République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de L'**E**nseignement **S**upérieur et de la A **R**echerche **S**cientifique

Université **M**ouloud **M**ammeri De **T**izi-**O**uzou

Faculté De **G**énie **E**lectrique Et d'Informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE
Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par
DJOUDREZ Kamilia

Mémoire dirigé par **Mr.SALHI.B**

Thème

Observation et stabilisation des systèmes LTI à mesures discrètes

Mémoire soutenu publiquement le 14 Septembre 2014 devant le jury composé de :

M^{r}

M

M

M

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de L'**E**nseignement **S**upérieur et de la A **R**echerche **S**cientifique

Université **M**ouloud **M**ammeri De **T**izi-**O**uzou

Faculté De **G**énie **E**lectrique Et d'Informatique
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
de MASTER ACADEMIQUE
Spécialité : **Commande des systèmes**

Présenté par
DJOUDREZ Kamilia

Mémoire dirigé par **Mr.SALHI.B**

Thème

Observation et stabilisation des systèmes LTI à mesures discrètes

Mémoire soutenu publiquement le 14 Septembre 2014 devant le jury composé de :

M^{r}

M

M

M

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

REMERCIEMENTS

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à Monsieur SALHI mon promoteur, qui m'a encouragé tout au long de ce travail.

J'ai éprouvé un réel plaisir à travailler avec lui tout au long de cette thèse. Ses qualités scientifiques ont été pour moi une source de motivation.

Je remercie aussi bien vivement les membres de jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail, ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail, trouvent ici l'expression de mes sincères gratitudes et remerciements.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents.

Mes très chers frères.

Mes chères sœurs.

Mes grandes mères.

Ma tante et ses enfants.

Tous mes amis (e).

Mon promoteur Mr .SALHI .B.

Toute la promotion automatique 2014.

Tous mes enseignants.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Introduction générale

Chapitre 1: Théorie de Stabilité de Lyapunov

1 Notions de stabilité 1

1.1 Approches de Lyapunov 2

1.2 Méthode directe de Lyapunov 4

1.2.1 Fonction candidate de Lyapunov 4

1.2.2 Choix de la fonction de Lyapunov ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2 Stabilité des systèmes linéaires(LTI) ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2.1 Inégalité matricielle affine ou linéaire (LMI) ..... **Erreur ! Signet non défini.**

2.2 Stabilisation des systèmes LTI 7

Conclusion 9

Chapitre 2: Stabilisation des systèmes LTI à mesures discrètes

1 Définition d'un système à retard 10

2 Approche par fonctionnelles de Krasovskii 10

3 Approche par fonctions de Lyapunov Rasumikhin 11

3 Stabilisation des systèmes à mesures discrètes 12

4.1 Résultat de l'article 12

4.2 Notre résultat 14

Conclusion 18

Chapitre 3: Observation et stabilisation des systèmes LTI à mesures discrètes

1 Observation des systèmes LTI 20

2 Stabilistation par retour de sortie 21

3 Observation des systèmes LTI à mesures discrètes 23

4 Stabilisation par retour de sorties des systèmes à mesures discrètes 26

4.1 Première Version 26

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

4.2 Deuxième Version 28

Conclusion 31

Chapitre 4: Simulations et discussions

1 Description du système 32

2 Simulation de l'observateur de Luenberger à mesures discrètes 32

3 Stabilisation par retour de sortie 35

Conclusion 40

Conclusion générale

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

L'étude de la stabilité des systèmes est un domaine où plusieurs résultats théoriques ont été réalisés. Son objectif consiste à tirer des conclusions sur le comportement du système sans calculer la solution de ses trajectoires.

Différentes définitions de base de la stabilité des systèmes ont été proposées. L'utilisation des ces dernières pour démontrer la stabilité d'un système autour de son point d'équilibre exige la résolution explicite des équations différentielles, ce qui est souvent impossible dans la plupart des cas. De ce fait, la méthode directe de Lyapunov permet de contourner ce problème. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière dont l'existence garantit la stabilité du système étudié. D'autre part, les conditions d'existence de cette fonction peuvent être formulées sous forme d'un problème d'optimisation convexe et dans ce cas on parle de contraintes *LMIs*.

La seconde méthode de Lyapunov ayant été développée pour une classe restreinte de systèmes, en l'occurrence la classe des systèmes continus ou discrets sans retard. Deux théories, permettant d'étendre la seconde méthode de Lyapunov à la classe des systèmes à retard, ont été donc développées; la méthode de Lyapunov-Krasovskii et la méthode de Lyapunov-Razumikhin.

En plus des différentes classes de systèmes citées plus haut, la classe des systèmes continus à mesures discrètes a reçu une attention particulière ces dernières décennies. La stabilité de cette classe, pouvant être considérée comme appartenant à la classe des systèmes continus à retard, peut être donc étudiée par la méthode de Lyapunov-Krasovskii.

La stabilisation et l'observation de la classe des systèmes continus à mesures discrètes constituent l'objet de ce mémoire. On s'intéresse plus particulièrement aux cas des systèmes Linéaires Temps Invariant (LTI). En effet, partant d'un résultat publié récemment et portant sur la stabilisation, nous avons en premier lieu étendu l'observateur de Luenberger à cette classe de systèmes. En deuxième étape et en faisant appel à ce dernier observateur, nous avons étudié la stabilisation par retour de sortie de cette même classe de systèmes.

Ce mémoire se subdivise en quatre chapitres suivant.

- L'introduction générale
- **Le premier chapitre** est consacré aux généralités sur la notion de stabilité selon Lyapunov.
- **Le deuxième chapitre** traite cette même notion dans le cas des systèmes à mesures discrètes.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

- **Le troisième chapitre**, après un rappel sur l'observation des systèmes LTI et leurs stabilisations par retour de sortie, porte sur l'extension de ces derniers résultats aux cas des systèmes LTI avec mesures discrètes.
- **Le quatrième chapitre** rassemble les différents résultats de simulations

Nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

La notion de stabilité est commune à plusieurs domaines; d'un point de vue général l'analyse de la stabilité est une étape nécessaire pour l'étude du fonctionnement des systèmes physiques, mécaniques, électroniques...etc. Son objectif consiste à tirer des conclusions sur le comportement de ces systèmes sans calculer la solution de ses trajectoires. Il existe plusieurs techniques d'analyse de la stabilité des systèmes, qu'ils soient linéaires ou non linéaires, variants ou invariants ou encore avec ou sans retard. On peut citer le critère de Nyquist, la méthode du premier harmonique, l'approche de Lyapunov, l'approche entrée-sortie … etc.

Ce chapitre est dédié à la présentation détaillée de la notion de stabilité selon Lyapunov; on s'intéressera en particulier aux systèmes linéaires et où les conditions de stabilité seront présentés sous forme LMI.

1. *Notions de stabilité*

Avant d'exposer les différentes notions de stabilité telles que définies par Lyapunov, il est nécessaire d'introduire la représentation d'état d'un système et la notion de point d'équilibre. Ce dernier joue un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques.

❖ *Définition d'un système*

Un système continu autonome en boucle ouverte ou en boucle fermée sans retard est donné par l'équation suivante:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (1.1)$$

$x \in IR^n$: État du système.

$f : IR^n \to IR^n$: Champ de vecteurs.

Le champ de vecteurs $f(x)$ est considéré comme étant continu. Cette condition garantie l'existence d'au moins une solution $x(t)$ pour toute condition initiale $x(t_0)$. L'unicité de la solution $x(t)$ peut être garantie si le champ de vecteur $f(x)$ possède la propriété de Lipschitz.

❖ *Théorème de Cauchy-Lipschitz*

Une fonction $f(x,t) : IR^n \text{x} IR \to IR^n$ est localement Lipschitz en D ssi:

$$\forall x_1, x_2 \in D \Rightarrow \left\| f(x_1,t) - f(x_2,t) \right\| \leq L \left\| x_1 - x_2 \right\| \qquad (1.2)$$

Où L **f** 0 est la constante de Lipschitz.

$f(x)$ est globalement Lipchitzienne si D peut être étendu à IR^n $(D \equiv IR^n)$. **[1]**

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

- *Point d'équilibre*

Considérant le système autonome (1.1) tel que $f(x): D \subset IR^n \to IR^n$, $\bar{x}$ est appelé point d'équilibre du système ssi:

$$\forall t \geq 0 \quad , \quad f(\bar{x}) = 0 \tag{1.3}$$

Par la suite, on considérera toujours que l'origine $\bar{x} = 0$ est point d'équilibre. Pour le cas général $\bar{x} \neq 0$, il suffit de faire une translation par un simple changement de variable $y = x - \bar{x}$ alors on aura :

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x + \bar{x}) = g(y) \tag{1.4}$$

avec $g(0) = 0$

On suppose, maintenant, que l'origine est point d'équilibre du système (1.1) et on s'intéresse au comportement de ce système au voisinage de ce point d'équilibre

1.1 Approches de Lyapunov

- *Équilibre stable*

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est un point d'équilibre stable (fig.1) du système (1.1) si :

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0 \tag{1.5}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, alors on parle d'un équilibre instable.

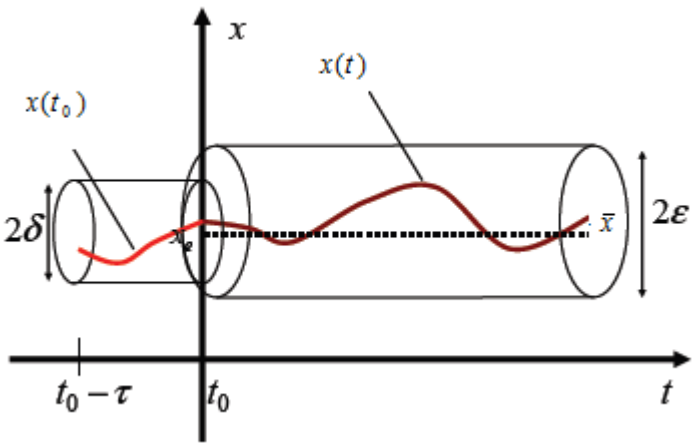

Fig.1: trajectoire stable

Interprétation :

On suppose que le système (1.1) est stable et possède l'origine comme point d'équilibre. On s'intéresse au comportement de ce système au voisinage de cet équilibre. Plus

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

précisément, on se pose la question suivante: si l'état initial $x(t_0)$ est dans le voisinage de la valeur d'équilibre $\bar{x}$, comment vont se comporter les trajectoires du système pour $t > 0$ **[2]**

- *Équilibre attracteur*

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est un équilibre attracteur du système (1.1) si:

$$\exists d \ \mathbf{f}\ 0 \quad tel\ que\ \|x(t_0) - \bar{x}\| \ \mathbf{p}\ d \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \qquad (1.6)$$

Un équilibre attracteur $\bar{x}$ est donc un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ si elles démarrent suffisamment près de $\bar{x}$. Il faut noter que la stabilité et l'attractivité sont deux notions différentes et qu'elles ne s'impliquent pas mutuellement.

- *Équilibre asymptotiquement stable*

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est un équilibre asymptotiquement stable du système (1.1) s'il est stable et attracteur; autrement dit, il existe $r \ \mathbf{f}\ 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.1) on a :

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| \ \mathbf{p}\ r \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0 \qquad (1.7)$$

Remarque :

Un ensemble d'états initiaux $x(t_0)$ à partir desquels les trajectoires convergent vers un équilibre asymptotiquement stable est appelé domaine d'attraction. Un état d'équilibre stable mais pas asymptotiquement est dit marginalement stable.

- *Stabilité exponentielle*

Le point d'équilibre $\bar{x}$ est un équilibre exponentiellement stable du système (1.1) si

$$\exists d, a, b \ \mathbf{f}\ 0 \ tel\ que\ \|x(t_0) - \bar{x}\| \ \mathbf{p}\ d \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| \ \mathbf{p}\ a\|x(t_0)\|e^{-bt}, \forall t \ \mathbf{f}\ 0 \qquad (1.8)$$

La constante b est appelée taux de convergence exponentielle.

Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

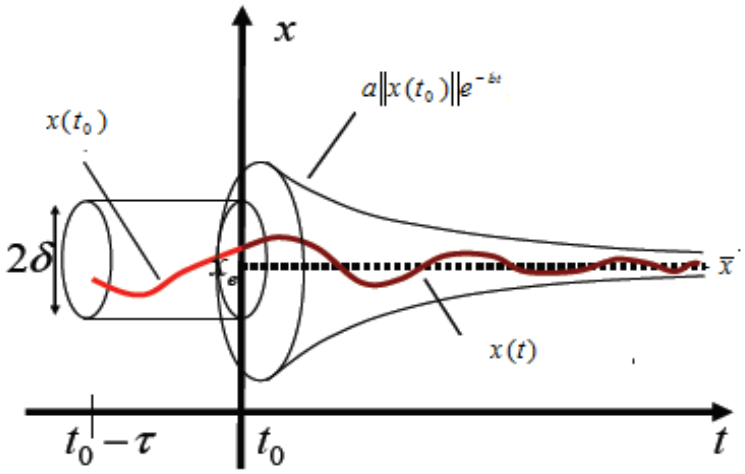

Fig.2: trajectoire exponentiellement stable

Remarque :

Les définitions de stabilité précédentes présentent certains inconvénients tels que:

- La nécessité de pouvoir calculer de manière explicite chaque solution correspondant à chacune des conditions initiales.
- Le maniement des définitions est fastidieux.
- En plus de ces inconvénients, ces définitions ne sont pas pratiques pour l'obtention des lois de commande, par conséquent, des résultats permettant de déterminer la stabilité sans calcul explicite des trajectoires seraient les bienvenus. **[3]**

1.2 Méthode directe de Lyapunov

La seconde méthode (ou la méthode directe) de Lyapunov s'inspire de la notion d'énergie; si l'énergie totale d'un système est décroissante avec le temps alors ce système tend à se ramener vers son point d'équilibre ce qui implique la stabilité de ce dernier. La méthode directe cherche donc à examiner une fonction scalaire de type énergétique qui admet une dérivée temporelle négative. Par la suite Lyapunov généralise la notion d'énergie par une fonction scalaire, cette fonction particulière, notée $V(x)$ est appelée fonction candidate de Lyapunov. **[2]**

1.2.1 Fonction candidate de Lyapunov

Soit $V(x): D \subset IR^n \rightarrow IR$ une fonction définie positive c'est-à-dire que:

i) $V(0)=0$

ii) $V(x)>0$ pour $x \neq 0$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

De plus, si $V(x)$ est continue, elle sera dite fonction candidate de Lyapunov.

La dérivée de cette fonction par rapport aux trajectoires du système (1.1) est donnée par:

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) f(x) \tag{1.9}$$

L'étude de stabilité du système revient à l'étude du signe de cette dérivée.

- *Stabilité*

Soit $\bar{x} = 0$ un point d'équilibre pour le système (1.1), et $D \subset IR^n$ un domaine contenant l'origine. S'il existe une fonction candidate de Lyapunov $V(x) : D \to IR$ continûment différentiable vérifiant:

i) $V(0) = 0$

ii) $V(x) > 0$ dans $D - \{0\}$

iii) $\dot{V}(x) \leq 0$ dans D

alors $\bar{x} = 0$ est un point d'équilibre stable.

