

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU.



FACULTÉ DES SCIENCES.
DÉPARTEMENT : MATHÉMATIQUES.

Mémoire de Master II

SPÉCIALITÉ : Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle et Optimisation

Présenté par
Houari Sara et Djebbar Nassima

Sujet :

Commande et Observation des Systèmes Dynamiques à Retard et Applications

Devant les jury d'examen composé de :

Ladjimi	Fetima	MCB	UMMTO	Présidente
Bennani	Cherifa	MCB	UMMTO	Rapporteur
Abdouche	Safia	MAA	UMMTO	Examineur
Benaoudia	Djamila	MCB	UMMTO	Examineur

Soutenue le 04/10/2022.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Généralités sur les systèmes dynamiques	8
1.1 Systèmes dynamiques linéaires	8
1.1.1 Systèmes dynamiques linéaires sans retards	9
1.1.2 Systèmes dynamiques linéaire à retard	20
1.2 Systèmes dynamiques non linéaires	22
1.2.1 Systèmes dynamiques non linéaires sans retards	22
1.2.2 Systèmes dynamiques non linéaires à retards	24
1.3 Contrôlabilité, Observabilité et Estimation des systèmes non linéaires à retards	24
1.3.1 Contrôlabilité	24
1.3.2 Observabilité	26
1.3.3 Estimation de l'état	27
1.3.4 Modèle d'Observateur pour les Systèmes non linéaires à Retard	28
1.4 Stabilité des systèmes à retards	33
1.4.1 Théorie de Lyapunov	35
1.4.2 Extention de la seconde méthode de Lyapunov	36
1.4.3 Inégalité matricielle linéaire	36
2 Synthèse d'observateur pour les systèmes à retards	38
2.1 Introduction	38
2.2 Position du problème	38
2.3 Conclusion	55
2.4 Annexe A	56
2.5 Annexe B	56
Conclusion générale et perspectives	57

Notations

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous listons ci-dessous :

- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
- \mathbb{R}^n : Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
- $[a, b]$: Intervalle fermé de \mathbb{R} d'extrémités a et b .
- $N_n = \{1, \dots, n\}$: Ensembles des n premiers nombres entiers positifs.
- $x_\tau \in \mathbb{R}$: est définie par $x_\tau(t) = x(\tau - t)$, à l'instant t .
- $\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n)$: Ensemble des fonctions continument différentiables.
- $|\cdot|$: Valeur absolue ou module.
- $\|\cdot\|$: Norme sur \mathbb{R}^n .
- $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$: Vecteur d'état.
- $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$: Dérivée temporelle.
- x^T : Transposé du vecteur x .
- $\|x\|$: Norme euclidienne de x
- $[a_{ij}]$: Matrice dont le coefficient de la i ème ligne et j ème colonne est a_{ij} .
- A^T : Transposé de la matrice A .
- $A > 0$ (resp $A \geq 0$) : Signifie que A est une matrice symétrique définie positive (resp. semi-définie positive).
- $A < 0$ (resp $A \leq 0$) : Signifie que A est une matrice symétrique définie négative (resp. semi-définie négative).

- Id_n : Matrice identité $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- A^{-1} : Inverse de la matrice A .
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ (*) & a_{22} \end{pmatrix}$: Matrice symétrique, le symbole $(*)$ représente a_{12}^T .
- $\lambda_{\min}(A)$ (resp $\lambda_{\max}(A)$) : Valeur propre minimale (resp. maximale) de A .
- \det : déterminant.
- $\exp(A)$ ou e^A : Exponentielle de la matrice A .

Acronymes

- **LMI** : Inégalités Matricielles Linéaires (Linear Matrix Inequalities).
- **LPV** : Linéaire à Paramètres Variants (Linear Parameter Varying).
- **SISO** : Mono-entrée Mono sortie (Single Input-Single Out put).
- **DMVT** : Théorème des accroissements finis (Differential Mean Value Theorem).
- **EDO** : Equations Différentielles Ordinaires.
- **BO** : Boucle ouverte.
- **BF** : Boucle fermée.

Introduction générale

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux et isolés artificiellement du monde extérieur. Sa modélisation vise à établir les relations qui lient les variables caractéristiques de ce processus entre elles et à représenter rigoureusement son comportement dans un domaine de fonctionnement donné décrit par des équations différentielles ordinaires (EDO).

La stabilisation des systèmes dynamiques non linéaires est une question centrale dans le contrôle automatique depuis les dernières décennies. Loin d'être résolu, ce problème se pose naturellement quand un système physique réaliste est considéré.

Une approche classique consiste en une stratégie de retour d'état, où le but est de trouver une dynamique ou une méthode de concepteur de gain statique en vue d'assurer la stabilité de la boucle de commande.

Malheureusement, l'information complète de l'état n'est pas toujours disponible principalement pour des raisons économiques et technologiques. À venir sur ce problème un observateur est habituellement ajouté dans la boucle de contrôle, afin de récupérer l'information qui n'est pas disponible. Dans le cas linéaire la méthode de contrôle optimal d'observateur basée et fondée sur le principe de séparation, qui prévoit l'observateur et les gains de régulation indépendante par différentes méthodes (de placement de pôle, méthode de Lyapunov).

Mais le cas non linéaire n'est pas facilement traitable principalement en raison de la non séparation de la conception des gains du régulateur et observateurs. Dans la littérature, les différentes approches proposées pour résoudre le problème impliquent deux ou plusieurs étapes. Ils impliquent de choisir un gain par une méthode donnée et puis l'autre gain est calculé afin de fournir une réponse globale au problème de la stabilisation par observateur. Depuis ces dernières décennies, ce problème soulève l'attention de toute la communauté. Des résultats intéressants dans ce domaine sont présentés des systèmes continus et discrets.

Pour de nombreux systèmes, la variation des états peut dépendre de leurs passés. Cette dépendance se traduit donc par des retards mais qui sont souvent négligés par simplicité. Cependant dans la commande des systèmes, la présence du retard a une influence considérable sur le comportement du sys-

tème bouclé et peut même être à l'origine d'instabilité. Il est donc important de les prendre en compte.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux généralités et état de l'art sur les systèmes dynamiques en particulier les systèmes à retards.

Dans le deuxième chapitre notre étude s'est portée sur la conception d'observateur pour les systèmes à retards à temps discrets avec des retards présentés dans les variables d'état et de mesure.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale présentant globalement ce mémoire avec quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1 Systèmes dynamiques linéaires

Définition d'un système dynamique

Motivation :

Un système dynamique est généralement décrit par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in X \quad (1.1)$$

Où x est l'état du système.

X est l'espace d'état et $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs sur X .

Système dynamique à temps continu

Dans le cas où la composante du temps est continue, le système est présenté par :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \rho) \quad (1.2)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$.

ρ est un paramètre dans \mathbb{R}^r et $t \in T$, le domaine temporel.

1.1.1 Systèmes dynamiques linéaires sans retards

Définition 1.1.1. Cette classe de système est décrite par des équations différentielles linéaires et donnée par :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.3)$$

où A est une matrice $n \times n$ appelée matrice d'état et B une matrice $n \times m$ appelée matrice de commande.

Exemple d'un système linéaire :

Exemple : (Une voiture automobile)

Considérons une voiture automobile de type traction avant dont les roues avant sont à la fois motrices et directrices. Le modèle cinématique s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= u_1 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -u_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 &= u_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 &= u_2 \end{aligned}$$

Où

(ξ_1, ξ_2) désignent les coordonnées cartésiennes du milieu de l'essieu arrière.

θ_1 l'orientation du châssis.

θ_2 l'orientation des roues avant.

u_1 la vitesse de propulsion.

u_2 la vitesse d'orientation des roues avant.

Les matrices (A, B) du linéarisé du système s'écrivent :

$$A = 0 \quad B = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 & 0 \\ -\cos \theta_1 \cos \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires

Le système (1.3) est dit contrôlable (commandable) si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle. Plus précisément on pose la définition suivante :

Définition 1.1.2. [1] Soit deux état du système, c'est-à-dire deux point x_0 et x_1 de \mathbb{R}^n , et étant donné un temps $T > 0$, on dit que le système (1.3) est contrôlable si il existe une application mesurable bornée $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui permet de passer de x_0 à x_1 au bout du temps T , ce qui signifie que la solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), x(0) = x_0$$

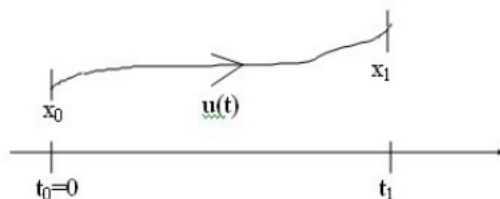
vérifie

$$x(T) = x_1$$

Remarque 1.1.1. On remarque que :

- Si $x_0 \neq 0$ et $x_1 = 0$: contrôlabilité dans l'origine.
- Si $x_0 = 0$ et $x_1 \neq 0$: atteignabilité du point.

Incontrôlable signifie: « Vous ne pouvez pas y arriver d'ici » \rightarrow état incontrôlable



Matrice de contrôlabilité :

$$\mathfrak{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Le système est contrôlable si la matrice de contrôlabilité est de rang plein c'est-à-dire $rg(\mathfrak{C}) = n$.

