



THÈSE DE MAGISTER

Spécialité : Génie Civil

Option : Modélisation et Calcul Non Linéaire

Présentée par

Mr BENYAHY Karim

Sujet de la thèse

COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE APPLIQUÉ AU CALCUL NON LINÉAIRE DES STRUCTURES

Devant le jury d'examen composé de :

Mr KACHI Mohand Said	Professeur	UMMTO	Président
Mr BOUAFIA Youcef	Professeur	UMMTO	Rapporteur
Mr HAMADOUCHE Djamel	Professeur	UMMTO	Examineur
Mr DEHMOUS Hocine	Maître de conférences A	UMMTO	Examineur

Soutenue le : 12/06 /2013

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter mes respectueux remerciements au Professeur BOUAFIA Youcef, Directeur du Laboratoire de Modélisation expérimentale et numérique des Matériaux et Structures de génie civil (LaMoMS) de l'Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, d'avoir bien voulu proposer et diriger ce mémoire et pour m'avoir permis de le réaliser dans d'excellentes conditions. Son appui, ses précieux conseils et orientations m'ont beaucoup apporté quant à la réalisation de ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à Monsieur HAMADOUCHE Djamel, Professeur au département de Mathématiques de l'UMMTO, pour ses conseils et orientations sur la partie application et validation du calcul fiabiliste et aussi, pour avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je remercie vivement Monsieur KACHI Mohand Said, Professeur à l'UMMTO, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être président du jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur DEHMOUS Hocine, Maître de conférences à l'UMMTO, d'avoir bien voulu participer à ce jury, et d'avoir pris le temps de lire et juger ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du corps enseignant qui a contribué à ma formation.

J'adresse également ma profonde reconnaissance et ma sympathie la plus vive à M^{lle} F. IGUETOULENE, M^r R. MAHTOUT, M^r K. IDDIR, M^{lle} H. HARMIM et M^{me} R. SMAHI pour leurs encouragements.

Enfin, je rends hommage à toute ma famille et à mes amis pour le soutien qu'ils m'ont apporté durant toutes ces années d'études.

DÉDICACES

Je tiens à dédier ce travail à :

- ❖ Mes très chers parents à qui je dois tout et à qui je ne rendrais jamais assez.
- ❖ Mon cher frère et mes chères sœurs.
- ❖ Mes beaux frères et mes neveux.
- ❖ Tous mes amis (es) et toute la famille.

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans la recherche du domaine de sécurité des ouvrages de Génie Civil. Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche fiabiliste. Les événements de l'environnement (champ de forces, action) et comportement des matériaux sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste apportée par un dimensionnement mécanique peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure.

Il s'agit d'une part, d'effectuer une modélisation non linéaire (non linéarité mécanique et géométrique) des structures spatiales poteaux-poutres métalliques et mixtes (acier - béton), puis de proposer une formulation pour le calcul non linéaire des structures spatiales en treillis. D'autre part, de proposer ou d'adapter une formulation et modélisation de la fiabilité. Le principe de *Hasofer-Lind* peut être appliqué, en première approche, pour l'estimation de l'indice de fiabilité, des scénarios et de la probabilité de défaillance.

Nous validons notre formulation et modélisation du modèle mécanique, en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux ou à des solutions analytiques. Les vérifications effectuées ont porté sur des structures en béton armé, métalliques, mixtes et en treillis. Enfin, nous traitons des exemples d'applications de la méthode de *Hasofer-Lind* pour valider la démarche probabiliste de l'analyse de fiabilité.

MOTS CLÉS

Modélisation – non linéarité mécanique – non linéarité géométrique – probabilité – fiabilité – surface de réponse – probabilité de défaillance.

ABSTRACT

The present study goes into the search for the domain of safety of works of Civil Engineering. The problem is approached by the definition of the safety by a probability threshold: we appeal to the reliability-approach. The events of the environment (field of strength, action) and behavior of materials are simulated by random and deterministic variables. The objective is to show how a reliability-evaluation brought by a mechanical sizing can be obtained. For that purpose, it is necessary to have a mechanical model and a model reliability representing correctly the behavior of this type of structure.

It is a question on one hand, to make a nonlinear modeling (mechanical and geometrical nonlinearity) of the spatial structures column-beam metallic and composite (steel - concrete), then of proposing a formulation for the nonlinear calculation of the spatial structures in trusses. On the other hand, propose or adapt a formulation and a modeling of the reliability. The principle of Hasofer-Lind can be applied, in first approach, for the estimation of the reliability index, scenarios and the probability of failure.

We validate our formulation and modeling of the mechanical model, by confronting the results of our calculations with experimental results or with analytical solutions. The made checks concerned reinforced concrete, metallic, composite, and in truss structures. Finally, we treat examples of applications of the method of Hasofer-Lind to validate the probability approach of the analysis of reliability.

KEY WORDS

Modeling – nonlinearity mechanical – nonlinearity geometrical - probability – reliability - response surface - probability of failure.

LISTE DES FIGURES

I.1. Diagramme représentant la loi de comportement du béton	9
I.2. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [01]	10
I.3. Comportement de béton ordinaire avant fissuration	11
I.4. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton sur le bord tendu [01]	12
I.5. Comportement réel du béton confiné en compression [11]	13
I.6. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique avec raffermissment)	14
I.7. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite)	15
I.8. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis	16
I.9. Comportement des aciers précontraint	16
I.10. Effet du blocage de l'ancrage gauche	19
I.11. Recherche du diagramme après rentré d'ancrage gauche	20
I.12. Position du point C jusqu'ou se fait sentir la rentrée d'ancrage	20
I.13. Discrétisation d'une section transversale de béton en tables trapézoïdales	21
II.1. Poutre WARREN	26
II.2. Poutre en (N)	26
II.3. Poutre en (X)	26
II.4. Poutre en (K)	26
II.5. Poutre à membrures non parallèles	27
II.6. Poutre échelles ou poutres Vierendeel	27
II.7. Les fermes	28
II.8. Poutres triangulaires tridimensionnelles	28
II.9. Doubles nappes tridimensionnelles	29
II.10. Systèmes de nœuds de treillis	30
II.11. Axes locaux d'un élément poutre	31
II.12. Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle	31
II.13. Axes principaux d'un élément poutre	32
II.14. Rotations correspondant à un élément vertical	33
II.15. Position de l'axe x du repère intrinsèque par rapport au repère local	35
II.16. Orientation du repère intrinsèque par rapport au repère (x, y_1, z_1)	36
II.17. Orientation initiale de l'élément par rapport au repère absolu	37
II.18. Élément barre tridimensionnelles	37
II.19. Repères d'un élément barre de treillis	43
II.20. Représentation schématique du principe de fonctionnement d'une poutre treillis	51
III.1. Comportements d'un trajet de chargement	54
III.2. Méthode purement incrémentale	55
III.3.a. Méthode Newton-Raphson standard	56
III.3.b. Méthode Newton-Raphson modifiée	57
III.3.c. Méthode de la sécante	58
III.4. Méthode mixte	59
III.5. Représentation de la méthode des substitutions utilisant les matrices "cordes"	61

III.6. Algorithme d'équilibre d'une section en profilé métallique pour un élément barre	63
III.7. Organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une section en profilé métallique	64
III.8. Représentation de la méthode des substitutions utilisant les matrices "cordes"	65
III.9. État d'équilibre de la structure avant l'étape de correction	69
III.10. Algorithme d'équilibre de la structure en treillis	71
III.11. Organigramme de la recherche de l'état d'équilibre de la structure en treillis	72
IV.1. Représentation de l'indice de Cornell [32]	78
IV.2. Point de conception [27]	80
IV.3. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF)	83
IV.4. Représentation du portique [30]	84
IV.5. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	87
V.1 : Portique P7 de Cranston	91
V.2 : Évolution de la flèche verticale à mi-travée sous la charge P	92
V.3 : Poutre de STUSSI et de KOLLBRUNNER	92
V.4 : Évolution de la flèche de la section au niveau du plan de symétrie	93
V.5 : Portique rectangulaire bi-encasté de Nelson, Wright et Dolphin	94
V.6 : Évolution de la flèche verticale de la section au droit de la charge	94
V.7 : Poutre continue d'ANSOURIAN	95
V.8 : Évolution de la flèche en fonction de la charge au niveau de la section A-A	96
V.9 : Évolution de la flèche en fonction de la charge au niveau de la section C-C	97
V.10 : Poutre isostatique à sections mixtes PI1	97
V.11 : Poutre isostatique à sections mixtes PI2	98
V.12 : Loi de comportement du profil acier	99
V.13 : Poutre isostatique PI1 - Courbe charge - flèche	100
V.14 : Poutre isostatique PI2 - Courbe charge - flèche au niveau de la charge P	101
V.15 : Poutre isostatique PI2 - Courbe charge - flèche au niveau de la section B-B	101
V.16 : Poutre treillis plane	102
V.17 : Poutre treillis plane - Courbe charge - flèche	102
V.18 : Pont à poutre triangulée	103
V.19 : Condition de chargement du pont à poutre triangulée	103
V.20 : Pont à poutre triangulée - Courbe charge - flèche	104
V.21.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire P	105
V.21.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire δ	105
V.22 : État limite approchée dans l'espace physique $G(P, \delta)$	107
V.23 : État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(P, \delta)$	108
V.24 : Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (P, δ)	108
V.25 : État limite approché des différents cas dans l'espace centré réduit	110
V.26.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire λ	112
V.26.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire U/L	112
V.27 : État limite approchée dans l'espace physique $G(\lambda, U/L)$	114
V.28 : État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(\lambda, U/L)$	115
V.29 : Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires $(\lambda, U/L)$	115
V.30 : État limite approché des différents cas dans l'espace centré réduit	117

LISTE DES TABLEAUX

IV.1. La moyenne et l'écart-type des variables du problème	84
IV.2. Résultats du problème	84
V.1. Caractéristiques du ferrailage longitudinal	91
V.2. Caractéristiques mécaniques du béton	95
V.3. Caractéristiques mécaniques des aciers	96
V.4. Géométries des sections de poutres	98
V.5. Caractéristiques mécaniques du béton	98
V.6. Caractéristiques mécaniques des aciers	99
V.7. Poutre PI1	99
V.8. Poutre PI2	100
V.9. Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite	106
V.10. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste	108
V.11. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires	109
V.12. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités	110
V.13. Paramètres des lois des variables aléatoires pour l'état-limite	113
V.14. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste	115
V.15. Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires	116
V.16. Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités	117

NOTATIONS PRINCIPALES

$\varphi(\varepsilon)$: Définit le comportement réel des matériaux,
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton à l'origine,
 ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,
 f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j ,
 k_b et \hat{k}_b : Paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin.
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton,
 f_{tj} : Résistance du béton à la traction,
 ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,
 ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,
 ε_{bt} : Déformation de la fibre du béton la plus tendue,
 E_s : Valeur contrôlant la pente de la partie descendante de la courbe de comportement du béton confiné,
 f_{cc} : Contrainte de compression pic,
 ε_{cc} : Déformation correspondant à la contrainte f_{cc} ,
 ε_{cu} : Déformation de rupture d'un béton non confiné,
 ε_{ccu} : Déformation de rupture d'un béton confiné,
 f_l : Contrainte de compression latérale effective due au confinement,
 f_{c0} : Contrainte de compression du béton non confinée à l'âge j ,
 E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du composite à l'origine,
 ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,
 ε_{s1} : Déformation correspondant à la fin du palier plastique,
 ε_{s2} : Déformation correspondant à la fin du raffermissement,
 ε_{su} : Déformation de rupture,
 E_a : Module longitudinal de l'acier,
 ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,
 σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,
 ε_u : Déformation ultime de l'acier,
 E_a : Module d'Young de l'acier à l'origine,
 σ_e : Limite élastique conventionnelle à 2‰,
 $0,7 \cdot \sigma_e$: Contrainte où s'arrête le diagramme linéaire,
 σ_p : Contrainte dans l'acier de précontrainte,
 ε_p : Déformation dans l'acier de précontrainte,
 E_p : Module d'Young à l'origine,
 f_{peg} : Limite élastique conventionnelle à 0,1‰,
 $0,9 \cdot f_{peg}$: Contrainte où s'arrête le diagramme linéaire,
 $1,06 \cdot f_{peg}$: Contrainte de rupture,
 σ_{p0} : Tension à l'origine,
 e : Base des logarithmes népériens,
 f : Coefficient de frottement en courbe de l'armature sur la gaine (rd^{-1}),
 $\alpha(s)$: Somme des valeurs absolues des déviations angulaires entre l'origine et le point d'abscisse curviligne s (rd),
 φ : Coefficient de perte de tension par unité de longueur (m^{-1}),

s : Abscisse curviligne du point où l'on calcule la tension dans le câble (m),
 f_{prg} : Contrainte de rupture garantie,
 f_{peg} : Limite d'élasticité garantie,
 ε_x : Déformation du centre de gravité de la section totale due à l'effort normal N ,
 $\{F_{mn}\}$: Contribution dues au béton et /ou au profilé métallique,
 $\Delta\sigma_m(y, z)$: Contrainte normale en un point courant de la section de béton et /ou au profilé métallique,
 $[k_{mn}]$: Matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales de la matrice de la section à la variation de déformation normale de la section,
 $\{F_{sn}\}$: Vecteur des sollicitations normales à la section,
 e : Variation de longueur de l'élément,
 L_0 : Longueur initiale de l'élément avant déformation,
 L : Longueur de l'élément après déformation,
 $[B]$: Matrice de transformation géométrique,
 $[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément barre dans le repère local,
 $[R_0]$: Matrice de transformation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle
 $[K_X]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXYZ,
 $[S_S]_{i-1}$: Matrice de souplesse "corde" de la section à l'itération (i-1),
 ε_s : Déformation à l'étape précédente équilibrée,
 $\{\Delta F_S\}^r$: Accroissement d'efforts à l'étape r ,
 $\{\Delta\varepsilon\}_0$: Accroissement de déformations initiales,
 $[K]_i$: Matrice de rigidité "corde" de la structure à l'itération (i),
 $\{U_S\}$: Vecteur de déplacement des nœuds de la structure correspondant à la dernière étape stable,
 $\{\Delta P\}^r$: Accroissement du chargement appliqué à l'étape r ,
 $\{P\}$: Chargement cumulé jusqu'à l'étape ($r - 1$),
 $f_x(x_1, \dots, x_n)$: Densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x ,
 Φ : Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1),
 F_{x_i} : Fonction de distribution de la variable x_i ,
 m_R, m_S : Moyennes de la résistance R et de la sollicitation S ,
 σ_R, σ_S : Ecart types de la résistance R et de la sollicitation S ,
 P^* : Point de défaillance le plus probable, est le point de l'espace normalisé qui réalise ce minimum,
 $\alpha^{(k)}$: Vecteur des cosinus directeurs (ou le vecteur du gradient normalisé) de H en $P^{(k)}$,

SOMMAIRE

RÉSUMÉ	III
ABSTRACT	IV
INTRODUCTION GÉNÉRALE	2

CHAPITRE 1 : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

1. 1. Introduction	5
1. 2. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire	5
1. 2.1. Comportements non linéaires des structures	5
1. 2.2. Évolution de l'analyse non linéaire	6
1. 2.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes	6
1. 2.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles	8
1. 3. Modélisation des matériaux à comportement réels	9
1. 3.1. Comportement du béton ordinaire	10
1. 3.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN	10
1. 3.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT	11
1. 3.2. Comportement du béton ordinaire confiné	12
1. 3.2.1. Comportement du béton ordinaire confiné en compression	12
1. 3.3. Comportement des aciers	14
1. 3.3.1. Comportement des aciers passifs	14
1. 3.3.2. Comportement des aciers actifs	16
1. 3.3.3. Comportement des aciers de charpente	17
1. 4. Étude de la précontrainte	17
1. 4.1. Géométrie de la précontrainte	17
1. 4.2. Pertes de tension dans les câbles	17
1. 4.2.1. Perte de tension par frottement	18
1. 4.2.2. Perte de tension par recul d'ancrage	18
1. 5. Modélisation des sections	21
1. 5.1. Modélisation de la section de béton	21
1. 5.2. Modélisation de la section du profil acier	22
1. 5.3. Modélisation géométrique des armatures	22
1. 5.3.1. Les armatures passives	22
1. 5.3.2. Les armatures actives	22
1. 6. Conclusions	22

CHAPITRE 2 :
*COMPORTEMENT ET MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DES STRUCTURES
EN TREILLIS*

2. 1. Introduction	25
2. 2. Les différentes formes de structures en treillis	25
2. 2.1. Les poutres triangulaires	25
2. 2.1.1. Les poutres triangulaires bidimensionnelles	25
2. 2.1.1.1. Les poutres à membrures parallèles	25
2. 2.1.1.2. Les poutres à membrures non parallèles	27
2. 2.1.1.3. Les poutres échelles ou poutres Vierendeel	27
2. 2.1.1.4. Les fermes	28
2. 2.1.2. Les poutres triangulaires tridimensionnelles	28
2. 2.2. Les treillis spatiaux	28
2. 2.2.1. Les doubles nappes à poutres croisées ou bidimensionnelles	28
2. 2.2.2. Les doubles nappes tridimensionnelles	29
2. 3. Modélisation géométrique des ossatures spatiales	30
2. 3.1. Modélisation géométrique d'un élément poutre tridimensionnelle	31
2. 3.2. Modélisation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle	37
2. 4. Modélisation non linéaire des structures en treillis	39
2. 4.1. Analyse de la section d'un élément barre en élasticité non linéaire	39
2. 4.1.1. Calcul des sollicitations internes	40
2. 4.1.2. Calcul des sollicitations externes	41
2. 4.1.3. Équilibre de la section	41
2. 4.2. Matrice de rigidité d'un élément barre en élasticité non linéaire	42
2. 4.2.1. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère intrinsèque	42
2. 4.2.2. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère local	44
2. 4.2.3. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère absolu	49
2. 5. Comportement des structures en treillis	51
2. 6. Conclusions	52

CHAPITRE 3 :
ALGORITHMES DE RÉOLUTION

3. 1. Introduction	54
3. 2. Les techniques numériques pour la résolution des problèmes non linéaire	54
3. 2.1. Méthode purement incrémentale	55
3. 2.2. Méthode itérative	55
3. 2.2.1. La méthode Newton-Raphson standard	56
3. 2.2.2. La méthode Newton-Raphson modifiée	57
3. 2.2.3. La méthode de la rigidité sécante	58
3. 2.3. Méthode incrémentale itérative où mixte	59
3. 3. Algorithme et méthode général de résolution	60
3. 3.1. Algorithme d'équilibre de la section en profilé métallique	60
3. 3.1.1. Méthode itérative de résolution et critère de convergence	60
3. 3.1.2. Algorithme de résolution	61
3. 3.1.3. Organigramme de calcul	63
3. 3.2. Algorithme d'équilibre de la structure en treillis	64
3. 3.2.1. Algorithme de résolution	64
3. 3.2.2. Séquences de calcul	66
3. 3.2.3. Organigramme de calcul	71
3. 4. Conclusions	73

CHAPITRE 4 :
COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE DANS LE CAS DES STRUCTURES

4. 1. Introduction	75
4. 2. Variables de base	75
4. 3. Fonction d'état limite	76
4. 4. Probabilité de défaillance	76
4. 5. Transformation isoprobabiliste	77
4. 6. Indice de fiabilité	77
4. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell	77
4. 6.2. Indice de Hasofer et Lind	79
4. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant	79
4. 8. Recherche du point de conception	80
4. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL}	81
4. 10. Couplage mécano-fiabiliste	85
4. 10.1. Introduction	85
4. 10.2. Méthode par surface de réponse	85
4. 10.2.1. Surface de réponse analytique	86
4. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	87
4. 11. Conclusions	88

CHAPITRE 5 :
APPLICATION ET CONFRONTATION DES RÉSULTATS OBTENUS À DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

5. 1. Introduction	90
5. 2. Validation du calcul non linéaire	90
5. 2.1 Exemples de structures en béton armé	90
5. 2.1.1. Portique rectangulaire bi-articulé	90
5. 2.2. Exemples de structures mixtes et métalliques	92
5. 2.2.1. Poutre continue en profilé métallique de STUSSI et de KOLLBRUNNER	92
5. 2.2.2. Portique en profilé bi-encastres de NELSON, WRIGHT et DOLPHIN	93
5. 2.2.3. Poutres continues à section mixte	95
5. 2.2.4. Poutre isostatique à section mixte	97
5. 2.3. Exemples de structures triangulés	101
5. 2.3.1. Poutre treillis plane	101
5. 2.3.2. Pont à poutres triangulées	103
5. 3. Validation et évaluation de la fiabilité des structures étudiées	105
5. 3.1. Application à la poutre treillis plane	105
5. 3.2. Application au pont à poutres triangulées	112
5. 4. Conclusions	119

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES	121
--	------------

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	124
--	------------

ANNEXES	130
----------------------	------------

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

➤ **Contexte du mémoire :**

Avant le développement des programmes informatiques, la modélisation des structures était basée sur le formalisme linéaire de la théorie de l'élasticité établie au XIX^{ème} siècle en considérant un matériau à comportement linéaire, homogène et intègre. Or, il n'existe aucun matériau dont le comportement est strictement linéaire élastique lors d'une étude aux états limites ultimes.

Depuis quelques années, le développement accéléré des méthodes d'analyse numérique, notamment la méthode des éléments finis, ainsi que le progrès dans le domaine de l'informatique, a permis d'élaborer des approches plus réalistes pour la simulation du comportement des structures les plus complexes qui exigent une modélisation exacte de la géométrie, des lois constitutives réalistes et une technique de résolution efficace.

Une telle analyse est aujourd'hui indispensable pour les structures de forme et fonctionnement complexes (bâtiments élevés, ponts de grande portée, ...) subissant des charges importantes, surtout quand leur défaillance a des conséquences humaines et économiques graves.

D'autre part une telle analyse ne permet pas de prendre en compte les incertitudes aléatoires liées aux propriétés matérielles, aux chargements, ou à la géométrie. C'est pour cela de nos jours, il est indispensable d'élaborer une méthode qui permet d'obtenir des prédictions numériques fiables. Cette nécessité a conduit à faire appel à l'analyse fiabiliste qui est basée sur le calcul probabiliste.

De plus, la question de développement d'un code de calcul permettant de minimiser le temps de calcul pour l'évaluation de l'indice de fiabilité en assurant la précision des résultats est un problème d'actualité.

Le présent travail se situe dans ce contexte ; d'une part, en introduisant le comportement mécanique des structures métalliques, mixtes et en treillis, et d'autre part, en développant un outil numérique suffisamment performant et précis pour l'estimation de la fiabilité des structures étudiées. Enfin, on combinera entre les techniques de fiabilité et le code de calcul non linéaire qui constituent la méthode de fiabilité des structures par couplage mécano-fiabiliste.

➤ Objectifs :

Les objectifs principaux du mémoire se résument comme suit :

- Proposition d'une formulation et modélisation dans le cadre d'un calcul non linéaire (géométrique et mécanique) des structures en treillis et des structures métalliques, mixtes respectivement ;
- Adaptation d'une méthode classique de fiabilité ;
- Enfin, après avoir implémenté le modèle mécanique et le modèle fiabiliste, on procédera à leurs combinaison avec une méthode de couplage indirecte afin d'estimer l'indice de fiabilité des scénarios et d'évaluer la probabilité de défaillance au moyen de techniques classiques en fiabilité.

➤ Organisation du mémoire :

Le premier chapitre est une étude bibliographique sur le calcul non linéaire et la modélisation des matériaux en tenant compte du comportement réel.

Le second chapitre décrit la formulation proposée pour la modélisation géométrique et le calcul non linéaire des structures en treillis, et leurs comportements vis-à-vis du chargement qui leur est appliqué.

Le troisième chapitre présente les techniques numériques utilisées dans la plupart des codes de calcul non linéaire en éléments finis, et l'algorithme utilisé dans notre étude pour résoudre le problème du calcul non linéaire des structures en treillis.

Le quatrième chapitre aborde le couplage mécano-fiabiliste dans le cas des structures, on présente une technique classique de calcul de la fiabilité des structures (méthode d'*Hasofer-Lind*) qui fait appel aux probabilités et aux statistiques. Puis, on associe la méthode de fiabilité à l'analyse des problèmes non linéaires à l'aide d'une méthode de couplage indirecte.

Enfin, le dernier chapitre présente une série d'exemples d'applications et de confrontations à des résultats expérimentaux et numériques afin de valider l'implémentation qui a été faite sur le calcul non linéaire des structures métalliques, mixtes, et en treillis, et aussi pour évaluer la précision des résultats obtenus, et estimer leurs fiabilités par le couplage mécano-fiabiliste.

On termine par une conclusion générale et quelques perspectives issues de cette étude.

CHAPITRE 1

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Sommaire

1. 1. Introduction	5
1. 2. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire	5
1. 2.1. Comportements non linéaires des structures	5
1. 2.2. Évolution de l'analyse non linéaire	6
1. 2.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes	6
1. 2.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles	8
1. 3. Modélisation des matériaux à comportement réels	9
1. 3.1. Comportement du béton ordinaire	10
1. 3.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN	10
1. 3.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT	11
1. 3.2. Comportement du béton ordinaire confiné	12
1. 3.2.1. Comportement du béton ordinaire confiné en compression	12
1. 3.3. Comportement des aciers	14
1. 3.3.1. Comportement des aciers passifs	14
1. 3.3.2. Comportement des aciers actifs	16
1. 3.3.3. Comportement des aciers de charpente	17
1. 4. Étude de la précontrainte	17
1. 4.1. Géométrie de la précontrainte	17
1. 4.2. Pertes de tension dans les câbles	17
1. 4.2.1. Perte de tension par frottement	18
1. 4.2.2. Perte de tension par recul d'ancrage	18
1. 5. Modélisation des sections	21
1. 5.1. Modélisation de la section de béton	21
1. 5.2. Modélisation de la section du profil acier	22
1. 5.3. Modélisation géométrique des armatures	22
1. 5.3.1. Les armatures passives	22
1. 5.3.2. Les armatures actives	22
1. 6. Conclusions	22

1. 1. Introduction :

Dans ce chapitre nous exposerons les points principaux de l'étude bibliographique que nous avons faite, concernant le calcul non linéaire et la modélisation des structures. Ensuite nous présenterons les modèles utilisés dans notre analyse qui tiennent compte du comportement réel des matériaux.

1. 2. Aperçu bibliographique sur l'analyse numérique non linéaire :

1. 2.1. Comportement non linéaires des structures :

L'hypothèse du comportement des structures linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, la modélisation du comportement réel des matériaux fait appel à une relation contraintes-déformations qui est non linéaire, aussi, de nos jours les structures sont de plus en plus légères et soumises à des excitations importantes, ce qui conduit à de grands déplacements et à une relation déplacements-déformations non linéaire. Ainsi on distingue différentes sources de non linéarités possibles dans les structures [22] :

- Les **non linéarités matérielles** en petits déplacements et petites et grandes déformations, où la relation contraintes-déformations est non linéaire. Elles peuvent provenir de la loi de comportement, de la fissuration du matériau, du comportement du béton tendu entre deux fissures.
- Les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et petites déformations, où la relation déplacements-déformations peut être non linéaire. Elles peuvent provenir des instabilités de forme de pièces élancées ou de structure élancées à nœuds déplaçable.
- Les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations, où les relations contraintes-déformations et déplacements-déformations sont généralement non linéaires. C'est le cas le plus complexe de l'analyse non linéaire des structures.
- Les **non linéarités** provenant des **conditions aux limites**, dans ce cas les forces de réactions ou de liaisons entre plusieurs structures dépendent d'une manière non linéaire des déplacements. On peut les trouver lors des modélisations de choc, contact et frottement.

En effet dans ce mémoire on ne s'intéresse pas aux **non linéarités** provenant des **conditions aux limites**, et les **non linéarités géométriques** en grands déplacements et grandes déformations.

1. 2.2. Évolution de l'analyse non linéaire :

Les bases de l'analyse non linéaire matérielle ont été les premières à être établies à cause de leur simplicité. Deux différentes approches ont été proposées : la méthode des déformations initiales et celle du module tangent. Dans la première méthode, pour un accroissement de charge, on calcul un accroissement des déformations plastiques qui sont ensuite considérées comme des déformations initiales pour corriger l'état des contraintes dans le milieu étudié. Cette technique ne pouvant s'appliquer dans le cas des matériaux sans écrouissage a été vite abandonnée en faveur de la technique du module tangent, actuellement connue sous le nom de méthode incrémentale, où on effectue le calcul d'une matrice tangente qui dépend des lois de comportement incrémentales. En 1969 **Zienkiewicz et al** [16] ont proposé plus tard la technique dite de contraintes initiales. Puis en 1973 **Frey** [16] à démontrer que cette dernière approche n'est qu'un cas particulier de la méthode générale dite incrémentale.

Après une série d'applications spécifiques, les équations d'une formulation générale de l'analyse non linéaire géométrique ont été établies par **Yagmai** [16] en 1968 pour la description lagrangienne actualisée où la dernière position d'équilibre de la structure est considérée comme la configuration de référence, et par **Marcial et Oden** [16] à peu près à la même époque pour la description lagrangienne totale où l'on fixe l'état initial comme référence (**Frey** [16] 1978). Dans les deux cas, les déformations étaient supposées infinitésimales.

A. Grelat [01] a été parmi les premiers à prendre en compte dans la simulation ces deux types de non linéarité. Le comportement du béton comprimé a été modélisé par la loi de Sargin, et celui des zones tendues a été simulé à l'aide d'une forme originale de loi de comportement où le béton est représenté par un diagramme de contrainte fictive triangulaire à partir de la fibre neutre. Ses travaux ont été complétés par **O. Naït-Rabah** [10] qui a étendu les simulations numériques aux structures tridimensionnelles. Afin d'améliorer les simulations des grands déplacements et des grandes rotations, **F. Robert** [05] a proposé d'y introduire une description corotationnelle du mouvement pour le traitement de la non linéarité géométrique. D'autres auteurs ont complété des codes existant en développant des éléments finis spécifiques comme par exemple, **B. Espion** [26] qui a proposé un élément fini plan de poutre à 9 degrés de liberté.

Une présentation exhaustive sur l'analyse non linéaire peut être trouvées dans les références [16], [05].

1. 2.3. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures planes :

Le début de l'analyse non linéaire remonte à 1968, quand **NILSON** [09] propose une analyse non linéaire de structures en béton armé en utilisant la méthode des éléments finis. Aussi dans la même année un article de **JENNINGS** [05], va être le point de départ d'une série de travaux, dont le présent. La non linéarité géométrique en 2D, peut-être prise en compte de façon exacte, grâce à l'additivité et la commutativité des rotations planes.

- En 1970, **FRANKLIN** [10] à développer une étude tenant compte que des effets de non linéarité matérielle, il a élaboré une formulation plane où apparaissent pour chaque nœud d'un élément de poutre 3 degrés de liberté (2 translations et une rotation). Les lois de comportement sont données point par point (multilinéaire). La rigidité du béton tendu entre deux fissures est négligée.

- Dans la même année, **GUNNIN** [10] est le premier qu'a introduit la non linéarité géométrique, la matrice des contraintes initiales (ou rigidité géométrique) est absente. En ce qui concerne les effets de non linéarité matérielle, les rigidités extensionnelles (E.A) et les rigidités flexionnelles (E.I) sont supposées constantes le long de l'élément, tout en négligeant la résistance du béton tendu, puis dans la même année **LAZARO** [05] qui apporte une correction à la formulation de **GUNNIN** en tenant compte de la fissuration.

- En 1972, **MENEGOTTO** et **PINTO** [10] ont utilisé une méthode qui tient compte de la non linéarité géométrique en introduisant l'hypothèse des petits déplacements lors du passage du repère intrinsèque d'un élément à un repère fixe. Et la prise en compte aussi de la non linéarité matérielle dans un repère mobile lié à la position déformée de l'élément.

- En 1978, **GRELAT** [01] c'est inspiré des travaux de **MENEGOTTO** et **PINTO** [10], a développé un programme de calcul des ossatures planes en béton armé, en introduisant la loi de **SARGIN** pour le comportement du béton en compression, et en se basant sur le diagramme parabolique pour le béton tendu.

- En 1979, **FERRARO-MAIA** [14] poursuit le travail de **GRELAT** au CEBTP, en développant la prise en compte des effets différés et de la précontrainte. Cette dernière est introduite par la méthode interne explicitée par **FAUCHART** [14]. L'influence de l'inclinaison des câbles dans la formation de la matrice de rigidité n'est pas prise en compte.

- En 1986, **ESPION** [26] introduit un élément de poutre plane à 9 degrés de liberté. Cette approche est plus complète et réaliste vis-à-vis de la non linéarité matérielle et géométrique. La tension stiffening et les effets différés sont pris en compte. Son modèle a été confronté avec de nombreux résultats publiés.

Dans les travaux cités précédemment, la déformation d'effort tranchant n'est pas prise en compte.

- En 2006, **KACHI MS., FOURE B., BOUAFIA Y., MULLER P.** [02], [03], poursuivent les travaux de **GRELAT** [01] et **NAIT-RABAH** [10], en développant un modèle qui tient compte de l'effet combiné de la flexion plane et de l'effort tranchant en élasticité non linéaire appliqué aux poutres en béton armé et précontraint. Le programme développé a été validé sur plusieurs poutres en béton armé et précontraint qui ont fait l'objet d'essais.

1.2.4. Travaux consacrés à l'analyse non linéaire des structures tridimensionnelles :

- Le premier élément de poutre en béton armé tridimensionnel a été développé par **CHAN** [10] en 1981, l'analyse prend en compte les effets du second ordre, ainsi que les effets différés. L'influence de l'effort tranchant est absente, alors que la torsion est tout à fait découplée. Les sections sont discrétisées en fibres et non pas en couches. La rigidité torsionnelle provient d'une pente dans un diagramme idéalisé tri-linéaire "moment de torsion- rotation de torsion", construit à l'aide d'une théorie de treillis pour déterminer le moment et la rotation de plastification sans tenir compte de l'effort normal. Les vérifications effectuées portent sur des structures planes.

- En 1984, le programme de **MARI** [10] est le prolongement du travail de CHAN. La précontrainte est introduite selon la méthode de KANG [10]. Cependant la validation du modèle se limite uniquement à des exemples théoriques.

- Pour les structures métalliques, on peut citer le travail effectué par **DE VILLE DE GOYET** [05] en 1989. Faisant suite aux travaux de FREY [05], DE VILLE DE GOYET établit un bilan des différentes formulations en grands déplacements et se livre à une comparaison très complète de différents éléments finis. Il introduit un élément fini dit de Marguerre modifié à 7 degrés de liberté, qui modélise le gauchissement des sections.

- En 1990, **NAIT-RABAH** [10], poursuit le travail de GRELAT [01], qui, rappelons-le, est basé sur les coordonnées convectées introduites par JENNIGS [05]. Le programme est étendu aux problèmes tridimensionnels. La prise en compte de la non linéarité matérielle est complète. Les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion sont introduits, mais en faisant l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau sous sollicitations tangentes. Par contre, la non linéarité géométrique n'est que partiellement appréhendée. En effet, les déplacements doivent rester modérés, et les rotations petites. Le programme est validé sur de nombreux cas expérimentaux, ayant néanmoins des déplacements modérés.

- Les développements les plus récents sur le béton armé concernant la formulation de nouvelles lois de comportement s'appuyant sur la théorie de l'endommagement. Cette approche est dictée par le calcul au séisme, pour lequel le chargement est cyclique. Le modèle d'endommagement développé par MAZARS est issu d'une formulation thermodynamique des milieux continus.

- En 1994, **ULM** [45] utilise également un modèle d'endommagement. Il adopte une approche semi-globale : l'élément qu'il utilise est en fait discrétisé en fibres parallèles à la ligne moyenne de l'élément. Chaque fibre dispose d'une loi de comportement, d'un endommagement et d'un historique. Cet élément est inséré dans une description corrélationnelle afin de prendre en compte les effets de la non linéarité géométrique.

- En 1999, **F. ROBERT** [05] poursuit le travail de GRELAT [01] et de NAIT-RABAH [10], a proposé d'y introduire une description corotationnelle du mouvement pour le

traitement de la non linéarité géométrique, en décomposant le mouvement d'une particule en un mouvement de corps rigide de grande amplitude et un mouvement modéré induisant les déformations. Ceci permet de prendre en compte les grands déplacements et les grandes rotations pour des éléments de poutre tridimensionnels alors que la non linéarité matérielle repose sur l'hypothèse des petites déformations.

- En 2011, **ADJRAD A., KACHI MS., BOUAFIA Y., IGUETOULENE F.** [52] ont repris la formulation de NAIT-RABAH [10] qui traite le calcul non linéaire matérielle et géométrique de structures en béton armé et précontraint tridimensionnelles. Et qui prend en compte la non linéarité matérielle, et la non linéarité géométrique sous l'hypothèse que les déplacements doivent rester modérés, et les rotations petites, et sous l'hypothèse d'un comportement linéaire du matériau sous les effets dus à l'effort tranchant et au moment de torsion. Le programme développé a été validé sur de nombreux cas expérimentaux, ayant néanmoins des déplacements modérés.

1. 3. Modélisation des matériaux à comportement réels :

En élasticité non linéaire, les contraintes sont liées aux déformations par la relation suivante : $\sigma = \varphi(\varepsilon)$

Ou :

$\varphi(\varepsilon)$: définit le comportement réel des matériaux.

Nous allons donc présenter les lois des comportements réels retenus pour le béton et l'acier.

Le béton présente un comportement différent en traction et en compression. Une représentation de ce comportement est donnée par la courbe contrainte-déformation ci-dessous :

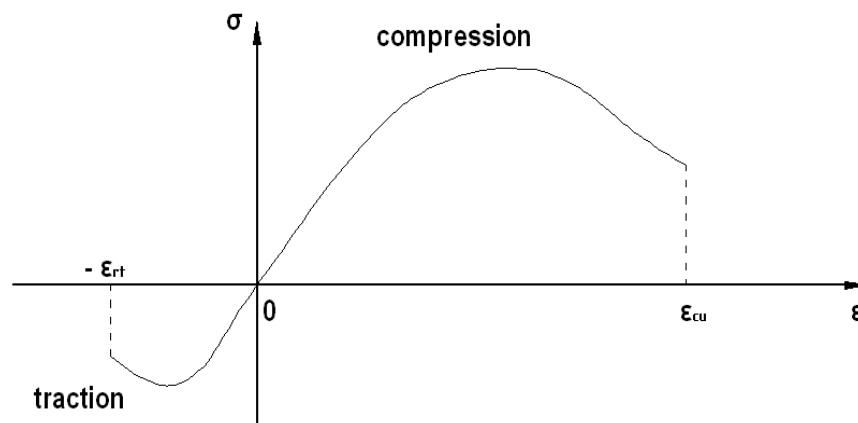


Fig. I.1. Diagramme représentant la loi de comportement du béton

Cette courbe se caractérise par la valeur de $\varphi(\varepsilon)$ qui est considéré comme nulle au-delà de la rupture du béton en compression et en traction (respectivement pour des déformations ε_{cu} et $-\varepsilon_{rt}$).

1. 3.1. Comportement du béton ordinaire :

Différents modèles existent pour représenter le comportement du béton. Nous adoptons ici la loi de SARGIN pour le comportement du béton ordinaire en compression, et le modèle de GRELAT pour le comportement du béton ordinaire en traction.

1. 3.1.1. Comportement du béton ordinaire en compression selon SARGIN [01] :

Les relations qui lient les contraintes aux déformations instantanées des fibres de béton comprimé sont connues à l'âge t quelconque. Ces lois sont définies en fonction des paramètres : E_{b0} , f_{cj} , ε_{b0} , ε_u .

L'aspect qualitatif de la loi de comportement contrainte-déformation, prend la forme de la courbe représentée ci-dessous :

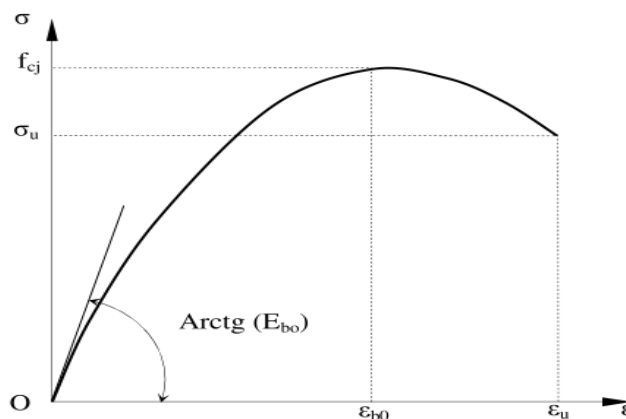


Fig. I.2. Comportement du béton ordinaire en compression selon Sargin [01]

Ce modèle est essentiellement utilisé dans le calcul des structures en béton armé et précontraint, et présente deux branches :

- Branche ascendante, à concavité vers le bas admettant un module tangent initial E_{b0} , et un maximum de contrainte qui correspond à la résistance à la compression f_{cj} ;
- Branche descendante, commençant par le maximum de la branche ascendante et se termine par le point définissant la déformation ultime correspondante à la contrainte ultime du béton.

En admettant un comportement élastique non linéaire, la contrainte est décrite par la loi de SARGIN suivante :

$$\sigma = f_{cj} \cdot \frac{k_b \cdot \bar{\varepsilon} + (k_b - 1) \cdot \bar{\varepsilon}^2}{1 + (k_b - 2) \cdot \bar{\varepsilon} + k_b \cdot \bar{\varepsilon}^2} \quad (\text{I.1})$$

Tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{b0}} \quad \text{et} \quad k_b = \frac{E_{b0} \cdot \varepsilon_{b0}}{f_{cj}} \quad \text{et} \quad E_{b0} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_{cj}}$$

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinal du béton a l'origine,

ε_{b0} : Déformation de pic correspondant à f_{cj} ,

f_{cj} : Résistance à la compression du béton à l'âge j,

k_b et \hat{k}_b : Sont des paramètres adimensionnels, ajustent la branche ascendante et descendante respectivement de la loi de Sargin.

Le paramètre \hat{k}_b influe essentiellement sur l'allure de la branche descendante :

$\hat{k}_b = 0 \Rightarrow$ On obtient des courbes avec une branche qui descend brutalement, correspondant à des bétons ayant un comportement fragile,

$\hat{k}_b = 1 \Rightarrow$ On obtient des courbes assez plates correspondant à des bétons ayant un comportement ductile.

Nous pourrions adopter d'après [05] :

$$\hat{k}_b = \begin{cases} k_b - 1 & \text{pour } f_{cj} \leq 30 \text{MPa.} \\ 0 & \text{pour } f_{cj} \geq 55 \text{MPa.} \\ (k_b - 1) \cdot \left(\frac{55 - f_{cj}}{25}\right) & \text{pour } 30 \text{MPa} < f_{cj} < 55 \text{MPa} \end{cases} \quad (I.2)$$

1. 3.1.2. Comportement du béton ordinaire en traction selon GRELAT [01] :

La formulation de Grelat [01] attribue au béton tendu fissuré un diagramme fictif triangulaire à partir de l'axe neutre (Figure I.3.), dont la contribution du béton s'annule à la plastification des aciers.

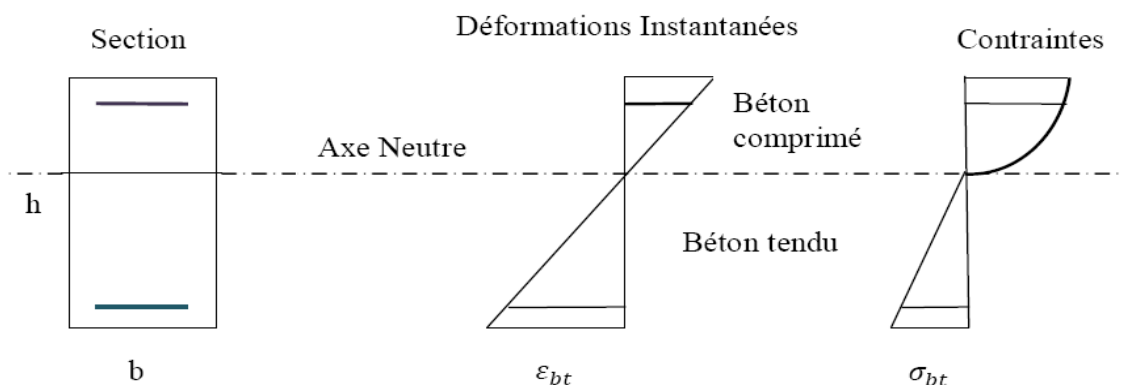


Fig. I.3. Comportement de béton ordinaire avant fissuration

Les fibres du béton tendu d'un module de déformation E_{bt} sont définies à partir de la contrainte et la déformation instantanée du bord tendu :

$$E_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\varepsilon_{bt}} \tag{I.3}$$

Au-delà de la fissuration en traction on tient compte d'une participation du béton tendu situé entre deux fissures successives.

La contrainte ne s'annule pas brusquement, elle décroît selon une loi parabolique progressivement jusqu'à plastification et rupture des aciers tendus. Dans ce cas, l'étude concerne le comportement moyen d'une section située entre deux fissures, donne les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{bt} = E_{b0} \cdot \varepsilon_{bt} & \text{si } |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{ft} \rightarrow \text{Pas de fissuration, participation} \\ & \text{complète du béton avec le module } E_{b0}. \\ \sigma_{bt} = -f_{tj} \cdot \frac{(\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{rt})^2}{(\varepsilon_{rt} - \varepsilon_{ft})^2} & \text{si } \varepsilon_{ft} < |\varepsilon_{bt}| \leq \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration avec} \\ & \text{participation du béton tendu.} \\ \sigma_{bt} = 0 & \text{si } |\varepsilon_{bt}| > \varepsilon_{rt} \rightarrow \text{Fissuration sans} \\ & \text{participation du béton tendu.} \end{array} \right. \tag{I.4}$$

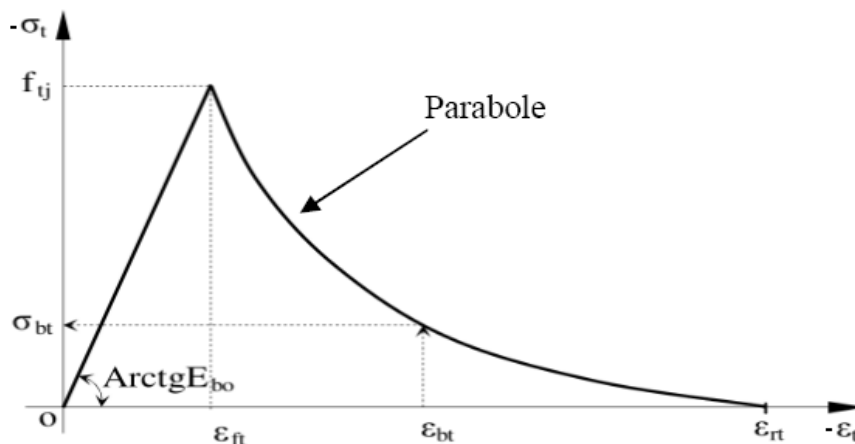


Fig. I.4. Diagramme contrainte – déformation instantanée du béton ordinaire sur le bord tendu selon Grelat [01]

Avec :

E_{b0} : Module d'élasticité longitudinale du béton,

f_{tj} : Résistance du béton à la traction,

ε_{ft} : Déformation de traction correspondant à f_{tj} ,

ε_{rt} : Déformation correspondant à la plastification de l'acier le plus tendu,

ε_{bt} : Déformation de la fibre du béton la plus tendue.

