

N° d'ordre:

RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOULOU MAMMARI DE TIZI OUZOU
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE LMPA



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Mathématiques
Spécialité : Recherche opérationnelle

Par

AMIROUCHE SELMA

AMEUR BAHIA

CONTRÔLE OPTIMAL ET APPLICATION

Soutenu le Septembre 2022 devant le jury :

OUKACHA BRAHIM	Professeur	UMMTO	Président du jury
HARRACHE FAZIA	M.Assistante.A	UMMTO	Examinatrice
AIDENE MOHAMED	Professeur	UMMTO	Encadreur

Année Universitaire : 2021/2022

DÉDICACES

J'ai le grand plaisir de dédier ce modeste travail

Aux deux personnes les plus chère au monde : à **MA MAMAN** a cette femme exceptionnelle qui m'inspire depuis toujours et à qui je dois tout , à cette mère courageuse et forte qui m'a soutenue et encouragé durant ces années d'étude que dieu la garde .Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance . À **MON PÈRE** qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que dieu le garde et le protège .

À ma grand-mère **FATMA** que dieu la garde.

À la mémoire de mon grand père maternel ,à la mémoire de mes grand parents paternel qui ont été toujour dans mon esprit et mon coeur.

À mon soutien moral et source de joie , mon chère frère **HOUSSAM**, pour l'encouragement et l'aide qu'il m'a toujours accordé.

À ma soeur **HANANE** et son mari **MOHAMED** , à ma soeur **NARIMANE** et son mari **WALID** , en témoignage des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble je leurs souhaite une vie pleine du bonheur et de succès.

À mon neveu la source de mon bonheur **LOUAY**.

À la lumiere de mes jours ma petite niece **LÉA**.

À mes oncles **ABDELLAH** et **MOUHAMED**.

À mes chères tantes **SOUHILA,ASSIA HAMIDA , SABRINA**.

À mes cousins(es) **ANES,SIRAA, MERIEM ,IKRAM , GHEZELANE** .

À mes soeurs du coeur **THINHINANE ,LITICIA ,SOUAD** en témoignage de l'amitié qui nous unit , je leurs souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

À ma chère binome **BAHIA** ,à mes chère **YAHIAOUI SARAH , AIT AMARA NAIMA** en témoignage de tous les moments que nous avons passées ensemble durant la préparation de ce mémoire ,w je leurs souhaite une vie pleine de bonheur.

AMIROUCHE SELMA

DÉDICACES

C'est avec grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

À mes chers parents qui m'ont toujours poussé et motivée dans mes études. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À mes très chères frères **massi,ferhat et smail** et mes soeurs **sonia et yamina** qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études.

À mes chères amies **Malika, Nadia, Sarah ,Naima,fazia,katia et celina** pour vos encouragements et l'amitié qui nous réunit et pour les moments inoubliables qu'on a vécus ensemble durant ces longues années , je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur et bonne chance pour vous aussi.

À ma chère amie **Selma** avant d'être binôme pour son soutien moral,sa patience ,l'encouragement et sa compréhension tout au long de ce projet.

À toute ma famille .

AMEUR BAHIA

REMERCIEMENTS

ON remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord , ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr AIDENE MOHAMED**, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience , et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

On remercie profondément les membres du jury qui ont accepté d'évaluer et de juger notre travail. Le président **Mr OUKACHA BRAHIM**, et madame **HARRACHE FAZIA**

Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et c'est grâce à eux, qu'on a une base de travail solide , pour réaliser ce mémoire.

Tizi-Ouzou, le 2 octobre 2022.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	v
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	vi
INTRODUCTION	1
1 GÉNÉRALITÉS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL	3
1.1 INTRODUCTION	3
1.2 STRUCTURE D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL	3
1.2.1 Système dynamique	3
1.2.2 Variable de contrôle	4
1.2.3 Position de problème du contrôle optimal	5
1.3 CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈME DE CONTRÔLE	6
1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaire	7
1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaire	8
1.4 PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN	9
1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE	11
1.5.1 Méthodes indirectes	11
1.5.2 Méthodes directes	12
1.6 CONCLUSION	12
1.7 EXEMPLE	12
2 MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉOLUTION D'UN PROBLÈME LINÉAIRE DE CONTRÔLE OPTIMAL	16
2.1 INTRODUCTION	16
2.2 POSITION DU PROBLÈME	16
2.2.1 Concept de base	16
2.2.2 Notion de support-contrôle	17
2.2.3 Accroissement de la fonctionnelle	18
2.2.4 Critère d'optimalité	20
2.3 PRINCIPE DU MAXIMUM	22
2.4 DÉTERMINATION D'UN SUPPORT-CONTRÔLE DE DÉPART	25
2.5 MÉTHODE ADAPTÉE	25
2.5.1 Changement de contrôle	25
2.5.2 Changement du support	28
2.5.3 Procédure finale	29
2.6 ALGORITHME DE LA MÉTHODE	32
2.7 PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE SOUS MATLAB	33
2.7.1 Algorithme de la méthode adaptée sous matlab	33
2.8 CONCLUSION	40
3 EXEMPLES D'APPLICATION	41

3.1	INTRODUCTION	41
3.2	EXEMPLE	41
	CONCLUSION GÉNÉRALE	49
	BIBLIOGRAPHIE	50

LISTE DES FIGURES

1.1	Problème de contrôle optimal Trélat [2005]	5
1.2	Problème de controlabilité Trélat [2005]	6
1.3	Ensembles des points accessible Trélat [2005]	9

LISTE DES TABLEAUX

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie du contrôle optimal a connu un grand développement durant ces dernières années.

L'objectif de cette théorie est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

Cette théorie est devenue un domaine de recherche bien établi et trouve ses applications dans de nombreux domaines scientifique, après plusieurs années d'évolution basés sur le fondement théorique posé par plusieurs générations de mathématiciens, allant des mathématiques et de l'ingénierie aux sciences biomédicales et de la gestion.

Le but est alors de transférer le système de tout état initial à un certain état final souhaité en un temps fini, en respectant éventuellement certains critères.

Dans le monde réel, la théorie du contrôle est rencontrée sous forme de plusieurs variétés ayant des propriétés différentes dans des domaines très diverses, comme la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'économie, etc ...

Historiquement, la théorie du contrôle optimal est une extension du calcul des variations, elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage. Dans ce type de problème, les variables sont séparées en deux catégories, à savoir les variables d'état et les variables de contrôle.

L'évolution de la phase est dictée par le contrôle par l'intermédiaire d'un ensemble d'équations différentielles.

En outre, le contrôle ainsi que les variables d'état sont généralement soumis à des contraintes et le problème de commande optimal peut alors être formulée comme suit :

« Déterminer les signaux de commande qui régissent un système pour satisfaire à des contraintes physique et en même temps à minimiser (ou maximiser) un critère de performance ».

Pour la résolution des problèmes de contrôle optimal on distingue deux types de méthodes :

les méthodes directes et les méthodes indirect.

Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème en un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire .

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin.

Le travail est structuré comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à la description de quelques notions de contrôle optimal.

Au second chapitre, nous étudions les méthodes numériques de résolution d'un problème de contrôle optimal , en donnant un exemple d'application.

Enfin, le document se termine par une conclusion.

GÉNÉRALITÉS SUR LE CONTRÔLE OPTIMAL



1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques notions de base du contrôle optimal admissible : (la contrôlabilité et le Principe du Maximum de Pontryagin). Ce chapitre est donc structuré de la manière suivante : la section (1.2) est dédiée à la structure d'un problème de contrôle optimal . La Contrôlabilité des système de contrôle (des systèmes linaires et des systèmes non linéaires) est décrite dans la section (1.3) , La section (1.4) est consacrée au principe du maximum de Pontryagin , les méthodes de résolution numérique (les méthodes de résolution directes et indirectes) sont décrites dans la section (1.5) , et la section (1.6) est dédiée à la conclusion, on termine avec un exemple dans la section (1.7).

1.2 STRUCTURE D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL

La formulation d'un problème de contrôle optimal exigent :

- Description mathématique du processus à contrôler .
- Déclaration des contraintes physiques.
- Spécification des critères de performance .

1.2.1 Système dynamique

Nous sommes intéressés par le comportement de système qui évoluent suivant certaines lois . Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres . on suppose que n variables sont nécessaires pour décrire ou caractériser son comportement .L'identification de ces variables et la description du système est une étape très importante : **c'est la modélisation mathématique** .