Retour d'état

Parfois la notion de contrôlabilité est insuffisante dans la pratique. L'expérience suivante nous aide à bien comprendre cela : On essaie de faire tenir un balai en équilibre sur un doigt. Partant d'une position du balai arbitraire, on peut amener facilement ce dernier à la verticale avec une vitesse nulle ; il suffit ensuite de ne pas bouger le doigt et le problème est résolu. Malheureusement c'est impossible à réaliser dans la pratique c'est-à-dire le balai ne

sera pas exactement à la verticale et la vitesse ne sera pas exactement nulle, donc si on arrête de bouger le doigt le balai va tomber. En fait pour éviter cela on bouge le doigt en fonction de la position du balai et de sa vitesse ; et puisque l'un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions (un contrôle ou une commande en boucle fermée) qui stabilisent le système en un état particulier (point d'équilibre), on applique au système (1.3) une commande $u(x)$ qui dépend de l'état x du système. On est donc conduit à chercher une application, appelée retour d'état, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ s'annulant en $x_e = 0$ (position d'équilibre) tel que le système en boucle fermée $\dot{x} = Ax + Bu(x)$ admette l'origine comme point localement asymptotiquement stable c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tel que

$$((\dot{x} = Ax + Bu(x), |x(0)| < \eta) \implies (|x(t)| < \varepsilon, \forall t \geq 0)),$$

$\exists \delta > 0$ tel que

$$((\dot{x} = Ax + Bu(x), |x(0)| < \delta) \implies (\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0)).$$

Théorème 1.1.1. [1] *Si le système linéaire (1.3) est commandable, il existe une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que le système bouclé $\dot{x} = Ax + Bu(x)$ admette l'origine comme point localement asymptotiquement stable.*

Soit le système linéaire stationnaire défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1.4}$$

Ce système peut être représenté par le diagramme suivant :

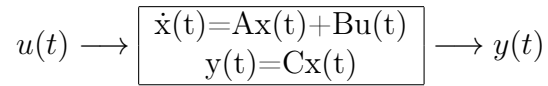


FIGURE 1.1 – Le schéma bloc d'un modèle d'espace d'état

On appelle bouclage (commande en boucle fermée) d'état linéaire du système (1.4) une loi de commande par retour d'état du type :

$$u(t) = -Kx(t) + v(t)$$

avec

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

les valeurs de l'état à l'instant t .

$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice appelée gains de retour d'état, et $v(t)$ une nouvelle entrée pour le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (1.5)$$

le système (1.5) est représenté par le diagramme suivant :

$$v(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bv(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{array}} \longrightarrow y(t)$$

FIGURE 1.2 – Le schéma bloc du retour d'état version 2

Définition 1.1.3. *La loi de commande*

$$u(t) = -Kx(t) + v(t)$$

est dite stabilisante si l'origine du système (1.5) est asymptotiquement stable.

Remarque 1.1.2. *Nous pouvons modifier tous les pôles du système (1.4) ssi il est un système commandable .*

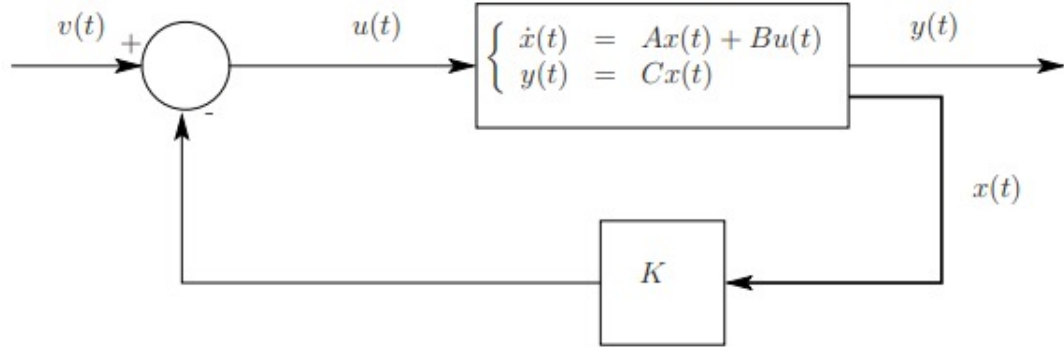


FIGURE 1.3 – Le schéma bloc du retour d'état

Calcul du gain de retour d'état dans le cas (SISO) :

Soit le système définie par le triplet (A, B, C) et l'état $x(t)$. On suppose que le système est commandable.

Soit le nouveau système mis sous forme commandable représenté par le triplet (A_c, B_c, C_c) et l'état $x_c(t)$.

soit P_c est la matrice de passage.

Avec

$$x = P_c x_c$$

$$A_c = P_c^{-1} A P_c, B_c = P_c^{-1} B, C_c = C P_c$$

La loi par retour d'état s'écrit :

$$u(t) = -Kx(t) + v(t) = -K P_c x_c(t) + v(t) = -K_c x_c(t) + v(t)$$

Où

K_c est le gain de retour d'état pour le système commandable et $K = K_c P_c^{-1}$ est le retour d'état pour le système initiale.

Dans la base commandable les matrices A_c et B_c s'écrivent ainsi :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

où

le polynôme caractéristique associé à la matrice A est donné par :

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$$

Avec

$a_i, i \in \{0, n-1\}$ sont les coefficients de ce polynôme.

La matrice dynamique sous forme commandable du système bouclé par retour d'état s'écrit alors :

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - k_{c1} & -a_1 - k_{c2} & \dots & \dots & -a_{n-1} - k_{cn} \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est défini par :

$$P_{A_c - B_c K_c}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_c + B_c K_c) = \lambda^n + (a_{n-1} + k_{cn})\lambda^{n-1} + \dots + (a_0 + k_{c1}).$$

Nous voulons placer les pôles de la boucle fermée en p_1, \dots, p_n .

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc uniquement déterminé par le choix des pôles désirés et nous avons donc la relation suivante :

$$(\lambda - p_1)(\lambda - p_2) \dots (\lambda - p_n) = P_{des}(\lambda) = \lambda^n + f_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + f_0 = P_{A_c - B_c K_c}(\lambda)$$

On tire alors les valeurs du gain K_c :

$$\begin{aligned} k_{c1} &= -a_0 + f_0 \\ k_{c2} &= -a_1 + f_1 \\ &\vdots \\ k_{cn} &= -a_{n-1} + f_{n-1} \end{aligned}$$

Le gain K du système initiale s'écrit alors :

$$K = [f_0 - a_0, \dots, f_{n-1} - a_{n-1}]P_c^{-1}$$

Nous pouvons proposer le théorème suivant :

Théorème 1.1.2. [9] Soit le système commandable défini par le triplet (A, B, C) , les coefficients du polynôme caractéristique de A sont notés $a_i, \forall i \in \{0, n-1\}$, $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

Soient p_1, \dots, p_n les pôles désirés du système en boucle fermé. Les coefficients du polynôme dont les racines sont $p_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ sont notés $f_i, \forall i \in \{0, n-1\}$.

Le gain de retour d'état K permettant de placer les pôles du système en boucle fermée en (p_1, \dots, p_n) s'écrit alors :

$$K = [f_0 - a_0, \dots, f_{n-1} - a_{n-1}](\zeta \mathbb{A})^{-1}$$

Où

ζ représente la matrice de commandabilité de la paire (A, B) , \mathbb{A} représente une matrice dépendant uniquement des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Application :

Exemple numérique 1 :

Soit le système définie par le quadruplet $\{A, B, C, D\}$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = 0 \quad (1.6)$$

On désire placer les pôles du système en -3 et -4 .

Le polynôme caractéristique désiré s'écrit donc :

$$P_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12.$$

Premièrement on vérifie que le système est commandable.
 La matrice de commandabilité s'écrit :

$$\mathfrak{C} = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathfrak{C} = 1 \neq 0$ alors $rg \mathfrak{C} = n = 2$.

Calculons $A - BK$ et le polynôme caractéristique associé $P_{A-BK}(\lambda)$:

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2] = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & -1 - k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc le polynôme caractéristique :

$$P_{A-BK}(\lambda) = \det((A - BK) - \lambda I_2) = \lambda^2 + (1 + k_1)\lambda + 1 + k_2.$$

En boucle fermée, ce polynôme admet comme racine -3 et -4 .
 En égalant

$$P_{A-BK}(\lambda) = P_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 7\lambda + 12.$$

On obtient la valeur de k_1 et k_2 , et donc la valeur du gain K :

$$K = [6 \quad 11].$$

Exemple numérique 2 :

Dans cet exemple on utilise la forme compagne de commande (comme le système est commandable, la forme compagne de commande existe) représenté par le quadruplet $\{A_c, B_c, C_c, D_c\}$.

Le système dans la base compagne de commande s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u(t) \\ y(t) &= C_c x_c(t) \end{aligned}$$

avec

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, C_c = [1 \quad 0], B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_c = 0$$

On a le changement de base suivant :

$$x(t) = P_c x_c(t)$$

$$\text{Avec } P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La commande implantée est donnée par :

$$u(t) = -K_c x_c(t) + v(t).$$

Le système en boucle fermée s'écrit dans la base compagne de commande :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= (A_c - B_c K_c) x_c(t) + B_c v(t) \\ y(t) &= C_c x_c(t) \end{aligned}$$

On calcule $A_c - B_c K_c$:

$$A_c - B_c K_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & -1 - k_2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice reste en forme compagne de commande, il est donc inutile de calculer le polynôme caractéristique.