1. 3.2. Comportement du béton ordinaire confiné :

1. 3.2.1. Comportement du béton ordinaire confiné en compression :

Plusieurs modèles théoriques pour prédire le comportement contrainte-déformation du béton confiné ont été proposés. Dans le cadre de cette étude bibliographique, on décrira le modèle proposé par les références [11] et [04], dont la courbe contrainte-déformation du béton confiné est composée de trois régions : la branche ascendante, la branche descendante et la branche maintenue.

La courbe définissant la relation contrainte-déformation du béton confiné utilisé pour le modèle proposé par les références [11] et [04], est représentée dans la (Figure I.5.).

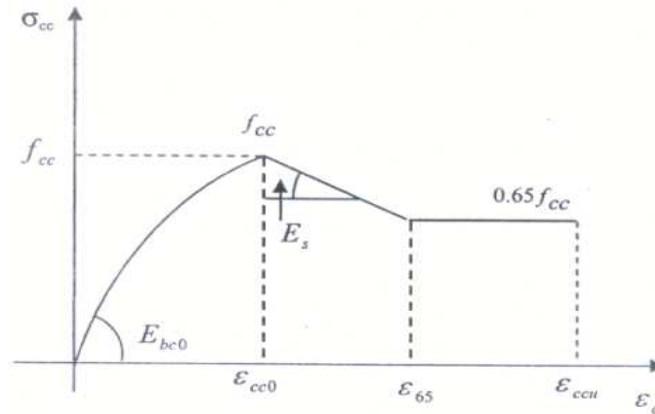


Fig. I.5. Comportement réel du béton confiné en compression [11]

- La première partie est une courbe ascendante non linéaire est régie par la loi de SARGIN modifiée, et dont la relation est exprimée par :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} \cdot \frac{k_c \cdot \bar{\epsilon}_c + (k_c - 1) \cdot \bar{\epsilon}_c^2}{1 + (k_c - 2) \cdot \bar{\epsilon}_c + k_c \cdot \bar{\epsilon}_c^2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cc0} \quad (I.5)$$

Tel que :

$$\bar{\epsilon}_c = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{cc0}} \quad \text{et} \quad k_c = \frac{E_{b0} \cdot \epsilon_{cc0}}{f_{cc}} \quad \text{et} \quad E_{bc0} = 11000 \cdot \sqrt[3]{f_{cc}}$$

$$\epsilon_{cc0} = \epsilon_{c0} \cdot \left[1 + 5 \cdot \left(\frac{f_{cc}}{f_{c0}} - 1 \right) \right] \quad (I.6)$$

- Suivie d'une partie descendante linéaire après le pic, jusqu'à une déformation ϵ_{65} correspondante à $0,65 \cdot f_{cc}$, la relation est décrite par :

$$\sigma_{cc} = f_{cc} - E_s \cdot (\epsilon_c - \epsilon_{cc0}) \quad \text{pour} \quad \epsilon_{cc0} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{65} \quad (I.7)$$

Avec : $E_s = \frac{6 \cdot f_{cc}^2}{k_e \cdot \rho_s \cdot f_y}$ et $\epsilon_{65} = \frac{0,35 \cdot f_{cc}}{E_s} + \epsilon_{cc0}$

- Et la troisième partie est un palier linéaire, la relation contrainte déformation est donnée par :

$$\sigma_{cc} = 0,65 \cdot f_{cc} \quad \text{pour} \quad \epsilon_{65} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{ccu} \quad (I.8)$$

Dans ce palier linéaire de ductilité, l'acier participe jusqu'à sa plastification puis se rompt autour de 40‰ en terme de déformation, la relation qui a été proposé est décrite par :

$$\varepsilon_{ccu} = 0,40 \cdot \frac{f_l}{f_{co}} + \varepsilon_{cu} = 0,0035 + 0,40 \cdot \frac{f_l}{f_{co}} \quad (I.9)$$

Ou :

E_s : Est la valeur contrôlant la pente de la partie descendante,

f_{cc} : La contrainte de compression pic,

ε_{cc0} : La déformation correspondant à la contrainte f_{cc} .

ε_{cu} : La déformation de rupture d'un béton non confinée.

ε_{ccu} : La déformation de rupture d'un béton confiné.

f_l : Est la contrainte de compression latérale effective due au confinement.

f_{co} : Est la contrainte de compression du béton non confinée à l'âge j.

1. 3.3. Comportement des aciers :

La loi contrainte-déformation pour l'acier a un comportement symétrique en compression et en traction sous chargement monotone, elle dépend de la nature de l'acier.

1. 3.3.1. Comportement des aciers passifs :

Généralement deux types d'aciers passifs sont utilisés pour le renforcement du béton : les aciers naturels et les aciers écrouis.

- Aciers naturels :

Les aciers naturels sont caractérisés par un diagramme issu de la loi de comportement élasto-plastique avec raffermissement, (Figure I.6.).

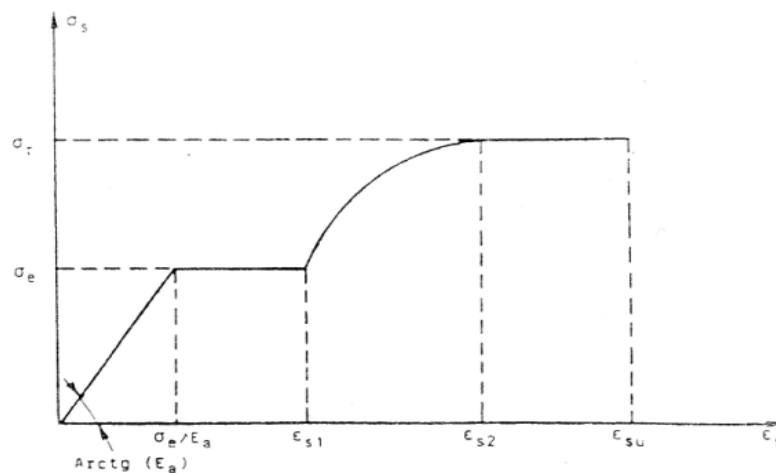


Fig. I.6. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel
(Loi élasto-plastique avec raffermissement)

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon_s & \text{pour } 0 \leq \varepsilon_s < \sigma_e / E_a \\ \sigma_e & \text{pour } \sigma_e / E_a \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s1} \\ \sigma_e + (\sigma_r - \sigma_e) \cdot \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \cdot \left[2 - \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{s1})}{(\varepsilon_{s2} - \varepsilon_{s1})} \right] & \text{pour } \varepsilon_{s1} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{s2} \\ \sigma_r & \text{pour } \varepsilon_s > \varepsilon_{s2} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Avec :

ε_{s1} : Déformation correspondant a la fin du palier plastique,

ε_{s2} : Déformation correspondant a la fin du raffermissement,

ε_{su} : Déformation de rupture.

Pour des calculs aux états limites de résistance ou l'évaluation précise des déformations n'est pas nécessaire, on adopte la loi de comportement élasto-plastique parfaite (Figure I.7.).

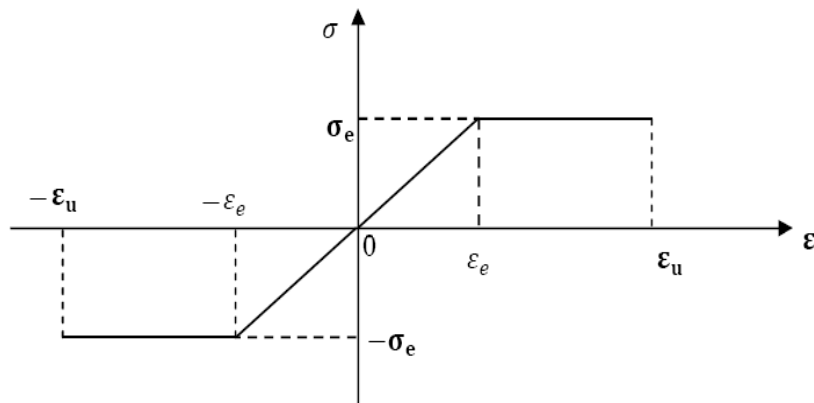


Fig. I.7. Diagramme contrainte-déformation d'un acier naturel (Loi élasto-plastique parfaite)

$$\sigma = \begin{cases} E_a \cdot \varepsilon & \text{pour } 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_e \\ \sigma_e & \text{pour } \varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \\ 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Avec :

E_a : Module longitudinal de l'acier,

ε_e : Déformation limite élastique de l'acier,

σ_e : Contrainte limite élastique de l'acier,

ε_u : Déformation ultime de l'acier.

- **Aciers écrouis :**

Dits aciers écrouis, correspondent a des aciers écrouis généralement par torsion ou traction pour améliorer leurs capacités, (Figure I.8.).

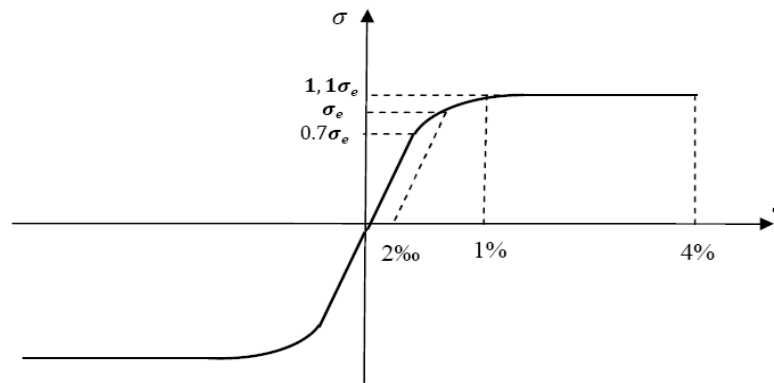


Fig. I.8. Diagramme contrainte-déformation des aciers passifs écrouis

Pour ce type d'acier, on adopte la loi préconisée par le règlement qui suppose un comportement élastique linéaire jusqu'à 70 % de la limite élastique. Mais au-delà, et jusqu'à des déformations de 1 % , on adopte une courbe de cinquième degré.

Pour des déformations supérieures à 1 % la contrainte reste constante, jusqu'à la déformation limite de 4 %. Elle se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_s = E_a \cdot \varepsilon_s & \text{pour} & 0 \leq \sigma_s \leq 0,7 \cdot \sigma_e \\ \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_a} + 0,823 \cdot \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_e} - 0,7\right)^5 & \text{pour} & 0,7 \cdot \sigma_e < \sigma_s < 1,1 \cdot \sigma_e \\ \sigma_s = 1,1 \cdot \sigma_e & \text{pour} & 1 \% \leq \varepsilon_s < \varepsilon_r \end{cases} \quad (I.20)$$

Avec :

E_a : Est le module d'Young de l'acier à l'origine,

σ_e : Est la limite élastique conventionnelle à 2‰,

$0,7 \cdot \sigma_e$: Est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire.

1. 3.3.2. Comportement des aciers actifs :

Le comportement des armatures de précontrainte (les fils tréfilés et les torons) est représenté par la loi, du même type que celle des aciers écrouis du béton armé, recommandée par le nouveau règlement BPEL91, (Figure I.9.).

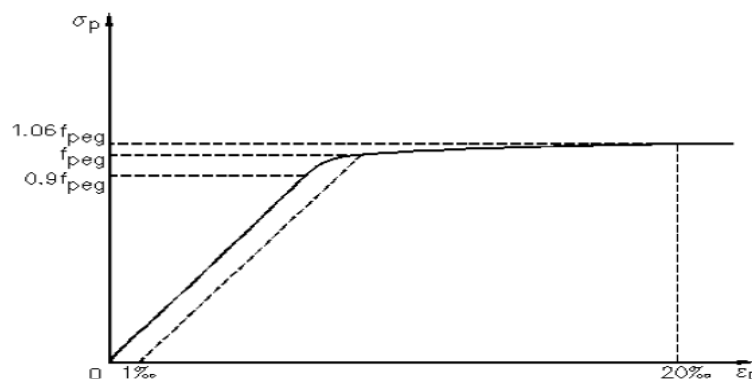


Fig. I.9. Comportement des aciers précontraint

$$\begin{cases} \sigma_p = E_p \cdot \varepsilon_p & \text{pour} & 0 \leq \sigma_p < 0,9 \cdot f_{peg} \\ \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \cdot \left(\frac{\sigma_p}{f_{peg}} - 0,9 \right)^5 & \text{pour} & 0,9 \cdot f_{peg} \leq \sigma_p < 1,06 \cdot f_{peg} \\ \sigma_p = 1,06 \cdot f_{peg} & \text{pour} & \varepsilon_p \geq 0,02 \end{cases} \quad (I.21)$$

Ou :

σ_p : Est la contrainte dans l'acier de précontrainte,

ε_p : Est la déformation dans l'acier de précontrainte,

E_p : Est le module d'Young à l'origine,

f_{peg} : Est la limite élastique conventionnelle à 0,1%,

$0,9 \cdot f_{peg}$: Est la contrainte où s'arrête le diagramme linéaire,

$1,06 \cdot f_{peg}$: Est la contrainte de rupture.

1.3.3.3. Comportement des aciers de charpente :

La loi de comportement des structures métalliques ou mixtes est décrite par la même loi de comportement que pour les armatures passives.

1.4. Étude de la précontrainte [10] :

Dans le code de calcul qui sera utilisé dans ce mémoire, il ne prend en compte que de la précontrainte intérieure au béton.

1.4.1. Géométrie de la précontrainte :

La définition des points de passage des câbles dans les sections suivant une suite de points permet de représenter de façon réaliste le tracé du câble dans la poutre.

La position et l'orientation du câble en un point sont données en pratique, en fonction de l'abscisse curviligne "s" mesurée à partir de l'origine du câble.

1.4.2. Pertes de tension dans les câbles :

Lors de la mise en tension des câbles de précontrainte, la tension imposée par les vérins dans le câble va subir des pertes de tension, qui se divisent en deux groupes :

- **Les pertes de tension instantanées** : se produisant lors de la mise en tension des câbles de précontrainte. Elles sont dues principalement : au frottement du câble sur sa gaine, au tassement des organes d'ancrage et à la non-simultanéité des mises en tension des différents câbles.
- **Les pertes de tension différées** : se produisant dans un temps plus ou moins long après la mise en tension. Elles sont dues : au retrait et fluage du béton et à la relaxation des aciers.

On utilisera dans notre étude un programme développé par les références [52], [15], [18], [06] à partir des travaux de [01], [14], [10] dont les pertes de tension différées sont supposées négligeables, et pour les pertes instantanées sont considérées que les pertes de tension par frottement de l'armature et par rentrée d'ancrage. Quand aux pertes dues à la non-simultanéité de mise en tension des câbles sont directement intégrées dans l'analyse non linéaire.

1. 4.2.1. Pertes de tension par frottement :

Ce type de perte se produit par frottement des câbles sur la gaine lors de la mise en tension. La tension en tout point du câble a la mise en tension, est donnée par :

- Câble tendu par l'origine :

$$\sigma_0(s) = \sigma_{p0} \cdot e^{-(f \cdot \alpha(s) + \varphi \cdot s)} \quad (I.22)$$

- Câble tendu par l'extrémité :

$$\sigma_L(s) = \sigma_{p0} \cdot e^{-(f \cdot \alpha(L) + \varphi \cdot L) + (f \cdot \alpha(s) + \varphi \cdot s)} \quad (I.23)$$

- Câble tendu par les deux extrémités :

$$\sigma(s) = \min(\sigma_0(s), \sigma_L(s)) \quad (I.24)$$

Le règlement BPEL91 préconise la valeur probable de la tension à l'origine :

$$\sigma_{p0} = \begin{cases} \text{Min}(0,80 \cdot f_{prg}, 0,90 \cdot f_{peg}) & \text{en post-tension} \\ \text{Min}(0,85 \cdot f_{prg}, 0,95 \cdot f_{peg}) & \text{en pré-tension} \end{cases} \quad (I.25)$$

Avec :

σ_{p0} : Tension à l'origine,

e : La base des logarithmes népériens,

f : Coefficient de frottement en courbe de l'armature sur la gaine (rd⁻¹),

$\alpha(s)$: Somme des valeurs absolues des déviations angulaires entre l'origine et le point d'abscisse curviligne s (rd),

φ : Coefficient de perte de tension par unité de longueur (m⁻¹),

s : Abscisse curviligne du point où l'on calcul la tension dans le câble (m),

f_{prg} : Contrainte de rupture garantie,

f_{peg} : Limite d'élasticité garantie.

1. 4.2.2. Pertes de tension par recul d'ancrage :

Cette perte de tension résulte du glissement de l'armature par rapport à son ancrage, du tassement ou de la déformation de l'ancrage.

On distingue les mêmes cas qu'auparavant :

- Le câble est tendu par l'origine ou par l'extrémité : on a alors un ancrage actif qui est censé être situé à gauche, et un ancrage passif qui est situé à droite ;
- Le câble est tendu par les deux extrémités. L'ordre du relâchement des câbles est pris en considération et l'on supposera que l'ancrage de gauche est relâché le premier. On se ramène au traitement du cas précédent, mais en deux fois.

Les diagrammes des contraintes dans le câble en fonction des abscisses curvilignes, avant et après rentrée d'ancrage sont symétriques par rapport à l'horizontale passant par le point (C), où se fait sentir la rentrée d'ancrage :

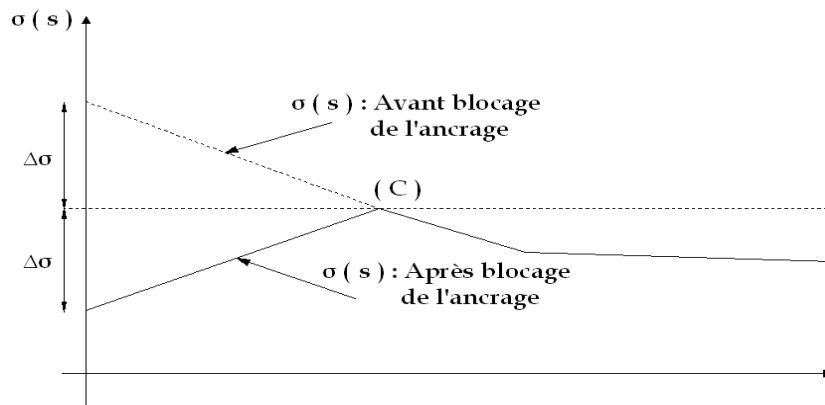


Fig. I.10. Effet du blocage de l'ancrage gauche

L'aire située entre le diagramme des tensions avant et après blocage de l'ancrage est notée A , telle que : $A = g \cdot E_p$

Ou :

g : Est le recul d'ancrage,

E_p : Est le module d'Young de l'acier constituant le câble de précontrainte.

Le diagramme des contraintes avant rentrée d'ancrage est défini par les points $B_0(0, \sigma_0)$, $B_1(s_1, \sigma_1)$, ..., $B_n(s_n, \sigma_n)$. On calcule la quantité $g \cdot E_p$ et on la compare successivement aux aires A_1 , A_2 , ..., A_n . On s'arrête au premier point B_i du diagramme pour lequel :

$$A_i > g \cdot E_p \quad (I.26)$$

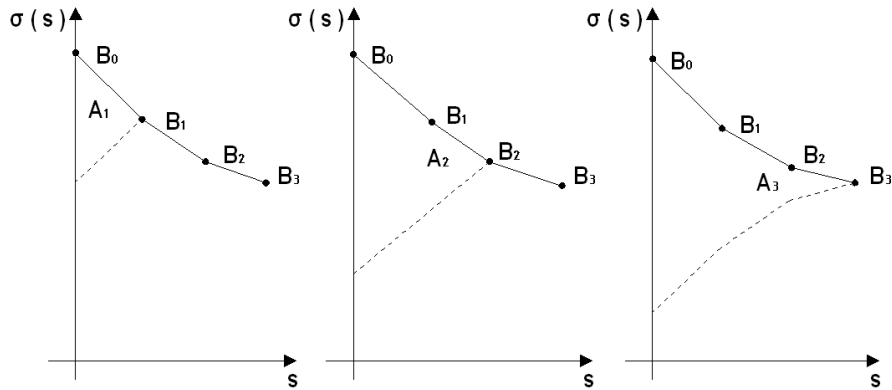


Fig. I.11. Recherche du diagramme après rentré d’ancrage gauche

L’aire A_i est déterminée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} A_i = A_{i-1} + (2 \cdot d_{i-1} + s_i - s_{i-1}) \cdot (\sigma_{i-1} - \sigma_i) \\ A_0 = 0; \end{cases} \quad i = 1, n \quad (I.27)$$

Avec :

$$d_i = \sum_{j=1}^i d. (B_{j-1} ; B_j) \quad (I.28)$$

Le point $C(s_c, \sigma_c)$ est sur le segment $[B_{i-1} ; B_i]$. La quantité $g \cdot E_p$ est telle que :

$$g \cdot E_p = A_{i-1} + (2 \cdot d_{i-1} + x) \cdot (\sigma_{i-1} - \sigma_i) \quad (I.29)$$

Avec :

$$x = s_c - s_{i-1} \quad (I.30)$$

Considérons le segment $[B_{i-1} ; B_i]$.

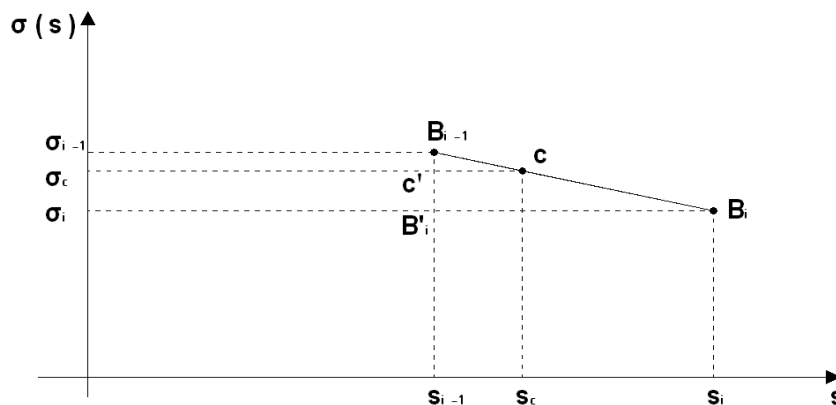


Fig. I.12. Position du point C jusqu’où se fait sentir la rentrée d’ancrage

Les triangles $B_{i-1} C \hat{C}$ et $B_{i-1} B_i \hat{B}_i$ sont semblables, alors :

$$\sigma_{i-1} - \sigma_c = \frac{\sigma_{i-1} - \sigma_i}{s_i - s_{i-1}} \cdot x \quad (\text{I.31})$$

En substituant l'équation (I.31) dans l'équation (I.29) on arrive à une équation de second degré en x :

$$x^2 + 2 \cdot d_{i-1} \cdot x - \frac{(g \cdot E_p - A_{i-1}) \cdot (s_i - s_{i-1})}{(\sigma_{i-1} - \sigma_i)} = 0 \quad (\text{I.32})$$

L'équation (I.31) admet deux racines. La valeur de x solution du problème est telle que :

$$x = -d_{i-1} - \sqrt{d_{i-1}^2 + \frac{(g \cdot E_p - A_{i-1}) \cdot (s_i - s_{i-1})}{(\sigma_{i-1} - \sigma_i)}} \quad (\text{I.33})$$

Si l'on atteint l'ancrage passif (droit) sans satisfaire la condition (I.26), on translate vers le bas le dernier diagramme obtenu de façon à satisfaire cette condition.

Le cas de l'ancrage droit est traité par le même algorithme, par renversement du sens des abscisses curvilignes.

Le diagramme résultant de ce traitement est le diagramme retenu comme tension initiale dans le câble.

1. 5. Modélisation des sections :

1. 5.1. Modélisation de la section de béton :

Pour mieux approcher le contour d'une section de béton de forme quelconque, la section de béton est considérée comme une succession de tables trapézoïdales [08]. Chaque table est définie par la largeur de sa base inférieure et supérieure : b_j , b_{j+1} ainsi que leurs ordonnées y_j , y_{j+1} , par rapport à un axe de référence passant par le centre de gravité de la section, (Figure I.13.).

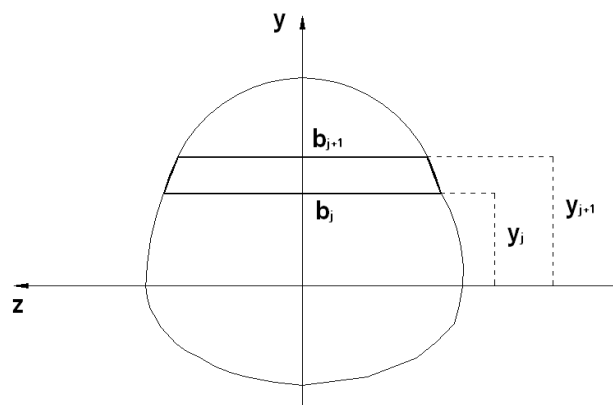


Fig. I.13. Discrétisation d'une section transversale de béton en tables trapézoïdales

L'indice j varie de 1 à $nbtra$, où $nbtra$ est le nombre total des trapèzes choisi dans la discrétisation de la section transversal de béton.

Le procédé d'intégration étant numérique (méthode de SIMPSON), l'expression de la largeur du trapèze d'ordre j à son ordonné y [08], est :

$$b(y) = b_j + (b_{j+1} - b_j) \cdot (y - y_j) / (y_{j+1} - y_j) \quad (I.34)$$

1. 5.2. Modélisation de la section du profil acier :

La section du profil acier est définie de la même façon que la section de béton par une succession de tables trapézoïdales, chacune définie par la largeur de sa base inférieure et supérieure : b_j , b_{j+1} ainsi que leurs ordonnées y_j , y_{j+1} , par rapport à un axe de référence passant par le centre de gravité de la section.

L'indice j varie de 1 à nam , où nam est le nombre total des trapèzes choisi dans la discrétisation de la section transversal du profil acier.

1. 5.3. Modélisation géométrique des armatures :

1. 5.3.1. Les armatures passives :

La section de chaque armature passive est concentrée en son centre de gravité. Les armatures passives sont donc définies comme une succession de lits d'armatures. Chaque lit est défini par son ordonnée y_{ai} et par l'aire totale des armatures situées à ce niveau A_{ai} , avec i variant de 1 à ns , où ns est le nombre de lits d'armatures passives.

1. 5.3.2. Les armatures actives :

Les armatures actives sont définies par leurs excentricités e_{pk} et leur aire A_{pk} , avec k variant de 1 à np , où np est le nombre de câble de précontrainte.

À la mise en tension, la précontrainte exerce sur la section du béton un effort de compression égal et opposé à l'effort de traction dans le câble. Cet effort est appliqué suivant la tangente à la ligne moyenne du câble au point où il traverse la section.

Les déformations que le béton subit, résultent des sollicitations extérieures et des actions exercées par la précontrainte. À partir de cet état, on considère que les câbles de précontrainte deviennent parfaitement solidaires au béton et travaillent comme les aciers de béton armé, et possèdent une pré-déformation par rapport à la section.

1. 6. Conclusions :

Nous avons présenté dans ce chapitre ; dans une première partie, un petit aperçu sur les non linéarités qui existe et sur l'évolution de l'analyse non linéaire.

Puis dans une seconde partie nous avons présenté, un ensemble de lois de comportement permettant la modélisation des comportements non linéaires des matériaux sous un chargement instantané et monotone jusqu'à la ruine. Nous disposons ainsi, de modèles de comportement réel des matériaux suivants :

- Pour le béton ordinaire : en compression la loi de SARGIN, et en traction le modèle de GRELAT [01].
- Pour le béton confiné : en compression le modèle proposé par les références [11] et [04].
- Pour l'armature passive : la loi élasto-plastique parfaite ou bien la loi élasto-plastique avec raffermisssement pour l'acier naturel, et la loi préconisée par le règlement BAEL 91 pour l'acier écrouis.
- Pour l'armature active : la loi préconisée par le règlement BPEL 91.
- Pour les aciers de charpente : la même loi de comportement que pour les armatures passives (la loi de comportement élasto-plastique parfaite ou bien la loi de comportement élasto-plastique avec raffermisssement).

Ces modèles seront utilisés dans un programme de calcul non linéaire de structures soumis à des chargements statiques (monotones croissants jusqu'à la ruine), dont il sera utilisé la méthode incrémentale avec itérations à l'équilibre et la méthode d'intégration numérique de SIMPSON pour leurs traitements numériques.

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT ET MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE DES STRUCTURES EN TREILLIS

Sommaire

2. 1. Introduction	25
2. 2. Les différentes formes de structures en treillis	25
2. 2.1. Les poutres triangulaires	25
2. 2.1.1. Les poutres triangulaires bidimensionnelles	25
2. 2.1.1.1. Les poutres à membrures parallèles	25
2. 2.1.1.2. Les poutres à membrures non parallèles	27
2. 2.1.1.3. Les poutres échelles ou poutres Vierendeel	27
2. 2.1.1.4. Les fermes	28
2. 2.1.2. Les poutres triangulaires tridimensionnelles	28
2. 2.2. Les treillis spatiaux	28
2. 2.2.1. Les doubles nappes à poutres croisées ou bidimensionnelles	28
2. 2.2.2. Les doubles nappes tridimensionnelles	29
2. 3. Modélisation géométrique des ossatures spatiales	30
2. 3.1. Modélisation géométrique d'un élément poutre tridimensionnelle	31
2. 3.2. Modélisation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle	37
2. 4. Modélisation non linéaire des structures en treillis	39
2. 4.1. Analyse de la section d'un élément barre en élasticité non linéaire	39
2. 4.1.1. Calcul des sollicitations internes	40
2. 4.1.2. Calcul des sollicitations extérieures	41
2. 4.1.3. Équilibre de la section	41
2. 4.2. Matrice de rigidité d'un élément barre en élasticité non linéaire	42
2. 4.2.1. Matrice de rigidité d'un élément barre dans son repère intrinsèque	42
2. 4.2.2. Matrice de rigidité d'un élément barre dans son repère local	44
2. 4.2.3. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère absolu	49
2. 5. Comportement des structures en treillis	51
2. 6. Conclusions	52

2. 1. Introduction :

Les structures en treillis sont couramment utilisées en construction car ils permettent d'alléger le poids d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité, et aussi pour l'efficacité de leur assemblage qui offre la possibilité de préfabriquer les treillis avant montage final sur le site de construction. Ils sont principalement utilisés pour :

- Supporter les couvertures et les planchers, et pour franchir de grandes portées et supporter des charges relativement légères dans les bâtiments,
- Des portées faibles ou intermédiaires dans les ponts-routes et les ponts-rails et dans les passerelles,
- Assurer la stabilité lorsque les barres de contreventement forment un treillis avec les autres barres de la structure, telles que les poteaux de bâtiments et les contreventements de bâtiments et de ponts.

2. 2. Les différentes formes de structures en treillis :

On appelle indifféremment treillis, triangulation ou structure réticulée, un ensemble de barres assemblées les unes aux autres à leurs extrémités de manière à former un triangle de géométrie indéformable, et leurs juxtapositions forment une structure portante stable, plane ou spatiale. Elles ont l'avantage d'être légères, économiques et possédant une inertie flexionnelle qui peut être adaptée par variation de hauteur de la poutre, qui leur permet de franchir de plus grandes portées mais nécessitent des assemblages parfois complexes.

Les structures en treillis sont très largement utilisées en construction. Qu'il s'agisse de structures faites d'acier, de bétons ou autres. À cet effet, rappelons quelques définitions sur les différentes formes de structures en treillis [17] :

2. 2.1. Les poutres triangulaires :

2. 2.1.1. Les poutres triangulaires bidimensionnelles :

La poutre triangulaire est constituée généralement de deux membrures reliées par diagonales (barres inclinées) et parfois des montants (barres verticales), les principaux types sont décrits ci-dessous :

2. 2.1.1.1. Les poutres à membrures parallèles :

Les membrures sont horizontales et les diagonales s'entrecroisent, il en existe plusieurs sortes et notamment :

- Poutre WARREN : c'est une poutre triangulée dont les diagonales successives sont inclinées symétriquement, elle peut être avec montants ou sans montant.



Fig. II.1. Poutre WARREN

- Poutres en (N) : c'est une poutre triangulée dont les diagonales alternent avec des montants. Les poutres en N peuvent être de plusieurs types : poutre Pratt, poutre Howe, poutre Daydé.

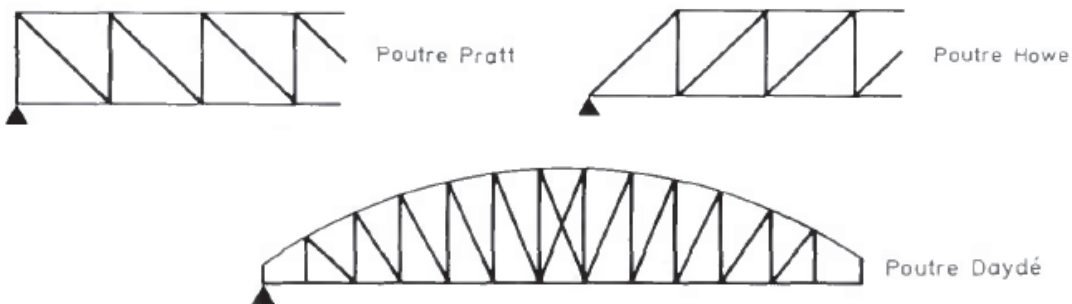


Fig. II.2. Poutre en (N)

La différence essentielle entre les treillis Pratt et Howe se situe au niveau des éléments diagonaux, qui dans le treillis Howe sont en compression, contrairement aux treillis Pratt où ils sont en traction.

- Poutre en (X) : c'est une poutre triangulée dont les diagonales forment des croix de Saint-André alternant avec des montants.

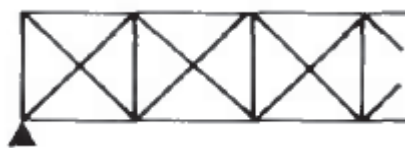


Fig. II.3. Poutre en (X)

- Poutre en (K) : c'est une poutre triangulée comportant des demi-diagonales supérieures et des demi-diagonales inférieures d'inclinaisons opposées, reliées au milieu de montants.

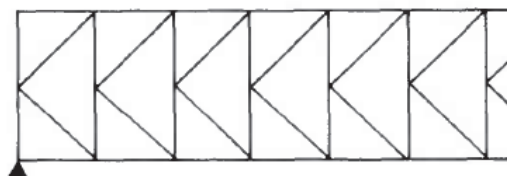


Fig. II.4. Poutre en (K)

L'avantage des poutres à membrures parallèles, c'est qu'ils utilisent des bandes de même longueur et donc ils permettent de réduire les coûts de fabrication pour des portées très longues.

2. 2.1.1.2. Les poutres à membrures non parallèles :

Ces poutres résistent à l'instar des PRS à inertie variable, de manière optimale aux efforts auquel elles sont soumises. Les membrures peuvent ne pas être de même profil, l'une travaille en compression (contient le maximum de matière), et l'autre travaille en traction (contient le minimum de matière). Cette différence de matière est liée à la prise en compte du phénomène de flambement dans la partie comprimée.

Cette configuration permet de réduire les forces axiales dans les membrures adjacentes aux appuis.

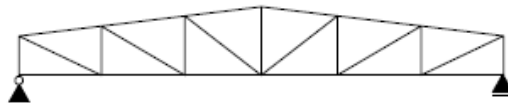


Fig. II.5. Poutre à membrures non parallèles

2. 2.1.1.3. Les poutres échelles ou poutres Vierendeel :

Les assemblages des montants de ce type de poutre sont rigides, sans diagonales. L'ensemble forme un système hyperstatique très rigide. Ce système est plus lourd et moins performant en flexion mais permet de libérer l'espace central de la poutre pour laisser passer des circulations, des gaines...etc.

Il est possible de jumeler une poutre treillis classique avec une poutre Vierendeel. La suppression de la diagonale conduit à renforcer le cadre autour du panneau. Ce type de solution permet aussi de réaliser des poutres de façade dites « poutres américaines » dont la hauteur est égale à celle d'un étage de la construction.

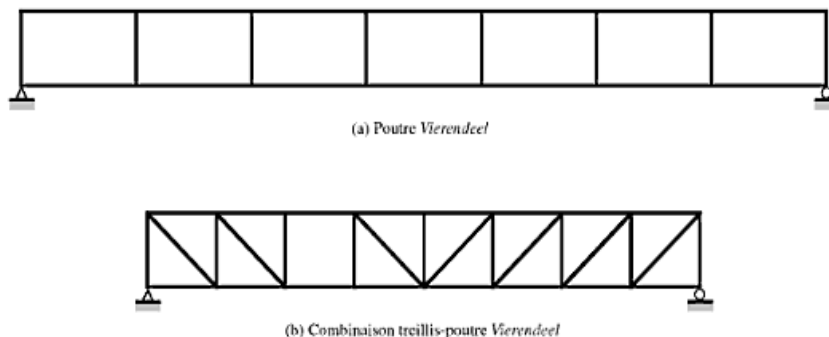


Fig. II.6. Poutres échelles ou poutre Vierendeel

2. 2.1.1.4. Les fermes :

Les fermes sont des poutres en treillis dont les diagonales et les montants rejoignant la membrure inférieure (appelée aussi entrain) et la membrure supérieure (appelée aussi arbalétrier). Le tout formant un système triangulé, très efficace (maximum de résistance pour minimum de poids), mais coûteux en main-d'œuvre.

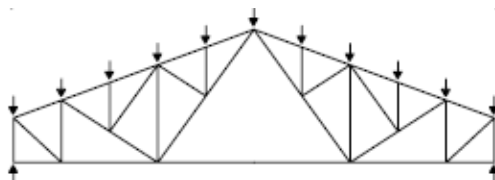


Fig. II.7. Les fermes

2. 2.1.2. Les poutres triangulaires tridimensionnelles :

La poutre triangulaire tridimensionnelle comporte trois membrures parallèles et trois plans de treillis. Cette poutre est une structure spatiale et ne nécessite aucun élément complémentaire pour être stable.

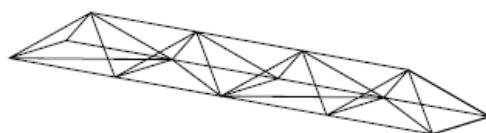


Fig. II.8. Poutres triangulaires tridimensionnelles

2. 2.2. Treillis spatiaux :

Un treillis spatial est formé de deux plans parallèles de barres croisées (les membrures), dont les nœuds sont reliés par des diagonales constituant l'âme du treillis. La différence par rapport à la grille de poutre à treillis est que les nœuds supérieurs ne sont plus à la verticale des nœuds inférieurs. Si les mailles horizontales sont carrées, le système est bidimensionnel. On trouve dans ces systèmes certains types de treillis spatiaux comportant des poutres à treillis, mais qui sont inclinés.

Les doubles nappes : sont des structures réticulées (en générale triangulée) comprise entre deux plans parallèles (ou par extension entre deux surfaces courbes parallèles), dans chacun desquels se trouvent les barres d'une nappe, suivant une géométrie de mailles régulières. Les nœuds, intersections des barres des deux nappes sont reliés de l'une à l'autre par des barres complétant le système de rigidité dans l'espace. On distingue les nappes bidimensionnelles des nappes tridimensionnelles :

2. 2.2.1. Les doubles nappes à poutres croisées ou bidimensionnelles :

La rigidité est assurée par deux familles perpendiculaires de poutres. Les grilles supérieures et inférieures sont identiques et superposées suivant les trames orthogonales carrées, rectangulaires ou triangulaires.

2. 2.2.2. Les doubles nappes tridimensionnelles :

Une double nappe tridimensionnelle comporte aussi deux plans de membrures dont les croisements sont reliés par des treillis, mais les nœuds supérieurs ne sont plus à la verticale des nœuds inférieurs comme dans la double nappe bidimensionnelle. Les liaisons par éléments inclinés (non verticaux) augmentent la rigidité de l'ensemble.

Il existe de nombreuses grilles de ce type. La plus simple consiste en la superposition de deux grilles orthogonales identiques. Une fois chargée, la nappe supérieure est entièrement comprimée, alors que la nappe inférieure travaille en traction. En raison de leur grande rigidité, ces grilles ont une flèche faible.

Quand elles sont simples, elles peuvent être réalisées avec des cornières ou avec des tubes. Les géométries les plus complexes nécessitent l'utilisation exclusive de tubes. Des nappes encore plus résistantes peuvent être obtenues en créant deux nappes triangulaires liaisonnées entre elles par trois réseaux de plans verticaux.

L'épaisseur des doubles nappes des structures spatiales réticulées pouvant être importante, il est naturel de penser à occuper les volumes libres entre les barres en les rendant utilisables. Ainsi, les doubles nappes de hauteur d'étage permettent de franchir économiquement de grandes portées tout en utilisant les espaces entre les structures. Des mégastructures réticulées peuvent être conçues sur plusieurs étages.

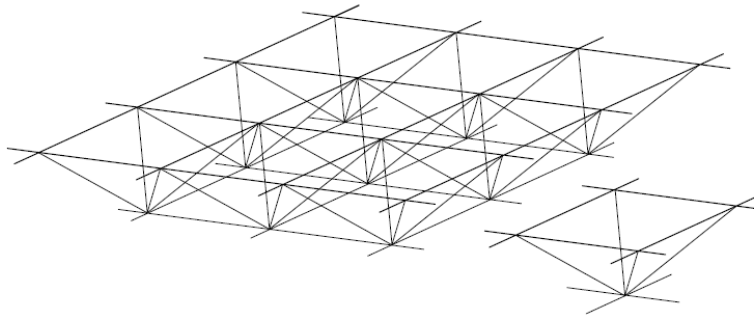


Fig. II.9. Doubles nappes tridimensionnelles

Souvent, les connexions entre les membrures de la ferme ne peuvent être faites directement, en raison du manque d'espace pour accommoder la longueur commune. Dans de tels cas, les goussets sont utilisés pour accomplir de telles connexions, par contre les sections les plus adaptées au travail de traction et à celui de la compression sont les profils creux ronds.

Il est difficile de réaliser une structure treillis esthétique, économique et simple, tant dans la conception d'ensemble que, surtout, dans celle des nœuds. Il existe plusieurs systèmes de nœuds, dont :

Le système à nœuds sphériques :

Est caractérisé par des nœuds en forme de boule percée de trous taraudés permettant de raccorder de manière parfaitement centrée des barres munies d'un filetage d'extrémité.

Le système à nœuds plats :

Est composé de tubes dont l'extrémité est écrasée et percée d'un trou permettant le boulonnage sur des pièces en fonte moulée soudable comportant trois faces orthogonales.

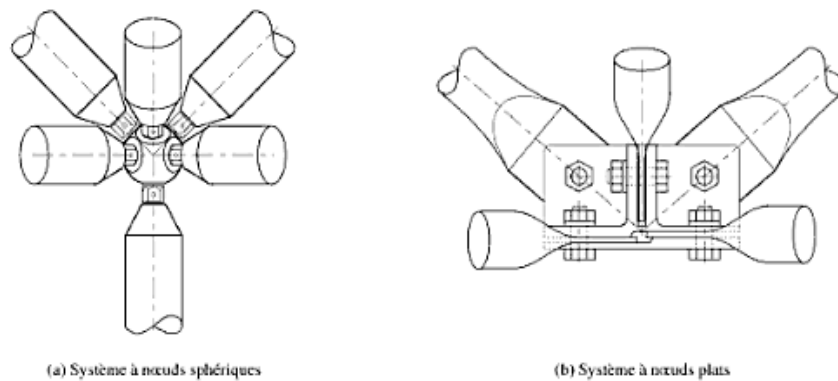


Fig. II.10. Systèmes de nœuds de treillis

2. 3. Modélisation géométrique des ossatures spatiales :

Lors d'une analyse linéaire, il est nécessaire de lier l'élément poutre et/ou barre à deux systèmes de repères :

- un repère global (O, X, Y, Z)
- un repère local (G, x, y, z)

Ce choix s'explique car la forme la plus simple des équations de la théorie des poutres ou des treillis s'écrit dans le repère local qui sera choisi comme un repère central principal d'inertie pour des raisons simplificatrices. Toute étude sur un élément poutre et/ou barre commence par la définition de ce repère.

Par contre lors d'une analyse non linéaire, il est plus pratique d'utiliser des repères particuliers à chaque configuration (état), dans ce cas l'élément poutre et/ou barre sera liée à d'autres systèmes de repères. Alors le repère à l'état déformé d'un élément sera utilisé afin de tenir compte de la non linéarité géométrique.

L'établissement d'une matrice de transformation géométrique pour un élément, nous permettra d'exprimer selon notre convenance dans l'un ou l'autre des repères les différentes équations du problème.

2. 3.1. Modélisation géométrique d'un élément poutre tridimensionnelle :

- Élément poutre tridimensionnelle suivant la méthode du troisième nœud (fictif) [49] :

Un élément poutre droit est modélisé par une ligne liant deux nœuds i et j suivant l'axe local \bar{x} . Il est nécessaire de modéliser un troisième nœud k pour définir les deux plans principaux de flexion (\bar{x} - \bar{y}) et (\bar{x} - \bar{z}) (figure II.11).

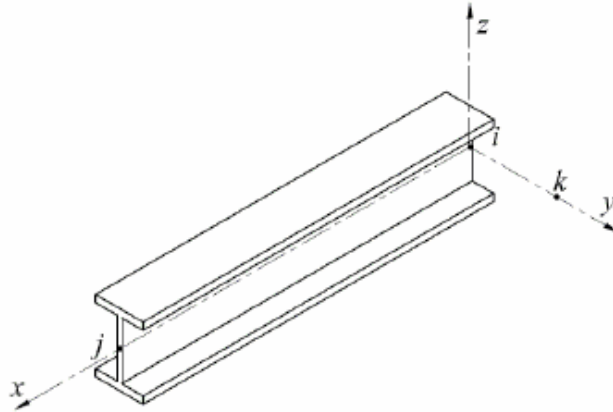


Fig. II.11. Axes locaux d'un élément poutre

Pour aboutir à la matrice de transformation géométrique, le repère global est amené à coïncider avec le repère local par une séquence de rotation d'angles β , γ et α respectivement autour des axes y, z et x (figure II.12).