Plus précisément, si l'on peut trouver une fonction $V(x)$ vérifiant les trois conditions précédentes alors le système est stable, sinon ce théorème ne permet pas de conclure sur la stabilité du système.

- *Stabilité asymptotique*

Soit $\bar{x} = 0$ un point d'équilibre pour le système (1.1), et $D \subset R^n$ un domaine contenant l'origine. S'il existe une fonction candidate de Lyapunov $V(x) : D \to IR$ continûment différentiable vérifiant:

i) $V(0) = 0$

ii) $V(x) > 0$ dans $D - \{0\}$,

iii) $\dot{V}(x) < 0$ dans $D - \{0\}$

Alors $\bar{x} = 0$ est asymptotiquement stable.

Remarque

Le point d'équilibre $\bar{x}$ du système (1.1), est globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est asymptotiquement stable et si en outre:t

i) $D \equiv IR^n$,

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ii) $\|x\| \to \infty \quad \Rightarrow \quad V(x) \to \infty$ ($V(x)$ radialement non bornée).

1.2.2 Choix de la fonction de Lyapunov

Il existe des familles de fonctions de Lyapunov souvent utilisées et dont l'adoption dépend de la nature du système à étudier (systèmes linéaire, système continu par morceaux, systèmes à retard, système linéaire incertain,…). Une classe de fonctions souvent utilisées est la classe des fonctions quadratiques $V(x) = x^T Px$ où $P = P^T \succ 0$ est une matrice symétrique définie positive.

Pour rappel, une matrice symétrique est dite définie positive si elle vérifié l'une des conditions suivante:

- Toutes les valeurs propres de P sont positives.
- Tous les déterminants mineurs de P sont positifs.
- Tous les éléments diagonaux sont positifs.

Ces matrices ont la particularité de n'avoir que des valeurs propres réelles. **[4]**

2. Stabilité des systèmes linéaires(LTI)

Pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires $\dot{x} = f(x) = Ax$, on considère la fonction candidate de Lyapunov $V(x) = x^T Px$

La dérivée donne
$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T P\dot{x} + \dot{x}^T Px \\ &= x^T PAx + x^T A^T Px \\ &= x^T (PA + A^T P)x \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Si A est stable $(R(l_i)) \prec 0$, alors il existe une matrice unique symétrique définie positive P pour toute matrice définie positive Q solution de l'équation de Lyapunov :

$$(PA + A^T P) = -Q \qquad (1.11)$$

Réciproquement, $\exists (P, Q)$ symétriques définies positives telle que (1.11) est vérifié, alors le système linéaire $\dot{x} = Ax$ est stable.

2.1 Inégalité matricielle affine ou linéaire (LMI)

Une LMI est une contrainte de la forme:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + ... + x_n F_n \succ 0 \qquad (1.12)$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Les matrices F_i sont des matrices réelles symétriques connues, alors que $x = [x_1, x_2, .., x_n]^T$ est un vecteur à éléments réels inconnus appelées variables de décision**.[5]**

L'inégalité (1.12) sous-entend que le vecteur x doit rendre la matrice $F(x)$ définie négative; cela donne lieu à deux types de questions:

- *Problème de faisabilité*: revient à tester l'existence des $x_1, x_2, ...x_n$ tel que (1.12) est vérifiée.
- *Problème d'optimisation:* revient à tester l'existence des $x_1, x_2, ...x_n$ tel que (1.12) est vérifiée et minimisent une fonction coût $c(x) = c_1x_1 + c_2x_2 ... + c_nx_n$.

Souvent, dans le cadre des applications de contrôle, les LMIs apparaissent sous forme de variables matricielles au lieu de variables vectorielles, ce qui veut dire que l'on considère des inégalités plus générales de la forme:

$$F(\mathrm{X}) \succ 0$$

$$\mathrm{X} \in c^n$$

c^n est l'ensemble des matrices de dimension finie n et où $F(\mathrm{X}) : c \to S^m$ est une application affine en X ; S^m est l'ensemble des matrices symétriques définies négatives.

Exemple:

La condition (1.10) ($A^TP + PA \succ 0$) est une LMI car elle peut être réécrite sous la forme (1.12). En effet, si l'on considère l'ensemble $(P_1, ..., P_m)$ comme base pour les matrices symétriques tel que $(m = (k(k+1)/2) - 1)$. On peut prendre alors, $F_0 = 0$ et $F_i = -A^TP_i - P_iA$ où $i = 1, ..., m$.

2.2 Stabilisation des systèmes LTI

En présente ici l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires en utilisant la formulation LMI. En effet, les théorèmes de Lyapunov dans le cas linéaire peuvent être ramenés à un problème LMI.

La stabilisation d'un système linéaire avec entrée de commande revient à déterminer le gain matriciel K tel que:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu \\ &u = Kx \\ &V(x) = x^T Px \;\mathbf{f}\; 0 \\ &\dot{V}(x) = x^T [P(A+BK) + (A+BK)^T P]\, x \;\mathbf{p}\; 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Les deux inégalités précédentes peuvent être mises sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} -P & 0_n \\ 0_n & P(A+BK) + (A+BK)^T P \end{bmatrix} \mathbf{p}\; 0 \tag{1.14}$$

Cette dernière ne constitue pas une LMI, car la condition $P(A+BK) + (A+BK)^T P \;\mathbf{p}\; 0$ n'est pas affine en les inconnus P et K. Pour obtenir la formulation LMI, on peut faire le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} &Q = P^{-1} \\ &Y = KQ \end{aligned}$$

En remplaçant dans (1.14), on obtient alors:

$$\begin{bmatrix} -Q^{-1} & 0_n \\ 0_n & Q^{-1}(A+BYQ^{-1}) + (A+BYQ^{-1})^T Q^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{p}\; 0$$

En multipliant à gauche et à droite par la matrice $\begin{bmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{bmatrix}$, on obtient:

$$\begin{bmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Q^{-1} & 0_n \\ 0_n & Q^{-1}(A+BYQ^{-1}) + (A+BYQ^{-1})^T Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0_n \\ 0_n & Q \end{bmatrix} \mathbf{p}\; 0$$

$$\begin{bmatrix} -Q & 0_n \\ 0_n & AQ + BY + Q(A+BYQ^{-1})^T \end{bmatrix} \mathbf{p}\; 0$$

$$\begin{bmatrix} -Q & 0_n \\ 0_n & AQ + BY + Y^T B^T + QA^T \end{bmatrix} \mathbf{p}\; 0 \tag{1.15}$$

Cette dernière inégalité (1.15) est une LMI en fonction des inconnus Q et Y. Après résolution de cette dernière on peut déterminer le gain matriciel K comme suit:

$$K = YQ^{-1} = YP$$

Le système d'équation (1.13) devient alors:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + Bu \\ &u = Kx \\ &V(x) = x^T Q^{-1} x \;\mathbf{f}\; 0 \\ &\dot{V}(x) = x^T [AQ + BY + Y^T B^T + QA^T]\, x \;\mathbf{p}\; 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Ce qui montre que le système est stable.

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes focalisés sur la notion de stabilité selon Lyapunov, où l'on a présenté la méthode directe et indirecte. L'application de cette dernière méthode au cas particulier des systèmes LTIs permet l'obtention selon le cas; d'une part d'une équation le Lyapunov et d'autre part d'une formulation LMI.

Ceci nous a permet de poser la problématique de notre prochain chapitre ; il s’agit en effet d’étendre les résultats bien établis pour les systèmes LTI aux systèmes LTI à mesures discrètes.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Les théorèmes de Lyapunov traitent des systèmes continus sans retard et en particulier les systèmes LTI traités dans le chapitre précédent. Ces théorèmes de Lyapunov ont étés étendus par deux chercheurs à la classe des systèmes continus à retard. En effet, dans le cadre de cette dernière classe de systèmes, Krasovskii et Razumikhin ont développé séparément deux différents théorèmes. Ces deux derniers théorèmes se prêtent parfaitement à l'étude des systèmes continus linéaires avec mesure discrète (sampled data).

Dans ce chapitre en présentera, en plus de l'un des résultats récemment obtenus, un nouveau théorème.

1. *Définition d'un système à retard*

Un système à retard se présente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0}(q) = j(q) \in C \text{ pour } & q \in [-t, 0] \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $C([a,b], IR^n)$ est l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans IR^n équipé de la norme suivante: $\|f\|_C = \max_{a<q<b} \|f(q)\|$. $x(t)$ est une fonction de $IR \to IR^n$ et f une fonction continue de $IR \times C \to IR^n$ localement lipschitzienne en son second argument tel que $f(t,0) = 0, \forall\, t \in IR$. $x_t = j(q) : [-t, 0] \to IR^n$.

2. *Approche par fonctionnelles de Krasovskii*

L'idée principale de ce théorème consiste à déterminer une fonctionnelle de Lyapunov définie positive et dont la dérivée est définie négative le long des trajectoires du système.

Théorème de Krasovskii

Soient $u, v, w : IR_+ \to IR_+$ des fonctions continues croissantes; $u(q)$, $v(q)$ sont strictement positives pour tout $q \neq 0$ et vérifiant la condition $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que le champ de vecteur f de (2.1) soit borné par des valeurs bornés de ses arguments.

S'il existe une fonctionnelle continue $V : IR \times C \to IR_+$ telle que:

$$\begin{cases} u(\|f(0)\|) \leq V(t, f) \leq v(\|f\|) \\ \dot{V}(t, f) \leq -w(\|f(0)\|) \quad \forall t \geq t_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Alors la solution nulle de (2.1) est uniformément stable.

Si de plus $w(q) \neq 0, \forall q \neq 0$; cette solution est uniformément asymptotiquement stable.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

La difficulté majeure de cette approche est la conception, lorsqu'elle existe, d'une telle fonctionnelle vérifiant les spécifications du théorème et plus particulièrement la condition de décroissance des trajectoires du système. Cependant, cette approche reste la plus utilisée dans le cas de la stabilité des systèmes à retard.

3. *Approche par fonctions de Razumikhin*

Contrairement à l'approche de Krazovskii qui considère que l'ensemble de l'état $x(t) \in C$, la méthode de Razumikhin tient compte simplement de l'état instantané $x(t)$. On se place alors dans IR^n en considérant cette fois une fonction de Lyapunov $V(t, x(t))$ pour les équations différentielles ordinaires.

Théorème de Lyapunov-Razumikhin

Soient $u, v, w : IR_+ \to IR_+$ des fonctions continues, strictement croissantes; $u(q)$ et $v(q)$ sont positives pour $q > 0$ *et* $u(0) = v(0) = 0$. Supposons que la fonction f de (2.1) est bornée pour des valeurs bornée de ses arguments, si $\exists$ V une fonction continue uniformément V : $IR \times IR^n \to IR_+$ telle que :

$$i.\ u(\|x\|) \le V(t,x) \le v(\|x\|)$$

$$ii.\ \dot{V}(t,x) \le -w(\|x\|)$$

Si pour toutes les trajectoires de (2.1) V vérifie:

$$V(t+q, x(t+q)) \le V(t, x(t)), \forall q \in [-t, 0] \qquad (2.3)$$

alors la solution nulle est uniformément stable.

De plus, si $w(q) > 0 \quad \forall q > 0$ et s'il existe une fonction $p : IR_+ \to IR_+$ strictement croissante avec $p(q) > 0 \forall q > 0$ telle que pour toutes les trajectoires de (2.1) V vérifie:

$$V(t+q, x(t+q)) \le p(V(t, f(t))), \forall q \in [-t, 0] \qquad (2.4)$$

Alors une telle fonction est appelée fonction de Lyapunov-Razumikhin et la solution nulle de (2.1) est uniformément asymptotiquement stable.

Dans la pratique les fonctions p les plus souvent utilisées sont celles de la forme $p = q\ q$ (q est une constante tel que $q > 1$).

Les fonctions recherchées dans l'approche de Razumikhin sont souvent des fonctions quadratiques de la forme $V(t) = x^T P x$ telle que $P = P^T > 0$

On remplace $V(x)$ dans l'équation (2.4) on aura :

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$x^T(t+q)\,P\,x(t+q)) \le q\,x^T(t)\,P\,x(t)), \forall q \in [-t,0], q \;\mathbf{f}\; 1 \qquad (2.5)$$

Même si l'approche de Lyapunov-Razumikhin conduit généralement à des résultats plus conservatifs que ceux tirés de l'approche de Lyapunov-Krasovskii, elle permet de prendre en compte les retards variables sans restriction sur la dérivée du retard.**[6]**

4. Stabilisation des systèmes à mesures discrètes

Dans ce qui suit en présentera un résultat publié dans l'article **[7]**, on présentera après notre propre résultat.

4.1 Résultat de l'article

Considérant le système linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t_k) \qquad (2.6)$$

Où $x \in IR^n$ et $u \in IR^m$ représentent respectivement les variables d'état et le vecteur entré de commande. $A et B$ sont des matrices constantes et de dimensions appropriées. Nous cherchons donc à appliquer une loi de commande $u(t) = u_d(t_k), t_k \le t \;\mathbf{p} t_{k+1}$. Tel que $u_d(t_k)$ représente le signal de commande à temps discret et $0 = t_0 \;\mathbf{p}\; t_1 \;\mathbf{p}\; ... \;\mathbf{p}\; t_k \;\mathbf{p}\; ...$ correspondent au instants de mesures discrètes.

Notre objectif est d'assurer la stabilité de système (2.6) en appliquant une loi de commande de la forme la suivante :

$$u(t) = K\;\; x(t_k) \qquad (2.7)$$

Tel que

$$0 \;\mathbf{p}\; t_{k+1} - t_k \le t_m \quad \forall k \ge 0 \qquad (2.8)$$

Tel que t_m représente la valeur maximale du retard

On remplace $u(t) = K\,x(t_k)$ dans (2.6) on aura

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + A_d\;\; x(t - t(t)) \\ t(t) &= t - t_k,\;\; t_k \le t \;\mathbf{p}\; t_{k+1} \end{aligned} \qquad (2.9)$$

tel que $A_d = BK_P$

$$t(t) \;\mathbf{p}\; t_m(t)$$

Pour prouver la stabilité du système (2.6), on considère la fonctionnelle suivante :

$$V(x_t) = x(t)^T Px(t) + (t_m - t(t))x_0^T(t)Sz_0(t) + (t_m - t(t))\int_{t_k}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \qquad (2.10)$$

Où $z_0(t) = x(t) - x(t_k), \dot{z}_0 = \dot{x}(t)$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_{t_0} = j_0 \in C \end{cases}$$

Juste avant l'instant t_k, la fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii $V(x_t)$ est strictement supérieure à $x(t_k)^T P\, x(t_k)$. A l'instant t_k, $t = t_k$ ($t(t_k) = 0$) les deux derniers termes de la fonctionnelles (2.10) sont nulles. Cela signifie que la fonctionnelle $V(x_t)$ est décroissante de manière discontinue à chaque instant t_k; il suffit donc de prouver que cette fonctionnelle est décroissante dans chaque intervalle $[t_{k-1}, t_k]$. On dérive donc la fonctionnelles sur un intervalle quelconque; on aura alors:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = {} & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + 2(t_m - t(t))x_0^T(t)S\dot{x}(t) + (t_m - t(t))\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \\ & x_0^T(t)Sx_0(t) - \int_{t_k}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'étape suivante consiste à réécrire $\dot{V}(x)$ en utilisant le vecteur $x(t) = [x^T(t) \quad x^T(t_k)]^T$ et en remplaçant les expressions suivantes dans $\dot{V}(x_t)$:

Telles que $x(t) = M_1 x(t)$, $\dot{x}(t) = M_3 x(t)$ et $x(t) - x(t_k) = M_2 x(t)$.

