

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

Master académique en automatique
Option commande des systèmes

Thème

*Commande d'un robot manipulateur par
mode glissant d'ordre supérieur*

Dirigé par : M^{me} KHERRAZ Kheddoudja

Présenté par :

Mr. BENHADJ Belkacem

Mr. SELHADJI Youcef

Soutenu le : 04 / 07/2012

Promotion 2012

Ce travail a été préparé à la faculté de Génie Electrique et Informatique.

Remerciements

Nous remercions avant tout le bon Dieu de nous avoir

Permis de réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promotrice Mme KHERRAZ pour avoir dirigé ce travail pour son suivi, ses conseils et sa disponibilité à chaque instant.

Nous remercions tout particulièrement Mr DJENNOUNE, Mr SAIDI,

Mr MELLAH pour leur aide et leur générosité.

Notre gratitude et reconnaissance vont s'adressent à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation pendant notre cursus universitaire.

Nos remerciements vont s'adresser également au président et membres de jury qui nous feront l'honneur d'évaluer notre travail.

Sans oublier tous les amis (ies) et camarades qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste projet.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

A la plus chère pour moi ma mère, pour l'amour qu'elle

M'a apporté depuis ma naissance.

A mon cher père : en connaissance de tout ce qu'il a fait

Pour moi.

A mon grand frère RABAH et ses amis qui m'ont toujours Soutenu

A mes très chères frères et sœurs qui m'ont toujours

Soutenu et qui m'ont encouragé dans ce travail,

Et toute ma famille

*A mes camarade de la section Master 2 Automatique et tous ceux de la
Faculté de Génie électrique et d'Informatique et tous mes enseignants de
l'Université Mouloud MAMMERY de Tizi-Ouzou.*

Je dédie ce travail également à mon binôme et à toute sa famille.

B.BELKACEM

Dédicaces

Je tiens à dédier ce mémoire :

*A ma très chère **Mère** et à mon cher **Père**, en témoignage et en gratitude de leurs dévouements, de leurs soutiens permanents durant toutes mes années d'études, leurs sacrifices illimités, leurs réconfort moral.*

A tous mes chers frères et sœurs, et ma grande famille

A mes camarade de la section Master 2 Automatique et tous ceux de la Faculté de Génie électrique et d'Informatique et tous mes enseignants de l'Université Mouloud MAMMERRI de Tizi-Ouzou.

Je dédie ce travail également à mon binôme et à toute sa famille.

S.YOUCEF

q : Variable articulaire.

$J(q)$: Matrice jacobéenne.

\dot{q} : Vecteur vitesse généralisées.

L :Le Lagrangien.

C_i : Le couple de force.

Q_i : Le couple de pesanteur.

$E_{ci}^{(T)}$: Energie cinétique de translation.

$E_{ci}^{(R)}$: Energie cinétique de rotation.

$\dot{x}(t)$: L'équation d'état.

$y(t)$: L'équation de sortie.

x_e : Point d'équilibre.

$S(x)$: La surface de glissement.

f^+ et f^- :Les vecteurs du champ de vitesse.

$f(x)$: Le vecteur d'état.

$g(x)$: Le vecteur de sortie.

$e(t)$: L'écart.

X_{id} : la valeur désirée.

r : Degré relatif.

$V(x)$: La fonction de Lyapunov.

u_{eq} : La commande équivalente.

u_n : La commande discontinue.

U : La commande globale.

$sign(\cdot)$: La fonction signe.

$sat(.)$: La fonction saturation.

S_p : L'ensemble de glissements.

$e(x)$: L'écart entre la variable à régler et sa référence.

Sommaire

Introduction générale	1
 Chapitre I : Généralités et modélisation des robots manipulateurs	
I.1 Introduction.....	4
I.2 Généralités sur les robots	5
I.2.2 Historique.....	5
I.2.3 Constituants mécaniques d'un robot.....	5
I.2.4 Organe terminal	6
I.2.5 Système mécanique articulé.....	7
I.2.6 Systèmes actionneurs	7
I.2.7 Capteurs	9
I.2.8 Système de commande et de traitement de l'information (cerveau).....	9
I.3 Mouvement de robot.....	10
I.3.1 Les degrés de liberté (d .d .l)	10
I.3.2 Espace des coordonnées	10
I.3.2.1 Coordonnées opérationnelles (géométriques).....	10
I.3.2.2 Coordonnées généralisées (articulaires).....	10
I.4 Commande des robots	10
I.4.1 La programmation par apprentissage	10
I.4.2 Programmation par asservissement.....	11
I.4.3 Programmation par langage de haut niveau	11
I.5 Modélisation d'un SMA	12
I.5.1 Modélisation géométrique	12
I.5.1.1 Modèle géométrique direct	12
I.5.1.2 Modèle géométrique inverse	12
I.5.2 Modélisation cinématique	13
I.5.2.1 Modèle cinématique direct	13
I.5.2.2 Modèle cinématique inverse.....	14
I.5.3 Modélisation dynamique.....	14
I.6 Détermination du modèle dynamique.....	14

Sommaire

I.6.1 Formalisme de Lagrange	15
I.6.2 Evaluation des différents termes impliqués.....	16
I.6.3 Notation matricielle	18
I.7 Conclusion	19
Chapitre II : Commande par les régimes glissants classiques	
II.1 Introduction	21
II.2 Configuration de base des systèmes à structure variable.....	22
II.2.1 Configuration permettant un changement de structure par commutation entre deux retours d'état différents	22
II.2.2 Configuration permettant la variation de la structure du système par simple commutation d'interrupteur	23
II.3 Formalisme classique du régime glissant	23
II.3.1 Régime glissant	23
II.3.1.1 Régime glissant idéal	24
II.3.1.2 Régime glissant réel	24
II.3.2 Explication du glissement	25
II.3.3 Condition d'existence du glissement	25
II.3.4 Deux méthodes classiques d'étude de la commande par structure variable en régime glissant	28
II.3.4.1 la méthode de Filippov	28
II.3.4.2 La méthode d'Utkin	30
II.4 Principe de la commande en mode glissant	32
II.5 Conception de la commande par mode de glissant	33
II.5.1 Choix de la surface de glissement	34

Sommaire

II.5.2 Condition de convergence et d'existence	34
II.5.2.1 Fonction discrète de commutation.....	35
II.5.2.2 La fonction de Lyapunov.....	35
II.5.3 Calcul de la commande.....	35
II.6 Solutions pour la suppression du phénomène de réticence	38
II.7 Exemple d'application de la commande par mode de glissement	40
II.7.1 Choix de la surface de commutation	40
II.7.2 synthèse de la loi de commande	42
II.7.2.1 commande équivalente	42
II.7.2.2 commande discontinue	43
II.7.2.3 condition de la convergence et d'existence.....	44
II.7.3 Résultats de simulation numérique	44
II.7.3.1 simulation	45
II.7.3.2 interprétations des résultats de simulations	48
II.8 Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant.....	49
II.9 Conclusion	49
 Chapitre III : Commande par les régimes glissants d'ordre supérieur	
III.1 Introduction	50
III.2 Position du problème	50
III.3 Glissement réel et convergence en temps fini.....	51
III.4 Degré relatif	51
III.5 Principe.....	52

Sommaire

III.6 Commande par régime glissant d'ordre supérieur	53
III.6.1 Commande par mode glissant d'ordre deux.....	53
III.6.1.1 Loi 2-glissante	55
III.6.1.2 Algorithme du Twisting	56
III.6.1.3 L'algorithme de Super Twisting	57
III.6.1.4 Algorithme sous optimal	59
III.7 Suppression de la réticence	60
III.8 Conclusion.....	60

Chapitre IV : Application des régimes glissants sur un robot manipulateur

IV.1 Introduction	62
IV.2 Stratégie de la commande par mode glissant classique	62
IV.2.1 Commande du robot manipulateur à deux axes	62
IV.3 Simulation et interprétation.....	63
IV.4 Stratégie de la commande par l'Algorithme de Super Twisting	64
IV.5 Simulation et interprétation.....	65
IV.6 Conclusion	69
Conclusion générale	70

Annexes

Annexe A

Annexe B

Bibliographie

Table des Figures

Figure I.1 exemple d'image réel d'un robot manipulateur	6
Figure I.2 morphologie générale d'un bras manipulateur	6
Figure I.3 Les parties principales existant dans un robot manipulateur	7
Figure I.4 Symbole de l'articulation rotoïde.	8
Figure I.5 Symbole de l'articulation prismatique.....	8
Figure I.6 Robot à deux articulations évoluant dans un plan vertical	16
Figure II.1 changement de la structure avec commutation entre deux retours	22
Figure II.2 changement de structure avec commutation au niveau de l'organe de commande	23
Figure II.3 Glissement idéal : amplitude d'oscillation nulle	24
Figure II.4 Glissement réel	24
Figure II.5 Mode de glissement	25
Figure II.6 Espace d'état et surface de glissement	26
Figure II.7 Schéma de principe de la construction du champ de vecteur moyen f^0 .	29
Figure II.8 Caractéristique dynamique de la grandeur de Commande équivalente	31
Figure II.9 Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase	32
Figure II.10 la fonction signe.	37
Figure II.11 phénomène de broutement	38
Figure II.12 Fonction SAT avec un seuil	38
Figure II.13 Courbe représentative de la fonction x_2	41
Figure II.14 réponse du système	44
Figure III.1 Mode glissant d'ordre deux	53
Figure III.2 convergence en temps fini de L'algorithme Twisting	57
Figure III.3 Convergence en temps fini de l'algorithme Super Twisting	58

Table des Figures

Figure III.4 convergence en temps fini de l'algorithme sous-optimal	60
Figure IV.1 Evolution des commandes et des erreurs de position (articulation 1 et articulation 2).....	64
Figure IV.2 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 1).....	66
Figure IV.3 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 1).....	66
Figure IV.4 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase avec perturbation (articulation 1).....	67
Figure IV.5 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 2).....	68
Figure IV.6 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 2).....	68
Figure IV.7 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase avec perturbation (articulation 2).....	69

Le robot a initialement été créé pour décharger l'homme des tâches fastidieuses. Par exemple, les tâches de manutention sont souvent fatigantes ou répétitives. L'idée d'une machine se substituant à l'homme pour de telles tâches était donc séduisante. De ce besoin, sont nés des manipulateurs relativement simples et souvent dédiés à une tâche bien déterminée. Des nouveaux systèmes ont été créés, capables d'effectuer des tâches de plus en plus complexes et/ou variées. De plus, les performances requises sont sans cesse réévaluées : on a besoin de robot plus rapide, plus précis et plus intelligent. Tous ces critères à satisfaire montrent la nécessité d'une bonne loi de commande plus performante et plus robuste qui répond aux exigences.

La synthèse des lois de commande demande une connaissance du système à commander. Cette connaissance est résumée dans un modèle. L'écriture du modèle le plus précis demande une compréhension détaillée du mécanisme du système et utilise les lois de la physique. Le modèle obtenu fait intervenir des paramètres physiques qui, par définition, sont mesurables par des expériences qui ne sont pas nécessairement en rapport avec la façon d'utiliser le système, étant donné que ces paramètres peuvent être variés pendant le fonctionnement. Toutes ces incertitudes et variations des paramètres rendent certains problèmes de commande très difficiles à résoudre. Pour toutes ces raisons, il est important d'envisager des techniques de commande réputées robustes, à titre d'exemple on peut citer la technique de commande par régimes glissants.

Le développement actuel des composants semi conducteurs de puissance fonctionnant à des fréquences de commutation élevées d'une part, et des organes de commande numériques permettant la mise en œuvre d'opérations mathématiques compliquées d'autre part, ont contribué considérablement au développement d'un type de systèmes de commande, appelés systèmes à structure variable. Ces systèmes ont fait l'objet de nombreux travaux depuis 1962, en union soviétique, notamment dans l'équipe du professeur Emelyanov (Utkin, Taran, Kostyleva,...etc.), à partir des résultats d'étude théorique du mathématicien A.F.Philippov sur les équations différentielles à second membre discontinu.

Les systèmes à structure variables, sont des systèmes dans lesquels, la commande peut prendre deux valeurs, afin d'obtenir une stabilité et une précision meilleures. Ceci permet sous certaines conditions, de maintenir dans l'espace des phases le point représentatif de

l'évolution du système sur une hypersurface choisie à priori. Nous dirons alors que le système bouclé est en régime glissant sur la surface considérée, son comportement ne dépend plus des paramètres de la partie commandée, il devient ainsi insensible aux perturbations extérieures et aux variations des paramètres. Quand l'état du système évolue sur l'hyper surface choisie, le système est alors plongé dans une dynamique d'un système réduit et libre.

Les coefficients de l'hyper surface de commutation déterminent complètement la dynamique et le mode de stabilisation du système réduit. La commande est calculée à partir de la condition de glissement ; les gains du correcteur dépendent du système à commander, de la dynamique imposée au système bouclé et du mode de fonctionnement.

Les modes glissants standards ou classiques sont appliqués seulement sur les systèmes à structures variables à un degré relatif égal à un. Le problème de chattering dû aux commutations de la commande en hautes fréquences, peut dégrader les performances des systèmes mécaniques du fait qu'il engendre une consommation énergétique excessive et qu'il réduit la durée de vie des équipements mécaniques (actionneurs). Cette commande induit plus de dynamiques de hautes fréquences, étant donné que ces dernières n'ont pas été prises en compte dans la modélisation du système, elles peuvent conduire à l'instabilité du système. Des chercheurs russes ont proposé de déplacer le problème de la discontinuité due à l'élément de commutation de la loi en régime glissant sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement, au lieu d'agir sur la première dérivée comme dans le cas du régime glissant d'ordre un. Le concept de mode glissant d'ordre supérieur a été introduit dans les années 80 par M. levantovsky et M. Emel'yanov. On parle dans ce cas des **Modes Glissants d'Ordres Supérieurs (MGOS)**, en anglais **High Order Sliding Mode (HOSM)**.

Dans ce mémoire, nous avons étudié la commande par mode glissant d'ordre deux. Nous l'avons appliquée sur un robot manipulateur à deux axes, pour bien suivre une trajectoire donnée. Le travail que nous proposons dans ce mémoire est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est destiné dans sa première partie à présenter une introduction à la terminologie et aux principes utilisés pour l'étude, la conception et le mode de fonctionnement des robots. Il s'agit donc, de quelques définitions relatives aux robots, de la description de leur morphologie et de façon dont ils sont mis en mouvement avec leurs différents actionneurs et capteurs. Dans sa deuxième partie, nous avons donné à titre

bibliographique les différentes méthodes de modélisation utilisées dans la commande des robots, ainsi que l'élaboration du modèle dynamique du système à étudier (robot à deux degrés de liberté). Cette modélisation est une étape importante dans la synthèse de la loi de commande.

Dans le deuxième chapitre, nous avons mis en évidence les principales caractéristiques des systèmes à structure variable et la commande par mode de glissement. Nous avons discuté également du mode de conception de la commande, de choix du nombre et du type de surfaces et des méthodes de calcul des grandeurs de commande, ainsi que de l'inconvénient majeur de la commande par mode de glissement qui est le phénomène de broutement.

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude de la commande par mode glissant d'ordre supérieur qui est utilisée pour remédier au problème de broutement, appelé aussi chattering. Nous avons étudié plusieurs algorithmes glissants d'ordre deux et nous avons basé sur l'algorithme de Super Twisting qui est utilisé dans notre application.

Après avoir donné un aperçu sur la modélisation des robots, dans le premier chapitre et en exploitant le modèle dynamique obtenu par le formalisme de Lagrange, nous avons passé dans le chapitre quatre à l'application de la commande par mode glissant classique pour illustrer le problème de broutement et à l'application de la commande par mode glissant d'ordre deux pour éviter le phénomène de chattering. Nous avons effectué plusieurs tests par simulations afin de mettre en évidence la robustesse de l'algorithme étudié vis-à-vis des perturbations. Nous avons terminé par une conclusion générale qui présente le bilan apporté par ce travail et les perspectives qui découlent de l'étude effectuée.

I.1 Introduction

Depuis quelques décennies, la recherche dans la robotique s'est concentrée presque entièrement sur la commande des robots manipulateurs. Pour commander ou simuler le comportement d'un système mécanique articulé (robot), on doit disposer d'un modèle. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles selon les objectifs, les contraintes de la tâche et les performances recherchées. Les modèles mathématiques nécessaires sont :

- Les modèles cinématiques directs et inverses qui expriment les vitesses de l'organe terminal en fonction des variables articulaires et inversement.
- Les modèles géométriques directs et inverses qui expriment les positions de l'organe terminal en fonction des variables articulaires et inversement.
- Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesse, accélérations des articulations.

L'obtention de ces différents modèles n'est pas aisée, la difficulté variant selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. Entrent en ligne de compte le nombre de degrés de liberté, le type des articulations mais aussi le fait que la chaîne peut être ouverte simple, arborescente ou fermée.

Ce premier chapitre introduit tous les termes et concepts de base qu'on utilisera dans la suite de notre travail.

Nous présentons en premier lieu, les notions générales, théoriques et technologiques nécessaires pour une meilleure compréhension du fonctionnement des robots.

En second lieu, le problème des modèles géométriques direct et inverse (position obtenue en fonction des configurations des coordonnées articulaires et réciproquement, les valeurs des variables articulaires en fonction de la position requise de l'organe terminal). Ensuite, le problème des modèles cinématiques direct et inverse qui est présenté, permet de donner la relation entre les vitesses de l'organe terminal et celles des actionneurs. Enfin, le problème du modèle dynamique est abordé, permettant l'obtention théorique de la loi de commande du mouvement en fonction de la variation des états du mécanisme.

En troisième et dernier lieu, une détermination du modèle dynamique d'un système mécanique articulé à deux degrés de liberté est effectuée par le formalisme de Lagrange.

I.2 Généralités sur les robots

I.2.1 Définitions générales [2]

Le Petit Larousse définit un robot comme étant un appareil automatique capable de manipuler des objets, ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe ou modifiable. En fait, l'image que chacun s'en fait est généralement vague, souvent un robot est défini comme un manipulateur automatique à cycles programmables. Un robot est un système mécanique poly-articulé muni par des actionneurs et commandé par un ordinateur qui est destiné à effectuer une grande variété de tâches.

Pour "mériter" le nom de robot, un système doit posséder une certaine flexibilité, caractérisée par les propriétés suivantes :

- La versatilité : Un robot doit avoir la capacité de pouvoir exécuter une variété de tâches, ou la même tâche de différente manière.
- L'auto-adaptabilité : Un robot doit pouvoir s'adapter à un environnement changeant au cours de l'exécution de ses tâches.

I.2.2 Historique

1947 : premier manipulateur électrique téléopéré.

1954 : premier robot programmable.

1961 : apparition d'un robot sur une chaîne de montage de General Motors, premier robot avec contrôle en effort.

1963 : utilisation de la vision pour commander un robot.

1973 : premier robot mobile à roues.

I.2.3 Constituants mécaniques d'un robot

Les robots manipulateurs se présentent en général sous forme de structure mécanique poly-articulée, se terminant par un organe terminal (poignet), comme le montre la figure suivante :

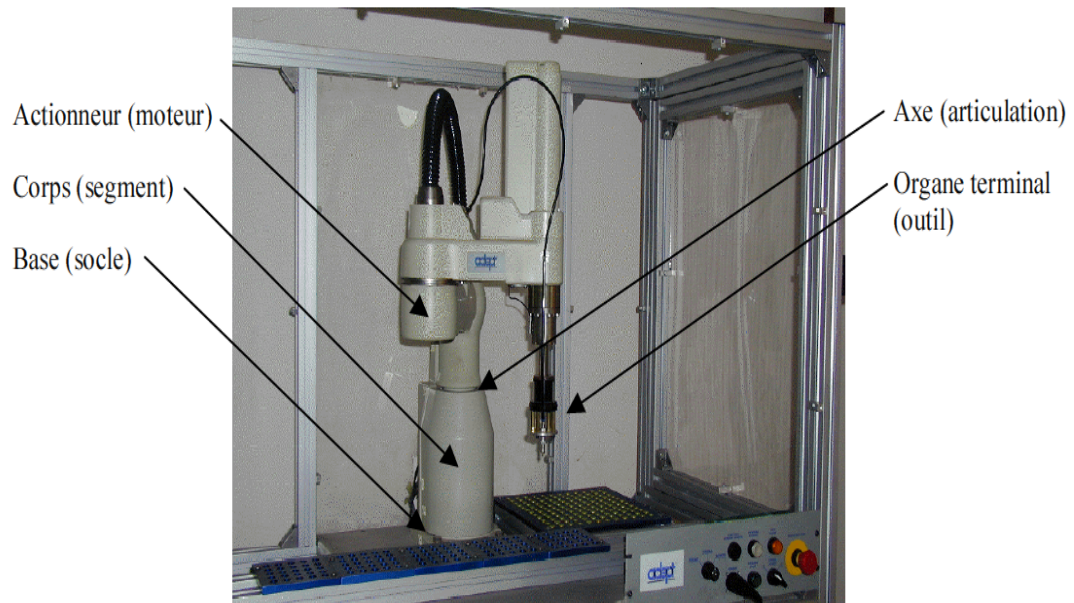


Figure I.1 exemple d'image réel d'un robot manipulateur du type SCARA.