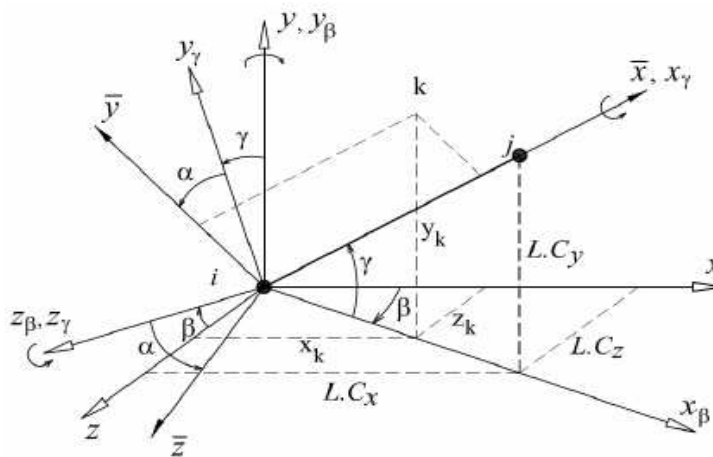


Fig. II.12. Rotations des axes pour un élément poutre tridimensionnelle

La première rotation autour de l'axe y avec un angle β place l'axe x en position x_β qui est la projection de l'axe \bar{x} sur le plan (x-z). L'axe z est placé en position z_β . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$[T_\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \tag{II.1}$$

Avec :

$$\cos \beta = \frac{c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad \text{et} \quad \sin \beta = \frac{c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \quad (\text{II.2})$$

Ou : c_x , c_y et c_z sont les cosinus directeurs, décrit par :

$$\begin{cases} c_x = \cos(\bar{x}, x) = \frac{x_j - x_i}{L} \\ c_y = \cos(\bar{y}, y) = \frac{y_j - y_i}{L} \\ c_z = \cos(\bar{z}, z) = \frac{z_j - z_i}{L} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

La deuxième transformation consiste à faire tourner le nouveau système d'axes $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ autour de z_β avec un angle γ pour faire coïncider l'axe x_β avec l'axe \bar{x} . Nous obtenons un nouveau système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$. La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$[T_\gamma] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

$$\cos \gamma = \sqrt{c_x^2 + c_z^2} \quad \text{et} \quad \sin \gamma = c_y \quad (\text{II.5})$$

Finalement, le système d'axes $(x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma)$ tourne d'un angle α autour de l'axe x_γ pour amener les axes y_γ et z_γ à se confondre avec les axes \bar{y} et \bar{z} . La matrice de transformation correspondant à cette rotation est :

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Le nœud k est choisi sur l'axe principal \bar{y} de la section (fig. II.13). Les coordonnées de ce nœud par rapport à i exprimées dans le repère global sont :

$$\begin{cases} x_{xi} = x_k - x_i \\ y_{xi} = y_k - y_i \\ z_{xi} = z_k - z_i \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

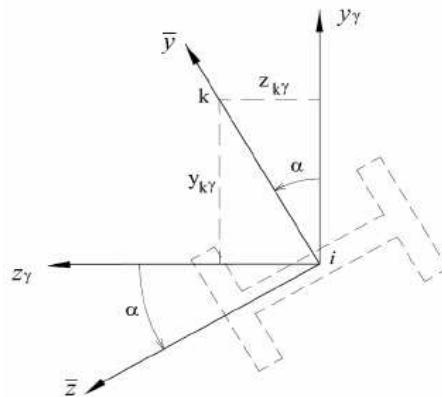


Fig. II.13. Axes principaux d'un élément poutre

Les coordonnées du nœud k exprimées dans le repère (i, x_γ, y_γ, z_γ) sont :

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = [T_\gamma] \cdot [T_\beta] \cdot \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Après simplification nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} x_{k\gamma} \\ y_{k\gamma} \\ z_{k\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_y \cdot c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & \sqrt{c_x^2 + c_z^2} & \frac{-c_y \cdot c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \\ \frac{-c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & 0 & \frac{-c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

Nous en déduisons l'angle α qui peut être calculé par ses lieux trigonométriques comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{y_{k\gamma}}{\sqrt{y_{k\gamma}^2 + z_{k\gamma}^2}} \quad (\text{II.10})$$

Finalement la transformation correspondant à l'ensemble des rotations d'angles β, γ et α est :

$$[T] = [T_\alpha] \cdot [T_\gamma] \cdot [T_\beta] \quad (\text{II.11})$$

Cette transformation n'est pas applicable pour des membrures dont l'axe local \bar{x} est parallèle à l'axe global x (c_x et c_z sont nuls). Dans ce cas de figure, il y a uniquement deux rotations : la première correspond à γ = 90° où γ = 270° selon que la valeur de c_y est positive ou négative, la deuxième autour de l'axe \bar{x} avec un angle α (fig. II.14).

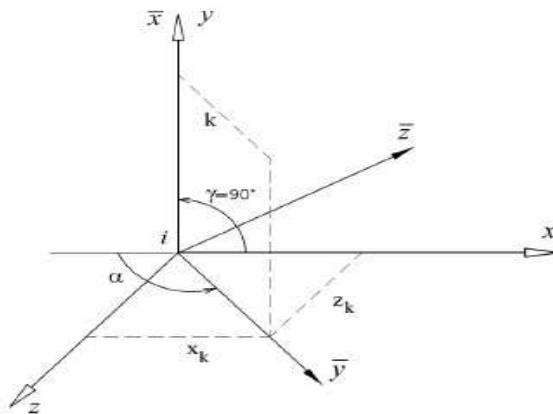


Fig. II.14. Rotations correspondant à un élément vertical

La matrice de transformation dans ce cas est :

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & c_y & 0 \\ -c_y \cdot \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ c_y \cdot \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Et les lieux trigonométriques de l'angle α sont évalués comme suit :

$$\sin \alpha = \frac{z_k}{\sqrt{y_k^2 + z_k^2}} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + z_k^2}} \cdot c_y \quad (\text{II.13})$$

- Élément poutre tridimensionnelle suivant la formulation de NAIT-RABAH [10] :

C'est cette méthode qui a été utilisé dans le code de calcul non linéaire (matérielle et géométrique) des éléments poutres développé par les références[52], [06], [15] ,[18] traitant le comportement monotone sous chargement croissant jusqu'à la ruine et tenant compte du comportement réel des matériaux.

Passage du repère local au repère intrinsèque :

Le repère intrinsèque xyz est défini comme suite : l'origine des axes est au nœud I. L'axe x pointant vers le nœud J, est parfaitement positionnée par rapport au repère local $x_0y_0z_0$, à l'aide des deux angles d'Euler α, β qui sont fonction des déplacements relatifs, de translation des nœuds I et J (figure II.15).

Le passage du repère local $x_0y_0z_0$ au repère intrinsèque xyz est effectué au moyen de la matrice de transformation géométrique $[T_{\alpha\beta\gamma}]$, définie par :

$$[T_{\alpha\beta\gamma}] = [T_\gamma] \cdot [T_{\alpha\beta}] \quad (\text{II.14})$$

La matrice $[T_{\alpha\beta}]$ est due aux déplacements de translation des nœuds I et J. Les termes de la matrice $[T_{\alpha\beta}]$ représentent des cosinus directeurs des axes (x, y_1, z_1) dans le repère local $x_0y_0z_0$.

Donc la matrice $[T_{\alpha\beta}]$ se compose de deux angles de rotation et de deux matrices associées :

$$[T_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

$$\alpha = -\arcsin(w/L_x) \quad (\text{II.16})$$

$$L_x = [(L_0 + u)^2 + w^2]^{1/2} \quad (\text{II.17})$$

Où :

α : représente l'angle de rotation (négative) autour de l'axe y_0 , dans le plan perpendiculaire à l'axe y_0 .

L_0 : représente la longueur initiale de l'élément avant déformation.

Pour la deuxième rotation, il vient :

$$[T_\beta] = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$$\beta = \arcsin(v/L) \quad (\text{II.19})$$

$$L = [(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2]^{1/2} \quad (\text{II.20})$$

Où :

β : représente l'angle de rotation autour de l'axe z_1 , dans le plan perpendiculaire à l'axe z_1 .

L'expression de la matrice $[T_{\alpha\beta}]$ est décrite par :

$$[T_{\alpha\beta}] = [T_{\beta}] \cdot [T_{\alpha}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cdot \cos \beta \\ -\cos \alpha \cdot \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \cdot \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

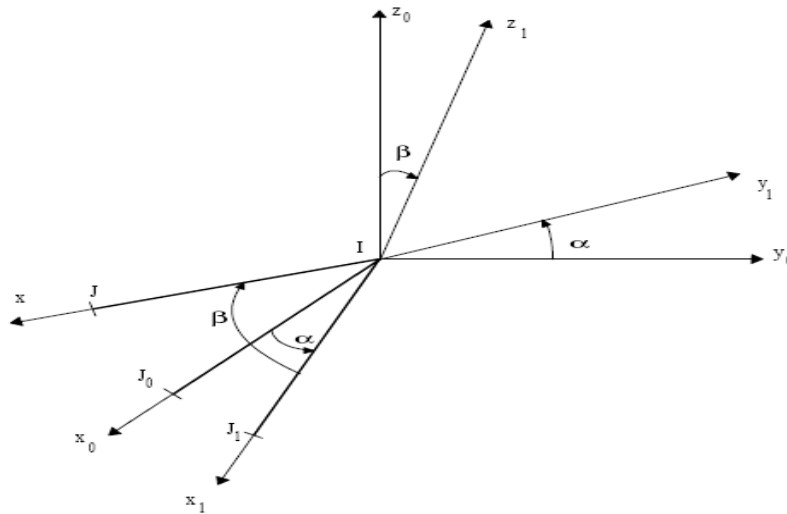


Fig. II.15. Position de l'axe x du repère intrinsèque par rapport au repère local

La matrice $[T_{\gamma}]$ représente la matrice de transformation qui prend en compte la rotation de l'élément autour de l'axe x. Les termes de cette matrice sont les cosinus directeurs des axes xyz dans le repère (x, y_1, z_1) :

$$[T_{\gamma}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

γ : représente la rotation de corps rigide autour de l'axe x, cet angle est défini en prenant la moyenne des rotations des nœuds I et J autour de l'axe x_0 du repère local :

$$\gamma = (e_{ix_0} + e_{jx_0})/2 \quad (\text{II.23})$$

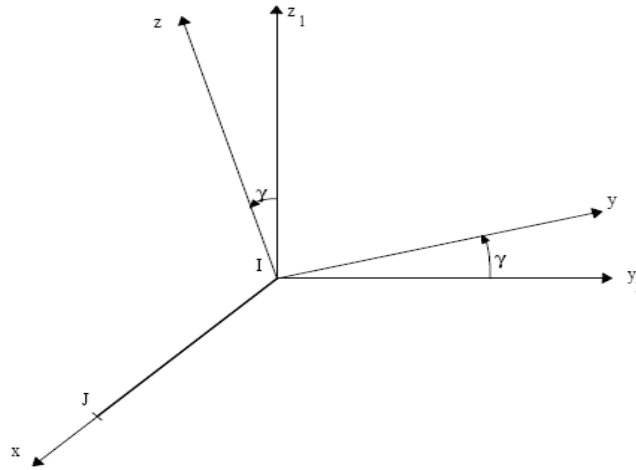


Fig. II.16. Orientation du repère intrinsèque par rapport au repère (x, y_1, z_1)

Passage du repère global au repère local :

La rotation spatiale du repère absolu OXYZ donnant le repère local $x_0y_0z_0$ d'un élément poutre peut être décomposé en trois rotations α_0, β_0 et γ_0 au sens d'Euler (figure II.17). La matrice de passage $[T_0]$ est la composée de 3 matrices orthogonales $[T_{\alpha_0}], [T_{\beta_0}]$ et $[T_{\gamma_0}]$:

$$[T_0] = [T_{\gamma_0}] \cdot [T_{\beta_0}] \cdot [T_{\alpha_0}] \quad (\text{II.24})$$

Avec :

$$[T_{\alpha_0}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 & 0 & \sin \alpha_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_0 & 0 & \cos \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.25})$$

$$[T_{\beta_0}] = \begin{bmatrix} \cos \beta_0 & \sin \beta_0 & 0 \\ -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

$$[T_{\gamma_0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_0 & \sin \gamma_0 \\ 0 & -\sin \gamma_0 & \cos \gamma_0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Les angles α_0 et β_0 sont fonction des coordonnées des nœuds donnée dans le repère absolu lié à la structure.

L'angle γ_0 définit l'orientation des axes principaux y_0, z_0 par rapport aux axes Y, Z .

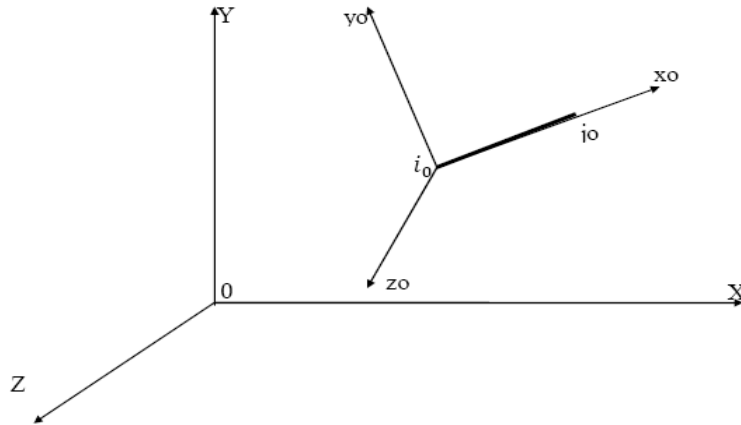


Fig. II.17. Orientation initiale de l'élément par rapport au repère absolu

2. 3.2. Modélisation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle :

Un élément barre tridimensionnelle est modélisé par la position des deux nœuds d'extrémités et qui s'avère suffisant pour définir son orientation dans l'espace.

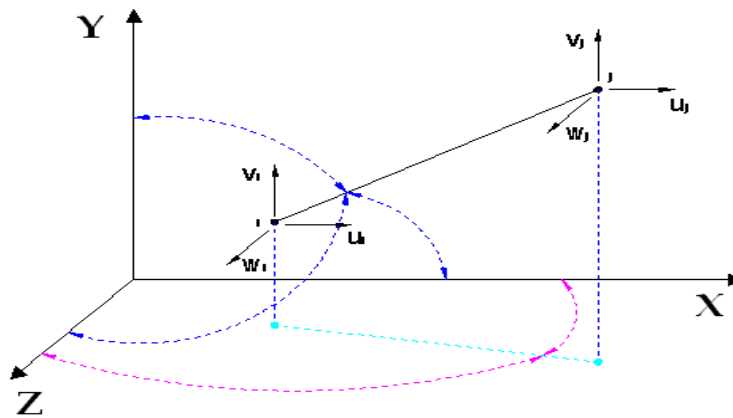


Fig. II.18. Élément barre tridimensionnelles

$$\begin{cases} u_i = c_x \cdot X_i + c_y \cdot Y_i + c_z \cdot Z_i \\ v_i = \frac{-c_x \cdot Y}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(z_j-z_i)^2}} \cdot X_i + \frac{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(z_j-z_i)^2}}{L} \cdot Y_i + \frac{(-c_y) \cdot Z}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(z_j-z_i)^2}} \cdot Z_i \\ w_i = \frac{-c_x \cdot Z}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(z_j-z_i)^2}} \cdot X_i + \frac{(-c_y) \cdot X}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(z_j-z_i)^2}} \cdot Z_i \end{cases} \quad (II.28)$$

Les relations entre les grandeurs mesurées dans le repère local et celles mesurées dans le repère global pour un élément barre tridimensionnelle, sont données par :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_0] & 0 \\ 0 & [R_0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Où :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ -c_x \cdot Y & S & -c_y \cdot Z \\ S & L & S \\ -Z & 0 & -X \\ S & S & S \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$$\begin{cases} L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Après simplification nous obtenons :

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_y \cdot c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & \sqrt{c_x^2 + c_z^2} & \frac{-c_y \cdot c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \\ \frac{-c_z}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} & 0 & \frac{-c_x}{\sqrt{c_x^2 + c_z^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Où :

$[R_0]$: Est la matrice de transformation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle.

c_x , c_y et c_z : sont les cosinus directeurs, décrits par :

$$\begin{cases} c_x = \cos(\bar{x}, x) = \frac{x_j - x_i}{L} \\ c_y = \cos(\bar{y}, y) = \frac{y_j - y_i}{L} \\ c_z = \cos(\bar{z}, z) = \frac{z_j - z_i}{L} \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

2. 4. Modélisation non linéaire des structures en treillis :

Les éléments d'un treillis ne travaillent qu'en traction ou compression, par conséquent ils sont modélisés par des éléments finis de type barres. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 3 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement dans l'espace. Les nœuds n'ont pas de degré de liberté de rotation (donc ne tournent pas) car elles n'ont pas de signification physique. En effet, l'existence d'un degré de liberté de rotation signifierait la présence au sein de l'élément barre (élément bi articulé) de moment de flexion ou de torsion, ce qui est exclu.

La méthode qu'on présentera à pour objet l'analyse élastique non linéaire d'un élément barre qui sera implémentée dans un logiciel de calcul développé par les références [52], [15], [18], [06] à partir des travaux de [01], [14], [10].

Nous faisons plusieurs hypothèses de travail, puisque nous considérons le treillis dans le domaine tridimensionnel :

- Les liaisons entre les barres sont considérées comme des liaisons rotules.
- Les forces s'appliqueront uniquement sur les nœuds du treillis.
- On négligera également le poids des barres, il n'y aura donc pas de flexion et les barres seront donc uniquement soumises à de la traction et de la compression (on aura uniquement une déformation axiale).

2. 4.1. Analyse de la section d'un élément barre en élasticité non linéaire :

Dans le cadre de cette étude la section d'un élément barre est en profilé métallique, cette section est discrétisée en un ensemble de fibres en forme de tables trapézoïdales. La section est étudiée dans l'hypothèse des petites déformations et elle est définie dans son repère principal. Les lois de comportement des matériaux sont celles définies au chapitre 1. L'analyse non linéaire d'un élément barre concerne essentiellement les sollicitations normales dues à un effort normal N . Afin de simplifier la présentation des équations d'équilibre de l'élément barre, on gardera les mêmes dimensions des matrices et des vecteurs correspondant à l'élément poutre.

La déformation normale longitudinal $\varepsilon(y, z)$ de la section d'un élément barre en un point de coordonnées (y, z) est la déformation au centre de gravité de la section qui est comptée positivement dans le sens des raccourcissements des fibres de la section, est donnée par :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x \quad (\text{II.34})$$

Où :

ε_x : La déformation du centre de gravité de la section totale due à l'effort normal N .

Les déformations normales φ_y, φ_z (rotations de la section autour des axes G_y et G_z respectivement) et tangente γ_y, γ_z et l'angle de torsion θ_x , ainsi que leur accroissement $\Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z, \Delta\gamma_y, \Delta\gamma_z, \Delta\theta_x$ sont négligées.

La non linéarité matérielle d'un élément barre est prise en compte par la relation liant la sollicitation normale N et la déformation normale qui lui correspond $\varepsilon_n = \varepsilon_x$. La variation de déformation de la section sous sollicitations normales est donnée par :

$$\{ \Delta\varepsilon_n \} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

2. 4.1.1. Calcul des sollicitations internes :

Les sollicitations normales à la section droite d'un élément barre dues à la matrice profilée métallique peut s'écrire sous la forme d'une matrice $\{ F_n \}$ défini dans le repère principal lié à la section droite par :

$$\{ F_n \} = \{ F_{mn} \} \quad (\text{II.36})$$

Dans le repère principal G_{xyz} , on écrit :

$$\{ F_{mn} \} = \begin{Bmatrix} N_m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

L'accroissement des sollicitations normales dû au profilé métallique est donné par :

$$\{ \Delta F_{mn} \} = \int \Delta\sigma_m(y, z) \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot dS_m \quad (\text{II.38})$$

Où :

$\{ F_{mn} \}$: Représente la contribution due au béton et /ou au profilé métallique.

$\Delta\sigma_m(y, z)$: Représente la contrainte normale en un point courant de la section de béton et /ou au profilé métallique.

$E_m(y, z)$ étant le module élastique longitudinale corde de chaque fibre de la section due au béton et /ou au profilé métallique. Il relie la variation de contrainte normale $\Delta\sigma_m(y, z)$ à la variation de déformation longitudinale $\Delta\varepsilon_m(y, z)$ correspondant de la fibre :

$$\{ \Delta\sigma(y, z) \} = E_m(y, z) \cdot \{ \Delta\varepsilon(y, z) \} \quad (\text{II.39})$$

La variation des sollicitations normales ΔF_{mn} dans le béton et /ou le profilé métallique peut aussi s'exprimer comme suite :

$$\{ \Delta F_{mn} \} = \int E_m(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot dS_m \cdot \{ \Delta \varepsilon_n \} \quad (\text{II.40})$$

On peut alors écrire :

$$\{ \Delta F_{mn} \} = [k_{mn}] \cdot \{ \Delta \varepsilon_n \} \quad (\text{II.41})$$

$[k_{mn}]$: Matrice de rigidité corde reliant l'accroissement de sollicitations normales de la matrice de la section à la variation de déformation normale de la section.

2. 4.1.2. Calcul des sollicitations externes :

La section d'un élément barre est soumise à une sollicitation extérieure qui est l'effort normal N , est donné par :

$$\{ F_{sn} \} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.42})$$

Où $\{ F_{sn} \}$: est le vecteur des sollicitations normal à la section.

2. 4.1.3. Équilibre de la section :

L'équilibre de la section est exprimé par le fait que l'accroissement de sollicitations externes est équilibré par l'accroissement de sollicitations internes.

$$\begin{cases} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{cases} = \begin{cases} \Delta F_{mn} \\ \Delta F_{mt} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Les sollicitations tangentes internes et externes sont nulles pour l'élément barre. Le développement des équations d'équilibre nous permet d'aboutir à la relation :

$$\begin{cases} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{cases} = [k_s] \cdot \begin{cases} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Où $[k_s]$: est la matrice de rigidité corde de la section reliant l'accroissement d'efforts externes à l'accroissement de déformation dont la formulation est donnée par :

$$[k_s] = \begin{bmatrix} [k_{mn}] & o \\ o & o \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

Où :

$$o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Pour une variation des efforts sollicitant, la résolution en déformation de l'équation (II.44) est itérative. La solution de cette équation peut s'exprimer par :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix} = [k_s]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Remarque : La matrice de rigidité corde de la section $[k_s]$ est singulière.

2. 4.2. Matrice de rigidité d'un élément barre en élasticité non linéaire :

Pour tenir compte, dans la matrice de rigidité de l'élément barre, des effets des non linéarités dus au comportement des matériaux constitutifs et de leur association et des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds, l'analyse de l'état de déformation de l'élément barre est effectuée dans le repère intrinsèque xyz lié à la position déformée de l'élément, dans l'hypothèse des petites déformations, des petits déplacements. Les effets de second ordre s'introduisent dans le passage du repère intrinsèque xyz au repère local $x_0y_0z_0$.

2. 4.2.1. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère intrinsèque :

La sollicitation a l'extrémité de l'élément barre est :

$$\{F_N\} = \{N_j, 0,0,0,0,0\}^T \quad (\text{II.48})$$

Le déplacement correspondant est :

$$\{S_N\} = \{e, 0,0,0,0,0\}^T \quad (\text{II.49})$$

Avec :

$$e = L - L_0 \quad (\text{II.50})$$

Ou :

e : Variation de longueur de l'élément.

L_0 : Longueur initiale de l'élément avant déformation.

L : Longueur de l'élément après déformation.

Soient $\{\Delta F_N\}$ et $\{\Delta S_N\}$ les vecteurs d'accroissements des efforts et des déplacements aux extrémités de l'élément :

$$\{\Delta F_N\} = \{\Delta N_j, 0,0,0,0,0\}^T \quad (\text{II.51})$$

$$\{\Delta S_N\} = \{\Delta e, 0,0,0,0,0\}^T \quad (\text{II.52})$$

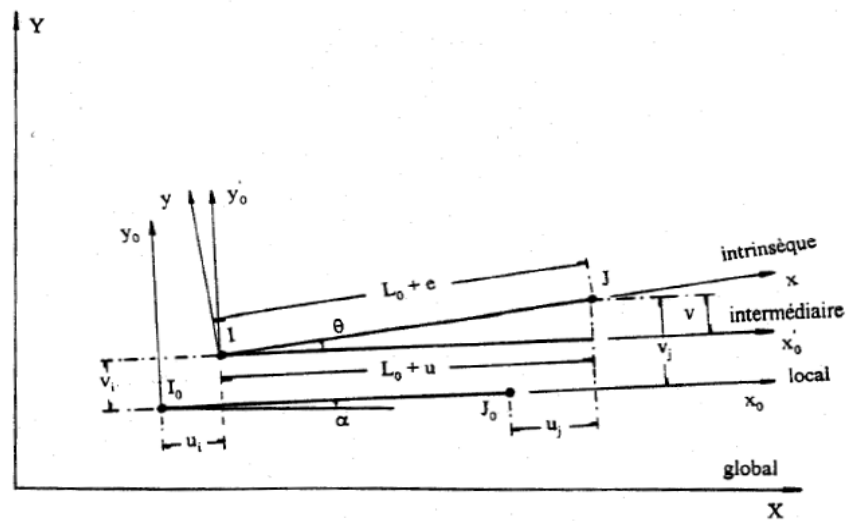


Fig. II.19. Repères d'un élément barre de treillis

Les efforts dans une section d'abscisse x d'un élément barre s'écrivent :

$$\begin{cases} N(X) = -N_j \\ M_y(X) = 0 \\ M_z(X) = 0 \\ T_y(X) = 0 \\ T_z(X) = 0 \\ M_x(X) = 0 \end{cases} \quad (II.53)$$

Le vecteur $\{F_S\}$ contenant les sollicitations dans une section peut être exprimé en fonction du vecteur $\{F_N\}$ contenant les efforts dans le repère intrinsèque par :

$$\{F_S\} = [L(x)] \cdot \{F_N\} \quad (II.54)$$

Ou :

$$\{F_S\} = \{N(x), 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (II.55)$$

Et :

$$[L(x)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.56)$$

Le théorème des travaux virtuels permet d'écrire :

$$\{S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\delta(x)\} \cdot dx \quad (II.57)$$

Ou :

$$\{\delta(x)\} = \{\varepsilon(x), 0, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (II.58)$$

En négligeant la variation de longueur dans le calcul de déplacement des nœuds :

$$\{\Delta S_N\} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot \{\Delta \delta(x)\} \cdot dx \quad (\text{II.59})$$

En remplaçant les relations (II.47) et (II.57) dans l'équation (II.59), on obtient la matrice de souplesse de l'élément K_N^{-1} tel que :

$$\{\Delta S_N\} = [K_N]^{-1} \cdot \{\Delta F_N\} \quad (\text{II.60})$$

Avec :

$$[K_N]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [K_S]^{-1} \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (\text{II.61})$$

L'intégration est effectuée par la règle de Simpson en considérant sur l'élément un certain nombre de sections de calcul dans lesquelles les matrices K_S sont déterminées à chaque étape.

Finalement, la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément, dans le repère intrinsèque OXYZ :

$$\{\Delta F_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (\text{II.62})$$

$[K_N]$: Étant la matrice de rigidité tangente de l'élément dans le repère intrinsèque.

$$[K_N] = \begin{bmatrix} [k_{mn}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

Remarque : La matrice de rigidité $[K_N]$ ne peut pas demeurer ainsi singulière, car au cours de la résolution de la matrice de rigidité générale dans le repère global, des pivots nuls vont apparaître.

Pour cela, on perturbe les termes de la diagonale correspondante aux efforts tranchants, au lieu d'être nuls, on les multiplie par un coefficient réel compris entre 0 et 1. D'après [05] plus ce coefficient est faible, plus l'élément est instable vis-à-vis des déplacements, mais plus la convergence de la structure vers sa position d'équilibre est rapide. Et plus il est important, plus l'élément est stable pour les déplacements, mais la convergence de la structure vers sa position d'équilibre est lente.

2. 4.2.2. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère local :

Maintenant, nous établissons la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds. Ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque au repère local.

Soient $\{F_L\}$ et $\{S_L\}$ les matrices colonne (12x1) contenant respectivement les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_o y_o z_o$.

$$\{F_L\} = (F_{ix_o}, F_{iy_o}, F_{iz_o}, 0, 0, 0, F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, 0, 0, 0)^T \quad (II.64)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, 0, 0, 0, u_j, v_j, w_j, 0, 0, 0)^T \quad (II.65)$$

Nous introduisons les matrices colonnes $\{F_U\}$ et $\{S_U\}$ de dimension (9x1) telles que :

$$\{F_U\} = (F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (II.66)$$

$$\{S_U\} = (u, v, w, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \quad (II.67)$$

Où :

$$\begin{cases} u = u_j - u_i \\ v = v_j - v_i \\ w = w_j - w_i \end{cases} \quad (II.68)$$

La relation qui lie les déplacements dans ces deux repères est donnée par l'équation :

$$\{S_U\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad (II.69)$$

De même, les efforts sont liés par :

$$\{F_L\} = [T_0]^T \cdot \{F_U\} \quad (II.70)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.71)$$

Le déplacement de l'élément dans le repère intrinsèque est donné par :

$$e = L - L_0 \quad (II.72)$$

Avec :

$$L = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} \quad (II.73)$$

Le déplacement axial e du nœud J dans le repère intrinsèque, est fonction des déplacements relatifs u , v et w des nœuds I et J exprimés dans le repère local. En effet, on a :

$$e = \sqrt{(L_0 + u)^2 + v^2 + w^2} - L_0 \quad (\text{II.74})$$

La différentiation de l'expression (II.74) nous permet d'établir la relation entre les variations de déplacements dans les repères intrinsèques et intermédiaires $\{\Delta S_N\}$ et $\{\Delta S_U\}$, respectivement :

$$\{\Delta S_N\} = [B].\{\Delta S_U\} \quad (\text{II.75})$$

Ou :

$[B]$: Matrice de transformation géométrique,

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial u} & \frac{\partial e}{\partial v} & \frac{\partial e}{\partial w} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.76})$$

En ne considérant que les termes du premier ordre dans le développement en série des dérivées partielles, la matrice B est donnée par :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{L_0} & \frac{w}{L_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

La relation entre les variations des efforts et des déplacements dans le repère intermédiaire est obtenue d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\{F_N\}^T . \{\Delta S_N\} = \{F_U\}^T . \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.78})$$

Et en tenant compte de l'équation (II.75) :

$$\{F_N\}^T . [B].\{\Delta S_U\} = \{F_U\}^T . \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.79})$$

$\{\Delta S_U\}$ étant arbitraire, on peut écrire :

$$\{F_U\} = [B]^T . \{F_N\} \quad (\text{II.80})$$

D'où par différentiation, on obtient :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot \{\Delta F_N\} + [\Delta B]^T \cdot \{F_N\} \quad (\text{II.81})$$

D'autre part, les termes de la matrice $[B]$ ne dépendent que des dérivées partielles de la fonction e , qui sont fonction du déplacement relatif u des nœuds I et J, respectivement. On a alors :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial w} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.82})$$

Après un développement, nous arrivons à :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = \begin{bmatrix} \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial u} \right) \cdot N_j \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right) \cdot N_j \\ \Delta \left(\frac{\partial e}{\partial w} \right) \cdot N_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

Qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[\Delta B]^T \cdot \{F_N\} = [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.84})$$

Avec :

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

En se limitant aux termes du premier ordre dans le développement, la série des dérivées secondes des termes de la matrice $[D]$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u^2} \\ D_{12} = D_{21} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial v} \\ D_{13} = D_{31} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial u \cdot \partial w} \\ D_{22} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v^2} \\ D_{23} = D_{32} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial v \cdot \partial w} \\ D_{33} = N_j \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial w^2} \end{array} \right. \quad (\text{II.86})$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = 2 \cdot (v \cdot F_{jy0} + w \cdot F_{jz0}) / L_0^2 \\ D_{12} = D_{21} = -F_{jy0} / L_0 \\ D_{13} = D_{31} = -F_{jz0} / L_0 \\ D_{22} = -F_{jx0} / L_0 - (v \cdot F_{jy0} - w \cdot F_{jz0}) / L_0^2 \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = \frac{F_{jx0}}{L_0} + (v \cdot F_{jy0} - w \cdot F_{jz0}) / L_0^2 \end{array} \right. \quad (\text{II.87})$$

En remplaçant l'équation (II.84) dans l'équation (II.81), nous obtenons la relation liant les accroissements de déplacements et d'efforts aux extrémités de l'élément, dans le repère local intermédiaire :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T \cdot [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} + [D] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.88})$$

$$\{\Delta F_U\} = ([B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D]) \cdot \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.89})$$

D'où la relation :

$$\{\Delta F_U\} = [K_U] \cdot \{\Delta S_U\} \quad (\text{II.90})$$

Où :

$[K_U]$: Matrice de rigidité (9x9), de l'élément barre dans le repère local intermédiaire, définie par :

$$[K_U] = [B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D] \quad (\text{II.91})$$

En vertu des relations (II.69) et (II.70), nous arrivons à la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} = [K_L].\{\Delta S_L\} \quad (\text{II.92})$$

Où $[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément barre dans le repère local, définie par :

$$[K_L] = [T_0]^T . ([B]^T . [K_N] . [B] + [D]) . [T_0] \quad (\text{II.93})$$

2. 4.2.3. Matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère absolu :

La matrice de rigidité de la structure est assemblée à partir des matrices de rigidité des éléments barres définissant la structure, dans le repère absolu OXYZ.

Soient $\{F_X\}$ et $\{S_X\}$ les matrices colonne (12x1) contenant les efforts appliqués et les déplacements aux nœuds de l'élément, respectivement dans le repère absolu OXYZ :

$$\{F_X\} = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, 0,0,0, F_{jx}, F_{jy}, F_{jz}, 0,0,0)^T \quad (\text{II.94})$$

$$\{S_X\} = (X_i, Y_i, Z_i, 0,0,0, X_j, Y_j, Z_j, 0,0,0)^T \quad (\text{II.95})$$

Les incréments des efforts et des déplacements dans le repère absolu sont donnés respectivement par :

$$\{\Delta F_X\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iy}, \Delta F_{iz}, 0,0,0, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jy}, \Delta F_{jz}, 0,0,0)^T \quad (\text{II.96})$$

$$\{\Delta S_X\} = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, 0,0,0, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j, 0,0,0)^T \quad (\text{II.97})$$

La relation liant ces grandeurs (et leurs variations) dans les deux systèmes s'obtient au moyen de la matrice de rotation $[RT]$, dont les termes ne dépendent que de l'orientation initiale de l'élément. En effet, on a :

$$\{S_L\} = [RT].\{S_X\} \quad (\text{II.98})$$

Et de même :

$$\{F_X\} = [RT]^T . \{F_L\} \quad (\text{II.99})$$

Avec :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [R_0] & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & [R_0] & o \\ o & o & o & o \end{bmatrix} \quad (\text{II.100})$$

Ou :

$[R_0]$: Est la matrice de transformation géométrique d'un élément barre tridimensionnelle défini dans le (§ 2. 3.2).

$$[R_0] = \begin{bmatrix} c_x & c_y & c_z \\ \frac{-c_x \cdot Y}{S} & \frac{S}{L} & \frac{-c_y \cdot Z}{S} \\ \frac{-Z}{S} & 0 & \frac{-X}{S} \end{bmatrix} \quad (\text{II.101})$$

$$o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ S = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ \cos(\bar{x}, x) = \frac{x_j - x_i}{L} = \frac{X}{L} \\ \cos(\bar{y}, y) = \frac{y_j - y_i}{L} = \frac{Y}{L} \\ \cos(\bar{z}, z) = \frac{z_j - z_i}{L} = \frac{Z}{L} \end{array} \right. \quad (\text{II.103})$$

La relation matricielle liant les accroissements d'efforts et les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément barre de treillis dans le repère absolu OXYZ, lié à la structure :

$$\{\Delta F_x\} = [K_x] \cdot \{\Delta S_x\} \quad (\text{II.104})$$

Avec :

$[K_x]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément barre dans le repère absolu OXYZ,

$$[K_x] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (\text{II.105})$$

Remarque :

Après avoir implémenté les modifications qui ont été décrites au dessus et plus précisément après avoir perturbé les termes de la diagonale correspondante aux efforts tranchants par un coefficient réel compris entre 0 et 1, des pivots nuls apparaissent due a la singularité des matrices $[L(x)]$ et $[B]$ alors pour résoudre ce problème on procèdera de la même manière que pour la matrice de rigidité (au lieu d'annuler les termes de la diagonale des matrices, on les perturbe par un coefficient pris égale a 10^{-4}).

2. 5. Comportement des structures en treillis :

Les structures en treillis ont une caractéristique essentielle qui est l'absence de moments fléchissants et a fortiori d'efforts tranchants dans les barres. Le principe de leurs fonctionnements mécaniques, obéit à la théorie de la résistance des matériaux, et peut-être schématisé de la façon suivante (figure II.20) :

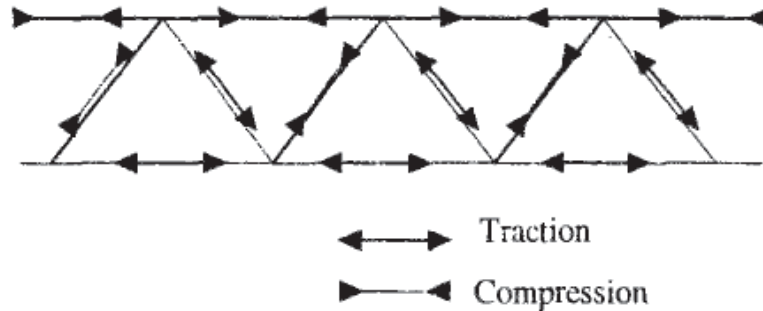


Fig. II.20. Représentation schématique du principe de fonctionnement d'une poutre treillis.

Sous l'effet de charges descendantes (gravitaires) appliquées au niveau des nœuds de la membrure supérieure, cette dernière se comprime sans flexion (il est donc nécessaire de la vérifier au flambement) et la membrure inférieure est tendue. Par contre sous l'effet de charges ascendantes (vent par exemple), la membrure inférieure se comprime (il faudra aussi la vérifier au flambement).

Il est à éviter de prendre en compte les diagonales comprimées car elles constituent les barres les plus longues, donc les plus sujettes au flambement. Alors pour reprendre les efforts pouvant changer de sens, on a intérêt à disposer de deux diagonales croisées attachées à leur croisement, plutôt qu'une seule qui serait tantôt tendue, tantôt comprimée.

Les éléments d'une structure en treillis sont soumis à des efforts de compression ce qui présente plusieurs types d'instabilité, alors on peut les classer comme suit :

- Instabilité due à un flambement local des barres comprimées, elle se produit selon une longueur de flambement qui est en général égale à la longueur de la barre, ou bien égale à la longueur de la barre multipliée par un facteur si les nœuds sont rigides (elle se produit selon le type d'assemblage et selon que la barre appartienne à une membrure, un montant ou une diagonale).
- Instabilité due à un flambement global dans le plan du treillis, à la manière d'une colonne comprimée. Il peut être empêché par des dispositifs de construction. C'est le cas lorsque la présence d'une toiture ou d'un tablier stabilise le treillis, ou que des éléments secondaires relient les nœuds de treillis voisins.

- Instabilité due à un flambement global transversal, ou déversement, provoqué par une instabilité transversale d'une membrure comprimée impliquant plusieurs barres et entraînant avec elle le reste du treillis. Ce phénomène peut se produire quand la membrure comprimée n'est pas contreventée latéralement.

2. 6. Conclusions :

Dans ce chapitre nous avons tout d'abord présenté les différents types de systèmes en treillis, puis nous avons proposé, une méthode de modélisation géométrique d'un élément spatiale de type barre, et une formulation pour le calcul non linéaire matérielle et géométrique des structures en treillis en comportement statique sous un chargement monotone (croissant) jusqu'à la rupture. Enfin nous avons présenté leurs comportements vis-à-vis du chargement qui leur est appliqué et leurs différents types d'instabilité.

Dans le chapitre suivant nous présenterons le schéma itératif utilisé pour trouver l'équilibre de la section, et l'algorithme permettant de vérifier l'équilibre général de la structure en treillis.

CHAPITRE 3

ALGORITHMES DE RÉSOLUTION

Sommaire

3. 1. Introduction	54
3. 2. Les techniques numériques pour la résolution des problèmes non linéaire	54
3. 2.1. Méthode purement incrémentale	55
3. 2.2. Méthode itérative	55
3. 2.2.1. La méthode Newton-Raphson standard	56
3. 2.2.2. La méthode Newton-Raphson modifiée	57
3. 2.2.3. La méthode de la rigidité sécante	58
3. 2.3. Méthode incrémentale itérative où mixte	59
3. 3. Algorithme et méthode général de résolution	60
3. 3.1. Algorithme d'équilibre de la section en profilé métallique	60
3. 3.1.1. Méthode itérative de résolution et critère de convergence	60
3. 3.1.2. Algorithme de résolution	61
3. 3.1.3. Organigramme de calcul	63
3. 3.2. Algorithme d'équilibre de la structure en treillis	64
3. 3.2.1. Algorithme de résolution	64
3. 3.2.2. Séquences de calcul	66
3. 3.2.3. Organigramme de calcul	71
3. 4. Conclusions	73

3. 1. Introduction :

La résolution de systèmes d'équations non linéaires constitue l'un des problèmes courants de l'analyse numérique. Dans ce chapitre nous présenterons, dans une première partie, les techniques numériques pour résoudre les problèmes non linéaires en calcul de structures. La seconde partie sera consacrée à l'ensemble des organigrammes et algorithmes relatifs à l'implémentation du programme de résolution des structures en treillis dans le domaine non linéaire et en tenant compte du comportement réel des matériaux.

3. 2. Les techniques numériques pour la résolution des problèmes non linéaire :

Les méthodes de résolution des équations non linéaires ont déjà fait l'objet de plusieurs recherches. Nous nous limiterons donc à un bref aperçu de quelques techniques de résolution non linéaire faite à partir des références [12], [13], [19], [20], [54].

D'après [21] lors de la résolution d'un problème non linéaire, le trajet de chargement peut présenter plusieurs comportements, et on distingue lors du trajet charge-déplacement :

- Les points limites : tangente horizontale,
- Les points de bifurcation : plusieurs solutions au même point,
- Les points de retournement : tangente verticale,
- Les points de rupture (ruine) : Lieu des points où le trajet s'arrête brusquement à cause de la rupture de la structure.

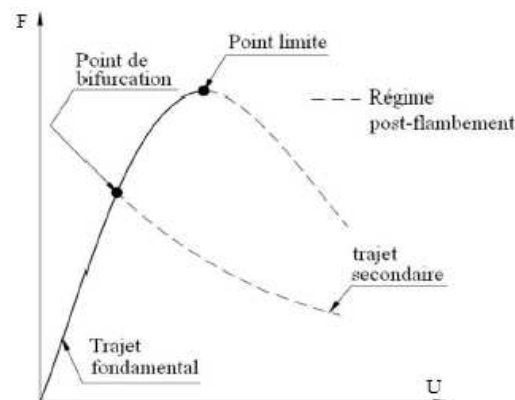


Fig. III.1. Comportements d'un trajet de chargement

La discrétisation par élément fini d'un problème non linéaire conduit à un système d'équations également non linéaire, sa solution ne peut être obtenue que par une suite de résolutions linéaires, en utilisant l'une des trois techniques suivantes :

- Méthode purement incrémentale (Procédure pas à pas).
- Méthode itérative.
- Méthode incrémentale itérative (Procédure mixte).

3. 2.1. Méthode purement incrémentale :

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision du vecteur chargement en plusieurs incréments, pas forcément égaux. Durant chaque incrément de charge l'équation (III.1) est supposée être linéaire avec une valeur constante de K déduite des résultats de l'incrément précédent.

$$[K]_{i-1} \cdot \{\Delta U\}_i = \{\Delta F\}_i \quad (\text{III.1})$$

Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment.

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i \quad (\text{III.2})$$

Le processus est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itération dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément. La modification qui peut se faire est d'appliquer la moitié de l'incrément de charge et de calculer la nouvelle rigidité structurelle correspondant aux contraintes totales de cette valeur. La matrice de rigidité actualisée sera donc utilisée pour l'incrément de charge. La méthode incrémentale d'origine ou de forme modifiée ne prend pas en compte la distribution de force durant l'application de la charge incrémentale.

L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement, et constitue une linéarisation par intervalles de la réponse de la structure sans itérations sur l'équilibre, ce qui peut conduire à un écart considérable de la réalité par accumulation des erreurs (Figure III.2).

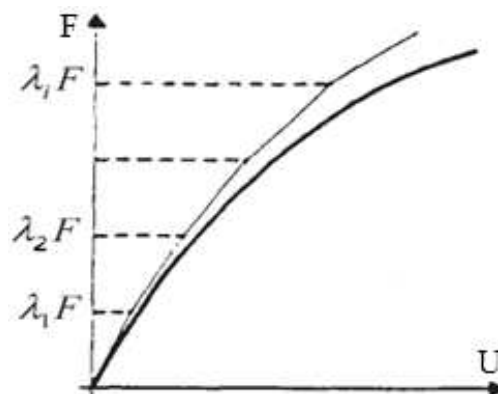


Fig. III.2. Méthode purement incrémentale

3. 2.2. Méthode itérative :

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales

internes équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont appliquées à leurs tours et on déduit le nouveau déplacement qu'on doit ajouter au précédent. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance. Plusieurs techniques itératives de calcul de la matrice de rigidité et des forces résiduelles existent, On distingue ainsi :

3.2.2.1. La méthode Newton-Raphson standard :

Elle est basée sur la matrice de rigidité tangente $K_t(U)$ qui est actualisée, et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Cette méthode exige un nombre réduit d'itérations et converge rapidement vers la solution exacte (figure III.3.a).

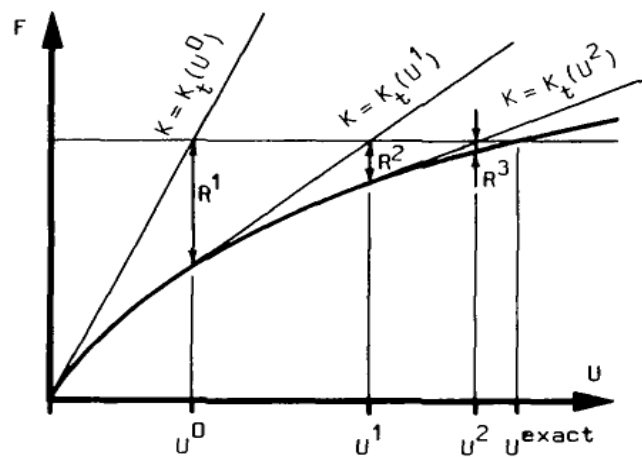


Fig. III.3.a. Méthode Newton-Raphson standard

L'algorithme de cette méthode se résume de la manière suivante [19] :

- Soit à l'itération $j - 1$ une approximation de la solution U^{j-1} telle que le résidu ne soit pas nul :

$$\{R(U^{j-1})\} = \{F\} - [K(U^{j-1})] \cdot \{U^{j-1}\} \neq 0 \quad (\text{III.3})$$

- À l'itération j , on cherche une approximation U^j de la solution telle que :

$$\{R(U^j)\} = \{R(U^{j-1} + \Delta U^j)\} = 0 \quad (\text{III.4})$$

- La méthode est obtenue en développant ce résidu en série de Taylor au voisinage de U^{j-1} :

$$\{R(U^{j-1} + \Delta U^j)\} = \{R(U^{j-1})\} + \left\{ \frac{\partial R}{\partial U} \right\}_{U^{j-1}} \cdot \{\Delta U^j\} + \dots = 0 \quad (\text{III.5})$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur à 1, on a :

$$-\left\{\frac{\partial R}{\partial U}\right\} \cdot \{\Delta U^j\} = \{R(U^{j-1})\} \quad (\text{III.6})$$

$$\{R(U^{j-1})\} = [K_t(U^{j-1})] \cdot \{\Delta U^j\} \quad (\text{III.7})$$

$$\{U^j\} = \{U^{j-1}\} + \{\Delta U^j\} \quad (\text{III.8})$$

- L'expression de la matrice tangente $[K_t(U^{j-1})]$ s'obtient en dérivant l'expression du résidu (III.4) :

$$[K_t(U)] = \left[\frac{\partial R}{\partial U}\right] = -\left[\frac{\partial F}{\partial U}\right] + [K(U)] + \left[\frac{\partial [K(U)]}{\partial U}\right] \cdot \{U\} \quad (\text{III.9})$$

Si F ne dépend pas de U , on a :

$$[K_t(U)] = [K(U)] + \left[\frac{\partial [K(U)]}{\partial U}\right] \cdot \{U\} \quad (\text{III.10})$$

L'inconvénient de la méthode de Newton-Raphson standard est le calcul et la factorisation de la matrice tangente à chaque itération. Par contre la méthode de Newton-Raphson modifiée permet d'utiliser la même matrice de rigidité pour chaque itération.