L'expression de $\dot{V}(x)$ devient alors:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) = {} & x^T(t)[2M_1^T PM_3 - M_2^T SM_2 + t_m(2M_3^T SM_2 + M_3^T RM_3) \\ & + t(t)(-M_3^T RM_3 - 2M_3^T SM_2)]x(t) - \int_{t_k}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \end{aligned} \tag{2.12}$$

Par la suite nous introduisant le terme suivant :

$$2x^T(t)NM_2x(t) = 2x^T(t)N\int_{t_k}^{t} \dot{x}(s)ds \tag{2.13}$$

En utilisant un critère de majoration on peut écrire que:

$$2x^T(t)NM_2x(t) \leq t(t)x^T(t)NR^{-1}N^Tx(t) + \int_{t_k}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \tag{2.14}$$

On obtient alors l'inégalité suivante

$$\dot{V}(x_t) \leq x^T(t)[\Pi 1 + t_m \Pi 2 + t(t)(NR^{-1}N^T - \Pi 2)]x(t) \tag{2.15}$$

Cette inégalité est fonction du retard $t(t)$, il est donc nécessaire et suffisant d'assurer la négativité de (2.15) à $t(t) = 0$ et à $t(t) = t_m$, ce qui donne les conditions du théorème suivant:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Théorème

$\exists P,R \text{ et } S \in IR^{n\times n}$ des matrices symétriques définies positives et une matrice $N \in IR^{2n\times n}$ qui satisfait

$$\begin{aligned} &\Pi 1 + t_m \Pi 2 \mathbf{p} 0, \\ &\begin{pmatrix} \Pi 1 & t_m \\ * & -t_m R \end{pmatrix} \mathbf{p} 0 \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Où

$$\Pi 1 = M_1^T P M_3 + M_3^T P M_1 - M_2^T S M_2 - N M_2 - M_2^T N^T$$
$$\Pi 2 = M_2^T S M_3 + M_3^T S M_2 + M_3^T R M_3$$

les matrices $M_i, i = 1,2,3$ sont données par:

$$M_1 = [I \quad 0], M_2 = [I \quad -I], M_3 = [A \quad A_d]$$

Le système (2.6) est asymptotiquement stable pour tout $t(t) \mathbf{p} t_m(t)$

4.2 Notre résultat

Dans cette sous section, nous avons essayé d'améliorer le résultat précédent. Reprenant le système précédent:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t_k) = -K_p x(t_k) \end{cases} \qquad (2.17)$$

Le système (2.17) en boucle fermée ;

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(-K_p x(t_k)) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = Ax(t) - BK_p x(t_k). \qquad (2.18)$$

En remplace $t = t - t_k$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_p x(t - t) \qquad (2.19)$$

On a aussi ;

$$\int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}(s)ds = x(t) - x(t - t(t)) \qquad (2.20)$$

$$x(t - t(t)) = x(t) - \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}(s)ds \qquad (2.21)$$

On remplace (2.21) dans (2.19) on aura alors

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK_p(x(t) - \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}(s)ds) \qquad (2.22)$$

On tire $x(t)$ en facteur et alors l'équation (2.22) devient :

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + A_d h \tag{2.23}$$

Tel que ;

$$A_{cl} = (A - BK_p) \qquad \mathrm{A_d} = BK_p \qquad h = \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}(s)ds$$

Soit la fonctionnelle de Krasovsky suivante ;

$$V(t) = V1(t) + V2(t) \tag{2.24}$$

Tel que:

$$V1(t) = x^T Px$$

$$V2(t) = \int_{t-t}^{t}\int_{z}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsdz$$

L'équation (2.24) sera alors sous la forme

$$V(x,t_k) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-t}^{t}\int_{z}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsdz \tag{2.25}$$

Dérivant l'équation (2.25), revient à dériver $V1(x,t)\, et\, V2(x,t)$ par rapport au temps ;

$$\dot{V}1(t) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t)$$

Remplaçant $\dot{x}(t) = A_{cl}x(t) + A_d h$ dans $\dot{V}1(t)$ on aura alors

$$\dot{V}1(x,t) = x^T(t)[A_{cl}{}^T P + PA_{cl}]x(t) + 2x^T(t)PA_d h$$

la dérivée de (2.25) nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,t_k) &= x^T(t)[A_{cl}{}^T P + PA_{cl}]x(t) + 2x^T(t)PA_d h + \\ &+ t(t)\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned} \tag{2.26}$$

On a aussi

$$\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) = (A_{cl}x(t) + A_d h)^T R(A_{cl}x(t) + A_d h)$$

La dérivée sera comme suit :

$$\dot{V}(x,t_k) = x^T(t)[A_{cl}{}^T P + PA_{cl}]x(t) + 2x^T(t)PA_d h + t(t)\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,t_k) \le\ & x^T(t)[A_{cl}{}^T P + PA_{cl}]x(t) + t(t)x^T(t)PS^{-1}Px + \\ &+ \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)[A_{cl}{}^T SA_d]\dot{x}(s)ds + t(t)\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds\end{aligned}$$

On tire $x^T(t), \dot{x}^T(t)$ en facteur à droite, et $x(t), \dot{x}(t)$ en facteur à gauche on aura alors ;

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\dot{V}(x,t_k) \le x^T(t)[A_{cl}{}^T P + PA_{cl} + \dot{t}(t)PS^{-1}P]x(t) + \\ + \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)[A_d{}^T SA_d - R]\dot{x}(s)ds + \dot{t}(t)\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t)$$

en remplace $\dot{x}(t) = A_{cl} + A_d h$

$$\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) = (A_{cl}x(t) + A_d h)^T R(A_{cl}x(t) + A_d h)$$

$$= x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x + h^T A_d{}^T RA_d h + 2x^T A_{cl}{}^T RA_d h$$

$$= x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x(t) + h^T A_d{}^T RA_d h + 2[A_{cl}x]^T R[A_d h]$$

Tel que

$$\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \le 2\,x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x(t) + 2\int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)A_d{}^T SA_d\dot{x}(s)ds$$

$$\le (A_{cl}x(t) + A_d h)^T R(A_{cl}x(t) + A_d h)$$

$$\le x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x + h^T A_d{}^T RA_d h + 2x^T A_{cl}{}^T RA_d h$$

$$\le x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x(t) + h^T A_d{}^T RA_d h + x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}A_{cl}x(t) + h^T A_d{}^T RA_d h$$

$$\le 2x^T A_{cl}{}^T RA_{cl}x(t) + 2h^T A_d{}^T RA_d h$$

L'équation (2.26) devient

$$\dot{V}(t) \le x^T[A_{cl}{}^T P + PA_{cl} + \dot{t}(t)PS^{-1}P + 2\dot{t}(t)A_{cl}{}^T RA_{cl}]x(t) + \\ + \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)[A_d{}^T SA_d - R + 2\dot{t}^2(t)A_d{}^T RA_d]\dot{x}(s)ds \qquad (2.27)$$

$$\dot{V}(t) \le x^T \prod 1x(t) + \int_{t-t(t)}^{t} \dot{x}^T(s)\prod 2\dot{x}(s)ds \qquad (2.28)$$

Tel que;

$$\prod 1 = A_{cl}{}^T P + PA_{cl} + \dot{t}(t)[PS^{-1}P + 2A_{cl}{}^T RA_{cl}]$$

$$\prod 2 = A_d{}^T SA_d - R + \dot{t}^2(t)[PS^{-1}P + \dot{t}(t)[2A_d{}^T RA_d]$$

Pour vérifier la stabilité de notre système, il faut que les inégalités suivantes soient vérifier;

$$\prod 1 = A_{cl}{}^T P + PA_{cl} + \dot{t}(t)[PS^{-1}P + 2A_{cl}{}^T RA_{cl}] \mathbf{p} 0$$

$$\prod 2 = A_d{}^T SA_d - R + \dot{t}^2(t)[PS^{-1}P + \dot{t}(t)[2A_d{}^T RA_d] \mathbf{p} 0$$

$\prod 1$ est linéaire en $\dot{t}(t)$, il suffit de vérifier cette condition pour $\dot{t}(t) = 0$ et $\dot{t}(t) = t_m$

Ceci donne

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

i) $A_{cl}{}^{T}P + PA_{cl} \mathbf{p} 0$ (2.29)

ii) $A_{cl}{}^{T}P + PA_{cl} + t_{m}(t)[PS^{-1}P + 2A_{cl}{}^{T}RA_{cl}] \mathbf{p} 0$ (2.30)

L'application du complément de Schur à l'inégalité (2.30) conduit à l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{cl}{}^{T}P + PA_{cl} & P & A_{cl}{}^{T} \\ P & -S/t_{m} & 0_{n} \\ A_{cl} & 0_{n} & -R^{-1}/2t_{m} \end{bmatrix} \mathbf{p} 0$$

En multipliant à gauche et à droit par $diag[I_n, I_n, R]$ on trouve

$$\begin{bmatrix} A_{cl}{}^{T}P + P\,A_{cl} & P & A_{cl}{}^{T}R \\ P & \text{-S}/t_{\text{m}} & 0_{n} \\ R\,\text{A}_{\text{cl}} & 0_{n} & -R/2t_{m} \end{bmatrix} \mathbf{p} 0 \quad (2.31)$$

$$\prod_2 = Ad^{T}\,SA_{d} - R + t^{2}(t)[2A_{d}{}^{T}RA_{d}] \mathbf{p} 0$$

$t^{2}(t)$ étant convexe dans l'intervalle $[0, t_{m}]$ il suffit de vérifier que

$A_{d}{}^{T}SA_{d} - R \mathbf{p} 0$ (2.32)

$A_{d}{}^{T}SA_{d} - R + t_{m}{}^{2}[2A_{d}{}^{T}RA_{d}] \mathbf{p} 0$ (2.33)

L'application du complément de Schur à l'inégalité (2.32) conduit à l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -S^{-1} & A_{d} \\ A_{d}{}^{T} & -R \end{bmatrix} \mathbf{p} 0$$

En multipliant à gauche et à droit par $diag[S, I_n]$

$$\begin{bmatrix} -S & SA_{d} \\ A_{d}{}^{T}S & -R \end{bmatrix} \mathbf{p} 0 \quad (2.34)$$

L'application du complément de Schur à l'inégalité (2.33) conduit à l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} -R^{-1}/2 & t_{m}A_{d} \\ t_{m}A_{d}{}^{T} & A_{d}{}^{T}SA_{d} - R \end{bmatrix} \mathbf{p} 0$$

En multipliant à gauche et à droite par $diag[S, I_n]$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{bmatrix} -R/2 & t_m R A_d \\ t_m A_d{}^T R & A_d{}^T S A_d - R \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0 \tag{2.35}$$

Soit le changement de variable $\begin{cases} \overline{P} = t_m P \\ \overline{R} = t_m R \end{cases}$

Les inégalités précédentes deviennent alors

$$A_{cl}{}^T \overline{P} + \overline{P} A_{cl}\ \mathbf{p}\ 0 \tag{2.36}$$

$$\begin{bmatrix} A_{cl}{}^T \overline{P} + \overline{P}\, A_{cl} & \overline{P} & A_{cl}{}^T \overline{R} \\ \overline{P} & -\mathrm{S} & 0_n \\ \overline{R}\,\mathrm{A_{cl}} & 0_n & -R/2 \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0 \tag{2.37}$$

$$\begin{bmatrix} -S & S A_d \\ A_d{}^T S & -R \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0 \tag{2.38}$$

$$\begin{bmatrix} -R/2 & \overline{R} A_d \\ A_d{}^T \overline{R} & A_d{}^T S A_d - R \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0 \tag{2.39}$$

Soit le changement de variable $\begin{cases} y = K_p Q \\ \overline{P} = Q^{-1} \end{cases}$

La condition (2.35) devient

$$\begin{bmatrix} -Q & 0_n \\ 0_n & AQ + By + y^T B^T + Q A^T \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0 \tag{2.40}$$

On résout donc l'équation (2.40), on obtient Q, y

Ce qui nous permet d'obtenir les valeurs de $\begin{cases} K_p = yQ^{-1} = y\overline{P} \\ \overline{P} = Q^{-1} \end{cases}$

On résout donc notre système d'équation d'LMI (2.36), (2.37),(2.38) et (2.39).

La résolution de ces équations nous donne $\overline{R}, S, R$ donc la valeur de $\begin{cases} t_m = \dfrac{\|\overline{R}\|}{\|R\|} \\ P = \dfrac{\overline{P}}{t_m} \end{cases}$

On cherche un t_m tel que ce dernier soit le plus grand possible.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tenté d'obtenir un meilleur résultat (t_m plus grand) pour les systèmes LTI à mesures discrètes; mais sans succès. En effet, pour le même système, le théorème de la section 4.1 permet l'obtention d'un t_m=1.68s; nos équation par contre ne

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

permettent d'atteindre que t_m=0.6 s. Dans le prochain chapitre, on s'intéressera à l'observation et la stabilisation par retour de sortie0.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Le but de la stabilisation est de construire une loi de commande en boucle fermée, soit par retour d'état statique $u(t) = K_p\, x(t)$, soit par retour d'état dynamique $u(t) = K_p\, \hat{x}(t)$, afin de ramener le système à l'origine quel que soit le point initial $x(t_0)$. Le premier type de commande est basé sur l'utilisation à chaque instant de l'état du système pour déterminer la commande, par conséquent l'état doit être accessible pour tout $t \geq t_0$. Dans le cas où l'état n'est pas accessible, la commande réellement mise en œuvre est celle par retour de sortie dynamique, qui est basée sur l'utilisation d'un observateur asymptotique de l'état du système : $\hat{x}(t) \to x(t)$ où $\hat{x}(t)$ est l'estimé de $x(t)$.

Dans ce chapitre on présentera un rappel sur l'observation des systèmes LTI et leur stabilisation par retour de sortie. Ces résultats seront étendus aux cas des systèmes LTI avec mesures discrètes.

1. *Observation des Systèmes LTI*

Soit le système LTI suivant supposé observable.

