig. 4.9a : Réponse fréquentielle du filtre coupe-bande idéal

#### 4.4 Synthèse des filtres RII bidimensionnels

D'une manière générale la fonction de transfert d'un filtre RII 2D est donnée par l'expression suivante :

$$G(z_1, z_2) = \frac{\sum_{(k_1, k_2)} \sum_{\in R_b} b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}{\sum_{(k_1, k_2)} \sum_{\in R_a} a(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}} \quad (4.65)$$

$R_a$  est la région du support de  $a(k_1, k_2)$  et  $R_b$  est la région du support de  $b(k_1, k_2)$ .

En pratique, on utilise souvent un filtre à phase nulle (réponse impulsionnelle paire) ayant la forme suivante : [Tsai et al, 2008] et [Das et Konar, 2007]

$$G(z_1, z_2) = H_0 \frac{\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}{\prod_{k=1}^N (1 + a_1(k)z_1 + a_2(k)z_1 + a_3(k)z_1 z_2)} \quad (4.66)$$

Malgré que ce filtre ne soit pas causal (pour des applications on-line), il possède un nombre de coefficients plus réduit par rapport au filtre général. En outre, on peut facilement vérifier sa stabilité comme suit :

$$|a_1(k) + a_2(k)| < a_3(k) < 1 - |a_1(k) - a_2(k)| \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Le problème de la conception des filtres bidimensionnels consiste alors à déterminer une fonction de transfert rationnelle raisonnable et stable  $G(z_1, z_2)$  qui remplit les spécifications données en termes de causalité de la fonction de base du filtre (*passé-bas, passé-haut, passé-bandes ou coupe bandes*). En d'autres termes qui satisfait les contraintes exigées par le gabarit dans le domaine fréquentielle, en indiquant les bandes passantes, les bandes atténuées et les bande de transitions. Ceci revient à estimer les coefficients  $a(k_1, k_2)$  ou  $a_i(k)$  et  $b(k_1, k_2)$  du filtre à concevoir.

Pour atteindre ce but, plusieurs méthodes ont été proposées. On retrouve celles qui généralisent les méthodes monodimensionnelles telles que celles présentées au chapitre 3 à savoir les méthodes basées sur la transformation d'un filtre analogique en un filtre numérique et les méthodes basées sur les techniques d'optimisation. La première approche n'est pas aisée car les méthodes de conception des filtres analogiques bidimensionnelles ne sont pas simples. La deuxième qui est la plus utilisée consiste à estimer les coefficients  $a(k_1, k_2)$  ou  $a_i(k)$  et

$b(k_1, k_2)$  du filtre à concevoir en optimisant un critère d'optimalité noté J. Deux critères sont utilisés selon le domaine considéré, spatial ou fréquentiel.

#### 4.4.1 Critères d'optimisation

##### 4.4.1.1 Domaine spatial

Dans la conception des filtres RII dans le domaine spatial, la réponse spatiale idéale ou désirée est connue, elle est supposée donnée. Donc les coefficients du filtre sont estimés de telle manière que la réponse du filtre à entrée connue soit la plus proche de celle désirée. Cette méthode ne permet pas de minimiser la norme de l'erreur de chebyshev (3.50c). Mais elle est utile pour conserver les propriétés du domaine spatial désirées. [Lim, 1990]

On considère comme entrée test le signal impulsion  $\delta(k_1, k_2)$  et la réponse impulsionnelle désirée du filtre sera notée  $g_d(k_1, k_2)$ . La réponse impulsionnelle du filtre est notée  $g(k_1, k_2)$ . En minimisant l'erreur entre  $g_d(k_1, k_2)$  et  $g(k_1, k_2)$ , on peut estimer les paramètres  $a(k_1, k_2)$  et  $b(k_1, k_2)$  du filtre. Cette approche peut être considérée comme un problème d'identification.