3. 2.2.2. La méthode Newton-Raphson modifiée :

Dans ce cas la matrice de rigidité tangente est calculée, une seule fois au début de l'incrément de charge, pour la première itération (figure III.3.b). Cette méthode exige un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence et arriver à la solution.

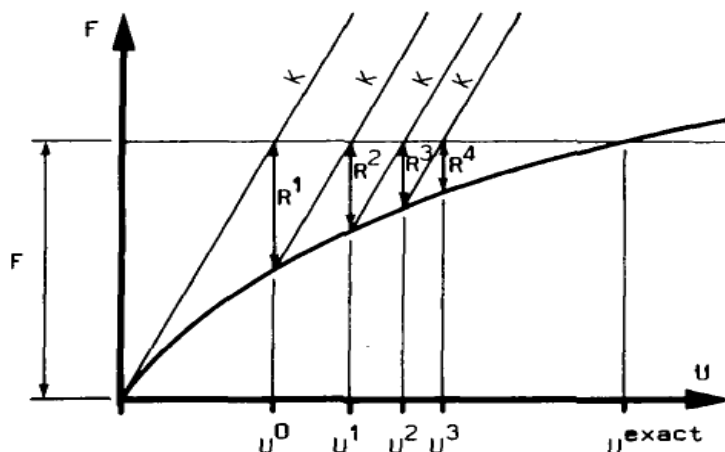


Fig. III.3.b. Méthode Newton-Raphson modifiée

L'algorithme de cette méthode se résume de la manière suivante [19] :

- Construction du vecteur de charge nodale $\{F\}$ à partir du vecteur élémentaire $\{f\}$,
- Formation de la matrice de rigidité $[K]$ à partir des matrices élémentaires $[k]$,
- Calcul des déplacements : $\{U^0\} = [K]^{-1} \cdot \{F\}$

Pour chaque itération $j=1,2,3,\dots,n$, il faut :

- Calculer $\{u^{j-1}\}$ de $\{U^{j-1}\}$ pour chaque élément (pour $j = 1 : \{U^{j-1}\} = \{U^0\}$),
- Calculer les résidus $\{r^j\} = \{f\} - [K_s] \cdot \{U^{j-1}\}$, où $[K_s]$ est la matrice sécante,
- Former le résidu $\{R^j\}$ par assemblage des $\{r^j\}$,
- Calculer les corrections des déplacements $\{\Delta U^j\} = [K]^{-1} \cdot \{R^j\}$,
- Calculer les déplacements totaux $\{U^j\} = \{U^{j-1}\} + \{\Delta U^j\}$.

Pour chaque itération, on doit tester la convergence, et nous pouvons utiliser, par exemple, à l'itération j :

$$|c| = \max_m \left| \frac{\Delta U_m}{U_m} \right| \quad (\text{Avec : } |c| < \varepsilon).$$

3. 2.2.3. La méthode de la rigidité sécante :

La matrice de rigidité est recalculée à chaque itération, et la solution converge de façon sensiblement moins rapide, mais son implémentation est beaucoup plus légère (figure III.3.c). Elle est mieux adaptée pour les cas des structures ayant un comportement adoucissant (cas du béton tendu fissuré dans les structures en béton armé). Le coût de calcul par itération est le même que pour la méthode newton-raphson modifiée.

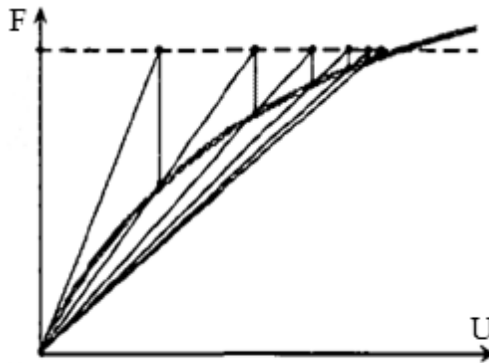


Fig. III.3.c. Méthode de la sécante

Remarque :

Le processus itératif permet de réduire le coût en temps de calcul, l'inconvénient est que les déplacements ne sont déterminés que pour un seul incrément, et ne permet pas de calculer des réponses fortement non linéaires susceptibles de croître ou de décroître : comme la recherche de la charge de rupture ou lors de l'utilisation de matériaux à comportement dépendant du chemin parcouru (plasticité, fluage,...), alors la méthode itérative n'est pas adaptée pour le traitement de ce genre de problème.

Le processus itératif peut être amélioré en ajoutant un pilotage de l'incrément de chargement, cela permettra de traiter le passage des points limites et des points de bifurcation afin de suivre les branches bifurquées. Par conséquent, on aura deux inconnues : les incréments de chargement et de déplacement.

3. 2.3. Méthode incrémentale itérative (mixte) :

La combinaison de la méthode incrémentale et la méthode itérative donnent la méthode incrémentale avec itérations à l'équilibre ou mixte (Figure III.4).

Le chargement est appliqué par incréments et la solution dans chaque étape du chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes : incrémentale et itérative, et elle est la plus utilisée.

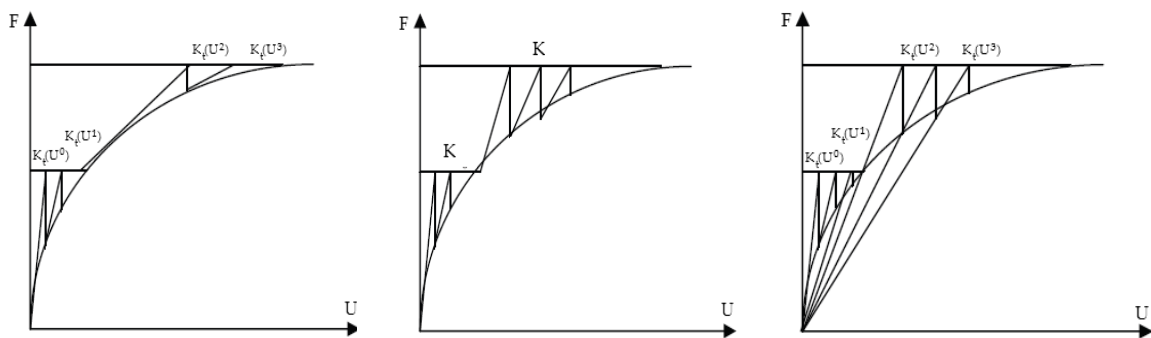


Fig. III.4. Méthode mixte

L'algorithme de cette méthode se résume de la manière suivante [19] :

Pour chaque incrément de charge $\{\Delta F\}^i$, on effectue les opérations suivantes :

- Calcul de la correction des déplacements $\{\Delta U^j\}^i = [K^i_0]^{-1} \cdot \{R^j\}^i$.

Où $\{R^j\}^i$: représente les forces hors équilibre dans l'incrément i pour l'itération j (pour $j=1 : \{R^1\}^i = \{\Delta F\}^i$).

- Calcul des déplacements totaux $\{U^j\}^i = \{U^{j-1}\}^i + \{\Delta U^j\}^i$.

- Calcul des déplacements pour chaque élément dans le système d'axe local $\{u^j\}^i$ de $\{U^j\}^i$.

- Calcul des efforts intérieurs h_{ij} .

- Calcul des résidus $r^{j+1} = \sum \{\Delta f\}^i - h_{ij}$.

- Calcul du résidu total $R^{j+1} = \sum_{e=1}^n r^{j+1}$ pour tous les éléments e.

- Évaluation du rapport de convergence : $|c| = \left| \frac{\Delta U_m}{U_m} \right|$.

- Test sur c :

Si $|c| > 0,001$, on reprend une nouvelle itération au point 1,

Si $|c| \leq 0,001$, on reprend au point 1 avec un nouvel incrément de charge $\{\Delta F\}^{i+1}$ après avoir établi $[K^{i+1}_0]$.

3. 3. Algorithme et méthode général de résolution :

Dans ce qui suit nous allons développer le processus itératif utilisé dans ce mémoire et l'algorithme mis en œuvre pour trouver l'équilibre de la section en profilé métallique, puis nous décrivons l'algorithme permettant de vérifier l'équilibre général de la structure en treillis à partir des références [52], [15], [18], [06], [01], [14], [10].

3. 3.1. Algorithme d'équilibre de la section en profilé métallique :

3. 3.1.1. Méthode itérative de résolution et critère de convergence :

En élasticité non linéaire, il est facile de calculer les efforts développés par des déformations données, cependant il n'existe pas une méthode directe qui permet d'obtenir des déformations à partir des efforts donnés. Alors il est indispensable d'utiliser une méthode itérative pour déterminer la solution en déformation.

Soit un état d'équilibre de la section d'un élément barre de treillis, soumis à des sollicitations extérieures exprimées par le vecteur $\{F_s\}$ défini par :

$$\{F_s\} = \begin{Bmatrix} F_{sn} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Et soit le vecteur de déformation correspondant $\{\varepsilon_s\}$ donné par :

$$\{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Pour une variation de sollicitations extérieures $\{\Delta F_s\}$, l'accroissement de déformation $\{\Delta \varepsilon_s\}$ de la section est recherché en utilisant la méthode des substitutions successives utilisant les matrices "cordes" (figure III.5).

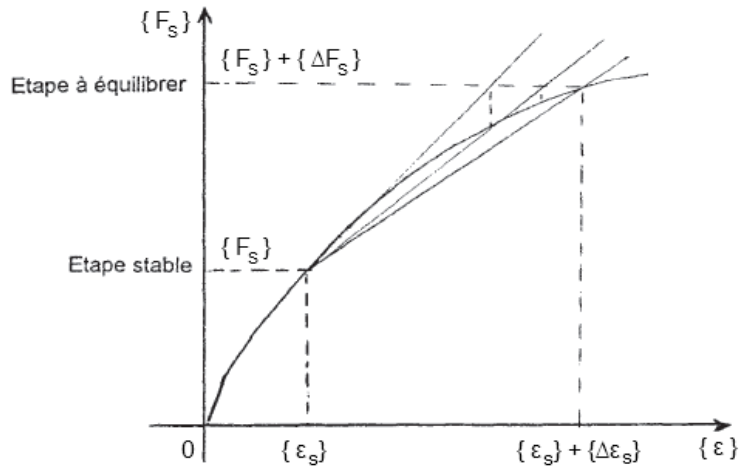


Fig. III.5. Représentation de la méthode des substitutions utilisant les matrices "cordes"

Cette méthode consiste à construire une suite de solutions, tout en partant de la déformation initiale, le schéma de résolution s'écrit :

$$\{\Delta\varepsilon_s\}_0 = (0) \tag{III.13}$$

$$\{\Delta\varepsilon_s\}_i = [S_s]_{i-1} \cdot \{\Delta F_s\} \tag{III.14}$$

Où :

$[S_s]_{i-1}$: étant la matrice de souplesse "corde" de la section à l'itération (i-1).

On considère que l'équilibre de la section est atteint lorsque pour deux itérations successives, la norme euclidienne de déformation est inférieure à une tolérance fixée a priori :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_{i-1} \rangle \cdot \langle \Delta\varepsilon_i - \Delta\varepsilon_{i-1} \rangle}{\langle \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_i \rangle \cdot \langle \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_i \rangle} \right]^{1/2} < T_u$$

Où : $\langle \quad \rangle$: Désigne le vecteur ligne.

ε_s : Déformation à l'étape précédente équilibrée.

Généralement une dizaine d'itérations suffisent pour assurer la convergence [10].

3. 3.1.2. Algorithme de résolution :

À partir d'un état d'équilibre de la section, nous appliquons un incrément de sollicitations extérieures ΔF_s . En partant de la solution initiale nulle $\{\Delta\varepsilon_s\} = 0$, nous calculons la matrice de rigidité corde de la section $[K_s]$.

Nous effectuons alors un test sur le déterminant de la matrice de rigidité de la section $\det [K_s]$:

Si $\det [K_s] < 0$, nous aurons la ruine de la section et le processus itératif est immédiatement stoppé.

Sinon, le schéma de résolution de l'équation linéaire d'équilibre de la section, s'écrit :

$$\Delta F_s = [k_s] \cdot \Delta \varepsilon_s \quad (\text{III.15})$$

On obtient une suite de solutions $\Delta \varepsilon_0, \Delta \varepsilon_1, \dots, \Delta \varepsilon_i$; ou $\Delta \varepsilon_i$ est calculée à partir de $\Delta \varepsilon_{i-1}$ jusqu'à convergence.

S'il n'y a pas convergence, $\Delta \varepsilon_s$ est modifié puis $[k_s]$ sera réévalué pour recommencer le cycle jusqu'à convergence. Si au bout d'un nombre d'itérations fixé à l'avance, on n'aperçoit pas de convergence, nous constatons alors un état de divergence de la section qui interrompt le processus.

L'algorithme d'équilibre de la section en profilé métallique d'un élément barre de treillis, est décrit ci-dessous :

Pour une étape donnée r

$\{\Delta F_s\}^r$: Accroissement d'efforts à l'étape r.

$\{\Delta \varepsilon\}_0$: Accroissement de déformations initiales.

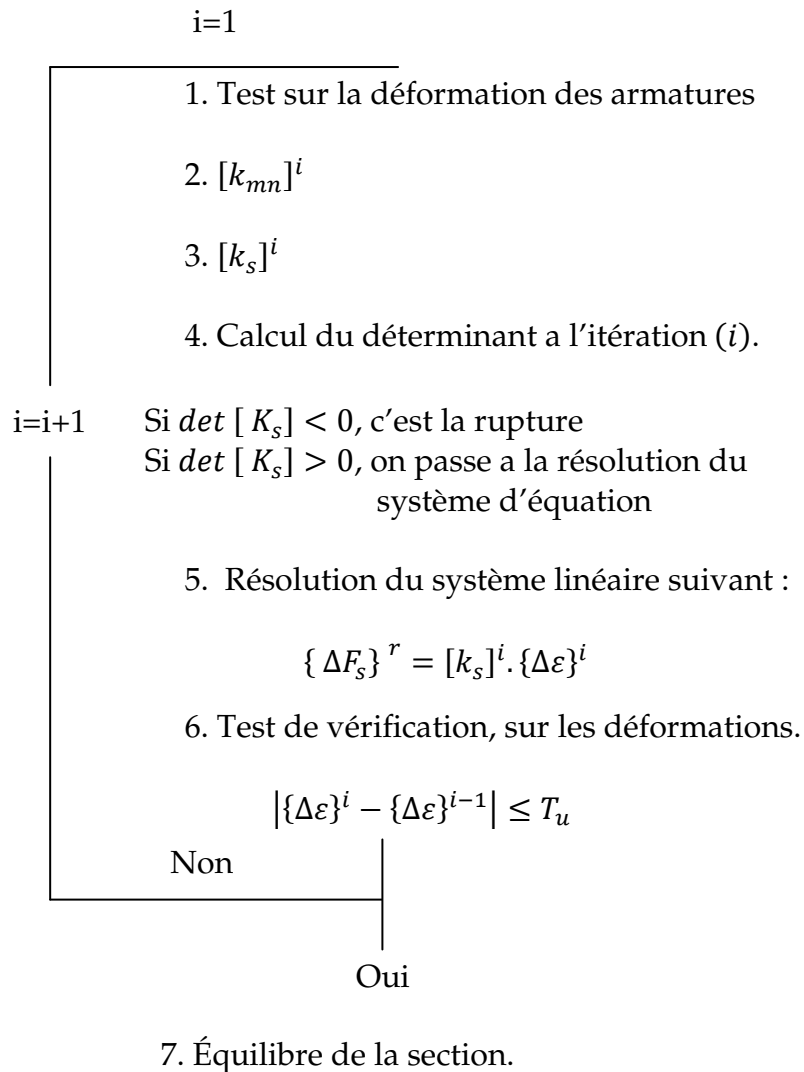


Fig. III.6. Algorithme d'équilibre d'une section en profilé métallique pour un élément barre

N.B :

T_u : Précision voulue de l'ordre de 0,01.

N : Nombre d'itérations fixé a l'avance.

N_{it} : Nombre d'itérations effectué par le programme.

3. 3.1.3. Organigramme de calcul :

L'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale en profilé métallique, est décrit ci-dessous :

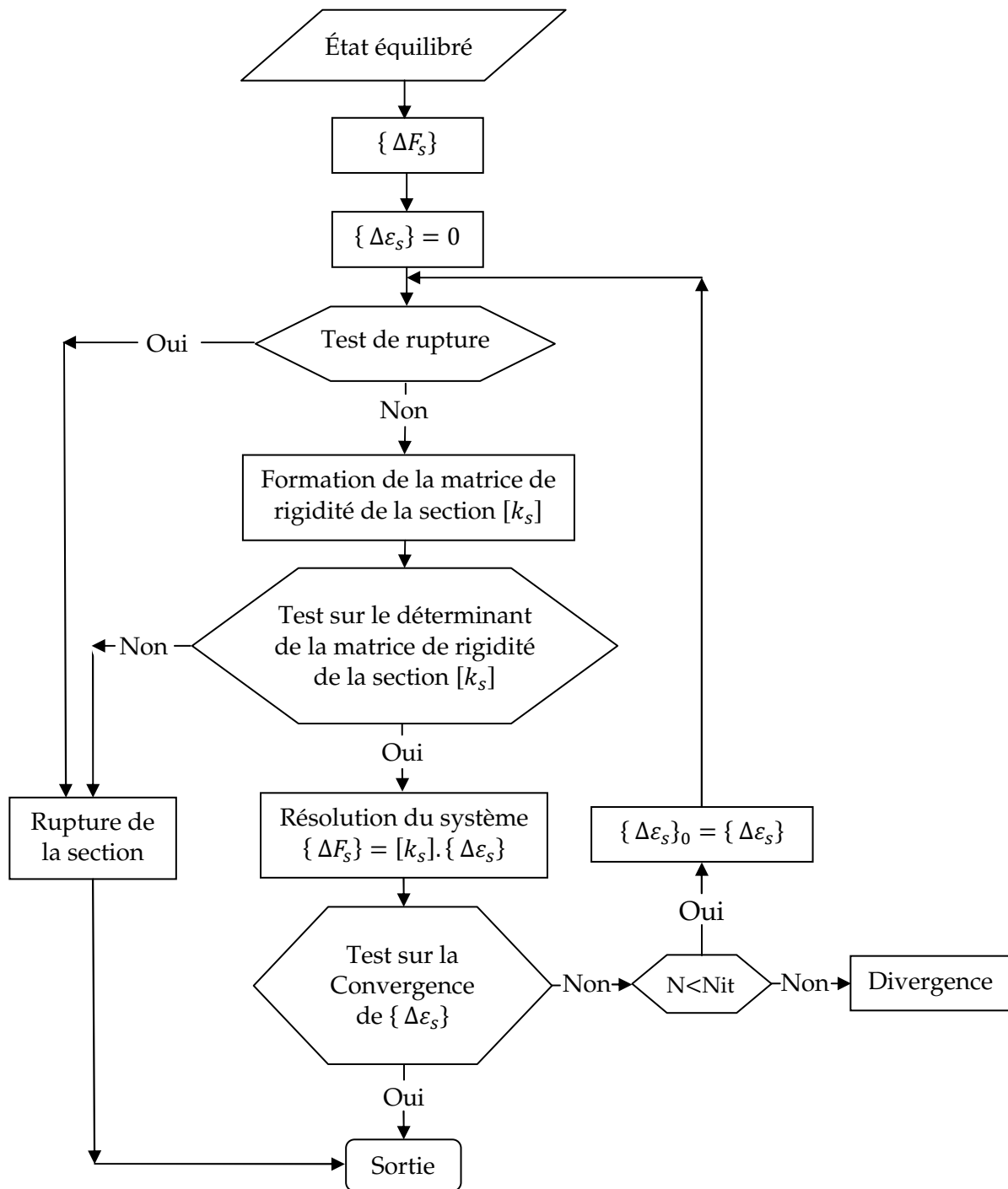


Fig. III.7. Organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une section en profilé métallique

3. 3.2. Algorithme d'équilibre de la structure en treillis :

3. 3.2.1. Algorithme de résolution :

Le problème non linéaire est résolu en utilisant une méthode itérative, basée sur la méthode des déplacements, dans laquelle on recalcule, à chaque étape, la matrice de rigidité "corde" reliant ses variations de déplacements aux variations d'efforts.

Pour une variation du chargement extérieur $\{\Delta P\}$ donné, on construit la matrice de rigidité $[K]$ de la structure.

Pour chaque étape de chargement, le problème consiste à chercher la variation de déplacements des nœuds $\{\Delta U\}$ solution du système d'équation non linéaire suivant :

$$\{\Delta P\} = [K].\{\Delta U\} \quad (\text{III.16})$$

La matrice de rigidité $[K]$ est formée à partir des matrices $[K_x]$ des éléments de la structure.

La matrice de rigidité $[K_x]$ de chaque élément de la structure est calculée en étudiant le comportement mécanique d'un certain nombre de sections transversales le long de l'élément dans le repère intrinsèque lié à l'élément. Le passage au repère global, lié à la structure, est effectué au moyen d'une matrice de rotation $[RT]$ qui ne dépend que de l'inclinaison initiale de l'élément.

La recherche de l'équilibre de la structure se fait pour une variation de chargement extérieur. À chaque accroissement de chargement $\{\Delta P\}$ donné, le système non linéaire de l'équation (III.16) est résolu en utilisant la méthode des substitutions successives basée sur les matrices "cordes" reliant les accroissements d'efforts appliqués aux nœuds aux accroissements de déplacements des nœuds (fig. III.8).

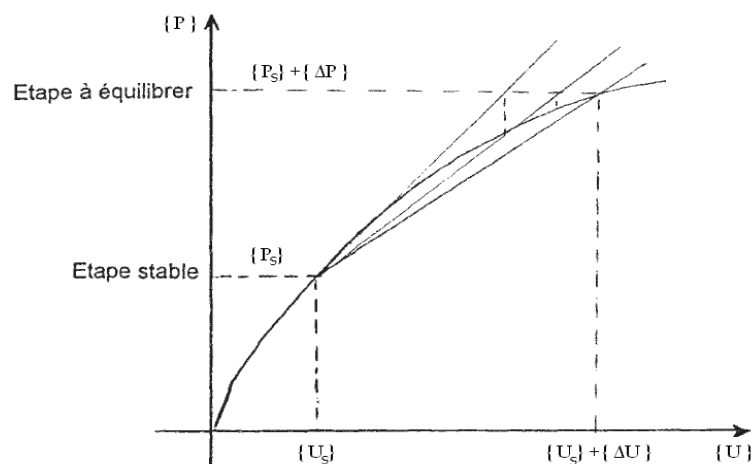


Fig. III.8. Représentation de la méthode des substitutions utilisant les matrices "cordes"

Le problème non linéaire consiste à déterminer l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ correspondant à l'accroissement de chargement $\{\Delta P\}$.

La méthode des substitutions utilisant les matrices de rigidité "cordes" consiste à construire une suite de solutions $\{\Delta U\}_0, \{\Delta U\}_1, \dots, \{\Delta U\}_i, \{\Delta U\}_{i+1}$ étant calculée à partir de $\{\Delta U\}_{i+1}$ en résolvant le système linéaire d'équations suivantes :

$$\{\Delta P\} = [K]_i.\{\Delta U\}_{i+1} \quad (\text{III.17})$$

Où :

$[K]_i$: étant la matrice de rigidité "corde" de la structure à l'itération (i).

Pour le démarrage de l'algorithme de calcul, la condition initiale est donnée par :

$$\{\Delta U\}_0 = \{0\} \quad (\text{III.18})$$

L'application de l'algorithme exige la formation, à chaque itération d'une nouvelle matrice de rigidité de la structure $[K]$.

La solution en déplacement du problème est obtenue, lorsque :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \langle \{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1} \rangle}{\langle U_s - \Delta U_i \rangle \cdot \langle \{U_s\} - \{\Delta U\}_i \rangle} \right]^{1/2} < T_u \quad (\text{III.19})$$

Où : $\langle \quad \rangle$: Désigne le vecteur ligne.

$\{U_s\}$: Le vecteur de déplacement des nœuds de la structure correspondant à la dernière étape stable.

Si le nombre d'itérations devient trop important, la solution diverge et donc le processus itératif est repris avec un pas de chargement égal à la moitié du pas de chargement précédent et ainsi de suite.

3. 3.2.2. Séquences de calcul :

L'analyse de la structure en treillis est effectuée pas à pas pour des valeurs croissantes du paramètre λ .

On considère que, l'état complet de la structure (les déplacements, les sollicitations et les déformations) est connu, à l'étape r ou le paramètre λ vaut λ_r .

Sous un accroissement des charges extérieures $\{\Delta P\}$, appliquée aux nœuds, lorsque le paramètre λ passe de λ_r à λ_{r+1} , est donné par :

$$\lambda_{r+1} = \lambda_r + \Delta\lambda$$

Les différentes phases de l'algorithme de calcul d'une étape « r » sont :

1- On suppose connue la valeur des accroissements de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}_0$. Pour la première itération, cette valeur est prise égale à $\{0\}$ et il est ensuite égal à la valeur fourni par l'itération précédente.

2- On calcule la valeur des accroissements des efforts internes $\{\Delta F_N\}$ aux nœuds des éléments, dans leur repère intrinsèque, en utilisant pour chaque élément la relation suivante :

$$\{\Delta F_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (\text{III.20})$$

La valeur de $[K_N]$ est celle obtenue à l'itération précédente.

Le vecteur $\{\Delta S_N\}$ des accroissements de déplacements aux nœuds d'un élément est calculé à partir de $\{\Delta U\}_0$.

3- Le vecteur des accroissements de sollicitations $\{\Delta F_S\}$ d'une section de calcul est obtenu à partir de $\{\Delta F_N\}$, ont utilisant la relation :

$$\{\Delta F_S\} = [L(x)].\{\Delta F_N\} \quad (\text{III.21})$$

L'équilibre d'une section est obtenu en résolvant par itérations successives le système non linéaire suivant :

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_s].\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Cependant, si l'équilibre d'une section n'est pas vérifié, ceci provient du fait d'une "rupture" de la section ou du fait que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour aboutir à la convergence du processus itératif et en conséquence le calcul est repris avec un pas de chargement $\Delta\lambda$ plus petit en valeur absolue.

4- Du fait de l'équilibre des sections, l'accroissement de déformations $\{\Delta\varepsilon\}$ étant connu. L'intégration selon la méthode numérique de Simpson, donne la matrice de rigidité $[K_N]$ de chaque élément dans le repère intrinsèque en tenant compte des non linéarités mécaniques.

5- La matrice $[K_U]$ dans le repère local intermédiaire, s'en déduit par l'équation suivante :

$$[K_U] = [B]^T.[K_N].[B] + [D] \quad (\text{III.23})$$

Où : $[K_N]$, $[B]$ et $[D]$ sont définis dans le chapitre précédent §2.4.2.1 et §2.4.2.2 respectivement.

6- La matrice $[K_L]$ dans le repère local, liée à la position initiale de l'élément barre de treillis, s'en déduit par l'équation suivante :

$$[K_L] = [T_0]^T.([B]^T.[K_N].[B] + [D]).[T_0] \quad (\text{III.24})$$

Où les matrices $[B]$ et $[D]$, exprimant la non linéarité géométrique, sont celles obtenues à l'étape précédente.

7- Le passage à $[K_X]$ dans le repère absolu, lié à la structure est effectué par l'intermédiaire de la matrice de rotation $[RT]$, donné par la relation :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [R_0] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [R_0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Où : $[R_0]$ est défini dans le chapitre précédent (§ 2. 3.2).

Et en utilisant la relation :

$$[K_X] = [RT]^T \cdot [K_L] \cdot [RT] \quad (\text{III.26})$$

8- La matrice de rigidité de la structure $[K]$ est formée en écrivant l'équilibre des nœuds dans le repère absolu, lié à la structure.

9- Les accroissements de déplacements des nœuds $\{\Delta U\}$ de la structure correspondant à l'itération en cours s'obtiennent en résolvant le système suivant :

$$\{\Delta P\} = [K]_i \cdot \{\Delta U\}_{i+1} \quad (\text{III.27})$$

Et cela en tenant compte des conditions aux limites de la structure.

10- Après avoir obtenu l'accroissement de déplacement des nœuds $\{\Delta U\}$, on procède à la vérification de la convergence, par la relation suivante :

$$\eta = \left[\frac{\langle \Delta U_i - \Delta U_{i-1} \rangle \cdot \langle \{\Delta U\}_i - \{\Delta U\}_{i-1} \rangle}{\langle U_s - \Delta U_i \rangle \cdot \langle \{U_s\} - \{\Delta U\}_i \rangle} \right]^{1/2} < T_u \quad (\text{III.28})$$

Si le test n'est pas vérifié, le calcul est répété avec la nouvelle valeur $\{\Delta U\}$.

Toutefois un défaut de convergence peut apparaître du fait de l'instabilité d'ensemble ou du fait que le nombre d'itérations fixé a priori n'est pas suffisant pour assurer la convergence; dans ce cas le calcul est repris avec un pas de chargement $\Delta \lambda$ plus petit en valeur absolue.

11- A la fin de chaque étape; on calcule les déformations totales de chaque section, les efforts $\{F_L\}$ et déplacements $\{S_L\}$ totaux aux nœuds des éléments dans leur repère local, ainsi que les déplacements totaux des nœuds $\{U\}$ et les charges extérieures totaux $\{P\}$ dans le repère absolu, lié à la structure, en cumulant les accroissements de cette étape aux valeurs de l'étape précédente.

12- Avant de passer à une nouvelle étape de chargement, on passe à la correction des déplacements des nœuds $\{U\}$ obtenus. Cette étape est indispensable pour le cas des structures sensibles aux effets du second ordre.

En effet, lors de la recherche de l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ des nœuds, les matrices $[B]$ et $[D]$ exprimant la non linéarité géométrique sont gardées constantes pendant l'étape avec les valeurs obtenues à la fin de l'étape précédente. Cette procédure a pour effet de sous-estimer l'ensemble des déplacements dus aux effets du second ordre.

Pour pallier ce défaut, on effectue une étape de correction dans l'étape en cours, en y introduisant l'effet d'un accroissement de charge fictive $\{\Delta P^*\}$ donné par :

$$\{\Delta P^*\} = \{P\} - \{P^*\} \quad (\text{III.29})$$

$\{P\}$ étant des charges réelles et $\{P^*\}$ le vecteur des charges qui sont en équilibre avec les efforts $\{F_X\}$ calculés, compte tenu des déplacements des nœuds $\{U\}$ calculés. Le vecteur de charge $\{P^*\}$ est obtenu en écrivant l'équilibre des nœuds de la structure. Toutefois, les réactions d'appuis ne sont pas considérées dans ce vecteur.

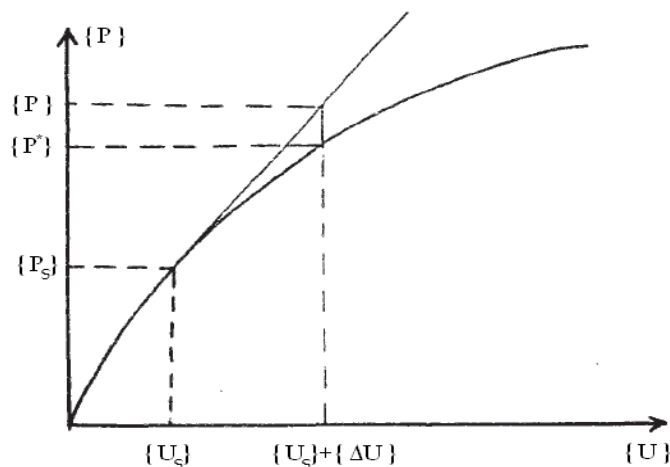


Fig. III.9. État d'équilibre de la structure avant l'étape de correction

Cette étape de correction est caractérisée par un cycle itératif pour équilibrer ce chargement fictif. Elle est supprimée si la norme euclidienne η , des efforts sont inférieurs ou égaux à une certaine tolérance T_f fixée a priori :

$$\eta = \left[\frac{\langle \{\Delta P^*\}, \{\Delta P^*\} \rangle}{\langle \{P\}, \{P\} \rangle} \right]^{1/2} < T_f \quad (\text{III.30})$$

Où : $\langle \quad \rangle$: Désigne le vecteur ligne.

Dans le cas échéant, l'étape de correction est effectuée jusqu'à ce que la valeur de $\{\Delta P^*\}$ devienne négligeable.

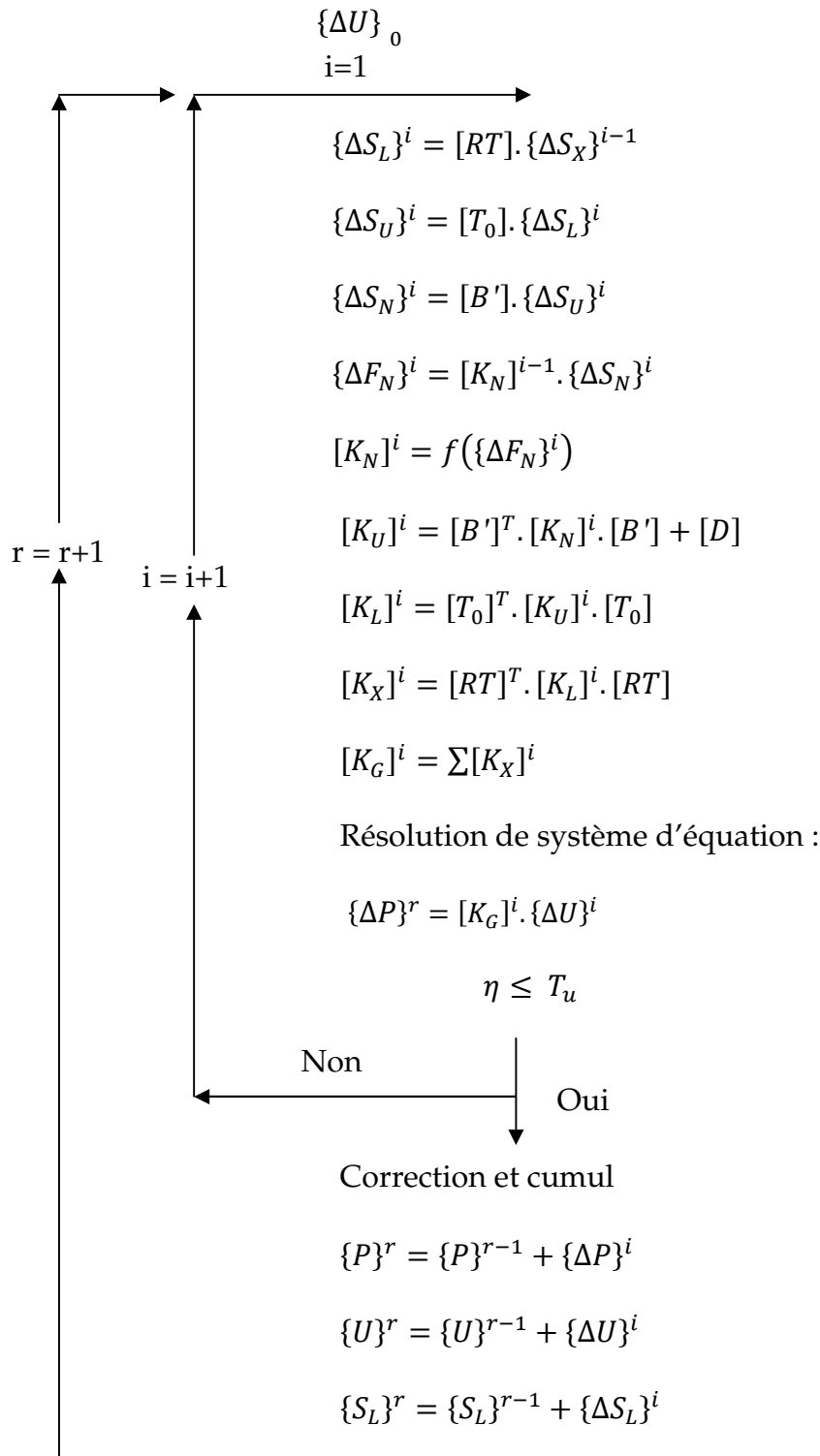
13- Après cette étape de correction, on continue l'analyse avec une nouvelle étape de chargement extérieur. La charge de rupture est obtenue lorsque l'algorithme de résolution diverge pour un accroissement de valeur absolue de la charge inférieur ou égal à une précision fixée a priori.

L'algorithme d'équilibre de la structure en treillis, est décrit ci-dessous :

Pour une étape donnée r

$\{\Delta P\}^r$: Accroissement du chargement appliqué a l'étape r.

$\{P\}$: Chargement cumulé jusqu'à l'étape (r - 1).



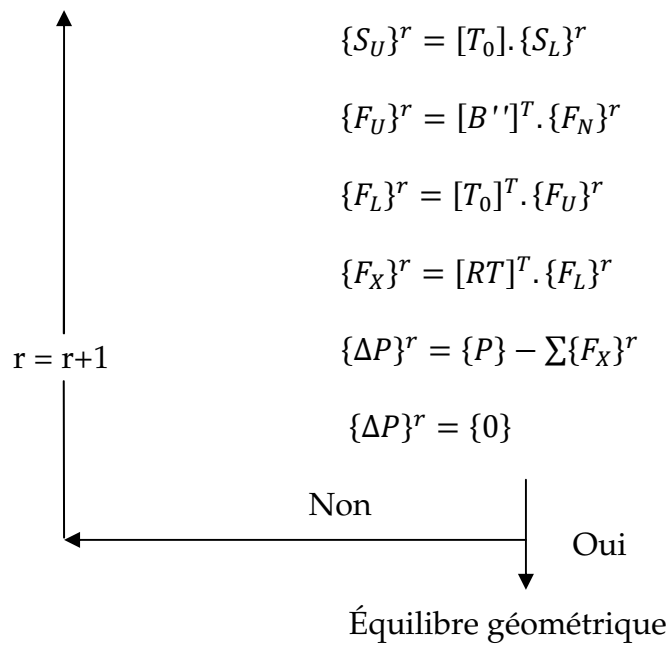


Fig. III.10. Algorithme d'équilibre de la structure en treillis

Avec :

$[B']$: Matrice approchée = $f(\{S_U\}^{r-1})$

$[B'']$: Matrice exacte = $f(\{S_U\}^r)$

r : Numéro de l'étape

i : Numéro de l'itération

3. 3.2.3. Organigramme de calcul :

L'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre de la structure en treillis, est décrit ci-dessous :

3. 4. Conclusions :

Les techniques numériques mentionnées dans le (§ 3.2.), sont utilisées dans la plupart des codes de calcul non linéaires d'éléments finis. Lorsqu'on résout un problème non linéaire avec une méthode itérative, la solution obtenue ne converge pas au voisinage des points critiques et la réponse de la structure ne peut pas être tracée au-delà de ces points. Alors pour cela dans la plupart des codes de calcul, on a recours à une stratégie de pilotage afin de traiter les points limites et les points de bifurcation.

Quant au programme de calcul non linéaire des structures en béton armé et en béton précontraint développé par [52],[15],[18],[06] à partir des travaux de [01],[14],[10], on a contribué dans ce chapitre et dans le chapitre précédant à l'améliorer pour traiter les structures en treillis.

CHAPITRE 4

COUPLAGE MÉCANO-FIABILISTE DANS LE CAS DES STRUCTURES

Sommaire

4. 1. Introduction	75
4. 2. Variables de base	75
4. 3. Fonction d'état limite	76
4. 4. Probabilité de défaillance	76
4. 5. Transformation isoprobabiliste	77
4. 6. Indice de fiabilité	77
4. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell	77
4. 6.2. Indice de Hasofer et Lind	79
4. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant	79
4. 8. Recherche du point de conception	80
4. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL}	81
4. 10. Couplage mécano-fiabiliste	85
4. 10.1. Introduction	85
4. 10.2. Méthode par surface de réponse	85
4. 10.2.1. Surface de réponse analytique	86
4. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse	87
4. 11. Conclusions	88

4. 1. Introduction :

La sécurité d'un système mécanique est assurée par un coefficient de sécurité : rapport entre une variable de chargement et une variable de résistance établie par une approche déterministe. Pour une structure complexe ces efforts sont mal connus, et sa résistance est incertaine, alors il existe toujours un risque de voir la structure ruinée. Pour cela l'approche probabiliste permet d'évaluer le risque par des méthodes d'analyse de fiabilité des systèmes mécaniques développés au cours de ces dernières années, ces méthodes d'évaluation de la fiabilité peuvent être classées par niveaux :

- Niveau 1 : méthode de dimensionnement assurant un certain niveau de sécurité par l'utilisation de coefficient de sécurité partielle appliquée aux valeurs caractéristiques des différentes variables, qui ne sont alors définies que par un paramètre.
- Niveau 2 : méthode utilisant des calculs itératifs pour obtenir une approximation de la surface de ruine par son hyperplan tangent au point le plus proche de l'origine, lorsque la fonction a été transformée dans un espace de variables normales centrées réduit. À la place de la probabilité de ruine, on utilise la notion d'indice de sécurité, qui ne dépend que des moyennes et des variances. Elle regroupe les méthodes d'approximation FORM et SORM, et les méthodes de surface de réponse.
- Niveau 3 : méthode déterminant la probabilité de ruine exacte d'une structure ou dans le cas de la résistance, la probabilité de ruine d'un élément de construction. Ces méthodes utilisent une description probabiliste exacte des différentes variables, et tiennent compte de leurs caractéristiques individuelles réelles. Elle regroupe les méthodes de simulation, dans la pratique, les méthodes de simulation de Monte Carlo sont utilisées pour valider les résultats obtenus par les méthodes (FORM, SORM).

On se propose dans ce chapitre, de faire dans une première étape, une étude de fiabilité (méthode d'hasofer-lind de niveau 2) qui permet la vérification de la fiabilité des structures, puis dans une seconde étape d'assurer un dialogue entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste avec une méthode de couplage indirecte par surface de réponse. Une présentation exhaustive des techniques et méthodes proposées par la théorie de la fiabilité peut être trouvées dans les références [27], [30], [33], [34].

4. 2. Variables de base :

Appelées aussi variables de conception, elles sont les composantes d'un vecteur X . Ce sont des variables aléatoires d'entrée d'un calcul de fiabilité. Elles sont caractérisées par une loi de densité conjointe de probabilité $f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots)$, où (x_1, x_2, \dots, x_n) est le vecteur des réalisations des variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) . Cette information est souvent indisponible, elle est limitée à la connaissance des deux propriétés suivantes :

- La loi marginale de chaque variable $X_i: f_{X_i}(x_i)$;
- La corrélation entre chaque couple de variables $(X_i, X_j) : \rho_{ij}(X_i, X_j)$.

4. 3. Fonction d'état limite :

Appelée aussi fonction de performance et notée $G(X)$, son intersection avec l'hyperplan des variables définit la frontière entre le domaine de sécurité D_s et le domaine de ruine D_f . Une valeur positive de G signifie que les réalisations des variables aléatoires conduisent à une situation de sécurité et une valeur négative signifie qu'elles conduisent à une situation de défaillance. La courbe représentant $G(X) = 0$ est appelée courbe d'état limite. Lorsque la fonction d'état s'écrit sous la forme de la différence d'une résistance et d'une sollicitation $G = R - S$, elle est appelée marge de sécurité et est notée M . Cette fonction d'état limite nous permet donc de préciser au-delà duquel le système physique étudié n'est plus considéré comme fiable.

4. 4. Probabilité de défaillance :

C'est la probabilité d'avoir une valeur négative d'une réalisation de la fonction d'état $G(X)$, elle est notée P_f (probability of failure).

Dans le cas général, on peut écrire $G(X)$ comme la différence de la résistance de la structure R et de la sollicitation S , comme suit :

$$G(X) = R - S \quad (\text{IV.1})$$

À partir de l'équation (IV.1), on peut dire qu'un scénario de fonctionnement est produit lorsque la disponibilité d'une résistance est supérieure à la sollicitation, et dans le cas contraire (c.-à-d. la disponibilité d'une résistance est inférieure ou égale à la sollicitation) on aura un scénario de non-fonctionnement.

La fiabilité est alors définie par :

$$P_r = P(G(X) > 0) = \int_{G(X) > 0} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{IV.2})$$

La probabilité de défaillance est le complément à 1 de la fiabilité :

$$P_f = 1 - P_r = \int_{G(X) \leq 0} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{IV.3})$$

Où : $f_x(x_1, \dots, x_n)$ représente la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire x .

Lorsque les n variables aléatoires X_i de base sont indépendantes, l'expression de la densité de probabilité conjointe est égale au produit de toutes les densités de chaque variable :

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (\text{IV.4})$$

4. 5. Transformation isoprobabiliste :

La transformation du vecteur aléatoire x dans l'espace physique en un vecteur aléatoire gaussien centré réduit u , dont la moyenne est zéro et la matrice de covariance est la matrice unitaire, est nécessaire à la détermination du point de conception. Si les variables sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation T la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable x_i en une variable u_i normale centrée réduite par :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i \Leftrightarrow \Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (\text{IV.5})$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1) et F_{X_i} la fonction de distribution de la variable x_i . On obtient donc :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (\text{IV.6})$$

Réciproquement, si F_{X_i} est inversible pour toute valeur de x_i , la transformation inverse est définie :

$$u_i \xrightarrow{T^{-1}} x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (\text{IV.7})$$

La fonction d'état limite est notée dans le nouvel espace gaussien comme suit :

$$H(u) = G(x) \quad (\text{IV.8})$$

Lorsque les variables sont corrélées, on utilise en particulier les transformations de Rosenblatt ou de Nataf.

4. 6. Indice de fiabilité :

On trouve dans la littérature plusieurs types d'indices de fiabilité, en commençant par l'indice de Rjanitzyne en 1950, l'indice de Cornell en 1970, Hasofer et Lind en 1974 et l'indice généralisé de Ditlevsen en 1979.

4. 6.1. Indice de Rjanitzyne-Cornell :

Cet indice est obtenu à partir de la moyenne m_Z divisée sur l'écart-type σ_Z de la variable de marge $Z = R - S$.

$$\beta_c = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (\text{IV.9})$$

L'indice β_c apparaît comme l'inverse du coefficient de variation de la variable aléatoire Z . Nous constatons sur la figure IV.1, que l'indice de fiabilité représente le nombre d'écart types nécessaires pour s'éloigner de la moyenne m_Z vers l'état limite ($z = 0$) afin de se placer en sécurité.

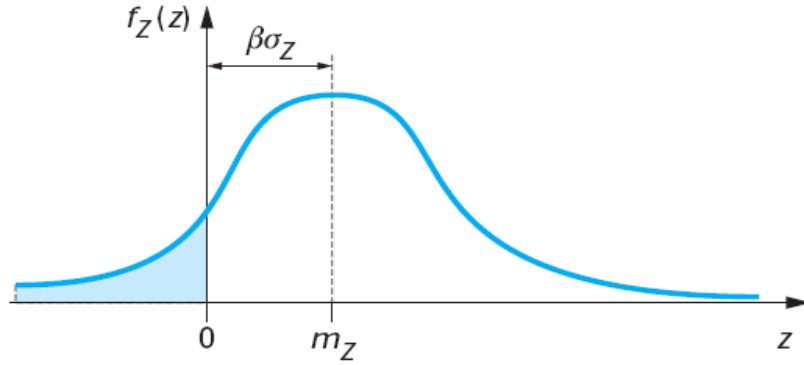


Fig. IV.1. Représentation de l'indice de Cornell [32]

- Cas élémentaire R-S :

Le cas le plus simple est celui d'une fonction d'état limite linéaire comportant deux variables normales et indépendantes.