Où $x \in IR^n$ et $u \in IR^m$ représentent respectivement la variable d'état et le vecteur d'entrée de commande; A et B sont des matrices constantes et de dimensions appropriées:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

L'observateur de Luenberger pour ce type de système est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) - L(\hat{y} - y) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) - L\,C(\hat{x} - x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

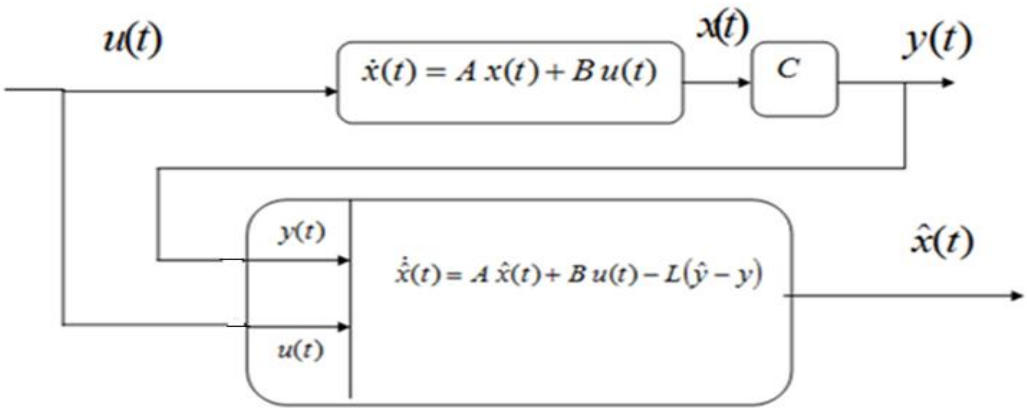

Fig.1: Observateur de Luenberger

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

On cherche à déterminer le gain d'observation L de sorte que l'état observée $\hat{x}(t) \underset{t\to\infty}{\to} x(t)$.

Soit l'erreur d'observation $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$; la dynamique de l'erreur d'observation est donnée dans ce cas par:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \\ &= A\,e(t) - L\,C\,e(t) \\ \dot{e}(t) &= [A - L\,C]\; e(t) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

$\hat{x}(t) \underset{t\to\infty}{\to} x(t)$ ssi $e(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$; pour prouver que l'erreur $e(t) \to 0$ on considère la fonction candidate de Lyapunov suivante:

$$V(e) = e(t)^T P_o\, e(t) \qquad \text{où} \qquad P_o = P_o^{\,T} > 0$$

La dérivée de cette fonction est donnée par:

$$\dot{V}(e) = \dot{e}(t)^T P_o e(t) + e(t)^T P_o \dot{e}(t)$$

$$\dot{V}(e) = e(t)^T \left[(A - LC)^T P_o + P_o (A - LC)\right] e(t) \qquad (3.4)$$

Pour que $\dot{V}(e)$ soit négative il est nécessaire et suffisant qu'il existe une matrice définie positive P_o et matrice de gain L vérifiant la condition suivante:

$$(A - LC)^T P_o + P_o\,(A - LC) < 0 \qquad (3.5)$$

En considérant le changement de variable $W = P_o\, L$, cette condition peut être formulée sous la forme LMI suivante:

$$\begin{bmatrix} -P_o & 0_n \\ 0_n & A^T P_o + P_o A - C^T W^T - W\,C \end{bmatrix} < 0 \qquad (3.6)$$

La matrice de gain est dans ce cas déterminée par: $L = P_0^{-1}\; W$

2. Stabilisation par retour de sortie

Soit le système LTI précédent (3.1) supposé commandable et observable. On cherche à déterminer le gain d'observation L et le gain de commande K_p permettant de stabiliser le système en ne mesurant que la sortie $y(t)$ i.e. $\hat{x}(t) \underset{t\to\infty}{\to} x(t)$ et $x(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Le système (3.7) résume l'ensemble des équations de ce problème.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) - L\left(\hat{y} - y\right) \\ u(t) = -K_p\,\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.7}$$

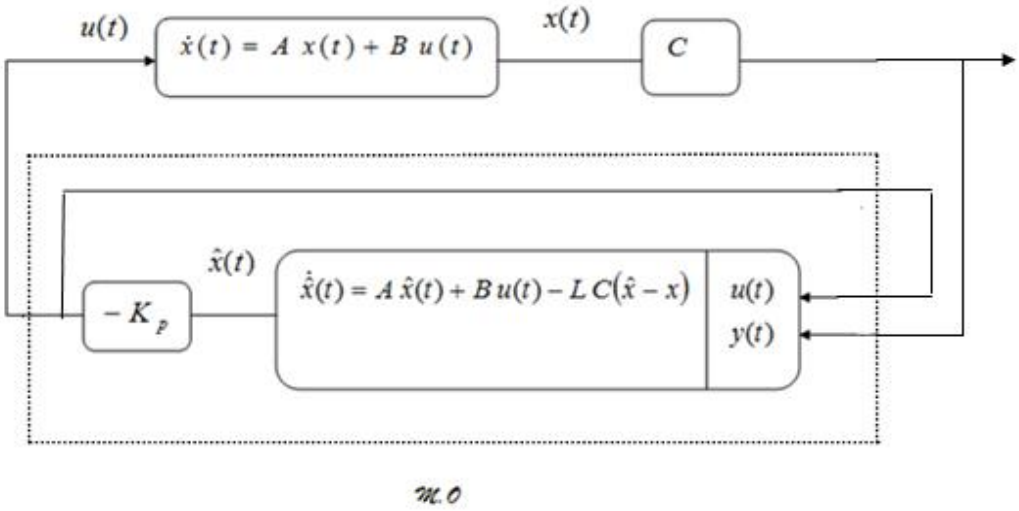

Fig.2: stabilisation par retour de sortie

En considérant l'erreur d'observation $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$; la dynamique augmentée du système et de l'erreur d'observation peut être écrite comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) - B\,K_p\,\hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) = \left[A - L\,C\right]e(t) \\ e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) - B\,K_p\left[e(t) + x(t)\right] \\ \dot{e}(t) = \left[A - L\,C\right]e(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A - B\,K_p\right]x(t) - B\,K_p\,e(t) \\ \dot{e}(t) = \left[A - L\,C\right]e(t) \end{cases} \tag{3.8}$$

Soit la nouvelle variable d'état $X^T = \left[x^T \;\; e^T\right]^T$, le système (3.8) devient:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} A - B\,K_p & -B\,K_p \\ 0_n & A - L\,C \end{bmatrix} X = \overline{A}\;X$$

Cette dernière équation montre que X tend vers zéro ssi les matrices $\left[A - B\,K_p\right]$ et $\left[A - L\,C\right]$ sont stables du fait que la matrice $\overline{A}$ est bloc triangulaire. Ceci impose donc les deux LMIs:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -Q & 0_n \\ 0_n & AQ + BY + Y^T B^T + QA^T \end{bmatrix} \mathbf{p}\ 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -P_o & 0_n \\ 0_n & A^T P_o + P_o A - C^T W^T - W C \end{bmatrix} < 0$$

Tel que:

$$L = P_0^{-1} W$$
$$Q = P^{-1}$$
$$Y = KQ$$

3. Observation des systèmes LTI à mesures discrètes

Soit le système LTI observable précédent (3.1). Pour ce système en considère qu'il existe un gain d'observation L permettant d'observer l'état $x(t)$ à partir de la sortie mesurée $y(t)$. Pour le même gain d'observation L et dans le cas d'une sortie mesurée à des instants discrets t_k, on cherche à déterminer la valeur maximale de temps t_m, entre deux mesures successives, pour lequel l'observation $\hat{x}(t)$ tend asymptotiquement vers l'état $x(t)$.

La dynamique de l'observateur à mesure discrètes est obtenue par une simple modification de l'observateur de Luenberger précédent. Le système à mesure discrète et l'observateur correspondent sont donnés par les deux systèmes d'équations suivants:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t_k) = C\,x(t_k) \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,\left[\hat{y}(t_k) - y(t_k)\right] \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\left[\hat{x}(t_k) - x(t_k)\right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

Soit l'erreur d'observation $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$; la dynamique de l'erreur d'observation est donnée dans ce cas par:

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)$$
$$\dot{e}(t) = A\,e(t) + L\,C\,e(t_k) \tag{3.11}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

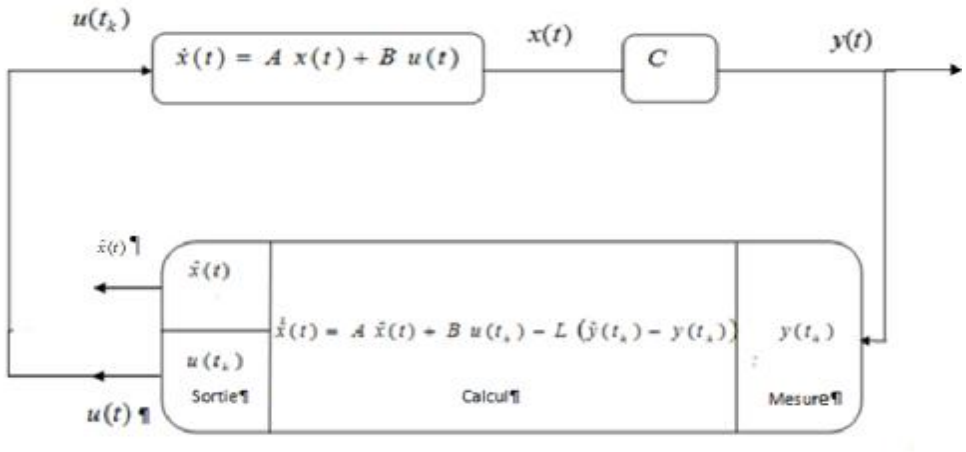

Fig.3: observation des systèmes LTI à mesures discrètes

Le système (3.11) peut être vu comme un système à retard variable inconnu $t(t)$; mais admettant comme valeur maximale t_m. Dans ce cas on peut écrire:

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Ac\,e(t - t(t)) \tag{3.12}$$

Tel que:

$$\begin{cases} t = t - t_k \\ 0 \le t_{k+1} - t_k \le t_m \quad \forall k \ge 0 \\ Ac = L\,C \end{cases}$$

Prouver que $\hat{x}(t) \underset{t\to\infty}{\to} x(t)$ revient à prouver que $e(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$; le système (3.12) étant un système à retard on considère donc la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii suivante:

$$V(e_t) = e^T(t)\,\underline{P}\,e(t) + (t_m - t(t))\,y_0^T(t)\,\underline{S}\,y_0(t) + (t_m - t(t))\int_{t_k}^{t} \dot{e}^T(q)\,\underline{R}\,\dot{e}(q)dq \tag{3.13}$$

Tel que:

$$\begin{cases} \underline{P} = \underline{P}^T > 0 \;;\; \underline{S} = \underline{S}^T > 0 \;;\; \underline{R} = \underline{R}^T > 0 \\ y_0(t) = e(t) - e(t_k) \end{cases}$$

La dérivée de cette fonctionnelle est donnée par:

$$\dot{V}(e_t) = 2e^T(t)\,\underline{P}\,\dot{e}(t) + 2(t_m - t(t))\,y_0^T(t)\,\underline{S}\,\dot{e}(t) + (t_m - t(t))\,\dot{e}^T(t)\,\underline{R}\,\dot{e}(t)$$
$$- y_0^T(t)\,\underline{S}\,y_0 - \int_{t_k}^{t} \dot{e}^T(q)\,\underline{R}\,\dot{e}(q)dq$$

Soit le nouveau vecteur $x(t) = \left[e^T(t) \quad e^T(t_k)\right]^T$. En fonction de ce vecteur on peut écrire les relations suivantes:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} e(t) = \underline{M}_1\, x(t) \\ \dot{e}(t) = A\, e(t) + A_c\, e(t_k) = \underline{M}_3\, x(t) \\ e(t) - e(t_k) = \underline{M}_2\, x(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underline{M}_1 = [I_n \quad 0_n] \\ \underline{M}_2 = [I_n \quad -I_n] \\ \underline{M}_3 = [A \quad A_c] \end{cases}$$

Dans ce cas la dérivée devient:

$$\dot{V}(e_t) = x^T(t) \begin{bmatrix} 2\underline{M}_1^T \underline{P}\, \underline{M}_3 - \underline{M}_2^T \underline{S}\, \underline{M}_2 \\ + t_m \left(2\underline{M}_3^T \underline{S}\, \underline{M}_2 + \underline{M}_3^T \underline{R}\, \underline{M}_3 \right) \\ + t(t) \left(-\underline{M}_3^T \underline{R}\, \underline{M}_3 - 2\underline{M}_3^T \underline{S}\, \underline{M}_2 \right) \end{bmatrix} x(t) - \int_{t_k}^{t} \dot{e}^T(q)\, \underline{R}\, \dot{e}(q) dq \qquad (3.14)$$

Soit l'égalité $2x^T(t)\underline{N}\underline{M}_2 x(t) = 2x^T(t)\underline{N} \int_{t_k}^{t} \dot{e}(q) dq$; où $\underline{N} \in IR^{2n \times n}$ est une matrice quelconque. L'inégalité suivante est toujours vérifiée:

$$2x^T(t)\underline{N}\, \underline{M}_2 x(t) \le t(t)\, x^T(t)\underline{N}\underline{R}^{-1}\underline{N}^T x(t) + \int_{t_k}^{t} \dot{e}^T(q)\, \underline{R}\, \dot{e}(q) dq$$

En remplaçant dans (3.14) la dérivée $\dot{V}(e_t)$ peut être réécrite comme suit:

$$\dot{V}(e_t) \le x^T(t) \left\{ \underline{\Pi}_1 + t_m \underline{\Pi}_2 + t(t) \left(\underline{N}\underline{R}^{-1}\underline{N}^T - \underline{\Pi}_2 \right) \right\} x(t) \qquad (3.15)$$

Tel que:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_1 = \underline{M}_1^T \underline{P}\, \underline{M}_3 + \underline{M}_3^T \underline{P}\, \underline{M}_1 - \underline{M}_2^T \underline{S}\, \underline{M}_2 - \underline{N}\, \underline{M}_2 - \underline{M}_2^T \ \ \underline{N}^T \\ \underline{\Pi}_2 = \underline{M}_2^T \underline{S}\, \underline{M}_3 + \underline{M}_3^T \underline{S}\, \underline{M}_2 + \underline{M}_3^T \underline{R}\, \underline{M}_3 \end{cases}$$

La dérivée (3.15) de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est linéaire en fonction du retard $t(t) \in [0 \quad t_m]$; dans ce cas il est nécessaire et suffisant de vérifier la négativité de cette dérivée aux deux extrémités $t(t) = 0$ et $t(t) = t_m$; cela nous donne les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_1 + t_m \underline{\Pi}_2 \le 0 \\ \underline{\Pi}_1 + t_m \underline{N}\underline{R}^{-1}\underline{N}^T \le 0 \end{cases} \qquad (3.16)$$

Ces deux conditions peuvent être écrites sous forme LMI comme suit:

$$\begin{aligned} & \underline{\Pi}_1 + t_m \underline{\Pi}_2 \le 0 \\ & \begin{bmatrix} \underline{\Pi}_1 & t_m \underline{N} \\ t_m \underline{N}^T & -t_m \underline{R} \end{bmatrix} \le 0 \end{aligned} \qquad (3.17)$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Pour le système donné en **[7]** et pour un gain $L=\begin{bmatrix}1.025 & 0.2012\end{bmatrix}$, la fonction d'optimisation *gevp* (sous Matlab) donne la valeur maximale $t_m = 1.8812\text{s}$ permettant de garantir la stabilité de l'observateur développé.