Par identification ,nous obtenons :

$$-1 - k_{1c} = -12 \Rightarrow k_{1c} = 11$$

$$-1 - k_{2c} = -7 \Rightarrow k_{2c} = 6$$

Le gain de retour d'état dans la base commandable est donné par :

$$K_c = [11 \quad 6].$$

Le calcul de l'inverse de la matrice de changement de base nous permet de calculer facilement le gain du retour d'état K dans la base initiale :

$$K = K_c P_c^{-1} = [6 \quad 11].$$

Remarque 1.1.3. *Il est plus facile de déterminer l'expression du système en base compagne de commande puis calculer le retour d'état dans cette base, plutôt que calculer directement le retour d'état dans la base initiale. Cela nous ramène à éviter le calcul du polynôme caractéristique en fonction des inconnues k_i .*

Les résultats de simulation sont illustrés sur la figure suivante :

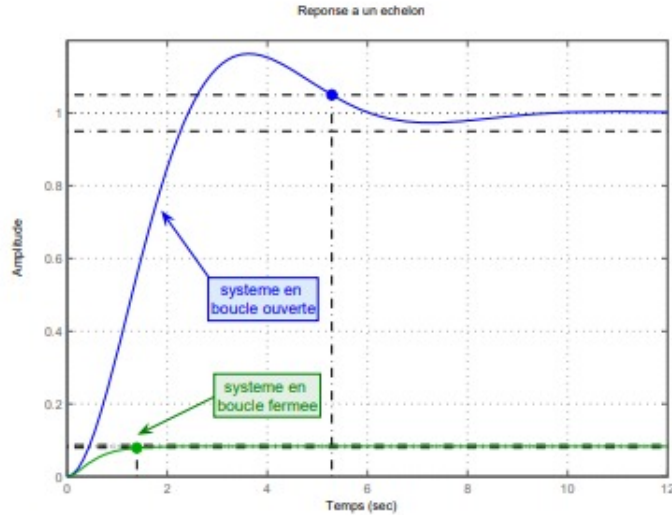


FIGURE 1.4 – Réponse du système (1.6) en BO et BF, asservi par un retour d'état.

Observabilité des systèmes linéaires

Soit le système linéaire stationnaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (1.7)$$

où

$x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ le contrôle et $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système.

A, B, C sont des matrices constantes de dimension appropriées.

On a :

Définition 1.1.4. [5]. *On dit que le système (1.7) est observable si pour tout état $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe un temps fini T et un contrôle admissible u tel que la connaissance de $y(t)$ pour $t \in [0, T]$ permet de déterminer x_0 .*

Notez que ceci est équivalent à la reconstruction de l'état de $x(t)$ et l'observabilité est caractérisée par :

Matrice d'observabilité :

$$O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad \dots \quad CA^{n-1}]^T$$

Le système est observable si la matrice d'observabilité est de rang plein c'est à dire $rg(O) = n$.

1.1.2 Systèmes dynamiques linéaire à retard

Les systèmes à retards, appelés aussi systèmes héréditaires sont des systèmes de dimension infini, leurs évolution dépend non seulement de la valeur de l'état en temps courant ,mais aussi des valeurs passées de la commande et,ou de l'état prises sur un certain horison temporel.

Dans le contexte de la commande un retard est défini comme étant un intervalle de temps entre l'application d'un signal de commande et tout changement observable dans l'état du processus comme nous le montre la figure (1.5) :

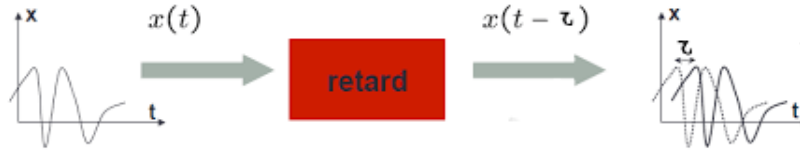


FIGURE 1.5 –

On peut modéliser le système précédent par les contraintes suivantes :

Considérons le système linéaire à retard suivant défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax_t(\theta) + Bu_t(\theta); t \geq t_0 - \tau \leq \theta \leq 0, y(t) = Cx_t(\theta) \quad (1.8)$$

Avec

$$x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta); \theta \in [-\tau, 0].$$

Où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état instantané.

$u(t) \in \mathbb{R}^r$ est l'entrée de commande.

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie mesurée et ϕ la condition initiale du système.

Soit le système linéaire avec un retard discret sur l'état donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x_t(t - \tau)$$

Où τ est le retard et x est l'état du système.

Afin de résoudre cette équation, on a besoin de connaître $x(t)$ sur $t \in [-\tau, 0]$.

La condition initiale est une fonction, alors le système est donc de dimension infinie.

Notion de contrôlabilité en présence du retard

Dans le cas des systèmes linéaires retardés, la notion de commandabilité consiste à atteindre une fonction notée x_t qui évolue sur l'intervalle $[t - \tau, t]$. Ceci conduit à une dimension infinie.

Définition 1.1.5. [2] Le système (1.8) est \mathbb{R}^n -contrôlable si, pour $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, x_0 et x_1 existe $t_1 > t_0$ et une entrée de commande $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ de telle

manière que $x(t_1) = x_1$.

Remarque 1.1.4. *On remarque que :*

- Si $x_0 \neq 0$ et $x_1 = 0$: contrôlabilité dans l'origine.
- Si $x_0 = 0$ et $x_1 \neq 0$: atteignabilité du point.

Notion d'observabilité en présence du retard

L'extention de base de l'observabilité des systèmes à retard est l'observabilité initiale :

Définition 1.1.6. [2] *Un état initiale $(x(0), \phi(t), t \in [-\tau, 0])$ est observable si la sortie du système autonome n'est pas identiquement nulle.*

1.2 Systèmes dynamiques non linéaires

1.2.1 Systèmes dynamiques non linéaires sans retards

Définition 1.2.1. *Cette classe de système est décrite par :*

$$\dot{x} = \Phi(x(t), t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.9)$$

Où Φ est une fonction non linéaire continument différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n

Exemple d'un système non linéaire

Exemple : Système hydraulique

Considérons un système hydraulique formé d'un ensemble de réservoirs situés à des altitudes différentes et dont le contenu liquide s'écoule (en cascade) des réservoirs les plus élevés vers les réservoirs les plus bas sous l'action de la gravité comme le montre la figure (1.6).

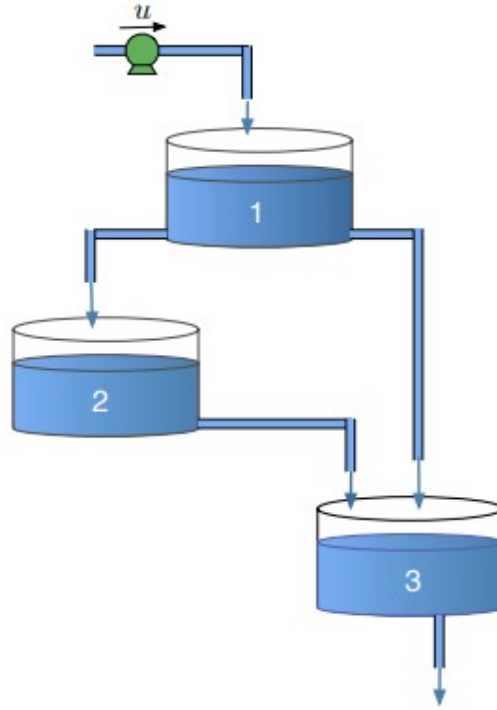


FIGURE 1.6 – Cascade de réservoirs

Il s'agit clairement d'un système non linéaire d'écrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= q_{01} - q_{12} - q_{13} \\ \dot{x}_2 &= q_{12} - q_{23} \\ \dot{x}_3 &= q_{13} + q_{23} - q_{30} \end{aligned}$$

Où

Les variables d'état x_1, x_2 et x_3 désignent évidemment les volumes d'eau contenus dans les réservoirs.

q_{ij} représentent les débits s'écoulant des réservoirs supérieurs vers les réservoirs inférieurs.

Le débit fourni par la pompe d'alimentation du réservoir supérieur peut clairement être choisi comme variable d'entrée.

Le débit de sortie q_{ij} de chaque réservoir est une fonction positive du volume x_i du réservoir.

1.2.2 Systèmes dynamiques non linéaires à retards

Les systèmes à retards sont généralement représentés par des équations différentielles de la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x_t, u_t), t \geq t_0 \\ y(t) &= g(t, x_t, u_t) \\ x_{t_0} &= \phi(\theta), \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0] \\ u_{t_0} &= \vartheta(\theta), \text{ pour } \theta \in [t_0 - \tau, t_0]\end{aligned}$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée.

τ est le retard.

ϕ et $\vartheta : [t_0 - \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, représentent les conditions initiales et sont des fonctions supposées continues par morceau.

x_t et u_t sont des fonctions continues de $[-\tau, 0]$ dans \mathbb{R}^n et définies par :

$$[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \theta \in [-\tau, 0]$$

$$x_t(\theta) = x(t + \theta)$$

$$[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^m, \theta \in [-\tau, 0]$$

$$u_t(\theta) = u(t + \theta)$$

x_t et u_t représentent respectivement l'entrée et l'état du système à l'instant t .

f et g sont des fonctions continues, différentiable.

1.3 Contrôlabilité, Observabilité et Estimation des systèmes non linéaires à retards

1.3.1 Contrôlabilité

Soit le système non linéaire définit par :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.10}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est le contrôle (la commande).

Avec $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ satisfait $f(0, 0) = 0$.