En termes d'identification, la modélisation des système par  $G(z_1, z_2)$  est appelé la modélisation (ARMA) *Auto-Regressive Moving-Average*. Dans le cas ou tous les  $b(k_1, k_2)$  sont à zéros à part  $b(0,0)$  ainsi le numérateur reste constant, est appelé (AR) *Auto-Regressive* ou bien *all pôle modeling*. En fin si tous les  $a(k_1, k_2)$  sont nulles sauf  $a(0,0)$  et le dénominateur est intacte est dit (MA) *Moving-Average*. La modélisation des filtres RII apparait alors comme étant une modélisation ARMA. [Najim, 2006]

Le critère d'erreur, souvent utilisé dans la conception de filtres, est :

$$J = \sum_{(k_1, k_2) \in R_e}^l \sum^g e^2(k_1, k_2) \quad (4.67a)$$

avec

$$e(k_1, k_2) = h_d(k_1, k_2) - h(k_1, k_2) \quad (4.67 b)$$

représente l'erreur spatiale.

$R_e$  est la région du support de la séquence de l'erreur. Dans le meilleur des cas,  $R_e$  contient toutes les valeurs possibles de  $(k_1, k_2)$ . Dans la pratique, il se prolonge seulement au-dessus d'une région finie de  $(k_1, k_2)$ , là où  $h_d(k_1, k_2)$  a une énergie significative.

La minimisation du critère d'erreur par rapport à  $a(k_1, n_2)$  et  $b(k_1, k_2)$  est posé comme un problème d'optimisation non linéaire qui peut être résolu par une des méthodes d'optimisation présentées ci-dessous.

Exemple

On considère un filtre dont  $H(z_1, z_2)$  est donnée comme suit

$$H(z_1, z_2) = \frac{b}{1 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_2^{-1}} \quad (4.68)$$

ou  $a_1, a_2$  et  $b$  sont les coefficients du filtre à optimiser.

La relation entrée sortie est de la forme suivante

$$y(k_1, k_2)[1 + a_1 z_1^{-1} + a_2 z_2^{-1}] = b x(k_1, k_2)$$

$$\Rightarrow y(k_1, k_2) = -a_1 y(k_1 - 1, k_2) - a_2 y(k_1, k_2 - 1) + b x(k_1, k_2) \quad (4.69)$$

Lorsque  $x(k_1, k_2) = \delta(k_1, k_2)$  (*entrée impulsionnelle*), on obtient  $y(k_1, k_2) = h(k_1, k_2)$  qui est la réponse impulsionnelle du filtre dont les valeurs sont données :

$$h(0, 0) = b ;$$

$$h(1, 0) = -a_1 b ; \quad (4.70)$$

$$h(0, 1) = -a_2 b ; \text{ et } h(1, 1) = 2a_1 a_2 b$$

Le critère d'erreur (4.67a) prend alors la forme non linéaire suivante

$$J = (h_d(0, 0) - b)^2 + (h_d(1, 0) + a_1 b)^2 + (h_d(0, 1) + a_2 b)^2 + (h_d(1, 1) - 2a_1 a_2 b)^2 + \dots \quad (4.71)$$

#### 4.4.1.2 Domaine fréquentiel

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert du filtre à concevoir est connue, elle est donnée sous sa forme fréquentielle  $G_d(\omega_1, \omega_2)$  où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les pulsations (*variables fréquentielles*) telles que  $\omega_1, \omega_2 \in [0, \pi]$ . Le but de la synthèse est de déterminer les coefficients du filtre numérique  $G(z_1, z_2)$  de manière à avoir  $G(\omega_1, \omega_2)$  le plus proche possible de  $G_d(\omega_1, \omega_2)$  avec

$$G(\omega_1, \omega_2) = G(z_1, z_2) \Big|_{\substack{z_1 = e^{j\omega_1} \\ z_2 = e^{j\omega_2}}} \quad (4.72)$$