4. Stabilisation par retour de sortie des systèmes à mesures discrètes

Soit le système LTI commadable et observable précédent (3.1). Pour ce système en considère qu'il existe un gain d'observation L et un gain de commande K_p permettant de stabiliser l'état $x(t)$ à partir de la sortie mesurée $y(t)$. Pour les mêmes gains, d'observation L et de commande K_p, et dans le cas d'une sortie mesurée à des instants discret t_k, on cherche à déterminer la valeur maximale de temps t_m, entre deux mesures successives, pour lequel $\hat{x}(t)$ tend asymptotiquement vers l'état $x(t)$ et $x(t)$ tend asymptotiquement vers 0. On propose deux versions différentes pour réaliser cet objectif.

4.1 Première Version

Dans cette première version, la commande continue $u(t)$ est fonction de l'état observé continu $u(t) = K_p\hat{x}(t)$. Les équations suivantes correspondent au problème étudié:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ u(t) = K_p\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\left[\hat{x}(t_k) - x(t_k)\right] \\ y(t_k) = C\;x(t_k) \end{cases} \tag{3.19}$$

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

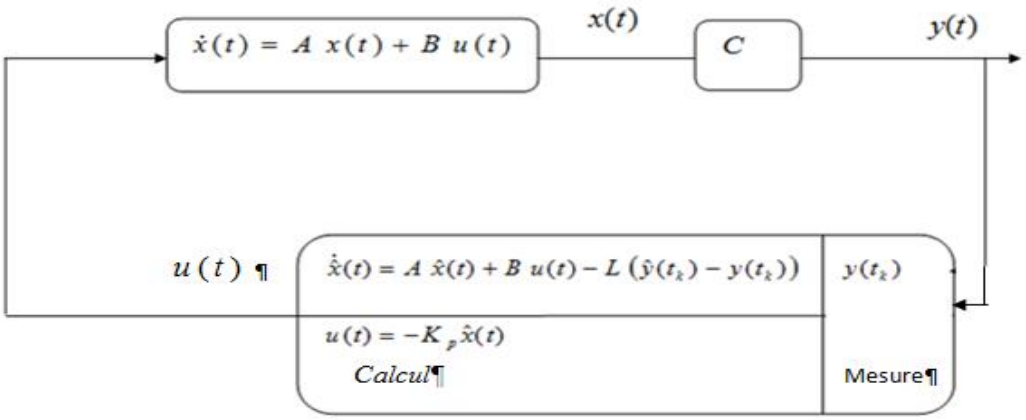

Fig.4: Stabilisation par retour de sortie discrètes Version 1

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,K_p\,\hat{x}(t) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + L\,C\;\; e(t_k) \end{cases} \tag{3.20}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left[A + B\,K_p\right] x(t) + B\,K_p\; e(t) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + L\,C\;\; e(t_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{cl}\; x(t) + A_d\;\; e(t) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + A_c\;\; e(t_k) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl} & A_d \\ 0_n & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_k) \\ e(t_k) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}_1\;\; \bar{X}(t) + \bar{B}_1\;\; \bar{X}(t_k)$$

Où

$$A_{cl} = A + B\,K_p \qquad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{cl} & A_d \\ 0_n & A \end{bmatrix}$$

$$A_d = B\,K_p \qquad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & A_c \end{bmatrix}$$

$$A_c = L\,C$$

$$\dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}_1\;\; \bar{X}(t) + \bar{B}_1\;\; \bar{X}(t - t(t)) \tag{3.22}$$

Si on considère la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante

$$V(X_t) = X^T(t)\,\underline{P_1}\;X(t) + (t_{m1} - t(t))\;y_S^T(t)\,\underline{S_1}\,y_S(t) + (t_{m1} - t(t))\int_{t_k}^{t} \dot{\bar{X}}^T(q)\,\underline{R_1}\;\dot{\bar{X}}(q)dq$$

Tel que

$$\begin{cases} \underline{P_1} = \underline{P_1}^T > 0\;\;;\;\; \underline{S_1} = \underline{S_1}^T > 0\;\;;\;\; \underline{R_1} = \underline{R_1}^T > 0 \\ y_s(t) = X(t) - X(t_k) \end{cases}$$

La dérivée de cette fonctionnelle est donnée par:

$$\dot{V}(X_t) = 2X^T(t)\,\underline{P_1}\;\dot{X}(t) + 2\,(t_{m1} - t(t))\;y_S^T(t)\,\underline{S_1}\;\dot{X}(t) + (t_{m1} - t(t))\,\dot{X}^T(t)\,\underline{R_1}\;\dot{X}(t)$$
$$-y_S^T(t)\,\underline{S_1}\,y_S - \int_{t_k}^{t} \dot{\bar{X}}^T(q)\,\underline{R_1}\;\dot{\bar{X}}(q)dq$$

Soit le nouveau vecteur $x(t) = \left[X^T(t)\;\; X^T(t_k)\right]^T$. En fonction de ce vecteur on peut écrire les relations suivantes:

$$\begin{cases} X(t) = \underline{M}_1\,x(t) \\ \dot{\bar{X}}(t) = \bar{A}_1\;\; \bar{X}(t) + \bar{B}_1\;\; \bar{X}(t_k) = \underline{M}_3\,x(t) \\ X(t) - X(t_k) = \underline{M}_2\,x(t) \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \underline{M}_1 = \left[I_n \quad 0_n\right] \\ \underline{M}_2 = \left[I_n \quad -I_n\right] \\ \underline{M}_3 = \left[A_1 \quad B_1\right] \end{cases}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Dans ce cas la dérivée devient:

$$\dot{V}(X_t) = x^T(t)\begin{bmatrix} 2\underline{M}_1^T\underline{P}_1\underline{M}_3 - \underline{M}_2^T\underline{S}_1\underline{M}_2 \\ +t_{m1}\left(2\underline{M}_3^T\underline{S}_1\underline{M}_2 + \underline{M}_3^T\underline{R}_1\underline{M}_3\right) \\ +t(t)\left(-\underline{M}_3^T\underline{R}_1\underline{M}_3 - 2\underline{M}_3^T\underline{S}_1\underline{M}_2\right) \end{bmatrix} x(t) - \int_{t_k}^{t} \dot{X}^T(q)\,\underline{R}_1\,\dot{X}(q)dq \quad (3.23)$$

Soit l'égalité $2x^T(t)\underline{N}\underline{M}_2 x(t) = 2x^T(t)\underline{N}\int_{t_k}^{t}\dot{X}(q)dq$; où $\underline{N} \in IR^{2n\ n}$ est une matrice quelconque. L'inégalité suivante est toujours vérifiée:

$$2x^T(t)\underline{N}\,\underline{M}_2 x(t) \le t(t)\,x^T(t)\underline{N}\underline{R}_1^{-1}\underline{N}^T x(t) + \int_{t_k}^{t}\dot{X}^T(q)\,\underline{R}_1\,\dot{X}(q)dq$$

En remplaçant dans (3.23) la dérivée $\dot{V}(X_t)$ peut être réécrite comme suit:

La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii précédente est donnée par ;

$$\dot{V}(X_t) \le x^T(t)\left\{\underline{\Pi}_{1V1} + t_{m1}\underline{\Pi}_{2V1} + t(t)\left(\underline{N}\underline{R}_1^{-1}\underline{N}^T - \underline{\Pi}_{2V1}\right)\right\}x(t)$$

Tel que:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_{1V1} = \underline{M}_1^T\underline{P}_1\underline{M}_3 + \underline{M}_3^T\underline{P}_1\underline{M}_1 - \underline{M}_2^T\underline{S}_1\underline{M}_2 - \underline{N}\,\underline{M}_2 - \underline{M}_2^T\ \underline{N}^T \\ \underline{\Pi}_{2V1} = \underline{M}_2^T\underline{S}_1\underline{M}_3 + \underline{M}_3^T\underline{S}_1\underline{M}_2 + \underline{M}_3^T\underline{R}_1\underline{M}_3 \end{cases}$$

La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est linéaire en fonction du retard $t(t) \in [0 \quad t_{m1}]$; dans ce cas il est nécessaire et suffisant de vérifier la négativité de cette dérivée aux deux extrémités $t(t) = 0$ et $t(t) = t_{m1}$; cela nous donne les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_{1V1} + t_{m1}\underline{\Pi}_{2V1} \le 0 \\ \underline{\Pi}_{1V1} + t_{m1}\underline{N}\underline{R}_1^{-1}\underline{N}^T \le 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

Ces deux conditions peuvent être écrites sous forme LMI comme suit:

$$\begin{matrix} \underline{\Pi}_{1V1} + t_{m1}\underline{\Pi}_{2V1} \le 0 \\ \begin{bmatrix} \underline{\Pi}_1 & t_{m1}\underline{N} \\ t_{m1}\underline{N}^T & -t_{m1}\underline{R}_1 \end{bmatrix} \le 0 \end{matrix} \quad (3.25)$$

4.2 Deuxième Version

Dans cette deuxième version, la commande utilisée $u(t)$ est fonction de l'état observé discret $u(t) = u(t_k) = K_p\hat{x}(t_k)$. Les équations suivantes correspondent au problème étudié:

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ u(t_k) = K_p\,\hat{x}(t_k) \end{cases} \tag{3.26}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\,\hat{x}(t) + B\,u(t) + L\,C\left[\hat{x}(t_k) - x(t_k)\right] \\ y(t_k) = C\;\; x(t_k) \end{cases} \tag{3.27}$$

$$e(t_k) = \hat{x}(t_k) - x(t_k)$$

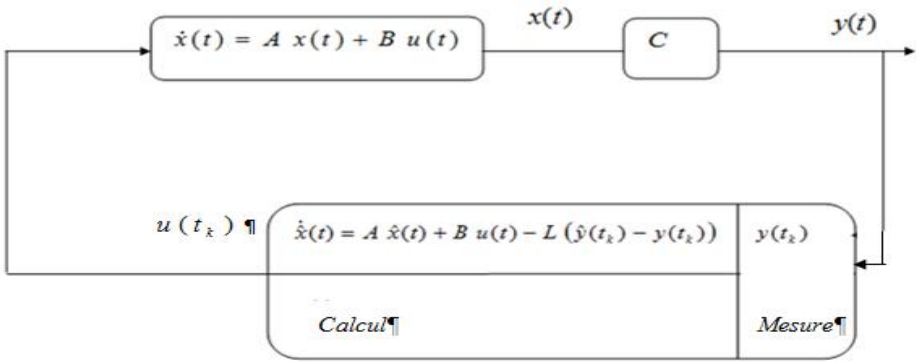

Fig.5: Stabilisation par retour de sortie discrètes Version 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,K_p\,\hat{x}(t_k) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + L\,C\;\; e(t_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,K_p\;\, e(t_k) + BK_p x(t_k) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + L\,C\;\; e(t_k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + A_d\;\; e(t_k) + A_d\;\; x(t_k) \\ \dot{e}(t) = A\,e(t) + A_c\;\; e(t_k) \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d & A_d \\ 0_n & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_k) \\ e(t_k) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Où

$$A_{cl} = A + B\,K_p \qquad \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{bmatrix}$$

$$A_d = B\,K_p \qquad \overline{B}_2 = \begin{bmatrix} A_d & A_d \\ 0_n & A_c \end{bmatrix}$$

$$A_c = L\,C$$

$$\dot{\overline{X}}(t) = \overline{A}_2\;\; \overline{X}(t) + \overline{B}_2\;\; \overline{X}(t - t(t)) \tag{3.30}$$

Si on considère la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante

$$V(X_t) = X^T(t)\,\underline{P_2}\;X(t) + (t_{m2} - t(t))\;y_S^T(t)\,\underline{S_2}\;y_S(t) + (t_{m2} - t(t))\int_{t_k}^{t} \dot{\overline{X}}^T(q)\,\underline{R_2}\;\dot{\overline{X}}(q)dq$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Tel que

$$\begin{cases} \underline{P_2} = \underline{P_2}^T > 0 \ ; \ \underline{S_2} = \underline{S_2}^T > 0 \ ; \ \underline{R_2} = \underline{R_2}^T > 0 \\ \underline{y_S}(t) = X(t) - X(t_k) \end{cases}$$

La dérivée de cette fonctionnelle est donnée par:

$$\dot{V}(X_t) = 2X^T(t)\,\underline{P_2}\,\dot{X}(t) + 2(t_{m2} - t(t))\,y_S^T(t)\,\underline{S_2}\,\dot{X}(t) + (t_{m2} - t(t))\,\dot{X}^T(t)\,\underline{R_2}\,\dot{X}(t) - y_S^T(t)\,\underline{S_2}\,y_S - \int_{t_k}^{t} \dot{X}^T(q)\,\underline{R_2}\,\dot{X}(q)dq$$

Soit le nouveau vecteur $x(t) = \left[X^T(t) \quad X^T(t_k)\right]^T$. En fonction de ce vecteur on peut écrire les relations suivantes:

$$\begin{cases} X(t) = \underline{\underline{M}}_1\, x(t) \\ \dot{X}(t) = \overline{A}_2\ \overline{X}(t) + \overline{B}_2\ \overline{X}(t_k) = \underline{M}_3\, x(t) \\ X(t) - X(t_k) = \underline{M}_2\, x(t) \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \underline{M}_1 = \left[I_n \quad 0_n\right] \\ \underline{M}_2 = \left[I_n \quad -I_n\right] \\ \underline{M}_3 = \left[A_2 \quad B_2\right] \end{cases}$$

Dans ce cas la dérivée devient:

$$\dot{V}(X_t) = x^T(t)\begin{bmatrix} 2\underline{M}_1^T\underline{P}_2\,\underline{M}_3 - \underline{M}_2^T\underline{S}_2\,\underline{M}_2 \\ +t_{m2}\left(2\underline{M}_3^T\underline{S}_2\,\underline{M}_2 + \underline{M}_3^T\underline{R}_2\,\underline{M}_3\right) \\ +t(t)\left(-\underline{M}_3^T\underline{R}_2\,\underline{M}_3 - 2\underline{M}_3^T\underline{S}_2\,\underline{M}_2\right) \end{bmatrix} x(t) - \int_{t_k}^{t} \dot{X}^T(q)\,\underline{R_2}\,\dot{X}(q)dq \quad (3.31)$$

Soit l'égalité $2x^T(t)\underline{N}\underline{M}_2 x(t) = 2x^T(t)\underline{N}\int_{t_k}^{t} \dot{X}(q)dq$; où $\underline{N} \in IR^{2n\ n}$ est une matrice quelconque. L'inégalité suivante est toujours vérifiée:

$$2x^T(t)\underline{N}\,\underline{M}_2 x(t) \le t(t)\,x^T(t)\underline{N}\underline{R_2^{-1}}\underline{N}^T x(t) + \int_{t_k}^{t} \dot{X}^T(q)\,\underline{R_2}\,\dot{X}(q)dq$$