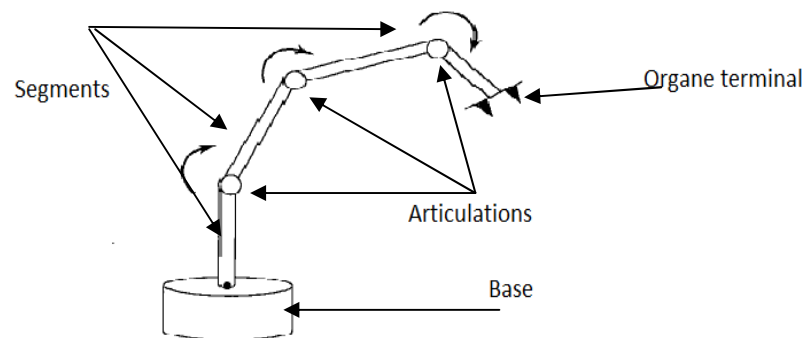


Figure I.2 morphologie générale d'un bras manipulateur.

On distingue classiquement 4 parties principales dans un robot manipulateur :

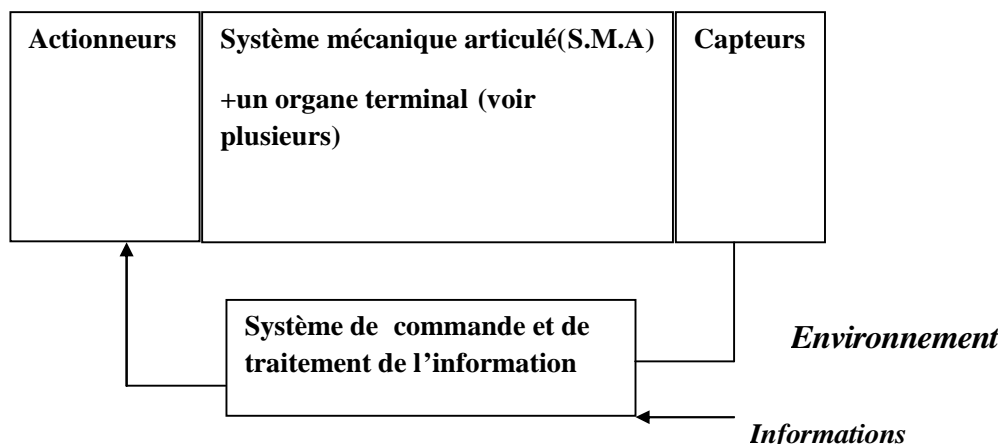


Figure I.3 Les parties principales existant dans un robot manipulateur.

I.2.4 Organe terminal

Sous le terme organe terminal on regroupe tout dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression, ...), ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture, ...). En d'autres termes, il s'agit d'une interface permettant au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, au sens où il peut être équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes. Il peut aussi être monofonctionnel, mais interchangeable. Un robot, enfin, peut-être multi-bras, chacun des bras portant un organe terminal différent. On utilisera indifféremment le terme organe terminal, préhenseur, outil ou effecteur pour nommer le dispositif d'interaction fixé à l'extrémité mobile de la structure mécanique.

I.2.5 Système mécanique articulé

Le système mécanique articulé (S.M.A.) est un mécanisme ayant une structure plus ou moins proche de celle du bras humain. Il permet de remplacer, ou de prolonger, son action (le terme "manipulateur" exclut implicitement les robots mobiles autonomes). Son rôle est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données. Son architecture est une chaîne cinématique de corps, généralement rigides (ou supposés comme tels), assemblés par des liaisons appelées articulations. Sa motorisation est réalisée par des actionneurs électriques,

pneumatiques ou hydrauliques qui transmettent leurs mouvements aux articulations par des systèmes appropriés.

Notion d'articulation

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé mobilité de l'articulation. La mobilité d'une articulation Lorsque $m = 1$ ce qui est fréquemment le cas en robotique, l'articulation est dite simple : soit rotoïde, soit prismatique. Les articulations peuvent être divisées en deux types :

- Articulation rotoïde : Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe (voir la figure suivante) :



Figure I.4 Symbole de l'articulation rotoïde.

- Articulation prismatique : Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe (voir la figure suivante) :



Figure I.5 Symbole de l'articulation prismatique.

I.2.6 Systèmes actionneurs

C'est l'organe qui anime la structure mécanique par la conversion de l'énergie source en énergie mécanique. On dispose de deux types d'actionneurs :

- a. **Actionneurs électriques** : Essentiellement des moteurs, leurs types différents suivant le domaine d'utilisation, on trouve les moteurs à courant continu, pas à pas, hybrides, synchrones ou auto pilotés, etc....
- b. **Actionneurs pneumatiques et hydrauliques** : Le transfert de l'énergie est réalisé par des vérins linéaires, angulaires, rotatifs, simple effet, double effet, incrémentaux, etc....

I.2.7 Capteurs

Ils traduisent le phénomène physique caractérisant l'environnement en un signal électrique exploitable. Le robot peut être équipé par différents capteurs :

- a. **Capteurs internes ou proprioceptifs** : Ils assurent au robot le contrôle permanent du système mécanique articulé, en lui communiquant les grandeurs réelles de la position et de la trajectoire (les capteurs de fin de course, potentiométriques, optiques, émetteurs d'énergie, incrémentaux), de la vitesse (les capteurs de vitesse linéaire L.V.T (Linear Velocity Transducer) et de l'accélération afin d'assurer le bon suivi des trajectoires commandées.
- b. **Capteurs externes ou extéroceptifs** : L'objectif de ces capteurs est l'acquisition des informations assurant la modélisation de l'environnement pour une meilleure exécution de la tâche. Ils permettent la modification du comportement du robot afin de s'adapter aux contraintes imposées. On distingue : capteurs au contact (tactiles), utilisés pour la reconnaissance géométrique de l'environnement ; capteurs à faible distance (peroxonitriques) donnant des images de quelques points de l'environnement local en utilisant les rayonnements infrarouges ; et les capteurs à distance fournissant des images détaillées de l'environnement global avec des caméras ou de dispositifs à transfert de charges (C.C.D :Charged Coupled Device).

I.2.8 Système de commande et de traitement de l'information (cerveau)

Elle assure la gestion et la distribution aux divers actionneurs (génération des signaux de commande). Le choix du système de commande est guidé par :

- Complexité de la structure mécanique.
- L'ampleur des tâches à réaliser.
- Performances souhaitées.

I.3 Mouvement de robot [2]

I.3.1 Les degrés de liberté (d.d.l)

En robotique, le nombre de degrés de liberté (N.D.L) d'un manipulateur est le nombre de paramètres indépendants nécessaire pour décrire la situation de l'organe terminal.

I.3.2 Espace des coordonnées

Pour définir correctement le mouvement de l'organe terminal (trajectoire, vitesse et accélération), il faut choisir un repère de coordonnées en rapport avec le nombre et le type des (d.d.l). On distingue deux types de coordonnées :

I.3.2.1 Coordonnées opérationnelles (géométriques)

Elles permettent de caractériser et de mesurer les composantes de l'état (position et orientation) d'un repère orthonormé direct lié à l'organe terminal, par rapport à un repère fixe lié à la base du robot.

I.3.2.2 Coordonnées généralisées (articulaires)

On appelle coordonnées généralisées la quantité définissant le mouvement relatif du corps (segments) C_i par rapport au corps C_{i-1} , on note la variable articulaire q , elle peut être un angle autour d'un axe (liaison de translation). L'ensemble q_i , permet de définir les différentes configurations d'un robot manipulateur.

I.4 Commande des robots [3]

La commande d'un robot consiste à spécifier et à fournir le moyen de suivre convenablement la tâche qui lui est assignée. Mais le problème qui se pose, est la forme des ordres qu'il faut donner au robot pour qu'il accomplisse avec précision et suffisamment vite la tâche souhaitée.

Avant, la commande des robots est faite par des dispositifs mécaniques. Vu que ces robots se limitent au déplacement des objets d'un endroit à l'autre, leur utilisation est assez réduite.

Actuellement, la technologie moderne, grâce à l'introduction de l'informatique et l'évolution de l'électronique, nous propose des méthodes améliorées faciles à mettre en œuvre, de plus, cela s'est étendu à toutes les formes d'utilisations. Ces méthodes sont basées sur la technique de programmation. On distingue :

I.4.1 La programmation par apprentissage

Dans cette méthode, l'opérateur fait décrire à l'organe terminal du robot une trajectoire destinée à être accomplie dans le futur, les points particuliers et les déplacements élémentaires formant cette dernière sont mémorisés dans la partie commande du robot (c'est la méthode la plus ancienne), soit dans un ordinateur (c'est la méthode la plus avancée) et doivent être restitués au moment de l'exécution de la tâche. Le système aura donc à faire l'exécution une fois sous la direction de l'homme opérateur et puis d'une façon autonome.

I.4.2 Programmation par asservissement

L'opérateur de contrôle d'un robot consiste à annuler le signal d'erreur, c'est-à-dire, asservir les valeurs des articulations à, des valeurs désirées, quelle que soit la charge transportée et indépendamment du mouvement du robot ; ainsi, tant que l'erreur persiste, les séquences d'opérations désirées sont décrites comme instruction d'un programme et permettent au robot la reconnaissance du milieu, le traitement des erreurs en temps réel, la réception d'informations venant de l'environnement et leurs utilisations pendant l'exécution des programmes.

Le système de commande génère la séquence d'action qui se traduit au niveau des articulations par des mouvements que provoquent les systèmes actionneurs pilotés par des asservissements.

Dans la suite de notre travail, nous proposons un algorithme de commande afin d'asservir en position et en vitesse un robot à deux degrés de liberté.

I.4.3 Programmation par langage de haut niveau

Cette méthode consiste à décrire la tâche à accomplir par une suite d'instructions adaptées à la robotique (instructions d'actions, instructions d'interactions entre le robot et son univers).

Des langages de haut niveau spécifiques à la robotique sont apparus aux Etats-Unis dès 1973.

I.5 Modélisation d'un SMA [14]

Pour exécuter une tâche en un point donné de l'espace, le système artificiel combine ces performances matérielles et logicielles, pour que son organe terminal puisse prendre une succession de configurations (position, orientation, mouvement de l'outil) nécessaires à l'exécution de cette tâche.

Afin de contrôler et commander correctement les actionneurs, il est impératif de faire une bonne modélisation qui consiste à représenter le comportement de la structure mécanique articulé par des équations algébriques, soit du point de vue des positions, c'est le modèle géométrique, soit du point de vue des vitesses, c'est le modèle cinématique, soit en considérant les effort mis en jeux, c'est le modèle dynamique.

I.5.1 Modélisation géométrique

Le modèle géométrique d'un robot constitue une représentation mathématique en le considérant comme une structure arborescente comportant n corps rigides, sans masse, articulés entre eux. Chaque corps est réduit à sa plus simple expression c'est-à-dire à son orientation et sa position par rapport au précédent.

$$C_i = (\text{position}_i, \text{orientation}_i).$$

I.5.1.1 Modèle géométrique direct

Dans le modèle géométrique direct, la position et l'orientation de l'organe terminale est donnée en fonction des variables articulaires. Nous l'exprimons par la fonction suivante :

$$x_i = F(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (\text{I.1})$$

$$i = 1, 2, \dots, P .$$

Avec

P : C'est le nombre de variables géométriques.

n : C'est le nombre de degré de liberté du robot.

$X = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$: Vecteur des coordonnées opérationnelles donnant la position de l'organe terminal.

$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$: Vecteur des coordonnées opérationnelles donnant la position articulaire.

Le modèle géométrique direct d'un bras manipulateur à deux axes avec des liaisons rotoides est donné par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \quad (\text{I.2})$$

I.5.1.2 Modèle géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse nous permet le calcul des variables articulaires en fonction des variables géométriques (la position de l'effecteur imposée par la tâche)

Il est constitué par la fonction inverse ou réciproque de F .

$$q = F^{-1}(X) \quad (\text{I.3})$$

Avec :

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T$$

I.5.2 Modélisation cinématique

Dans le modèle géométrique on prend en considération seulement la position et l'orientation des corps et de l'organe terminal, dans le modèle cinématique il y a apparition des vitesses, celles de l'organe terminal et des actionneurs.

I.5.2.1 Modèle cinématique direct

En dérivant les équations du modèle géométrique direct par rapport au temps, on obtient le modèle cinématique direct suivant :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dt} \quad (\text{I.4})$$

$\frac{dX}{dt} = \dot{X}$: Vecteur de position et d'orientation de l'organe terminal.

$\frac{\partial F}{\partial q} = J(q)$: Matrice jacobéenne.

$\frac{dq}{dt} = \dot{q}$: Vecteur vitesse généralisée (vitesse des actionneurs).

I.5.2.2 Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse nous permet l'obtention des vitesses qu'il faut appliquer aux actionneurs en fonction des vitesses désirées pour l'organe terminal dans l'espace de la tâche. Il est donné sous la forme suivante :

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X} \quad (\text{I.5})$$

I.5.3 Modélisation dynamique

L'utilisation des robots est devenue de plus en plus importante dans le domaine de l'automatisme. Dans les modèles précédents, nous avons supposé que les corps du SMA sont rigides et l'équilibre statique est réalisé pour toute configuration prise par le robot au cours de son déplacement. Au fur et à mesure que la vitesse augmente, les modèles géométriques et cinématique vont s'éloigner du modèle réel.

Cependant l'ultra rapidité et la haute précision de la poursuite de trajectoire sont de plus en plus exigées pour atteindre les performances et la perfection désirée du robot. Pour satisfaire les exigences des utilisateurs, il est nécessaire de tenir compte des phénomènes dynamiques (forces inertielles, centrifuges, Coriolis et de gravité, Frottements et perturbations), afin d'avoir un modèle plus proche de la réalité.

Le comportement dynamique d'un système mécanique articulé est décrit par la variation dans le temps des moments des articulations exercés par les actionneurs.

I.6 Détermination du modèle dynamique [13]

Le modèle dynamique d'un SMA exprime la relation entre les variables d'états du mécanisme et les forces extérieures agissant sur chaque corps (effet des moteurs, des frottements et de pesanteur etc.), sous forme d'équations différentielles.

Les équations différentielles qui gouvernent la réponse dynamique d'un robot ont été établies de plusieurs manières, elles peuvent être obtenues en utilisant l'un des formalismes suivants :

- Les équations de Newton-Euler.
- Les équations de Lagrange.
- Le principe des travaux virtuels d'Alembert.

La méthode la plus utilisée et la plus aisée à manipuler, est constituée par les équations de Lagrange.

I.6.1 Formalisme de Lagrange

Considérons un système mécanique articulatoire formé de n corps numérotés de 1 à n . Le mouvement de cette chaîne sera représenté selon le formalisme de Lagrange par le système d'équations différentielles suivantes:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + C_i \quad (\text{I.6})$$

Avec

$$i = 1, \dots, n$$

Où :

n : Nombre de degré de liberté.

L : Lagrangien qui représente la différence entre l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle (interne) du système E_p .

Q_i : Les couples exercés par la pesanteur sur la $i^{\text{ème}}$ articulation.

C_i : Les couples exercés par les forces extérieures.

q_i : Coordonnée généralisée de la variable articulaire i .

$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$: vitesse généralisée de l'articulation i .

Dans notre travail, nous avons opté pour un bras manipulateur à deux axes et segments rigides évoluant dans le plan vertical. Ce bras est constitué de deux axes de masses

respectives m_1 et m_2 , et de longueurs respectives l_1 et l_2 comme le montre la figure suivante :

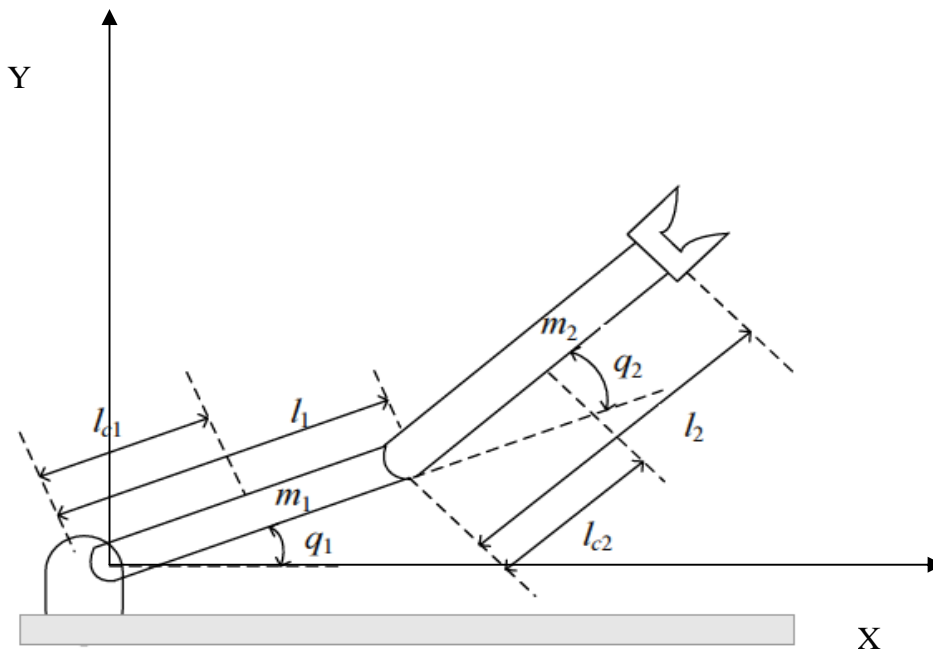


Figure I.6 Robot à deux articulations évoluant dans un plan vertical.

I.6.2 Evaluation des différents termes impliqués

– **Le couple de force C_i**

C_i est le couple provenant soit des actionneurs, soit de l'environnement, soit des deux (C_i est une donnée).

– **Le couple de pesanteur Q_i**

On suppose que les centres de gravités sont situés au bout de chaque liaison.

$$Q_i = \sum_{i=1}^n g m_i \frac{\partial y_i}{\partial q_i} \quad (\text{I.7})$$

Avec :

g : Accélération de pesanteur.

m_i : Masse du corps i .

y_i : Altitude du centre de masse du corps i par rapport à l'origine O .

n : Nombre de degré de liberté.

– **Le Lagrangien L**

$$L = E_c - E_p \quad (\text{I.8})$$

- E_p : Energie potentielle (interne).

Si on suppose que les deux segments de la chaîne sont rigides, donc $E_p = 0$

L se simplifie à l'énergie cinétique.

- E_c : Energie cinétique qui est la mesure du mouvement mécanique défini par le travail que doit effectuer le robot lors de son freinage jusqu'à l'arrêt complet.

$$E_c = \sum_{i=1}^2 E_{ci} = \sum_{i=1}^2 (E_{ci}^{(T)} + E_{ci}^{(R)}) \quad (\text{I.9})$$

Avec :

$$E_{ci}^{(T)} = \frac{1}{2} m_i (v_i)^2 \quad (\text{I.10})$$

$E_{ci}^{(T)}$: Energie cinétique de translation.

$$E_{ci}^{(R)} = \frac{1}{2} (J_i + m_i l_i^2) \dot{q}_i^2 \quad (\text{I.11})$$

m_i : Masse du segment i .

v_i : Vitesse du segment i .

Avec :

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (\text{I.12})$$

J_i : Moment d'inertie du segment i .

l_i : Longueur du segment i .

\dot{q}_i : Vitesse de rotation du segment i .

Ayant les différents termes impliqués, et après calcul des diverses dérivées de l'énergie cinétique E_c et des couples de pesanteurs, on obtient les équations différentielles qui s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

I.6.3 Notation matricielle

La représentation matricielle est donnée par :

$$\begin{bmatrix} M(1,1) & M(1,2) \\ M(2,1) & M(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) \\ C(2,1) & C(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(1,1) \\ G(2,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Le modèle dynamique est donné comme suit [1] :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{I.14})$$

Avec :

$M(q)$: Est la matrice d'inertie du robot telle que $M(q)$ est une matrice symétrique:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M(1,1) & M(1,2) \\ M(2,1) & M(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

$$M(1,1) = P_1 + P_2 + 2P_3 \cos(q_2).$$

$$M(1,2) = P_2 + 2P_3 \cos(q_2).$$

$$M(2,1) = P_2 + 2P_3 \cos(q_2).$$

$$M(2,2) = P_2.$$

La matrice des forces centrifuges et Coriolis est :

$$C(q) = \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) \\ C(2,1) & C(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Avec :

$$C(1,1) = -P_3 \sin(q_2)\dot{q}_2.$$

$$C(1,2) = -P_3 \sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2).$$

$$C(2,1) = P_3 \sin(q_2)\dot{q}_1.$$

$$C(2,2) = 0.$$

Le vecteur des efforts gravitationnels est :

$$G(q) = \begin{bmatrix} G(1,1) \\ G(2,1) \end{bmatrix} \quad (\text{I.17})$$

Avec :

$$G(1,1) = g(P_4 + P_5) \cos(q_1) + gP_6 \cos(q_1 + q_2).$$

$$G(2,1) = gP_6 \cos(q_1 + q_2).$$

Avec :

$$P_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_1^2 + I_1.$$

$$P_2 = m_1 l_{c2}^2 + I_2.$$

$$P_3 = m_2 l_1 l_{c2}.$$

$$P_4 = m_1 l_{c1}.$$

$$P_5 = m_2 l_1.$$

$$P_6 = m_2 l_{c2}.$$

Remarque 1:

G_i : Est le terme qui rend compte de la gravité de chaque segment, il prend la valeur maximale quand les deux liaisons sont sur l'axe des x c'est-à-dire ($q_1 = 0$ et $q_2 = 0$).

Remarque 2 :

Si on refait la modélisation de ce robot en tenant compte des perturbations le modèle dynamique de ce robot est donné par l'équation matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + T_d = \tau \quad (\text{I.18})$$

T_d : Perturbation.