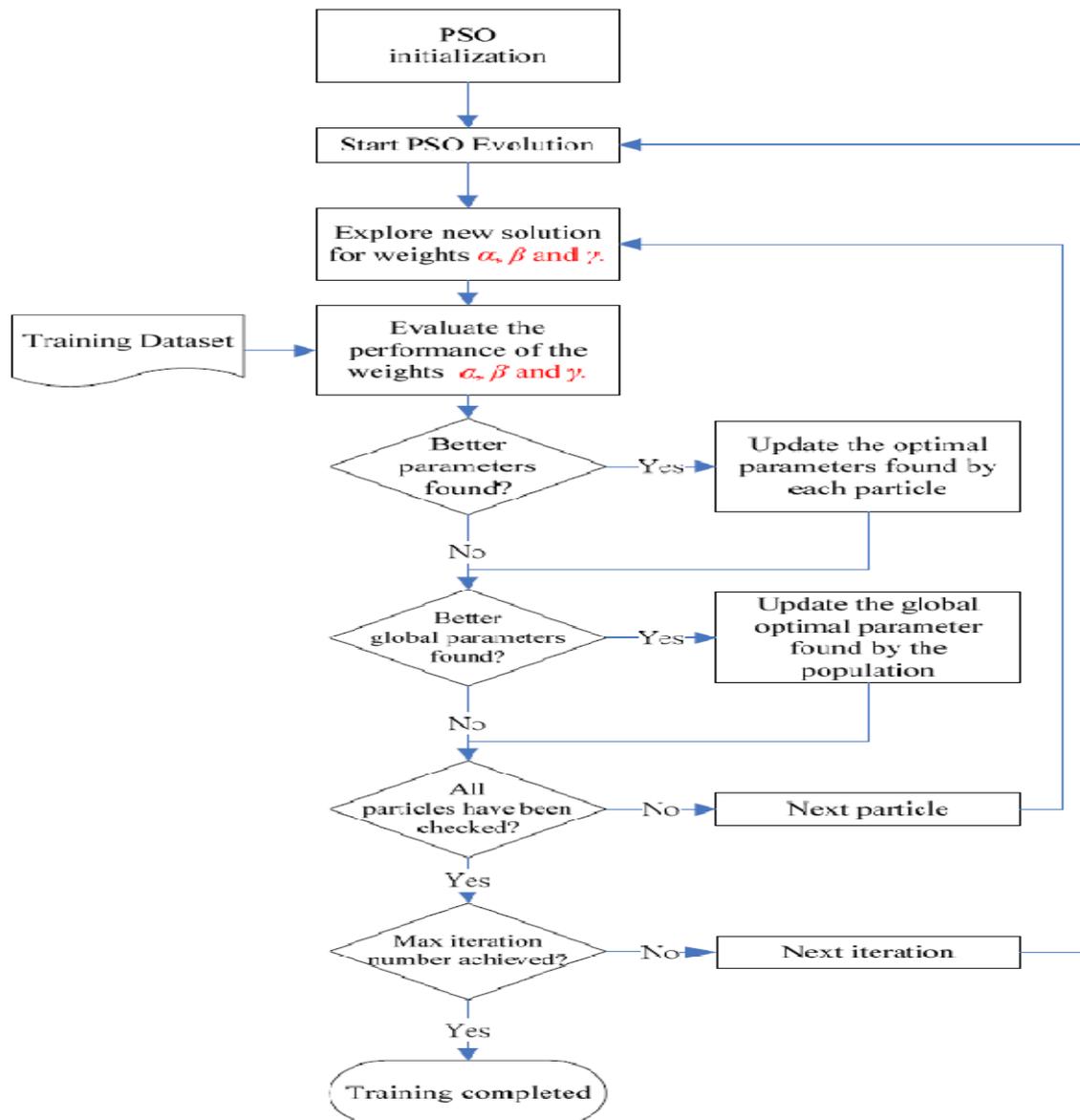
En considérant des fréquences numériques telles que :

$\omega_1 = \frac{\pi}{N_1} n_1$  et  $\omega_2 = \frac{\pi}{N_2} n_2$ , le critère d'optimalité s'écrit comme suit :

$$J = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \left[ \left| G\left(\frac{\pi n_1}{N_1}, \frac{\pi n_2}{N_2}\right) - H_d\left(\frac{\pi n_1}{N_1}, \frac{\pi n_2}{N_2}\right) \right| \right]^\alpha \quad (4.73)$$

Où  $\alpha$  est un entier positif paire ( $\alpha = 2$  ou  $4$ ),

La minimisation d'un des deux critères peut se faire par les différentes méthodes présentées dans le chapitre précédent, et celle qui nous intéresse dans cette partie est la méthode des PSO. Elle est présentée par le diagramme suivant :



The diagram to illustrate how PSO is incorporated into PARE to train parameters.

Fig. 4.10 : Diagramme illustratif de l'évolution de la méthode des PSO.