Définition 1.3.1. [1](*contrôlabilité locale*) : le système (1.10) est localement contrôlable si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x_0 \in \mathbf{B}_n = \{x \in$

$\mathbb{R}^n, |x| < \eta\}$ et $\forall x_1 \in \mathbf{B}_n$, il existe une application mesurable $u : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$|u(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0, T]$$
$$(\dot{x} = f(x, u(t)), x(0) = x_0) \implies (x(\varepsilon) = x_1)$$

.

Le système (1.10) est dit en boucle ouverte et représenté par le diagramme suivant :

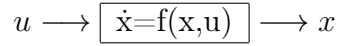


FIGURE 1.7 – Système en boucle ouverte

1.3.2 Observabilité

Motivation :

Dans le domaine de la commande, la connaissance entière ou partielle de l'état à chaque instant est nécessaire à la réalisation de tels objectifs. Sur le plan pratique, cette exigence est difficile à satisfaire vu que la mesure en ligne de ces variables est le plus souvent très coûteuse et parfois impossible. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande demande l'utilisation des variables d'état non mesurées, il est indispensable de construire un observateur. Ce dernier est un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ d'un système. L'observateur ou estimateur d'état a pour rôle de donner une estimation $\hat{x}(t)$ du vecteur d'état $x(t)$.

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = f(x, u), y = h(x) \tag{1.11}$$

Où x est l'état du système, u la commande (le contrôle) et y est la sortie du système appelée la variable observée.

Le système en boucle ouverte (1.11) est représenté par le diagramme suivant :

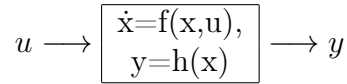


FIGURE 1.8 – Système en boucle ouverte

Le système (1.11) sera dit observable si la sortie $y(t)$ permet de retrouver l'état $x(t)$.

L'observateur du système (1.11) est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), y(t), u(t)) \quad (1.12)$$

Dans ce qui suit, nous allons rappeler certaines définitions inhérentes à l'observabilité des systèmes non linéaires.

Définition 1.3.2. [3](*Distinguable-Indistinguable*) : Deux états initiaux $x_0, x_1 \in V$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits distinguables dans V si $\exists t \geq 0$ et $\exists u : [0, t] \rightarrow U$ une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues respectivement de x_0 et x_1 restent dans V pendant la durée $[0, t]$ et vérifient $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$. Dans ce cas, on dira que u distingue x_0 et x_1 dans V .

Réciproquement, deux états initiaux $x_0, x_1 \in V$ tel que $x_0 \neq x_1$ sont dits indistinguables si $\forall t \geq 0$ et $\forall u : [0, t] \rightarrow U$ pour lesquels les trajectoires issues de x_0, x_1 restent dans V on a : $y(t, x_0, u(t)) = y(t, x_1, u(t))$.

Définition 1.3.3. [3](*Observabilité*) : Le système (1.11) est observable en $x_0 \in V$ si x_0 est distinguable de tout $x \in \mathbb{R}^n$.

En outre, Le système (1.11) est observable si $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0$ est distinguable.

1.3.3 Estimation de l'état

Supposons que le système (1.7) est observable. Le but est de construire un observateur asymptotique $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ telle que $\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

L'idée est de copier la dynamique du système observé et d'y ajouter un correctif en tenant compte de l'écart entre la prédiction et la réalité.

Définition 1.3.4. [4] Un observateur asymptotique (ou observateur de Luenberger) $\hat{x}(\cdot)$ de $x(\cdot)$ est une solution d'un système du type

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(C\hat{x}(t) - y(t))$$

Où $L \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée matrice de gain.

Remarque 1.3.1. L'erreur d'estimation entre la prédiction $\hat{x}(\cdot)$ et l'état réel $x(\cdot)$ est donné par :

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

La dynamique de cette erreur est régie par l'équation suivante :

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = (A + LC)e(t)$$

Donc l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers 0 pour tout valeur initiale $e(0)$, si et seulement si la matrice $A + LC$ est de Hurwitz .

Le problème de construction de l'observateur revient donc à résoudre un problème de placement de pôles. On choisit une dynamique désirée (choix des valeurs propres désirées de $A + LC$ puis on utilisant le principe de placement des pôles, on détermine la matrice de gain L . Ainsi de la manière duale on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.1. [4](Théorème de placement des modes propres de l'observateur)

Si la paire (A, C) est observable, alors le système admet un observateur asymptotique. Autrement dit on peut construire une matrice de gains L telle que $A + LC$ soit de Hurwitz.

1.3.4 Modèle d'Observateur pour les Systèmes non linéaires à Retard

Considérons la classe des systèmes non linéaire à retard suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x_\tau(t) + Bf(x(t), x_\tau(t), y(t)), \quad y(t) = Cx(t) \quad (1.13)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée et $y \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système.

A, A_τ, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées.

f est une application non linéaire avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ et $\tau > 0$ est le retard.

La classe des systèmes non linéaires concernée est définie par l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.3.1. *Supposons que la fonction non linéaire f satisfasse les conditions suivantes :*

$$a_{ij} \leq \frac{\delta f_i}{\delta x_j}(x, x_\tau, y) \leq b_{ij}, \forall x, x_\tau, y \quad (1.14)$$

$$a_{ij}^\tau \leq \frac{\delta f_i}{\delta x_{\tau i}}(x, x_\tau, y) \leq b_{ij}^\tau, \forall x, x_\tau, y \quad (1.15)$$

L'observateur de l'état correspondant à (1.13) est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + A_\tau \hat{x}_\tau(t) + Bf(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), y(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + L_\tau(y_\tau(t) - \hat{y}_\tau(t)), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (1.16)$$

Où la dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - LC)(x(t) - \hat{x}(t)) + (A_\tau - L_\tau C)(x_\tau(t) - \hat{x}_\tau(t)) + B\Delta f \\ &= (A - LC)e(t) + (A_\tau - L_\tau C)e_\tau(t) + B\Delta f \end{aligned}$$

Avec

$$\Delta f = f(x(t), x_\tau(t), y(t)) - f(\hat{x}(t), \hat{x}_\tau(t), y(t))$$

L'objectif est de trouver les gains L et L_τ tel que l'erreur d'estimation $e(t)$ converge exponentiellement vers 0.

On énonce maintenant un résultat qui représente une condition suffisante pour la stabilité du système (1.13).

Théorème 1.3.2. *[7] L'observateur d'état est exponentiellement convergent s'il existe un scalaire $w > 0$ et des matrices P, Q symétriques définies positives, R, R_τ de dimensions appropriées tels que les inégalités matricielles suivantes soient satisfaites :*

$$M(P, Q, \alpha, \beta) + wN(P) - L(R, R_\tau) < 0, \forall \alpha \in \nu_{H_{q,n}}, \forall \beta \in \nu_{H_{\hat{q},n}}^\tau$$

Où

$$M(P, Q, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} A^T(\alpha)P + PA(\alpha) + Q & PB(\beta) \\ (*) & -\exp(-w\tau)Q \end{bmatrix}$$

$$N(P) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M(R, R_\tau) = \begin{bmatrix} C^T R + R^T C & R_\tau C \\ (*) & 0 \end{bmatrix}$$

Quand les inégalités sont satisfaites, les matrices L et L_τ seront données par :

$$L = P^{-1}R^T \text{ et } L_\tau = P^{-1}R_\tau.$$

Démonstration : On considère la fonction de Lyapunov-Krassovskii candidate suivante :

$$V(t) = \epsilon^T(t)P\epsilon(t) + \exp(-wt) \int_{t-\tau}^t \exp(w\theta)\epsilon^T(\theta)Q\epsilon(\theta)d\theta$$

La dérivée de $V(t)$ est donnée par :

$$\dot{V}(t) = \dot{\epsilon}^T(t)P\epsilon(t) + \epsilon^T(t)P\dot{\epsilon}(t) - w \exp(-wt) \int_{t-\tau}^t \exp(w\theta)\epsilon^T(\theta)Q\epsilon(\theta)d\theta + [\exp(wt)\epsilon^T(t)Q\epsilon(t) - \exp(w(t-\tau))\epsilon^T(t-\tau)Q\epsilon(t-\tau)] \exp(-wt).$$

$$\dot{V}(t) = 2\dot{\epsilon}^T(t)P\epsilon(t) - w \exp(-wt) \int_{t-\tau}^t \exp(w\theta)\epsilon^T(\theta)Q\epsilon(\theta)d\theta + [\epsilon^T(t)Q\epsilon(t) - \exp(-w\tau)\epsilon^T(t-\tau)Q\epsilon(t-\tau)].$$

$$\dot{V}(t) = \epsilon^T\{(A(\rho(t)) - LC)^T P + P(A(\rho(t)) - LC) + Q\}\epsilon + \epsilon^T\{(B(\rho^\tau(t)) - L_\tau C)^T P + P(B(\rho^\tau(t)) - L_\tau C)\}\epsilon_\tau - \exp(-w\tau)\epsilon_\tau^T Q \epsilon_\tau - w \exp(-w\tau) \int_{t-\tau}^t \exp(w\theta)\epsilon^T(\theta)Q\epsilon(\theta)d\theta.$$

Alors

$$\dot{V}(t) + wV(t) = \epsilon^T\{(A(\rho(t)) - LC)^T P + P(A(\rho(t)) - LC) + Q\}\epsilon + \epsilon^T\{(B(\rho^\tau(t)) - L_\tau C)^T P + P(B(\rho^\tau(t)) - L_\tau C)\}\epsilon_\tau - \exp(-w\tau)\epsilon_\tau^T Q \epsilon_\tau$$