Dans le chapitre 4, nous allons voir comment piloter ce modèle avec une commande par mode glissant d'ordre 1 et d'ordre 2, pour pouvoir mieux contrôler la trajectoire de chaque liaison.

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les concepts de base utilisés en robotique, concepts qu'on utilisera dans la suite de notre travail.

Ce chapitre porte aussi sur les différentes méthodes de modélisation. Entre autre, la modélisation dynamique qui à été retenue pour modéliser le système mécanique articulé à deux degré de liberté.

Le comportement dynamique du système est donc traduit par un système d'équations différentielles non linéaires et fortement couplées.

Comme notre système est un robot manipulateur et qui est fortement non linéaire, le recours à des lois de commande robustes serait judicieux. Parmi celles-ci, la commande par mode glissant, qui est robuste vis-à-vis des incertitudes, variations paramétriques et

perturbations. Malheureusement, cette technique présente le phénomène de chattering. Pour remédier à ce problème en conservant la robustesse, nous avons recours à la commande par mode glissant d'ordre supérieur.

II.1 Introduction

Ce chapitre est destiné à introduire les éléments théoriques nécessaires à la compréhension du fonctionnement des commandes par modes de glissement.

Un modèle mathématique constitue souvent une description approchée de la réalité physique, et la loi de commande ne pourrait être construite que sur ce dernier. Ainsi, la commande choisie devra être robuste dans le sens où elle devra garantir une faible sensibilité aux erreurs et aux incertitudes.

La commande par mode glissant s'inscrit dans le cadre le plus large de la théorie des systèmes à structure variable qui a émergé dans le milieu de 20^{ème} siècle en ex-union soviétique. La théorie des modes glissants a été formalisée par Utkin dans les années 70.

Les lois de la commande par mode glissant sont réalisées de manière à contraindre l'état du système à atteindre et ensuite rester sur une surface donnée dite surface de commutation ou surface de glissement.

On entend par système à structure variable, tout système dans lequel les paramètres du régulateur varient d'une manière discontinue. Ainsi, ils prennent deux valeurs possibles. La commutation d'une valeur à l'autre s'effectue de façon à obliger la trajectoire du système à évoluer sur la surface de glissement.

Les avantages de la commande par mode glissant sont multiples. Le plus grand est lié aux propriétés de robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques du système et des perturbations. Il faut signaler aussi sa simplicité d'élaboration et d'adaptation, aussi bien aux systèmes non linéaires qu'aux systèmes linéaires. Son principal inconvénient est le phénomène de broutement ou réticence, chattering en anglais (des vibrations de haute fréquence). Ce phénomène est non désirable, car il peut endommager les actionneurs.

Les applications de la commande par mode glissant ont été nombreuses. Elles comprennent une large gamme de domaines, par exemple : dans l'électronique de puissance, la commande des machines électriques et la commande des robots.

II.2 Configuration de base des systèmes à structure variable

Dans les systèmes de réglage à structure variable, on distingue deux configurations de base différentes :

II.2.1 Configuration permettant un changement de structure par commutation entre deux retours d'état différents

La loi commande est donnée par :

$$U = \begin{cases} -K_1 x_s & \text{si } S(x) > 0 \\ -K_2 x_s & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

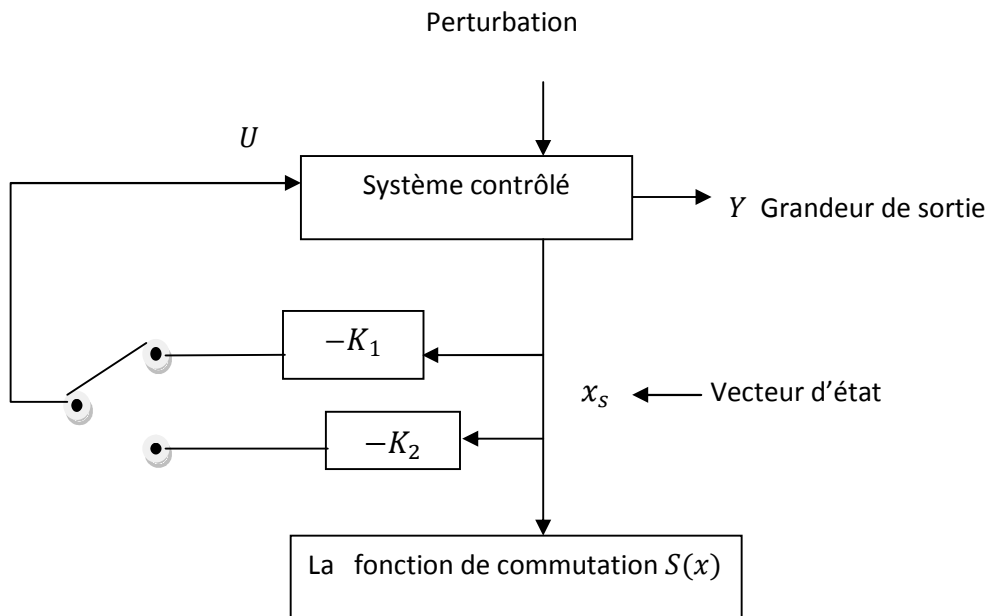


Figure II.1 changement de la structure avec commutation entre deux retours.

U : Grandeur de commande.

x_s : Vecteur d'état.

Y : Sortie du système.

$-K_1, -K_2$: Vecteur lignes du retour d'état.

$S(x)$: Loi de commutation.

II.2.2 Configuration permettant la variation de la structure du système par simple commutation d'interrupteur

Seule l'information sur le signe de la fonction de la surface de $S(x)$, suffit pour générer la commande d'ouverture ou de fermeture de l'interrupteur pilotant le convertisseur. Donc, la loi de commande est donnée par :

$$U = \begin{cases} U_{max} & \text{si } S(x) > 0 \\ U_{min} & \text{si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

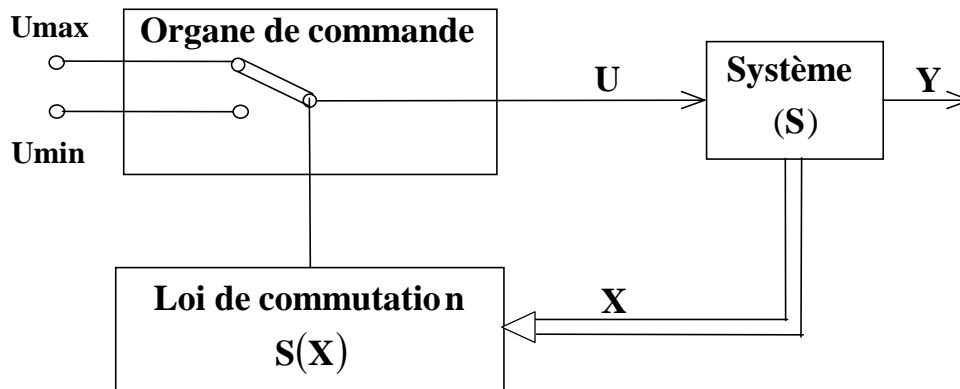


Figure II.2 changement de structure avec commutation au niveau de l'organe de commande.

II.3 Formalisme classique du régime glissant

Dans ce paragraphe, nous présentons les concepts classiques utilisés pour la commande en régime glissant des systèmes linéaires et non linéaires, ainsi qu'un rappel de quelques propriétés mathématiques des équations différentielles à second membre discontinue. Ensuite nous étudions le choix des surfaces de glissement.

II.3.1 Régime glissant

On distingue deux sortes de régime glissant, idéal et réel.

II.3.1.1 Régime glissant idéal

En théorie, l'organe de commutation est supposé idéal insensible au bruit, et la trajectoire en régime glissant d'écrit parfaitement l'équation $S(x)=0$, d'où régime glissant idéal.

Définition

Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hypersurface de commutation S .

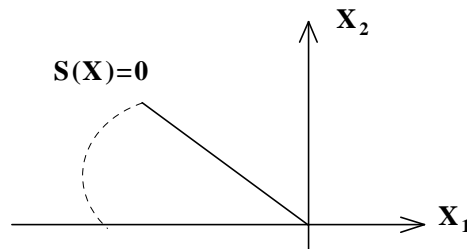


Figure II.3 Glissement idéal : amplitude d'oscillation nulle.

II.3.1.2 Régime glissant réel

En pratique, l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présentent des imperfections, comme les retards de commutation. La trajectoire de phase en régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation, donnant naissance à des oscillations indésirables qui diminuent la précision du système, en gardant néanmoins la stabilité.

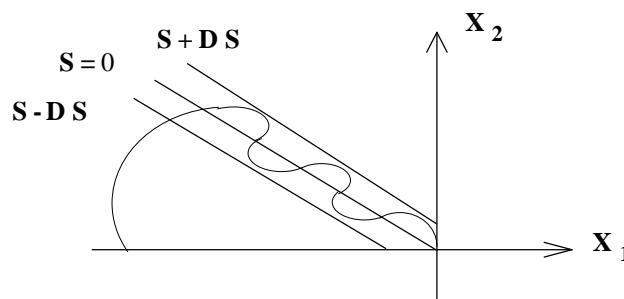


Figure II.4 Glissement réel.

II.3.2 Explication du glissement

Nous supposons qu'à un instant t_0 le point de fonctionnement du système coupe la surface de glissement avec la commande U_{\min} et dès qu'il atteint le point A , le seuil inférieur de basculement, la commande prend la valeur U_{\max} et de nouveau le point représentatif du système coupe la surface de glissement jusqu'à ce qu'il atteigne le point B , le seuil supérieur de basculement. Une deuxième fois la commande prend la valeur U_{\min} et le point de fonctionnement sera forcé à évoluer sur la surface de glissement et ainsi de suite. Donc, un mouvement continu à l'intérieur de la zone hystérésis du relais et lorsque le point représentatif atteint la zone de zéro, ce dernier continue à commuter sans s'éloigner de zéro [Figure II.5].

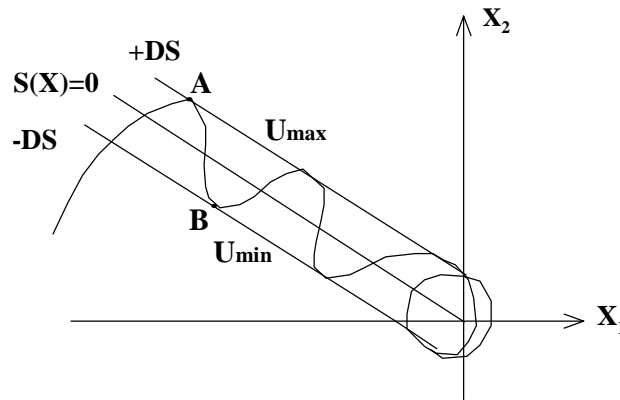


Figure II.5 Mode de glissement.

II.3.3 Condition d'existence du glissement

Soit le système d'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$$

Les fonctions $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont continues par morceaux, et présentent des discontinuités sur l'hypersurface notée S d'équation : $S(x) = 0$ $S < 0$, $S > 0$.

Les fonctions f_i sont supposées définies dans un domaine G de l'espace d'état. La surface $S(x)=0$ sépare le domaine G en deux parties $G^+(S > 0)$ et $G^-(S < 0)$, ce qui nous donne au voisinage de la surface S deux valeurs de f soit f^+ et f^- . Nous appelons f_N^+ et f_N^- les projections respectives de f^+ et f^- sur la normale à la surface S , orienté de G^- vers G^+ .

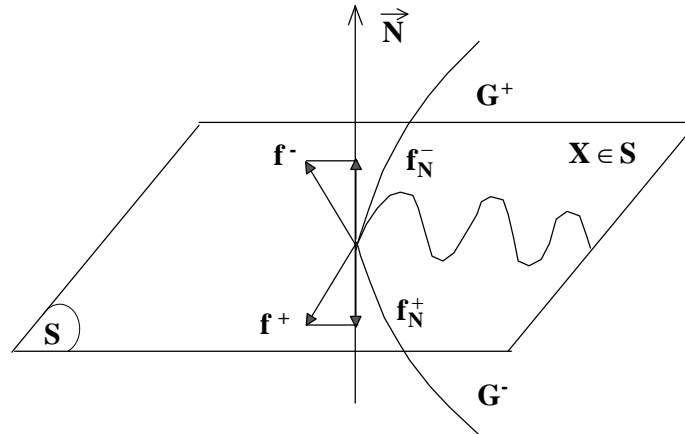


Figure II.6 Espace d'état et surface de glissement.

Théorème [Philipov]

Le théorème suivant permet de préciser les conditions d'existence et d'unicité d'une solution $x(t)$ de l'expression (II.3).

Considérons le système décrit par l'équation (II.3) satisfaisant la condition :

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq K \quad \text{Avec : } (i,j=1,2,\dots,n)$$

K : étant une constante arbitraire indépendante de x et de t

Soit une surface S deux fois différentiable, chacune des composantes f_N^+ et f_N^- est continue sur $[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ pour $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ appartenant à S et le vecteur $h = f^+ - f^-$ étant continûment différentiable. Si en chaque point de la surface S une des inégalités $f_N^+ < 0$ ou $f_N^- > 0$ est vérifiée (pas obligatoirement la même en tout point de S), il existe

alors, dans le domaine G , une solution $x(t)$ pour le système (II.3), et les propriétés d'unicité et de dépendance de cette solution par rapport aux conditions initiales sont vérifiées de façon continue.

Ce théorème conduit à dire que si l'on vérifie à la fois $f_N^- > 0$ et $f_N^+ < 0$, la surface S sera attractive pour les trajectoires de phase $x(t)$ du système (II.3) au moins dans un petit voisinage de S dans l'espace d'état puisque de chaque côté de la surface les vecteurs vitesses sont dirigés vers la surface. Il y a donc un régime glissant limite sur la surface S .

Soit la surface S est définie par :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (\text{II.4})$$

En dérivant (II.4) par rapport à t , on aura :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_i} \cdot f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{II.5})$$

La dérivée \dot{S} apparaît comme le produit scalaire de la normale orientée à la surface S et du vecteur f . Or si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, on déduit :

$$f_N^+ < 0 \text{ Correspond à } S > 0 \text{ et } \dot{S} < 0$$

$$f_N^- > 0 \text{ Correspond à } S < 0 \text{ et } \dot{S} > 0$$

D'où :

$$f_N^+ < 0 \text{ et } f_N^- > 0 \Rightarrow S\dot{S} < 0 \quad (\text{II.6})$$

Donc la condition de glissement sous les deux formes classiques ($f_N^+ < 0$ et $f_N^- > 0$) et ($S\dot{S} < 0$) sont équivalentes. La condition (II.6) est l'inégalité fondamentale utilisée pour résoudre le problème de la synthèse d'un correcteur à structure variable.

Alors un régime glissant existe sur une surface de glissement si, et seulement si, dans un voisinage de la surface de glissement toutes les trajectoires du système sont dirigées vers elle. En d'autres termes

$$\lim_{S(x) \rightarrow 0^-} \dot{S}(x) > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{S(x) \rightarrow 0^+} \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{II.7})$$

II.3.4 Deux méthodes classiques d'étude de la commande par structure variable en régime glissant

Les résultats sur les équations différentielles à second membre discontinu ont été exploités par Emelyanov et Utkin, pour la mise en œuvre d'une commande à structure variable d'un système non linéaire.

Nous exposant ci-dessous les deux méthodes de Filippov et Utkin.

La méthode de Filippov est l'une des premières méthodes qui a montré l'existence et l'unicité de la solution des systèmes dynamiques à second membres discontinu en régime glissant.

La méthode d'Utkin est dite : Méthode de la commande équivalente.

II.3.4.1 la méthode de Filippov [4]

Soit le système différentiel non linéaire dans lequel la commande U est indépendante :

$$\frac{dx}{dt} = f(U, x, t) \quad (\text{II.8})$$

Considérons une commande non linéaire discontinue :

$$U = \begin{cases} U^+(x, t) & \text{si } S(x, t) > 0 \\ U^-(x, t) & \text{si } S(x, t) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

En régime glissant ($S(x) = 0$) et en présence de la loi de commande (II.9) Filippov a montré que la trajectoire d'état du système (II.8) est donné sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{dt} = \mu \cdot f^+ + (1 - \mu) \cdot f^- = f^0 \quad (\text{II.10})$$

Avec : $0 \leq \mu \leq 1$ et $f^0 = [f_1^0, f_2^0, \dots, f_n^0]^T$

$$f^+ = f(U^+, x, t) \quad \text{et} \quad f^- = f(U^-, x, t)$$

f^0 Est appelée la vitesse d'état moyenne (c'est un champ de vecteur moyen) sur la trajectoire d'état en mode de glissement idéal. Ce champ de vecteur moyen est tangentiel à la surface de glissement, il est obtenu par la moyenne géométrique, ou par une combinaison connexe des champs de vecteurs de chaque côté de S .

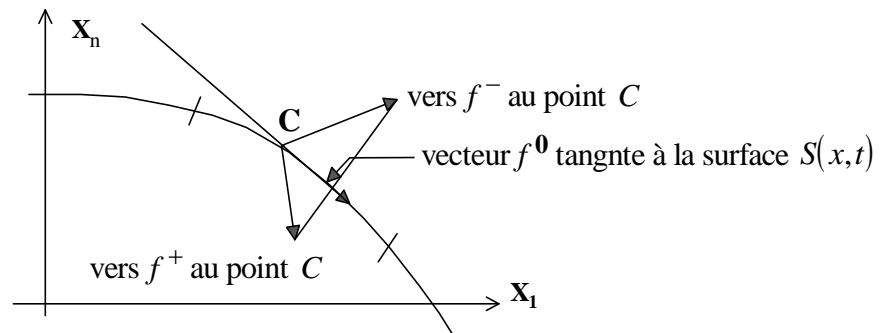


Figure II.7 Schéma de principe de la construction du champ de vecteur moyen f^0 .

Soit ∇S le gradient de $S(x,t)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs. En dérivant $S(x,t) = 0$ par rapport au temps t , on aura :

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot f^0 + \frac{\partial S}{\partial t} = \langle \nabla S, f^0 \rangle + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.11})$$

En tenant compte de (II.10) et (II.11), on peut tirer :

$$\mu = \frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \quad (\text{II.12})$$

En portant l'expression de μ dans (II.10), l'équation d'état qui décrit le système bouclé en régime glissant est :

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\langle \nabla S, f^- \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \right] \cdot f^+ - \frac{\langle \nabla S, f^+ \rangle + \frac{\partial S}{\partial t}}{\langle \nabla S, f^- - f^+ \rangle} \cdot f^- = f^0 \quad (\text{II.13})$$

L'expression (II.13) est l'équation d'état décrivant le système (II.8) en régime glissant.

II.3.4.2 La méthode d'Utkin [4]

Soit le système dynamique monovariante décrit par l'équation d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t) \cdot U \quad (\text{II.14})$$

Où x , f et g sont des vecteurs colonnes de dimension n .

La commande équivalente u_{eq} correspond au régime glissant idéal (ni retard, ni hystérésis).

En régime de glissement :

$$S(x, t) = 0 \quad (\text{II.15})$$

On exprime

$$\frac{dS(x, t)}{dt} = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'équation (II.15) est utilisée pour obtenir $U_{eq}(x,t)$ (commande équivalente)

$$\frac{dS(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot [f(x,t) + g(x,t) \cdot U_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Si on suppose que la condition d'existence :

$$\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \neq 0 \quad (\text{II.17})$$

La commande équivalente peut être donnée par :

$$U_{eq}(x,t) = - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot f(x,t) + \frac{\partial S}{\partial t} \right\} \quad (\text{II.18})$$

En portant l'expression de $U_{eq}(x,t)$ dans l'équation (II.14), la trajectoire d'état $x(t)$ décrivant le système en régime glissant est solution de :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = & \left\{ I - g(x,t) \cdot \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \right\} \cdot f(x,t) \\ & - g(x,t) \cdot \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^T \cdot g(x,t) \right]^{-1} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^T \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Les équations (II.13) et (II.19) sont équivalentes.

La commande équivalente U_{eq} a un sens physique : elle représente la valeur moyenne que prend la grandeur de commande lors de la commutation rapide entre U_{max} et U_{min} , qui maintient l'état du système sur la surface de glissement $S(x,t)=0$, définit comme suit :

$$U_{\min} = \text{Min} \{U^+(x,t), U^-(x,t)\}$$

$$U_{\max} = \text{Max} \{U^+(x,t), U^-(x,t)\}$$

$$U_{\min} < U_{eq}(x,t) < U_{\max}$$

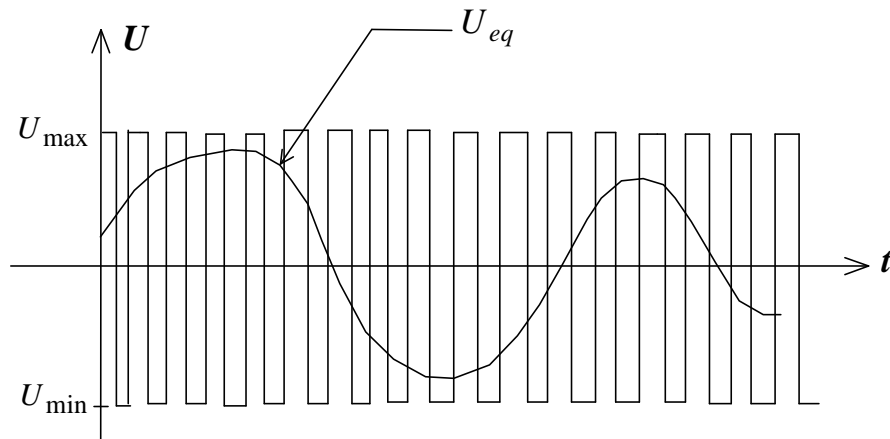


Figure II.8 Caractéristique dynamique de la grandeur de Commande équivalente.