#### 4.5 Test et résultats

Nous allons présenter dans cette section les résultats de la synthèse de filtres bidimensionnel à réponse impulsionnelle de durée infini par la méthode d'optimisation par essaim de particules. Les paramètres de l'algorithme sont fixés comme suit :

- ✓ L'ordre du filtre à concevoir est  $N = 2$  ;
- ✓ La taille du filtre  $NN = 10$  ;
- ✓ Le nombre d'itération  $N_{iter} = 5000$  ;
- ✓ Les valeurs maximale et minimale des coefficients sont respectivement -2 et 5 ;
- ✓ Les valeurs maximale et minimale des coefficients de la vitesse de chaque particules de la population sont respectivement -2 et 5 ;
- ✓ Le poids d'inertie  $w = 0.55$  ;
- ✓ Le nombre de particules est 40.

La fonction de transfert du filtre à concevoir est de la forme suivante [Das et Konar, 2007] [Tsai et al, 2008]

$$G(z_1, z_2) = H_0 \frac{\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N b(k_1, k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}}{\prod_{k=1}^N (1 + a_1(k)z_1 + a_2(k)z_1 + a_3(k)z_1 z_2)} \quad (4.74)$$

$N$  est l'ordre du filtre.

Nous avons choisi cette structure particulière à cause de la facilité du test de sa stabilité qui peut se vérifier comme suit : [Das et Konar, 2007],[Tsai et al 2008]

$$|a_1(k) + a_2(k)| < a_3(k) < 1 - |a_1(k) - a_2(k)| \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.75)$$

Le critère à minimiser est donné par l'équation (4.76). En considérant des fréquences numériques telles que :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{N_1} n_1 \text{ et } \omega_2 = \frac{\pi}{N_2} n_2$$

$$J = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \left\| G\left(\frac{\pi n_1}{N_1}, \frac{\pi n_2}{N_2}\right) - G_d\left(\frac{\pi n_1}{N_1}, \frac{\pi n_2}{N_2}\right) \right\|^2 \quad (4.76)$$

Après avoir synthétisé le filtre voulu, l'opération du filtrage des images s'effectuera suivant les étapes illustrées dans la figure 4.11

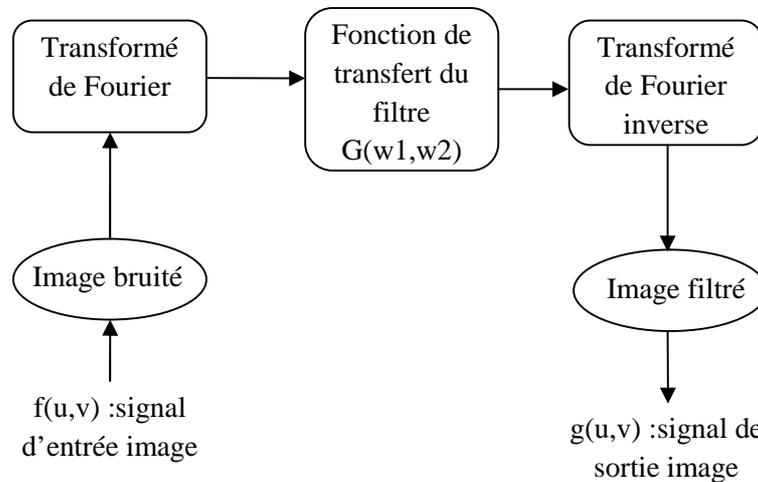


Fig. 4.11 : Le schéma bloc du filtrage avec un filtre numérique

#### 4.5.1 Filtre passe bas

Le filtre de référence est un RIF passe bas, sa réponse fréquentielle  $G_d(w_1, w_2)$  suivante :

$$G_d(w_1, w_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \leq 0.09\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.77)$$

La réponse fréquentielle du filtre désiré est illustré sur la figure (4.12)