Les variables , nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1, \dots, n$. Le système évolue dans le temps , donc les x_i sont des fonctions de $t : x_i(t)$.

les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre ; se sont les équations d'état de forme générale $\dot{x} = f(t, x, u)$ ou \dot{x} est le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x . f est un vecteur de n composantes $f_i, i = 1, \dots, n$.

Si le système différentielle est du second ordre, on peut se ramener à deux

équations différentielles du premier ordre en introduisant une nouvelle variable d'état .En effet , si $\dot{x} = f(t, x, u)$ on pose $\dot{x}_1 = x_2$ et $\dot{x}_2 = f(t, x, u)$. Dans le cas où f ne dépend pas explicitement de t , ($\dot{x}(t) = f(x, u)$) , le système est dit **autonome**, sinon il est dit **non-autonome**.

1.2.2 Variable de contrôle

Dans la majorité des problèmes, les variables de contrôle (les variables d'entrée) $u_j(t)$, $j = 1, \dots, m$ sont astreintes d'appartenir à une certaine région $U \subset \mathbb{R}^m$. U est appelé ensemble des contrôle admissible , il peut être sans borne , borné ou du type Bang-Bang .

Dans beaucoup de problème de contrôle , on peut minorer ou majorer les $u_j(t)$ par des constantes , de plus si $a_j \leq u_j \leq b_j$, on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque U est toujours pratique de se ramene à des commandes entre -1 et 1 .

Contrôle Bang-Bang

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$ on a : $|U_j(t)| = 1$

Contrôle continu par morceaux

Cette classe de contrôle est la plus intéressante pour les application pratique de la théorie , bien que l'existence d'un contrôle optimal ne soit pas garantie en général.

Définition 1.1 Une fonction réelle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, est dite continue par morceaux , s'il existe une partition $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \leq t_{N+1} = t_f$ telle que u peut être considérée comme une fonction continue dans $[t_k, t_{k+1}]$ pour $k = 0, 1, \dots, N$.

Critère de performance

Fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de performance pour le système est l'objectif lors la formulation d'un problème de contrôle optimal . Le problème revient à définir une expression mathématique qui , lorsqu'elle est optimisée , indique que le système est exécuté de la façon la plus souhaitable . Donc choisir une mesure de performance , est une traduction en termes mathématique des exigences physiques du système.

Le critère de performance , appelé aussi fonctionnelle coût ou fonction objectif , est généralement décrite sous la forme de Bolza par la formule :

$$J(x, u) = g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt$$

Telles que :

$g(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))$ est le coût terminal , c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f . Il a son importance lorsque t_f est libre , sinon il est constant.

$\int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u)$ appelé coût intégral , dépend de l'état du système tout au long de

la trajectoire de la solution , définie par les variables d'état .Elle dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

1.2.3 Position de problème du contrôle optimal

La formulation d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\text{Minimiser : } J(u(T), T) = g(T, x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \in M_0 \quad (1.3)$$

$$x(t_f) = x_f \in M_1 \quad (1.4)$$

$$u \in U, t \in I = [0, T] \quad (1.5)$$

où :

- $J(u(T), T)$ est le critère à optimiser .

- $f : U \times V \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^1 . L'équation (1.2) appelée état contrôlé du système , ou trajectoire contrôlée du système .

- x_0 ou $x(t_0)$ est la position initiale du système , x_f ou $x(T)$ est la position finale du système , M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathbb{R}^n .

- U est l'ensemble des application mesurables , localement bornées sur T à valeurs dans l'ensemble non vide $U \subset \mathbb{R}^m$.



FIGURE 1.1 – Problème de contrôle optimal Trélat [2005]

On distingue trois types de problèmes de contrôle optimal :

Problème de Lagrange

Lorsque on a dans l'expression de la fonctionnelle J , $g \equiv 0$, on parlera d'un problème de Lagrange donné par :

$$J(u(T), T) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t))dt.$$

Le temps initial et le temps final peuvent être considéré comme fixes ou libres dans le problème d'optimisation .

Problème de Mayer

Lorsque on a dans l'expression de la fonctionnelle $J, f_0 \equiv 0$, on parlera d'un problème de Mayer , donné par :

$$J(u(T), T) = g(T, x(T)).$$

On suppose que $g(T, x(T))$ et ses dérivées partielles par rapport à x existent et sont continues .

Problème de Bolza

le problème de Bolza est un problème qui regroupe la forme Lagrange et la forme Mayer. Par conséquent, ce problème s'appelle aussi problème de Mayer-Lagrange, donné par :

$$J(u(T), T) = g(T, x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

1.3 CONTRÔLABILITÉ DES SYSTÈME DE CONTRÔLE

La notion de contrôlabilité à été inventée par **Kalman** en 1960 [Kalman et al. \[1960\]](#) à propos des système linéaire de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$.le concept de cette notion est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle .Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener en temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit.(voir la figure(1.2))

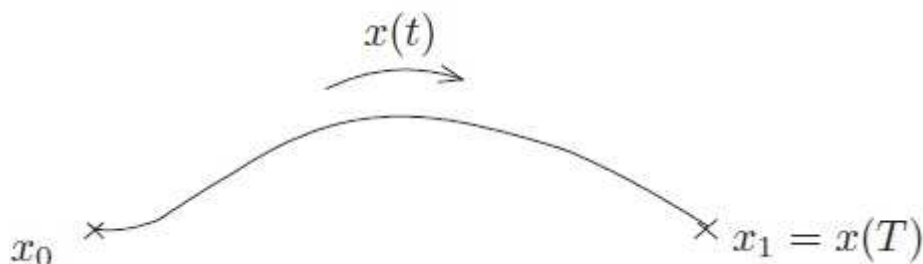


FIGURE 1.2 – Problème de controlabilité [Trélat \[2005\]](#)

1.3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaire

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, t \in I$, où I est un intervalle de \mathbb{R} ; A, B et r sont trois applications localement intégrable sur I à valeur respectivement dans $M_{n,n}(\mathbb{R}), M_{n,m}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^n .

Soit $M(\cdot) : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvant du système linéaire homogène $\dot{x} = A(t)x(t)$ définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t), M(0) = Id$.

Pour tout contrôle u le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0$ admet une unique solution $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continu et donnée par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds$$

pour tout $t \in I$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit $x(t) = \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds$.

Elle est linéaire en u .

Théorème 1.1 *Louadj [2012]* Le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} M(t)^{-1}B(t)B(t)'M(t)^{-1}dt$$

dite matrice de contrôlabilité est inversible.

Cette condition ne dépend pas de x_0 , c'est à dire c'est un système linéaire contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps t_f depuis tout point .

contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t . Dans ce cas la matrice $M(t) = e^{At}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit pour tout $t \in I$:

$$x(t) = e^{At}(x_0 + \int_0^t e^{-As}(B(s)u(s) + r(s))ds).$$

Théorème 1.2 *Kalman [1963]* Un système linéaire autonome de \mathbb{R}^n :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

est contrôlable en temps t_f si et seulement si le rang de la matrice

$$C = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

est égal à n .

La matrice C est appelée matrice de **Kalman**, et la condition $\text{rang}C = n$ est appelée **condition de Kalman**

Contrôlabilité des systèmes linéaire non autonomes

Considérons le système $\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $t \in T = [0, T]$, $x(0) = x_0$. La solution de ce système en temps t est :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M^{-1}(s)B(s)u(s)ds, \quad t \in I = [0, T]$$

où $M(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = A(t)M(t), \\ M(0) = Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Théorème 1.3 *Kalman et al. [1960]* Un système linéaire non-autonome de \mathbb{R}^n est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$D = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)'M(t)^{-1}dt, \text{ est inversible.}$$

D est appelée matrice de contrôlabilité.

1.3.2 Contrôlabilité des systèmes non linéaire

Contrairement aux systèmes linéaires, les systèmes non linéaires sont plus compliqués et l'étude globale de leurs contrôlabilités est difficile. Cependant, on peut toujours commencer par linéariser le système considéré autour de son point d'équilibre puis étudier la contrôlabilité de nouveau système qui est linéaire. De cette façon la contrôlabilité du système non linéaire est localement étudiée.

Le résultat suivant donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non linéaires.