La marge de sécurité de cet état limite linéaire s'exprime comme suite :

$$Z = R - S \quad (\text{IV.10})$$

La moyenne et l'écart-type de Z sont obtenus directement par la propriété de la sommation de deux variables normales.

$$\begin{cases} m_Z = m_R - m_S \\ \sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2} \end{cases} \Rightarrow \beta_c = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \quad (\text{IV.11})$$

Où : m_R et m_S sont les moyennes de la résistance R et de la sollicitation S , et σ_R et σ_S leurs écarts types.

Si les variables sont corrélées, le résultat est valable en notant que :

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2 \text{cov}[R, S] \quad (\text{IV.12})$$

Si les variables R, S sont des variables Gaussiennes, Z est également gaussienne et la probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_Z(z) dz = \frac{1}{\sigma_Z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{z - m_Z}{\sigma_Z}\right)^2\right) dz \quad (\text{IV.13})$$

Et, en posant $u = \frac{z - m_Z}{\sigma_Z}$:

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\beta_c} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(-\beta_c) \quad (\text{IV.14})$$

Où : Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

4. 6.2. Indice de Hasofer et Lind :

Dans cette présente étude l'indice de Hasofer-Lind sera utilisé car il permet de résoudre le problème dû à la non-invariance. Pour pallier ce problème, Hasofer et Lind ont proposé de ne pas se placer dans l'espace des variables physiques, mais d'effectuer un changement de variable, vers un nouvel espace de variables gaussiennes statistiquement indépendantes de moyennes nulles et d'écart types unitaires :

$$X_i \rightarrow U_i \text{ vecteur gaussien } \mathcal{N}(0,1), \mu_{U_i} = 0, \sigma_{U_i} = 1, \rho_{ij} = 0, \forall i, \forall j$$

Dans le cas de variables gaussiennes indépendantes, la transformation de l'espace physique vers l'espace normé (ou espace standard) est isoprobabiliste :

$$x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (\text{IV.15})$$

Pour des variables non corrélées de loi quelconque, le principe de la transformation consiste à écrire l'égalité des fonctions de répartition :

$$\Phi(u) = F_X(x) \Rightarrow x \rightarrow u = \Phi^{-1}(F_X(x)) \quad (\text{IV.16})$$

4. 7. Définition de l'indice de fiabilité exacte et invariant :

L'indice de fiabilité notée β_{HL} est une mesure de la fiabilité, et il permet d'obtenir une approximation de la probabilité de défaillance. Il correspond à la distance euclidienne entre l'origine de l'espace normalisé et la surface d'état limite (c.-à-d. entre l'origine O et le point p^*). L'indice est obtenu en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \quad (\text{IV.17})$$

$$\beta_{HL} = \min_{g\{x_i(u_j)\} \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \quad (\text{IV.18})$$

Sous contrainte $g(X) \leq 0$

P^* : Point de défaillance le plus probable, est le point de l'espace normalisé qui réalise ce minimum.

L'indice β_{HL} est compté positif si le point origine appartient au domaine de sûreté, sinon il est négatif.

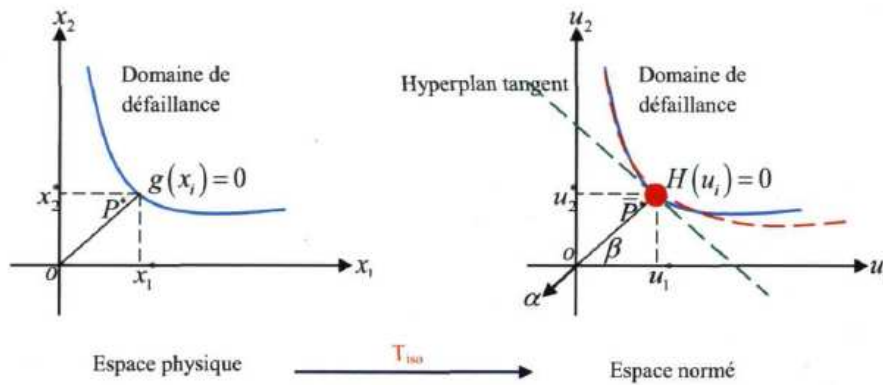


Fig. IV.2. Point de conception [27]

Le point P^* est proportionnel au vecteur unitaire α^* , vecteur des cosinus directeurs, normal à la surface de défaillance en u^* , soit :

$$u^* = \beta_{HL} \cdot \alpha^* \tag{IV.19}$$

Le point u^* est déterminé comme la limite d'une séquence $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(m)}, \dots$. Le vecteur unitaire normal à la surface de défaillance définie par $H(u)$ au point $u^{(m)}$ est noté $\alpha^{(m)}$. Le vecteur $\alpha^{(m)}$ est parallèle au vecteur gradient en $u^{(m)}$ et dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha^{(m)} = -\frac{\nabla H(u^{(m)})}{\|\nabla H(u^{(m)})\|} \tag{IV.20}$$

4. 8. Recherche du point de conception :

Le point de conception (ou point de défaillance le plus probable) est le point de la surface d'état-limite où la densité de probabilité de U est maximale, il est aussi défini comme le point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine :

$$\beta_{HL} = \min_{g\{x_i(u_j)\} \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \{u\}} \tag{IV.21}$$

Sous contrainte $H(u) \leq 0$

Dans cette étude le problème de minimisation sous contraintes sera résolu, en utilisant l'algorithme de Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler qui est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception.

4. 9. Algorithmes d'optimisation de Rackwitz-Fiessler pour la détermination de β_{HL} :

Il existe de nombreux algorithmes permettant la résolution du problème d'optimisation. En pratique, l'algorithme de Rackwitz-Fiessler est le plus employé à cause de sa simplicité et ses bons résultats. L'algorithme d'Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est une adaptation d'un algorithme d'optimisation de premier ordre au problème de la recherche du point de conception. L'algorithme (HL-RF) est une amélioration de l'algorithme de Hasofer-Lind, qui suppose que les variables de base sont gaussiennes et non corrélées. Quant à lui (HL-RF) est plus générale. Il n'a aucune restriction concernant les variables de base. L'algorithme qui sera utilisé dans ce qui suit, est celui qu'on trouve dans l'ouvrage de LEMAIRE [30].

Les hypothèses considérées dans l'algorithme :

- La fonction d'état limite H admet un gradient au point de coordonnée u .
- Le gradient $\nabla H(u)$ est non nul en tout point de l'hyper surface d'état limite.

Pour déterminer le point de conception, on se place dans l'espace normé en un point $P^{(k)}$ de coordonnée $\{u\}^{(k)}$, point origine de l'itération (k) . Ce point n'appartient pas nécessairement à la contrainte et $H(u)$ peut être différent de zéro. Le développement en série de Taylor de la fonction d'état limite $H(u)$ autour du point $P^{(k)}$ donne :

$$H(u) = H(u^{(k)}) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\} - \{u\}^{(k)}) + O(\{u\} - \{u\}^{(k)})^2 \quad (\text{IV.22})$$

L'équation de l'hyper-plan tangent à $H(u)$ en $\{u\}^{(k)}$:

$$\langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} \{u\} + c = 0 \quad (\text{IV.23})$$

Avec $\nabla H(u^{(k)})$ le gradient de $H(u)$ au point $P^{(k)}$. On définit alors $P^{(k+1)}$ par :

$$H(u^{(k+1)}) = H(u^{(k)}) + \langle \nabla H(u) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (\text{IV.24})$$

En divisant l'équation par la norme $\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}$ et en introduisant les cosinus directeurs de H en P^k on obtient :

$$\frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} + \langle \alpha \rangle^{(k)} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (\text{IV.25})$$

Il vient :

$$\langle u \rangle^{(k+1)} \langle \alpha \rangle^{(k)} = \langle u \rangle^{(k)} \langle \alpha \rangle^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad (\text{IV.26})$$

Avec $\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}}$ le vecteur des cosinus directeurs (ou le vecteur du gradient normalisé) de H en $P^{(k)}$.

A la limite quand $k \rightarrow \infty$, $d(u^{(k)}) = \beta$ et $\{u\} = -\beta \{\alpha\}$ si l'algorithme est convergent. A l'itération (k) , posons :

$$\{u\}^{(k+1)} = -\beta^{(k)} \cdot \{\alpha\}^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k+1)} \cdot \{\alpha\}^{(k)} \quad (\text{IV.27})$$

Ce qui conduit à la relation itérative donnant l'indice de fiabilité :

$$\beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)} + \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \quad (\text{IV.28})$$

L'algorithme de recherche de l'indice de fiabilité s'arrête lorsque la norme $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

Et $\{u\}^{(k+1)}$, est déduit en remplaçant l'équation (IV.28) dans (IV.27) par :

$$\{u\}^{(k+1)} = (\langle u \rangle^{(k)} \{\alpha\}^{(k)}) \{\alpha\}^{(k)} - \frac{H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}} \{\alpha\}^{(k)} \quad (\text{IV.29})$$

❖ Résumé de l'algorithme :

L'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) est résumé par les étapes suivantes :

- 1- Choisir un point de départ $\{u\}^{(0)}$;
- 2- Évaluer la fonction d'état-limite $H(u^{(k)})$;
- 3- Calculer le gradient de l'état-limite $\{\nabla H(u)\}^{(k)}$ et sa norme $\|\nabla H(u)\|^{(k)}$, en déduire $\{\alpha\}^{(k)}$ par : $\alpha^{(k)} = \frac{\nabla H(u^{(k)})}{\|\nabla H(u)\|_{u^{(k)}}}$;
- 4- Calculer l'indice de fiabilité $\beta^{(k)}$;
- 5- Calculer la coordonnée de la prochaine itération $\{u\}^{(k+1)}$;
- 6- Teste de convergence : si $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, arrêter le calcul ;
sinon mettre $k = k + 1$ et aller en 2.

❖ Organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) :

L'organigramme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), est décrit ci-dessous :

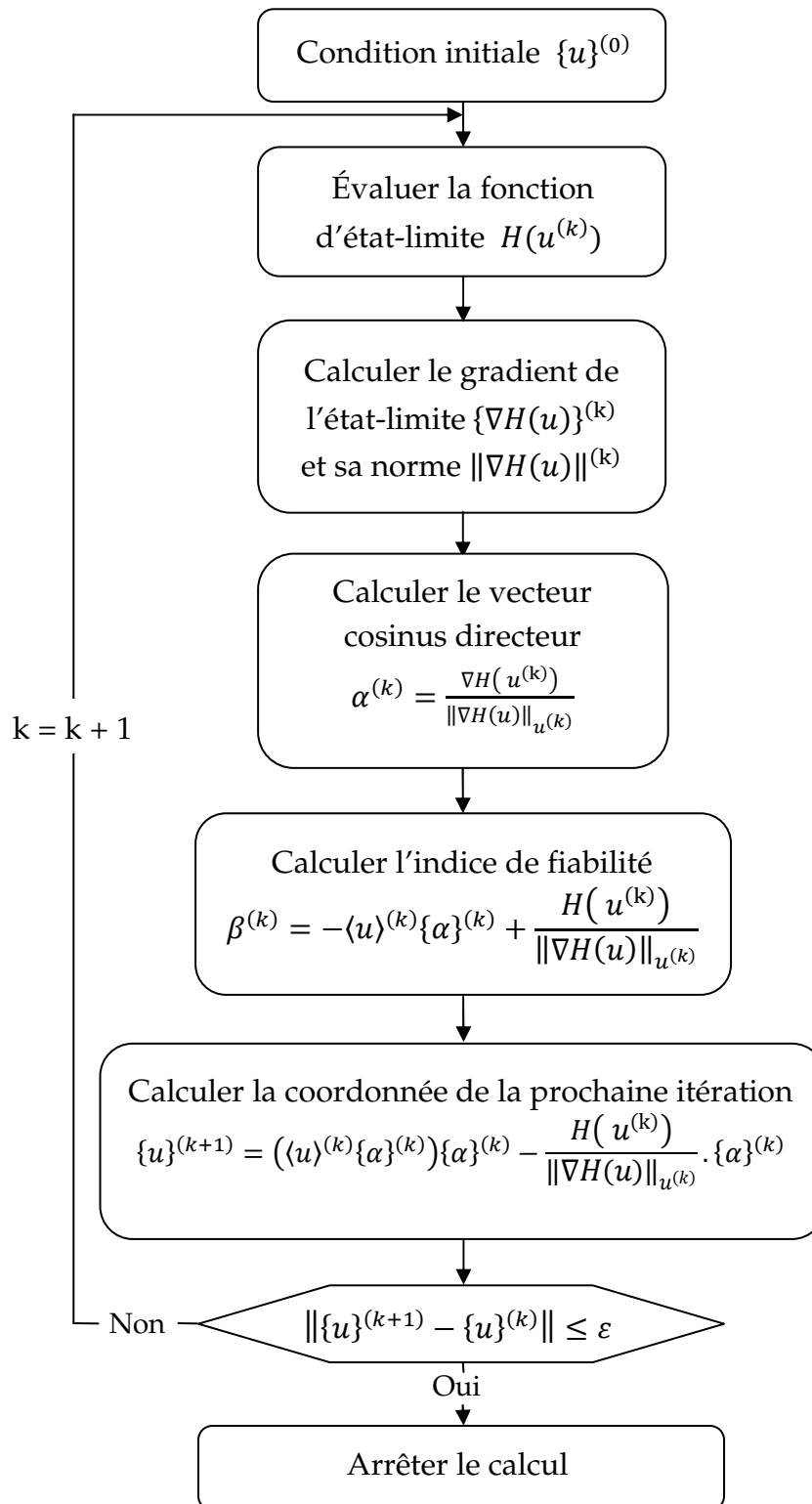


Fig. IV.3. Organigramme d'Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF)

❖ Exemple illustratif :

On se propose de calculer l'indice de fiabilité à partir de notre implémentation sur un exemple simple dont le calcul analytique a été fait par LEMAIRE [30], afin de valider l'algorithme présenté ci-dessus et son implémentation.

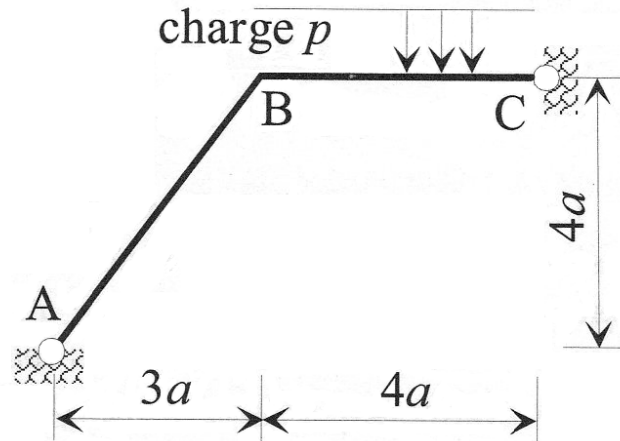


Fig. IV.4. Représentation du portique [30]

Après un calcul de RDM du portique, la valeur du moment fléchissant en B s'exprime comme suite : $M_B = -0.496 p a^2$

Où : p est la charge répartie aléatoire et a est une unité de longueur déterministe prise égale à 1. Le moment résistant M_R est considéré comme variable aléatoire. Pour cet exemple la défaillance est produite lorsque : $|M_B| \geq M_R$.

Les données du problème sont résumées dans le tableau suivant :

Variable X	Variable U	m_x	σ_x	Loi
p	U_1	1000	200	Normale
M_R	U_2	800	40	Normale

Tableau IV.1 : La moyenne et l'écart-type des variables du problème

Les résultats du problème obtenus par le programme qu'on a développé sont confrontés au calcul analytique de LEMAIRE [30], et sont présentés dans le tableau suivant :

	β	α_1	α_2
LEMAIRE	2.84	-0.927	0.374
Notre calcul	2.8422	-0.9274414720	0.3739683355
Erreur (%)	0.077	0.047	- 0.0084

Tableau IV.2 : Résultats du problème

4. 10. Couplage mécano-fiabiliste :

4. 10.1. Introduction :

Dans les problèmes mécaniques linéaires, l'algorithme de calcul de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind β suppose que la fonction d'état $G(X)$ est disponible sous forme explicite dans l'espace des variables aléatoires de base. Par contre dans les problèmes mécaniques tenant compte de la non linéarité géométrique ou mécanique, les expressions analytiques des fonctions d'état limite en fonction des variables x_i sont indisponibles. La marge de sécurité ne peut donc être obtenue que sous forme implicite.

L'association des méthodes de fiabilité et des simulations par élément fini constitue ce que l'on appelle un couplage mécano-fiabiliste, le code élément fini est piloté par le modèle fiabiliste qui permet d'analyser les résultats et de prendre continuellement les décisions appropriées. Les principales tâches du modèle mécanique consistent à évaluer la fonction de performance et à calculer les gradients, quant aux tâches du modèle fiabiliste consistent à estimer l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance du modèle mécanique étudiée.

Pour réaliser ce couplage, il existe trois méthodes de pilotage [30] :

- Le **couplage direct**, dans lequel le code fiabiliste appelle le code élément fini chaque fois que le calcul de $G(X_i)$ est nécessaire ;
- Le **couplage par surface de réponse**, dans lequel un plan d'expériences numériques permet de construire une réponse explicite approchée de la fonction de performance $G(X_i)$;
- Le **couplage par optimisation**, dans lequel le problème d'optimisation conduisant au calcul de l'indice β est résolu par les procédures d'optimisation disponibles dans le code élément fini.

Dans cette présente étude, le couplage mécano-fiabiliste sera réalisé par surface de réponse.

4. 10.2. Méthode par surface de réponse :

Dans cette méthode, l'état limite est approché par une surface, dite surface de réponse. L'idée est de remplacer la fonction d'état limite qui représente la défaillance de la structure et qui est indisponible sous une forme explicite, dans l'espace physique $g(x)$ ou normé $H(u)$, par une fonction explicite équivalente $\hat{g}(x)$ ou $\hat{H}(u)$, afin de pouvoir appliquer les différentes méthodes d'analyse de la fiabilité.

Il existe trois méthodes pour construire une surface de réponse :

- Méthode de **surface de réponse analytique**, est basée sur une approximation d'un modèle de la fonction de performance sur une base de données sélectionnée en utilisant des fonctions mathématiques, en particulier des polynômes. Cette méthode est la plus utilisée en ingénierie.
- Méthode de **surface de réponse physique**, l'utilisation de lois déterministes dans lesquelles sont introduites des variables aléatoires pour prendre compte des variables intrinsèques.
- Méthode de **réseau neurones**, s'appuie sur l'utilisation de la méthode de réseau neurones dans la construction de la surface de réponse approchée.

Les méthodes de surface de réponse physique et de réseau neurones sont des méthodes dont leur principe ne sera pas détaillé dans ce mémoire, mais le lecteur pourra se référer aux références [27], [33], [34]. Alors dans cette présente étude, nous traiterons la construction d'une surface de réponse analytique qui est la plus souvent utilisée dans la pratique.

4. 10.2.1. Surface de réponse analytique :

La méthode de surface de réponse analytique consiste à remplacer la fonction de performance inconnue $g(x)$ par une fonction approchée $\hat{g}(x)$. Le choix d'un ordre élevé du polynôme permet de mieux représenter le modèle. Très souvent, une forme quadratique est choisie pour l'écriture du substitut $\hat{g}(x)$ de la fonction de performance $g(x)$. Autrement dit, le substitut s'écrit de la manière suivante :

$$g(x) \approx \hat{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} X_i^2 \quad (\text{IV.30})$$

$$g(x) \approx \hat{g}(x) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} X_i X_j \quad (\text{IV.31})$$

Où : X le vecteur des n variables de base, et c_i, c_{ij} sont les coefficients du polynôme recherché.

Les coefficients sont les inconnues du problème, ils sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation dans la région autour du point de conception. L'évaluation de ces coefficients nécessite la réalisation de séries d'expériences numériques qui correspondent à des calculs numériques avec des paramètres d'entrée sélectionnés conformément à un plan d'expérience.

Remarque :

Dans cette présente étude on a utilisé l'outil Excel pour déduire la fonction approchée $\hat{g}(x)$.

4. 10.2.2. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse :

L'organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse analytique, est décrit ci-dessous :

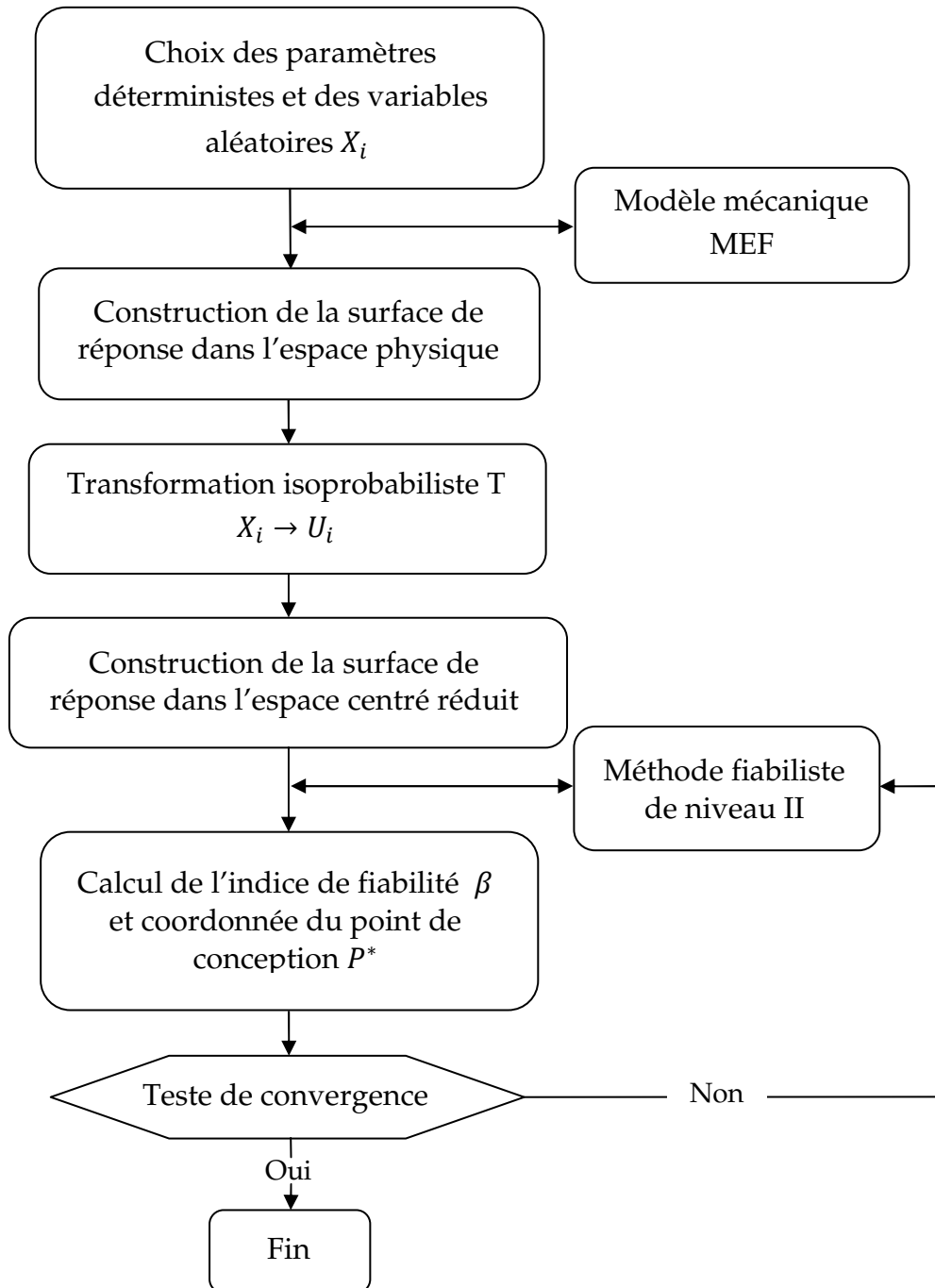


Fig. IV.5. Organigramme du couplage mécano-fiabiliste par surface de réponse

4. 11. Conclusions :

Dans ce chapitre on a présenté en premier lieu la méthode de (HL-RF) de niveau 2 dit approchée, elle est l'une des méthodes les plus utilisées en ingénierie. Son organigramme a été implémenté sous fortran 90 (annexe III).

Puis on a présenté la méthode de surface de réponse analytique, qui est utilisée dans le cas où la fonction d'état limite est implicite. Cette méthode de surface de réponse analytique a pour objectif la construction d'un état limite explicite afin de permettre aux méthodes classiques de fiabilité d'être appliquée.

Enfin on a présenté, l'organigramme utilisé dans notre étude qui résume le couplage entre le modèle mécanique et le modèle fiabiliste afin d'estimer l'indice de fiabilité ainsi que la probabilité de défaillance d'une structure.

CHAPITRE 5

APPLICATION ET CONFRONTATION DES RÉSULTATS OBTENUS À DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Sommaire

5. 1. Introduction	90
5. 2. Validation du calcul non linéaire	90
5. 2.1 Exemples de structures en béton armé	90
5. 2.1.1. Portique rectangulaire bi-articulé	90
5. 2.2. Exemples de structures mixtes et métalliques	92
5. 2.2.1. Poutre continue en profilé métallique de STUSSI et de KOLLBRUNNER	92
5. 2.2.2. Portique en profilé bi-encasté de NELSON, WRIGHT et DOLPHIN	93
5. 2.2.3. Poutre continues à sections mixtes	95
5. 2.2.4. Poutre isostatique à sections mixtes	97
5. 2.3. Exemples de structures triangulés	101
5. 2.3.1. Poutre treillis plane	101
5. 2.3.2. Pont à poutres triangulées	103
5. 3. Validation et évaluation de la fiabilité des structures étudiées	105
5. 3.1. Application à la poutre treillis plane	105
5. 3.2. Application au pont à poutres triangulées	112
5. 4. Conclusions	119

5. 1. Introduction :

Dans ce chapitre nous présenterons, dans une première partie des exemples d'application qui ont fait l'objet d'études expérimentales ainsi que des simulations numériques effectuées avec d'autres codes de calcul. Nous confronterons le résultat de nos calculs à partir du code de calcul amélioré (qui a été développé par [52], [15], [18], [06] à partir des travaux de [01], [14], [10]) aux résultats expérimentaux. Nous commencerons d'abord par vérifier le bon fonctionnement du programme en le testant sur une structure en béton armé, puis nous étudierons les structures métalliques et mixtes, enfin on procédera à sa vérification pour des structures en treillis.

La seconde partie sera consacrée à la validation de l'approche fiabiliste qui a été décrite dans le chapitre précédent. Cette validation consiste à coupler le modèle mécanique avec le modèle fiabiliste afin d'estimer l'indice de fiabilité des scénarios et d'évaluer la probabilité de défaillance des systèmes étudiés.

5. 2. Validation du calcul non linéaire :

La formulation du calcul non linéaire de structures en béton armé, métalliques et mixtes est décrite en annexe I, et ces éléments sont modélisés par des éléments finis de type poutre. Par contre pour le calcul non linéaire de structures en treillis, ces éléments sont modélisés par des éléments finis de type barre et sa formulation est décrite au chapitre II.

5. 2.1 Exemples de structures en béton armé :

5. 2.1.1. Portique rectangulaire bi-articulé :

Il s'agit d'un portique testé par W.B. Cranston, qui a fait par ailleurs l'objet d'au moins quatre études numériques, par GRELAT [01], ESPION [26], ROBERT [05] et NAIT-RABAH [10].

Les dimensions du portique P7 à nœuds déplaçables, sont reportées sur la figure V.1. Il est sollicité horizontalement et verticalement par des forces ponctuelles dont les intensités sont données par : $\frac{H}{P} = 0,1$.

La résistance en compression du béton, évaluée à partir d'essais sur des éprouvettes cubiques, est estimée à 40 MPa, nous avons adopté la valeur retenue par Nait-Rabah [10], à savoir une résistance en compression de 34 MPa. La déformation correspondant à ce pic de contrainte est estimée à 2 ‰. Le module d'élasticité du béton à l'origine est pris égale 34000 Mpa ($E_{b0} = \frac{2 \sigma_j}{\varepsilon_{b0}}$). On utilise la loi de Sargin, avec $k_b = 2$ et $k'_b = 1$. La résistance du béton en traction est prise égale 2.49 MPa.

Les aciers sont caractérisés par une limite élastique de 278 MPa et un module d'Young de 200 GPa.

Nous avons retenu la répartition et les ferrailages adoptés par A. Grelat, B. Espion, F. Robert et O. Naît-Rabah dans leurs simulations. Le portique est donc découpé en 20 éléments, comme indiqué sur la figure V.1, et les ferrailages correspondants sont aussi précisés sur la figure V.1 et dans le tableau V.1.

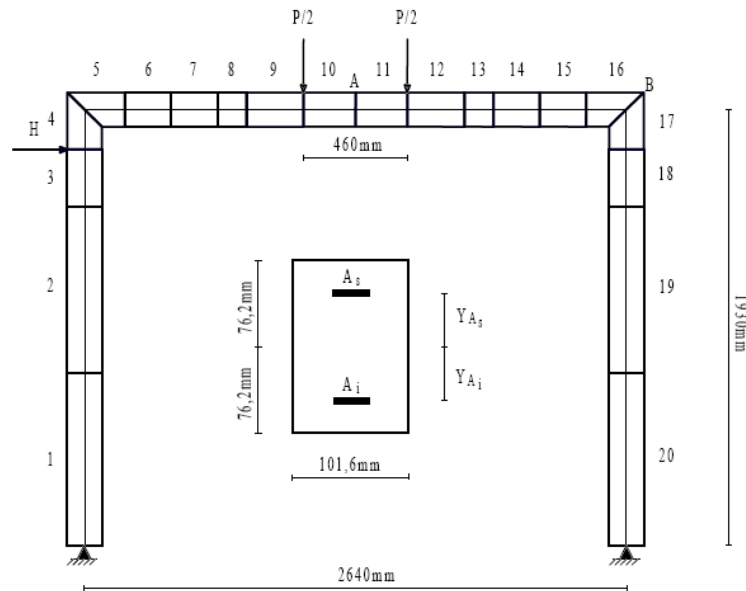


Fig. V.1 : Portique P7 de Cranston

Éléments	A_s	Y_{A_s} (mm)	A_i	Y_{A_i} (mm)
1, 20	2 $\varnothing 9,5$	62	2 $\varnothing 9,5$	62
2, 6, 15, 19	4 $\varnothing 9,5$	62	2 $\varnothing 9,5$	62
3, 4, 5, 16, 17, 18	6 $\varnothing 9,5$	62	2 $\varnothing 9,5$	62
7, 14	4 $\varnothing 9,5$	62	4 $\varnothing 9,5$	62
8, 13	2 $\varnothing 9,5$	62	4 $\varnothing 9,5$	62
9, 10, 11, 12	2 $\varnothing 9,5$	62	6 $\varnothing 9,5$	62

Tableau V.1 : Caractéristiques du ferrailage longitudinal

La courbe obtenue se rapproche de la courbe expérimentale en phase du comportement élastique, mais dès l'apparition des phénomènes de fissuration, elle commence à s'écarter de la courbe expérimentale. Cet écart est dû à des imprécisions sur les caractéristiques réelles des matériaux (comme par exemple le module d'élasticité à l'origine du béton ou la distribution des aciers qui n'est pas entièrement précisé dans la référence de CRANSTON), et aussi est dû au fait que l'effet de l'effort tranchant n'a pas été pris en compte dans le domaine non linéaire.

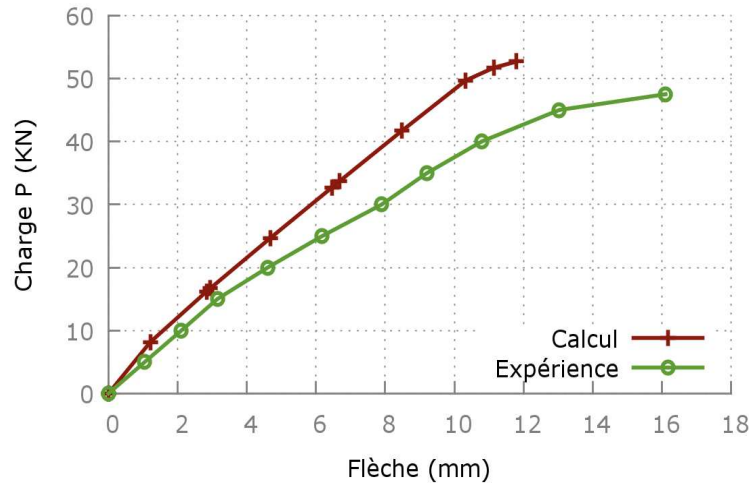


Fig. V.2 : Évolution de la flèche verticale à mi-travée sous la charge P

5. 2.2. Exemples de structures mixtes et métalliques :

5. 2.2.1. Poutre continue en profilé métallique de STUSSI et de KOLLBRUNNER :

L'expérience a été réalisée par STUSSI et KOLLBRUNNER [26]. Il s'agit d'une poutre continue en profilé IPN 80, avec une disposition à trois travées égales de 1.80m de longueur chacune, chargée dans son plan de symétrie par une force concentrée (figure V.3).

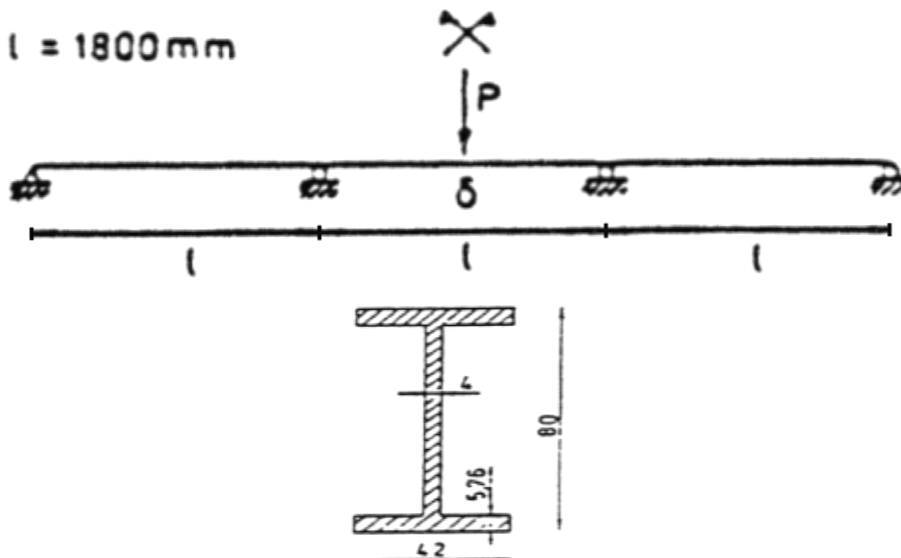


Fig. V.3 : Poutre de STUSSI et de KOLLBRUNNER

Le diagramme du comportement du profilé métallique, est modélisé dans notre analyse, par une courbe de cinquième degré. Les valeurs du module d'élasticité, de la limite élastique et de la contrainte de rupture sont :

$$\begin{cases} E = 200000 \text{ Mpa.} \\ \sigma_e = 245 \text{ MPa.} \\ \sigma_r = 269.5 \text{ MPa.} \end{cases}$$

La courbe charge-flèche au niveau du plan de symétrie est représentée sur la figure V.4. La charge de ruine expérimentale est de 27.50 KN. Notre analyse élastique non linéaire donne une charge ultime de 25.005 KN, ce qui montre que notre solution est en bon accord avec l'expérience, soit un écart de 9.978 % (dans le sens de la sécurité). Par contre, la flèche estimée par le calcul est très proche de la valeur expérimentale (l'écart est de 10.244 %).

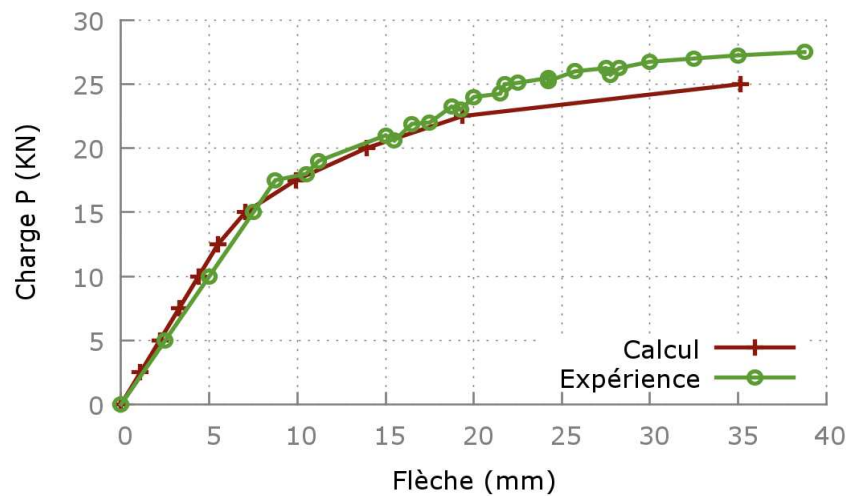


Fig. V.4 : Évolution de la flèche de la section au niveau du plan de symétrie

L'écart observé, du point de vue force, peut s'expliquer par le fait d'avoir modélisé le comportement du profilé métallique par un diagramme contrainte – déformation du cinquième degré et aussi probablement par le fait que la méthode de calcul ne tient pas compte des contraintes initiales (contraintes résiduelles) dans les profilés.

5. 2.2.2. Portique en profilé métallique bi-encasté de NELSON, WRIGHT et DOLPHIN :

Il s'agit d'un portique rectangulaire bi-encasté testé par NELSON, WRIGHT et DOLPHIN [26], il est formé de profilés de section 4B13 dans les dimensions précises sont données à la figure V.5. Il est modélisé dans notre analyse en douze éléments. Les dimensions du portique, ainsi que le système de chargement auquel il est soumis sont représentées à la figure V.5.

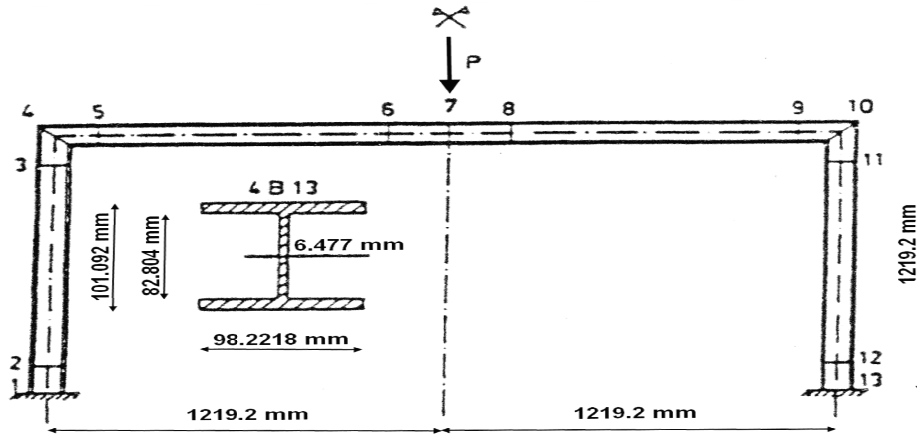


Fig. V.5 : Portique rectangulaire bi-encasté de Nelson, Wright et Dolphin

Le diagramme du comportement du profilé métallique, est modélisé dans notre analyse, par une courbe de cinquième degré. Les valeurs du module d'élasticité, de la limite élastique et de la contrainte de rupture sont :

$$\begin{cases} E = 206842.77 \text{ Mpa.} \\ \sigma_e = 326.122 \text{ MPa.} \\ \sigma_r = 358.734 \text{ MPa.} \end{cases}$$

Une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux est observée sur la figure V.6. La charge ultime expérimentale est donnée égale à 112.3175 KN. La charge ultime calculée est de 103.165 KN, soit un écart de 8.871% (dans le sens de la sécurité).

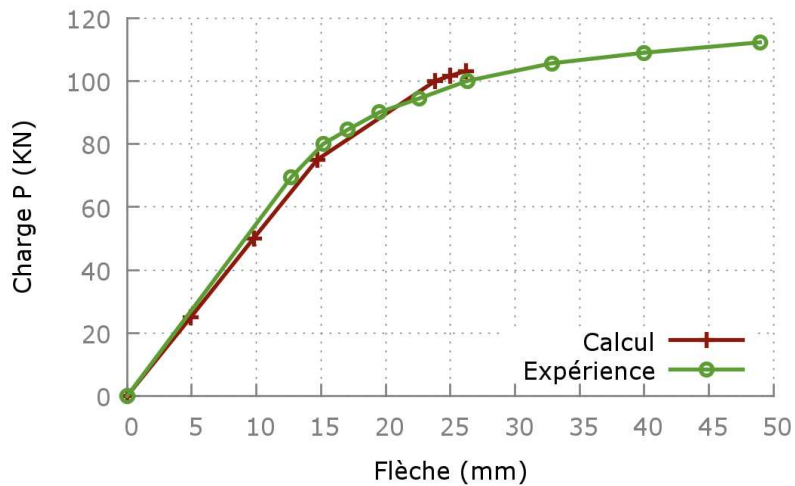


Fig. V.6 : Évolution de la flèche verticale de la section au droit de la charge

Cet écart s'explique par le fait d'avoir modélisé le diagramme du comportement du profilé métallique par un diagramme de cinquième degré, et probablement au fait que la méthode de calcul ne tient pas compte des contraintes initiales (contraintes résiduelles) dans les profilés. L'écart observé, du point de vue flèche, est du à la méthode de résolution utilisée qui est la méthode tangente ; au delà d'un seuil, il y a divergence du résultat.

5. 2.2.3. Poutres continue à sections mixtes :

C'est un exemple d'une poutre continue à section mixte intégrant un profilé métallique, dont l'étude expérimentale a été réalisée par ANSOURIAN [10].

La poutre comporte deux travées l'une de 4 mètre et l'autre de 5 mètre avec une charge concentrée P au milieu de la première travée, sa section transversale est constituée d'un profilé métallique IPE 200 et d'une table de béton de hauteur égale à 100 mm et de largeur égale à 800 mm, celle-ci étant renforcée par des armatures passives dont la distribution longitudinale est bien connue en travées et en appuis. La connexion de cette poutre est assurée par des goujons Nelson à tête.

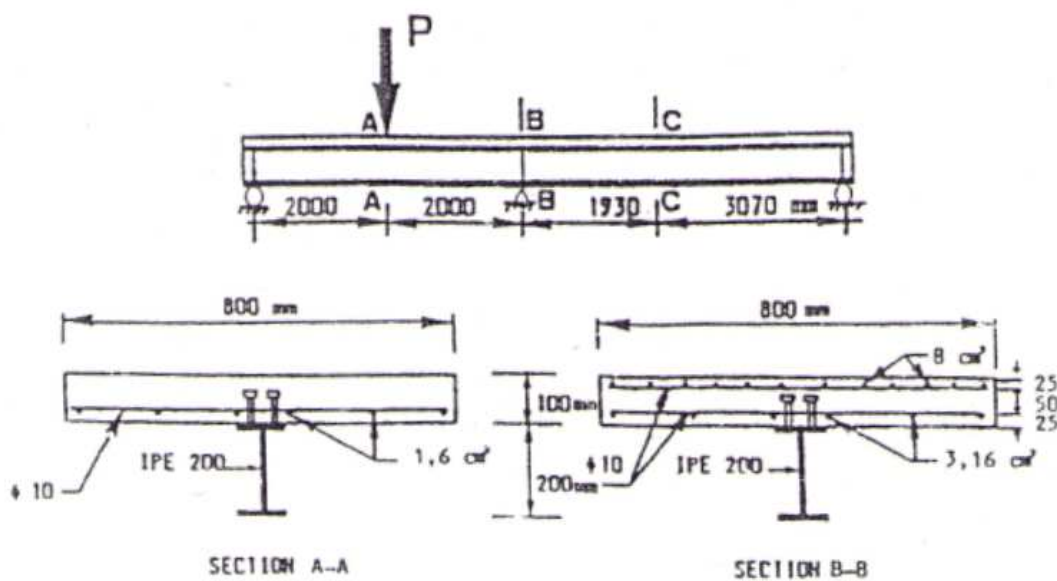


Fig. V.7 : Poutre continue d'ANSOURIAN

La résistance du béton en compression, au jour de l'essai est donnée égale à 30 MPa. Celle-ci représente la valeur moyenne obtenue à partir de trois essais sur cube normalisé 20x20x20 cm. Le module d'élasticité du béton à l'origine est égal à 24 GPa. La résistance du béton en traction est évaluée à l'aide de la formule réglementaire classique.

$$f_t = 0.6 + 0.06x f_{cj}$$

Les caractéristiques mécaniques du béton, du profilé métallique et des aciers passifs sont résumées dans les tableaux ci-après :

f_{cj} (MPa)	f_t (MPa)	ϵ_0	ϵ_{cu}	E_{b0} (MPa)
30	2.4	0.0025	0.003	24000

Tableau V.2 : Caractéristiques mécaniques du béton

Nature de l'acier		Limite d'élasticité σ_e (MPa)	Contrainte de rupture σ_r (MPa)	Module d'élasticité E_a (GPa)
Aciers passifs		430	533	210
Profilé métallique	semelles	277	421	210
	âme	340	440	210

Tableau V.3 : Caractéristiques mécaniques des aciers

Le comportement en traction et compression du profilé métallique est idéalisé par un diagramme élasto-plastique avec raffermisssement, dont la déformation à la fin du palier plastique est estimée à 1.2 %.

La charge ultime expérimentale est donnée égale à 198 KN. La charge ultime calculée est de 191.25 KN, soit un écart de 3.529% dans le sens de la sécurité. La concordance de la charge ultime entre l'expérience et notre calcul est très bonne.

À la figure V.8 on a représenté en fonction de la charge P, l'évolution de la flèche δ_A de la section A située au droit de la charge P, et à la figure V.9 l'évolution de la flèche δ_C de la section C située à 1930 mm de l'appui intermédiaire.