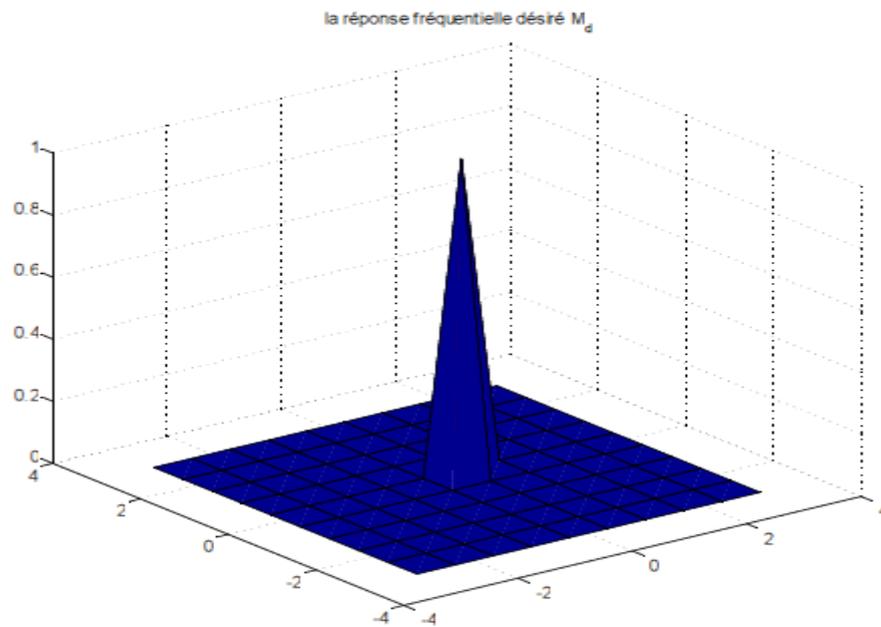


Fig. 4.12 : Réponse fréquentielle du filtre désiré

La réponse fréquentielle du filtre RII obtenu par la méthode de synthèse par l'algorithme PSO est présentée dans la figure (4.13)

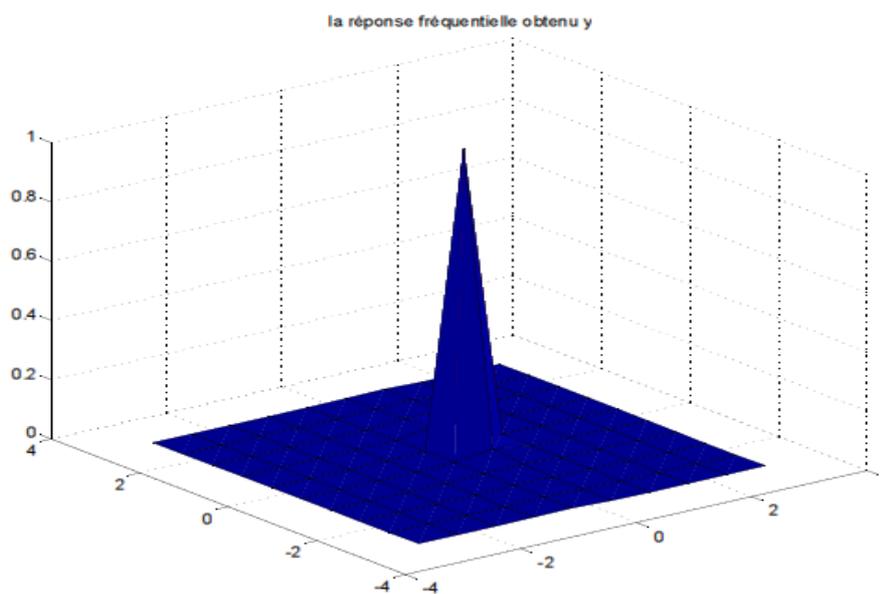


Fig. 4.13 : La réponse fréquentielle du filtre RII obtenu

L'évolution de la fitness dans chaque itération est donnée par la figure (4.14)

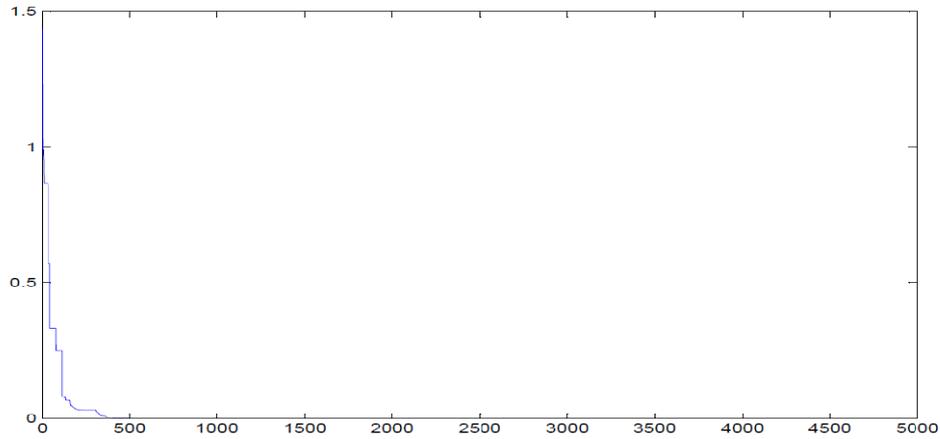


Fig. 4.14 : Evolution de la fitness dans chaque itération

#### Remarque 4.2

La comparaison des deux figure 4.12 et 4.13, nous montre la similarité des deux réponses fréquentielle désirée et obtenue par l'algorithme PSO. Ceci est confirmé par les faibles valeurs de la fitness (de l'ordre de  $10^{-5}$ ) à partir de l'itération 500 (Fig. 4.14),