Proposition 1.1 *Trélat [2005]* Soit le système non linéaire $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(t_0) = x_0$ $\forall t \in [t_0, T]$ et avec $f(x_0, u) = 0$

On note

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u) \quad \text{et} \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u)$$

Si :

$$\text{Rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Alors le système est localement contrôlable en x_0 .

1.4 PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN

Le principe du maximum [Amel \[2018\]](#) représente un outil fondamental dans la théorie du contrôle, il sert à trouver la commande optimale permettant d'amener un système dynamique d'un état à un autre (permanent), c'est-à-dire modifier la valeur du contrôle en tout temps réel, en présence de contraintes portant sur l'état ou les commandes d'entrée. Le principe examine la minimisation d'un hamiltonien sur U . L'espace des contrôles admissibles. Historiquement le travail initial dans ce domaine est dû à Pontryagin.

L'objectif du principe de Pontryagin dans le cas classique est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité alors que les équations de Hamilton - Jacobi-Bellman, notées HJB permettent d'énoncer les conditions suffisantes d'optimalité.

Avant de d'énoncer le principe du maximum, introduisons certaines définitions et propriétés essentielles.

Définition 1.2 *Le contrôle u est dit extrémal sur $[t_0, t^*]$ si la trajectoire $x_u(t)$ associée à u du système (1.2) vérifie.*

$$x(T) \in \partial Acc(x_0, T), \quad t \in T = [t_0, T].$$

tel que :

$Acc(x_0, T) = \{x_u(T), u \in U\}$ est : l'ensemble des points accessibles a partir de x_0 en temps T ou :

$x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.2) associée au contrôle u .

$Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1.2), en temps T lorsque le contrôle u varie.

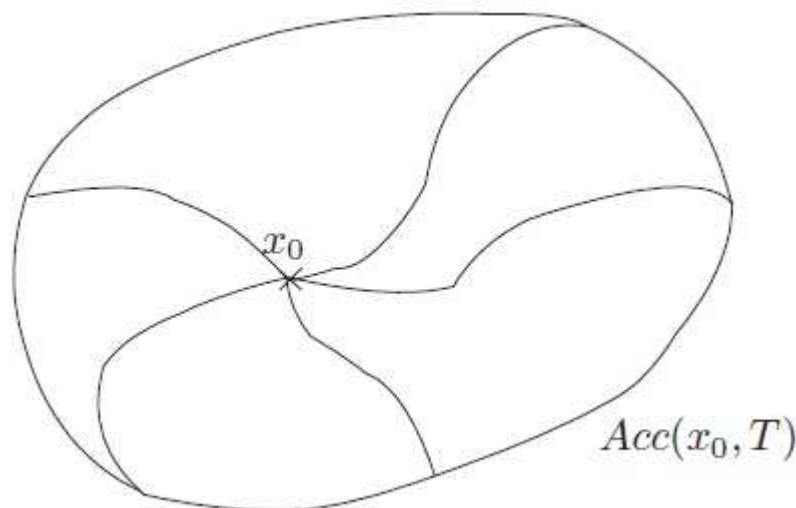


FIGURE 1.3 – Ensembles des points accessible [Trélat \[2005\]](#)

Définition 1.3 *Un contrôle $u^0(t)$, $t \in [t_0, t^*]$ est dit optimal si $u^0(t)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémal (linéaire) $u(t)$, $t \in I = [t_0, t^*]$.*

Théorème 1.4 [Trélat \[2005\]](#)
 Considérons le système

$$\forall t \in I, \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Soit $t^* > 0$. le contrôle u est extrémal sur $I = [t_0, t^*]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$, $t \in I$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$P(t)B(t)u(t) = \max_{v \in U} p(t)B(t)v \quad (1.6)$$

Pour presque tout $t \in [t_0, t^*]$.

Définition 1.4 Le vecteur $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

Définition 1.5 Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation.

Définition 1.6 Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t), t \in [0, T]$ change de signe est appelé temps de commutation.

Théorème 1.5 ([Trélat \[2005\]](#), [Pontryagin \[1987\]](#)) Ce théorème est l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n .

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.7)$$

Où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t . On définit le coût.

$$J(u, t^*) = g(t^*, x(T)) + \int_0^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Où

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la solution de (1.7) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J . le temps final peut être fixe ou non. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t^*]$, alors il existe une application. $p(\cdot) : [t_0, t^*] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial et tels que pour presque tout $t \in [t_0, t^*]$,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.8)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (1.9)$$

Où $H(t, x, p, p^0, u) = p(t)f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[t_0, t^*]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u). \quad (1.10)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t^*

$$\max_{u \in U} H(t^*, x(t^*), p(t^*), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t^*, x(t^*)). \quad (1.11)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(t_0) = x_0 \in M_0$ et $x(t^*) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$P(0) \perp TM_0(x(0)). \quad (1.12)$$

$$P(t^*) - p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t^*, x(t^*)) \perp_{t^*} M_1. \quad (1.13)$$

Remarque 1.1 Si f ne dépend pas du temps t c'est à dire si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [t_0, t^*], \max_{u \in U} H(t^*, x(t^*), p(t^*), p^0, u) = Cste.$$

Remarque 1.2 La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum . La condition $p^0 \geq 0$ conduira au principe du minimum.

Remarque 1.3 Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (1.10) devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Remarque 1.4 Les conditions (1.12) et (1.13) sont appelées conditions de transversalités sur le vecteur adjoint.

1.5 MÉTHODES DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Les problèmes de contrôle optimal, en général, n'ont pas toujours de solutions analytiques. En conséquence, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour pouvoir les résoudre. Il existe différentes méthodes pour résoudre les problèmes de commande optimale, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Le choix de la méthode dépend du problème considéré. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équation non linéaire ; on distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal, les méthodes directes et indirectes.

1.5.1 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes elles sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin (Pontryagin [1987], Boltyanskiy et al. [1962]) qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier

a posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale. Contrairement aux méthodes directes, les méthodes indirectes nécessitent une étude théorique préalable et l'étude des variables adjointes. Pour ces méthodes, la structure des commutations doit être connue à l'avance, elles sont efficaces en toutes dimensions. Il existe également des approches probabilistes, ces méthodes consistent à exprimer le problème de commande optimale dans des espaces de mesure, puis à rechercher la commande optimale en tant que mesure d'occupation, qui est approchée par un nombre fini de ses moments. Cette méthode utilise des outils de géométrie algébrique et elle permet de réduire le problème de contrôle optimale à un problème d'optimisation de dimension finie. Pour plus d'informations, voir l'article récent d'Emmanuel Trélat [Trélat \[2005\]](#).

1.5.2 Méthodes directes

Parmi les méthodes directes, on trouve la résolution par l'approche de la programmation linéaire, dont la méthode adaptée dite aussi méthode du support. ([Chebbah \[2006\]](#), [Aidene et al. \[2005\]](#), [Louadj \[2012\]](#), [Gabasov et Kirillova \[1994\]](#))

Elle permet d'avoir une solution approchée ou une solution exacte. Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Pour un problème de départ linéaire, on fait une discrétisation de la commande. De là on obtient un problème de programmation linéaire facile à résoudre. L'inconvénient de cette dernière approche est l'obtention d'une solution approchée. La mise en œuvre des méthodes directes est simple, car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable, on n'a pas étudié les variables adjointes ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations. Ces méthodes sont moins précises.

1.6 CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce chapitre la théorie du contrôle optimal qui a commencé dans les années 50. On a aussi abordé la notion de contrôlabilité d'un système linéaire et non linéaire, et à la fin on a présenté le principe du maximum de Pontryaguine et une classification des méthodes de commande optimale pour la génération de trajectoires selon deux grands courants : les méthodes directes et indirectes. Le chapitre suivant sera consacré à l'étude sur d'autres méthodes directes de résolution des systèmes dynamiques linéaires.

1.7 EXEMPLE

La dynamique (Processus) d'une entité économique est donnée par :

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t), t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0, x_0 > 0$$

$$u(t) \in [0, 1], t \in [0, T],$$

Le bénéfice de cette entreprise est donnée par :

$$J(u(t)) = \int_0^T (1 - u(t))x(t)dt \rightarrow \max$$

$x(t)$: quantité d'argent possédée au temps t .

$u(t)$: quantité a réinventer au temps t .