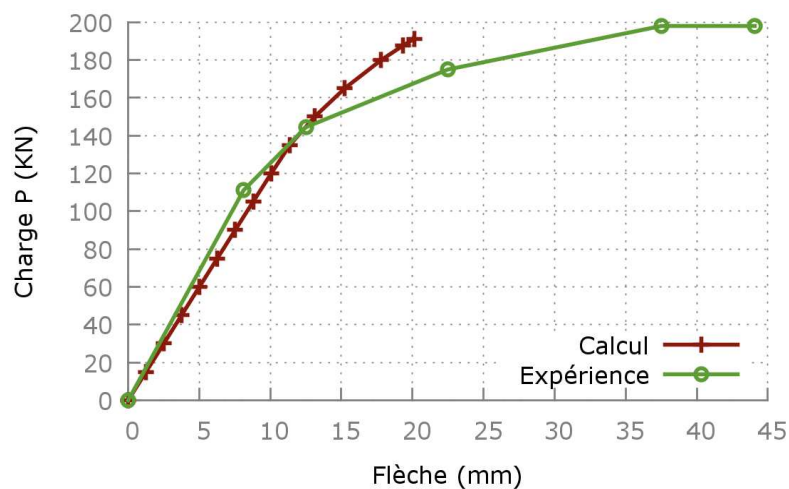


Fig. V.8 : Évolution de la flèche en fonction de la charge au niveau de la section A-A

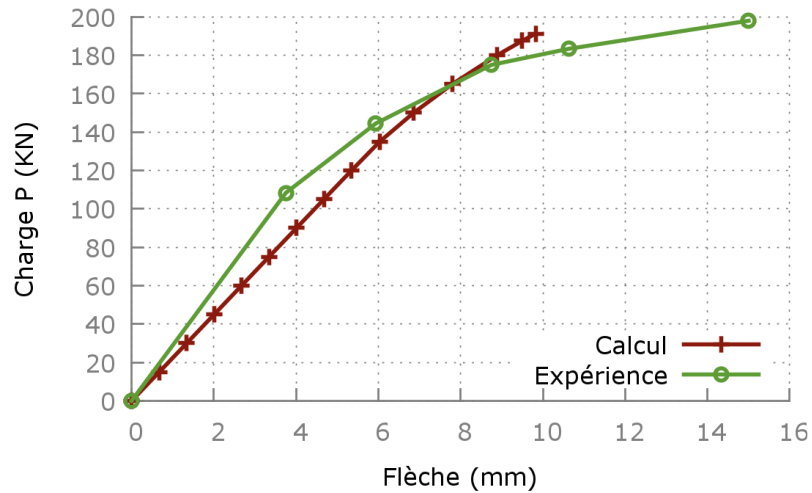


Fig. V.9 : Évolution de la flèche en fonction de la charge au niveau de la section C-C

La confrontation des courbes d'évolution des flèches théoriques et expérimentales est en général satisfaisante du point de vue charge et flèche jusqu'à un certain niveau. Les écarts qu'on peut observer peuvent s'expliquer par la présence des contraintes résiduelles dans le profilé avant chargement et que notre calcul ne les tient pas en compte. L'écart entre la flèche calculée et expérimentale à la rupture peut s'expliquer par le fait que notre calcul suppose une adhérence parfaite entre les deux matériaux, alors qu'en réalité il y a glissement entre le profilé et le béton, ce qui entraîne une chute de rigidité.

5. 2.2.4. Poutre isostatique à sections mixtes :

L'étude concerne deux poutres isostatiques, tirée d'une étude numérique qui a été faite par HAMADEH [23].

La géométrie des sections transversales des poutres isostatiques et les armatures passives sont indiquées au tableau V.4, et les figures V.10 et V.11 montrent des vues transversales et longitudinales des poutres isostatiques.

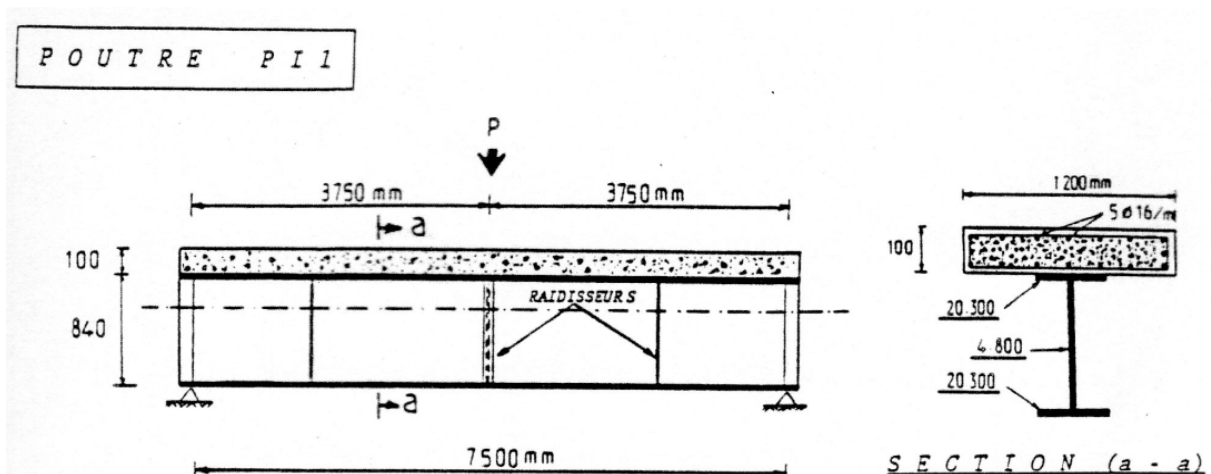


Fig. V.10 : Poutre isostatique à sections mixtes PI1

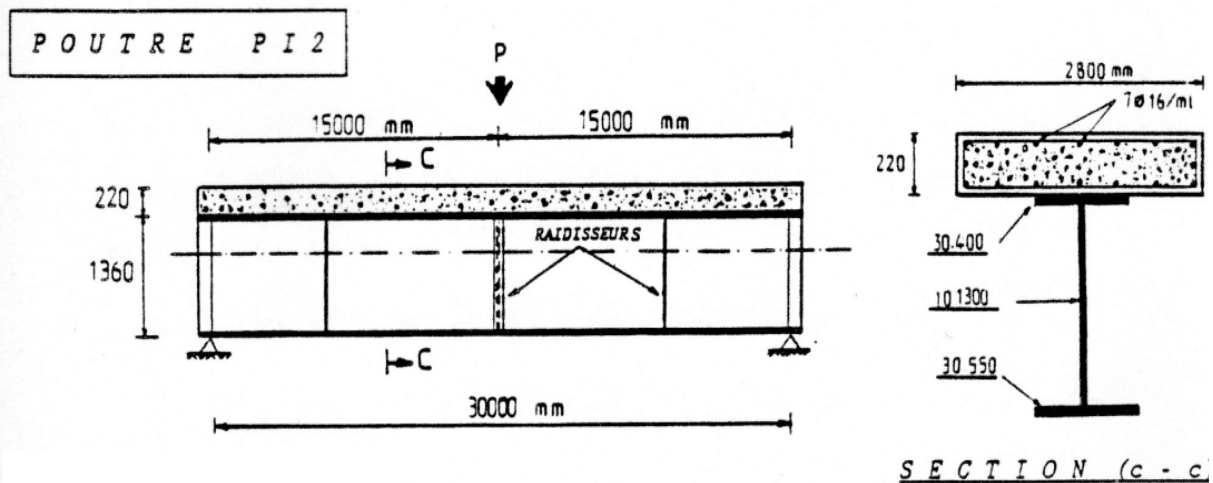


Fig. V.11 : Poutre isostatique à sections mixtes PI2

Poutres		PI1	PI2
Profilé Métallique	t_1 (mm)	20.	30.
	b_1 (mm)	300.	400.
	t_2 (mm)	20.	30.
	b_2 (mm)	300.	550.
	h_a (mm)	800.	1300.
	t_a (mm)	4.	10.
Dalle Béton	L_b (mm)	1200.	2800.
	H_b (mm)	100.	220.
Armatures Passives	Aire total du lit supérieur A_1 (cm ²)	6 \emptyset 16 (12,064)	20 \emptyset 16 (40,212)
	Aire total du lit inférieur A_2 (cm ²)	6 \emptyset 16 (12,064)	20 \emptyset 16 (40,212)

Tableau V.4 : Géométries des sections de poutres

Les caractéristiques mécaniques du béton, du profilé métallique et des aciers passifs sont résumées dans les tableaux ci-après :

f_{cj} (MPa)	f_t (MPa)	ϵ_0	ϵ_{cu}	E_{b0} (MPa)
30	2.4	0.0028	0.004	30000

Tableau V.5 : Caractéristiques mécaniques du béton

Nature de l'acier	Limite d'élasticité σ_e (MPa)	Contrainte de rupture σ_r (MPa)	Module d'élasticité E_a (MPa)
Aciers passifs	400	-	210000
Profilé métallique	240	360	210000

Tableau V.6 : Caractéristiques mécaniques des aciers

Le comportement en traction et compression du profilé métallique est idéalisé par un diagramme élasto-plastique parfait, suivi du phénomène d'écroutissage (au sens d'un raffermissement) linéaire. La loi de comportement est définie comme suite :

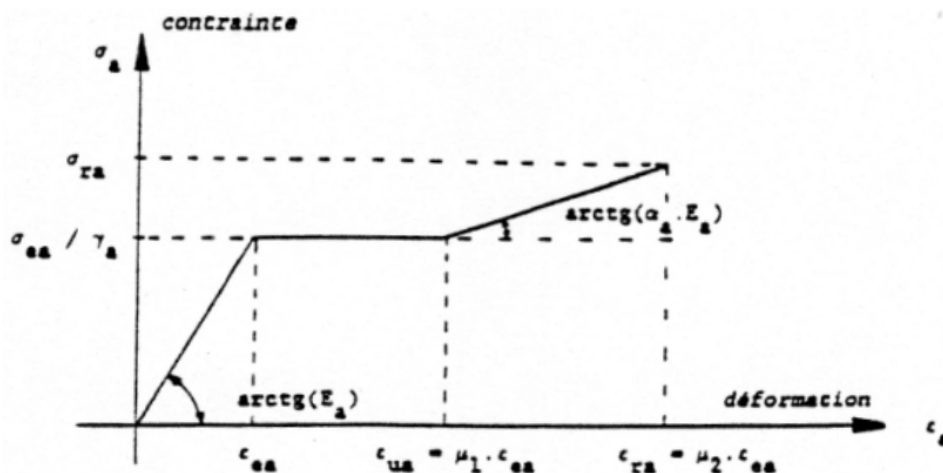


Fig. V.12 : Loi de comportement du profilé acier

Où : $\mu_1 = 10, \mu_2 = 30, \gamma_a = 1$ et $\alpha_a = 0.025$

Les valeurs des charges limites élastique P_e et ultime P_u , avec les valeurs des flèches correspondantes δ_e et δ_u , trouvées à mi-portée de la poutre PI1 ; sont résumées dans le tableau ci-après :

Poutre PI1	Charge limite de service P_e (KN)	Flèche a l'état limite de service δ_e (cm)	Charge ultime P_u (KN)	Flèche ultime δ_u (cm)	Ductilité $\vartheta = \delta_u / \delta_e$
HAMADEH	750,0	0,85	1240,0	9,69	11,37
Calcul	792,13	0,84	1025,15	7,08	8,43

Tableau V.7 : Poutre PI1

À la figure V.13 on a représenté en fonction de la charge P, l'évolution de la flèche à mi-portée au droit de la charge P de la poutre PI1 :

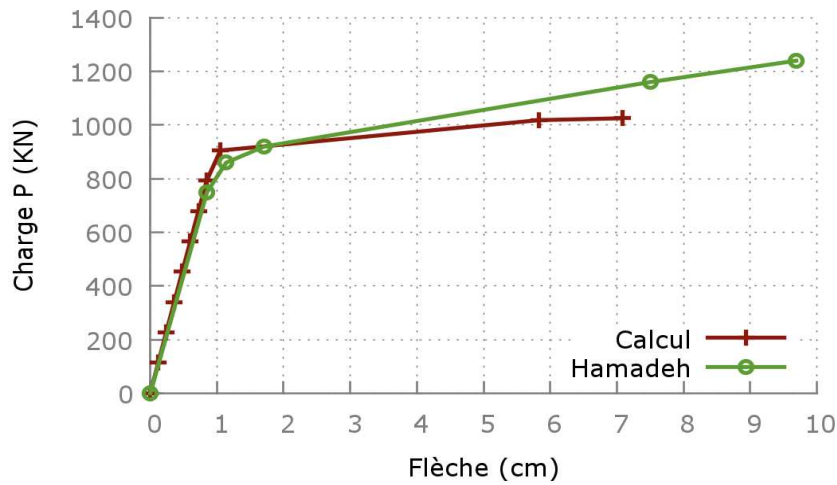


Fig. V.13 : Poutre isostatique PI1 - Courbe charge - flèche

L'étude du comportement de la poutre PI2 de 30 m de portée, a été faite afin d'avoir une idée sur l'influence de la portée sur le comportement global des poutres.

Les valeurs des charges limites élastique P_e et ultime P_u , avec les valeurs des flèches correspondantes δ_e et δ_u , trouvées à mi-portée de la poutre PI2 ; sont résumées dans le tableau ci-après :

Poutre PI2	Charge limite de service P_e (KN)	Flèche a l'état limite de service δ_e (cm)	Charge ultime P_u (KN)	Flèche ultime δ_u (cm)	Ductilité $\vartheta = \delta_u / \delta_e$
HAMADEH	940,0	7,54	1626,6	92,17	12,20
Calcul	1018.99	7,98	1370,24	59,22	7.42

Tableau V.8 : Poutre PI2

On constate que la ductilité en flèche trouvée pour la poutre PI2 est du même ordre de grandeur que celle trouvée pour la poutre PI1.

Les figures V.14 et V.15 donnent l'évolution de la flèche à mi-portée au droit de la charge P et à une distance de 8000 mm de l'extrémité gauche (section B-B) respectivement de la poutre PI2, avec le chargement.

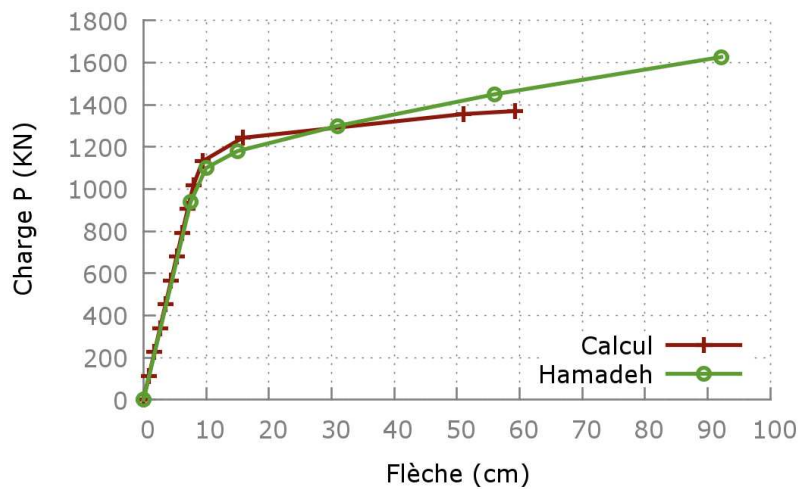


Fig. V.14 : Poutre isostatique PI2 - Courbe charge – flèche au niveau de la charge P

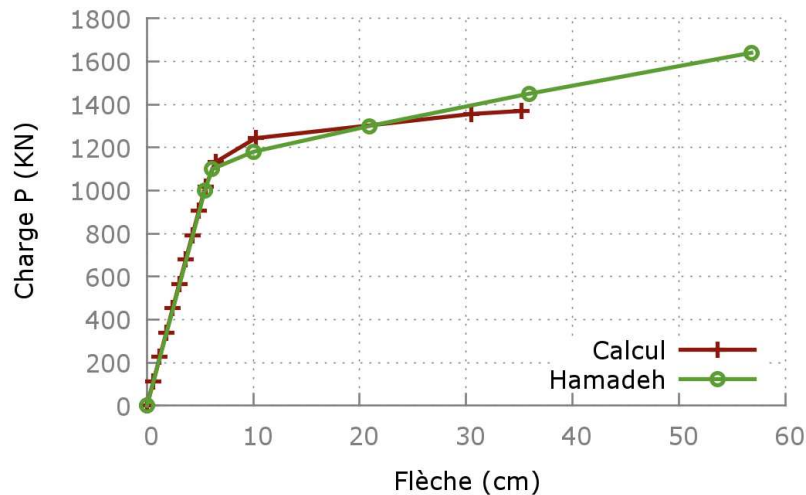


Fig. V.15 : Poutre isostatique PI2 - Courbe charge – flèche au niveau de la section B-B

En phase du comportement élastique ; les courbes obtenues par notre calcul se superpose avec les courbes obtenues par HAMADEH (figures V.13, V.14 et V.15). Et dès qu'on dépasse la charge limite de service P_e , nos résultats commencent à s'écarter des courbes obtenues par HAMADEH. Ceci est probablement du au fait que nous avons utilisé la méthode tangente pour la résolution et le calcul s'arrête par divergence du calcul.

5. 2.3. Exemples de structures triangulés :

5. 2.3.1. Poutre treillis plane :

Un treillis plan à trois travées égales a été testé par LOVEGROVE et analysés par CHAN en utilisant la méthode des éléments finis [24].

La disposition et les dimensions de la poutre treillis sont montrées à la figure V.16, ainsi que les sections des membrures. Les valeurs du module d'élasticité et de la limite élastique sont respectivement données égaux à 214 GPa et 285,4 MPa.

L'élément passant par le point (A) est conçu de telle sorte que la charge appliqué au voisinage le rend comme le point critique.

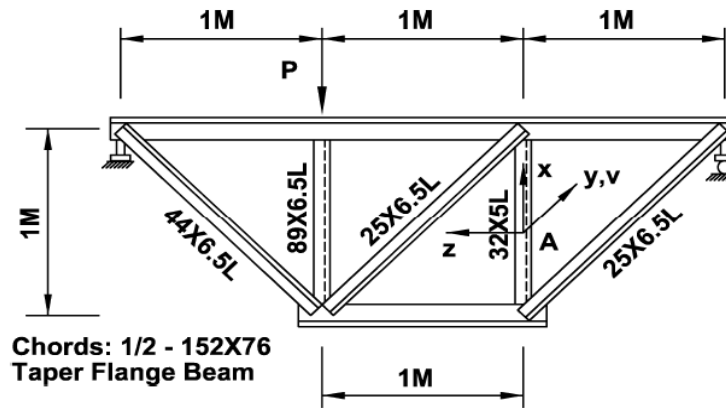


Fig. V.16 : Poutre treillis plane

L'évolution de la charge en fonction du déplacement latéral au point médian (A) est représentée dans la figure V.17.

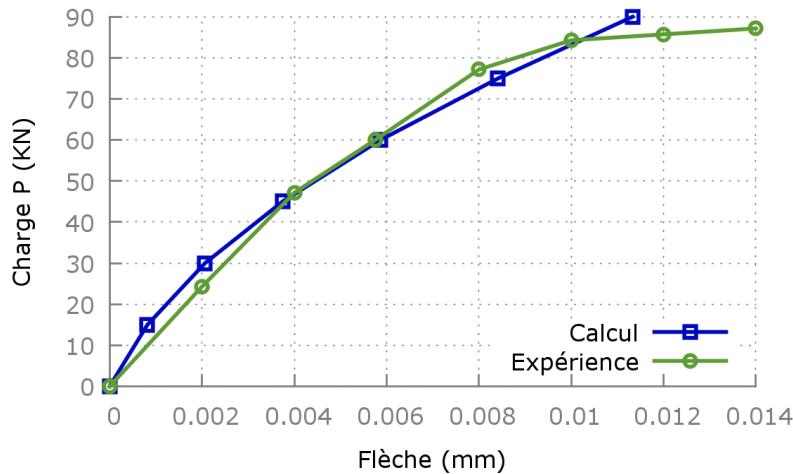


Fig. V.17 : Poutre treillis plane - Courbe charge – flèche

La charge ultime expérimentale est donnée égale à 88 kN. La charge ultime calculée est de 90 kN, soit un écart de 2.22% (dans le sens d'une surestimation). Les écarts qu'on peut observer peuvent s'expliquer par le fait que le modèle mathématique ne tient pas compte des contraintes résiduelles dans les profilés. En général, nous constatons que l'allure de la courbe calculée se rapproche de la courbe expérimentale. Alors la concordance entre l'expérience et notre calcul est bonne.

5. 2.3.2. Pont à poutres triangulées :

La figure V.18 montre le pont à poutre triangulée de type Warren de 7,32 m de hauteur et 36,6 m de longueur. La relation contrainte-déformation a été supposé élastique parfaitement plastique avec un module d'élasticité de 200000 MPa.

La section transversale en W8 × 18 avec une limite d'élasticité de 248 MPa a été utilisée pour les membrures tendues, y compris les membrures inférieures et diagonales. Et la section transversale de 305 × 305 × 13 mm avec une limite d'élasticité de 317 MPa a été utilisé pour les membrures soumises à la compression, y compris les membrures supérieures.

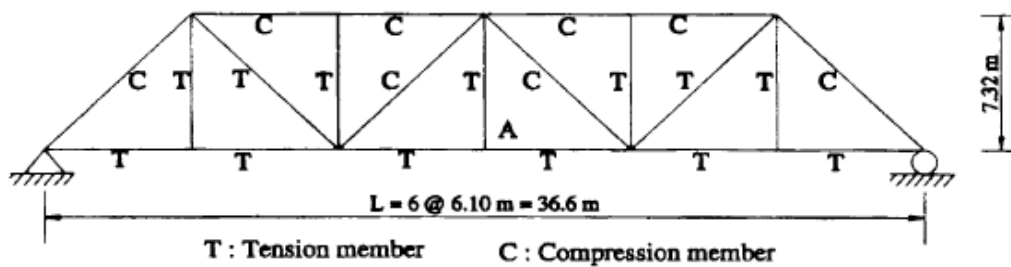


Fig. V.18 : Pont à poutre triangulée

Ce pont à poutre triangulée a fait l'objet d'une étude numérique de la part de Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et de Se-Hyu Choi [25].

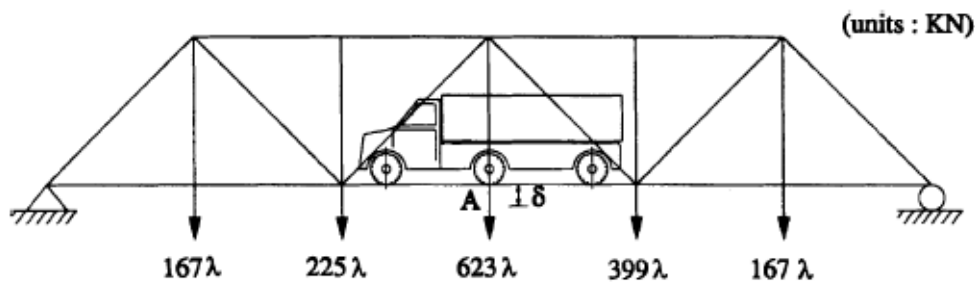


Fig. V.19 : Condition de chargement du pont à poutre triangulée

Le programme effectue une analyse pas à pas de la structure pour des valeurs croissantes d'un paramètre λ . Sous un accroissement des charges extérieures appliquées aux nœuds, le paramètre λ passe de λ_r à λ_{r+1} , est donné par :

$$\lambda_{r+1} = \lambda_r + \Delta\lambda$$

Avec : $\lambda_r = 0.02$ (ininitialisé).

Le programme se met alors à la recherche de l'accroissement de déplacement $\{\Delta U\}$ des nœuds de la structure engendrés par l'accroissement de charges appliqué à l'étape r :

$$\{\Delta P\}^r = \lambda_{r+1} \cdot \{P_v\}$$

Ou :

$\lambda \cdot \{P_v\}$: Chargement variable, d'intensité proportionnelle au paramètre λ .

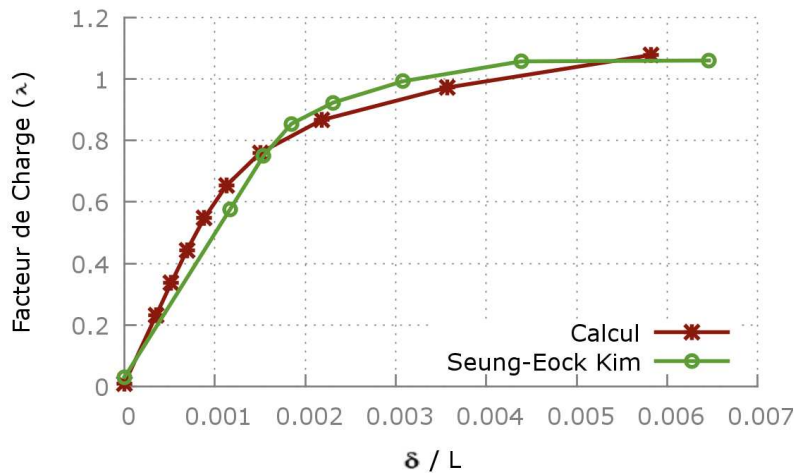


Fig. V.20 : Pont à poutre triangulée - Courbe charge – flèche

Le facteur de charge ultime (λ) trouvé par Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et Se-Hyu Choi [25] est égal à 1,06. Le facteur de charge ultime (λ) calculée est de 1,07, soit un écart de 0.934%. On constate que le pont à poutres triangulées a cédé par rupture plutôt que par flambement, et que la concordance entre le calcul de Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park et de Se-Hyu Choi [25] et notre calcul est très bonne.

5. 3. Validation et évaluation de la fiabilité de quelques structures étudiées :

5. 3.1. Application à la poutre treillis plane :

Les caractéristiques géométriques et matérielles de la poutre treillis plane étudiée (portée, section, chargement, condition d'appui, module d'élasticité, limite élastique) sont celles décrites au § 5. 2.3.1.

On procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution log-normale ou exponentielle va mieux la représenter.

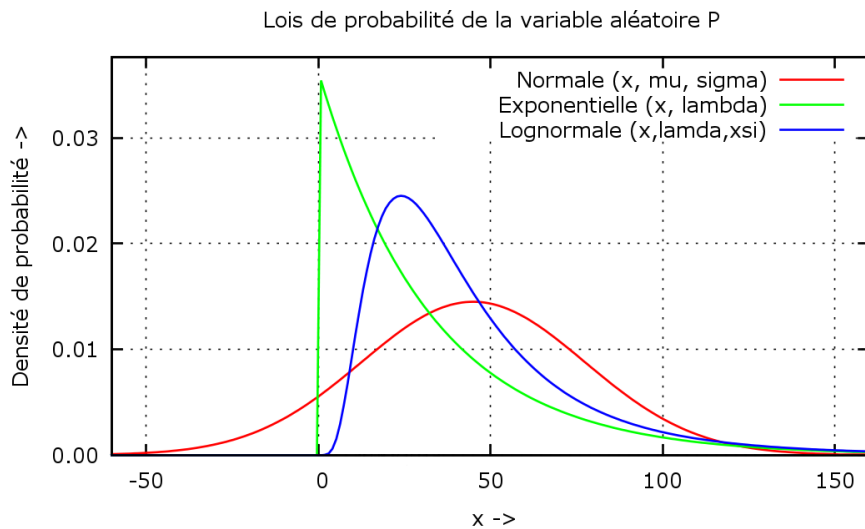


Fig. V.21.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire P

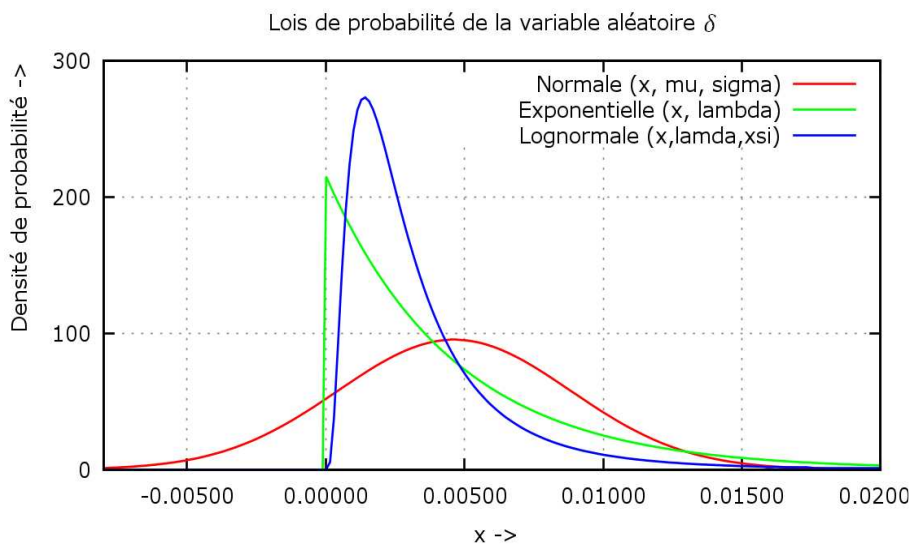


Fig. V.21.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire δ

Les figures V.21.a et V.21.b présentent le résultat d'estimation de la distribution des lois de probabilité des variables aléatoires retenues, par des lois normale, log-normale et exponentielle.

Les résultats obtenus sur la figure V.21.a donnent ; pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire P soit négative, et pour la loi log-normale une densité de probabilité inférieure à celle donnée par la loi exponentielle ; cette dernière loi semble mieux représenter ce paramètre par rapport aux deux autres types de lois. Et ceux de la figure V.21.b donnent aussi pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire δ soit négative, quant aux lois log-normale et exponentielle semblent mieux représenter ce paramètre par rapport à la loi normale, sauf que la loi log-normale donne une précision des phénomènes inconnus mieux que la loi normale et la loi exponentielle, car elle simule bien la loi normale par une courbe avec des résultats plus ramassés que cette dernière loi, et aussi parce qu'elle donne une densité de probabilité supérieure à celle des deux autres types de lois.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et ils sont représentées par le vecteur X , qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sortie à l'état-limite (P, δ), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi exponentielle et log-normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau V.9.

Vecteur X	Variabes aléatoires	Loi de distribution	Moyenne μ_X^N	Écart-type σ_X^N
X1	P	Exponentielle	45.0	32.4037035
X2	δ	Log-normale	0.00463588	0.00419236

Tableau V.9 : Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite

- Les autres paramètres (variables aléatoires d'entrées) comme le module d'élasticité E et la limite élastique σ_e sont considérés comme déterministes.

La fonction d'état-limite $G(P, \delta)$ est une fonction non linéaire implicite (connue numériquement à partir de notre calcul non linéaire), dont la défaillance du système est observée quand $G(x) \geq 0$ (figure V.22).

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est difficile de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité, alors il devient nécessaire de construire une surface de réponse.

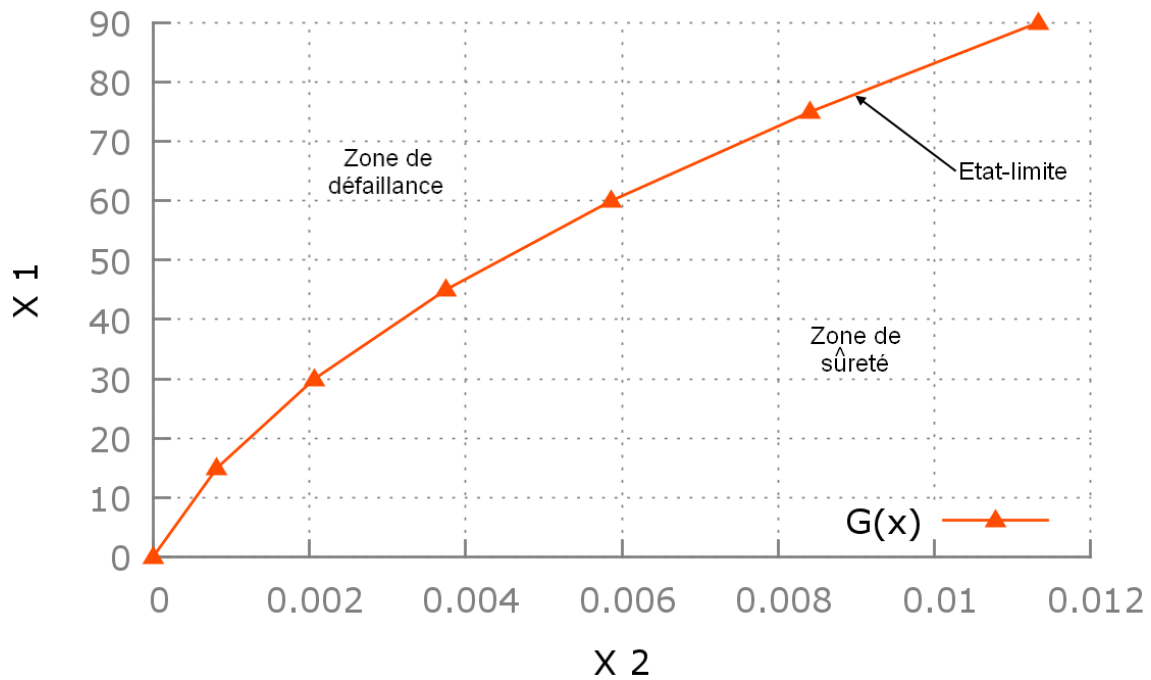


Fig. V.22 : État limite dans l'espace physique $G(P, \delta)$

La méthode de surface de réponse a pour objectif de remplacer la fonction d'état limite obtenue sous forme implicite par une autre fonction explicite, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité pour estimer l'indice de fiabilité des scénarios et la probabilité de défaillance de la structure étudiée. Pour cela on suit les étapes suivantes :

- Dans une première étape, construction de la fonction d'état limite dans l'espace physique.
- Dans une deuxième étape, modélisation des variables aléatoires.
- La troisième étape est de transformer la fonction d'état limite de l'espace physique vers un espace centré réduit selon la loi de la variable aléatoire.

$$G(P, \delta) \xrightarrow{T} H(P, \delta)$$

- La quatrième étape est de procéder au choix d'une forme mathématique à la surface de réponse dans l'espace centré réduit.

$$H(P, \delta) \xrightarrow{\text{fonction approchée}} \hat{H}(P, \delta)$$

- Enfin la cinquième étape consiste à appliquer la méthode de résolution définie au chapitre IV (méthode d'HL-RF) pour estimer l'indice de fiabilité et calculer la probabilité de défaillance.

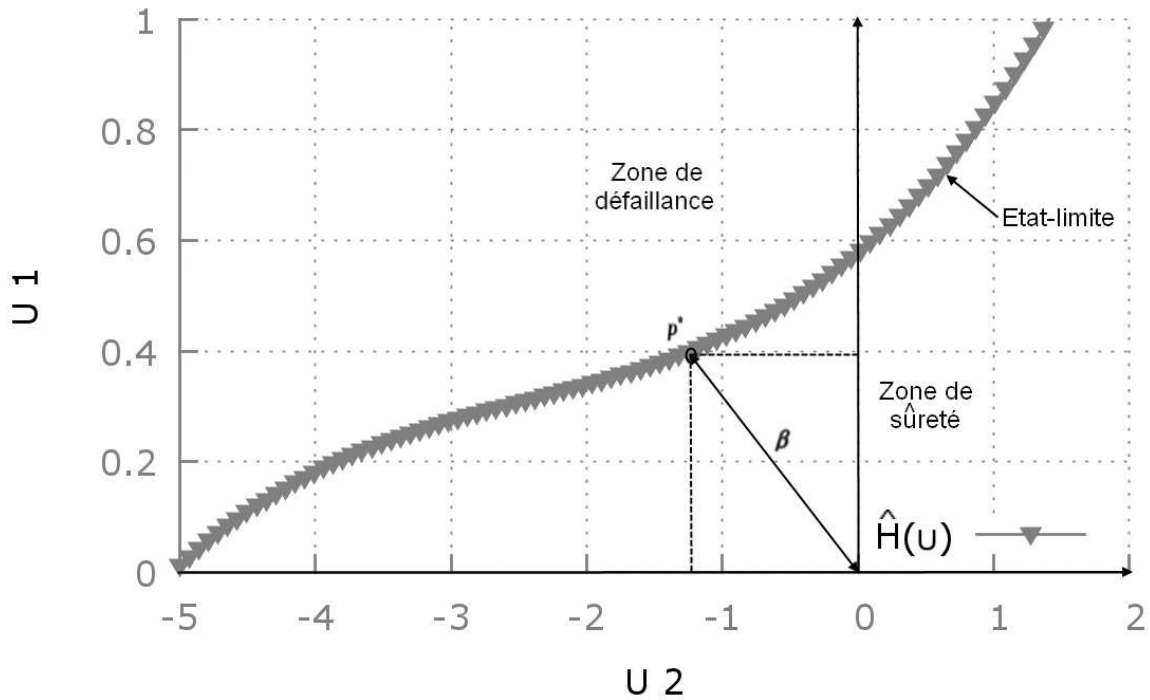


Fig. V.23 : État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(P, \delta)$

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur (α_1, α_2)	Point de conception (U_1, U_2)	Point de conception (X_1, X_2)
1.29306	0.09800 (9.800%)	(-0.3047, 0.9524)	(0.3940, -1.2315)	(28.8314, 0.0018)

Tableau V.10 : Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste

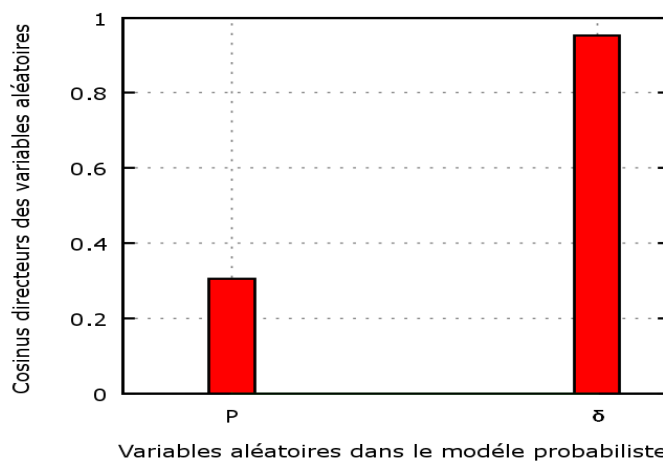


Fig. V.24 : Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires (P, δ)

La figure V.23 présente l'état limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(P, \delta)$ et aussi les résultats de la recherche du point de conception P^* .

L'indice de fiabilité retrouvée est de $\beta = 1.29306$, ce qui correspond à une probabilité de défaillance de la poutre en treillis estimé à $P_f = \Phi(-\beta) = 9.800\%$, d'où une fiabilité de 90.20%. Quant au point de défaillance le plus probable dans l'espace physique correspond à la charge 28.8314 KN et le déplacement 0.0018 m.

*Remarque : la probabilité de défaillance est calculée par la formule : $P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$
Ou : $\Phi(-\beta)$: est la densité de β obtenue de l'annexe III.*

Dans ce qui suit on procède à une autre méthode ; on combine entre les lois des variables aléatoires continues afin d'approcher le plus possible des lois de probabilités réelles des variables aléatoires utilisées dans cet exemple, pour cela on retient que sept cas de combinaison des lois de distribution. Les sept cas retenus des variables aléatoires sont représentés dans le tableau V.11 et leur état limite (surface de réponse) approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(P, \delta)$ sont représentés dans la figure V. 25.

Variables aléatoires	Lois de distributions						
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5	Cas 6	Cas 7
P	Normale	Log-normale	Exponentielle	Exponentielle	Exponentielle	Log-normale	Log-normale
δ	Normale	Log-normale	Exponentielle	Log-normale	Normale	Normale	Exponentielle

Tableau V.11 : Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires

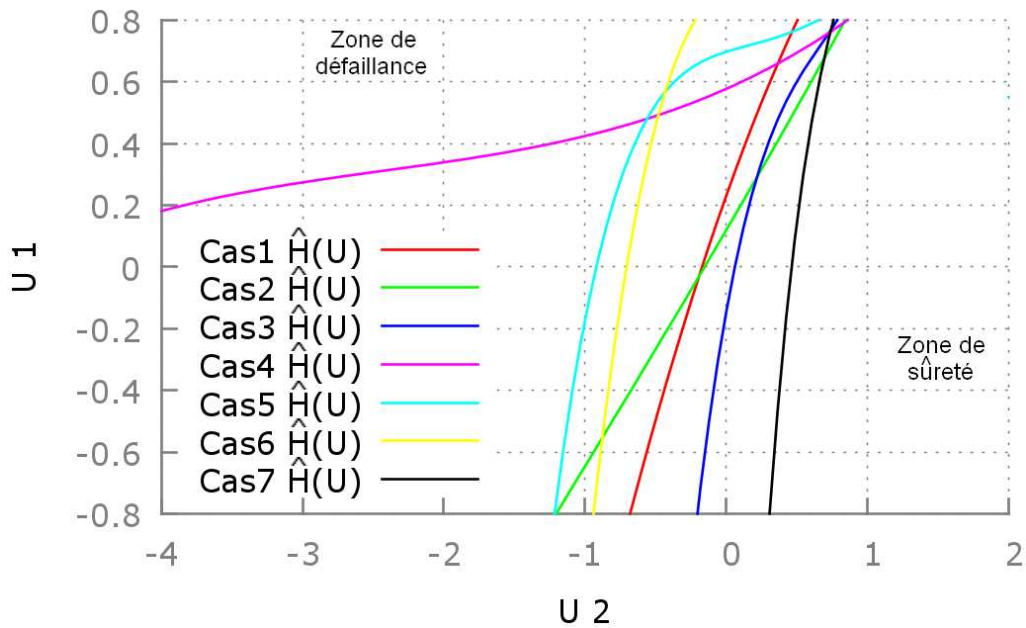


Fig. V.25 : État limite approché des différents cas dans l'espace centré réduit

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste des sept cas de combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Cas	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur (α_1, α_2)	Point de conception (U_1, U_2)	Point de conception (X_1, X_2)
Cas 1	0.20974	0.4169 (41.69%)	(-0.1094, 0.9939)	(0.0229, -0.2084)	(51.755, 0.0045)
Cas 2	0.11476	0.4542 (45.42%)	(-0.1157, 0.9932)	(0.0132, -0.1139)	(36.724, 0.0032)
Cas 3	0.09772	0.4611 (46.11%)	(0.2409, -0.9705)	(-0.0235, 0.0948)	(11.84, 0.00086)
Cas 4	1.29306	0.09800 (9.800%)	(-0.3047, 0.9524)	(0.3940, -1.2315)	(28.831, 0.0018)
Cas 5	0.70959	0.2390 (23.90%)	(-0.2901, 0.9569)	(0.2058, -0.6790)	(69.763, 0.0074)
Cas 6	0.82593	0.2044 (20.44%)	(-0.3148, 0.9491)	(0.2600, -0.7839)	(71.391, 0.0079)
Cas 7	0.4054	0.3426 (34.26%)	(0.4997, -0.8661)	(-0.2026, 0.3511)	(33.498, 0.0022)

Tableau V.12 : Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités

On constate pour les différentes variables aléatoires retenues qu'en utilisant la même loi de distribution (cas 1, 2, 3), on obtient des indices de fiabilité beaucoup plus petits que tous les indices de fiabilité trouvés en utilisant des lois de distributions différentes (cas 4, 5, 6, 7). Par conséquent, on note un écart significatif entre la probabilité de défaillance des variables aléatoires à loi de distribution identique (cas 1, 2, 3) et la probabilité de défaillance des variables aléatoires à loi de distribution différente (cas 4, 5, 6, 7), cela est dû au fait qu'en réalité les variables aléatoires peuvent ne pas suivre tous une même loi.

On constate aussi que le cas 4 donne le plus grand indice de fiabilité $\beta = 1.29306$, d'où une fiabilité de 90.20%, ce qui confirme la validité de la première méthode utilisée d'estimation des lois de probabilités qui permet d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

Dans notre étude, on a considéré que des variables aléatoires continues et indépendantes, alors qu'en réalité ce n'est toujours pas le cas pour tous les systèmes.

5. 3.2. Application au pont à poutres triangulées :

Les caractéristiques géométriques et matérielles du pont à poutres triangulées étudiées (portées, section, chargement, condition d'appuis, module d'élasticité, limite élastique) sont celles décrites au § 5. 2.3.2.

On procède à l'estimation des lois de probabilités des variables aléatoires retenues dans cette étude dans le but d'approximer la loi statistique (réelle). Le plus souvent la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire sont connus, cependant ces informations conduisent à des lois gaussiennes qui ne sont pas adaptées à une représentation physique des variables aléatoires. Par exemple, une certaine variable aléatoire peut ne pas être négative, une distribution log-normale ou exponentielle va mieux la représenter.

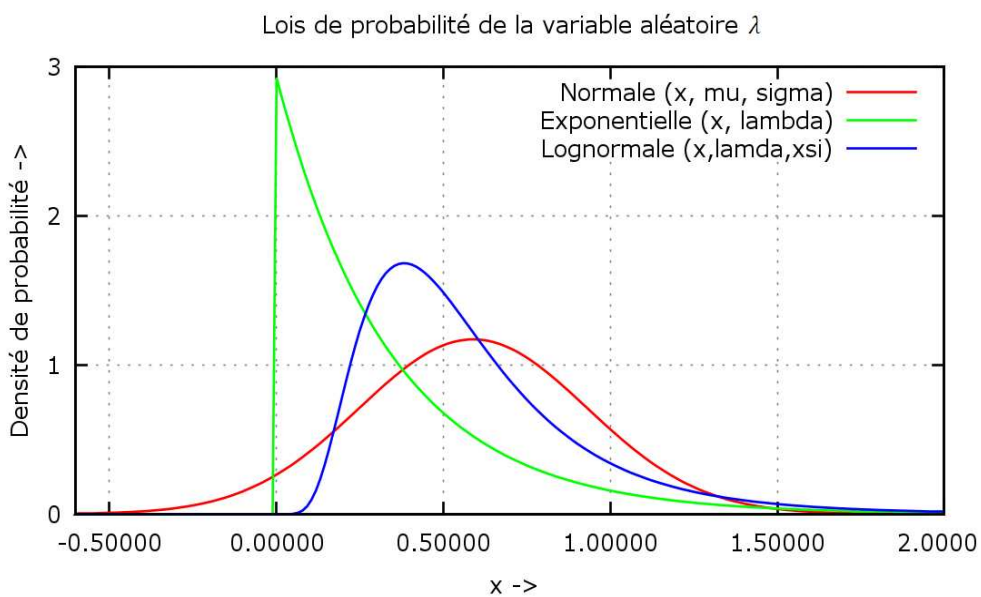


Fig. V.26.a : Lois de probabilité de la variable aléatoire λ

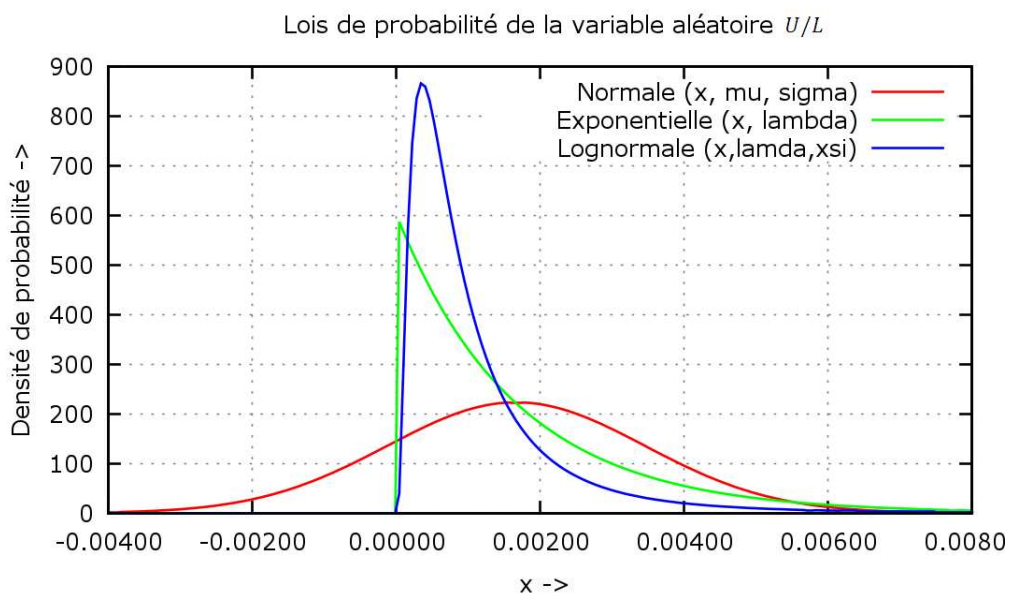


Fig. V.26.b : Lois de probabilité de la variable aléatoire U/L

Les figures V.26.a et V.26.b présentent le résultat d'estimation de la distribution des lois de probabilité des variables aléatoires retenues, par des lois normale, log-normale et exponentielle.