On déduit que :

$$\dot{V}(t) + wV(t) = \xi^T(t)[M(P, Q, h(t), h^\tau(t)) + wN(P) - L(R, R_\tau)]\xi(t)$$

Avec

$$\xi(t) = [\epsilon(t), \epsilon_\tau(t)] \text{ et } \xi^T(t) = [\epsilon^T(t), \epsilon_\tau^T(t)]$$

D'après le principe de convexité on a :

$$[M(P, Q, h(t), h^\tau(t)) + wN(P) - L(R, R_\tau)] < 0$$

$$\forall h(t) \in H_{q,n} \text{ et } h^\tau(t) \in H_{q,n}^\tau.$$

Ce qui implique,

$$\dot{V}(t) + wV(t) < 0.$$

Cette inégalité conduit à

$$\int \frac{\dot{V}(t)}{V(t)} dt < \int -w dt \Rightarrow V(t) \leq V(0) \exp(-wt)$$

On a

$$\lambda_{\min}(P)\|\epsilon(t)\|^2 \leq V(t).$$

Alors,

$$\|\epsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_{\min}(P)}} \sqrt{\exp(-wt)}.$$

Ce qui ramène à :

$$\|\epsilon(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-\frac{w}{2}t\right).$$

Donc ce résultat affirme que l'observateur est exponentiellement convergent.

Exemple :

Considerons le système d'écrit sous la forme (1.16) par les paramètres suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0]$$

et

$$f(x, x_\tau, y) = \left[\frac{x_1(t-0.1)}{\sqrt{1+x_1^2(t-0.1)}} \quad \frac{x_2(t)}{\sqrt{1+x_2^2(t)}} \right]^T.$$

Nous avons

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_j}(x, x_\tau, y) = 0, \frac{\delta f_2}{\delta x_{\tau j}}(x, x_\tau, y) = 0, \forall j = 1, 2, 3$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_{\tau 1}}(x, x_\tau, y) = \frac{1}{(1+x_1^2(t-0.1))^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_2}(x, x_\tau, y) = \frac{1}{(1+x_2^2(t))^{\frac{1}{3}}}$$

D'où

$$0 \leq h_{22}(t) \leq 1 \text{ et } 0 \leq h_{11}^\tau(t) \leq 1$$

En résolvant les inégalités avec $\omega = 1$, nous obtenons les gains suivants :

$$L = [11.9232 \quad 4.02041 \quad 1.4261]^T$$

$$L_\tau = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.3] .$$

Les résultats de simulation sont illustrés sur la figure suivante :

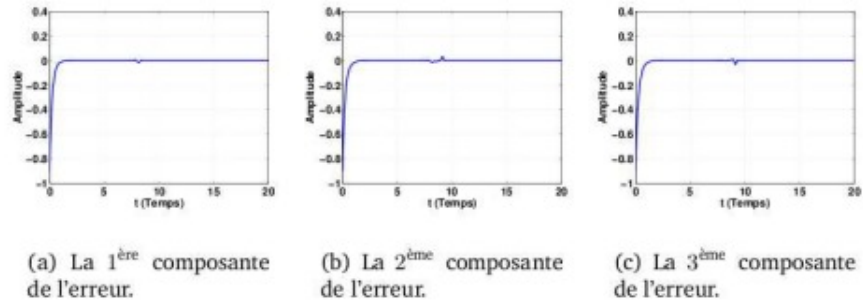


FIGURE 1.9 – Evolution exponentielle de l'erreur d'estimation

1.4 Stabilité des systèmes à retards

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité des systèmes à retards. En particulier, on s'intéresse à l'approche temporelle liée à la seconde méthode de Lyapunov.

On considère la classe des systèmes avec un seul retard définie par :

$$\dot{x}(t) = f(x_t(\theta), t), t \geq t_0 \quad x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (1.17)$$

Où

$x_t(\theta) \in \mathbf{C} = \mathbf{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ est l'état du système à l'instant $t + \theta$.

$x(t)$ est l'état du système à l'instant t et ϕ est la fonction initiale du système (1.17).

Nous considérons par x_e un point d'équilibre du système (1.17) tq $f(x_e, t) = 0 \forall t \geq t_0$.

Puisque dans ce mémoire on s'intéresse que à la stabilité d'une erreur d'estimation, alors nous supposons que le système (1.17) possède un unique point d'équilibre $x_e = 0$.

Le paragraph suivant est dedié à la définition de quelques concepts fondamentaux de stabilité du système (1.17).

Définition 1.4.1. [6]/(*Attractivité*) *L'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.17) si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(t_0) > 0$ tel que :*

$$\|\phi\|_C < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t, t_0, \phi)) = 0, \forall t \geq t_0.$$

Lorsque $\delta(t_0) = +\infty$, on dit que l'origine est globalement attractive.

Définition 1.4.2. [6]/(*stabilité*) *L'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (1.17) si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que :*

$$\|\phi\|_C < \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

.

Définition 1.4.3. [6]/(*Stabilité asymptotique*) *L'origine est un point d'équilibre*

- *Asymptotiquement stable pour (1.17) s'il est stable et attractif .*
- *Globalement asymptotiquement stable pour (1.17) s'il est stable et globalement attractif .*

Définition 1.4.4. [6]/(*Stabilité uniforme*) *L'origine est un point d'équilibre uniformément stable pour (1.17) si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :*

$$\|\phi\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

.

Définition 1.4.5. [6]/(*Stabilité exponentielle*) *L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour (1.17) s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$ telles que pour toute solution $x(t, t_0, \phi)$, $\phi \in C$:*

$$\|x(t, t_0, \phi)\| \leq \gamma \exp(-\alpha(t - t_0)), \forall t \geq t_0, \forall \phi \in C.$$

La constante α est appelée le taux de convergence.

Il est clair que la notions de stabilité, énoncées ci-dessus, ne diffèrent pas trop de celles des systèmes sans retard, sauf pour les hypothèses concernant les conditions initiales.

1.4.1 Théorie de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov est basée sur l'existence d'une fonction, appelée fonction de Lyapunov, définie positive sur un voisinage du point d'équilibre, dont la dérivée temporelle le long des trajectoires du système est définie négative.

Ceci traduit le fait que l'énergie totale du système se dissipe continûment avec le temps quand sa trajectoire tend à rejoindre sa position d'équilibre.

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrite par l'équation dynamique :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x(t_0) = x_0 \quad (1.18)$$

Où

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

$x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système(1.18) initialisée en x_0 à l'instant t_0 .

Définition 1.4.6. [6] Soit $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. V est dite propre définie positive si :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 V(x, t) > 0$;
2. $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(x, t) = 0 \Rightarrow x = 0$;
3. $\forall t \in \mathbb{R}^+, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x, t) = \infty$.

Définition 1.4.7. [6](**Fonction de Lyapunov**) une fonction $V(x, t)$ de classe C est une fonction de Lyapunov locale (resp.globale) au sens large pour le système (1.18) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine V_0 tel que $\forall x \in V_0$ (resp. $x \in \mathbb{R}^n$) :

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x}\right)f(x(t), t) \leq 0.$$

Si $\dot{V}(x, t) < 0$, alors V est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (1.18).

Définition 1.4.8. [6](**Méthode directe de Lyapunov**) Si le système (1.18)admet une fonction de Lyapunov local au sens large (resp.au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (resp.asymptotiquement). Ce résultat peut être valide globalement $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

L'origine de (1.18) est localement exponentiellement stable s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et une fonction $V(x, t) : V_0 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe ∞ telles que, $\forall x \in V_0$:

1. $\alpha \|x\|^p \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^p$;
2. $\dot{V}(x, t) < -\gamma V(x, t)$.

Si $V_0 = \mathbb{R}^n$, alors l'origine de (1.18) est globalement exponentiellement stable.

1.4.2 Extention de la seconde méthode de Lyapunov

Soit $x_e = 0$ le point d'équilibre du système (1.17), comme pour les équations différentielle ordinaires, l'analyse de la stabilité du système permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état l'orsque l'état initial est proche du point d'équilibre $x_e = 0$.

La seconde méthode de Lyapunov repose sur l'existence d'une fonction V définie positive, telle que le long des trajectoires du système (1.17), on ait $\frac{dV}{dt} < 0$ si $x \neq 0$. Cette méthode directe n'est valable que pour une classe restreinte de systèmes à retard, puisque $\frac{dV}{dt}$ dépend des valeurs passées x_t . Elle est donc très difficile à appliquer dans le cas général des systèmes à retards. Deux théories, désormais usuelles ont été développées : la méthode de Lyapunov-Krasovskii qui utilise des fonctionnelles de Lyapunov et la méthode de Lyapunov-Razumikhin qui emploie des fonctions de Lyapunov classiques. Cette dernière, moins utilisée dans la littérature et non abordée dans cette thèse.

1.4.3 Inégalité matricielle linéaire

Définition et notation

L'idée de base de la méthode LMI (abréviation anglaise d'Inégalité Matricielle Linéaire) est de formuler un problème d'optimisation avec un objectif linéaire et des contraintes LMI.

Une contrainte LMI sur un vecteur variable x de \mathbb{R}^m est de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0, \quad (1.19)$$

Où les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $i = 0, \dots, m$ sont données. La notation suivante $F > 0$ (ou $F \geq 0$) signifie que la matrice F est définie positive (respectivement F semi-définie positive).