#### 4.5.2 Filtre passe bande

Le filtre de référence est un RIF passe bande de réponse fréquentielle  $G_d(w_1, w_2)$  suivante :

$$G_d(w_1, w_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \leq 0.09\pi \\ 0.5 & \text{si } 0.09\pi \leq \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \leq 0.2\pi \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.78)$$

Sa réponse fréquentielle se présente dans la figure (4.15).

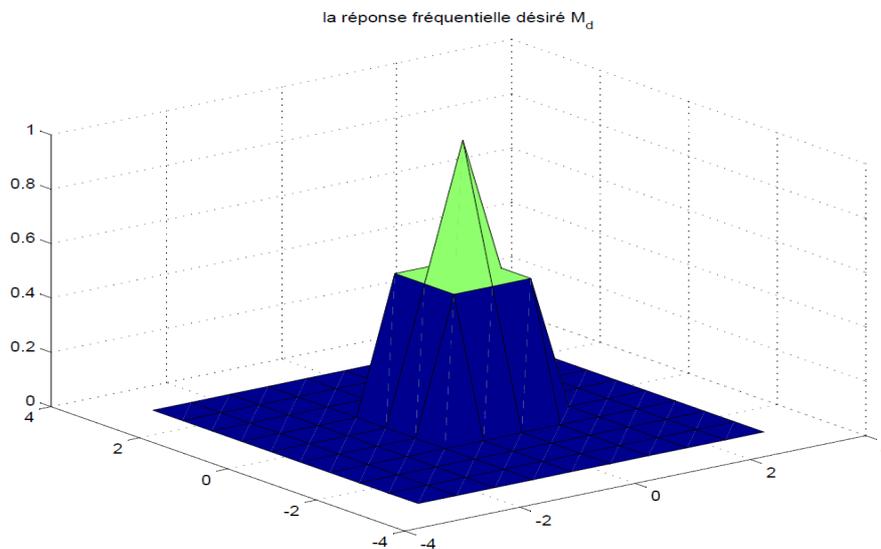


Fig. 4.15 : Réponse fréquentielle du filtre passe bande désiré

La réponse fréquentielle du filtre passe bande conçu par le PSO est donnée par la figure (4.15)

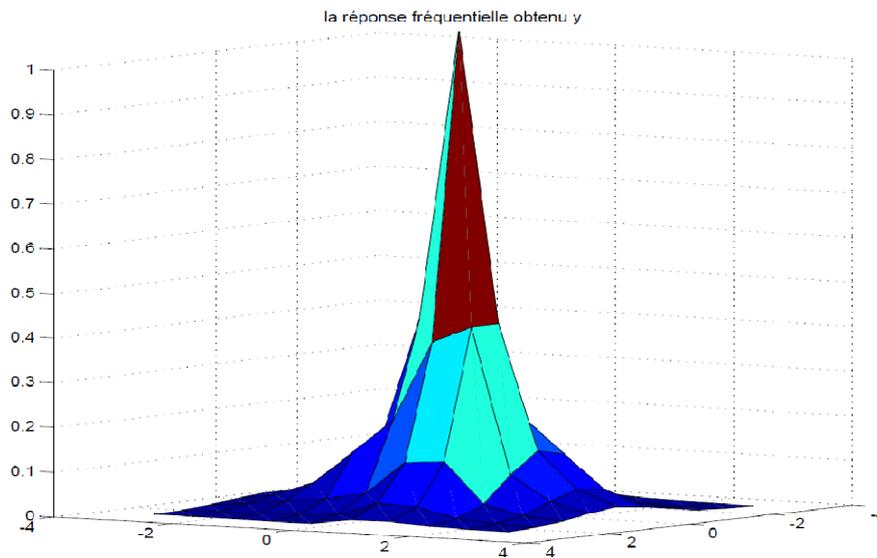


Fig. 4.15 : Réponse fréquentielle du filtre passe bande conçu

Ainsi l'évolution de la fitness à chaque itération est illustrée par figure (4.16)