Les résultats obtenus sur la figure V.26.a donnent ; pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire λ soit négative, et pour la loi log-normale une densité de probabilité inférieure à celle trouvée pour la loi exponentielle ; cette dernière loi semble mieux représenter ce paramètre par rapport aux deux autres types de lois. Et ceux de la figure V.26.b donnent aussi pour une loi normale une probabilité non négligeable que la variable aléatoire U/L soit négative, quant aux lois log-normale et exponentielle semblent mieux représenter ce paramètre par rapport à la loi normale, sauf que la loi log-normale donne une précision des phénomènes inconnus mieux que la loi normale ou exponentielle car elle simule bien la loi normale par une courbe avec des résultats plus ramassés que cette dernière loi, et aussi parce qu'elle donne une densité de probabilité supérieure à celle des deux autres types de lois.

Les variables aléatoires retenues dans cette étude sont considérées continues, indépendantes et sont représentées par le vecteur X , qu'on classe comme suit :

- Les variables aléatoires de sorties à l'état-limite ($\lambda, U/L$), leurs lois de distributions aléatoires sont modélisées par une loi exponentielle et log-normale respectivement, dont les caractéristiques sont données dans le tableau V.13.

Vecteur X	Variables aléatoires	Loi de distribution	Moyenne μ_X^N	Écart-type σ_X^N
X1	λ	Exponentielle	0.589735	0.34098745
X2	U/L	Log-normale	0.0016639	0.00179006

Tableau V.13 : Paramètre des lois des variables aléatoires pour l'état-limite

- Les autres paramètres (variables aléatoires d'entrées) comme le module d'élasticité E et les limites élastiques (σ_{e1}, σ_{e2}) sont considérées comme déterministes.

La fonction d'état-limite $G(\lambda, U/L)$ est une fonction non linéaire implicite (connue numériquement à partir de notre calcul non linéaire), dont la défaillance du système est observée quand $G(x) \geq 0$.

Compte tenu de la complexité du modèle élément fini, il est impossible de réaliser l'étude par un couplage direct entre le programme de calcul non linéaire et le programme de fiabilité. Il devient nécessaire de construire une surface de réponse.

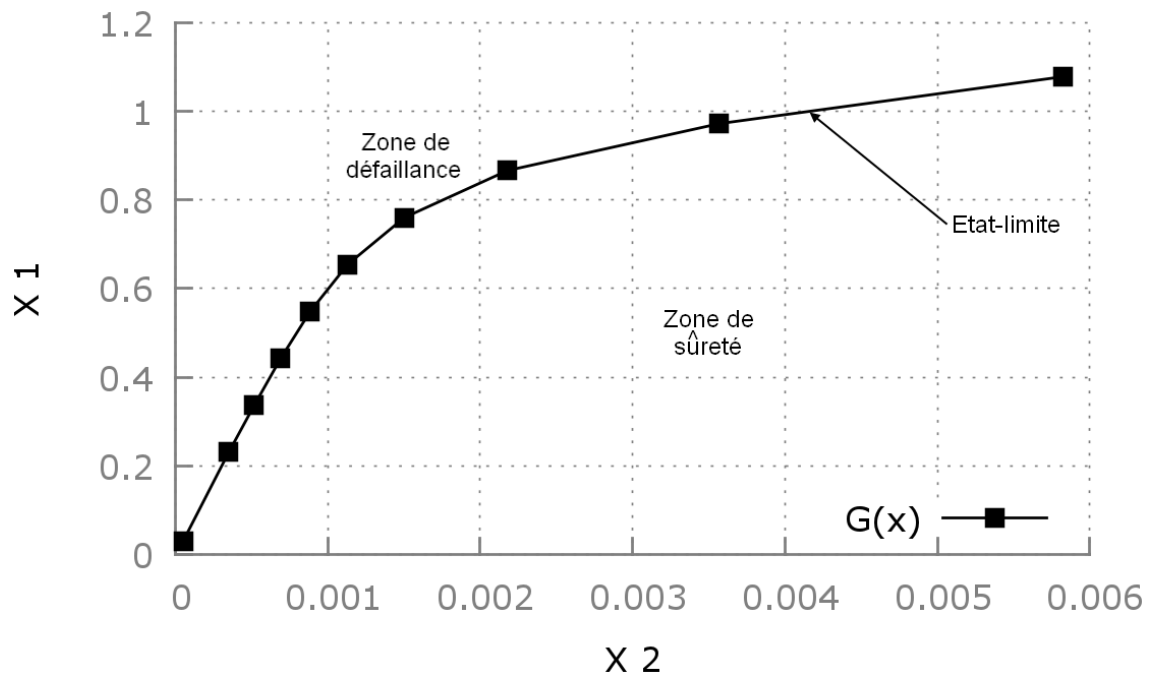


Fig. V.27 : État limite dans l'espace physique $G(\lambda, U/L)$

La méthode de surface de réponse à pour objectif de remplacer la fonction d'état limite obtenue sous forme implicite par une autre fonction explicite, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité pour estimer l'indice de fiabilité des scénarios et la probabilité de défaillance de la structure étudiée. Pour cela on suit les étapes suivantes :

- Dans une première étape, construction de la fonction d'état limite dans l'espace physique.
- Dans une deuxième étape, modélisation des variables aléatoires.
- La troisième étape est de transformer la fonction d'état limite de l'espace physique vers un espace centré réduit selon la loi de la variable aléatoire.

$$G(\lambda, U/L) \xrightarrow{T} H(\lambda, U/L)$$

- La quatrième étape est de procéder au choix d'une forme mathématique à la surface de réponse dans l'espace centré réduit.

$$H(\lambda, U/L) \xrightarrow{\text{fonction approchée}} \hat{H}(\lambda, U/L)$$

- Enfin la cinquième étape consiste à appliquer la méthode de résolution défini au chapitre IV (méthode d'HL-RF) pour estimer l'indice de fiabilité et calculer la probabilité de défaillance.

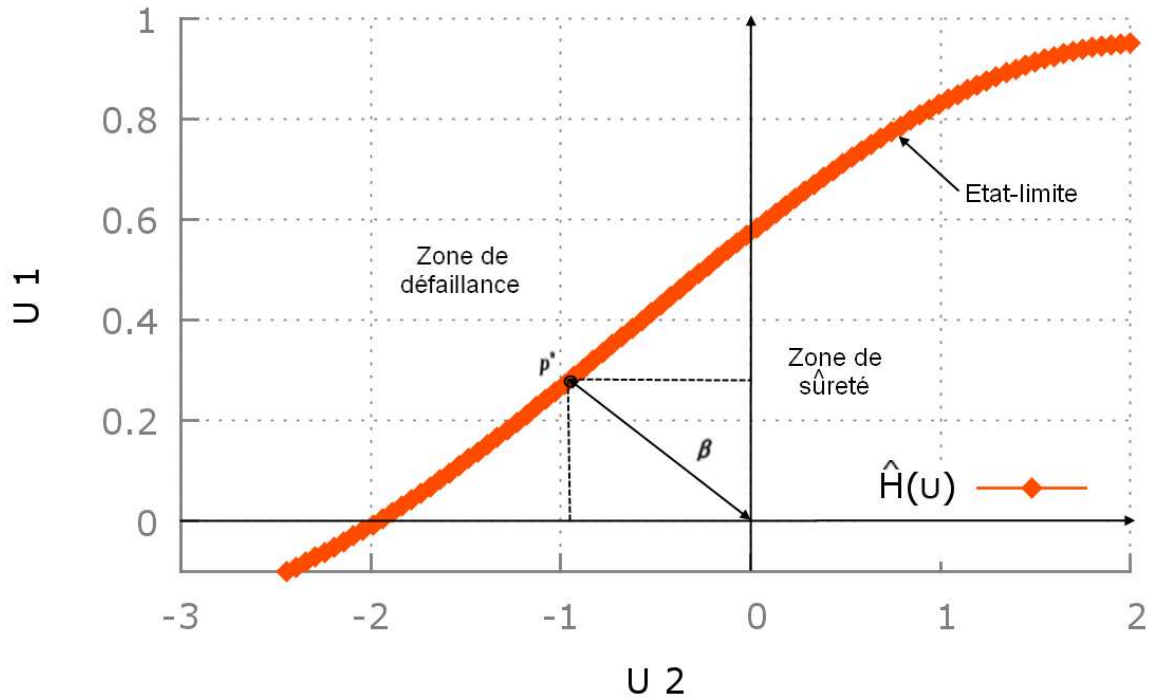


Fig. V.28 : État limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(\lambda, U/L)$

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste, la méthode d'HL-RF nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur (α_1, α_2)	Point de conception (U_1, U_2)	Point de conception (X_1, X_2)
1.0300	0.1515 (15.15%)	(-0.2794, 0.9601)	(0.2878, -0.9889)	(0.3622, 0.000639)

Tableau V.14 : Résultats de l'analyse mécano-fiabiliste

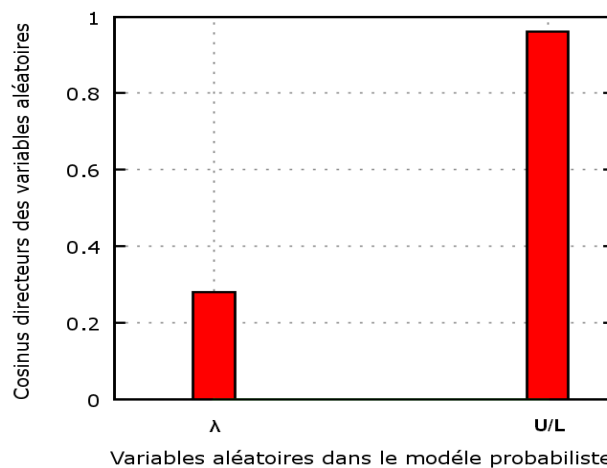


Fig. V.29 : Valeur absolue des cosinus directeurs des variables aléatoires ($\lambda, U/L$)

La figure V.28 présente l'état limite approché dans l'espace centré réduit $\hat{H}(\lambda, U/L)$ et aussi les résultats de la recherche du point de conception P^* .

L'indice de fiabilité retrouvée est de $\beta = 1.0300$, ce qui correspond à une probabilité de défaillance de la poutre en treillis estimé à $P_f = \Phi(-\beta) = 15.15\%$, d'où une fiabilité de 84.85%.

*Remarque : la probabilité de défaillance est calculée par la formule : $P_f = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$
Ou : $\Phi(-\beta)$: est la densité de β obtenue de l'annexe III.*

Dans ce qui suit on procède à une autre méthode ; on combine entre les lois des variables aléatoires continues afin d'approcher le plus possible des lois de probabilités réelles des variables aléatoires utilisées dans cet exemple, pour cela on retient que sept cas de combinaison des lois de distribution. Les sept cas retenus des variables aléatoires sont représentés dans le tableau V.15 et leur état limite approché (surface de réponse) dans l'espace centré réduit $\hat{H}(\lambda, U/L)$ sont représentés dans la figure V.30.

Variables aléatoires	Lois de distributions						
	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5	Cas 6	Cas 7
λ	Normale	Log-normale	Exponentielle	Exponentielle	Exponentielle	Log-normale	Log-normale
U/L	Normale	Log-normale	Exponentielle	Log-normale	Normale	Normale	Exponentielle

Tableau V.15 : Les différents cas des lois de distributions des variables aléatoires

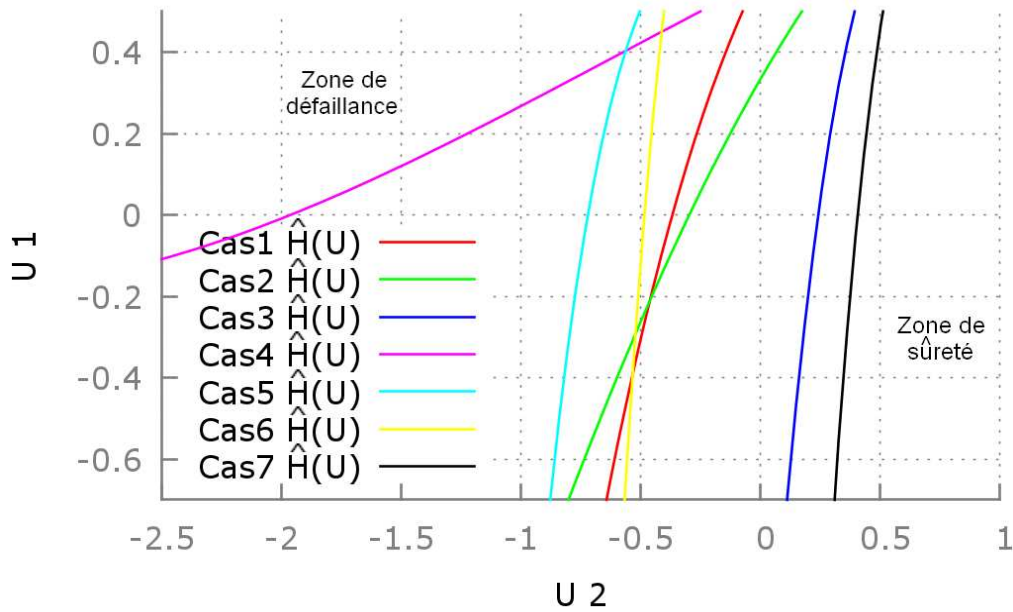


Fig. V.30 : État limite approché des différents cas dans l’espace centré réduit

Après analyse par couplage mécano-fiabiliste des sept cas de combinaison entre les lois des variables aléatoires continues, la méthode d’HL-RF nous a permis d’obtenir les résultats suivants :

Cas	Indice de fiabilité	Probabilité de défaillance	Cosinus directeur (α_1, α_2)	Point de conception (U_1, U_2)	Point de conception (X_1, X_2)
Cas 1	0.3385	0.3674 (36.74%)	(-0.4174, 0.9086)	(0.1413, -0.3076)	(0.6942, 0.0014)
Cas 2	0.2506	0.4010 (40.10%)	(-0.5398, 0.8417)	(0.1353, -0.2109)	(0.6406, 0.0012)
Cas 3	0.2360	0.4067 (40.67%)	(0.2460, -0.9692)	(-0.0580, 0.2287)	(0.226, 0.00033)
Cas 4	1.0300	0.1515 (15.15%)	(-0.2794, 0.9601)	(0.2878, -0.9889)	(0.362, 0.00063)
Cas 5	0.7535	0.2255 (22.55%)	(-0.2558, 0.9667)	(0.1928, -0.7283)	(0.6811, 0.0013)
Cas 6	0.4710	0.3188 (31.88%)	(-0.2491, 0.9684)	(0.1173, -0.4561)	(0.7426, 0.0014)
Cas 7	0.4364	0.3312 (33.12%)	(0.4279, -0.9037)	(-0.1867, 0.3944)	(0.476, 0.00077)

Tableau V.16 : Résultats de l’analyse mécano-fiabiliste pour les différents cas traités

On constate pour les différentes variables aléatoires retenues en utilisant la même loi de distribution (cas 1, 2, 3) on obtient des indices de fiabilité beaucoup plus petits que tous les indices de fiabilité trouvés en utilisant des lois de distributions différentes (cas 4, 5, 6, 7). Par conséquent, on note un écart entre la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution identiques (cas 1, 2, 3) et la probabilité de défaillance des variables aléatoires à lois de distribution différentes (cas 4, 5, 6, 7). Cela est dû au fait qu'en réalité les variables aléatoires peuvent ne pas suivre tous une même loi.

On constate aussi que le cas 4 donne le plus grand indice de fiabilité $\beta = 1.0300$, d'où une fiabilité de 84.85%, ce qui confirme la validité de la première méthode utilisée d'estimation des lois de probabilités qui permet d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

Dans notre étude, on a considéré que des variables aléatoires continues et indépendantes, alors qu'en réalité ce n'est toujours pas le cas pour tous les systèmes.

5. 4. Conclusions :

Les conclusions tirées de ce chapitre de validation des résultats, sont comme suit :

Les résultats numériques obtenus sur le portique de Cranston sont proches des résultats expérimentaux, ce qui nous a permis de vérifier la validité du programme de calcul non linéaire des structures en béton armé ;

Avant de ce lancer dans le calcul des structures en treillis, nous avons d'abord apporté des modifications au niveau du programme pour traiter les structures métalliques (poutre continue de STUSSI et de KOLLBRUNNER et le portique de NELSON, WRIGHT et DOLPHIN) et aussi les structures mixtes (poutre continue d'ANSOURIAN et poutre isostatique de HAMADEH). Il a été observé une bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats analytiques et expérimentaux.

Puis nous avons cherché à valider la formulation non linéaire matérielle et géométrique décrite au chapitre II des éléments barre de treillis en comportement statique. Pour cela, nous avons effectué des tests sur des structures en treillis (poutre treillis plane et pont à poutres triangulées), qui nous en donnés des résultats numériques très proches des résultats analytiques et expérimentaux, ce qui nous a permis de dire que la formulation adoptée au chapitre II et l'implémentation qui a été faite présentent un moyen précis pour la modélisation non linéaire des structures en treillis sous chargements monotones croissants jusqu'à la rupture.

Le modèle fiabiliste couplée au modèle mécanique appliqué à des structures en treillis nous a permis dans cette étude, d'évaluer l'indice de fiabilité relatif à la ruine des systèmes mécaniques à comportement non linéaire et a variables non-normales.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

Les lois de comportement réelles du béton et de l'acier ont été utilisées dans cette présente étude pour traiter le calcul non linéaire des structures. Ce calcul permet d'estimer au mieux les déplacements réels des structures.

La formulation proposée pour un élément barre, dans le cas des treillis en acier, et son implémentation ont permis de traiter l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des structures en treillis sous chargements monotones croissants jusqu'à la ruine.

Les méthodes de résolution des problèmes non linéaires permettent de connaître les processus itératifs de base qui existe, et aussi de connaître les problèmes qu'en peut rencontrer lors de l'utilisation de ces techniques et la manière de les résoudre : comme le problème des points de bifurcation qui est traité par un pilotage de l'incrément de chargement. Quant au processus itératif utilisé dans notre étude, il permet le traitement non linéaire des structures en treillis.

Pour le calcul fiabiliste, nous nous sommes particulièrement intéressés aux méthodes de niveaux 2 plus précisément la méthode d'optimisation de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF), puis nous avons opté pour le couplage entre cette dernière méthode et le calcul non linéaire grâce à une méthode de couplage indirecte par surface de réponse analytique. L'utilisation de la transformation isoprobabiliste nous a permis de remplacer la fonction d'état limite implicite dans l'espace physique (qui représente la défaillance de la structure) par une fonction explicite équivalente dans l'espace normé et ce, afin de pouvoir appliquer la méthode de fiabilité adopté.

Après avoir fait les implémentations nécessaires, nous avons d'abord traité le problème de calcul non linéaire des structures métalliques et mixtes, puis nous avons validé la formulation proposée au chapitre II pour traiter le calcul non linéaire de structures en treillis sur des exemples testés. Les résultats montrent une assez bonne approximation de la charge de ruine, une bonne concordance a été constatée en comparant nos résultats à des solutions analytiques ou expérimentales.

Enfin nous avons traité le problème de fiabilité sur quelques exemples afin d'estimer leur indice de fiabilité et de déterminer leur probabilité de défaillance. Les résultats obtenus par combinaison entre les lois des variables aléatoires continues montrent

que la méthode d'estimation des lois de probabilités que nous avons utilisé en première approche nous a permis d'approximer la loi statistique réelle de la variable aléatoire.

Malgré les bons résultats obtenus, il est possible en perspective d'améliorer les deux programmes qui ont été utilisés dans cette étude. Les améliorations qui peuvent être proposées sont :

Pour le programme de calcul non linéaire matériel et géométrique des structures :

- Introduction des déformations dues à l'effort tranchant.
- Introduction des effets différés et des effets cycliques.
- Introduction des contraintes initiales (contraintes d'origine thermique et contraintes résiduelles) dans les profilés métalliques, liées au mode de fabrication.
- Introduction des non linéarités provenant des conditions aux limites, et les non linéarités géométriques en grands déplacements et grandes déformations.
- Utilisation d'autres types d'éléments (membranaires, hybrides,...).

Pour le programme de fiabilité :

- Implémentation des autres méthodes de fiabilité, dont la méthode de niveau 3 de simulation de Monte-Carlo.
- Utilisation de nouvelles méthodes de couplage.

BIBLIOGRAPHIE

Références bibliographiques

- [01] GRELAT A., Analyse non linéaire des ossatures hyperstatiques en béton armé, Thèse de docteur Ingénieur, Université Paris VI, 1978.
- [02] KACHI, MS., FOURE, B., BOUAFIA, Y., MULLER, P., « L'effort tranchant dans la modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint ». Revue Européenne de Génie Civil, volume 10, n° 10/2006, déc. 2006, ISSN 1774-7120, Ed. Lavoisier, France, pp. 1235 -1264, <http://www.ejece.revuesonline.com>.
- [03] KACHI M. S., BOUAFIA Y., MULLER P., FOURE B., " Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres en béton armé et précontraint en élasticité non linéaire". Colloque International - Caractérisation et Modélisation des matériaux et structures « CMMS08 », Université de Tizi-Ouzou en collaboration avec les universités de Paris 6 et de Cergy – Pontoise, Tizi Ouzou – Algérie, 16, 17 et 18 Nov. 2008.
- [04] BOUAFIA Y., IDDIR A., KACHI MS., « Influence de la prise en compte du confinement dans le calcul non linéaire des sections en béton armé », ACMA, 2010, May 12-14, Marrakech, Morocco.
- [05] ROBERT F., Contribution à l'analyse non linéaire géométrique et matérielle des ossatures spatiales en génie civil, application aux ouvrages d'art. Thèse de doctorat : institut national de sciences appliquées de Lyon, 1999.
- [06] IGUETOULENE F., Modélisation non linéaire des structures triangulées. Thèse de Magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- [07] BOUAFIA Y., Simulation numérique du comportement moyen jusqu'à rupture d'une zone de poutre. Application au béton armé, au béton précontraint et au béton de fibres. Mémoire de D.E.A., Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1987.
- [08] KACHI M. S., Calcul non linéaire, jusqu'à rupture, d'une section en béton armé de fibres métalliques. Thèse de Magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 1997.
- [09] MEZIANE R., Modélisation et simulation du comportement non-linéaire des structures planes, en béton arme et béton de fibres, par des éléments finis poutres. Thèse de magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2008.
- [10] NAIT-RABAH O., Simulation numérique des ossatures spatiales, Thèse de doctorat, École Centrale de Paris, 1990.

- [11] IDDIR A., Influence de la prise en compte du béton confiné dans le calcul non linéaire des structures. Thèse de magister, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2008.
- [12] M. A. Crisfield. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Vol 1. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1991.
- [13] M. A. Crisfield. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Vol 2. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1997.
- [14] MAIA ANTONIO CLAUDIO FERRARO, Analyse non-linéaire des portiques en béton armé ou précontraint compte tenu du comportement rhéologique du béton, Thèse de Docteur Ingénieur, Université Pierre et Marie CURIE, Paris VI, 1979.
- [15] MERIDJA N., Calcul non – linéaire des structures poteaux – poutres en béton armé et béton précontraint, Mémoire de Magister, Université A. Mira de Bejaia, 2005.
- [16] KWAME ESENAK AKOSSAH, Analyse non-linéaire des structures a parois minces par élément finis et son application aux bâtiments industriels, Thèse de doctorat, Université Laval Québec, 1987.
- [17] LANDOWSKI M. et LEMOINE B., Concevoir et construire en acier, collection mémentos acier, Arcelor, Luxembourg, 2005.
- [18] KACHI. M.S., Modélisation du comportement jusqu'à rupture des poutres à précontrainte extérieure, Thèse de doctorat d'état, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, novembre 2006.
- [19] ELNAGGAR M., Recherche de la charge ultime d'une charpente métallique, Thèse de doctorat d'état, École polytechnique fédérale de Lausanne, 1982.
- [20] OUNIS HADJ M., Analyse elasto-plastique des structures par éléments finis membranaires 2d, Mémoire de Magister, Universitaire Mohamed Boudiaf m'sila, xxxx.
- [21] NACEUR H., Non linéarités géométriques des structures (Algorithmes et stratégies de résolution), Cours n°3, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 2011.
- [22] AOUAMEUR-MESBAH A., Analyse non-linéaire matérielle et géométrique des structures coques en béton arme sous chargements statiques et dynamiques, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- [23] HAMADEH W., Modélisation du comportement non linéaire jusqu'à la ruine de poutres mixtes acier-béton avec un système de précontrainte extérieure, Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1990.

- [24] SUN X. and CHAN S.L., Design and second-order analysis of trusses composed of angle sections; *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. Vol. 2, No. 3 (2002) 315-334. © World Scientific Publishing Company.
- [25] Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park, Se-Hyu Choi, Practical advanced analysis and design of three-dimensional truss bridges; *Journal of Constructional Steel Research* 57 (2001) 907–923.
- [26] ESPION B., Contribution à l'analyse non linéaire des ossatures planes. Application aux structures en béton armé. Thèse de doctorat en sciences appliquées, vols I et II, Université libre de Bruxelles, Belgique, 1986.
- [27] BERERICHE Y., Contribution de l'approche contrainte / résistance à l'évaluation de la fiabilité des structures. Thèse de maîtrise en génie Mécanique, Université LAVAL, QUEBEC, 2010.
- [28] SELLAMI Y., Approche Fiabiliste et Mécanique pour la Prédiction de Risques d'Accident de Poids Lourds. Thèse de doctorat en Sciences et Techniques, université de NANTES, 2008.
- [29] JALLOUF S. G., Approche Probabiliste du Dimensionnement Contre le Risque de Rupture. Thèse de doctorat en Sciences de l'ingénieur, option Mécanique, université de Paul Verlaine de Metz et de l'université d'ALEP, 2006.
- [30] LEMAIRE M., Fiabilité des structures : Couplage mécano-fiabiliste statique, Éditions Hermès Lavoisier, Paris, 2005.
- [31] LYONNET P., Ingénierie de la fiabilité, Éditions TEC & DOC Lavoisier, Paris, 2006.
- [32] LEMAIRE M., Approche probabiliste du dimensionnement : Modélisation de l'incertain et méthodes d'approximation, Éditions techniques de l'ingénieur, 2012.
- [33] M. Soheil MOHAMMADKHANI-SHALI, Contribution a l'étude de la redondance dans les ponts : analyses des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse, thèse de doctorat d'état, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [34] DEHEEGER F., Couplage mécano-fiabiliste : SMART – méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité. Thèse de doctorat d'état, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, 2008.
- [35] Association Française pour la Construction, les structures triangulées en béton précontraint. AFPC, 18 mai 1983.
- [36] Zahn. John J., Fortran programs for reliability analysis. Gen. Tech. Rep. FPL-GTR-72. Madison. WI: U.S. Department of Agriculture. Forest Service. Forest Products Laboratory . 25 p, July 1992.

- [37] Abramowitz, M.; Stegun, I.A., eds., Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Applied Mathematics Series 55. Washington, DC: U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1972.
- [38] Alaa Mohamed, Ghias Kharmanda et Maurice Lemaire, Apport de la fiabilité dans l'optimisation des structures, LaRAMA / IFMA & UBP, Campus des Cézeaux, BP 265, 63175 Aubière cedex, Journée AIP-Priméca — 31 janvier 2002.
- [39] A. Mohamed et L. Favre, Optimisation Mécano-Fiabiliste des Structures, JN-FIAB 98, Hermès, France (1998).
- [40] M. PENDOLA, A. Mohamed, P. HORNET, M. Lemaire, Fiabilité des Structures en Contexte D'incertitudes Statistiques, XV^{ème} Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3 – 7 Septembre 2001.
- [41] F. DEHEEGER, M. PENDOLA, M. LEMAIRE, J-M. BOURINET, apprentissage Stochastique pour les calculs de fiabilité de système représentés par des modèles complexes, XVI^{ème} Congrès de maîtrise des risques et de sureté de fonctionnement, Avignon 6-10 octobre 2008.
- [42] Règles BAEL 91 modifiées 99, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES 2000.
- [43] Règles BPEL 91, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. Edition EYROLLES mars 1993.
- [44] CASANOVA P., bétons renforcés de fibres métalliques : du matériau a la structure Étude expérimentale et analyse du comportement de poutres soumises à la flexion et à l'effort tranchant, thèse de doctorat d'état, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [45] ULM F.J., Modélisation élastoplastique avec endommagement du béton de structures. Application aux calculs statiques et dynamiques de structures en béton armé et béton précontraint, thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [46] BENMANSOUR M. B., Modélisation du comportement cyclique alterné du béton armé. Application à divers essais statiques de poteaux, thèse de doctorat d'état, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [47] HASSANI-MANAI S., étude et modélisation de la stabilité des structures élancées en béton armé, thèse de doctorat d'état, Université de Cergy-Pontoise, 2003.

- [48] El Maskaoui Z., Application de la programmation orientée objets à l'optimisation discrète sous contraintes des structures métalliques formées de poutres via les algorithmes génétiques, thèse de doctorat d'état, faculté polytechnique de Mons, 2007.
- [49] Carlos A. Felippa, nonlinear finite element methods, University of Colorado Boulder, Colorado 80309-0429, USA., August 2001.
- [50] M. Greco and W.S. Venturini, Stability analysis of three-dimensional trusses, Latin American Journal of Solids and Structures, 3 (2006) 325-344.
- [51] G. R. Liu, S. S. Quek, The Finite Element Method : A Practical Course, Butterworth- Heinemann, Elsevier Science Ltd. All rights reserved, Copyright © 2003.
- [52] ADJRAD A., KACHI, MS., BOUAFIA Y., IGUETOULÈNE, F. ., "Nonlinear modeling structures on 3D », The International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials, ICSAAM 2011, 7-11 september, Sinaia, Romania, pp. 1 – 9, ISSN 2247 – 8337, www.icsaam2011.resist.pub.ro.
- [53] RAHMANI F., Application du couplage mécano-fiabiliste au calcul non linéaire des sections circulaire (BA et BFM). Thèse de Master académique, Université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- [54] CAZENAVE M., « Méthode des éléments finis : Approche pratique en mécanique des structures», ISBN 978-2-10-055065-4, © Dunod, Paris, 2010.
- [55] BOUAFIA, Y., KACHI, MS., MULLER P., « Modeling of externally prestressed concrete beams loaded in combined bending, axial load and shear until fracture (in non linear elasticity) ». ICSAAM, 2009, ISBN 978-2-9534804-0-5, September 7 – 10, Tarbes, France.
- [56] BOUAFIA, Y., FOURÉ, B., KACHI, MS., « Shear strength of externally prestressed beams ». II. International Symposium on Cement and Concrete Technology in the 2000s. Turkish Cement Manufacturers' Association - European Cement Association. Sept. 6 - 10, 2000, Istanbul - Turquie, ISBN 975-8136-09-7. Vol. 2, pp. 522-531.
- [57] SAAD M., Influence du pourcentage d'acier sur le comportement post-fissuration du béton armé en traction, thèse de doctorat d'état, université de Tizi-Ouzou, Algérie, 2011.
- [58] SAAD, M., KACHI, MS., BOUAFIA, Y., MULLER, P., FOURE, B., « Influence du pourcentage d'acier sur le comportement du béton tendu fissuré », European Journal of Environmental and Civil Engineering (EJECE) - Revue européenne de génie civil, Volume 14, N° 3, 2010, ISSN 1964-8189, ISBN 978-2-7462-2946-4, Ed. Lavoisier, Paris, pp. 303-327, <http://www.ejece.revuesonline.com>.

ANNEXES

ANNEXE I

**CALCUL EN ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE DES STRUCTURES SPATIALES EN
BÉTON ARMÉ, MÉTALLIQUES ET MIXTES FORMÉES D'ÉLÉMENTS
POUTRES**

I. 1. Introduction :

Lors d'un calcul non linéaire de structures en béton armé, métalliques et mixtes, ces éléments sont modélisés par des éléments finis de type poutre. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 6 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement et de sa rotation dans l'espace. Les hypothèses faites à partir des travaux de NAIT-RABAH [10] sont :

- Les déplacements sont petits.
- Les forces sont conservatives.
- L'élément est chargé seulement en ses extrémités, supposé court, de sorte que les effets du second ordre dans ce repère soient négligeables.
- Les rigidités de torsion et les efforts tranchants sont calculés en élasticité linéaire.
- Les contraintes normales dues à la torsion sont négligées (il n'y a pas d'effet de bi- moment).

I. 2. Étude d'une section droite d'un élément poutre :

La déformation normale longitudinale $\varepsilon(y, z)$ de la section d'un élément poutre en un point de coordonnées (y, z) , est donnée par :

$$\varepsilon(y, z) = \varepsilon_x + \phi_y Z + \phi_z Y \quad (1)$$

L'accroissement des sollicitations normales internes a la section droite due au béton et au profilé métallique, est donné par :

$$\{\Delta F_{mn}\} = \int_{(S_b + S_p)} E_m(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & yz \\ y & yz & y^2 \end{bmatrix} \cdot d(S_b + S_p) \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (2)$$

Où : E_m représente le module élastique longitudinal en un point courant de la section du béton ou d'un profilé métallique. S_b la section nette du béton et S_p la section du profilé ou des profilés métalliques appartenant à la section droite.

L'accroissement des sollicitations tangentes internes a la section droite due au béton et au profilé métallique, est donné par :

$$\{\Delta F_{mt}\} = \begin{bmatrix} G \cdot A_y & 0 & 0 \\ 0 & G \cdot A_z & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot J \end{bmatrix} \cdot \{\Delta \varepsilon_t\} \quad (3)$$

Où : $G.A_y$ et $G.A_z$ représente la rigidité de la section à l'effort tranchant dans le plan xy et xz respectivement, et $G.J$ la rigidité de la section à la torsion.

L'accroissement des sollicitations normales dues aux armatures passives, est donné par :

$$\{\Delta F_{an}\} = \sum_{i=1}^{Na} E_{ai} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{ai} & y_{ai} \\ z_{ai} & z_{ai}^2 & y_{ai} \cdot z_{ai} \\ y_{ai} & y_{ai} \cdot z_{ai} & y_{ai}^2 \end{bmatrix} \cdot A_{ai} \cdot \{\Delta \varepsilon_n\} \quad (4)$$

Où : E_{ai} représente le module élastique au niveau de l'armature passive d'ordre i .

La section d'un élément poutre est soumise à un accroissement de sollicitation extérieure qui est donné par :

$$\{\Delta F_{sn}\} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_y \\ \Delta M_z \end{Bmatrix} \text{ et } \{\Delta F_{st}\} = \begin{Bmatrix} \Delta T_y \\ \Delta T_z \\ \Delta M_{cx} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

L'équilibre de la section d'un élément poutre est exprimé par :

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta F_{mn} \\ \Delta F_{mt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta F_{an} \\ \Delta F_{at} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Le développement de l'équation d'équilibre (6), nous permet d'aboutir à la relation :

$$\begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{Bmatrix} = [K_s] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Avec :

$$[K_s] = \begin{bmatrix} [K_{mn}] + [K_{an}] & 0 \\ 0 & [K_{mt}] \end{bmatrix} \quad (8)$$

Où :

$$[K_{mn}] = \int_{(S_b+S_p)} E_m(y, z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & z^2 & y \cdot z \\ y & y \cdot z & y^2 \end{bmatrix} \cdot d(S_b + S_p) \quad (9)$$

$$[K_{an}] = \sum_{i=1}^{Na} E_{ai} \cdot \begin{bmatrix} 1 & z_{ai} & y_{ai} \\ z_{ai} & z_{ai}^2 & y_{ai} \cdot z_{ai} \\ y_{ai} & y_{ai} \cdot z_{ai} & y_{ai}^2 \end{bmatrix} \cdot A_{ai} \quad (10)$$

$$[K_{mt}] = \begin{bmatrix} G.A_y & 0 & 0 \\ 0 & G.A_z & 0 \\ 0 & 0 & G.J \end{bmatrix} \quad (11)$$

À l'équilibre de la section, l'accroissement de déformation est donné par :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_n \\ \Delta \varepsilon_t \end{Bmatrix} = [S_s] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta F_{sn} \\ \Delta F_{st} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Où : $[S_s] = [K_s]^{-1}$ représente la matrice de souplesse de la section.

I. 2.1. Algorithme d'équilibre de la section :

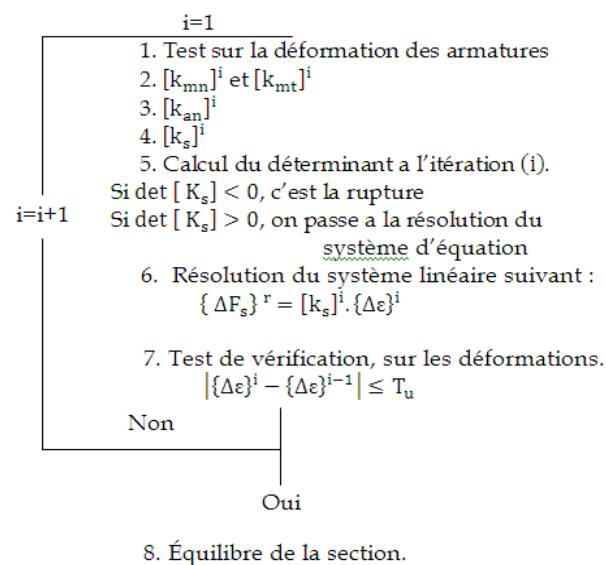


Fig. 1. Algorithme d'équilibre d'une section en béton armé ou mixte (acier-béton).

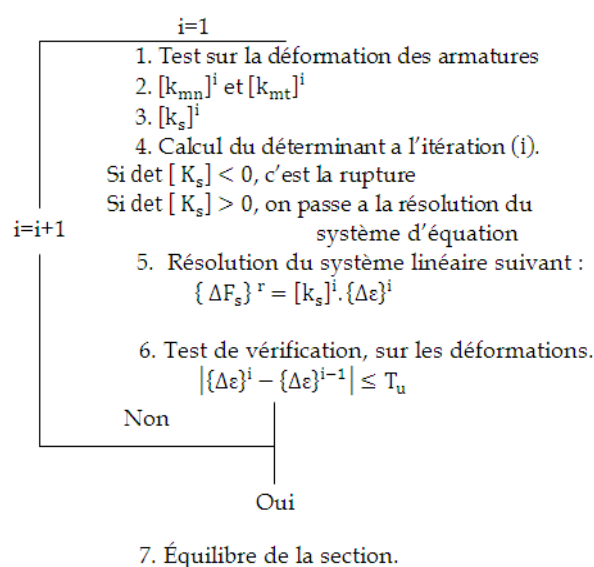


Fig. 2. Algorithme d'équilibre d'une section en profilé métallique.

I. 2.2. Organigramme de calcul :

L'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une section transversale en profilé métallique d'un élément poutre est le même que l'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une section d'un élément barre en profilé métallique défini au chapitre III (§ 3. 3.1.3).

I. 3. Matrice de rigidité d'un élément poutre en élasticité non linéaire :

La méthode de calcul non linéaire matérielle et géométrique, consiste d'abord à analyser l'état déformé de l'élément poutre dans le repère intrinsèque xyz lié à la position déformée de l'élément, dans l'hypothèse des petites déformations, des petits déplacements. Puis, à établir la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local, lié à la position initiale de l'élément, en tenant compte des effets du second ordre dus aux déplacements des nœuds (ces effets s'introduisent dans le passage des efforts et déplacements du repère intrinsèque xyz au repère local $x_0y_0z_0$). Enfin, à assembler la matrice de rigidité de la structure à partir des matrices de rigidité des éléments poutres définissant la structure, dans le repère absolu $OXYZ$. Le processus de calcul est décrit par les formulations suivantes :

$$[K_N]^{-1} = \int_0^L [L(x)]^T \cdot [K_S]^{-1} \cdot [L(x)] \cdot dx \quad (19)$$

L'intégration est effectuée par la règle de Simpson en considérant sur l'élément un certain nombre de sections de calcul dans lesquelles les matrices K_S sont déterminées à chaque étape.

Finalement, la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément, dans le repère intrinsèque OXYZ :

$$\{\Delta F_N\} = [K_N] \cdot \{\Delta S_N\} \quad (20)$$

$[K_N]$: Étant la matrice de rigidité tangente de l'élément dans le repère intrinsèque.

2. Formulation de la matrice de rigidité d'un élément poutre dans son repère local :

Les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère local $x_o y_o z_o$, sont :

$$\{F_L\} = (F_{ix_o}, F_{iy_o}, F_{iz_o}, M_{ix_o}, M_{iy_o}, M_{iz_o}, F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, M_{jx_o}, M_{jy_o}, M_{jz_o})^T \quad (21)$$

$$\{S_L\} = (u_i, v_i, w_i, \theta_{ix_o}, \theta_{iy_o}, \theta_{iz_o}, u_j, v_j, w_j, \theta_{jx_o}, \theta_{jy_o}, \theta_{jz_o})^T \quad (22)$$

Les sollicitations et les déplacements aux extrémités de l'élément dans le repère intermédiaire, sont :

$$\{F_U\} = (F_{jx_o}, F_{jy_o}, F_{jz_o}, M_{ix_o}, M_{iy_o}, M_{iz_o}, M_{jx_o}, M_{jy_o}, M_{jz_o})^T \quad (23)$$

$$\{S_U\} = (u, v, w, \theta_{ix_o}, \theta_{iy_o}, \theta_{iz_o}, \theta_{jx_o}, \theta_{jy_o}, \theta_{jz_o})^T \quad (24)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} u = u_j - u_i \\ v = v_j - v_i \\ w = w_j - w_i \end{cases} \quad (25)$$

Les relations qui lient les déplacements et les efforts dans ces deux repères, sont données par :

$$\{S_U\} = [T_0] \cdot \{S_L\} \quad (26)$$

$$\{F_L\} = [T_0]^T \cdot \{F_U\} \quad (27)$$

Avec :

$$[T_0] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

La relation entre les variations de déplacements dans les repères intrinsèques et intermédiaires, est :

$$\{\Delta S_N\} = [B].\{\Delta S_U\} \quad (29)$$

Et d'après le théorème des travaux virtuels :

$$\{\Delta F_U\} = [B]^T.\{\Delta F_N\} + [\Delta B]^T.\{F_N\} \quad (30)$$

Où : $[B]$: Matrice de transformation géométrique, s'écrit :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & V/L_0 & W/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ W/L_0^2 & 0 & 1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V/L_0^2 & -1/L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

et

$$[\Delta B]^T.\{F_N\} = [D].\{\Delta S_U\} \quad (32)$$

En se limitant au terme du premier ordre dans le développement, la série des dérivées secondes des termes de la matrice $[D]$, on obtient :

$$[D] = \begin{bmatrix} \left(\frac{-2.v.(M_{iz}+M_{jz})}{L_0^3} + \frac{2.w.(M_{iy}+M_{jy})}{L_0^3}\right) & \left(\frac{-v.N_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iz}+M_{jz})}{L_0^2}\right) & \left(\frac{-w.N_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iy}+M_{jy})}{L_0^2}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-v.N_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iz}+M_{jz})}{L_0^2}\right) & \left(\frac{N_j}{L_0} + \frac{2.v.(M_{iz}+M_{jz})}{L_0^3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-w.N_j}{L_0^2} + \frac{(M_{iy}+M_{jy})}{L_0^2}\right) & 0 & \left(\frac{N_j}{L_0} + \frac{2.v.(M_{iz}+M_{jz})}{L_0^3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ou :

$$[D] = \begin{bmatrix} \left(\frac{2 \cdot (v \cdot F_{jy0} + w \cdot F_{jz0})}{L_0^2} \right) & \left(\frac{-F_{jy0}}{L_0} \right) & \left(\frac{-F_{jz0}}{L_0} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-F_{jy0}}{L_0} \right) & \left(\frac{-F_{jx0}}{L_0} - \frac{(v \cdot F_{jy0} - w \cdot F_{jz0})}{L_0^2} \right) & 0 & \left(\frac{F_{jx0}}{L_0} + \frac{(v \cdot F_{jy0} - w \cdot F_{jz0})}{L_0^2} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-F_{jz0}}{L_0} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfin, la relation liant les accroissements d'efforts aux accroissements de déplacements des nœuds de l'élément dans le repère local :

$$\{\Delta F_L\} = [K_L] \cdot \{\Delta S_L\} \quad (33)$$

Où $[K_L]$: Matrice de rigidité systémique (12x12), de l'élément poutre dans le repère local, définie par :

$$[K_L] = [T_0]^T \cdot ([B]^T \cdot [K_N] \cdot [B] + [D]) \cdot [T_0] \quad (34)$$

3. Formulation de la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le repère absolu :

La rotation spatiale du repère absolu OXYZ donnant le repère local $x_0y_0z_0$ d'un élément, peut-être décomposé en trois rotations simples d'angles α, β, γ . La matrice de passage $[R_0]$ est composée de trois matrices orthogonales $[R_\alpha], [R_\beta]$ et $[R_\gamma]$. Les incréments des efforts et des déplacements dans le repère absolu sont donnés respectivement par :

$$\{\Delta F_X\} = (\Delta F_{ix}, \Delta F_{iy}, \Delta F_{iz}, \Delta M_{ix}, \Delta M_{iy}, \Delta M_{iz}, \Delta F_{jx}, \Delta F_{jy}, \Delta F_{jz}, \Delta M_{jx}, \Delta M_{jy}, \Delta M_{jz})^T \quad (35)$$

$$\{\Delta S_X\} = (\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i, \Delta \zeta_i, \Delta \zeta_i, \Delta \zeta_i, \Delta X_j, \Delta Y_j, \Delta Z_j, \Delta \zeta_j, \Delta \zeta_j, \Delta \zeta_j)^T \quad (36)$$

La relation liant la variation de ces grandeurs dans les deux systèmes, est donnée par :

$$\{\Delta S_L\} = [RT] \cdot \{\Delta S_X\} \quad (37)$$

$$\{\Delta F_X\} = [RT]^T \cdot \{\Delta F_L\} \quad (38)$$

Avec :

$$[RT] = \begin{bmatrix} [R_0] & o & o & o \\ o & [R_0] & o & o \\ o & o & [R_0] & o \\ o & o & o & [R_0] \end{bmatrix} \quad (39)$$

Où :

$$[R_0] = [R_\alpha] \cdot [R_\beta] \cdot [R_\gamma] \quad (40)$$

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, [R_\beta] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [R_\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

La relation liant les accroissements d'efforts et les accroissements de déplacements aux extrémités d'un élément poutre dans le repère absolu OXYZ, lié à la structure :

$$\{\Delta F_X\} = [K_X].\{\Delta S_X\} \quad (41)$$

Avec : $[K_X]$: Matrice de rigidité (12x12) d'un élément dans le repère absolu OXYZ,

$$[K_X] = [RT]^T . [K_L] . [RT] \quad (42)$$

I. 3.1. Algorithme d'équilibre de la structure :

L'algorithme de la recherche de l'état d'équilibre de la structure en béton armé, métallique et mixte, est le même que l'algorithme de la recherche de l'état d'équilibre d'une structure en treillis définit au chapitre III (§3. 3.2.2.).

I. 3.2. Organigramme de calcul :

L'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre de la structure en béton armé, métallique et mixte, est le même que l'organigramme de la recherche de l'état d'équilibre d'une structure en treillis définit au chapitre III (§3. 3.2.3.).