L'hamiltonien associe au problème noté H est :

De la maximisation ,on pose $p_0 = 1$

Donc

$$H(x, p, u, t) = p_0 f(x, u, t) + p^t f(x, u, t)$$

Où

$$H = (1 - u(t))x(t) + p(u(t)x(t))$$

D'après le PMP :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 + u - pu$$

$$= -1 + u(1 - p)$$

De la condition de transversalité : $p(T) = 0$

On aura :

$$\max_{0 \leq |u| \leq 1} H = \max_{0 \leq |u| \leq 1} [x - ux + pux]$$

$$= x + \max_{0 \leq |u| \leq 1} [ux(p - 1)]$$

Comme $x(t) > 0$ alors

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(t) < 1 \\ 1 & \text{si } p(t) > 1 \end{cases} \quad t \in [0, T],$$

De la condition $p(T) = 0$ et de la continuité de $p(T)$

$$\forall t \in v(T) = [t_c, T] / p(t) < 1 \quad \text{et } t \in [t_c, T]$$

Pour :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [t_c, T] \\ 1 & , [0, t_c[\end{cases}$$

Pour $u(t) \equiv 1$ sur $[0, t_c]$ on obtient :

$$\dot{p} = -1 + 1 - p = -p$$

$$p(t) = \lambda \exp(-t), t \in [0, t_c]$$

et pour $u \equiv 0$ sur $[t_c, T]$

$$\dot{p} = -1 \Rightarrow p(t) = -t + c_1$$

$$p(T) = 0 \rightarrow -T + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = T$$

$$p(t) = T - t, \quad t \in [t_c, T]$$

$$\forall t \in [t_c, T], p(t) \leq 1 \Rightarrow T - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow t \geq T - 1, T - 1 \leq t \leq T \Rightarrow t_c = T - 1.$$

On à

$$u^o(t) = \begin{cases} 1 & [0, T - 1[\\ 0 & [T - 1, T] \end{cases}$$

Calcul de la trajectoire correspondante $x(t)$:

On à pour $u \equiv 1$ sur $[0, T-1]$ on obtient

$$\dot{x}(t) = x(t) \Rightarrow x(t) = x_0 \exp(t)$$

et pour $u \equiv 0$ sur $[T-1, T]$ on obtient :

$$\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow x(t) = c$$

$$x(T - 1) = c = x_0 \exp(T - 1)$$

$$x^o(t) = \begin{cases} x_0 \exp^t & [0, T - 1] \\ x_0 \exp^{T-1} & [T - 1, T] \end{cases}$$

Pour $T=6$ mois ; $x_0 = 1$

$$J(u(t)) = \int_0^5 0 dt + \int_5^6 x(t) dt$$

$$= \int_5^6 x_0 \exp^5 dt = x_0 \exp(5)5$$

$$J(u(t)) = x_0 \exp(5).$$

MÉTHODE NUMÉRIQUE DE RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME LINÉAIRE DE CONTRÔLE OPTIMAL

2

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous étudions une méthode de résolution d'un problème linéaire de contrôle optimal qui est la méthode adaptée. Nous donnons essentiellement des résultats théoriques ainsi .

2.2 POSITION DU PROBLÈME

Considérons un problème d'un système dynamique linéaire autonome de contrôle optimal suivant :

$$J(u(t)) = c'x(t_f) \rightarrow \max \quad (2.1)$$

Sous les contraintes :

$$\dot{x} = Ax(t) + bu(t) \quad \text{pour } t \in [0, t_f] \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0, \quad \text{et } Hx(t_f) = g \quad (2.3)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad \forall t \in T = [0, t_f] \quad (2.4)$$

$$t_f > 0 \quad (2.5)$$

- $J(u(t))$ est un coût terminal linéaire .
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $u(t) \in \mathbb{R}$ est le signal de contrôle.
- $Hx(t_f)$ est le signal de sortie, avec $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang maximal, $\text{rang}(H) = m < n$.
- L'état final $x(t_f)$ est contraint par la relation $Hx(t_f) = g$, $g \in \mathbb{R}^m$.

2.2.1 Concept de base

Définition 2.1 Un contrôle $u(t)$, $t \in T$, est dit admissible si $u(t)$ et la trajectoire correspondante $x(t)$ solution de (2.2) , vérifient les contraintes (2.3) et (2.4) .
Un contrôle admissible $u^0(t)$, est dit optimal si

$$J_c(u^0) = \max J_c(u), \quad \forall u \text{ admissible .}$$

-Soit $\varepsilon \geq 0$ donné, Un contrôle admissible $u^\varepsilon(t)$ est dit ε -optimal si et seulement si :

$$J_c(u^0) - J_c(u^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

La solution du système différentiel (2.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)(F(s))^{-1}bu(s)ds, \quad t \in T \quad (2.6)$$

où $F(t)$ est la résolvante du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n \end{cases} \quad (2.7)$$

avec I_n la matrice identité.

En utilisant cette dernière solution, le problème (2.1)-(2.5) prend la forme suivante :

$$\text{Maximiser : } J_c(u(t_f)) = c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt$$

$$\text{Sous les contraintes : } \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g}, \quad d_1 \leq u(t) \leq d_2 \quad (2.8)$$

où :

- $C(t) = c'F(t_f)(F(t))^{-1}b.$
- $\varphi(t) = HF(t_f)(F(t))^{-1}b.$
- $\bar{g} = g - HF(t_f)x_0.$

$$u(t) = u_j = cst, \quad t \in [\tau_j, \tau^j], \quad T = [0, t_f] = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j], \quad \tau^j - \tau_j = h > 0$$

Cela nous permet d'aboutir au système suivant :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \sum_{j=1}^N u_j \int_{\tau_j}^{\tau^j} c(t)dt + c'F(t_f)x_0 \rightarrow \max_u \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t)dt = g - HF(t_f)x_0 \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad \forall t \in T = [0, t_f], j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

2.2.2 Notion de support-contrôle

Définition 2.2 soient $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ m points isolés de T , et $\tau_B = \{\tau_j, j = 1, \dots, m\}$.

A chaque τ_j , on associe un intervalle de la forme $T_j = [\tau_j, \tau^j]$ ou $\tau^j - \tau_j \leq h$,

- $T_j \cap T_i = \emptyset, i \neq j.$

L'ensemble T_B et son complémentaire T_H sont définies par :

$$T_B = \bigcup_{j=1}^m T_j \text{ et } T_H = T_B^c$$

1. Support du problème

Soit $\phi_B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ la matrice dont les colonnes sont définies par $(\phi_B)_j = \varphi(\tau_j)$, $j = 1, \dots, m$. L'ensemble T_B est appelé support du problème si

$$\det(\phi_B) \neq 0$$

2. Support généralisé du problème

L'ensemble T_B est appelé support généralisé du problème (2.1)-(2.5) si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + bu(t), \\ Hx(t_f) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

n'admet pour $u(t) \equiv 0, T \in T_H$, mais pour tout intervalle $T^* = [\tau_*, \tau^*]$, $T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$ et

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ pour } & t \in T_H/T^* \\ u^*, \text{ pour } & t \in T_B \cup T^*, \end{cases} \quad (2.10)$$

Le système (2.9) admet une solution non triviale,

$$u(t) \neq 0, t \in T_B \cup T^*$$

dans la classe des contrôles constants sur $T_j, j = 1, \dots, m$

Lemme 2.1 *Gabasov et Kirillova [1984]* Soit la matrice $\phi(T_B) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ dont les colonnes sont définies par :

$$(\phi(T_B))_j = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt, \quad (2.11)$$

Alors, l'ensemble T_B est un support généralisé pour le problème (2.1) -(2.5) si et seulement si la matrice $\phi(T_B)$ est non dégénérée.