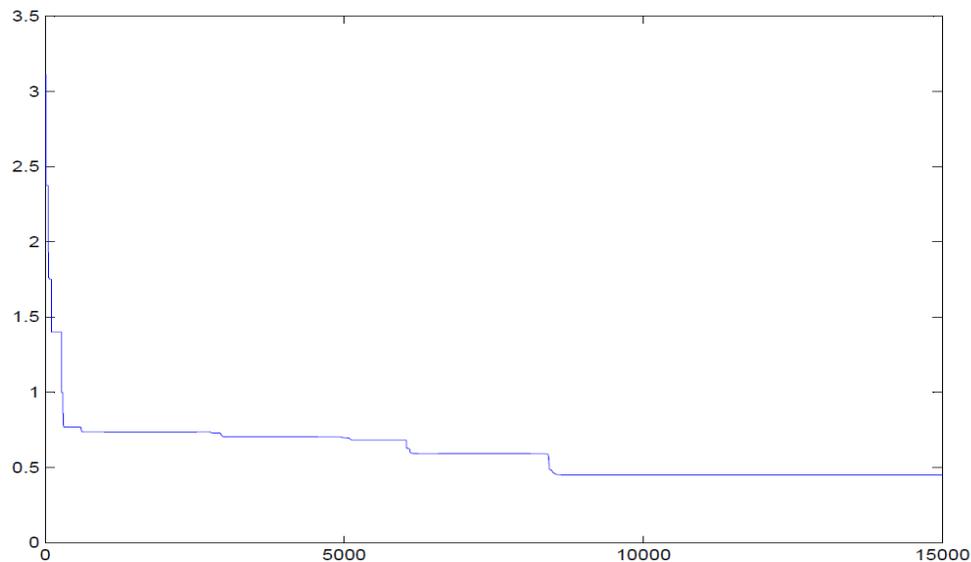


Fig. 4.16 : Evolution de la fitness en fonction des itérations

### Remarque 4.3

La comparaison des deux figure 4.14 et 4.15, nous montre que la réponse fréquentielle synthétisée par le PSO est proche de la réponse fréquentielle désirée. Ce résultat est obtenu après un grand nombre d'itérations (>10000) où la fitness atteint une valeur de 0.43 qui reste proche de zéro (Fig.4.16).

### 4.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques notions sur le filtrage numérique bidimensionnel. Nous nous sommes également intéressés à la synthèse des filtres 2D à réponse impulsionnelle infini (RII) par les méthodes d'optimisation. L'algorithme PSO présenté dans le chapitre précédent à été appliqué à la synthèse de filtres RII 2D. Les résultats obtenus sont très appréciables. Cette méthode de synthèse reste

malheureusement très lente ce qui nous a empêché de synthétiser des filtres, ayant une réponse fréquentielle de grande taille (égale à celle d'une image), capables d'être applicables à une image.

---

# *Conclusion Générale*

---

## Conclusion générale

Ce mémoire traite le problème de la synthèse des filtres numériques en général et des filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) en particulier. Il englobe quelques notions fondamentales du traitement du signal numérique. Il présente également les bases du filtrage numérique comme la nature du filtre à réaliser (*à réponse impulsionnelle finie ou infinie*), suivant l'opération à effectuer (*passer bas, passer haut, passer bandes ou couper bandes*), ainsi que les spécifications à assurer vis-à-vis de la stabilité, causalité et robustesse.

Les méthodes de synthèse des filtres à réponse impulsionnelle de durée infinie (RII) cherchent à concevoir en premier lieu un filtre analogique pour ensuite le transposer en un filtre numérique en établissant une correspondance entre les deux domaines analogique et numérique. D'autres méthodes font appel à des procédures d'optimisation, comme la méthode d'optimisation par essaim des particules PSO. Cette dernière a été implémentée puis appliquée afin de concevoir un filtre RII\_1D dans le domaine temporel (*minimisation de la réponse désirée et celle fournie par le filtre*). Les résultats obtenus sont très satisfaisants, ils montrent le degré de la robustesse, la fiabilité et la précision de cette approche. Cette approche a été également étendue au cas bidimensionnel afin de synthétiser un filtre RII bidimensionnel tout en minimisant l'écart dans le domaine fréquentielle entre la réponse fréquentielle désirée et celle du filtre à concevoir.