II .4 Principe de la commande en mode glissant

Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation. Ce choix permet au système de commuter d'une structure à une autre à tout instant.

Dans la commande à structure variable, la trajectoire d'état est amenée vers une surface. Puis elle est forcée à rester au voisinage de celle-ci à l'aide de la loi de commutation.

Cette surface est appelée surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit est appelé mouvement de glissement.

La trajectoire dans le plan de phase illustrée pour un système de second ordre par la figure II.9 est constituée de trois parties distinctes :

Le mode de convergence (**MC**) : c'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et tend vers la surface de glissement $S(x, y) = 0$.

Le mode de glissement (**MG**) : c'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement $S(x, y) = 0$.

Le mode du régime permanent (**MRP**) : Ce mode interprète la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

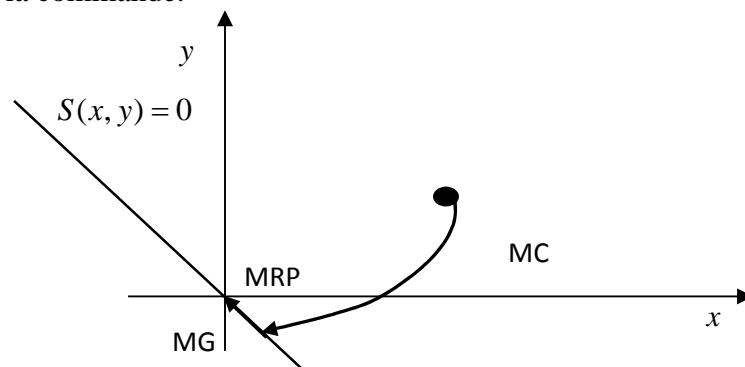


Figure II.9 Différents modes pour la trajectoire dans le plan de phase.

II.5 Conception de la commande par mode de glissant

La conception de la commande peut être effectuée en trois étapes principales très dépendantes l'une de l'autre:

- Choix de la surface ;
- L'établissement des conditions d'existence ;
- Détermination de la loi de commande.

II.5.1 Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement concerne le nombre et la forme des fonctions nécessaires. Ces deux facteurs dépendent de l'application et de l'objectif visé.

Pour un système défini par l'équation (II.20), le vecteur de surface δ a la même dimension que le vecteur de commande U .

$$\dot{x} = f(x,t)x + g(x,t)U \quad (\text{II.20})$$

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'origine du plan de phase [11].

La forme non linéaire est une fonction de l'erreur sur la variable à réguler x , elle est donnée par :

$$S(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{r-1} e(x) \quad (\text{II.21})$$

Avec :

$e(x)$: L'écart entre la variable à régler et sa référence.

λ : Une constante positive.

r : Le degré relatif, il représente le nombre de fois qu'il faut dériver la surface pour faire apparaître la commande.

L'expression de la surface est une équation différentielle dont l'unique solution est $e(x) = 0$. L'objectif de la commande est de maintenir la surface à zéro.

II.5.2 Condition de convergence et d'existence

Les deux conditions (convergence et existence) sont les deux critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence :

II.5.2.1 Fonction discrète de commutation

Emilyanov et Utkin ont proposé et étudié la première condition de convergence. Elle consiste à donner une dynamique à la surface convergente vers zéro. Elle est donnée par :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0 \quad (\text{II.22})$$

II.5.2.2 La fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire définie positive ($v(x) > 0$). La loi de commande doit faire décroître cette fonction. L'idée est de choisir une fonction scalaire $\delta(x)$ pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence et de concevoir une commande u tel que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

On peut définir la fonction de Lyapunov comme suit :

$$v(x) = \frac{1}{2} S^T(x) \cdot S(x) \quad (\text{II.23})$$

La dérivée de cette fonction peut être donnée comme suit :

$$\dot{v}(x) = S(x) \dot{S}(x) \quad (\text{II.24})$$

Il est clair que pour vérifier la décroissance de $v(x)$, il suffit de vérifier l'inégalité $\dot{v}(x) < 0$ [7]. D'où la vérification de la relation (II.22).

II.5.3 Calcul de la commande

Lorsque le régime glissant est atteint, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui a pour but de maintenir les conditions de glissement (l'attractivité de la surface), c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande [11].

Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface, et ensuite vers son point d'équilibre, en maintenant les conditions d'existence du mode de glissement. L'obtention d'un régime de glissement nécessite une attractivité de la surface de glissement des deux cotés. De ce fait, une commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité. Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode de glissant est constituée de deux parties [10], [11], l'une est la commande équivalente u_{eq} et l'autre attractive u_n :

$$U = u_{eq} + u_n \quad (\text{II.25})$$

- u_{eq} est proposée par Fillipov et Utkin, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement $S(x)=0$ [12], [11]. Elle est introduite en considérant que $S(x)=0 \Rightarrow \dot{S}(x)=0$ [10].

- u_n est introduite pour vérifier la condition de convergence $S(x) \cdot \dot{S}(x) < 0$.

Considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + g(x,t)U \quad (\text{II.26})$$

Le problème consiste à trouver l'expression analogique de la commande u .

On a :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \quad (\text{II.27})$$

En remplaçant (II.20) dans (II.21) on obtient :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot [f(x,t) + g(x,t) \cdot (u_{eq} + u_n)] \quad (\text{II.28})$$

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot [f(x,t) + g(x,t) \cdot u_{eq}] + \frac{\partial S}{\partial x} g(x,t) \cdot u_n \quad (\text{II.29})$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles [11]. D'où on déduit l'expression de la commande équivalente écrite comme suit :

$$u_{eq} = \left[\frac{\partial S}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x,t) \quad (\text{II.30})$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que $\frac{\partial S}{\partial x} \cdot g(x,t) \neq 0$.

Durant le mode de convergence, on remplace la commande équivalente par son expression dans la relation (II.29), on obtient l'expression de la dérivée de la surface comme suit :

$$\dot{S}(x,t) = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot g(x,t) \cdot u_n \quad (\text{II.31})$$

La condition d'attractivité exprimée dans (II.22) devient :

$$S(x,t) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \cdot g(x,t) \cdot u_n < 0 \quad (\text{II.32})$$

Pour que cette condition d'attractivité soit vérifiée, il faut que le signe de u_n soit opposé à celui de $S(x,t) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} g(x,t)$ [10].

La forme la plus simple que peut prendre u_n , est celle d'un relais (Figure II.9).

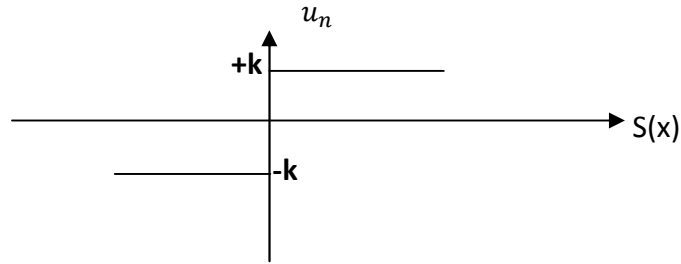


Figure II.10 la fonction signe.

$$u_n = -k \operatorname{sign}(S(x)) = \begin{cases} -k & \text{Si } S(x) > 0 \\ +k & \text{Si } S(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

k : Gain positif.

Par conséquent la loi de commande par mode glissant est donnée par la relation suivante :

$$U = \left[\frac{\partial S}{\partial x} g(x,t) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} \cdot f(x,t) - k \operatorname{sign}(S(x)) \quad (\text{II.34})$$

D'autres expressions de la commande discontinue ont été proposées :

$$u_n = \alpha \cdot e + \beta \cdot \dot{e} + \gamma \cdot \operatorname{sign}(S) [9].$$

$$u_n = (\alpha \cdot |e| + \beta \cdot |\dot{e}| + \gamma) \cdot \operatorname{sign}(S) [9].$$

II.6 Solutions pour la suppression du phénomène de réticence

Le phénomène de réticence constitue un inconvénient majeur non négligeable, car même s'il est possible de le filtrer à la sortie du processus, il est susceptible d'exciter les modes de hautes fréquences qui n'ont pas été pris en compte lors de la modélisation du système. Ceci peut dégrader les performances et même conduire au problème d'instabilité [5]. La réticence implique également d'importantes oscillations mécaniques au niveau des actionneurs, pouvant provoquer leurs usures rapide, ainsi que des pertes énergétiques non négligeables au niveau des circuits de puissance électrique.

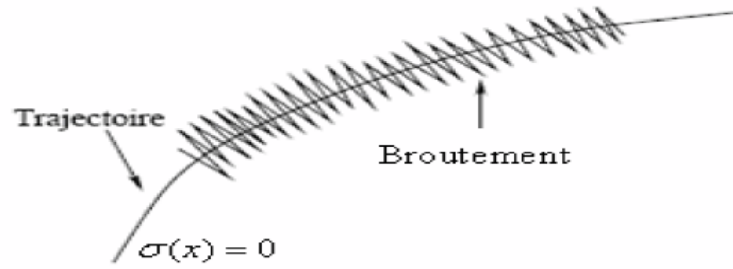


Figure II.11 phénomène de broutement.

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées [6], [7]. On décrit ici une des solutions à savoir celle de couche limite connue aussi par le nom "boundary layer solution", a été proposée par Slotine 1984 [6], elle consiste à effectuer une approximation continue des discontinuités présentes dans la loi de commande au voisinage de la surface de glissement.

Supposons que la commande discontinue qui provoque le phénomène de réticence s'écrive sous la forme :

$$u_n(t) = -k \operatorname{sign}(s(t)) \quad (\text{II.35})$$

La fonction $\operatorname{sign}(s(t))$ est remplacée par une fonction plus lisse dans la couche limite de $S(t) = 0$. Parmi ces fonctions utilisées nous citerons la fonction de saturation:

$$\operatorname{sat}(s) = \begin{cases} \frac{s}{\varepsilon} & \text{si } \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| \leq 1 \\ \operatorname{sign}(s) & \text{si } \left| \frac{s}{\varepsilon} \right| > 1 \end{cases} \quad (\text{II.36})$$

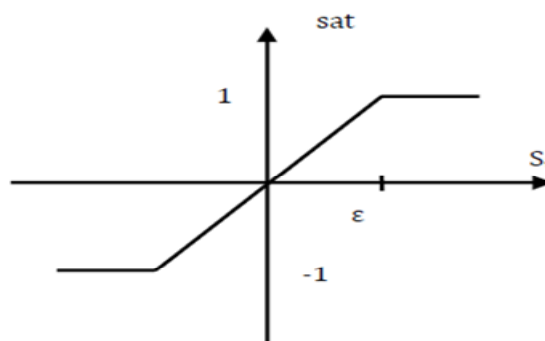


Figure II.12 Fonction SAT avec un seuil.

Le système ne converge plus vers la valeur désirée, mais vers un voisinage de cette dernière. Ainsi, la mise en place d'une commande continue dans une bande de la surface nécessite un compromis entre la robustesse et les performances. D'autres fonctions d'adoucissement existent telles que les fonctions sigmoïdes (arc-tangente, pseudo-signe, tangente hyperbolique...etc.):

$$\frac{2}{\pi} \arctan \frac{s}{\varepsilon}, \frac{s}{|s| + \varepsilon}, \tanh\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \dots \text{etc} \dots$$

II.7 Exemple d'application de la commande par mode de glissement

Soit le système linéaire décrit par le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} U \quad (\text{II.37})$$

$$y = S(x) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

x_1, x_2 : Variables d'états.

U : La commande du système.39)

y : La sortie du système.

L'objectif à travers cet exemple est d'illustrer les caractéristiques de la commande par modes glissants vues précédemment et de synthétiser une loi de commande robuste pour ce système, et c'en procédant par calcul ensuite faire des simulations sous le logiciel **MATLAB R2010a**, et tirer des conclusions.

II.7.1 Choix de la surface de commutation

On définit la loi de commutation par :

$$S(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (\text{II.38})$$

Avec : c_1 et c_2 sont des coefficients positifs.

On prend

$$S(x) = [c_1 \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c_n = 1$$

Sans perte de généralité, on prend $c_2 = 1$

$$S(x) = c_1 x_1 + x_2 \tag{II.39}$$

En régime glissants : $S(x) = \dot{S}(x) = 0$

On dérive $S(x)$ on obtient :

$$\dot{S}(x) = c_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \tag{II.40}$$

On remplace \dot{x}_1 dans l'expression de $\dot{S}(x)$ on trouve :

$$\dot{S}(x) = c_1 x_2 + \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_2(0) \exp(-c_1 t) \tag{II.41}$$

Pour que la trajectoire d'états x_2 atteint zéro il faut que $c_1 > 0$

Pou une condition initiale $x_2(0) = 1$

On trace la courbe de la variable d'état pour différentes valeurs de c_1

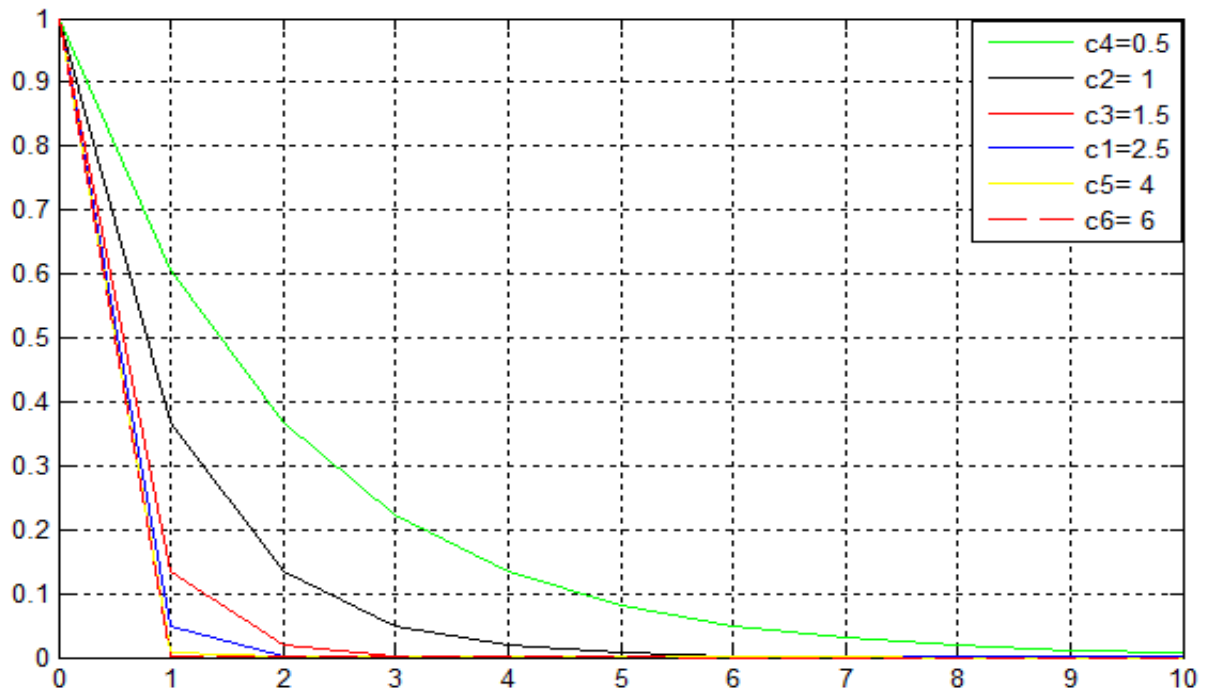


Figure II.13 Courbe représentative de la fonction.

A partir de la Figure II.13, après plusieurs variations de coefficient c , on fait le choix de $c_1 = 2.5$.

Donc :

$$S(x) = 2.5x_1 + x_2 \quad (\text{II.42})$$

II.7.2 Synthèse de la loi de commande

II.7.2.1 Commande équivalente

On dérive l'équation

$$\dot{S}(x) = c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 \quad (\text{II.43})$$

On remplace \dot{x}_1 et \dot{x}_2 on trouve :

$$\dot{S}(x) = c_1x_2 + c_2(a_1x_1 + a_2x_2) + c_2bU \quad (\text{II.44})$$

En mettant $\dot{S}(x) = 0$ on trouve

$$u_{eq} = \frac{1}{c_2 b} (-c_1 x_2 - a_1 c_2 x_1 - a_2 c_2 x_2) \quad (\text{II.45})$$

La forme de la commande est donnée par

$$\begin{aligned} U &= u_{eq} + u_n \\ U &= \frac{1}{c_2 b} (-c_1 x_2 - a_1 c_2 x_1 - a_2 c_2 x_2) + u_n \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

II.7.2 .2 Commande discontinu

On remplace l'expression de U dans (II.44)

On trouve :

$$\dot{S}(x) = u_n = -k \text{sign}(s(x)) \quad (\text{II.47})$$

On remplace U par u_{eq} dans le modèle d'état (II.37)

On obtient le modèle d'état du système en régime glissant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-c_1}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.48})$$

On voit bien que ce modèle est libre, indépendant de la loi de commande qui n'a pour but que de maintenir ce régime, sa matrice d'état est singulière ayant deux valeurs propres ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{-c_1}{c_2}$)

Ce modèle (II.43) permet d'étudier l'évolution des variables d'état du système sur la surface de commutation, la présence d'un pôle à zéro ($\lambda_1 = 0$) s'explique par le fait que la trajectoire d'état est amenée à évoluer sur la surface de commutation, la seconde valeur propre ($\lambda_2 = \frac{-c_1}{c_2}$) exprime le temps de glissement qui permet de fixer la dynamique avec laquelle la trajectoire d'état va atteindre le point d'équilibre.

La dynamique du système en mode glissement ne dépend que des paramètres de la loi de commutation.

II.7.2.3 Conditions de la convergence et d'existence

Pour qu'un mode de glissement existe, il est nécessaire qu'une fois que la trajectoire d'état a atteint la surface de commutation, l'y maintient, il faut alors vérifier que la condition de convergence $S(x)\dot{S}(x) < 0$ est satisfaite. On trouvé précédemment :

$$\begin{aligned}\dot{S}(x) &= u_n \\ u_n &= -k \operatorname{sign}(s(x)) \\ S(x)\dot{S}(x) &= S(x)(-k \operatorname{sign}(S(x)))\end{aligned}\tag{II.49}$$

Alors selon Lyapounov quelque soit le signe de $S(x)$ la condition de convergence est bien vérifiée. On conclut que le système est stable.

II.7.3 Résultats de simulation numérique

Les valeurs numériques des paramètres du système (a_1 , a_2 et b) sont données respectivement : (- 0.75, -0.3, 0.5)

$$u_{eq} = \frac{1}{c_2 b} (-c_1 x_2 - a_1 c_2 x_1 - a_2 c_2 x_2)\tag{II.50}$$

La commande équivalente est donné par :

$$u_{eq} = \frac{1}{0.5} (-2.5x_2 - 0.75x_1 - 0.3 x_2)\tag{II.51}$$

II.7.3.1 simulation

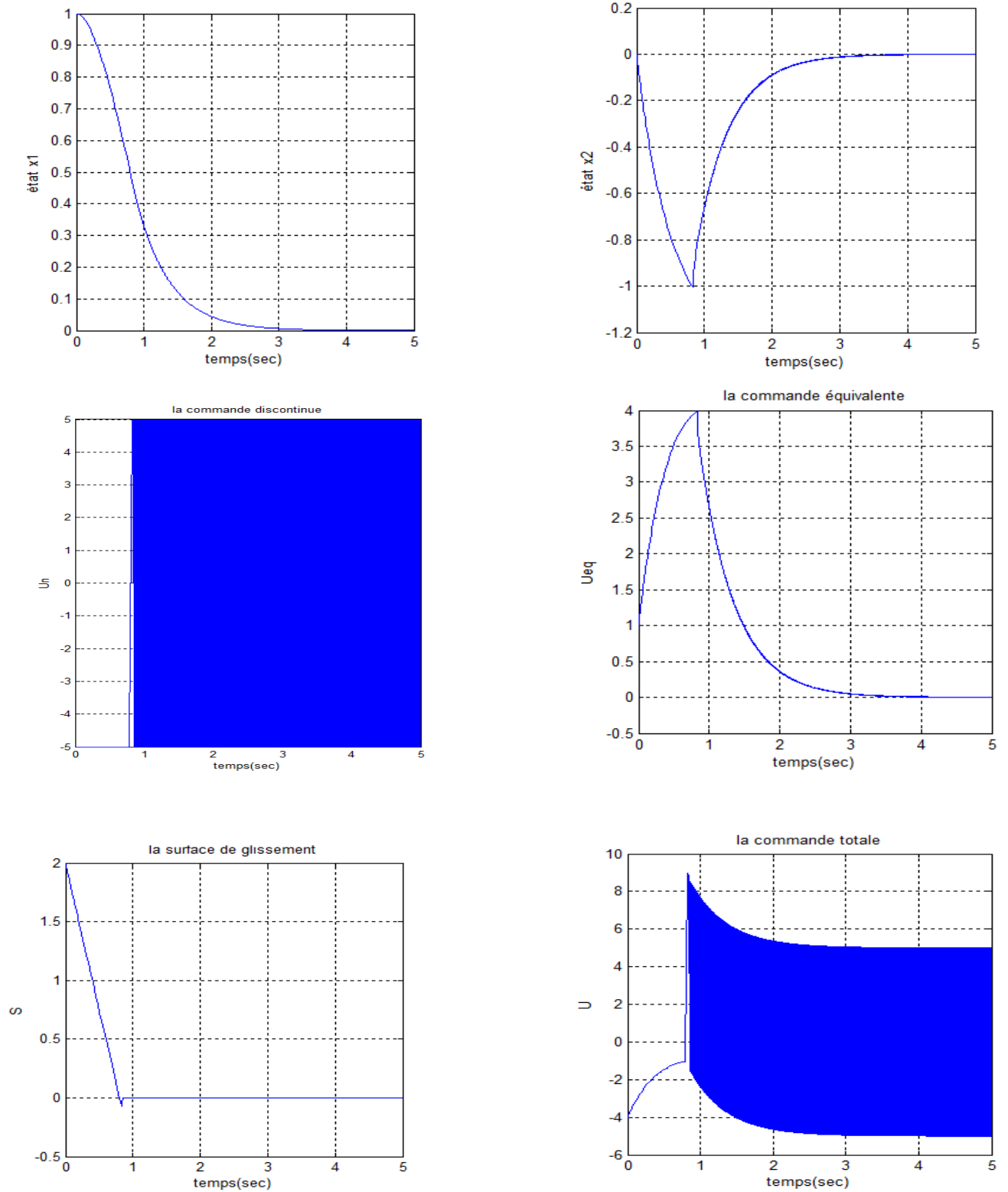


Figure II.14.a réponse du système pour $U = u_{eq} - k \text{sign}(S)$ $c_1 = 2.5, c_2 = 1, k = 5$.