2.2.3 Accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénéré, et $x(t), t \in T$ la trajectoire (2.2) correspondante, on construit le vecteur de potentiel tel que :

$$y' = C_B \phi_B^{-1} \quad (2.12)$$

avec $C_B \in \mathfrak{R}^{1 \times m}$ égale à $(C_B)_j = C(\tau_j)$

Et le vecteur des estimation (co-contrôle) tel que :

$$\Delta(t) = -\psi'(t)b, \quad t \in T \quad (2.13)$$

ou : $\psi(t)$ est la solution du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A'\psi \\ \psi(t_f) = c - H'y \end{cases} \quad (2.14)$$

De la solution $\psi(t)$ est donnée par :

$$\psi'(t) = (c' - y'H)F(t_f)(F(t))^{-1}$$

Le co-contrôle peut être écrit sous la forme :

$$\Delta(t) = -(c' - y'H)F(t_f)(F(t))^{-1}b$$

Par définition :

$$\Delta(t) = y'\varphi(t) - C(t), \quad t \in T \quad (2.15)$$

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ un autre contrôle admissible et $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$ sa trajectoire correspondante. De là, l'accroissement de la fonctionnelle sera :

$$\begin{aligned} \Delta J_c(u) &= J_c(\bar{u}) - J_c(u), \\ &= c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} C(t)\bar{u}(t)dt - c'F(t_f)x_0 - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt, \\ &= \int_0^{t_f} C(t)\bar{u}(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \\ &= \int_0^{t_f} C(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt \\ &= \int_0^{t_f} C(t)\Delta u(t)dt \\ &= \int_0^{t_f} (y'\varphi(t) - \Delta(t))\Delta u(t)dt, \\ &= \int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t)dt \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta J_c(u) = - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t)dt, \quad (2.16)$$

Car $\int_0^{t_f} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt = 0$

En effet, de l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, nous avons :

$$\int_0^{t_f} y' \varphi(t) \Delta u(t) dt = \int_0^{t_f} y'(HF(t_f)(F(t))^{-1}b(\bar{u}(t) - u(t))) dt.$$

D'après l'équation (2.6) on obtient :

$$\int_0^{t_f} y' \varphi(t) \Delta u(t) dt = y'(H\bar{x}(t_f) - Hx(t_f)) = y'(g - g) = 0.$$

Valeur de suboptimalité

Le contrôle $\bar{u}(t)$, $t \in T$ est admissible, alors

$$d_1 - u(t) \leq \bar{u}(t) \leq d_2 - u(t) \quad (2.17)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (2.16) sous la contrainte (2.17) est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T, \end{cases} \quad (2.18)$$

et est égal à :

$$\beta(u, \tau_B) = \sum_{t \in T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1) + \sum_{t \in T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2),$$

$\beta(u, \tau_B)$ appelée valeur de suboptimalité de support-contrôlé $\{u, \tau_B\}$,

où $J^+ = \{j \in J_H, \Delta_j \geq 0\}$ et $J^- = \{j \in J_H, \Delta_j < 0\}$.

Delà ,

$$\Delta J_c(u) = J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B), \quad \forall \bar{u},$$

et pour $\bar{u} = u^0$, on aura :

$$\Delta J_c(u) = J_c(u^0) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B).$$

2.2.4 Critère d'optimalité

Théorème 2.1 *Gabasov et Kirillova [1984]* les relations suivantes

$$\begin{cases} u(t) = d_1, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ u(t) = d_2, & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2 & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (2.19)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$

Démonstration.

1. Condition suffisante :

Si les relations (2.19) sont vérifiées, alors $\beta(u, \tau_B) = 0$. Comme $J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B), \forall \bar{u}$, ce qui implique $J_c(\bar{u}) \leq J_c(u), \forall \bar{u}$

Par conséquent, la paire $\{u, \tau_B\}$ est un support-contrôle optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle optimal non dégénérée et supposons que les relations (2.19) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire :

$$\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1 \quad \text{ou bien} \quad \exists t_* \in T, \Delta(t_*) < 0, u(t_*) < d_2.$$

(a) supposons que $\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1$

Soit $\bar{u} = u + \Delta u$ telle que vérifie les contraintes $Hx(t_f) = g$ et $d_1 \leq \bar{u} \leq d_2$.

Pour cela construisons le contrôle $\Delta u(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta, & \text{si } t = t_*, \theta > 0, \\ 0, & \text{si } t \in T_H/t_* \end{cases}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta J_c(u(t)) = J_c(\bar{u}(t)) - J_c(u(t)),$$

$$= - \int_0^{t_f} \Delta(t) \Delta u(t) dt,$$

$$= -\Delta(t_*) \Delta u(t_*) - \int_{T/t_*} \Delta(t) \Delta u(t) dt.$$

Par conséquent, $\Delta J_c(u(t)) = \theta \Delta(t_*) > 0$, ce qui implique :

$$J_c(\bar{u}(t)) > J_c(u(t))$$

et ceci contredit l'optimalité de $u(t)$.

(b) La preuve du deuxième cas est similaire au premier cas. □

2.3 PRINCIPE DU MAXIMUM

Le critère d'optimalité peut être écrit sous forme traditionnelle du principe du maximum [Boltyanskiy et al. \[1962\]](#) en utilisant la fonction Hamiltonienne

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \psi'(t)(Ax(t) + bu(t)).$$

où $\psi(t), t \in T$, est la solution du système conjugué(2.14).

Principe du maximum :

La condition suivante :

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t)$$

est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u(t), \tau_B\}$.

Principe du ε -maximum

Théorème 2.2 [Gabusov et Kirillova \[1984\]](#) (Critère de Suboptimalité ou Critère ε -optimalité)
Soit $\varepsilon > 0$, donné. Le contrôle admissible $u(t), t \in T$, est ε -optimal si et seulement s'il existe un tel support τ_B tel que $u(t)$ et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$ vérifient la condition ε -maximum :

$$\begin{cases} H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), t \in T, \\ \text{avec } \int_0^{t_f} \varepsilon(t) \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.20)$$

Démonstration.

1. **Condition suffisante :**

si les relations sont vérifiées alors en utilisant $\beta(u, \tau_B)$:

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} \psi(t)' b(d_1 - u(t))dt + \int_{T^-} \psi(t)' b(d_2 - u(t))dt, \\ &= \int_{T^+} (\psi(t)' Ax + \psi(t)' b d_1 - \psi(t)' Ax - \psi(t)' b u(t))dt \\ &\quad + \int_{T^-} (\psi(t)' Ax + \psi(t)' b d_1 - \psi(t)' Ax - \psi(t)' b u(t))dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{T^+} \psi(t)' (Ax + bd_1) dt + \int_{T^-} \psi' (Ax + bd_2) dt - \int_0^{t_f} \psi' (Ax + bu(t)) dt, \\
 &= \int_0^{t_f} \left(\max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - H(u(t), x(t), \psi(t), t) \right) dt \\
 &= \int_0^{t_f} \varepsilon(t) dt.
 \end{aligned}$$

Et de l'équation (2.20), on obtient :

$$\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$$

Comme $J_c(\bar{u}) - J_c(u) < \beta(u, \tau_B), \forall \bar{u}$, alors pour $\bar{u} = u^0$:

$$J_c(\bar{u}^0) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$$

Donc le contrôle \bar{u} est ε -optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $u(t)$ un contrôle ε -optimal, faisons une décomposition de la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$. Pour cela nous introduisons le problème dual du problème primal (2.8) :

$$\begin{cases} D(\gamma) = D(\vartheta, v(t), \omega(t)) = c' F(t_f) x_0 + \bar{g} \vartheta - \int_0^{t_f} v(t) d_1 + \int_0^{t_f} \omega(t) d_2 \rightarrow \min, \\ \vartheta' \varphi(t) - v(t) + \omega(t) = C(t), \\ v(t) \leq 0, \omega(t) \leq 0, t \in T, \end{cases} \quad (2.21)$$

L'ensemble $\gamma = (\vartheta, v(t), \omega(t), t \in T)$ défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vartheta = y' \\ v(t) = \Delta(t), \quad \omega(t) = 0, \quad si \quad \Delta(t) > 0, \\ v(t) = 0, \quad \omega(t) = -\Delta(t), \quad si \quad \Delta(t) < 0, \quad t \in T \end{cases} \quad (2.22)$$

Vérifie les contraintes du problème (2.19), c'est-à-dire c'est un plan dual. Soit $(y^0, v^0, \omega^0, t \in T)$ une solution optimale du dual.