La méthode de synthèse des filtres RII basée sur l'optimisation par essaim de particules ainsi développée dans ce mémoire peut être également appliquée à la synthèse des filtres RIF et à l'identification des systèmes. Elle reste tout de même perfectible. Des modifications peuvent être envisagées afin d'améliorer la précision et surtout sa rapidité. Son utilisation au filtrage d'images demeure une des applications à faire

---

---

# *Bibliographie*

---

---

## Bibliographie

### A et B.

[Anderson et Jury, 1973] : B.O Anderson et E.I. Jury, Stability test for two-dimensional recursive filters. IEEE transactions on audio and electroacoustics Vol. 21 n 4 1973

[Bernard] : M. Bernard. Introduction aux filtres 2D.

[Binet, 2008-2009] :G. Binet. Filtres a réponse impulsionnelle infini RII, Filtres a réponse impulsionnelle fini RIF Université de Caen - UFR de Sciences. MdC 61, 2008 –2009.

### C.

[Calas] : G. Calas, optimisation par essaim de particules, [guillaume.calas@gmail.com](mailto:guillaume.calas@gmail.com).

[Coequerez et Philipp, 1995] : J.P. Coequerez et S. Phlipp. Analyse d'image : filtrage te segmentation. Masson,1995.

### D.

[Das et Konar, 2007] : S. Das., A. Konar. A swarm intelligence approach to the synthesis of two-dimensional IIR filters. Engineering applications of artificial intelligence 20 (2007) 1086–1096.

[De Coulon, 1998] : F. De Coulon. Théorie et traitement des signaux. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.

### G et J.

[Gardeux] : V. Gardeux. 2008. Optimisation par essaim particulaire, mémoire adaptative, recherche tabou.

[Jouvencel, 2002-2003] : B. Jouvencel. 2002-2003. Stabilité asymptotique.

[Jury, 1978] : Jury. Stabilité of multidimensional scalat and matrix polynomials. Proceedings of the IEEE Vol 66 n 9 Sept 1978

### K.

[Kaboga, 2008] : N. Kaboga. Digital IIR Filter design using differential evolution algorithm. Journal on applied signal processing. 2008,8, 1269-1276.

[Kamal et al, 2010] : H. Kamal, D. Moussa, P. Siarry. A comparative study of various meta-heuristic techniques applied to multilevel thresholding problem., Engineering applications of artificial intelligence, 23 (2010) 676-688.

[Kennedy et Eberhart, 1995] : Kennedy, J., Eberhart, R. 1995. Particle swarm optimisation. In: Proceedings of IEEE International conference on Neural Networks. pp. 1942-1948.

[Kunt, 1984] : M. Kunt. Traitement numérique des signaux. Presse polytechnique romandes, 1984.

### L.

[Lardièrre, 2002] : C. Lardièrre. 2002. Traitement du signale. Le filtrage numérique des signaux n'est pas qu'un filtre analogique numérisé. MESURES 749. pp. 52-54.

[Lim, 1990] : J S. LIM. 1990. Two-dimensional signal and image processing. Printed in the United States of America 10 9 8 7, ISBN Q-13-735322-4.

### N et R.

[Najim, 2006] : M. Najim. 2006. Digital Filters Design for Signal and Image Processing. Edition ISTE.

[Roux, 2000] : J-L. Roux. 2000. Traitement Numérique des Signaux Bidimensionnels.

## **T.**

[Toumi et al] : A. Toumi, A. Taleb-Ahmed, K. Benmahammed, N. Rechid. Optimisation par essaim de particules : Application à la restauration supervisée d'image.

[Tsai et al, 2008] : J-T. Tsai, W-H. Ho, J-H. Chou. Design of two-dimensional IIR digital structure-specified filters by using an improved genetic algorithm. Expert Systems with Applications, 2008.

## **Webliographie**

<http://www.swarmintelligence.org/>

<http://www.alg.ensieg.inpg.fr/discret/liens/132.htm>

16/06/2010.

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9\\_des\\_filtres\\_lin%C3%A9aires](http://fr.wikipedia.org/wiki/Stabilit%C3%A9_des_filtres_lin%C3%A9aires)