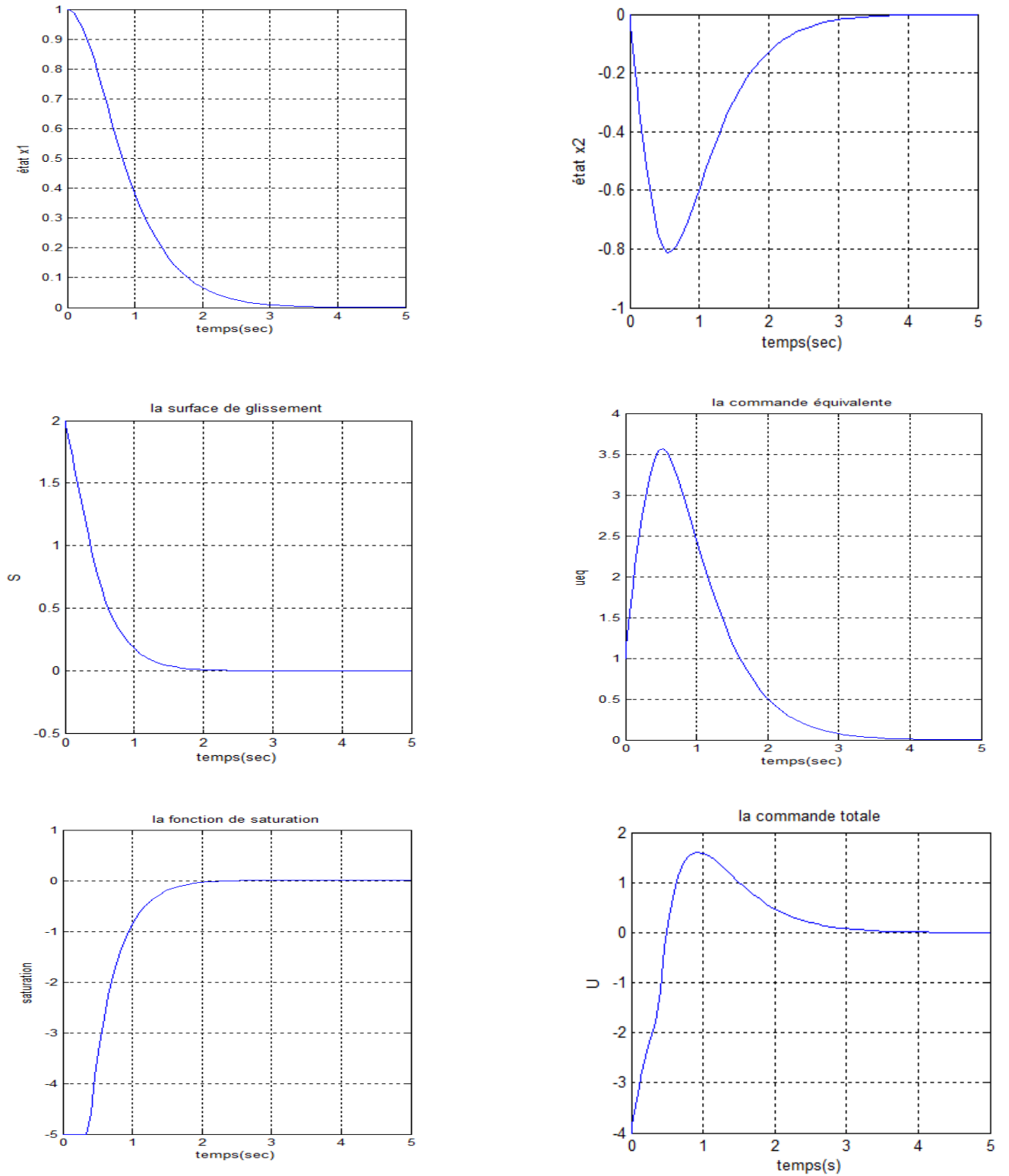


Figure II.14.b réponse du système pour $U = u_{eq} - k \text{sat}(S)$ $c_1 = 2.5$, $c_2 = 1$, $k = 5$.

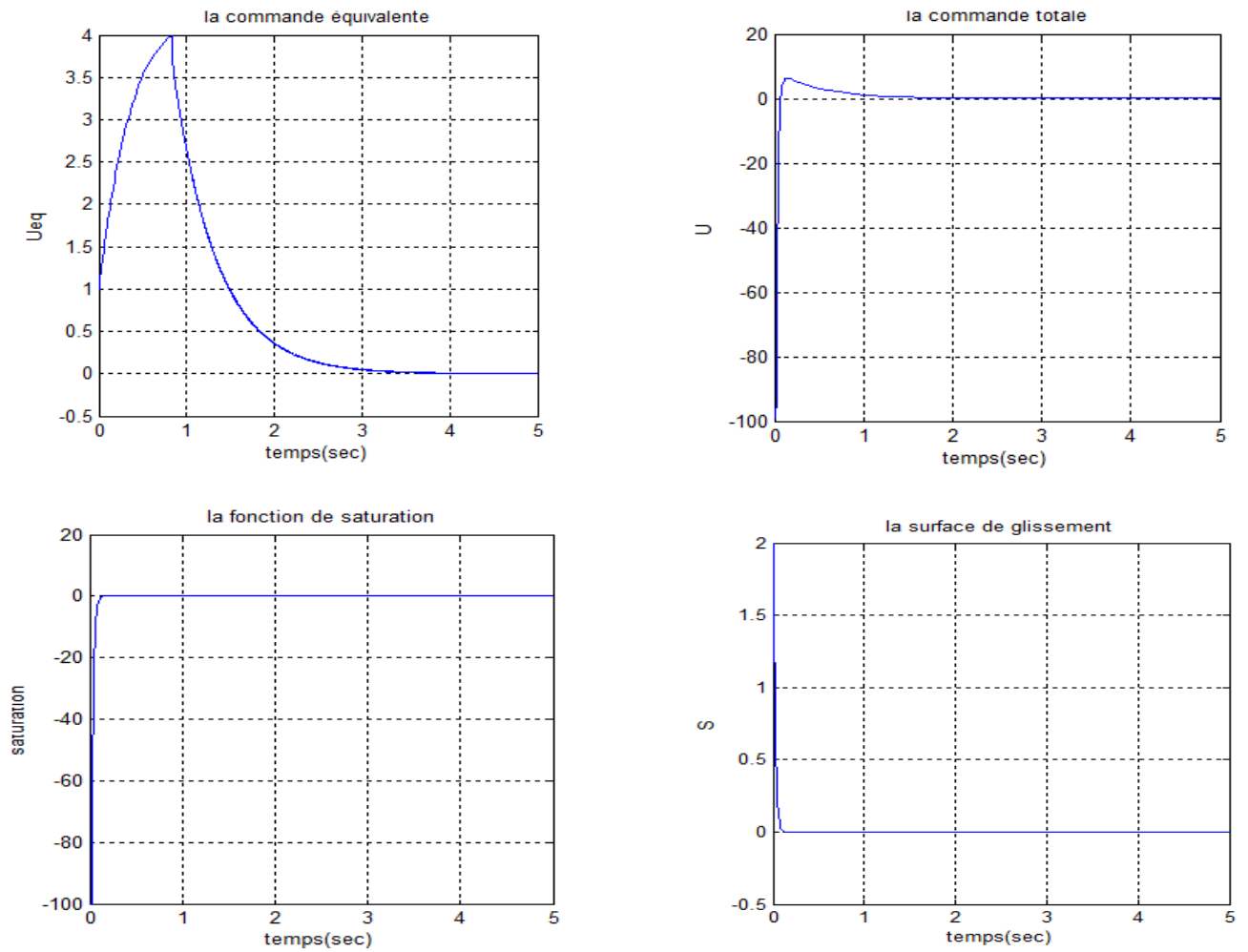


Figure II.14.c réponse du système pour $U = u_{eq} - k \text{sat}(S)$ $c_1 = 2.5, c_2 = 1, k = 100$.

II.7.3.2 interprétations des résultats de simulations

Nous analyserons le comportement dynamique en se basant sur les résultats de simulation donnée sur les Figures II.14.a, II.14.b, II.14.c.

D'après les courbes de la Figure II.14.a : on remarque que le système se déplace de l'état initial vers la surface de glissement, et glisse sur elle jusqu'à atteindre le point d'équilibre, donc on peut déduire que le régime transitoire du système égal à la somme du mode de convergence et du mode de glissement, et le régime permanent correspond à l'atteinte du point d'équilibre situé sur cette surface. En effet on peut diminuer la durée du régime transitoire du système en diminuant le temps de convergence ou de glissement. Ce régime glissant est atteint après un certain temps de glissement égal à 3sec, selon les courbes des états et de commande. De la courbe de u_{eq} on vérifie la condition de convergence :

$$U^- \leq u_{eq} \leq U^+ \quad (\text{II.52})$$

La présence du phénomène de chattering en hautes fréquences entrave la loi de commande, il est dû au terme de discontinuité.

Dans la Figure II.14.b : on essaye d'atténuer le phénomène de chattering en remplaçant la fonction singe par la fonction de saturation.

Les courbes de la commande totale et de saturation montrent bien que ce phénomène est bien réduit. Le système converge toujours vers son point d'équilibre mais avec un temps de glissement supérieur (4sec).

Dans la Figure II.14.c : en augmente le gain de la fonction saturation le système converge toujours vers son point d'équilibre avec un temps de glissement très petit il est à peu près de degré de 10^{-6} ce qui rend le système trop rapide.

II.8 Avantages et inconvénients de la commande par mode glissant

Il est reconnu que la robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes du modèle présente le point fort d'une commande par mode glissant. Contrairement à une loi de commande classique, les performances dynamiques sont maintenues [8].

De plus, la réduction de l'ordre du système constitue un autre point fort de ce type de commande, car elle permet de simplifier la complexité du système.

Cependant, ces performances sont obtenues au prix de certains inconvénients :

Un phénomène de Chattering ou broutement provoqué par la partie discontinue de cette commande et qui peut avoir un effet néfaste sur les actionneurs.

Le système est soumis à chaque instant à une commande élevée afin d'assurer sa convergence vers l'état désiré et ceci n'est pas souhaitable.

Parmi les solutions proposées à ces problèmes on peut citer la commande par mode glissant à bande limite qui consiste à remplacer la fonction de commutation dans la commande par une fonction de saturation (hystérésis, arc tangente, etc.).

II.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une présentation générale des concepts de la théorie des systèmes à structure variable, la caractéristique principale de ces systèmes est que leurs lois de commande se modifient d'une manière discontinue selon une logique déterminée. Les commutations de la commande s'effectuent en fonction des variables d'état, utilisées pour créer une variété ou hyper-surface dite de glissement dont le but est de forcer la dynamique du système à correspondre avec celle définie par l'équation de l'hyper-surface.

Nous avons aussi présenté les concepts de base de la commande par mode glissant (sur la surface de glissement, conditions d'existence et de convergence), le phénomène de réticence ou chattering et les principales raisons à l'origine de ce phénomène. Ainsi que les solutions proposées pour réduire ou éliminer ce problème.

Une autre solution très efficace pour remédier au phénomène de broutement en conservant la robustesse est la commande par mode glissant d'ordre supérieur, qui sera présentée dans le prochain chapitre.

III.1 Introduction

Pour remédier au problème de la réticence qui est hautement indésirable, les chercheurs russes ont proposé de déplacer le problème de la discontinuité due à l'élément de commutation de la loi en régime glissant sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement, au lieu d'agir sur la première dérivée comme dans le cas du régime glissant d'ordre un.

Le concept de mode glissant d'ordre supérieur a été introduit dans les années 80 par M. levantovsky et M. Emel'yanov. On parle dans ce cas des modes glissants d'ordres supérieurs (MGOS), en anglais High Order Sliding Mode (HOSM) [29]

Les HOSM font que la commutation discontinue agit, non pas sur la première dérivée de la fonction de glissement mais sur une dérivée supérieure (selon l'ordre). Les avantages du glissement classique sont préservés, mieux ils sont améliorés (précision de convergence et atténuation du broutement).

III.2 Position du problème

Considérons un système non linéaire avec la dynamique suivante [29] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, U) \quad x \in \mathcal{R}^n \\ S &= S(t, x) \quad \in \mathcal{R}, \\ U &= U(t, x) \quad \in \mathcal{R}, \end{aligned} \tag{III.1}$$

Où :

$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in X$ représente le vecteur d'état, $X \subset \mathcal{R}^n$.

U : Représente la commande.

f : Est une fonction supposée suffisamment différentiable, mais connue de façon incertaine.

t : Est le temps.

S : Est une fonction différentiable telle que ses $(p - 1)$ premières dérivées par rapport au temps sont en fonction de l'état x (ce qui signifie qu'elles ne contiennent aucune discontinuité).

Comme il a été défini dans le chapitre précédent, l'objectif de la commande par régime glissant du premier ordre est de forcer le système à rester sur la surface de glissement, soit

$S = 0$. Pour le cas de la commande par régime glissant d'ordre supérieur, le problème posé est de forcer le système à évoluer sur la surface et à maintenir S ainsi que ses $(p - 1)$ premières dérivées successives à zéro.

$$S = \dot{S} = \ddot{S} = \dots = S^{(p-1)} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Où p désigne l'ordre du mode glissant considéré, et il fixe le degré de douceur du système.

Ainsi, une commande d'ordre p est notée par $p - glissante$.

III.3 Glissement réel et convergence en temps fini

Jusqu'à présent, nous avons considéré seulement les modes glissants idéaux avec le maintien exact de la contrainte $S = 0$. Les organes de commande commutent à une fréquence infinie et le régime glissant idéal est interprété comme les trajectoires limites lorsque les imperfections de ces organes sont inexistantes. Un exemple d'imperfection de commutation est celui de la commutation discrète causée par des mesures discrètes.

En réalité, ces imperfections existent et sont prises en compte. La contrainte $S = 0$ est maintenue seulement de façon approximative, on parle dans ce cas du mode glissant réel.

Considérons ε une mesure de ces imperfections de commutation. Ainsi la précision du glissement de la technique du mode glissant peut être décrite par une précision de glissement asymptotique avec $\varepsilon \rightarrow 0$ [28].

III.4 Degré relatif

La notion de degré relatif (DR) a été introduite dans un premier temps dans le cas seulement des systèmes autonomes, par la suite, l'application a été faite dans le cas non autonome. Cette notion est un concept fondamental qui a joué un grand rôle récemment dans la compréhension de la commande de la dynamique non linéaire.

Définition [29]

Le Degré Relatif d'un système, est le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie, par rapport au temps, pour faire apparaître l'entrée de la commande de manière explicite. Il est calculé en déterminant les dérivées successives de S :

a) Degré Relatif $r = 1$, i.e.. $\frac{\partial}{\partial U} \dot{S} \neq 0$

b) Degré Relatif $r > 1$, i.e.. $\frac{\partial}{\partial U} S^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$) et $\frac{\partial}{\partial U} S^r \neq 0$

Dans le cas (a), le problème de la commande est résolu par la loi de mode glissant du premier ordre, cependant une loi 2-glissante peut être utilisée afin d'éviter le phénomène de chattering.

Pour le cas (b), on peut choisir la technique p – glissante (avec $p \geq r$).

III.5 Principe

Le régime glissant standard est basé sur l'annulation de la dérivée première par rapport au temps de la surface de glissement soit en \dot{S} . Un régime glissant d'ordre p (noté p – glissante) agit sur les $p - 1$ premières dérivées successives de la variable de glissement $S^{(p-1)}$. On aura ainsi une précision d'ordre p sur la convergence du système. Dans ce sens, les techniques de commande par régime glissant d'ordre p jouent le même rôle dans la théorie des modes glissants que, la méthode de Runge-Kutta dans l'intégration numérique [29].

Le calcul des dérivées successives de la variable de glissement s le long d'une trajectoire d'un système discontinu, aboutit pour un ordre donné, à une discontinuité, il est alors possible de classifier les régimes glissants d'ordre supérieur par le numéro de p dérivées successives de la surface S^p . Ce numéro est appelé l'ordre de glissement, et il fixe le degré de douceur du système. Le $p^{\text{ème}}$ ordre du système est déterminé par l'équation :

$$S = \dot{S} = \ddot{S} = \dots = S^{(p-1)} \quad (\text{III. 3})$$

La précédente équation impose une condition " p – dimensionnelle" sur les états du système, l'un des problèmes majeurs pour l'implantation des algorithmes p – glissant est que le nombre d'informations nécessaires augmente avec l'ordre du régime glissant. Par exemple, si on utilise un algorithme de glissement d'ordre 3 par rapport à S , on aura besoin de la connaissance de S, \dot{S} et \ddot{S} . Une bonne solution à ce problème sont les modes glissants du second ordre, Twisting et Super Twisting, qui n'ont besoin que de S comme information d'entrée.

Le régime glissant d'ordre supérieur le plus utilisé dans la littérature est la loi 2-glissante, mais il existe des exemples de modes glissants d'ordre 3.

III.6 Commande par régime glissant d'ordre supérieur

Le mode glissant d'ordre p agit sur les $p - 1$ premières dérivées successives de la variable de glissement S^{p-1} . Le $p^{\text{ième}}$ ordre du système est décrit par l'équation (III. 3)

La caractéristique principale de cette stratégie, est que la partie discontinue (la fonction signe) est appliquée à la dérivée par rapport au temps de la commande, soit \dot{U} . Le but principal de la commande \dot{U} est d'obtenir un régime glissant d'ordre p sur la surface de glissement.

La prise en compte des dérivées de la surface dans le calcul de la commande, fait que le système atteint la surface plus doucement. Le calcul de l'entrée de système $U = \int \dot{U}$ rend la commande continue, évitant le phénomène de chattering.

III.6.1 Commande par mode glissant d'ordre deux

Plusieurs algorithmes existent dans cette loi de commande, l'objectif de ces algorithmes est de générer un régime glissant d'ordre 2 sur la fonction contrainte ou surface de glissement $S = 0$ et d'aboutir en temps fini, à satisfaire $S = \dot{S} = 0$.

La Figure III.1 fait apparaître la trajectoire de convergence du système vers la surface S .

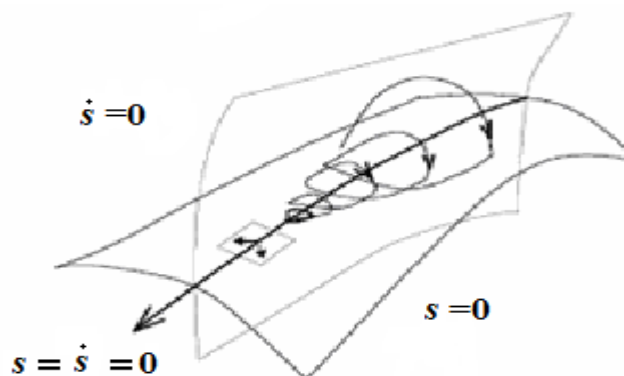


Figure III.1 : Mode glissant d'ordre deux

Afin de détailler les algorithmes en régime glissant d'ordre deux, nous considérons le système décrit par l'équation (III. 1).

Où : x représente le vecteur d'état, U la commande, S la surface de glissement, f sont des fonctions suffisamment continues et différentiables.

Si nous dérivons deux fois la surface de glissement S , nous avons l'expression suivante :

La dérivée de S est :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} S(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} S(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} S(t, x) \frac{\partial x}{\partial t} \\ \dot{S} &= \frac{\partial}{\partial t} S(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} S(t, x) f(t, x, U)\end{aligned}$$

La dérivée seconde de S est:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t, x, U) &= \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{S}(t, x, U) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} \dot{S}(t, x, U) \frac{\partial U}{\partial t} \\ \ddot{S} &= \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{S}(t, x, U) f(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial U} \dot{S}(t, x, U) \dot{U}\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}h(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{S}(t, x, U) f(t, x, U) \\ g(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \dot{S}(t, x, U)\end{aligned}$$

Le système est maintenant constitué des surfaces de glissement Set \dot{S} :

Soit :

$$\begin{cases} y_1 = S \\ y_2 = \dot{S} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

On considère le cas où le degré relatif est un. Le problème d'une commande d'ordre deux est équivalent au problème de stabilisation en temps fini du système auxiliaire du second ordre suivant [22] :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = h(t, x) + g(t, x) \dot{U} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Où $h(t, x), g(t, x)$ sont des fonctions bornées :

$$\emptyset > 0, |h| < \emptyset, 0 < \Gamma_m \leq g \leq \Gamma_M.$$

Plusieurs algorithmes proposant des solutions au problème (III.5) ont été présentés dans la littérature [24-25]. Dans notre cas, nous décrivons la loi « 2-glissante » [23] et l'algorithme de Twisting et Super Twisting [25], l'algorithme de sous optimal [28].