En remplaçant dans (3.31) la dérivée $\dot{V}(X_t)$ peut être réécrite comme suit:

La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii précédente est donnée par ;

$$\dot{V}(X_t) \le x^T(t)\left\{\underline{\Pi}_{1V2} + t_{m2}\underline{\Pi}_{2V2} + t(t)\left(\underline{N}\underline{R_2^{-1}}\underline{N}^T - \underline{\Pi}_{2V2}\right)\right\}x(t)$$

Tel que:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_{1V2} = \underline{M}_1^T\underline{P}_2\,\underline{M}_3 + \underline{M}_3^T\underline{P}_2\,\underline{M}_1 - \underline{M}_2^T\underline{S}_2\,\underline{M}_2 - \underline{N}\,\underline{M}_2 - \underline{M}_2^T\ \underline{N}^T \\ \underline{\Pi}_{2V2} = \underline{M}_2^T\underline{S}_2\,\underline{M}_3 + \underline{M}_3^T\underline{S}_2\,\underline{M}_2 + \underline{M}_3^T\underline{R}_2\,\underline{M}_3 \end{cases}$$

La dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii est linéaire en fonction du retard $t(t) \in \left[0 \quad t_{m2}\right]$; dans ce cas il est nécessaire et suffisant de vérifier la négativité de cette

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

dérivée aux deux extrémités $\dot{t}(t)=0$ et $\dot{t}(t)=t_{m2}$; cela nous donne les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{cases} \underline{\Pi}_{1V2}+t_{m2}\underline{\Pi}_{2V2}\leq 0 \\ \underline{\Pi}_{1V2}+t_{m2}\underline{N}\underline{R_2}^{-1}\underline{N}^{T}\leq 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Ces deux conditions peuvent être écrites sous forme LMI comme suit:

$$\begin{matrix} \underline{\Pi}_{1V2}+t_{m2}\underline{\Pi}_{2V2}\leq 0 \\ \begin{bmatrix} \underline{\Pi}_{1} & t_{m2}\underline{N} \\ t_{m2}\underline{N}^{T} & -t_{m2}\underline{R_2} \end{bmatrix}\leq 0 \end{matrix} \tag{3.33}$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé l'observateur bien connu de Luenberger et la stabilisation par retour de sortie pour le cas des systèmes LTI. Nous avons étendu ces deux résultats au cas des systèmes LTI à mesures discrètes. En effet, nous avons démontré qu'il est possible toujours de trouver un t_m permettant de stabiliser l'observateur et le système par retour de sortie.

Différentes simulations seront présentées dans le prochain chapitre pour renforcer les résultats théoriques établies dans ce chapitre.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Dans l'objectif de montrer la validité de l'étude théorique développée dans les précédents chapitres; nous présenterons ici un ensemble de simulations.

1. *Description du système*

Soit le système LTI suivant. Où $x \in IR^2$ et $u \in IR$ représentent respectivement la variable d'état et le vecteur d'entrée de commande; $A et B$ sont des matrices constantes de dimension n=2:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) \end{cases} \qquad (4.1)$$

Avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Noter que le système instable (4.1) est commandable et observable.

2. *Simulation de l'observateur de Luenberger à mesures discrètes*

Pour le système (4.1) nous avons calculé le gain d'observation pour l'observateur de Luenberger continu et la valeur t_m correspondante pour l'observateur de Luenberger à mesures discrètes. Ces valeurs sont: $L = \begin{bmatrix} 0.9650 & 0.0628 \end{bmatrix}$ $t_m = 2.05s$.

Les courbes ci-après montrent les résultats de l'observateur de Luenberger à mesures discrètes pour différentes valeurs de t . Les valeurs considérées sont respectivement de l'ordre de 50%, 75% et 95% de t_m.

$e1(t)$: Erreur d'observation $\hat{x}1(t) - x1(t)$.

$x1$ et $x2$: les états réels du système.

$x1$L et $x2$L : les états observés, observateur de Luenberger.

$x1$LD et $x2$LD : les états observés, observateur de Luenberger à mesures discrètes.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

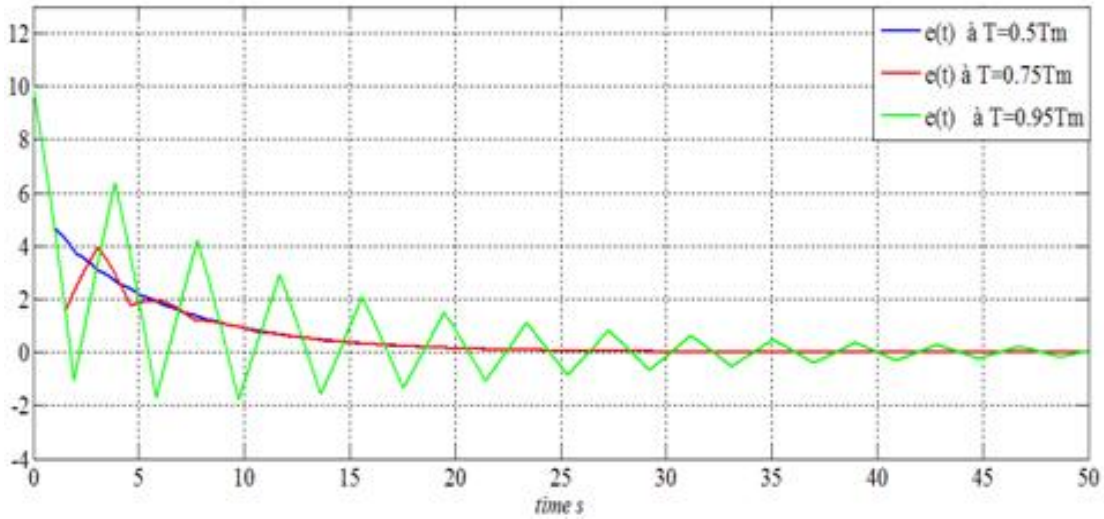

Fig.1: Erreur d'observation $e1(t)$ pour différents t $\mathbf{p}$ t_m

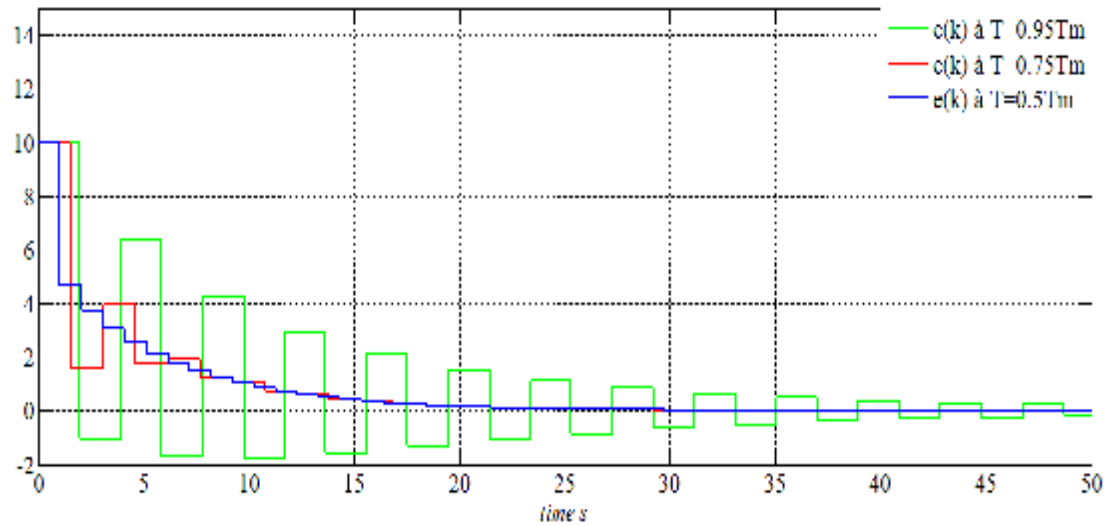

Fig.2: Erreur d'observation $e1(k)$ pour différents t $\mathbf{p}$ t_m

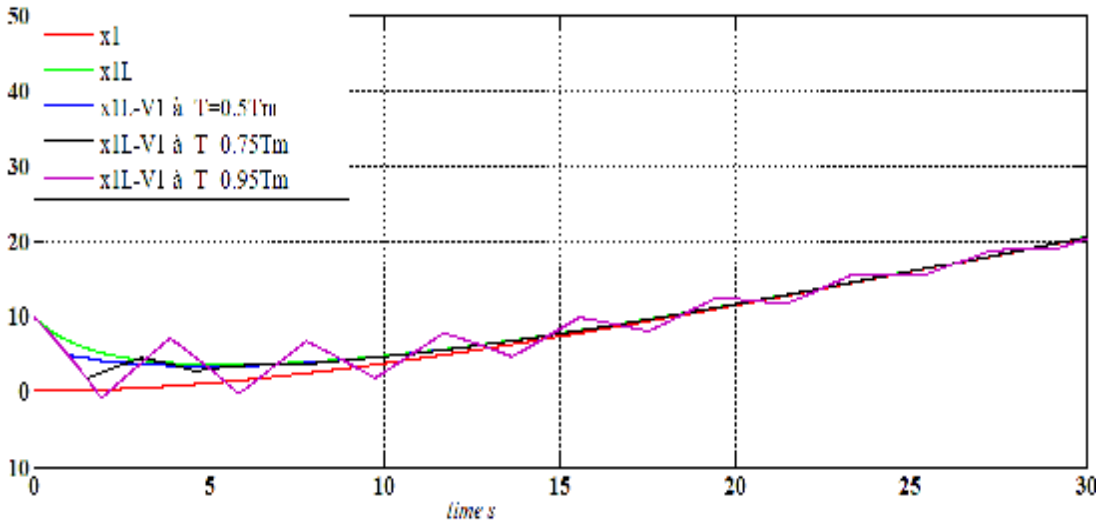

Fig.3: Comparaison entre: x1, x1L et x1LD pour différents $t < t_m$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

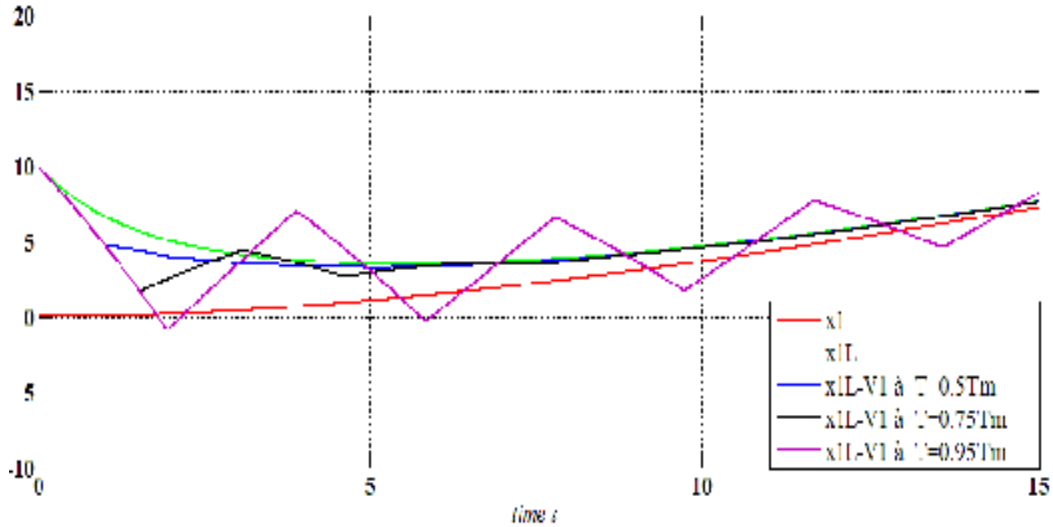

Fig.4: Zoom sur la figure 3.

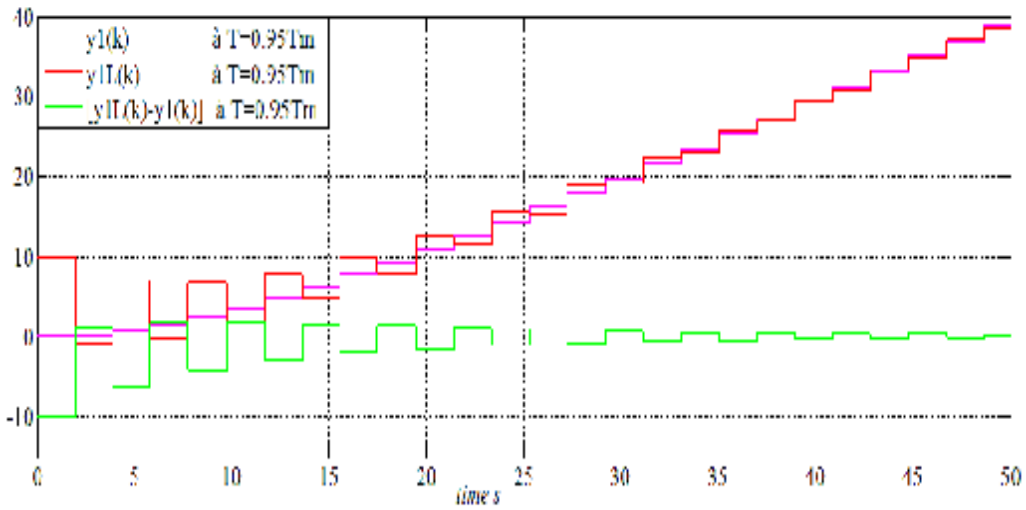

Fig.5: Comparaison entre: $y1(k)$ et $\hat{x}1(k)$ à $t = 0.95\, t_m$

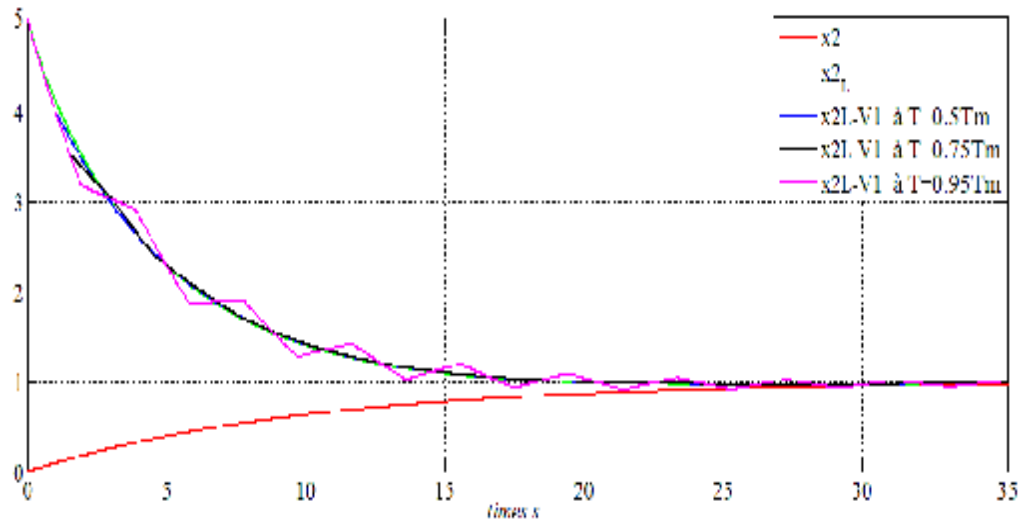

Fig.6: Comparaison entre: x2, x2L et x2LD pour différents $t < t_m$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