La contrainte $F(x) \geq 0$ est une contrainte convexe en x .
 On dit que la LMI (1.19) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur $\bar{x} \in R^m$ tel que l'inégalité matricielle (1.19) est vérifiée .

Complement de Shur :

Les théorèmes issus des techniques de Lyapunov conduisent généralement à des contraintes non linéaires. Les difficultés rencontrées proviennent de la transformation de ces contraintes non linéaires en LMIs. On cite alors la formulation basée sur le complément de Schur comme étant la méthode la plus simple et la plus utilisée.

Théorème 1.4.1. [8] Soient les trois matrices $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x la LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

est équivalente aux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} R(x) &> 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T &> 0 \end{aligned}$$

Autrement dit (une autre transformation est décrite de la manière suivante) : pour toutes matrices $A, P_0 > 0$ et $P_1 > 0$, l'inégalité

$$A^T P_1 A - P_0 < 0$$

est équivalente à l'existence d'une matrice Y telle que :

$$\begin{bmatrix} -P_0 & A^T Y^T \\ Y A & -Y - Y^T + P_1 \end{bmatrix} < 0$$

Chapitre 2

Synthèse d'observateur pour les systèmes à retards

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on traite la conception d'observateur pour les systèmes à temps discret avec des retards dans les variables d'état et de mesure. D'une part des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel observateur sont données. D'autre part l'analyse de la stabilité est effectuée par l'approche de Lyapunov, où les conditions obtenues sont exprimées en termes d'une équation de Riccati modifiée. Dans la dernière section, nous fournissons des exemples numériques pour montrer la simplicité et l'efficacité de l'observateur proposé.

2.2 Position du problème

Considérons un système discret avec retards multiples de la forme :

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^s B_i u_{k-i} \quad (2.1)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^h C_i x_{k-i} + \sum_{i=0}^q D_i u_{k-i} \quad (2.2)$$

Où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ est la commande et $y_k \in \mathbb{R}^p$ est la sortie du système.

A_i, B_i, C_i et D_i sont des matrices constantes de dimensions appropriées.
Avec

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & \cdot & A_r \\ I & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$A_d = (A_0 \quad A_1 \quad \dots \quad A_r), \quad (2.4)$$

et

$$C = (C_0 \quad \dots \quad C_r). \quad (2.5)$$

$r \geq 0, s \geq 0, h \geq 0$ et $q \geq 0$ est le nombre des retards.

Pour la simplicité des notations on pose $r = h$ et $u_k = 0$.
Le système (2.1),(2.2) devient :

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} \quad (2.6)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^r C_i x_{k-i} \quad (2.7)$$

L'observateur associé au système (2.6),(2.7) est le suivant :

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K(y_k - \hat{y}_k) \quad (2.8)$$

$$\hat{y}_k = \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i} \quad (2.9)$$

Remplaçant (2.7) et (2.9) dans (2.8) on obtient :

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K \left(\sum_{i=0}^r C_i x_{k-i} - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i} \right) \quad (2.10)$$

Ce qui ramène au resultat suivant :

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K(y_k - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i}) \quad (2.11)$$

L'objectif est de trouver le gain matriciel K tel que la convergence asymptotique de l'observateur d'état (2.11) soit assurée.

On note que :

Quand $h < r$ la matrice C devient :
 $C = (C_0 \quad \dots \quad C_h \quad 0 \quad \dots \quad 0) \in \mathbb{R}^{p(r+1)n}$.

Quand $r < h$ la matrice A_d devient :
 $A_d = (A_0 \quad \dots \quad A_r \quad 0 \quad \dots \quad 0)$.

Théorème 2.2.1. [10]

L'existence d'un observateur de type (2.11) (condition nécessaire et suffisante) nécessite l'existence d'une matrice définie positive P solution des équations suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} S_0^0 & S_0^1 & \dots & S_0^r \\ (S_0^1)^T & & & \\ \vdots & L & & \\ (S_0^r)^T & & & \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

$$S_0^0 = (A_d - KC)P(A_d - KC)^T + K R K^T + Q_1. \quad (2.13)$$

$$S_0^i = (A_d - KC)P J_i^T \forall i = 1, \dots, r. \quad (2.14)$$

$$J_i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0). \quad (2.15)$$

Où la matrice d'identité I est dans la i ème colonne de J_i , $i = 1, \dots, r$.

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}^T + Q_2. \quad (2.16)$$

Où le gain matriciel K proposer dans (2.11) est donné par :

$$K = A_d P C^T (C P C^T + R)^{-1}. \quad (2.17)$$

Avec Q_1, Q_2 et R sont des matrices arbitraires définit positive.

Condition suffisante :

On suppose qu'il existe une matrice P définit positive solution de (2.12) jusqu'a (2.17).

En utilisant la structure (2.3) de A et (2.13),(2.14) on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc} S_0^0 & S_0^1 & \dots & S_0^r \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{cccc} (A_d - KC)P(A_d - KC)^T + KRK^T + Q_1 & (A_d - KC)PJ_1^T & \dots & \\ & (A_d - KC)PJ_r^T & & \end{array} \right) \\ &= (A_d - KC)P \begin{pmatrix} (A_d - KC)^T \\ J_1^T \\ \vdots \\ J_r^T \end{pmatrix} + KR \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (A_d - KC)P \left(A - \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} C \right)^T + KR \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} Q_1^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T. \quad (2.18) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_d P C^T (C P C^T + R)^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} P C^T (C P C^T + R)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_r \\ I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} P C^T (C P C^T + R)^{-1}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M A P C^T (C P C^T + R)^{-1}. \quad (2.19)$$

Avec

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Remplaçant (2.16),(2.18) et (2.19) dans (2.12) on obtient l'équation de Riccati suivante :

$$P = (A - GC)P(A - GC)^T + GRG^T + Q. \quad (2.21)$$

Avec

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = MAPC^T (CPC^T + R)^{-1}.$$

Nous présentons dans ce qui suit l'analyse de la stabilité de l'observateur d'état (2.11) basée sur l'approche de Lyapunov.

On introduit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_{k+1} = \zeta_{k+1}^T P^{-1} \zeta_{k+1}. \quad (2.22)$$

Avec

$$\zeta_{k+1} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+1-r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k+1-r} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Pour déduire que V_k est décroissante il suffit de montrer que :

$$V_{k+1} - V_k < 0 \quad \forall k. \quad (2.24)$$

D'abord, remplaçant (2.11) dans (2.23) on obtient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} &= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} - \left[\sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K \left(y_k - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} - \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} - K \left(\sum_{i=0}^r C_i x_{k-i} - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i} \right) \\ &= A_d x - A_d \hat{x} - K(Cx - C\hat{x}) \\ &= A_d(x - \hat{x}) - KC(x - \hat{x}) \\ &= (A_d - KC)(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

Où

$$x = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-r} \end{pmatrix}.$$

et

$$\begin{aligned}
x_{k+1-r} - \hat{x}_{k+1-r} &= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-r-i} - \left[\sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-r-i} + K \left(\sum_{i=0}^r C_i x_{k-r-i} - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-r-i} \right) \right] \\
&= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-r-i} - \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-r-i} - K \left(\sum_{i=0}^r C_i x_{k-r-i} - \sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-r-i} \right) \\
&= A_d \acute{x} - A_d \hat{\acute{x}} - K(C\acute{x} - C\hat{\acute{x}}) \\
&= A_d(\acute{x} - \hat{\acute{x}}) - KC(\acute{x} - \hat{\acute{x}})
\end{aligned}$$

Où

$$\acute{x} = \begin{pmatrix} x_{k-r} \\ x_{k-r-1} \\ \vdots \\ x_{k-2r} \end{pmatrix} \text{ et } \hat{\acute{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-r} \\ \hat{x}_{k-r-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-2r} \end{pmatrix}.$$

Ce qui ramène au résultat suivant :

$$\zeta_{k+1} = (A - GC)\zeta_k \tag{2.25}$$

On a

$$V_{k+1} - V_k = \zeta_{k+1}^T P^{-1} \zeta_{k+1} - \zeta_k^T P^{-1} \zeta_k \tag{2.26}$$

Remplaçant (2.25) dans (2.26) :

$$\begin{aligned}
V_{k+1} - V_k &= [(A - GC)\zeta_k]^T P^{-1} (A - GC)\zeta_k - \zeta_k^T P^{-1} \zeta_k \\
&= (A - GC)^T \zeta_k^T P^{-1} (A - GC)\zeta_k - \zeta_k^T P^{-1} \zeta_k \\
&= \zeta_k^T \left((A - GC)^T P^{-1} (A - GC) - P^{-1} \right) \zeta_k
\end{aligned}$$

On pose

$$\Lambda = (A - GC) \tag{2.27}$$

On obtient :

$$V_{k+1} - V_k = \zeta_k^T (\Lambda^T P^{-1} \Lambda - P^{-1}) \zeta_k \quad (2.28)$$

Remplaçant (2.27) dans (2.21) on aura :

$$P = \Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q \quad (2.29)$$

(2.28) devient :

$$V_{k+1} - V_k = \zeta_k^T (\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) \zeta_k \quad (2.30)$$

Pour montrer que V_k est une fonction décroissante, il suffit de montrer que :

$$V_{k+1} - V_k < 0$$

c'est-à-dire

$$\zeta_k^T (\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) \zeta_k < 0$$

Ce qui revient à montrer que :

$$(\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) < 0 \quad (2.31)$$

On a

$$(\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) \quad (2.32)$$

Multipliant (2.32) par $\frac{P^{-1}}{P^{-1}}$ on obtient :

$$(\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) = P^{-1} [P \Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1} P] \quad (2.33)$$

Multipliant (2.33) par $\frac{P^{-1}}{P^{-1}}$ on obtient :

$$\begin{aligned} (\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) &= P^{-1} [P \Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda P - P] P^{-1} \\ (\Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda - P^{-1}) &= -P^{-1} [P - P \Lambda^T (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T + Q)^{-1} \Lambda P] P^{-1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Par le lemme de la matrice inverse on déduit que (2.34) est équivalente à :

$$-P^{-1}(P^{-1} + \Lambda^T(GRG^T + Q)^{-1}\Lambda)^{-1}P^{-1} \quad (2.35)$$

L'équation (2.35) est inférieure strictement à 0

ça implique que :

$$V_{k+1} - V_k < 0$$

D'où V_k est une fonction décroissante.