Remplaçons les relations $\Delta(t) = y' \varphi(t) - C(t)$ et $\psi'(t) = (c' - y' H) F(t_f) (F(t))^{-1}$ dans la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$: \square

$$\begin{aligned}
 \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t) (u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t) (u(t) - d_2) dt, \\
 &= \int_0^{t_f} \Delta(t) dt - \int_{T^+} \Delta(t) d_1 dt - \int_{T^-} \Delta(t) d_2 dt, \\
 &= \int_0^{t_f} (y' \varphi(t) - C(t)) u(t) dt - \int_0^{t_f} v(t) d_1 dt - \int_0^{t_f} \omega(t) d_2 dt, \\
 &= \int_0^{t_f} y' \varphi(t) u(t) dt - \int_0^{t_f} C(t) u(t) dt - \int_0^{t_f} v(t) d_1 dt - \int_0^{t_f} \omega(t) d_2 dt,
 \end{aligned}$$

D'après le problème du primal (2.8), on obtient :

$$(a) \quad \int_0^{t_f} \varphi(t) u(t) dt = \bar{g}, \text{ ce qui implique } \int_0^{t_f} y' \varphi(t) u(t) dt = y' \bar{g}.$$

$$(b) \quad \int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt = y^0\bar{g} - \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt.$$

En ajoutant la quantité $\int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt + c'F(t_f)x_0 - c'F(t_f)x_0 = 0$,

alors la valeur $\beta(u, \tau_B)$ devient :

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt + \int_0^{t_f} y' \varphi(t)u(t)dt \\ &= \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt + c'F(t_f)x_0 - c'F(t_f)x_0 \\ &= \left(\int_0^{t_f} C(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \right) \\ &\quad + \left(c'F(t_f)x_0 + y'g - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt \right) \\ &\quad - \left(c'F(t_f)x_0 + y^0g - \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt \right), \\ &= (J_c(u^0) - J_c(u)) + (D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0(t), v^0(t), \omega^0(t))), \end{aligned}$$

Posons :

$$\beta(u, \tau_B) = \beta_u + \beta_B,$$

où :

$\beta_u = J_c(u^0) - J_c(u)$ est appelée la mesure de la non optimalité du contrôle $u(t)$, $t \in T$

$\beta_B = (D(\gamma) - D(\gamma^0)) = D(y(t), v(t), \omega(t)) - D(y^0(t), v^0(t), \omega^0(t))$, est appelée la mesure de la non optimalité du support $\tau_B, t \in T$.

Si on associe au contrôle $u(t)$, $t \in T$, un support τ^0 tel que l'ensemble $\{y(t), v(t), \omega(t)\}$ défini d'après la relation (2.22) devient la solution optimal du problème (2.21), alors :

$$\beta_B = 0, \quad \beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon.$$

Posons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \Delta(t)(u(t) - d_1), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \Delta(t)(u(t) - d_2), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ 0 & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T. \end{cases}$$

Delà, en utilisant la définition du co-contrôle $\Delta(t), t \in T$, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi'(Ax(t) + bd_1) - \psi'(Ax(t) + bu(t)), & \text{si } \psi'(t)b < 0, \\ \psi'(Ax(t) + bd_2) - \psi'(Ax(t) + bu(t)), & \text{si } \psi'(t)b > 0, \\ 0 & \text{si } \psi'(t)b = 0, t \in T. \end{cases}$$

En introduisant la fonction Hamiltonienne, $\varepsilon(t)$ sera égal a :

$$\varepsilon(t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - H(u(t), x(t), \psi(t), t),$$

Cela implique la condition ε -maximum suivante :

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), t \in T$$

2.4 DÉTERMINATION D'UN SUPPORT-CONTRÔLE DE DÉPART

La construction d'un contrôle de départ admissible doit respecter deux conditions. En ce qui concerne le support, une seule condition est à vérifier. Tout d'abord, on choisit un contrôle qui vérifie la contrainte $d_1 \leq u(t) \leq d_2$, et on calcule la trajectoire correspondante. Après, on utilise cette solution pour tester la quantité $Hx(t_f) = g$:

1. Si $Hx(t_f) = g$, alors le contrôle est admissible.
2. Si $Hx(t_f) \neq g$, alors le contrôle n'est pas admissible et pour atteindre g , on ajoute des variables artificielles pour transformer la contrainte inégalité en égalité.

Après la vérification des deux conditions, on choisit un support $\{\tau_B = \tau_j, j = 1, \dots, m\}$, tel que $\det(\phi_B) \neq 0$.

2.5 MÉTHODE ADAPTÉE

La méthode Adaptée a été appliquée dans notre cas durant les années 80 par R.Gabasov et son équipe [Gabasov et Kirillova \[1984\]](#), pour un système dynamique linéaire, car elle est issue de la programmation linéaire.

Soit $\{u(t), \tau_B\}$ un support-contrôle admissible de départ ne vérifiant pas la condition du principe du ε -maximum. L'itération $\{u(t), \tau_B\}$ vers $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est constituée de trois procédures :

1. Changement de contrôle $u(t) \rightsquigarrow \bar{u}(t)$,
2. Changement du support $\tau_B \rightsquigarrow \bar{\tau}_B$,
3. Procédure finale.

2.5.1 Changement de contrôle

On construit un nouveau contrôle admissible sous la forme :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t), t \in T$$

où $l(t)$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t), t \in T$ et θ est le pas

maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible $l(t)$

Sur T_H , on pose $\theta = 1$. La direction est définie de sorte à maximiser l'accroissement de la fonctionnelle :

$$l(t) = \begin{cases} d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0, \\ d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, t \in T_H, \end{cases} \quad (2.23)$$

De l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, on obtient :

$$\theta \int_0^{t_f} \varphi(t)l(t)dt = 0, \text{ avec } \theta \neq 0.$$

Alors :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt + \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt = 0.$$

Ce qui implique :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt = - \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt.$$

Comme $l(T_B)$ est constante et $\phi(T_H)$ est inversible, donc :

$$l(T_B) = -\phi(T_B)^{-1} \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt. \quad (2.24)$$

Détermination du pas maximal :

Nous avons $d_1 \leq \bar{u}(t) \leq d_2$, ce qui implique :

$$d_1 \leq u(t) + \theta l(t) \leq d_2, t \in T.$$

C'est-à-dire :

$$d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), t \in T. \quad (2.25)$$

Pour que la condition (2.25) soit vérifiée, il faut chercher un pas de la forme :

$$\theta(t_0) = \min_{t \in T_B} \theta(t)$$

Et tel que :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_2 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) > 0, \\ \frac{d_1 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) < 0, \\ \infty, & \text{si } l(t) = 0, t \in T_B. \end{cases} \quad (2.26)$$

Par conséquent, le pas maximal est donné par :

$$\theta^o = \min(1, \theta^o(t)).$$

Calculons le nouveau contrôle :

La direction et le pas maximal calculés précédemment, nous permettent d'aboutir au nouveau contrôle :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta^o l(t), t \in T.$$

Calculons la nouvelle valeur du suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}, \tau_B) &= \int_{T^+} \Delta(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) + \theta^o l - d_1)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) + \theta^o l - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2)dt \\ &\quad + \int_{T^+} \Delta(t)\theta^o l(t)dt + \int_{T^-} \Delta(t)\theta^o l(t)dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^o \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1)dt - \theta^o \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2)dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^o \beta(u(t), \tau_B). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = (1 - \theta^o)\beta(u(t), \tau_B).$$

Test :

A partir de la valeur de suboptimalité, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

1. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est ε -optimal.

3. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ n'est pas optimal et on pense au changement du support.

2.5.2 Changement du support

Le changement du support consiste à remplacer, $t_0 \in T_B$ par un autre $t_1 \in T_H$. Le passage de τ_B vers $\bar{\tau}_B$ entraîne le changement du vecteur des potentiels et des estimations (Co-contrôle) :

$$\bar{y} = y + \sigma z(I) \quad \text{et} \quad \bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma z(t), t \in T, \quad (2.27)$$

Où $z(t)$ est la direction admissible du changement du co-contrôle et σ est le pas dual maximal.

Construction de la direction admissible $z(t)$:

Posons

$$z(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_1, \quad t = t_0, \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_2, \quad t = t_0, \\ 0, & \text{si } t \in T_B/t_0. \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous avons :

$$\bar{\Delta}(t) = \bar{y}' \varphi(t) - C(t) \text{ et ainsi } \bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma z(t) = y' \varphi(t) - C(t) + \sigma z(t).$$

Delà, on obtient : $\sigma z(I) \varphi(t) = \sigma z(t)$, puisque $\sigma \neq 0$ alors : $z(I) \varphi(t) = z(t)$.