III.6.1.1 Loi 2-glissante

Cette technique de commande, est une extension de la loi en régime glissant d'ordre un. Elle est formée de deux parties :

$$U = \int u_{eq} - k \int \text{sign} s_y \quad (\text{III.6})$$

Où :

$\int \text{sign} s_y$: Composée par l'intégrale de la fonction signe de la nouvelle surface de glissement.

s_y : La nouvelle surface de glissement qui sera définie par la suite.

$\int u_{eq}$: Conçue en utilisant la méthode de la commande équivalente pour la nouvelle surface de glissement.

Nous allons maintenant décrire la méthodologie de conception de cette technique de commande.

a) Surface de glissement

La surface de glissement choisie est :

$$S = y_1 = Cx \quad (\text{III.7})$$

Sa dérivée est :

$$\dot{S} = y_2 = C\dot{x} \quad (\text{III.8})$$

Le nouveau système (III.5) est en fonction de y_1 et y_2 . Soit la nouvelle surface de glissement s_y suivante :

$$S_y = \dot{S} + \eta S = y_2 + \eta y_1 \quad (\text{III.9})$$

Où η est une constante positive.

Avec cette technique, la convergence du système est régie par la surface de glissement S et par sa dérivée \dot{S} .

b) Commande équivalente

La commande équivalente est la solution de l'équation suivante :

$$\dot{S}_y = \ddot{S} + \eta\dot{S} = 0 \quad (\text{III.10})$$

D'où :

$$C\ddot{x} + \eta\dot{S} = 0 \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, U) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, U)\dot{x} + \frac{\partial}{\partial U} f(t, x, U)\dot{U} \quad (\text{III.12})$$

Finalement la commande équivalente s'exprime par :

$$\dot{u}_{eq} = -\frac{1}{C \frac{\partial}{\partial U} f(t, x, U)} \left[C \frac{\partial}{\partial t} f(t, x, U) + C \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, U)\dot{x} + \eta\dot{S} \right] \quad (\text{III.13})$$

Cet algorithme permet l'élimination du phénomène de réticence grâce à la discontinuité (la fonction signe) qui se trouve à l'intérieur de la fonction d'intégration. Une autre conséquence est la convergence plus douce vers la surface de glissement, car la commande prend en compte la dérivée de la surface. L'inconvénient de cette loi, est qu'elle a besoin de la connaissance de la dérivée de la surface de glissement. Dans la pratique, cela veut dire qu'il faudra mettre plus de capteurs afin de mesurer les états supplémentaires ou implémenter des observateurs d'états.

III.6.1.2 Algorithme du Twisting

Cet algorithme a été le premier contrôleur d'ordre supérieur à être défini. Il est appelé Twisting en raison de sa trajectoire de convergence en temps fini vers l'origine du plan de phase (S, \dot{S}) , avec un nombre infini de rotations (Figure.III.2). Son principe de fonctionnement est la commutation de l'amplitude de la commande entre les deux constantes V_m, V_M . de telle façon que l'abscisse et l'ordonnée soient croisées de plus en plus vers l'origine [30].

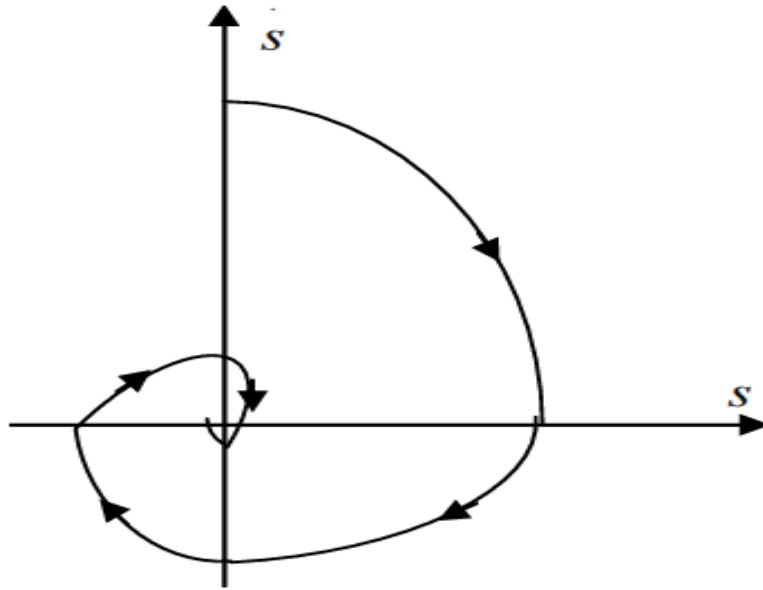


Figure III.2 convergence en temps fini de L'algorithme Twisting.

L'algorithme de Twisting est donné par :

$$\dot{U} = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > 1 \\ -V_m \operatorname{sing}(S) & \text{si } S\dot{S} \leq 0, |U| \leq 1 \\ -V_M \operatorname{sign}(S) & \text{si } S\dot{S} > 0, |U| \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

Les conditions de convergence en temps fini sur la surface s sont :

$$\begin{aligned} V_m &> V_M \\ V_m &> \frac{4\Gamma_M}{s_0} \\ V_m &> \frac{\phi}{\Gamma_m} \\ \Gamma_m V_m - \phi &> \Gamma_M V_m + \phi \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

III.6.1.3 L'algorithme de Super Twisting

La convergence de cet algorithme est régie aussi par les rotations autour de l'origine du diagramme de phase. Cette trajectoire est illustrée par la (figure III.3). La loi de commande de Super Twisting $U(t)$ est composée de deux parties. La première est définie par sa dérivée

par rapport au temps (U_1), tandis que la deuxième est donnée par la fonction continue de la surface de glissement (U_2) :

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{III.16})$$

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > 1 \\ -W \operatorname{sign}(S) & \text{si } |U| \leq 1 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

$$U_2 = \begin{cases} -\lambda_1 |S_0|^{\rho_1} \operatorname{sign}(S) & \text{si } |S| > S_0 \\ -\lambda_1 |S|^{\rho_1} \operatorname{sign}(S) & \text{si } |S| \leq S_0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

$$U(t) = \int \dot{U}_1(t) dt + U_2(t) \quad (\text{III.19})$$

Les conditions de convergence en temps fini sont :

$$W > \frac{\phi}{\Gamma_m}$$

$$\lambda_1^2 \geq \frac{4\phi \Gamma_M (W + \phi)}{\Gamma_m^2 \Gamma_M (W + \phi)} \quad (\text{III.20})$$

$$0 < \rho_1 \leq 0.5$$

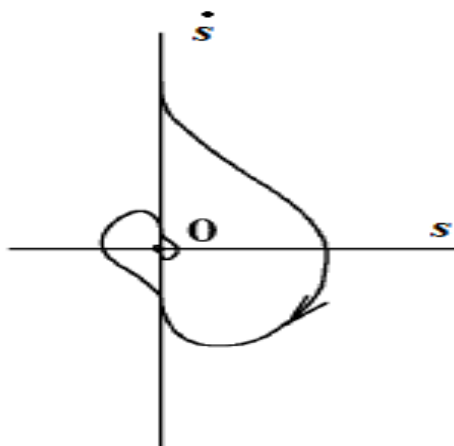


Figure III.3 Convergence en temps fini de l'algorithme Super Twisting.

La technique de l'algorithme de Super Twisting est très robuste, et elle n'a pas besoin d'information sur la dérivée de S . Grâce à cette caractéristique, le nombre de capteurs du système est réduit ainsi que le temps de calcul de cette loi.

III.6.1.4 Algorithme sous optimal

Cette loi de commande développée pour des systèmes à degré relatif deux est très proche de la commande « bang-bang », elle permet une convergence en l'origine du plan de phase (S, \dot{S}) en un temps minimal pour un double intégrateur. La loi de commande est définie par [28] :

$$U(t) = -\lambda(t)\beta_M \operatorname{sgn}[y_1(t) - 0.5y_1(t_M)] \quad (\text{III.21})$$

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda^* & \text{si } [y_1(t) - 0.5y_1(t_M)][y_1(t_M) - y_1(t)] > 0 \\ 1 & \text{si } [y_1(t) - 0.5y_1(t_M)][y_1(t_M) - y_1(t)] \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

$y_1(t_M)$ représente la valeur de $y_1(t)$ au dernier instant pour lequel $y_2(t) = 0$.

Les conditions suffisantes de convergence en temps fini sont :

$$\lambda^* \in]0,1] \cap]0,3 \frac{K_m}{K_M} [\quad (\text{III.23})$$

$$\text{et } \beta_M > \max\left(\frac{\psi}{\lambda^* K_m}, 4 \frac{\psi}{3K_m - \lambda^* K_M}\right)$$

Le temps de convergence maximal est :

$$T_{\max_{sopt}} \leq t_{int} + \Theta_{sopt} \frac{1}{1-\theta_{sopt}} \sqrt{|y_{1\ int}|} \quad (\text{III.24})$$

Avec $y_{1\ int}$ et t_{int} définis comme pour l'algorithme du Twisting,

$$\Theta_{sopt} = \frac{(3K_m - \lambda^* K_M)\beta_M}{(K_m \beta_M - \psi)\sqrt{\lambda^* K_m \beta_M + \psi}} \quad (\text{III.25})$$

$$\Theta_{sopt} = \sqrt{\frac{(\lambda^* K_M - K_m)\beta_M + 2\psi}{2(K_m \beta_M - \psi)}}$$

La non nécessité de connaître y_2 représente un avantage, mais, l'inconvénient de cet algorithme est qu'il nécessite relativement souvent une estimation de la dernière valeur singulière de y_1 c'est -à-dire de $(y_{1 \text{ int}} = y_1(t_{1 \text{ int}}) = y_1(t)|_{y_2=0})$.

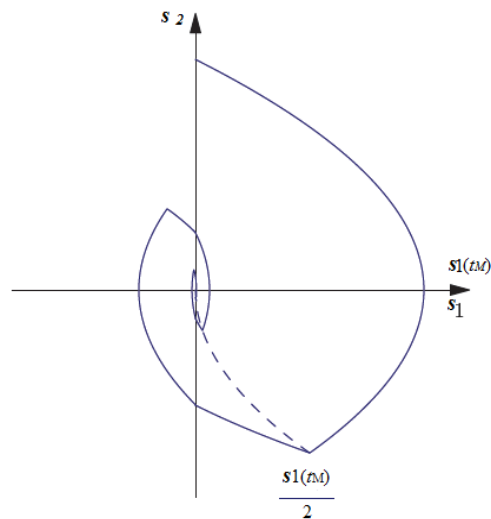


Figure III.4 convergence en temps fini de l'algorithme sous-optimal.

III.7 Suppression de la réticence

Le principal avantage d'un algorithme d'ordre deux est qu'il permet d'éliminer le phénomène de réticence. En effet, dans la commande d'ordre deux, la partie discontinue (la fonction signe) est appliquée à la dérivée par rapport au temps de la commande (\dot{U}). De cette façon, l'entrée du système $U = \int \dot{U}$ est maintenue continue et permet d'éliminer la réticence.

D'autre part, la prise en compte de la dérivée de la surface de glissement dans le calcul de la commande, le système atteint la surface S plus doucement.

III.8 Conclusion

La commande par régime glissant est une technique très utilisée pour la commande des robots, car elle garantit une certaine robustesse devant les incertitudes paramétriques et les perturbations. Malheureusement, elle a le désavantage de broutement.

Pour remédier à ce problème, nous proposons l'utilisation de la technique récente de commande par régime glissant d'ordre supérieur.

Pour les HOSM, la commande discontinue agit sur la plus haute dérivée de la fonction de commutation pour générer un régime glissant au lieu de sa première dérivée comme dans le cas classique. Un algorithme glissant d'ordre r permettra une convergence en temps fini.

Dans ce chapitre, nous avons montré les différentes techniques de la commande par mode glissant d'ordre supérieur, et nous avons donné les principaux algorithmes de commande par mode glissant d'ordre 2, tels que l'algorithme de Twisting et celui de Super Twisting qui sont les plus utilisés dans la littérature.

Les avantages de la commande par mode glissant d'ordre supérieur sont :

- Préservation des caractéristiques de robustesse de la loi glissante standard.
- L'élimination de la réticence, de fait que la partie discontinue agit sur les dérivées d'ordre supérieur de la variable de glissement.

IV.1 Introduction

Dans la commande par mode glissant standard, la commutation de la commande est supposée prendre lieu à une fréquence infinie et parce que ceci n'est pas possible, il se crée un phénomène de broutement ou réticence (chatter en anglais) dans le voisinage de la surface de commutation, c'est-à-dire des oscillations de hautes fréquences qui peuvent non seulement user les organes de commande, mais aussi exciter les dynamiques hautes fréquences pouvant porter atteinte au système physique. Ce phénomène du broutement est donc hautement indésirable. Pour l'atténuer, diverses méthodes sont utilisées.

Dans ce travail, afin d'atténuer le broutement, le choix s'est porté sur le mode glissant d'ordre 2 qui est l'Algorithme de Super Twisting.

IV.2 Stratégie de la commande par mode glissant classique

La particularité de la commande VSC générant un régime glissant classique est sa structure variable de commande discontinue, alors que dans d'autres systèmes, les structures de commande sont fixées. Le mode glissant prend lieu sur la surface de glissement ou de commutation.

En mode glissant, le système demeure insensible aux variations paramétriques, aux incertitudes du modèle et aux perturbations de recouvrement. Le principal désavantage de la commande en régime glissant est le phénomène de chattering.

IV.2.1 Commande du robot manipulateur à deux axes

Dans la section précédente les équations de Lagrange nous a donné un système multi variable non linéaire donné par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{IV.1})$$

Où :

$M(q)$: Matrice d'inertie du robot.

$C(q, \dot{q})$: Vecteurs des forces de Coriolis et de centrifuge.

$G(q)$: Vecteurs des forces de gravité.

$\tau = U$: Vecteur des couples généralisés (vecteur des couples appliqués par les actionneurs sur chaque articulation).

q : Vecteur des variables articulaires généralisées.

Supposant que $M(q)$ est régulière, écrivons alors l'équation différentielle sous forme d'équation d'état.

Posant le changement de variable suivant :

$$X^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2] \quad (\text{IV.2})$$

$x_1 = q_1$: Position de segment 1.

$x_2 = q_2$: Position de segment 2.

$x_3 = \dot{q}_1$: Vitesse du segment 1.

$x_4 = \dot{q}_2$: Vitesse du segment 2.

Regroupant les positions dans un vecteur P et les vitesses dans un vecteur V on aura le système d'état suivant :

$$\dot{P} = V \quad (\text{IV.3})$$

$$\dot{V} = M^{-1}(P)[-G(P) - C(P, V)V] + M^{-1}(P)U$$

Posant : $f(P, V) = M^{-1}(P)[-G(P) - C(P, V)V]$

$g(p) = M^{-1}(P)$

Le vecteur d'état que l'on désire obtenir étant (P_d, V_d) avec initialisation (P_0, V_0) , notre objectif est donc trouver une loi de commande $U(P, V)$ qui permet de configurer le système dans une position désirée et une vitesse désirée.

Si on pose :

$$\begin{cases} E_1(t) = P(t) - P_d(t) \\ E_2(t) = V(t) - V_d(t) \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Où $E_1(t) = [e_1(t) \ e_2(t)]^T$ et $E_2(t) = [e_3(t) \ e_4(t)]^T$ sont respectivement l'erreur de position et de vitesse.

Où

$$e_1(t) = x_1(t) - x_{1d}(t)$$

Et

$$e_3(t) = x_3(t) - x_{3d}(t)$$

$$e_2(t) = x_2(t) - x_{2d}(t)$$

$$e_4(t) = x_4(t) - x_{4d}(t)$$

Le problème revient donc à annuler cette erreur pour ce la on définit un nouveau système d'état

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 &= E_2 \\ \dot{E}_2 &= f(E_1 + P_d, E_2 + V_d) + M^{-1}(E_1 + P_d)U - \dot{V}_d\end{aligned}\quad (IV.5)$$

Posant : $f(P, V) = M^{-1}(P)[-G(P) - C(P, V)V]$

$g(P) = M^{-1}(P)$.

Pour des raisons de stabilité la surface de glissement est choisie comme étant des hyperplans linéaires passant par l'origine du plan de phase.

La surface de glissement est donnée comme suit :

$$\dot{S}(e) = \lambda e + \dot{e} = 0 \quad (IV.6)$$

Après calcul, le modèle d'état du robot s'écrit comme suit

$$\dot{x} = f(x) + g(x)U \quad (IV.7)$$

La commande est donnée par :

$$U = u_{eq} + u_n \quad (IV.8)$$

Avec :

$$u_{eq} = - \left[\frac{\partial S}{\partial x} g(x) \right]^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} f(x) \quad (IV.9)$$

$$u_n = -k \text{sign}(s) \quad (IV.10)$$

IV.3 Simulation et interprétation

L'illustration du broutement est présentée dans la Figure (IV.1) pour une loi glissante classique appliquée sur un robot manipulateur à deux axes. Cette réticence existe en dépit de la forme de la commande discontinue.

L'erreur de position pour les deux articulations ainsi que les commandes y sont représentés. Il est noté qu'après stabilisation, une erreur en régime permanent existe et est différente de zéro.

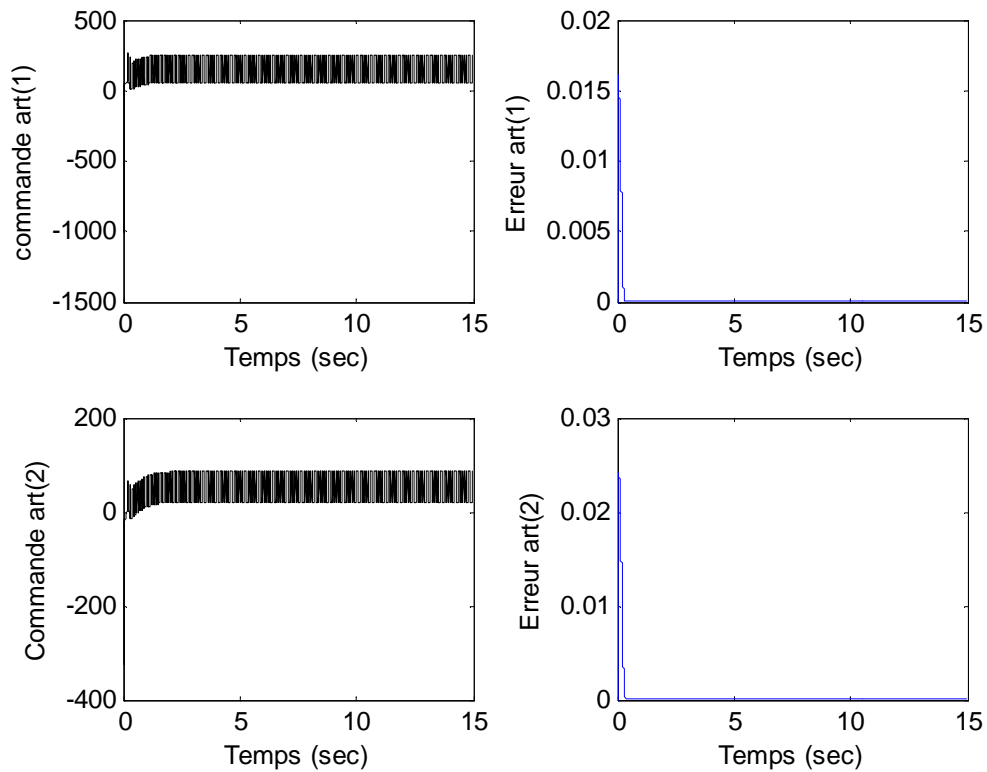


Figure IV.1 Evolution des commandes et des erreurs de position (articulation 1 et articulation 2).

IV.4 Stratégie de la commande par l'Algorithme de Super Twisting

Cette loi de commande se compose de deux parties, une partie discontinue à laquelle s'ajoute une autre continue.

Elle est donnée par :

$$U = U_1 + U_2 \quad (\text{IV.11})$$

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} -U & \text{si } |U| > 1 \\ -W \operatorname{sign}(S) & \text{si } |U| \leq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

$$U_2 = \begin{cases} -\lambda_1 |S_0|^{\rho_1} \text{sign}(S) & \text{si } |S| > S_0 \\ -\lambda_1 |S|^{\rho_1} \text{sign}(S) & \text{si } |S| \leq S_0 \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

$$U(t) = \int \dot{U}_1(t) dt + U_2(t) \quad (\text{IV.14})$$

Les conditions de convergence en temps fini sont :

$$\begin{aligned} W &> \frac{\emptyset}{\Gamma_m} \\ \lambda_1^2 &\geq \frac{4\emptyset \Gamma_M(W+\emptyset)}{\Gamma_m^2 \Gamma_M(W+\emptyset)} \\ 0 < \rho_1 &\leq 0.5 \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

IV.5 Simulation et interprétation

L'objectif principal est la poursuite de trajectoire de référence :

$$x(t) = \frac{\pi}{6} \exp(-t) \quad (\text{IV.16})$$

Pour tester la robustesse de la stratégie de la commande étudiée lors de mouvements du robot en présence de perturbations, nous avons introduit une variation paramétrique en multipliant la matrice d'inertie par 100. Les réponses sont données sur les figures ci-dessous.