La condition nécessaire :

On suppose qu'il existe un gain matriciel K^* qui assure la convergence asymptotique de l'observateur (2.11).

On va montrer qu'il existe toujours un gain matriciel K et une matrice définie positive P solution de (2.12) jusqu'à (2.17).

Remplaçant (2.11) dans (2.23) :

$$\zeta_{k+1} = (A - G^*C)\zeta_k \quad (2.36)$$

Avec

$$G^* = \begin{pmatrix} K^* \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

De la structure de A et puisque K^* est un gain matriciel qui assure la convergence asymptotique de l'observateur (2.11), alors $\Lambda^* = (A - G^*C)$ est une matrice de Hurwitz.

Pour une matrice quelconque définie positive \bar{Q}^* , il existe une matrice P définie positive solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$P - \Lambda^*P\Lambda^{*T} = \bar{Q}^* \quad (2.38)$$

En particulier si on prend :

$$\bar{Q}^* = G^*RG^{*T} + Q^* \quad (2.39)$$

On aura :

$$P - \Lambda^* P \Lambda^{*T} = G^* R G^{*T} + Q^*$$

On déduit que :

$$P = \Lambda^* P \Lambda^{*T} + G^* R G^{*T} + Q^* \quad (2.40)$$

Avec Q^* et R sont des matrices arbitraires définit positive.

Maintenant considérons la matrice semi-définit positive P_{Opt} définit par :

$$P_{Opt} = \Lambda P \Lambda^T + G R G^T \quad (2.41)$$

Avec

$$\Lambda = (A - GC), G = \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = A_d P C^T (C P C^T + R)^{-1}.$$

De (2.40) et (2.41) on déduit que :

$$(\Lambda^* P \Lambda^{*T} + G^* R G^{*T} + Q^*) > (\Lambda P \Lambda^T + G R G^T)$$

C'est-à-dire :

$$P > P_{Opt} \quad (2.42)$$

Où il existe une matrice Q définit positive tel que :

$$P = P_{Opt} + Q = (A - GC)P(A - GC)^T + G R G^T + Q \quad (2.43)$$

Ce qui complete la démonstration.

On peut obtenir la matrice définit positive P a partir de l'algorithme suivant :

Soit $P_0 > 0$ et pour $k = 0, 1, \dots$

$$P_{k+1} = \begin{pmatrix} S_{k+1}^{k+1} & S_{k+1}^k & \dots & S_{k+1}^{k+1-r} \\ (S_{k+1}^k)^T & & & \\ \vdots & & L_{k+1} & \\ (S_{k+1}^{k+1-r})^T & & & \end{pmatrix}, \quad (2.44)$$

$$S_{k+1}^{k+1} = (A_d - K_{k+1}C)P_k(A_d - K_{k+1}C)^T + K_{k+1}RK_{k+1}^T + Q_1 \quad (2.45)$$

$$S_{k+1}^{k+1-i} = (A_d - K_{k+1}C)P_k J_i^T \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (2.46)$$

$$J_i = (0 \quad \dots \quad 0 \quad I \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad (2.47)$$

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} S_k^k & S_k^{k-1} & \dots & S_k^{k+1-r} \\ (S_k^{k-1})^T & S_{k-1}^{k-1} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (S_k^{k+1-r})^T & \cdot & \cdot & S_{k+1-r}^{k+1-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} P_k \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}^T + Q_2 \quad (2.48)$$

Avec

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k \text{ et } K = \lim_{k \rightarrow \infty} K_k$$

Malgré la dimension élevée de P qui est $(r+1)n \times (r+1)n$, on déduit que seule la sous-matrice $(S_0^0 \ S_0^1 \ S_0^2 \ \dots \ S_0^r)$ doit être déterminée pour obtenir la solution complète P , cela réduit les besoins de calcul et rend l'approche très attractive.

Pour la simplicité des notations, si on pose $R = \lambda_r I$, $Q_1 = \lambda_1 I$, $Q_2 = \lambda_2 I$ on déduit que la matrice P est de la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} S_0^0 & S_0^1 & S_0^2 & \dots & S_0^r \\ S_0^{1T} & S_0^0 + \lambda_2 I & S_0^1 & \dots & S_0^{r-1} \\ S_0^{2T} & \cdot & S_0^0 + 2\lambda_2 I & \dots & S_0^{r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_0^{rT} & \cdot & \cdot & \cdot & S_0^0 + r\lambda_2 I \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Dans ce qui suit, on considère le comportement de l'approche proposée en présence de w_k et v_k :

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} + w_k \quad (2.50)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^h C_i x_{k-i} + v_k \quad (2.51)$$

Avec w_k et v_k sont des bruits Gaussiens blancs de moyens nuls avec une covariance

$$E \left(\begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_j \\ v_j \end{pmatrix}^T \right) = \begin{pmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{R} \end{pmatrix} \delta_{kj}$$

Avec δ_{kj} est le delta Kronecker.

On veut trouver la meilleure estimation sans biais de x_k au sens de la variance minimum.

On pose $w_k = 0$ et $v_k = 0$

On a :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K(y_k - \hat{y}_k) \\ &= \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} + K y_k - K \hat{y}_k \\ &= \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} - K \hat{y}_k + K y_k \\ &= \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} - K \left(\sum_{i=0}^r C_i \hat{x}_{k-i} \right) + K y_k \\ &= \sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} - \left(\sum_{i=0}^r K C_i \hat{x}_{k-i} \right) + K y_k \\ &= \left[\sum_{i=0}^r A_i \hat{x}_{k-i} - K C_i \hat{x}_{k-i} \right] + K y_k \\ &= \sum_{i=0}^r (A_i - K C_i) \hat{x}_{k-i} + K y_k \end{aligned}$$

Ce qui ramène au résultat suivant :

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^r F_i \hat{x}_{k-i} + K y_k \quad (2.52)$$

Avec

$$F_i = (A_i - K C_i), \forall i = 0, \dots, r.$$

Les matrices K et F_i doit être former de la manière qui assure la meilleure estimation sans biais de x_k au sens de la variance minimum.

On a la condition d'estimation suivante :

$$E(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) = 0 \quad (2.53)$$

(2.53) implique :

$$x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = 0 \quad (2.54)$$

Remplaçant (2.52) dans (2.54) on obtient :

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \sum_{i=0}^r F_i \hat{x}_{k-i} - K y_k &= 0 \\ \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} - \sum_{i=0}^r F_i \hat{x}_{k-i} - K y_k &= 0 \\ \sum_{i=0}^r F_i \hat{x}_{k-i} + K y_k &= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} \\ \sum_{i=0}^r F_i \hat{x}_{k-i} &= \sum_{i=0}^r A_i x_{k-i} - K \left(\sum_{i=0}^r C_i x_{k-i} \right) \\ F_d \hat{x} &= A_d x - K C x \\ F_d \hat{x} &= (A_d - K C) x \end{aligned}$$

On a

$$x - \hat{x} = 0$$

Avec

$$x = \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-r} \end{pmatrix} \text{ et } \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-r} \end{pmatrix}.$$

Ce qui ramène au résultat suivant :

$$F_d = A_d - KC \quad (2.55)$$

Avec

$$F_d = (F_0 \quad F_1 \quad \dots \quad F_r).$$

De la condition de la variance minimum :

$$\frac{\partial(\text{trace}(S_0^0))}{\partial K} = 0 \quad (2.56)$$

Avec

$$S_0^0 = E((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})^T)$$

On déduit le gain matriciel optimal :

$$K = A_d P C^T (C P C^T + \bar{R})^{-1} \quad (2.57)$$

Où

$$P = (A - GC)P(A - GC)^T + GRG^T + Q \quad (2.58)$$

$$\text{Avec } G = \begin{pmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_0^i = E((x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})(x_{k+1-i} - \hat{x}_{k+1-i})^T) \quad \forall i = 0, \dots, r.$$

Remarque 2.2.1. *Le filtre obtenu (2.52) est en fait le même que l'observateur d'état proposé (2.11). Par conséquent, nous concluons que lorsqu'il est utilisé dans un contexte stochastique avec $R = \bar{R}$, $Q_1 = \bar{Q}$ et $Q_2 = 0$, il devient un filtre optimale pour le système (2.50),(2.51).*

Exemple : Considérons un modèle de système à temps discret obtenue à partir d'un système à temps continue du troisième ordre donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}_0 x(t) + \bar{A}_1 x(t - \tau_1) + \bar{A}_2 x(t - \tau_2) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= C_0 x(t) \end{aligned}$$

décrit par les paramètres suivants :

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{A}_1 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = (1 \ 1 \ -1), \tau_1 = 0.5, \tau_2 = 1 \text{ et } u = 3 \sin(\pi t).$$

Dans le but d'obtenir une très bonne précision, on fixe un temps de simplification T tel que $T < \min(\tau_1, \tau_2)$. Dans cet exemple nous prenons $T = 0.01$, $r = \tau_2 \setminus T = 1 \setminus 0.01 = 100$.