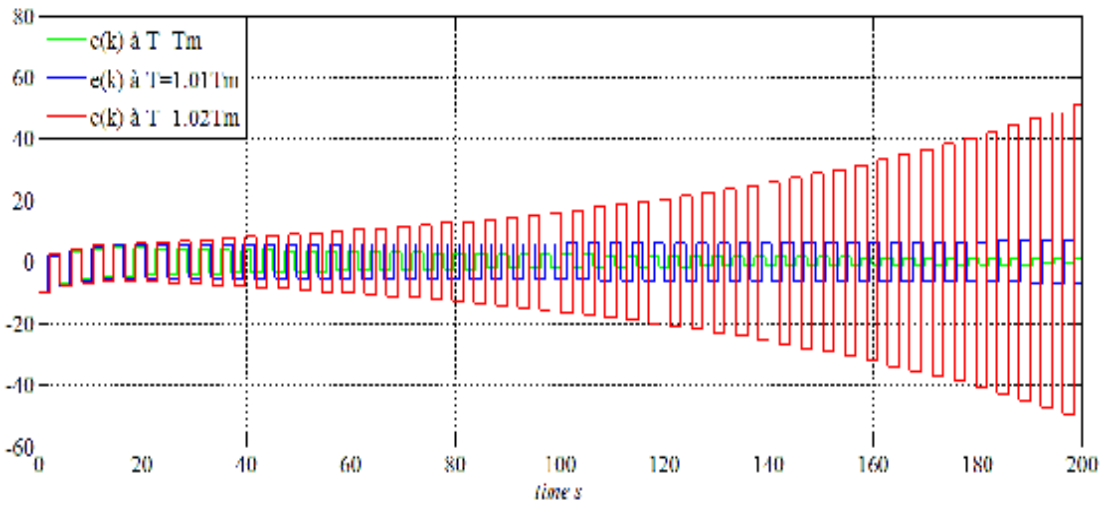

Fig.7: les erreurs d'observation $e(k)$ pour $t(t) \geq t_m$

Discussion:

Les figures de 1 à 6 montrent le bon comportement de l'observateur de Luenberger à mesures discrets. en effet, pour les valeurs de t inférieur à t_m, cet observateur converge asymptotiquement vers les l'états réels du système. Cependant, on remarque que la convergence est plus lente lorsque t approche de la valeur maximale t_m. D'autre part, on constate que l'observateur diverge pour des valeurs légèrement supérieurs à t_m (figure 7).

3. *Stabilisation par retour de sortie*

Pour le système (4.1), nous avons calculé le gain d'observation et le gain de commande pour la stabilisation par retour de sortie dans le cas purement continu. Pour ces deux valeurs de gain nous avons calculé les valeurs maximales t_m correspondantes aux deux versions étudiés dans le chapitre précédent. Ces valeurs sont: $L = [0.9650 \quad 0.0628]$ $K_p = [-3.75 \quad -11.5]$ $t_{m1} = 1.81s$ $t_{m2} = 1.66s$.

Les courbes ci-après montrent les résultats de stabilisation du système 4.1 pour les deux versions proposés. Pour les deux versions on utilise les valeurs suivantes pour t : $t = 0.5\ t_{m2}$; $t = 0.95\ t_{m2}$; $t = 1.05\ t_{m2}$.

$e1(t)$: Erreur d'observation $\hat{x}1(t) - x1(t)$.

$x1$ et $x2$: les états réels du système.

$x1L$ et $x2L$: les états observés, observateur de Luenberger.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$x1LD1$ et $x2LD1$: les états observés, observateur de Luenberger à mesures discrètes version 1.

$x1LD2$ et $x2LD2$: les états observés, observateur de Luenberger à mesures discrètes version 2.

Simulation1: $t = 0.5 \quad t_{m2}$ **:**

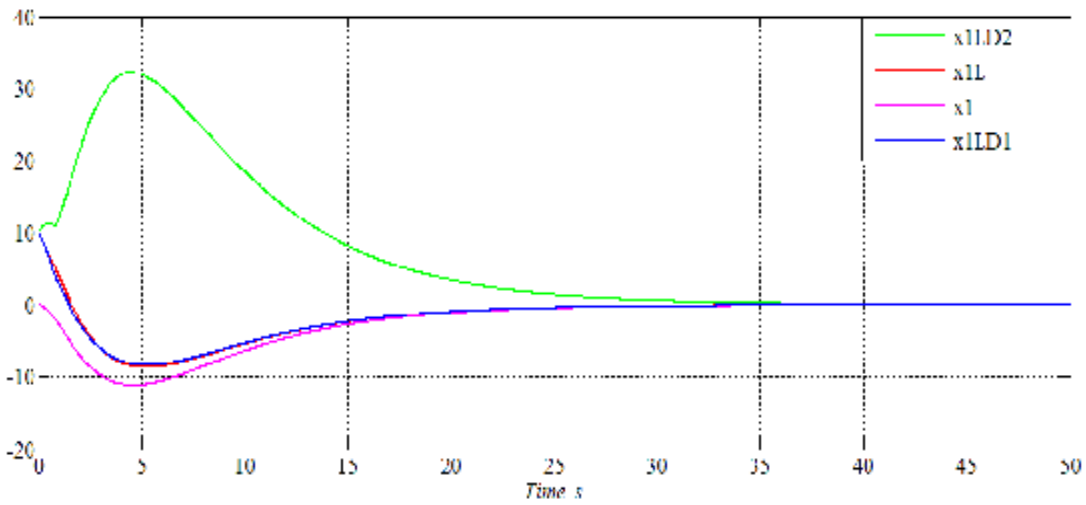

Fig.8: comparaison entre les états $x1, x1L, x1LD1$ et $x1LD2$

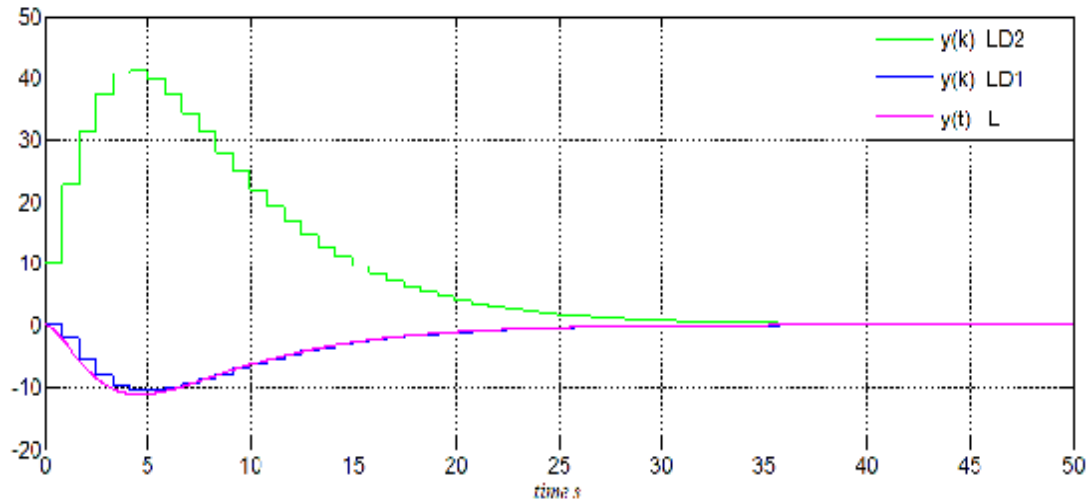

Fig.9: comparaison entre les sorties $y(t)$, $y(k)\ LD1$ et $y(k)\ LD2$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

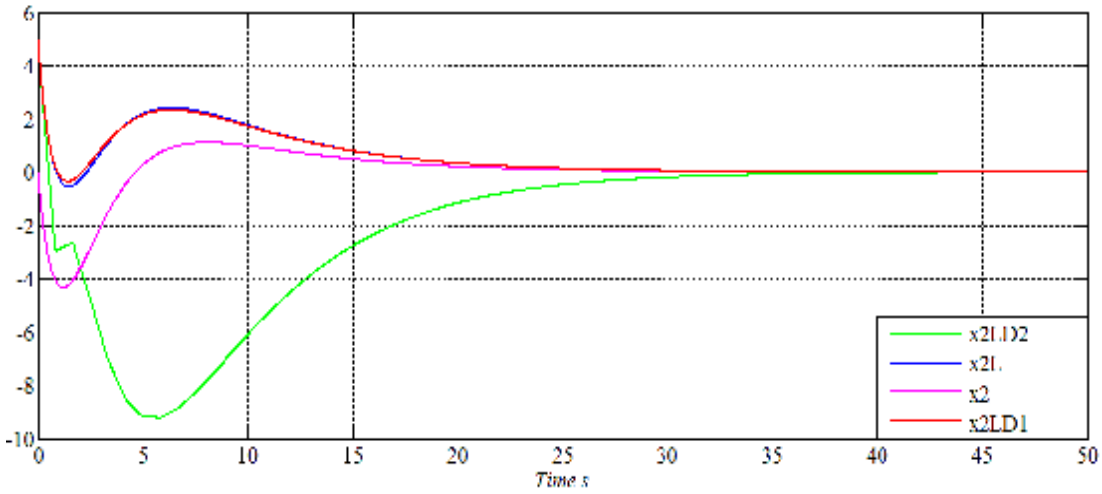

Fig.10: comparaison entre les états $x2, x2L, x2LD1$ et $x2LD2$

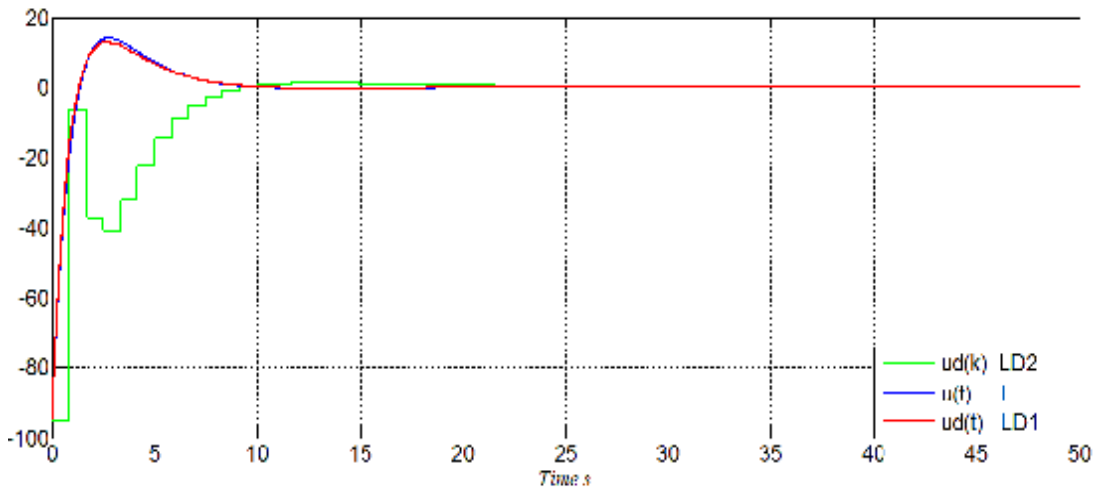

Fig.11: comparaison entre les commandes $uL, uLD1, uLD2$

Simulation2: $t = 0.95 \quad t_{m2}$ **:**

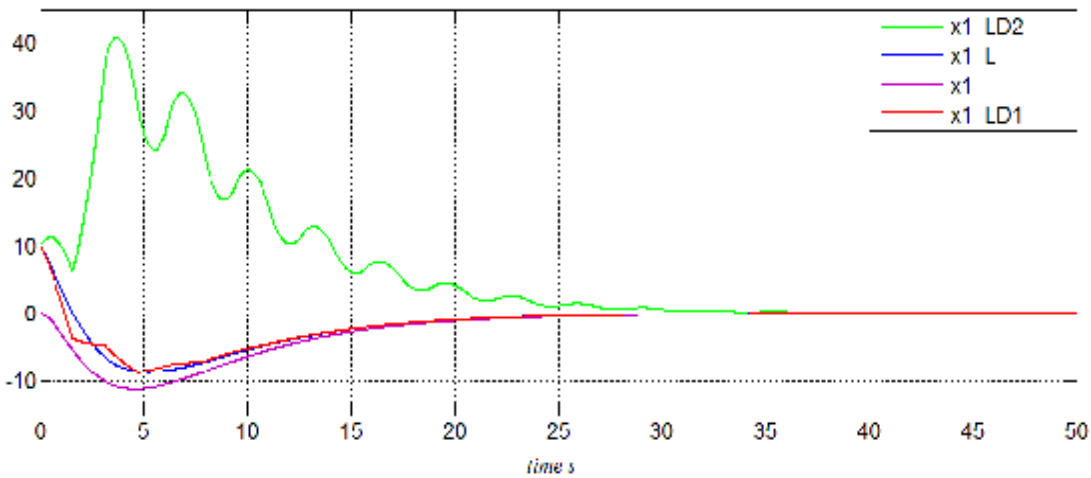

Fig.12: comparaison entre les états $x1, x1L, x1LD1$ et $x1LD2$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