Sur T_B ,

on a :

$$z(I) = z'(T_B) \phi_B^1.$$

Par conséquent :

$$z'(t) = z'(T_B) \phi_B^{-1} \varphi(t), t \in T. \quad (2.29)$$

Construction du pas dual maximal σ :

Le pas dual maximal $\sigma(t_1) = \sigma^0$ est donné par :

$$\sigma^0 = \min_{t \in T_H} \sigma(t)$$

Où

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{z(t)}, & \text{si } \Delta(t)z(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \Delta(t) = 0, z(t) > 0 \text{ et } u = d_1, \text{ ou } \Delta(t) = 0, z(t) < 0 \text{ et } u = d_2, \\ \infty, & \text{sinon, } t \in T_H. \end{cases} \quad (2.30)$$

Donc, t_0 sera remplacé par t_1 dans l'ensemble T_B . Par conséquent, le nouveau support est :

$$\bar{\tau} = (\tau_B / \{t_0\}) \cup t_1.$$

Calculons la nouvelle valeur de la suboptimalité du support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$.

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) &= \int_{T^+} \bar{\Delta}(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \bar{\Delta}(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} (\Delta(t) + \sigma^0 z(t))(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} (\bar{\Delta}(t) + \sigma^0 z(t))(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} \Delta(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \bar{\Delta}(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt + \sigma^0 (\int_{T^+} z(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt \\ &\quad + \int_{T^-} z(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt), \\ &= \beta(\bar{u}(t), \tau_B) + \sigma^0 (\int_{T^+} z(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} z(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = (1 - \theta^0)\beta(u(t), \tau_B) - \sigma^0 \kappa_0,$$

$$\text{avec } \kappa_0 = (\int_{T^+} z(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} z(t)(u(t) - d_2)dt).$$

Test :

1. Si $\beta(\bar{u}(t), \bar{\tau}_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}(t), \bar{\tau}_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}(t), \bar{\tau}_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ n'est pas optimal et nous passons à l'étape suivante de notre méthode.

2.5.3 Procédure finale

A partir du support τ_B obtenu à l'étape d'avant, on construit le co-contrôle

$$\Delta(t) = -\psi'(t)B, t \in T,$$

Où $\psi(t)$ est donnée par la formule(2.14). Ainsi, construisons le quasi-contrôle $\omega(t), t \in T$

$$\omega(t) = \begin{cases} d_1, & \Delta(t) \geq 0, \\ d_2, & \Delta(t) \leq 0, \end{cases} \quad t \in T, \quad (2.31)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi(t)$ solution de (2.6).

La quantité $g - H\chi(t_f)$, nous permet de voir si l'on passe à la dernière étape de la méthode ou non.

- Si $H\chi(t_f) = g$, alors le contrôle $\omega(t), t \in T$ est optimal pour le problème (2.1)-(2.5).
- Si $H\chi(t_f) \neq g$, alors on construit le vecteur :

$$\lambda(\tau_B) = \phi(\tau_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)). \quad (2.32)$$

À partir de ce vecteur, un test est effectué en comparant la norme pondérée de $g - H\chi(t_f)$. Et $\|\lambda(\tau_B)\|$ avec une valeur seuil μ , ou $\mu > 0$, donnée et qui représente le paramètre de la méthode :

1. $\|\lambda(\tau_B)\| > \mu$, alors on change τ_B en $\bar{\tau}_B$ par la méthode duale.
2. Si $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, alors on passe à l'étape finale.

Méthode duale

La méthode duale consiste à modifier le support τ_B , de telle sorte que la quantité $\lambda(\tau_B)$ diminue jusqu'au point où le test sera négatif.

Soit $t^0 \in \tau_B$, tel que :

$$|\lambda(t^0)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)| > \mu.$$

Le changement du support τ_B à $\bar{\tau}_B$ consiste à changer le co-contrôle $\Delta(t)$ par le co-contrôle $\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \gamma\delta(t), t \in T$, où $\delta(t)$ est la direction et γ le pas dual le long de cette direction. Pour cela cherchons la fonction :

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{\Delta(t)}{\delta(t)}, & \text{si } \Delta(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.33)$$

avec $\delta(t) = -\text{signe}(\lambda)(\phi(\tau_B))^{-1}\phi(t)$.

Construisons l'ensemble $T_g(\gamma) = \{t \in T, \gamma(t) < \gamma\}$. Delà la vitesse de décroissance de la fonctionnelle du dual est égale à :

$$\alpha(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

Par construction $\alpha(0) < 0$ et $\alpha(\gamma) \leq \alpha(\bar{\gamma})$ si $\gamma < \bar{\gamma}$. Si $\alpha(\gamma) < 0$ pour $\gamma > 0$, alors le problème (2.1)-(2.5) ne possède pas de contrôle admissible, dans le cas contraire cherchons $\gamma_0 \geq 0$ tel que

$$\alpha(\gamma_o - \gamma) < 0, \alpha(\gamma_o + 0) \geq 0$$

pour tout γ tel que $0 < \gamma \leq \gamma_o$.

Cherchons $t^* \in T \setminus \tau_B$ tel que :

$$\Delta(t^*) + \gamma_o \delta(t^*) = 0, \quad \delta(t^*) \neq 0.$$

On obtient alors le nouveau support $\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus t^o) \cup t^*$.

Étape finale

L' étape finale consiste à modifier le support τ_B obtenu à l' étape précédente avec $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, jusqu'à la réalisation du test $H\chi(t_f) = g$. Elle est basée sur la méthode de Newton.

Désignons par $T^o = \{t \in T : \Delta(t) = 0\}$ l'ensemble des points isolés t_j et supposons que $\dot{\Delta}(t_j) \neq 0, j = 1, \dots, m$. Cette étape consiste à déterminer $\tau_B^o = \{\tau_j^o, j = 1, \dots, m\}$ à partir des équations :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{signe}(\dot{\Delta}(t_j)) \int_{\tau_j^o}^{t_j} \varphi(t) dt = g - H\chi(t_f). \quad (2.34)$$

C'est-à-dire, trouver un τ_B^o de sorte que $H\chi(t_f) = g$. En effet, l'équation (2.34) est obtenue à partir de la formule du Cauchy (2.6) . Nous avons :

$$\begin{aligned} g - H\chi(t_f) &= g - H \left[F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} F(t_f)(F(t))^{-1}B\omega(t)dt \right] \\ &= g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t)dt - \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t)dt. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En identifiant la partie $g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)\omega(t)dt$ à zéro, ce qui implique :

$$H\chi(t_f) - g = \int_{T_B} \varphi(t)\omega(t)dt.$$

Subdivisons l'ensemble T_B en deux sous-ensembles :

$$T_B^+ = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) > 0\} \quad \text{et} \quad T_B^- = \{t_j \in T_B, \dot{\Delta}(t_j) < 0\}.$$

Notons par $T_B = \{[t_j - \eta, t_j + \eta], j = 1, \dots, m\}$ et par $\tau_j = |t_j\eta|$, on aura ainsi :

$$H\chi(t_f)g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) < 0, \\ \sum_{j=1}^m -(d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt & \text{si } \dot{\Delta}(t_j) > 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour la résolution des équations(2.34), on prend comme approximation initiale de

$\tau_B^o = \{ \tau_j^{(o)}, j = 1, \dots, m \}$, avec $\tau_B^o = \tau_B$. Supposons connue la k-ème approximation

$\tau_B^{(k)} = \{ \tau_j^{(k)}, j = 1, \dots, m \}$, On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{ \text{signe}(\dot{\Delta}(t_j)) (\lambda(\tau_B^{(k)}))_j, j = 1, \dots, m \},$$

ou $\lambda_j(\tau_B^{(k)})$ est un vecteur calculé par la relation(2.32).

Alors, la fonction $\omega^o(t) = \omega(t), t \in T$, est calculée par le support τ_B^o qui est un contrôle optimal pour le problème (2.1)-(2.5).

2.6 ALGORITHME DE LA MÉTHODE

1. Soit $\{x, j_B\}$ un support plan de départ .

2. Calculer :

a- $y' = c'(j_B).A_B^{-1}$.

b- $E' = y'.A - c$.

$c\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(x - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x - d_{2j})$

-Si $\beta = 0, \{x, j_B\}$ est optimal , arrêt du processus .