ANNEXE II

PRÉSENTATION DU PROGRAMME DE CALCUL DES STRUCTURES EN
ÉLASTICITÉ NON LINÉAIRE**II. 1. Introduction :**

Afin de permettre l'étude du comportement des ossatures spatiales soumises a un chargement instantané jusqu'à la ruine, un logiciel de calcul de structures tridimensionnelles écrit en fortran 90, a été développé par les références [52], [15], [18], [06] à partir des travaux de [01] et [10]. Notre intervention réside dans une première étape à l'introduction du calcul non linéaire d'un élément barre (treillis), puis dans la modification et l'ajout de certaines sousroutines afin de tenir compte des sections mixtes (acier - béton) et en profilé métallique et de leurs lois de comportement. Le code de calcul est constitué d'un programme principal et des sousroutines, l'ensemble de ces données et résultats sont présentés sous forme de fichier texte.

II. 2. Structure générale du programme :**II. 2.1. Description des différentes sousroutines :**

Dans ce qui suit, en décrit brièvement les différentes sousroutines constituant le programme 3D :

- **Subroutine SSNOLI** : Analyse incrémentale pas a pas du chargement de la structure jusqu'à la ruine.
- **Subroutine RISEEL** : Formation de la matrice de rigidité de l'élément dans le repère local.
- **Subroutine SECTION** : Étude de l'équilibre de la section.
- **Subroutine RISESE** : Calcul de la matrice de rigidité de la section en béton armé et/ou précontraint.
- **Subroutine RISESEM** : Calcul de la matrice de rigidité de la section en profilé métallique.
- **Subroutine RISESEMIXT** : Calcul de la matrice de rigidité de la section mixte.
- **Subroutine COOR** : Calcul des coordonnées des nœuds ainsi que les angles de rotation des éléments par rapport au repère de la structure, et la vérification des longueurs des éléments.

- **Subroutine FORMB** : Formation de la matrice $[B]$.
- **Subroutine FORMD** : Formation de la matrice $[D]$.
- **Subroutine FORML** : Formation de la matrice $[L(x)]$.
- **Subroutine FORMT** : Construire la matrice de passage $[T_0]$ du repère intrinsèque au repère local.
- **Subroutine ROTATION** : Construire la matrice de passage $[RT]$ du repère intrinsèque au repère absolu.
- **Subroutine CHARTO** : Effectuant la distribution des charges sur les nœuds.
- **Subroutine BACSUB** : Résoudre le système linéaire $\{P\} = [K].\{U\}$, routine effectuant la méthode de substitution $[A].\{X\} = \{B\}$.
- **Subroutine CHARGE** : Construit le vecteur des charges extérieures.
- **Subroutine CONDLIM** : Prenant en compte des conditions aux limites.
- **Subroutine FORMR** : Assemble les matrices de rigidité des éléments poutres et/ou barres (repère absolu) pour former la matrice de rigidité de la structure.
- **Subroutine REPRI** : Calcul des caractéristiques des sections en béton armé et/ou précontraint dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine REPRIM** : Calcul des caractéristiques des sections en profilé métallique dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine REPRIMIXT** : Calcul des caractéristiques des sections mixtes (aciers-béton) dans leur repère intrinsèque.
- **Subroutine CARRACT** : Préparation des données des sections et câbles de précontrainte.
- **Subroutine PERTE** : Calcul des pertes de précontrainte dans les câbles intérieurs.
- **Subroutine PASSAGE** : Calcul les points de passage du câble de précontrainte dans les sections de calcul.
- **Subroutine POIDP** : Effectuant la distribution du poids propre sur les nœuds de la structure.

- **Subroutine VADELO** : Calcul des déplacements d'un élément poutre spatiale dans le repère local à partir des déplacements des nœuds dans le repère absolu.
- **Subroutine NULL** : Sous programme annulant les termes d'une matrice.
- **Subroutine ASSEMB** : Assemblage de la matrice de rigidité élémentaire.
- **Subroutine FORMT1** : Routine calculant la matrice $[T_1]$.

II. 2.2. Présentation du fichier de données :

Les données sont introduites par lignes, les valeurs sont séparées par un blanc ou une virgule, les données sont ainsi lues :

1) Lecture d'un titre de fichier de données

2) Lecture des données relatives à la structure

NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC ELMENT CH (1 ligne)

3) POIB(I) POIS(I)

4) Introduction des coordonnées de chaque nœud I dans le repère absolu.

$i= 1, \text{NBNOEU}$

K, (COORD (k,j), j=1,3)

K numéro d'un nœud

5) Lecture de la connectivité

k, (FCON(k,j), j=1,2)

6) Introduction des conditions d'appuis

$I= 1, \text{NIMP}$

NIMP nombre de type d'appuis

XNUM(I), (COMP(XNUM(I),j),j=1,6)

NIMP = numéro du nœud avec déplacement imposé

XNUM(I)= indice qui caractérise si une composante de déplacement est libre ou bien bloquée.

Direction suivante : X, Y, Z

(COMP(XNUM(I),j), j=1,6) $\begin{cases} 1 & \text{appui bloquée} \\ 0 & \text{appui libre} \end{cases}$

7) Chargement

NBCF, NBCV (chargement fixe et le chargement variable).

8) Lecture des données relatives à la section dans le repère générique

SI CH = 1 :

NBTRA(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i)

SI CH = 2 :

NAM(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i)

SI CH = 3 :

NBTRA(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i) NAM(i)

oordzi(I,J) oordzs(i,j)

Absyi1(I,J) Absyi2(i,j)

absys1(I,J) absys2(i,j)

SSEM(I) EEAM(I) EEPSUM(I) SSRM(I) KKS(I)

FFE(I) FFT(I) EEC(I) RRB(I) RRC(I)

EEPSRT(I) EEPSO(I) EEPSCU(I)

SSE(I) EES(I) EEPSU(I) SSR(I) KKS(I)

9) Coordonnées des aciers passifs par rapport au repère générique dans la section

(VVIY(I,IES), IES=1,NNS(i))

(VVIZ(I,IES), IES=1,NNS(i))

(AAS(I,IES), IES=1,NNS(i))

10) Introduction de la précontrainte

AAP(I) SSP(I) EEP(I) EEPSUP(I) SSPR(I) TTI(I) KKP(I)

11) Introduction des points de passage des câbles dans les sections d'extrémité de l'élément

ZC1(IL,J) ZC2(IL,J)

YC1(IL,J) YC2(IL,J)

XC1(IL,J) XC2(IL,J)

12) Introduction de l'angle que fait le câble avec l'axe des x

(ANGP(IL,J), J=1,NPI)

ANGP : c'est l'angle de l'élément, et NPI c'est le nombre de câble

PFI PSI Sigmoid ITP

II. 2.3. Description des variables du fichier de données :

1. NBNOEU NEL NTYPE NPI NIMP ISEC ELEMENT CH

NBNOEU = nombre de nœuds,

NEL = nombre d'éléments,
 NTYPE = nombre de types de sections,
 NPI = nombre de câble de précontraintes,
 NIMP = nombre de nœuds d'appuis,
 ISEC = nombre de section par élément,
 ELMENT = 1 : élément poutre,
 2 : élément barre de treillis.
 CH = 1 : section homogène (béton armé et/ou précontraint),
 2 : section pleine (profilé métallique),
 3 : section mixte (béton armé et profilé métallique).

2. BRUTE (i) $i=1, NEL$

3. K Coord(K,j) $j=1,3$

K = numéro du nœud ($K=1, NBNOEU$),
 Coord = coordonnées des nœuds.

4. K Connec (k, j) $j=1, 2$

K = numéro de l'élément,
 Connec = vecteur véhiculant la connectivité de l'élément.

5. NUM (i) Comp (i, j) $j=1, 6$ et $i=1, Nimp$

Num = numéro du nœud d'appui (dans la liste des nœuds d'appuis),
 i = indice du nœud (dans la liste des nœuds d'appuis),
 j = indice composant (1/ox , 2/oy, 3/oz, 4 rotation suivant x, 5 rotation suivant y,
 6 rotation suivant z),
 Comp = indice de la composante : = 1, appui imposé, = 0, appuis libre,

6. NNCF NNCV

NNCF = nombre de nœuds chargés dans le chargement fixe (P0),
 NNCV = nombre de nœuds chargés dans le chargement variable (P1).

7. NUN (i) FFIX (i,j)

NUN = numéro du nœud chargé par le chargement P0 (dans la liste des nœuds),
 $i=1, NNCF$

i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P0)),
 Force0 (i, j) $j=1$ Composante selon Ox de l'effort appliqué au nœud i,
 $j=2$ Composante selon Oy de l'effort appliqué au nœud i,
 $j=3$ Composante selon Oz de l'effort appliqué au nœud i,
 $j=4$ Composante couple Oy , Oz de l'effort appliqué au nœud i,
 $j=5$ Composante couple Ox , Oz de l'effort appliqué au nœud i,
 $j=6$ Composante couple Ox , Oy de l'effort appliqué au nœud i.

8. NON (i) FVAT (i, j) $j=1,6$

NON = numéro du nœud chargé par le chargement (P1) (dans la liste des nœuds),

$i=1, NNCV$

i = indice des nœuds (dans la liste des nœuds chargés par (P1)),

force1 (i, j) $j=1$ Composante selon O_x de l'effort appliqué au nœud i ,
 $j=2$ Composante selon O_y de l'effort appliqué au nœud i ,
 $j=3$ Composante selon O_z de l'effort appliqué au nœud i ,
 $j=4$ Composante couple O_y, O_z de l'effort appliqué au nœud i ,
 $j=5$ Composante couple O_x, O_z de l'effort appliqué au nœud i ,
 $j=6$ Composante couple O_x, O_y de l'effort appliqué au nœud i .

9. DALPO TOLP

DALPO = Pas d'accroissement du coefficient de chargement,

TOLP= tolérance.

Entre deux étapes consécutives, est augmenté de DALPO, en cas de divergence, DALPO est divisé par 2. Le calcul est arrêté lorsque $DALPO < TOLP$

Les phases qui vont suivre de 10 a 18 sont répétées NTYPE fois ($i=1, NTYPE$)

10. SI CH = 1 :

NBTRA(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i)

SI CH = 2 :

NAM(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i)

SI CH = 3 :

NBTRA(i) NNS (i) TTPE (i) NCABI(i) NAM(i)

NBTRA(i) = nombre de trapèzes de béton,
 NNS(i) = nombre de lits d'armatures passives,
 TTPE(i) = type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis),
 NCABI(i) = nombre de câbles de précontrainte.
 NAM (i) = nombre de trapèzes de profil en acier,

11. oordzi (i,j), oordzs(i,j) Absyi1(i,j),Absyi2(i,j) absys1(i,j),absys2(i,j)
 oordzi (i,j)= ordonnée inférieure de trapèze,
 oordzs(i,j)= ordonnée supérieure de trapèze,
 Absyi1 (i,j)= la première abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y ,
 Absyi2 (i,j)= le deuxième abscisse inférieure de trapèze suivant l'axe y ,
 absys1(i,j)= la première abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y ,
 absys2(i,j)= le deuxième abscisse supérieure de trapèze suivant l'axe y .

12. SSEM(i) EEAM(i) EEPsum(i) SSRM(i) KKS(i)

SSEM(i)= σ_{em} : Limite élastique du profil acier,
 EEAM(i)= E_{am} : Module de Young du profil acier,
 EEPsum(i)= déformation de rupture du profil acier,
 SSRM(i) = contrainte de rupture du profil acier,
 KKS(i) : Type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis).

13. FFE(I) FFT(I) EEC(I) RRB(I) RRC(I)

FFE(i)= f_{cj} : contrainte maximale de compression du béton,

FFT(i)= f_{tj} : contrainte maximale de traction du béton,

EEC(i) = E_b : Module de Young élastique du béton,

RRB(i) = Paramètre caractérisant la branche ascendante de la loi de SARGIN,

RRC(i)= Paramètre caractérisant la branche descendante de la loi de SARGIN.

14. EEPSRT (i) EEPSO (i) EEPSCU (i)

EEPSRT(i)= déformation de rupture en traction,

EEPSO(i)= déformation du pic en compression,

EEPSCU(i)= déformation ultime de rupture en compression.

15. SSE(i) EES(i) EEPSU(i) SSR(i) KKS(i)

SSE(i)= σ_e : Limite élastique de l'acier passif,

EES(i)= E_a : Module de Young de l'acier passif,

EEPSU(i)= déformation de rupture (10%),

SSR(i) = contrainte de rupture (Acier Écrouis),

KKS(i) : Type d'acier (1 : Naturel, 2 : Écrouis).

16. (VVIY(I,IES),IES=1,NNS(i)) (VVIZ(I,IES),IES=1,NNS(i))

VVIY(I,IES) = cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oy,

VVIZ(I,IES) = cote de lit d'acier passif par rapport à l'axe de référence oz.

17. (AAS (I, IES), IES=1, NNS (i))

AAS (I, ies)= Aire du lit d'acier passif.

18. COMP (I), (I=1, INI=NEL*Ntype)

COMP(I)= Numéro de la section de l'élément (I).

Si la section est précontrainte on aura :

19. AAP(I) SSP(i) EEP(i) EEPSUP(i) SSRP(i) TTI(i) KKP(i)

AAP(I) = la section d'armatures de précontrainte,

SSP(i) = limite élastique de l'acier actif,

EEP(i) = module élastique de l'acier actif,

EEPSUP(i) = déformation de l'acier actif,

SSRP(i) = contrainte de rupture,

TTI(i) = tension initial du câble,

KKP(i) = 1 pour section précontrainte; =0 pour section non précontrainte.

I=1, NPI

20. ZC1(IL,J),ZC2(IL,J) YC1(IL,J),YC2(IL,J) XC1(IL,J),XC2(IL,J)

ZC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz),

ZC2(IL,J) = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oz),

YC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy),

YC2(IL,J) = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe oy),

XC1(IL,J) = ordonnée initiale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox),

$XC2(IL,J)$ = ordonnée finale du câble d'ordre j dans l'élément il (suivant l'axe ox).

21. $ALPHAC(IL,J)$, $j=1,NPI$; $IL=1,NEL$

Angle que fait la ligne moyenne du câble d'ordre j avec l'axe horizontal de la section.

22. PFI PSI SIGMO ITP

PFI = perte par frottement du câble,

PSI = perte de la ligne du câble,

SIGMO = contrainte de rupture,

ITP = mode de traction du câble.

- **Exemple de la mise en donnée :**

Exemple 1 : Poutre isostatique à sections mixtes PI1

```

5 4 2 0 2 5      1 3
4.19168 0.3
4.19168 0.3
4.19168 0.3
4.19168 0.3

      1      0.000      0.000  0.000
      2      1.875      0.000  0.000
      3      3.750      0.000  0.000
      4      5.625      0.000  0.000
      5      7.500      0.000  0.000
      1          1          2
      2          2          3
      3          3          4
      4          4          5
      1 1 1 1 1 0 0
      5 0 1 1 1 0 0
      0 1
      3 0 0 -1 0 0 0

113 0.5
2 1 1 0 3
0. 0.02
0. 0.300
0. 0.300
0.02 0.82
0.148 0.152
0.148 0.152
0.82 0.84
0. 0.300
0. 0.300

0.84 0.89
-0.45 0.750
-0.45 0.750
0.89 0.94
-0.45 0.750
-0.45 0.750

240000 210000000 0.03428 360000 1

30000 2400 30000000 2 0.
-.002 .0028 .004
400000 210000000 0.019 440000 1
0.055 0.055
0.86 0.92
0.0012064 0.0012064

2 1 1 0 3
0. 0.02
0. 0.300
0. 0.300
0.02 0.82
0.138 0.152
0.138 0.152
0.82 0.84
0. 0.300

```

```

0. 0.300

0.84 0.89
-0.45 0.750
-0.45 0.750
0.89 0.94
-0.45 0.750
-0.45 0.750

240000 210000000 0.03428 360000 1

30000 2400 30000000 2 0.
-.002 .0028 .004
400000 210000000 0.019 440000 1
0.055 0.055
0.86 0.92
0.0012064 0.0012064

1
1
1
1
1
2
1
1
1
1
1
1
2
2
1
1
1
1
1
2
1
1
1
1

```

Exemple 2 : Poutre treillis plane

```

7 10 10 0 7 3      2 2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
0. 0.2
1      1.000      0.000      0.000
2      0.000      0.000      1.000
3      1.000      0.000      1.000
4      2.000      0.000      1.000
5      2.000      0.000      0.500
6      2.000      0.000      0.000
7      3.000      0.000      1.000
      1      1      2
      2      2      3
      3      3      4
      4      3      1
      5      1      4
      6      1      6
      7      4      5
      8      5      6
      9      4      7
     10     6      7
1 0 0 0 1 1 1
2 1 1 1 1 0 0
3 0 0 0 1 1 1
4 0 0 0 1 1 1
5 0 0 0 1 1 1
6 0 0 0 1 1 1
7 0 1 1 1 0 0

```

```
0 1
3 0 0 -1 0 0 0
15 0.01
7 0 1 0
0. 0.0065
0. 0.044
0. 0.044
0.0065 0.013
0. 0.0065
0. 0.0065
0.013 0.0195
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0195 0.026
0. 0.0065
0. 0.0065
0.026 0.0325
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0325 0.039
0. 0.0065
0. 0.0065
0.039 0.044
0. 0.0065
0. 0.0065
285400 214000000 0.05 313940 1
```

```
8 0 2 0
0. 0.02
0. 0.076
0. 0.076
0.02 0.04
0. 0.076
0. 0.076
0.04 0.06
0. 0.076
0. 0.076
0.06 0.08
0. 0.076
0. 0.076
0.08 0.10
0. 0.076
0. 0.076
0.10 0.12
0. 0.076
0. 0.076
0.12 0.14
0. 0.076
0. 0.076
0.14 0.152
0. 0.076
0. 0.076
285400 214000000 0.05 313940 1
```

```
8 0 3 0
0. 0.02
0. 0.076
0. 0.076
0.02 0.04
0. 0.076
0. 0.076
0.04 0.06
0. 0.076
0. 0.076
0.06 0.08
0. 0.076
0. 0.076
0.08 0.10
0. 0.076
0. 0.076
0.10 0.12
0. 0.076
0. 0.076
0.12 0.14
0. 0.076
0. 0.076
0.14 0.152
```

0. 0.076
0. 0.076
285400 214000000 0.05 313940 1

14 0 4 0
0. 0.0065
0. 0.089
0. 0.089
0.0065 0.013
0. 0.0065
0. 0.0065
0.013 0.0195
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0195 0.026
0. 0.0065
0. 0.0065
0.026 0.0325
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0325 0.039
0. 0.0065
0. 0.0065
0.039 0.044
0. 0.0065
0. 0.0065
0.044 0.0505
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0505 0.057
0. 0.0065
0. 0.0065
0.057 0.0635
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0635 0.070
0. 0.0065
0. 0.0065
0.070 0.0765
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0765 0.083
0. 0.0065
0. 0.0065
0.083 0.089
0. 0.0065
0. 0.0065
285400 214000000 0.05 313940 1

4 0 5 0
0. 0.0065
0. 0.044
0. 0.044
0.0065 0.013
0. 0.0065
0. 0.0065
0.013 0.0195
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0195 0.025
0. 0.0065
0. 0.0065
285400 214000000 0.05 313940 1

8 0 6 0
0. 0.02
0. 0.076
0. 0.076
0.02 0.04
0. 0.076
0. 0.076
0.04 0.06
0. 0.076
0. 0.076
0.06 0.08
0. 0.076
0. 0.076

0.08 0.10
0. 0.076
0. 0.076
0.10 0.12
0. 0.076
0. 0.076
0.12 0.14
0. 0.076
0. 0.076
0.14 0.152
0. 0.076
0. 0.076
285400 214000000 0.05 313940 1

5 0 7 0
0. 0.0065
0. 0.044
0. 0.044
0.0065 0.013
0. 0.005
0. 0.005
0.013 0.0195
0. 0.005
0. 0.005
0.0195 0.026
0. 0.005
0. 0.005
0.026 0.032
0. 0.005
0. 0.005
285400 214000000 0.05 313940 1

5 0 8 0
0. 0.0065
0. 0.044
0. 0.044
0.0065 0.013
0. 0.005
0. 0.005
0.013 0.0195
0. 0.005
0. 0.005
0.0195 0.026
0. 0.005
0. 0.005
0.026 0.032
0. 0.005
0. 0.005
285400 214000000 0.05 313940 1

8 0 9 0
0. 0.02
0. 0.076
0. 0.076
0.02 0.04
0. 0.076
0. 0.076
0.04 0.06
0. 0.076
0. 0.076
0.06 0.08
0. 0.076
0. 0.076
0.08 0.10
0. 0.076
0. 0.076
0.10 0.12
0. 0.076
0. 0.076
0.12 0.14
0. 0.076
0. 0.076
0.14 0.152
0. 0.076
0. 0.076
285400 214000000 0.05 313940 1

```

4 0 10 0
0. 0.0065
0. 0.044
0. 0.044
0.0065 0.013
0. 0.0065
0. 0.0065
0.013 0.0195
0. 0.0065
0. 0.0065
0.0195 0.025
0. 0.0065
0. 0.0065
285400 214000000 0.05 313940 1

```

```

1
1
1
2
2
2
3
3
3
4
4
4
5
5
5
6
6
6
7
7
7
8
8
8
9
9
9
10
10
10

```

II. 2.4. Présentation du fichier Résultats :

À la fin du calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Charges extérieures appliquées aux nœuds (repère absolu)
- X - Charge selon X.
- Y - Charge selon Y.
- Z - Charge selon Z.
- M - Moment dans le plan X-Y, X-Z et Y-Z.
- Déplacement des nœuds (repère absolu)
- U - Déplacement selon X.
- V - Déplacements selon Y.
- W - Déplacement selon Z.
- ROT- Rotation autour de l'axe X, Y et Z.

Conventions de signes :

- Les charges sont comptées positives vers les x ou les z ou les y positifs.
- Les moments sont positifs dans le sens trigonométrique.

- Le pas DALP pour l'accroissement de coefficient de chargement sera, en général, choisi de l'ordre du 1/10 de la valeur ultime prévue de ALP et est sans dimension.

UNITES :

Elles sont imposées comme suit :

- Les longueurs = $[m]$.
- Les aires = $[m^2]$.
- Les forces = $[KN]$.
- Les contraintes = $[KN/m^2]$.
- Les moments = $[KN.m]$.

ANNEXE III

ÉLABORATION D'UN PROGRAMME DE CALCUL DE LA FIABILITÉ DES
STRUCTURES**III. 1. Introduction :**

Afin de faire un calcul fiabiliste nous avons élaboré un programme écrit en fortran 90 à partir de [36], dont on a introduit l'algorithme de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) décrit par LEMAIRE [30].

III. 2. Structure générale du programme :**III. 2.1. Description des différentes sous-routines :**

Dans ce qui suit, on décrit brièvement les différentes sous-routines constituant le programme de fiabilité :

- **Subroutine INPT** : L'entrée est lue à partir <nomfichier>.DAT, qui est préparé à l'avance.
- **Subroutine EL2SRCH** : Une boucle de recherche qui minimise l'indice de fiabilité par l'algorithme d'optimisation de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF).
- **Subroutine OUTPT** : Imprime les valeurs finales de chaque variable aléatoire (indice de fiabilité, les coordonnées du point de conception, les cosinus directeurs).
- **Subroutine FAIL** : Permet d'introduire la fonction de défaillance $g(X)$ (obtenue par surface de réponse analytique) et sa dérivée partielle.
- **Subroutine DIST** : Permet d'évaluer la densité de probabilité et la densité de probabilité cumulée d'une distribution : Weibull, Gumbel, Frechet. Quant aux distributions normales, lognormale et exponentielle sont gérées dans une boucle de recherche.

III. 2.2. Présentation du fichier de données :

Les données sont entrées par lignes entre les guillemets simples et sont séparées soit par des virgules ou des espaces, les données sont ainsi lues :

<classe>, <type>, <mean>, <std dev>, <min>, <nom>

Remarque :

Les données introduites sur le fichier de données qui a été décrit ci-dessus sont répétées n fois ($i=1, n$), où n représente le nombre de variables aléatoire.

III. 2.3. Description des variables du fichier de données :

1) <classe> défini par une variable caractère de dimension deux, est représenté par le caractère 'RE' ou 'LO', où :

'RE' représente une variable de résistance et 'LO' désigne une variable de charge.

2) <type> défini par une variable caractère de dimension deux, est représenté par le caractère 'NO' ou 'LO' ou 'WE' ou 'GU' ou 'FR'.

Ceci spécifie le type de distribution, où :

'NO' , 'LO' , 'WE' , 'GU' , 'FR' , 'EX' désignent : lois Normale, Lognormale, Weibull, Gumbel, Frechet et Exponentielle respectivement.

3) <mean> défini par une variable réelle, qui représente la valeur moyenne,

4) <std dev> défini par une variable réelle, qui représente l'écart-type,

5) <min> défini par une variable réelle, qui représente la limite inférieure (ce qui doit être inclus, mais seront ignorées pour les distributions qui ont que leur limite inférieure),

6) <name> défini par une variable caractère de dimension quatre, qui est représenté par le caractère 'RESI' ou 'LOAD'. Ce sont des noms de variables pour distinguer entre les résistances et les charges.

À la fin de chaque fichier d'entrée on introduit la variable caractère 'ST' de dimension deux pour terminer les calculs.

- Exemple de la mise en donnée :

Exemple 2 : Poutre treillis plane, Cas 1 (Normale, Normale)

```
'LO' 'NO' 45. 32.4037035 0. 'LOAD'
'RE' 'NO' 0.00463588 0.00419236 0. 'RESI'
'ST'
```

III. 2.4. Présentation du fichier résultats :

À la fin du calcul les résultats obtenus sont les suivants :

- Indice de fiabilité d'Hasofer-Lind.
- Les cosinus directeurs de chaque variable aléatoire.
- Les coordonnées du point de conception dans l'espace centré réduit et dans l'espace physique.

ANNEXE IV

Tableau permettant de trouver $\Phi(-\beta)$ à partir de la valeur de β

$$\Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta)$$

β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$	β	$\Phi(-\beta)$
0.00	0.5000	0.40	0.3446	0.80	0.2119
0.01	0.4960	0.41	0.3409	0.81	0.2090
0.02	0.4920	0.42	0.3372	0.82	0.2061
0.03	0.4880	0.43	0.3336	0.83	0.2033
0.04	0.4841	0.44	0.3300	0.84	0.2005
0.05	0.4801	0.45	0.3264	0.85	0.1977
0.06	0.4761	0.46	0.3228	0.86	0.1949
0.07	0.4721	0.47	0.3192	0.87	0.1922
0.08	0.4681	0.48	0.3156	0.88	0.1894
0.09	0.4642	0.49	0.3121	0.89	0.1867
0.10	0.4602	0.50	0.3085	0.90	0.1841
0.11	0.4562	0.51	0.3050	0.91	0.1814
0.12	0.4522	0.52	0.3015	0.92	0.1788
0.13	0.4483	0.53	0.2981	0.93	0.1762
0.14	0.4443	0.54	0.2948	0.94	0.1736
0.15	0.4404	0.55	0.2912	0.95	0.1711
0.16	0.4364	0.56	0.2877	0.96	0.1685
0.17	0.4325	0.57	0.2843	0.97	0.1660
0.18	0.4286	0.58	0.2810	0.98	0.1635
0.19	0.4247	0.59	0.2776	0.99	0.1611
0.20	0.4207	0.60	0.2743	1.00	0.1587
0.21	0.4168	0.61	0.2709	1.01	0.1563
0.22	0.4129	0.62	0.2676	1.02	0.1539
0.23	0.4091	0.63	0.2644	1.03	0.1515
0.24	0.4052	0.64	0.2611	1.04	0.1492
0.25	0.4013	0.65	0.2579	1.05	0.1469
0.26	0.3974	0.66	0.2546	1.06	0.1446
0.27	0.3936	0.67	0.2514	1.07	0.1423
0.28	0.3897	0.68	0.2483	1.08	0.1401
0.29	0.3859	0.69	0.2451	1.09	0.1379
0.30	0.3821	0.70	0.2420	1.10	0.1357
0.31	0.3783	0.71	0.2389	1.11	0.1335
0.32	0.3745	0.72	0.2358	1.12	0.1314
0.33	0.3707	0.73	0.2327	1.13	0.1292
0.34	0.3669	0.74	0.2297	1.14	0.1271
0.35	0.3632	0.75	0.2266	1.15	0.1251
0.36	0.3594	0.76	0.2236	1.16	0.1230
0.37	0.3557	0.77	0.2207	1.17	0.1210
0.38	0.3520	0.78	0.2177	1.18	0.1190
0.39	0.3483	0.79	0.2148	1.19	0.1170

1.20	0.1151	1.80	0.3593E-01	2.40	0.8198E-02
1.21	0.1131	1.81	0.3515E-01	2.41	0.7976E-02
1.22	0.1112	1.82	0.3438E-01	2.42	0.7760E-02
1.23	0.1094	1.83	0.3363E-01	2.43	0.7550E-02
1.24	0.1075	1.84	0.3289E-01	2.44	0.7344E-02
1.25	0.1057	1.85	0.3216E-01	2.45	0.7143E-02
1.26	0.1038	1.86	0.3144E-01	2.46	0.6947E-02
1.27	0.1020	1.87	0.3074E-01	2.47	0.6756E-02
1.28	0.1003	1.88	0.3005E-01	2.48	0.6569E-02
1.29	0.9853E-01	1.89	0.2938E-01	2.49	0.6387E-02
1.30	0.9680E-01	1.90	0.2872E-01	2.50	0.6210E-02
1.31	0.9510E-01	1.91	0.2807E-01	2.51	0.6037E-02
1.32	0.9342E-01	1.92	0.2743E-01	2.52	0.5868E-02
1.33	0.9176E-01	1.93	0.2680E-01	2.53	0.5703E-02
1.34	0.9013E-01	1.94	0.2619E-01	2.54	0.5543E-02
1.35	0.8851E-01	1.95	0.2559E-01	2.55	0.5386E-02
1.36	0.8692E-01	1.96	0.2500E-01	2.56	0.5234E-02
1.37	0.8535E-01	1.97	0.2442E-01	2.57	0.5085E-02
1.38	0.8380E-01	1.98	0.2385E-01	2.58	0.4940E-02
1.39	0.8227E-01	1.99	0.2330E-01	2.59	0.4799E-02
1.40	0.8076E-01	2.00	0.2275E-01	2.60	0.4661E-02
1.41	0.7927E-01	2.01	0.2222E-01	2.61	0.4527E-02
1.42	0.7781E-01	2.02	0.2169E-01	2.62	0.4397E-02
1.43	0.7636E-01	2.03	0.2118E-01	2.63	0.4269E-02
1.44	0.7494E-01	2.04	0.2068E-01	2.64	0.4145E-02
1.45	0.7353E-01	2.05	0.2018E-01	2.65	0.4025E-02
1.46	0.7215E-01	2.06	0.1970E-01	2.66	0.3907E-02
1.47	0.7078E-01	2.07	0.1923E-01	2.67	0.3793E-02
1.48	0.6944E-01	2.08	0.1876E-01	2.68	0.3681E-02
1.49	0.6811E-01	2.09	0.1831E-01	2.69	0.3573E-02
1.50	0.6681E-01	2.10	0.1786E-01	2.70	0.3467E-02
1.51	0.6552E-01	2.11	0.1743E-01	2.71	0.3364E-02
1.52	0.6426E-01	2.12	0.1700E-01	2.72	0.3264E-02
1.53	0.6301E-01	2.13	0.1659E-01	2.73	0.3167E-02
1.54	0.6178E-01	2.14	0.1618E-01	2.74	0.3072E-02
1.55	0.6057E-01	2.15	0.1578E-01	2.75	0.2980E-02
1.56	0.5938E-01	2.16	0.1539E-01	2.76	0.2890E-02
1.57	0.5821E-01	2.17	0.1500E-01	2.77	0.2803E-02
1.58	0.5706E-01	2.18	0.1463E-01	2.78	0.2718E-02
1.59	0.5592E-01	2.19	0.1426E-01	2.79	0.2635E-02
1.60	0.5480E-01	2.20	0.1390E-01	2.80	0.2555E-02
1.61	0.5370E-01	2.21	0.1355E-01	2.81	0.2477E-02
1.62	0.5262E-01	2.22	0.1321E-01	2.82	0.2401E-02
1.63	0.5156E-01	2.23	0.1287E-01	2.83	0.2327E-02
1.64	0.5050E-01	2.24	0.1255E-01	2.84	0.2256E-02
1.65	0.4947E-01	2.25	0.1222E-01	2.85	0.2186E-02
1.66	0.4846E-01	2.26	0.1191E-01	2.86	0.2118E-02
1.67	0.4746E-01	2.27	0.1160E-01	2.87	0.2052E-02
1.68	0.4648E-01	2.28	0.1130E-01	2.88	0.1988E-02
1.69	0.4552E-01	2.29	0.1101E-01	2.89	0.1926E-02
1.70	0.4457E-01	2.30	0.1072E-01	2.90	0.1866E-02
1.71	0.4363E-01	2.31	0.1044E-01	2.91	0.1807E-02
1.72	0.4272E-01	2.32	0.1017E-01	2.92	0.1750E-02
1.73	0.4182E-01	2.33	0.9903E-02	2.93	0.1695E-02
1.74	0.4093E-01	2.34	0.9642E-02	2.94	0.1641E-02
1.75	0.4006E-01	2.35	0.9387E-02	2.95	0.1589E-02
1.76	0.3921E-01	2.36	0.9138E-02	2.96	0.1538E-02
1.77	0.3838E-01	2.37	0.8894E-02	2.97	0.1489E-02
1.78	0.3754E-01	2.38	0.8657E-02	2.98	0.1441E-02
1.79	0.3673E-01	2.39	0.8424E-02	2.99	0.1395E-02

3.00	0.1350E-02	3.60	0.1591E-03	5.00	0.2859E-06
3.01	0.1306E-02	3.61	0.1531E-03	5.05	0.2203E-06
3.02	0.1264E-02	3.62	0.1473E-03	5.10	0.1694E-06
3.03	0.1223E-02	3.63	0.1417E-03	5.15	0.1299E-06
3.04	0.1183E-02	3.64	0.1363E-03	5.20	0.9935E-07
3.05	0.1144E-02	3.65	0.1311E-03	5.25	0.7582E-07
3.06	0.1107E-02	3.66	0.1261E-03	5.30	0.5772E-07
3.07	0.1070E-02	3.67	0.1212E-03	5.35	0.4384E-07
3.08	0.1035E-02	3.68	0.1166E-03	5.40	0.3321E-07
3.09	0.1001E-02	3.69	0.1121E-03	5.45	0.2510E-07
3.10	0.9676E-03	3.70	0.1077E-03	5.50	0.1892E-07
3.11	0.9354E-03	3.71	0.1036E-03	5.55	0.1423E-07
3.12	0.9042E-03	3.72	0.9956E-04	5.60	0.1067E-07
3.13	0.8740E-03	3.73	0.9569E-04	5.65	0.7985E-08
3.14	0.8447E-03	3.74	0.9196E-04	5.70	0.5959E-08
3.15	0.8163E-03	3.75	0.8837E-04	5.75	0.4436E-08
3.16	0.7888E-03	3.76	0.8491E-04	5.80	0.3293E-08
3.17	0.7622E-03	3.77	0.8157E-04	5.85	0.2438E-08
3.18	0.7363E-03	3.78	0.7836E-04	5.90	0.1808E-08
3.19	0.7113E-03	3.79	0.7527E-04	5.95	0.1325E-08
3.20	0.6871E-03	3.80	0.7230E-04	6.00	0.9716E-09
3.21	0.6636E-03	3.81	0.6943E-04	6.10	0.6220E-09
3.22	0.6409E-03	3.82	0.6667E-04	6.20	0.2778E-09
3.23	0.6189E-03	3.83	0.6402E-04	6.30	0.1463E-09
3.24	0.5976E-03	3.84	0.6147E-04	6.40	0.7636E-10
3.25	0.5770E-03	3.85	0.5901E-04	6.50	0.3945E-10
3.26	0.5570E-03	3.86	0.5664E-04	6.60	0.2018E-10
3.27	0.5377E-03	3.87	0.5437E-04	6.70	0.1023E-10
3.28	0.5190E-03	3.88	0.5218E-04	6.80	0.5130E-11
3.29	0.5009E-03	3.89	0.5007E-04	6.90	0.2549E-11
3.30	0.4834E-03	3.90	0.4804E-04	7.00	0.1254E-11
3.31	0.4664E-03	3.91	0.4610E-04	7.10	0.6107E-12
3.32	0.4500E-03	3.92	0.4422E-04	7.20	0.2946E-12
3.33	0.4342E-03	3.93	0.4242E-04	7.30	0.1407E-12
3.34	0.4189E-03	3.94	0.4069E-04	7.40	0.6654E-13
3.35	0.4040E-03	3.95	0.3902E-04	7.50	0.3116E-13
3.36	0.3897E-03	3.96	0.3742E-04	7.60	0.1445E-13
3.37	0.3758E-03	3.97	0.3588E-04	7.70	0.6636E-14
3.38	0.3624E-03	3.98	0.3441E-04	7.80	0.3017E-14
3.39	0.3494E-03	3.99	0.3298E-04	7.90	0.1359E-14
3.40	0.3369E-03	4.00	0.3162E-04	8.00	0.6056E-15
3.41	0.3248E-03	4.05	0.2557E-04	8.10	0.2673E-15
3.42	0.3131E-03	4.10	0.2062E-04	8.20	0.1169E-15
3.43	0.3017E-03	4.15	0.1658E-04	8.30	0.5058E-16
3.44	0.2908E-03	4.20	0.1332E-04	8.40	0.2167E-16
3.45	0.2802E-03	4.25	0.1067E-04	8.50	0.9197E-17
3.46	0.2700E-03	4.30	0.8524E-05	8.60	0.3864E-17
3.47	0.2602E-03	4.35	0.6794E-05	8.70	0.1608E-17
3.48	0.2507E-03	4.40	0.5402E-05	8.80	0.6623E-18
3.49	0.2415E-03	4.45	0.4285E-05	8.90	0.2701E-18
3.50	0.2326E-03	4.50	0.3391E-05	9.00	0.1091E-18
3.51	0.2240E-03	4.55	0.2677E-05	9.10	0.4363E-19
3.52	0.2157E-03	4.60	0.2108E-05	9.20	0.1720E-19
3.53	0.2077E-03	4.65	0.1656E-05	9.30	0.6773E-20
3.54	0.2000E-03	4.70	0.1298E-05	9.40	0.2629E-20
3.55	0.1926E-03	4.75	0.1015E-05	9.50	0.1011E-20
3.56	0.1854E-03	4.80	0.7914E-06	9.60	0.3847E-21
3.57	0.1784E-03	4.85	0.6158E-06	9.70	0.1460E-21
3.58	0.1717E-03	4.90	0.4780E-06	9.80	0.5408E-22
3.59	0.1653E-03	4.95	0.3701E-06	9.90	0.1998E-22

Tableau normal standard complémentaire [29]

ANNEXE V

LOIS DE DISTRIBUTION DE DENSITÉ DES PROBABILITÉS

Dans ce qui suit nous présenterons les lois de distribution de densité des probabilités.

V. 1. Loi normale :

La densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale à une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

Ou : μ la moyenne et σ l'écart-type du modèle.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\sigma = \sqrt{E[X - E(X)]^2}$$

V. 2. Distribution log-normale :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$$f_X(x; \lambda_X, \xi_X) = \frac{1}{x \xi_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda_X}{\xi_X}\right)^2}, \quad \text{pour } x \geq 0$$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x; \lambda_X, \xi_X) = \frac{1}{\xi_X \sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda_X}{\xi_X}\right)^2} \cdot dx$$

Ou : $\lambda_X = m_{\ln X}$ la moyenne et $\xi_X = \sigma_{\ln X}$ l'écart-type du modèle de distribution normale $\mathcal{N}(\lambda_X, \xi_X^2)$ quand $Y = \ln X$.

$$\begin{cases} \lambda_X = \ln \left(\frac{m_X}{\sqrt{1+C_X^2}} \right) \\ \xi_X = \sqrt{\ln(1+C_X^2)} \end{cases} ; \text{ Avec : } C_X^2 = \frac{\sigma_X}{m_X}$$

V. 3. Distribution exponentielle :

Cette distribution s'écrit sous la forme :

$$F(X) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Ou λ est le paramètre exponentiel de distribution. La moyenne μ et l'écart-type σ sont reliés de la manière suivante :

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

V. 4. Distribution gamma :

La fonction de densité de probabilité prend la forme :

$$f_X(x; \sigma, \lambda) = \frac{1}{\sigma \Gamma(\lambda)} \cdot \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)}, \quad \text{avec } x \geq 0 \text{ et } \sigma, \lambda > 0$$

Avec :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda-1} \cdot e^{-x} \cdot dx$$

Pour $1 \leq \lambda < 2$, $\Gamma(\lambda)$ est donné par la table de la fonction Gamma. Pour les autres valeurs de λ , $\Gamma(\lambda)$ est donnée par la relation de récurrence :

$$\Gamma(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \Gamma(\lambda - 1)$$

La fonction de densité de probabilité cumulée prend la forme :

$$F_X(x; \sigma, \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot \int_0^x \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)} \cdot \frac{dx}{\sigma}$$

Ou : σ est le paramètre d'échelle et λ le paramètre de forme.

V. 5. Loi de Weibull :

La distribution de weibull dépend des paramètres : β, η et γ . Sa densité de probabilité qui est la fonction $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, ou $f(x)$ est continue entre ses bornes, a pour expression :

$$f_X(x; \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} ; \gamma < x \text{ et } 0 < \eta, \gamma$$

Et sa densité de probabilité cumulée qui donne la probabilité pour qu'une valeur X soit inférieure ou égale a une valeur x telle que $P(X \leq x) = F(x)$, a pour expression :

$$F_X(x; \beta, \eta, \gamma) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

Ou : β est le parametre de forme ;

η est le paramètre d'échelle ;

γ est le facteur de position, prit ici égal à 0.

La fonction fiabilité s'écrit :

$$R(x; \beta, \eta, \gamma) = e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$$

Le taux de défaillance est donné par :

$$\lambda(x; \beta, \eta, \gamma) = \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

V. 6. Loi de Gumbel :

X_i Est une variable aléatoire de moyenne m_{X_i} , et d'écart-type σ_{X_i} , X_i suit une loi de Gumbel de paramètres a et b, alors :

$$u_i = \Phi^{-1} \left(\exp \left(-\exp \left(-\frac{x_i - b}{a} \right) \right) \right)$$

Avec :

$m_{X_i} = f a + b$ ou $f = 0.5772156649 \dots$ constante d'Euler-Mascheroni,

$$\sigma_{X_i} = \pi \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Et :

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i} \quad \text{et} \quad b = m_{X_i} - f \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sigma_{X_i}$$

La transformation inverse est donnée par :

$$x_i = b - a \ln \left(-\ln(\Phi(u_i)) \right)$$

L'expression de la fonction Φ est évaluée numériquement.

ANNEXE VI

FONCTIONS DE REPARTITIONS

Dans ce qui suit nous présenterons les fonctions de répartitions.

VI. 1. Loi normale :

La loi normale équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

$$\text{Egalité des fonctions de répartition : } \Phi\left(\frac{x_i - m_{X_i}^N}{\sigma_{X_i}^N}\right) = F_{X_i}(x_i)$$

VI. 2. Loi log-normale :

La loi log-normale équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

$$\text{Egalité des fonctions de répartition : } F_{X_i}(x_i) = \Phi\left(\frac{\ln x_i - \lambda_{X_i}}{\xi_{X_i}}\right), \text{ avec : } x \geq 0$$

X_i est une variable aléatoire log-normale, de moyenne m_{X_i} et d'écart-type σ_{X_i} , alors $\ln(X_i)$ suit une loi gaussienne de moyenne λ_{X_i} et d'écart-type ξ_{X_i} , avec :

$$\begin{cases} \lambda_{X_i} = \ln\left(\frac{m_{X_i}}{\sqrt{1+c_{X_i}^2}}\right) \\ \xi_{X_i} = \sqrt{\ln(1+c_{X_i}^2)} \end{cases} ; \text{ Avec : } c_{X_i}^2 = \frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}}$$

$$\text{Et la transformation T est alors : } x_i \xrightarrow{T} u_i = \frac{\ln(x_i) - \lambda_{X_i}}{\xi_{X_i}}$$

VI. 3. Loi exponentielle :

La loi exponentielle équivalente est obtenue en écrivant l'égalité entre les valeurs des fonctions de répartition au point considéré :

$$\text{Egalité des fonctions de répartition : } F_{X_i}(x_i) = \Phi\left(1 - \exp(-\lambda \cdot (x - \mu))\right),$$

$$\text{Avec : } x \in [\mu, +\infty]$$

$$\text{Ou : } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

RÉSUMÉ

La présente étude rentre dans la recherche du domaine de sécurité des ouvrages de Génie Civil. Le problème est abordé par la définition de la sécurité par un seuil probabiliste : on fait appel à l'approche fiabiliste. Les événements de l'environnement (champ de forces, action) et comportement des matériaux sont simulés par des variables aléatoires et déterministes. L'objectif est de montrer comment une évaluation fiabiliste apportée par un dimensionnement mécanique peut être obtenue. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un modèle mécanique et d'un modèle fiabiliste représentant correctement le comportement de ce type de structure.

Il s'agit d'une part, d'effectuer une modélisation non linéaire (non linéarité mécanique et géométrique) des structures spatiales poteaux-poutres métalliques et mixtes (acier - béton), puis de proposer une formulation pour le calcul non linéaire des structures spatiales en treillis. D'autre part, de proposer ou d'adapter une formulation et modélisation de la fiabilité. Le principe de *Hasofer-Lind* peut être appliqué, en première approche, pour l'estimation de l'indice de fiabilité, des scénarios et de la probabilité de défaillance.

Nous validons notre formulation et modélisation du modèle mécanique, en confrontant les résultats de nos calculs à des résultats expérimentaux ou à des solutions analytiques. Les vérifications effectuées ont porté sur des structures en béton armé, métalliques, mixtes et en treillis. Enfin, nous traitons des exemples d'applications de la méthode de *Hasofer-Lind* pour valider la démarche probabiliste de l'analyse de fiabilité.

Mots clés : Modélisation – non linéarité mécanique – non linéarité géométrique – probabilité – fiabilité – surface de réponse – probabilité de défaillance.

ABSTRACT

The present study goes into the search for the domain of safety of works of Civil Engineering. The problem is approached by the definition of the safety by a probability threshold: we appeal to the reliability-approach. The events of the environment (field of strength, action) and behavior of materials are simulated by random and deterministic variables. The objective is to show how a reliability-evaluation brought by a mechanical sizing can be obtained. For that purpose, it is necessary to have a mechanical model and a model reliability representing correctly the behavior of this type of structure.

It is a question on one hand, to make a nonlinear modeling (mechanical and geometrical nonlinearity) of the spatial structures column-beam metallic and composite (steel - concrete), then of proposing a formulation for the nonlinear calculation of the spatial structures in trusses. On the other hand, propose or adapt a formulation and a modeling of the reliability. The principle of *Hasofer-Lind* can be applied, in first approach, for the estimation of the reliability index, scenarios and the probability of failure.

We validate our formulation and modeling of the mechanical model, by confronting the results of our calculations with experimental results or with analytical solutions. The made checks concerned reinforced concrete, metallic, composite, and in truss structures. Finally, we treat examples of applications of the method of *Hasofer-Lind* to validate the probability approach of the analysis of reliability.

Key words : Modeling – nonlinearity mechanical – nonlinearity geometrical - probability – reliability - response surface - probability of failure.