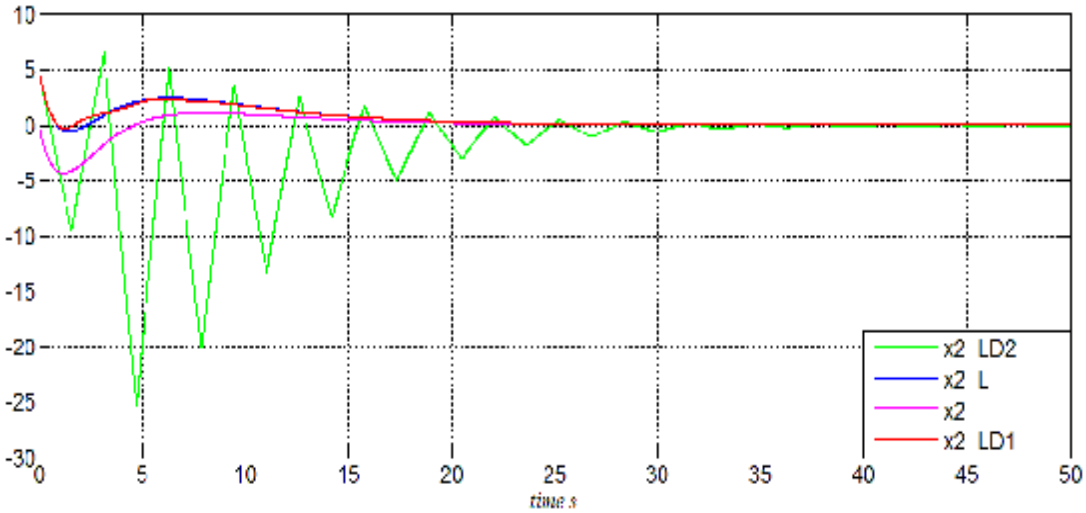

Fig.13: comparaison entre les états $x2, x2L, x2LD1$ et $x2LD2$

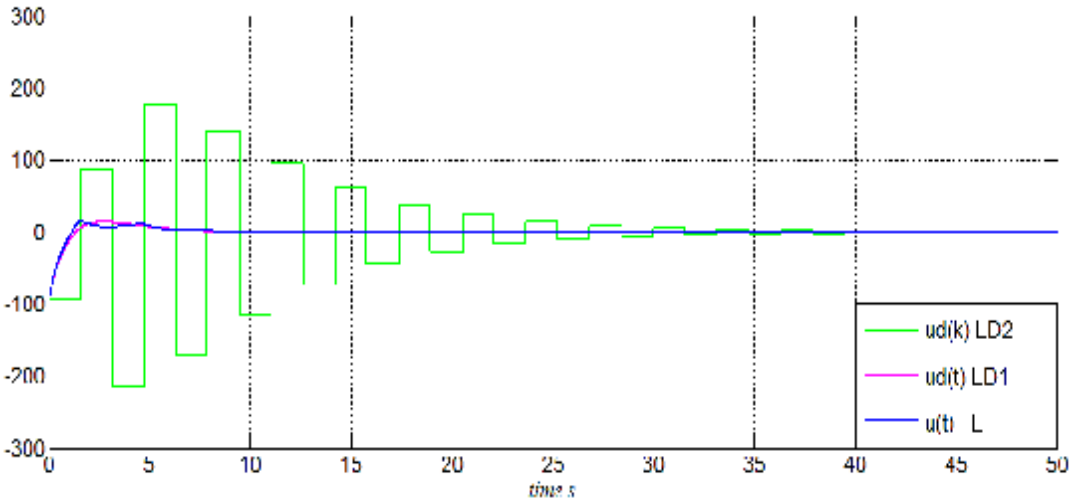

Fig.14: Comparaison entre les commandes $uL, uLD1, uLD2$

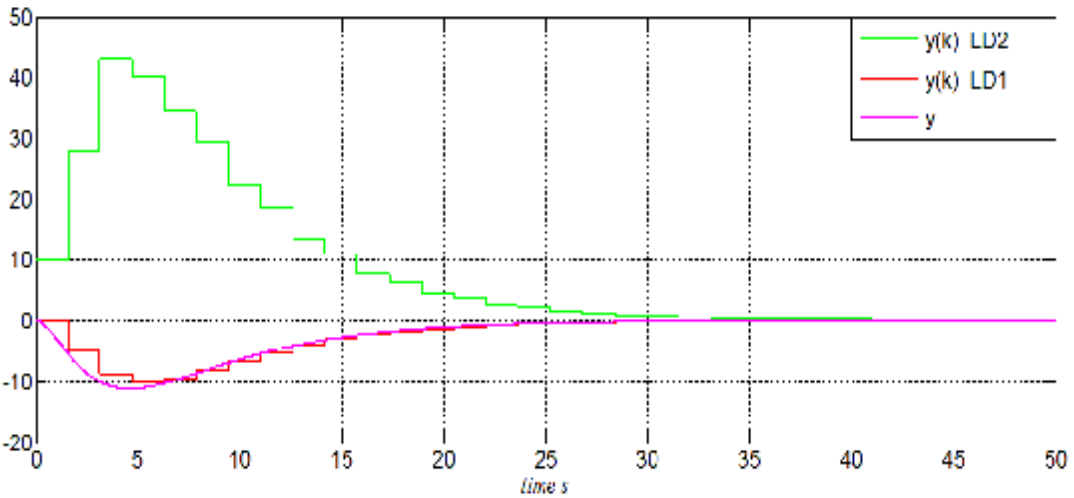

Fig.15: comparaison entre les sorties $y(t)\ L, y(k)\ LD1$ et $y(k)\ LD2$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Simulation3: $t = 1.05 \quad t_{m2}$ **:**

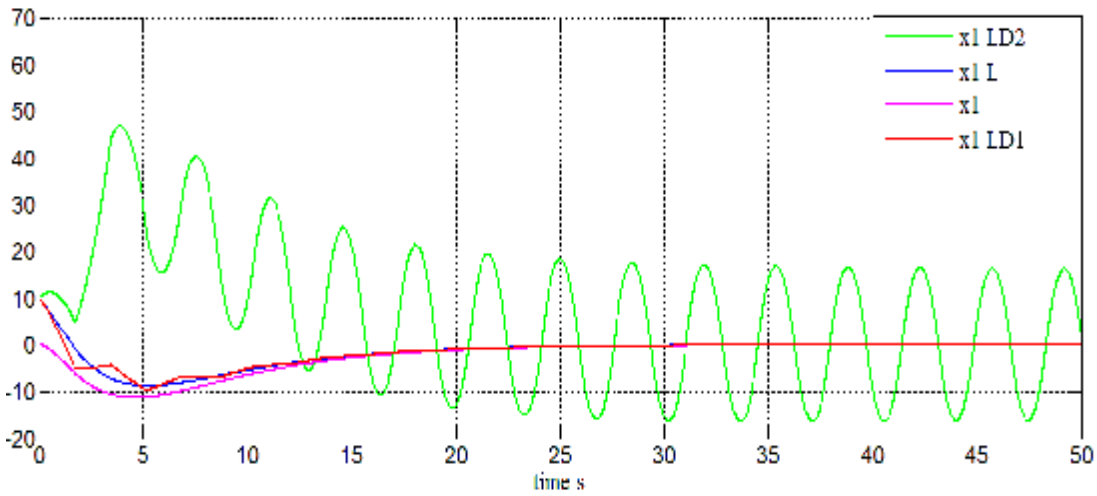

Fig.16 : comparaison entre les états $x1, x1L, x1LD1$ et $x1LD2$

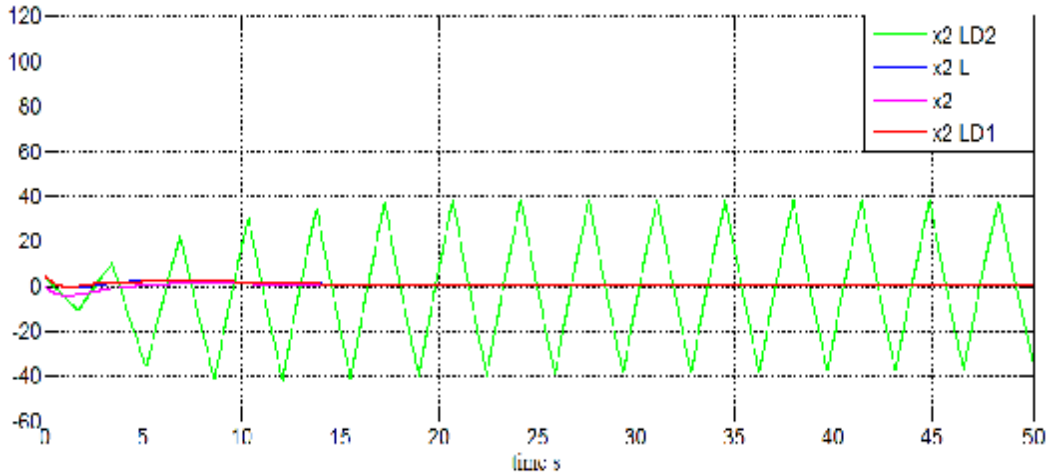

Fig.17: comparaison entre les états $x2, x2L, x2LD1$ et $x2LD2$

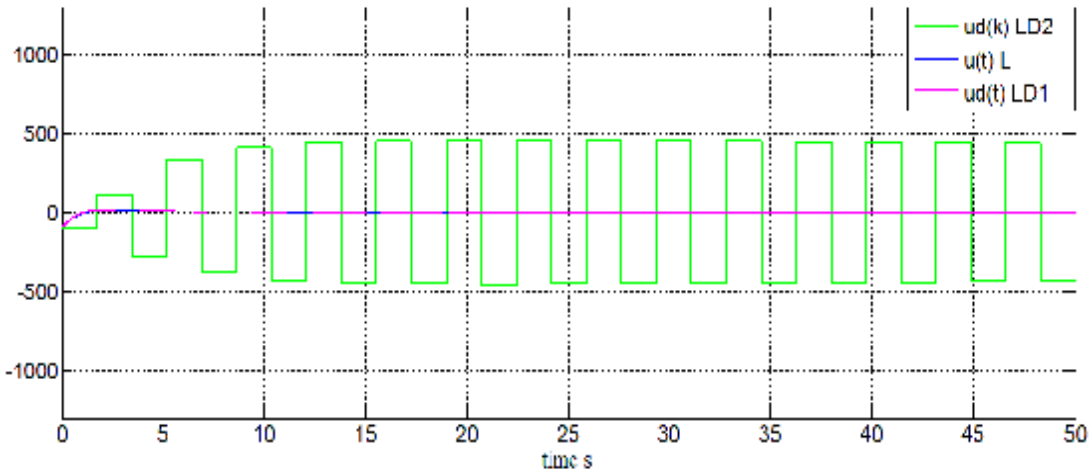

Fig.18: Comparaison entre les commandes $uL, uLD1, uLD2$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

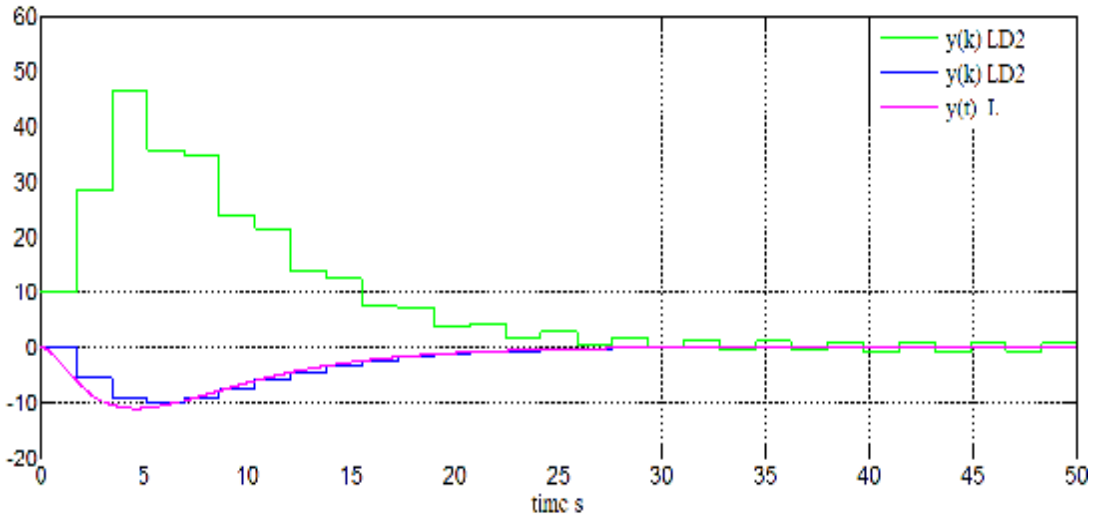

Fig.19: comparaison entre les sorties $y(t)\ L$, $y(k)\ LD1$ et $y(k)\ LD2$

Discussion:

Les différentes figures montrent le bon comportement de la loi commande stabilisante. En effet, pour les valeurs de t inférieur à t_m, la commande déterminée permet de ramener le système (4.1) à son point d'équilibre $x = 0$. Cependant, on remarque que la première version converge plus rapidement que la deuxième version. Comme prévu théoriquement, pour t supérieur à t_{m2}, la deuxième version diverge alors que la première converge toujours (voir figure 16). D'autre part, on remarque aussi que la qualité des signaux est meilleure dans le cas de la première version.

Conclusion

Les résultats de simulation obtenus ont confirmé les résultats théoriques développés dans le chapitre précédent. En effet, les différentes simulations montrent bien que, pour toute valeur de t inférieures à la valeur maximale t_m, l'observation et la stabilisation sont garanties. Pour des valeurs légèrement supérieurs à t_m, l'observation et la stabilisation du système entre rapidement en instabilité.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Les théorèmes de Lyapunov traitent des systèmes continus sans retard et en particulier les systèmes LTI.

En premier lieu on a fait une présentation détaillée de la notion de stabilité de ce même type de systèmes et selon ce même théorème, et où les conditions de stabilité ont été présentées sous forme de LMI.

En deuxième lieu, et dans le cadre des systèmes à retard, les théorèmes de Lyapunov ont été étendus par deux chercheurs Krasovskii et Razumikhin, ces dernièrs se prêtent parfaitement à l'étude des systèmes continus à mesures discrètes.

Inspirant d'un résultat existant et afin d'améliorer son l'intérêt pratique, nous avons essayé de proposer une fonctionnelle de Krasovskii afin d'obtenir un t_m plus grand.

Malheureusement nos équations permettent de trouver un t_m inférieur à celui de l'article.

Les simulations effectuées dans ce mémoire ont porté sur la stabilisation et l'observation des systèmes LTI à mesures discrètes. Nous avons donc démontré qu'il est toujours possible de trouver un t_m permettant de stabiliser cet observateur et le système par retour de sortie. L'implémentation d'un observateur et d'une commande stabilisante donnent donc des résultats avec succès. En effet, pour des valeurs de t inférieures à la valeur maximale t_m, l'observation et la stabilisation sont garanties. La rapidité de divergence et de l'instabilité est remarquée pour des valeurs de t_m légèrement supérieures à t_m.

En fin, on espère que ce modeste travail constituera une base pour des études concernant la stabilisation et l'observation des systèmes spécialement ceux à mesures discrètes.

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

[1] Fonction de Lyapunov et stabilité globale pour un modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection, Mr.**CHEKROUN Abdennasser**, mémoire Master, Option : Systèmes dynamiques et applications à la dynamiques de populations, université BOUBEKR BELKAID – TLEMCEN, 2011-2012.

[2] Nonlinear Systems, **H.Khalil**, Prentice Hall, (1996).2rd edition.

[3] Modélisation et commande d'un système multi-moteur par la technique de commande Backstepping, **FAHED ESHBAIR**, Août 2005.

[4] Linear matrix inequality, Dr **A.Vali**, mai 2012.

[5] Calcul et Robustification d'un Controleur PID Multivariable par Approche LMI, **HADEF Souhila**, 2007.

[6] Synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires à retards, Mr **Amine SBOUI**, Mémoire de doctorat, Spécialité : Automatique, productique, Université de Caen/Basse-Normandie, 2010.

[7] Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period, **Alexandre Seuret**, Version 1-2009

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

Complément de Schur

Soient trois matrices $Q(x).S(x)\ et\ R(x)$ affines par rapport à la variable x, les matrices $Q(x)\ et\ R(x) \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ étant symétriques.

La LMI $\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0$ est équivalente aux inégalités suivantes ;

$$R(x) \succ 0$$
$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0 \qquad (1)$$

Inégalité classique

si $x \succ 0$ alors $\forall\, a,b \in IR^n$

$$\pm a^T b \in IR^n \leq (a^T x a + b^T x^{-1} b)$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com