On obtient le système à retard à temps discret suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_0 x_k + A_{50} x_{k-50} + A_{100} x_{k-100} + B u_k \\ y_k &= C_0 x_k \end{aligned}$$

Avec

$$A_0 = I_3 + T \bar{A}_0, A_{50} = T \bar{A}_1, A_{100} = T \bar{A}_2 \text{ et } B = T \bar{B}.$$

Plusieurs simulations sur le Matlab-Simulink ont validé ce modèle. Afin de montrer les hautes performances de la technique proposée, deux résultats de simulation ont été donnés :

Cas déterministe : la matrice de gain de l'observateur est donné par :

$K = [0.0580 \ 0.4171 \ -0.3381]^T$, où les matrices arbitraires R et Q sont identiques.

Cas stochastique : la matrice de gain est donné par :

$K = [0.0603 \ 0.4114 \ -0.3359]^T$, où les matrices de covariance \bar{R} et \bar{Q} sont des matrices diagonales avec un écart-type de w_k et v_k égal à 10^{-2} .

Les résultats de simulation sont illustrés sur les deux figures suivantes :

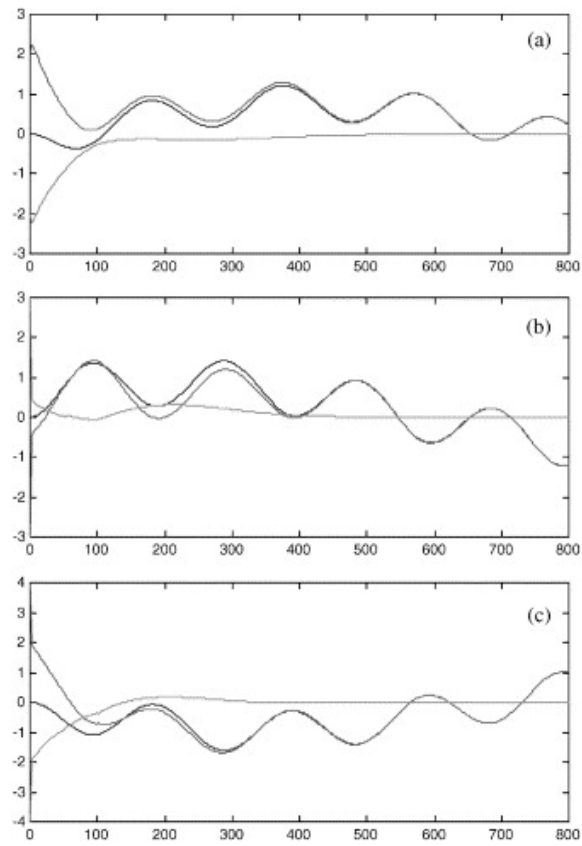


FIGURE 2.1 – Comportement de l'observateur d'état proposé par rapport au temps d'échantillonnage k dans le cas déterministe

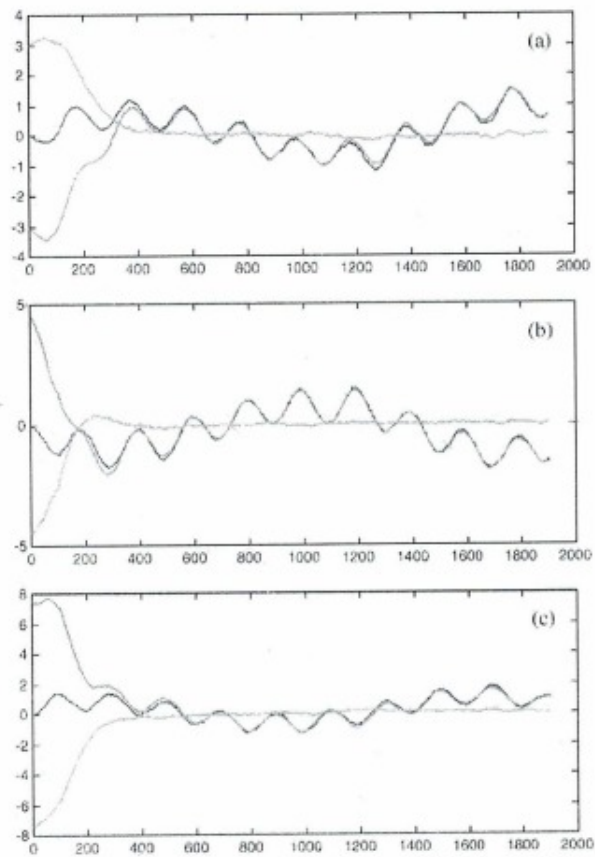


FIGURE 2.2 – Comportement de l'estimateur d'état proposé par rapport au temps d'échantillonnage k en présence de bruits

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré la conception d'observateurs d'ordre réduit pour les systèmes linéaires avec des retards à la fois dans les variables d'état et de sortie. Le résultat principal est que les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique ont été effectuées par l'approche de Lyapunov.

De plus, quelques remarques sur la conception et la mise en œuvre ont été données.

2.4 Annexe A

Trace d'une Matrice

En Algèbre linéaire, la trace d'une matrice carrée A est définie comme la somme de ses coefficients diagonaux et souvent notée $Tr(A)$.

Soit la matrice carré A donné par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

2.5 Annexe B

La variance

La variance est l'écart carré moyen entre chaque donnée et le centre de la distribution représenté par la moyenne. Elle est donnée par la formule suivante :

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}$$

Avec

X_i :cours de l'actif X à l'instant i .

\bar{X} :moyenne du cours de l'actif X .

N :nombre de périodes.

Conclusion générale et perspectives

L'étude présentée dans ce mémoire a pour objectif l'application de la commande et l'observation des systèmes dynamiques à retards. Les contributions principales de notre travail ont été regroupées en deux chapitres.

Le premier chapitre a été consacré à la présentation des systèmes dynamiques en général. Des notions importantes sur la contrôlabilité, l'observabilité et l'estimation d'état ont été données, tout en insistant sur les systèmes dynamiques à retards.

Une approche pour l'observateur des systèmes non linéaires retardés a été étudiée en utilisant le théorème des Accroissements Finis (DMVT) qui permet de ramener le problème d'estimation d'état d'un système dynamiques non linéaire à un problème de stabilité d'un système linéaire à paramètres variants (LPV).

Nous avons notamment rappelé quelques notions particulières de stabilité des systèmes à retards basées sur une approche temporelle liée à la seconde méthode de Lyapunov.

Le deuxième chapitre, a fait l'objet d'étude sur la synthèse d'observateur pour les systèmes à retards, tout en traitant une conception d'observateur pour des systèmes à temps discret avec des retards dans les variables d'état et de mesure. Un exemple à été donné à la fin de ce chapitre, dans lequel des résultats de simulation ont été présentés pour illustrer l'efficacité de l'observateur proposé.

Comme perspectives à notre travail, nous proposons de développer les points suivant :

- Etude des cas où le retard est inconnu ou variable.
- Insertion de l'observateur dans une chaîne de commande par retour de sortie.

Bibliographie

- [1] Jean-Michel Coran; Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires, cours donné dans "Les journées mathématiques X-UPS en 1999". <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups99-02.pdf>.
- [2] Carolina Albea-Sanchez; calbea@laas.fr; <http://homepages.laas.fr/calbeasa/>; M2 ISTR (UE Réseaux et Commande), Représentation, Analyse et commande des systèmes à retards.
- [3] Amine SBOUI; Synthèse d'observation pour les systèmes non linéaires à retards; Université de CAEN/BASSE-NORMANDIE, U.F.R. :Sciences CAEN, Ecole doctorale :SIMEM; Décembre 2010.
- [4] Trélat, E. et Haberkorn, T.; Cours d'Automatique Master de Mathématiques, Université d'Orléans, premier trimestre.
- [5] Claude Lobry et Tewfik Sari.
- [6] Zemouche, A; Sur l'observation de l'état des systèmes dynamiques non linéaires. Univ-Louis Pasteur Strasbourg, 2007.
- [7] A. Zemouche, M. Boutayeb and G. Iulia Bara Observer Design for a class of nonlinear Time-Delay Systems; proceedings of the 2007 American Control Conference Marriott Marquis Hotel at Times Square; NEW York City, USA, July 11-13, 2007 :1676-1681.
- [8] Alexandre Seuret; Commande et observation des systèmes à retards variables :théorie et applications; Ecole Centrale De Lille Université Des Sciences et Technologies De Lille; Octobre 2006.
- [9] related [:https://homepages.laas.fr/adoncesc/Andrei-Website/Commande.pdf](https://homepages.laas.fr/adoncesc/Andrei-Website/Commande.pdf) retour d'état.
- [10] M. Boutayeb; Observers design for linear time-delay systems; CRAN CNRS, University of Henri Poincaré-Nancy I, 186, rue de Lorraine, Cosnes

et Romain 544000, France. Systems and Control Letters,44(2001) :103-109, 2000