A travers ces résultats, on peut constater que le phénomène de broutement est complètement disparu. Pour l'articulation 1, l'erreur de position est de l'ordre de 10^{-7} rd, l'erreur de vitesse est de l'ordre de 10^{-6} rd, la surface et sa dérivée convergent vers zéro.

D'après la Figure (IV.2), on remarque que la commande est lisse (continue), et d'après la Figure (IV.3), on voit clairement que le phénomène de réticence est complètement disparu en régime permanent.

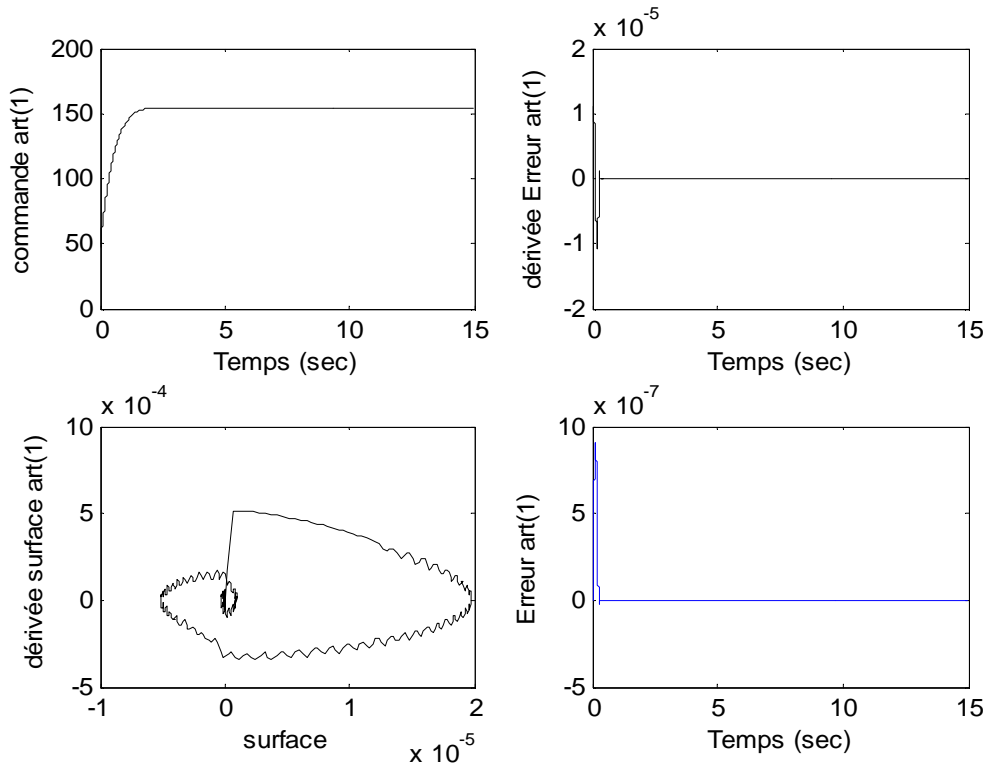


Figure IV.2 Evolution de la commande, de l’erreur de position, de l’erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 1).

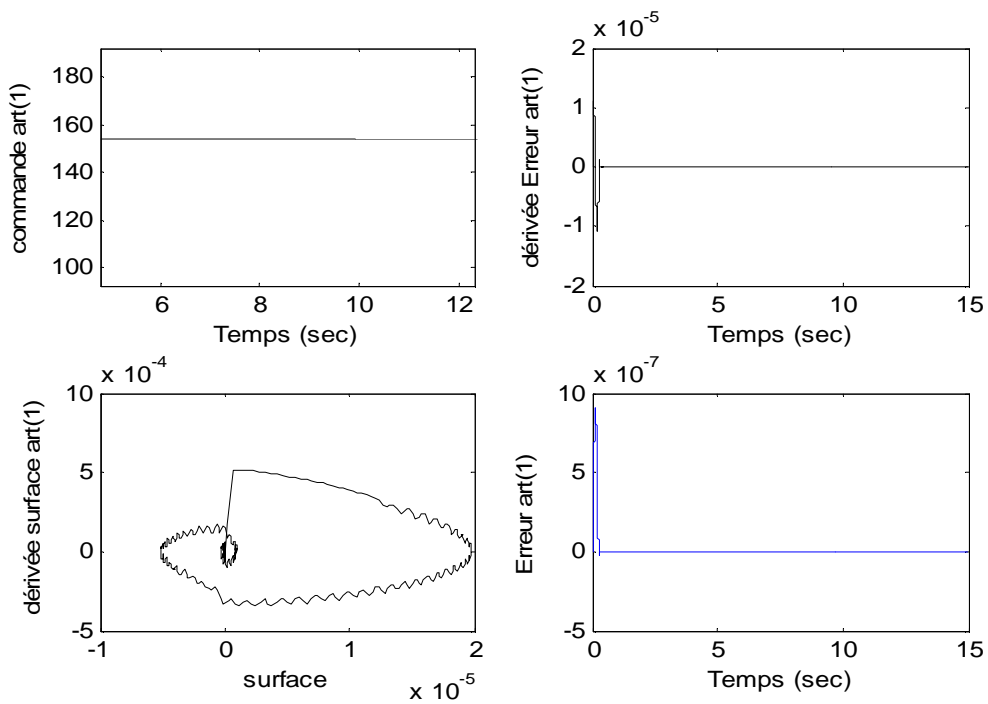


Figure IV.3 : Evolution de la commande, de l’erreur de position, de l’erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 1).

Après 2 secondes, nous avons introduit une perturbation extérieure avec une variation paramétrique. D'après la Figure(IV.4), on voit le rejet rapide des perturbations et le comportement de la commande pour les compenser.

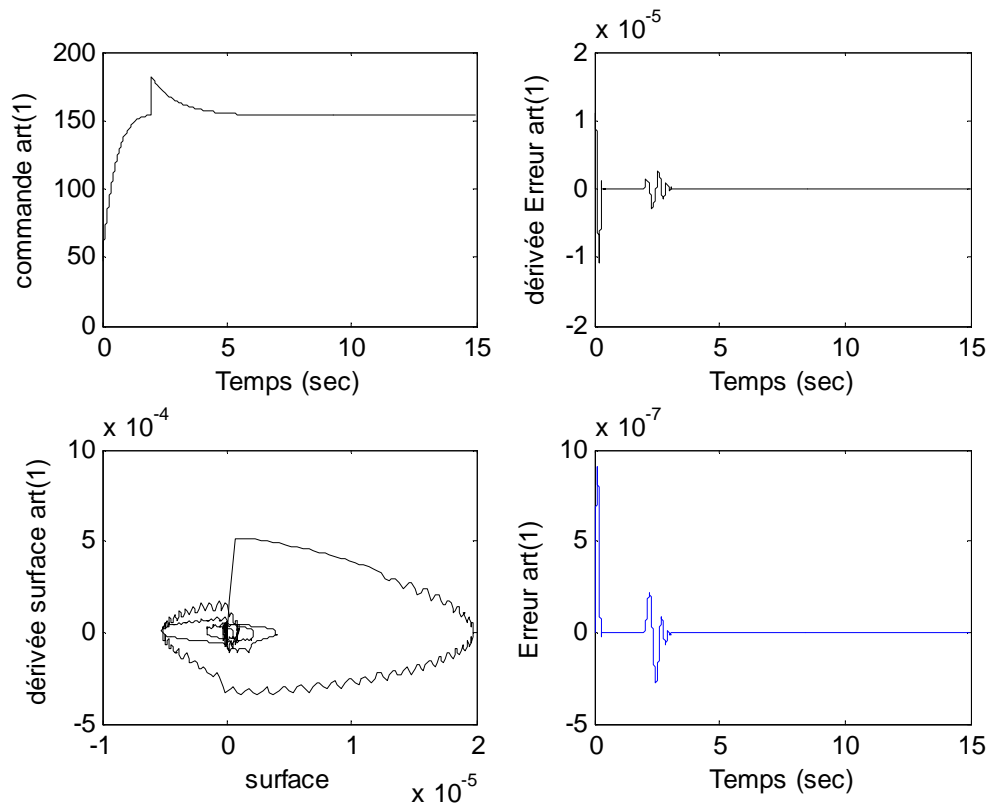


Figure IV.4 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase avec perturbation (articulation 1).

Les Figures (IV.5) et (IV.6) représentent l'erreur de position, l'erreur de vitesse, le plan de phase s/\dot{s} ainsi que la commande pour l'articulation 2 sans perturbation. La précision de l'erreur de position est de l'ordre de $10^{-5} rd$, celle de l'erreur de vitesse est de l'ordre de $10^{-7} rd$ avec des dépassements faibles. Le temps de réponse est faible. Le phénomène de chattering est complètement éliminé en régime permanent. La surface et sa dérivée convergent vers zéro.

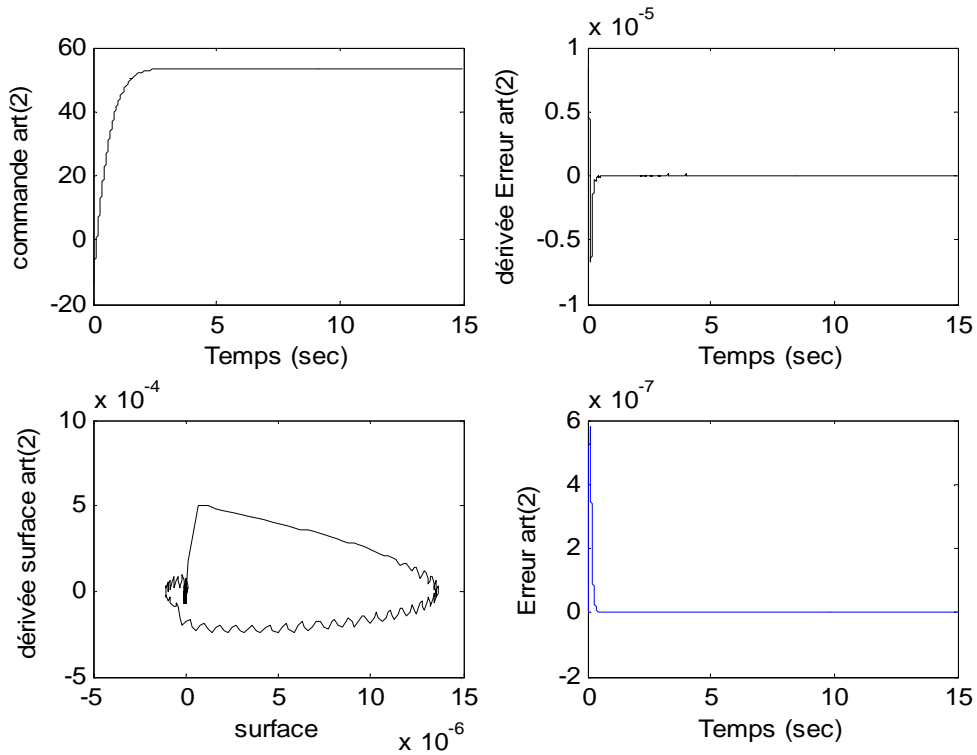


Figure IV.5 : Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 2).

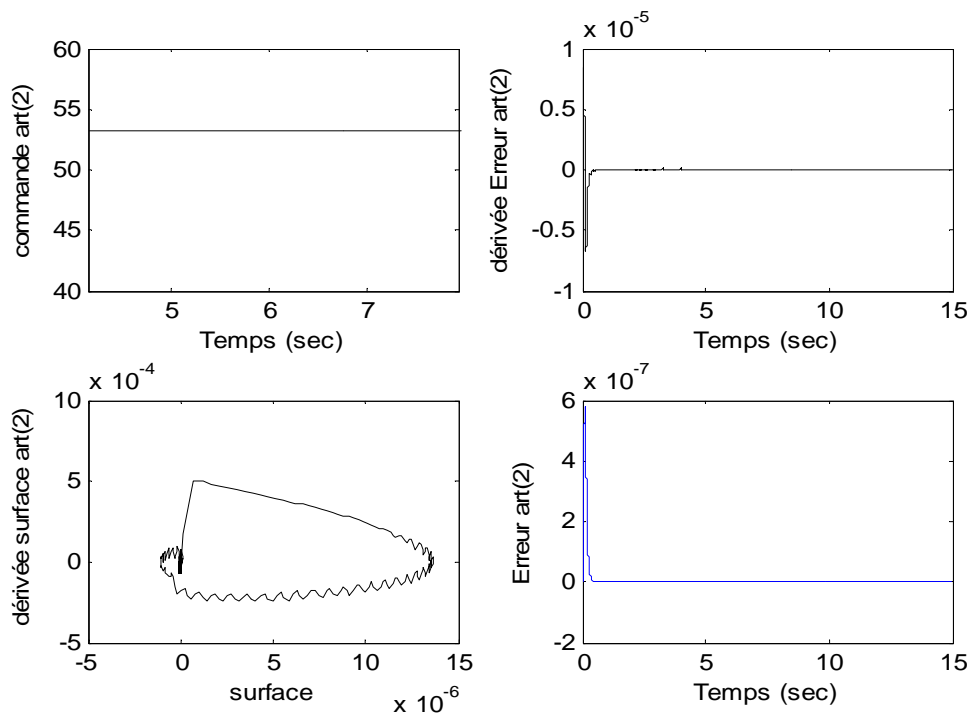


Figure IV.6 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase sans perturbation (articulation 2).

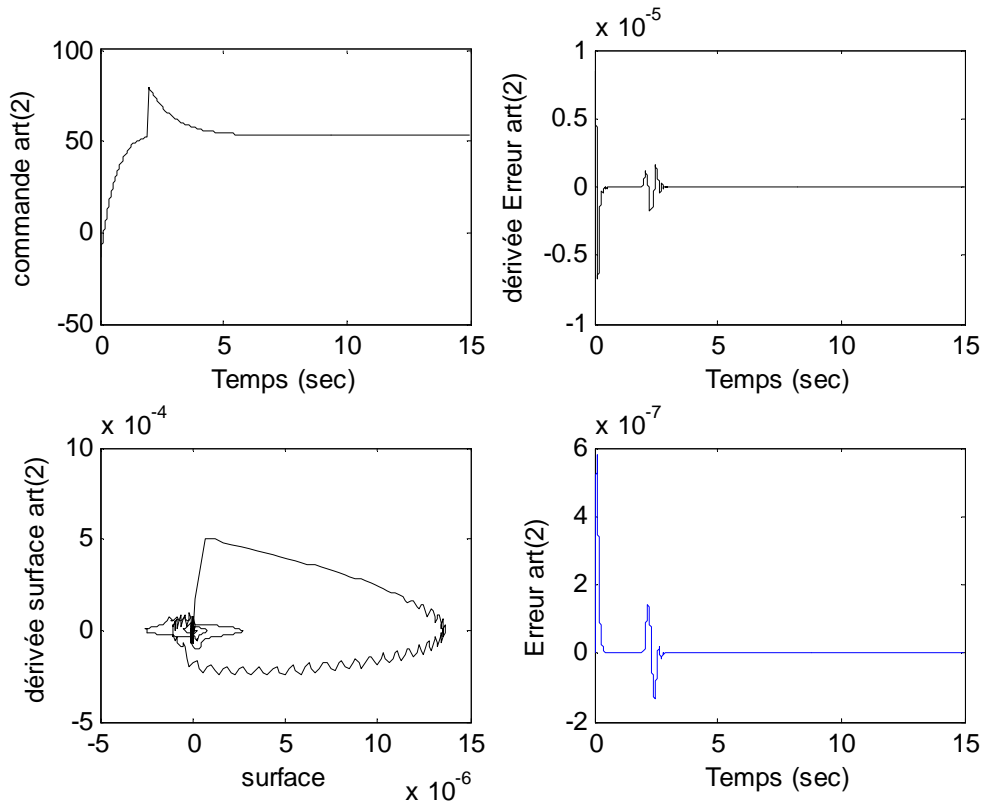


Figure IV.7 Evolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase avec perturbation (articulation 2).

La Figure (IV.7) représente l'évolution de la commande, de l'erreur de position, de l'erreur de vitesse et de diagramme de phase pour l'articulation 2 avec perturbation. On constate le rejet rapide des perturbations. Il doit être noté que les paramètres de réglage demeurent inchangés.

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons met en évidence le phénomène de chattering introduit par le mode glissant classique, et nous avons testé l'efficacité de la stratégie de commande étudiée qui est l'algorithme de Super Twisting par une série de simulations. Cette commande est appliquée au contrôle dynamique d'un bras manipulateur à deux axes.

Il est important de noter que les résultats de simulations montrent des qualités de poursuite très satisfaisantes et que la commande proposée est très efficace dans l'élimination de phénomène de broutement.

L'objectif de notre projet consiste à proposer une solution résidant dans l'application de nouvelles techniques de commandes qui constituent une alternative aux commandes classiques, généralement employées en automatique, cette solution qui doit être insensible aux perturbations externes, aux non linéarités et aux variations paramétriques, par le recours à des algorithmes robustes pour différents types d'asservissements, et principalement pour un robot manipulateur à deux degrés de liberté. Cette technique de commande robuste est une classe particulière des systèmes de commande, appelée commande à régime glissant. Notre contribution se situe à différents niveaux.

Pour y parvenir, nous sommes amenés d'abord à connaître la constitution de ce système et à comprendre son fonctionnement. La modélisation du système robot manipulateur à deux degrés de liberté et en particulier la modélisation dynamique était nécessaire afin de synthétiser les lois de commandes par mode glissant d'ordre un et d'ordre deux proposées dans notre travail.

Dans le deuxième chapitre nous nous sommes intéressés de plus près à la commande par mode de glissement d'ordre un basée sur les systèmes à structure variable ; cette méthodologie a été présentée en trois étapes, la première concerne le choix des surfaces de glissement. Dans la deuxième étape nous avons établi la condition d'existence et de convergence des régimes glissants à partir de la forme directe de commutation et la fonction de Lyapunov. La troisième étape consiste en la détermination de la commande qui attire la variable à contrôler vers la surface puis vers l'origine du plan de phase sous la condition de convergence établie. Nous avons évoqué le phénomène de chattering qui caractérise ce type de commande, des extensions méthodologiques en vue de réduire ce phénomène ont été également étudiées dans cette dernière partie. L'une d'entre elles est d'utiliser des fonctions sigmoïdes, telle que la fonction de saturation ; toutes ces commandes permettent effectivement d'atténuer la réticence, mais la précision, le temps de réponse, ainsi que la robustesse de la commande sont dégradés.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié la commande par mode glissant d'ordre supérieur qui est une autre solution plus efficace pour résoudre le problème de réticence, elle permet de réduire la réticence tout en conservant les propriétés de robustesse et de la précision de la loi glissante d'ordre un. Nous avons étudié plusieurs algorithmes glissants d'ordre deux et nous avons basé sur l'algorithme de Super Twisting qui est utilisé dans notre application.

Dans le chapitre quatre nous avons passé à l'application de la commande par mode glissant classique pour illustrer le problème de broutement et à l'application de la commande par mode glissant d'ordre deux pour éviter le phénomène de chattering. Nous avons effectué plusieurs tests par simulations afin de mettre en évidence la robustesse de l'algorithme étudié vis-à-vis des perturbations.

Néanmoins, certains aspects n'ont pas été abordés. En effet, la méthode présentée s'applique aux systèmes à plusieurs degrés de liberté. Mais les performances n'ont pas été vérifiées pour ces derniers. De plus, l'influence de certains phénomènes tels que : les frottements secs et visqueux, la flexibilité (élasticité) des bras du système et les imperfections des actionneurs n'a pas été étudiée.

Nous souhaitons que ce travail apporte aux étudiants autant d'avantage qu'il a été pour nous et qu'il constituera un support pédagogique pour de nouvelles perspectives notamment :

- Commande d'un robot flexible à plusieurs articulations par mode glissant d'ordre supérieur.
- L'implémentation des résultats obtenus sur un robot réel nous fera sans doute découvrir les facettes et les vertus de la commande à structure variable.

[1] **T. C. Kuo, Member, IAENG and Y. J. Huang, Member, IAENG** «Neural Network Global Sliding Mode PIDControl for Robot Manipulators» . WCE 2007, July 2 - 4, 2007, London, U.K.

[2] **Wissama KHALIL, Etienne** « Modélisation, identification et commande des robot » Dombre. Edition : HERMES Science publication 1999.

[3] **M^{elle} BOUKHADRA Dallel, M BAALI Mouhamed** «Contribution à la commande d'un bras manipulateur redondant en utilisant les concepts neuro-flou ».Université des sciences et de Technologie Hourri BOUMEDIENE promotion 2003.

[4] **Fares BOUDJEMA** « Commande par mode de glissement. Application aux convertisseurs électriques». Thèse de Doctorat, université de P. Sabatier 1991.

[5] **UTKIN.V.I** «Sliding modes in control optimisation », Springer-Verlag, 1992.

[6] **SLOTINE. J.J.E** « Sliding controller design for nonlinear systems». Int. Jour. of Cont., 40(2) : 421.434, 1984.

[7]**BühLER.H:**« Réglage par mode de glissement », Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Switzerland, 1986.

[8] **SLOTINE. J.J.E**« Applied Nonlinear Control », Prentice Hall 1991.

[9] **F.HARASHIMA, H.HASHIMOTO, K .MARUYAMA** «Practical robust control of robot arm using variable structure system» proc of IEEE, int,cont, on robotics and automation san francisco, 532-538, 1986.

[10] **RICHARD P.Y, H. CORMERAIS, J. BUISSON,** «A generic design methodology for sliding mode control of switched systems», Nonlinear Analysis 65 (2006) 1751-1772, 0362-546X/\$- see front matter© 2006 Published by Elsevier Ltd.

[11] **ZAHARIEVA.T**« Commande a structure variable appliquée a un moteur synchrone», Thèse pour l'obtention du Diplôme de Recherche de l'INSA de Toulouse, France, 2000.

[12] **NICOLAS.B,** «Contribution à la commande des convertisseurs statiques : définition de lois de commutation à l'aide de la théorie des modes glissants». Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1996.

[13] **M.LARBI Djamel , BOUZIDI Medjeber** « Synthèse de commande glissante discrète appliquée à un robot manipulateur ». Thèse d'ingénieur en automatique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, promotion 2005 .

[14] **M. MAACHA Lamara ,KHALFI Djamila** « Commande à Structure Variable d'un robot à deux degrés de liberté ». Thèse d'Ingénieur en automatique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, promotion 2002 .

[15] **M.KAHIL Nabil M^{elle}.CHEKARI Tassadit** « Commande par Modes Glissants d'ordre Fractionnaire d'un convertisseur DC/DC ». Thèse d'obtention du diplôme du Master en automatique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, promotion 2011.

[16] **Melle. DJEGHALI Nadia** « Commande par Mode Glissant des Systèmes Linéaires a Entrée retardée » Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, promotion 2007.

[17] **A. SI AMMOUR** « Commande par Mode Glissant Classique et Généralisée. Application à un Convertisseur Electrique ». Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou.

[18] **A. SI AMMOUR** « Contribution à la commande par modes glissants d'ordre fractionnaire » Thèse de Doctorat, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou.2011.

[19] **M. HAMERLAIN** « Commande hiérarchisée à modèle de référence et à structure variable d'un robot manipulateur à muscles artificiels » Thèse de doctorat en science automatique et informatique industrielle INSA/DGE, janvier 1993.

[20] **A.PHILIPOV** « Equations différentielle à second membre discontinu » journal de mathématique, tome 51 N^o1 , 1960.

[21] **F. LAHOUZI** « Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application à un pendule inversé » Thèse de Magister, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, promotion 2011.

[22] **G.BARTOULINI, A. FERRARA , A. LEVANTE, and E. USAI** « on second order Sliding Mode controllers » , in variable structure systems, sliding mode and non linear control, series. Verlag 1999.

[23] **JT. S. JIMENZ,** « Contribution à la commande d'un robo sous-marin autonome de type torpille » , Thèse de Doctorat, université Montpellier II , 2004.

[24] **S.V.EMELYANOV, S.K .KOROVIN, L.V .LEVANTOVSKY,** « second order sliding mode in controlling uncertain systems », Soviet Journal of Computer and system Science, pp.63-68,1986.

[25] **A. LEVANT,** « Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control », International Journal of Control, vol. 58, pp.1247-1263,1993.

[28] **F.HAMERLAIN** «stabilisation par modes glissants d'ordre supérieur de système non holonomes : cas de robot mobiles à roues » Thèse de Magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Electronique 2005.

[29] **T. SALGADO JIMENZ** «contribution à la commande d'un robot sous-marin autonome de type torpille» thèse Doctorat de l'université Montpellier II, Le 21décembre2004.

[30] **M. LOVENT, L.LEVANTOVSKY** «Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control »International Journal of Control and systems,1998.

[31] **G. BARTOMONI, A. FERRARA and E.USAI** «Cattering avoidance by second-order sliding mode control»I. EEE Tran, Automat, control,vol43,no2,pp.241-246,1998.

Annexe A

A.1 Modes de fonctionnement

A.1.1 Fonctionnement en mode de régulation

C'est un mode classique, utilisé en industrie, il est caractérisé par l'évolution libre de l'état du système entre un état initial et un état final désirés. Ce type de commande est dénommé commande point à point (point to point : P.T.P).

Le fonctionnement en mode de régulation peut être schématisé par la figure suivante

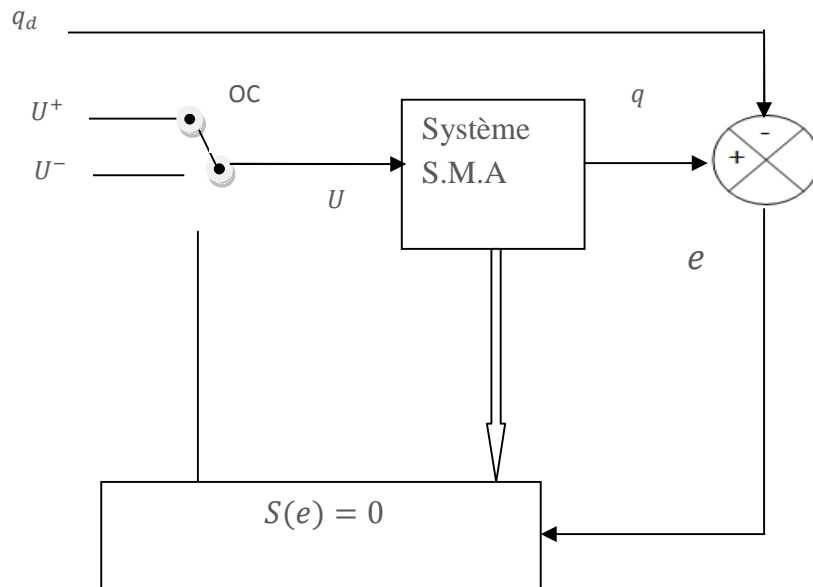


Figure A.1 commande par mode glissant en mode de régulation.

A.1.1.1 organigramme de mise en œuvre de la loi de commande à structure variable en mode de régulation

Le fonctionnement en mode de régulation peut être schématisé par l'organigramme suivant :

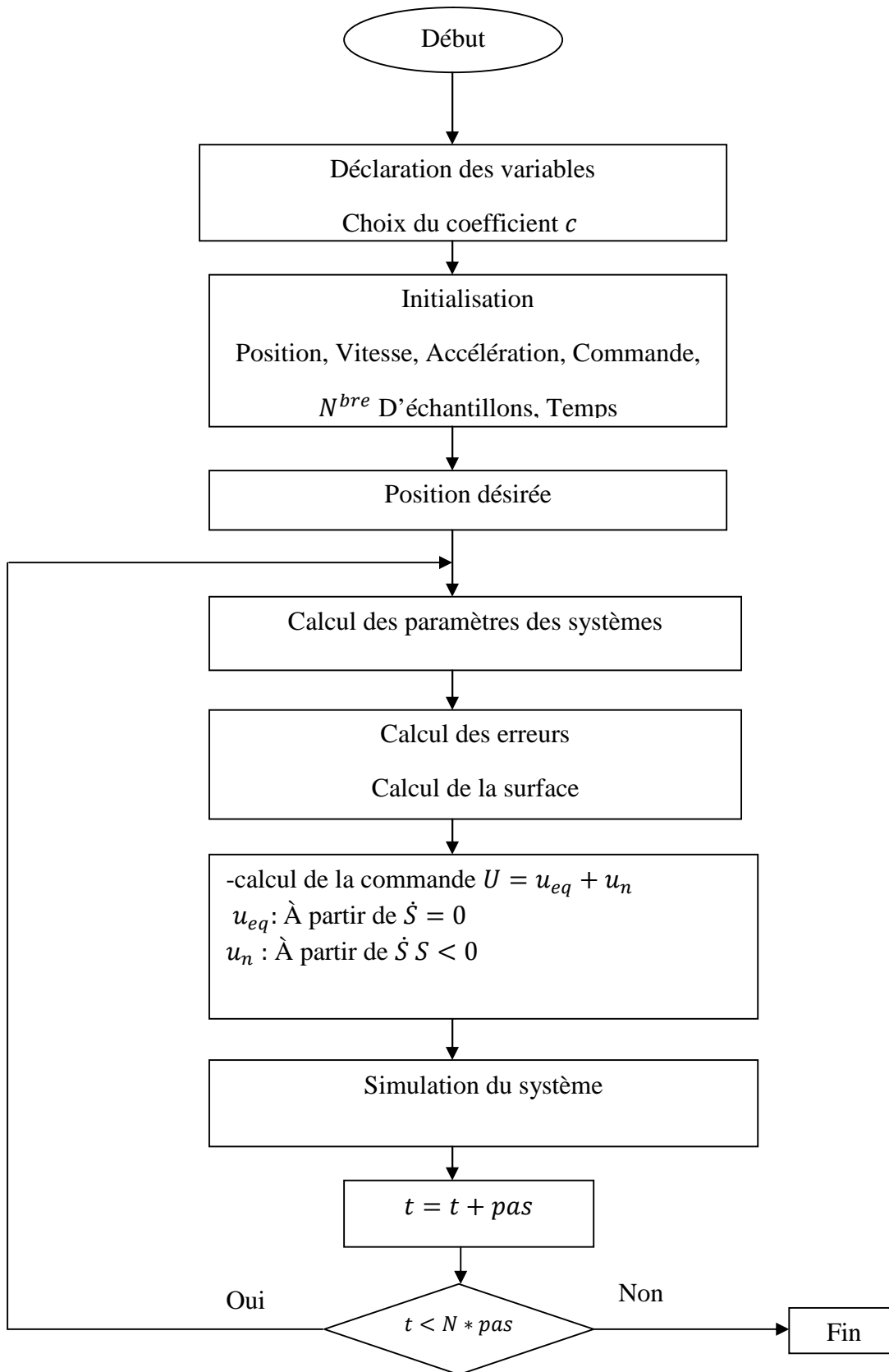


Figure A.2 Organigramme de la commande de S.S.V en mode régulation.

A.1.2 Fonctionnement en mode de poursuite de trajectoire

Le fonctionnement en mode de poursuite de trajectoire est caractérisé par l'évolution de l'état du système entre un état initial et un état final imposés.

Dans ce cas, il est nécessaire que les variables articulaires aient, elles mêmes, les trajectoires imposées correspondant dans l'espace généralisé, ainsi que les lois de mouvement correspondant au moment désiré sur la trajectoire.

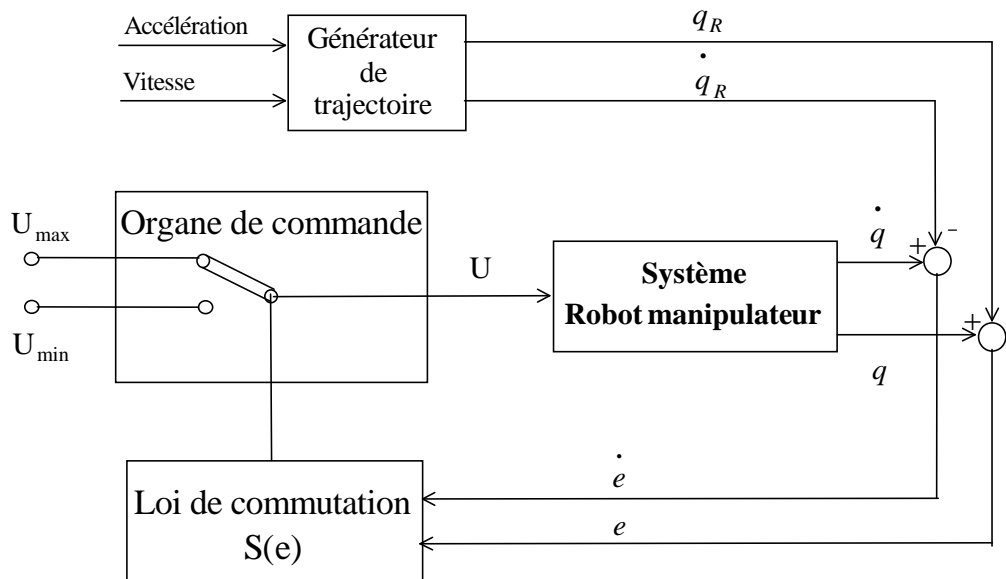
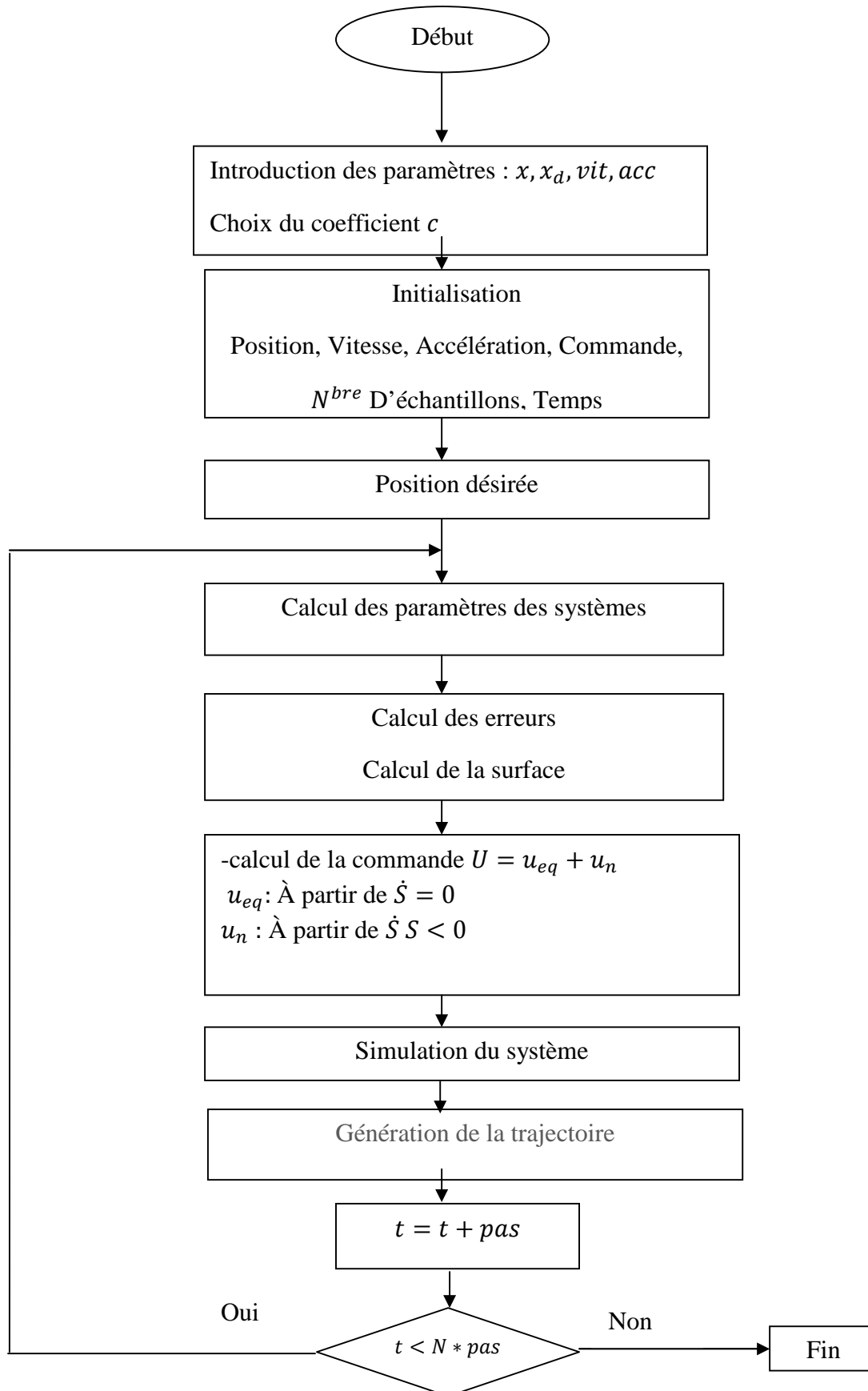


Figure A.3 Schéma de principe d'une commande à structure variable classique pour un système de second ordre en mode poursuite de trajectoire.

Dans l'industrie robotique, l'exécution de certaines tâches comme le soudage à l'arc et l'exécution des tâches dans des milieux encombrés, nous amènent à étudier une commande basée sur les régimes glissant qui permet aux différentes variables du système de suivre des courbes prédéfinies et dépendantes du temps.

A.1.2.1 organigramme de mise en oeuvre de la loi de commande à structure variable en mode de poursuite de trajectoire**Figure A.4** Organigramme de la commande de S.S.V en mode régulation.

Annexe B

B.1 Généralités sur les systèmes non linéaires

B.1.1 Systèmes dynamiques non linéaires

Par définition, un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire (au sens physique) qui ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficient constants autrement dit c'est un système pour lequel le théorème de superposition ne s'applique pas.

Les systèmes physiques sont de nature non linéaires, donc décrits par des équations différentielles non linéaires. Si le domaine de fonctionnement du système est limité et si la non linéarité est douce, le système peut être linéarisé et représenté par un ensemble d'équations différentielles linéaires qui décrivent son comportement dynamique. Dans ce cas on peut lui appliquer les méthodes relativement simples d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires. Par contre, si les non linéarités sont dures et si le système est appelé à fonctionner dans une région très incluant plusieurs points de fonctionnement, il est souvent nécessaire de recourir aux techniques d'analyse et de commande propres aux systèmes non linéaires.

a- présentation des systèmes non linéaires

L'analyse des systèmes est basée en général sur deux types de modèles :

- Un modèle de connaissance où apparaissent les équations de fonctionnement du système ainsi que des variables internes.
- Un modèle de comportement qui établit des relations entre les entrées et les sorties du système à partir des expériences et du comportement observé du système en réponse à des entrées fixées ou tout au moins connues.

Alors que l'obtention du premier type de modèle relève plutôt de la modélisation, l'obtention du deuxième type fait appel à l'identification.

Les systèmes non linéaires sont représentés par un modèle de connaissance, réalisé avec l'utilisation des lois de la physique qui régissent ou décrivent leur comportement. Ainsi la représentation des systèmes non linéaires est formulée par un ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre de type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \text{équation d'état} \\ y(t) = h(x(t), u(t), t), \text{équation de sortie} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

b- Points d'équilibres

x_e est un point d'équilibre de (B.1) au temps t^* si :

$$f(x_e, u, t) = 0 \quad \forall t \geq t^* \quad (\text{B.2})$$

x_e Est dit isolé si au voisinage de x_e il n'y a pas d'autres points d'équilibres.

Un système non linéaire peut avoir plusieurs points d'équilibres.

La stabilité d'un système non linéaire est définie par rapport à un point d'équilibre.

c- Moyens d'analyse

Les systèmes non linéaires sont plus complexes dans leur comportement que les systèmes linéaires. Ils réagissent différemment aux entrées extérieures et aux conditions initiales. Ils ont fréquemment plusieurs points d'équilibres. La relation entrée sortie est souvent analytiquement inconnue. Leur analyse est donc plus difficile, et on se heurte à plusieurs difficultés lorsqu'on tente de raisonner comme dans le cas linéaire.

B.1.2 Les non linéarités usuelles

Il existe deux types de non linéarité : non linéarité avec mémoire dont la sortie dépend de son passé c'est-à-dire il y a présence d'un transitoire dans l'évolution de la sortie et non linéarité sans mémoire ou statique où il n'existe pas de transitoire dans l'évolution de la sortie. Ces non linéarité peuvent être univoques.

La caractéristique entrée/sortie d'un système présente fréquemment des distorsions dues aux non-linéarités du système. Par exemple, un amplificateur présente une saturation, un pont de redressement présente des seuils en raison des seuils des diodes qui le composent (Figure B.1)

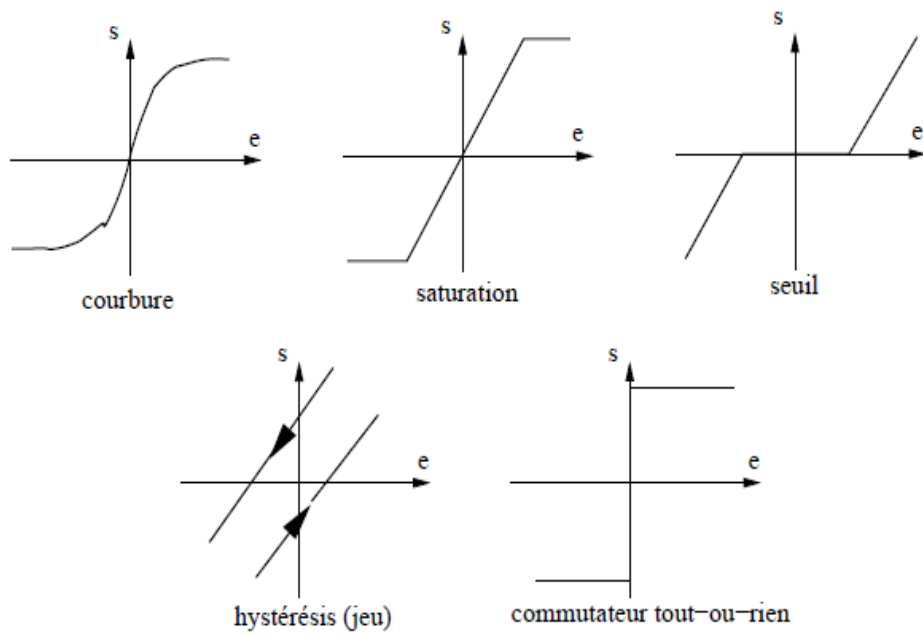


Figure B.1 Exemples de non linéarités