-Si $\beta \leq \epsilon, \{x, j_B\}$ est ϵ -optimal, arret du processus .

- Si $\beta > \epsilon$, aller à 3.

3. Changement de plan

a-Déterminer le vecteur $l(J)$.

b-Déterminer le vecteur $\bar{x}(J)$

c- Calculer $(1 - \theta^0)\beta$.

-Si $\theta^0 = 0$, $\{\bar{x}, j_B\}$ est optimal, arrêt du processus .

-Si $(1 - \theta^0)\beta \leq \epsilon$, $\{\bar{x}, j_B\}$ est ϵ -optimal, arrêt du processus.

-Si $(1 - \theta^0)\beta > \epsilon$ aller à 4.

4. Changement de support

a-Calculer le vecteur τ

b-Calculer $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$.

c- le nouvel appui $\bar{J}_B = (J_B \ j_0) \cup j_1$

d-Aller à 2 (on passe à une nouvelle itération avec $(\{\bar{x}, \bar{j}_B\})$

2.7 PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE SOUS MATLAB

Le programme **MATLAB** ci-dessous est une implémentation de l'algorithme adapté permettant de résoudre les problèmes de programmation linéaire à variables bornées .

Les huit paramètres d'appel de la fonction adaptée sont les suivants :

A : matrice décrivant les contraintes égalité.

b : vecteur second membre des contraintes égalité.

c : vecteur de poids des variables dans le critère à maximiser.

$d1$: vecteur des bornes inférieure du vecteur x .

$d2$: vecteur des bornes supérieures du vecteur x .

J_B : l'ensemble des indices du support.

J_H : l'ensemble des indices du hors-support. x : vecteur de solution initiale.

nb : paramètre qui permet de calculer le nombre d'itération.

2.7.1 Algorithme de la méthode adaptée sous matlab

```
% Méthode adaptée.
```

```
% A : matrice décrivant les contraintes égalité.
```

```
% b : vecteur second membre des contraintes égalité.
```

```
% c : vecteur de poids des variables dans le critère à maximiser.
```

```
% d1 : vecteur des bornes inférieures du vecteur x.
```

```
% d2 : vecteur des bornes supérieures du vecteur x.
```

```
% JB : l'ensemble des indices du support.
```

```
% JH : l'ensemble des indices du hors-support.
```

```
% x : vecteur de solution initiale.
```

```
% nb : paramètre qui permet de calculer le nombre d'itération.
```

```
% x : vecteur des valeurs des variables maximisant la valeur du critère.
```

%F : valeur optimale du critère.

```

function [x, F] = adaptee(A, b, c, d1, d2, JB, x, nb)
%[x, F] = adaptee(A, b, c, d1, d2, JB, x, nb) rend le vecteur x qui maximise c * x
sous
%les contraintes a * x = b et d1 ≤ x ≤ d2 ainsi que la valeur F du critère à
l'optimum.
%[x, F] = adaptee(A, b, c, d1, d2, JB, x, nb) permet de calculer le nombre
%d'iteration dans la recherche de la solution optimale.
[m, n] = Size(A);
m = Size(b);
n = Size(c);
n = Sized1;
n = Sized2;
nm = Size(JB);
nb = nb;
global ε;
ε = 10-6;
J = 1 : n;
JH = setdiff(J, JB);
disp('L'ensemble des indices du support JB =')
disp(JB)
disp(JH)
if A * x == b
disp(la solution est admissible Ax = b')
else if (A * x ~ = b)
disp(la solution initiale n'est pas admissible Ax ≠ b')
disp('On ajoute des variables artificielles')
xy = x;
x = b - (A * xy);
dx1 = b - A - d2;
dx2 = b - A * d1;
c = [c; Zeros(m)]
[m, n] = Size(A);
A = [Aeye(m, m)]
d1 = [d1; dx1]
d2 = [d2; dx2]
nn = n;
mm = m;
[mm, nn] = Size(A);
x = [xy; x];
for i = 1 : nn
for j = 1 : n
if i ~ = j
e = i;
ds(e, 1) = e;
end;

end;

end;

```

```

JH = setdiff(ds, JB)
n = nn
m = mm
end;

end;

if (x < d1) | (x > d2)
disp('La solution n"est pas admissible d1 <math>\not\leq</math> x <math>\not\leq</math> d2')
else if (x >= d1) & (x <= d2)
disp('La solution est admissible d1 <math>\leq</math> d2')
end;

end;

end;
AB = A(:, JB);
C1 = c(JB);
AH = A(:, JH);
C2 = c(JH);
disp('La matrice du support est :')
disp(AB)
disp('La matrice hors-support est :')
disp(AH)
D = det(AB);
if (D == 0)
disp('La matrice n"est pas inversible')
else
AB-1 = inv(AB);
end

y = C1' * AB-1
disp('CB =')
disp(C1)
disp('CH =')
disp(C2)
disp('Le déterminant de la matrice du support est :')
disp(D)
disp('L'inverse de matrice du support est :')
disp(AB-1)
disp('Le vecteur des potentiels est :y" =')
disp(y)
E = y * AH - c2'
disp('Le vecteur des estimation est :E =')
disp(E)
disp('Le plan est :x =')
disp(x')
F = c' * x
disp('La fonction du critère est :F =')
disp(F)
ub = x(JH)' - d1(JH)';
lb = x(JH)' - d2(JH)';

```

```

for  $i = 1$  :length ( $J_H$ )
if ( $E(i) > 0$ )
 $t = i$ ;
 $u(t) = E(i) * ub(i)$ ;
else if  $E(i) == 0$ 
 $t = i$ ;
 $u(t) = 0$ ;

end;

end;

end;

end;

 $\beta = \text{sum}(u)$ ;
disp ('La valeur de suboptimalité est : $\beta(x, J_B) =$ ')
disp ( $\beta$ )
if ( $\beta == 0$ )
disp (' La solution est optimale')
disp ('Le vecteur des potentiels est : $y'' =$ ')
disp ( $y$ )
disp('Le vecteur des estimation est : $E =$ ')
disp ( $E$ )
disp ('Le plan optimal est : $x =$ ')
disp( $x$ )
disp (' La valeur optimale de la fonction du critère est : $F =$ ')
disp( $F$ )
 $nb = nb + 1$ ;
disp('Le nombre des itération de l"algorithmme est : $nb =$ ')
disp( $nb$ )
return;
end;

if( $\beta \leq \epsilon$ )
disp('La solution est  $\epsilon$ -optimal')
disp('Le plan est : $x =$ ')
disp( $x$ )
disp('La valeur du critère est : $F =$ ')
disp( $F$ )
 $nb = nb + 1$ ;
disp('Le nombre des itérations de l"algorithmme est : $nb =$ ')
disp( $nb$ )
return;
else
disp('Passons au changement de plan :')
%Changement de plan  $x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta l$ 
%Pour  $J_H$ , on prend  $\theta = 1$ 
for $i = 1$  :length( $J_H$ )
if ( $E(i) > 0$ )
 $e = i$ ;
 $l(e) = -ub(i)$ ;

```

```

else if( $E(i) < 0$ )
     $e = i$ 
     $l(e) = -lb(i)$ ;
else if $E(i) == 0$ 
     $e = i$ ;
     $l(e) = 0$ ;
end;

end;

end;

end;

 $l(J_H) = l$ ;
disp('Le vecteur de direction est :  $l(J_H) =$ ')
disp( $l(J_H)$ )
%Pour  $J_B$ 
 $l(J_B) = -A_B^{-1} * A_H * l(J_H)'$ ;
disp('Le vecteur de direction est :  $l(J_B) =$ ')
disp( $l(J_B)$ )
 $f = l(J_B)$ ;
 $ub1 = d_1(J_B)' - x(J_B)'$ ;
 $lb1 = d_2(J_B)' - x(J_B)'$ ;
for  $i = 1 : \text{length}(J_B)$ 
if( $f(i) > 0$ )
     $e = i$ ;
     $l1 = f(i)$ ;
     $lb2 = lb1(i)$ ;
     $s(e) = lb2/l1$ 
else if( $f(i) < 0$ )
     $e = i$ ;
     $l2 = f(i)$ ;
     $ub2 = ub1(i)$ ;
     $s(e) = ub2/l2$ ;
else if( $f(i) == 0$ )
     $e = i$ ;
     $s(e) = \infty$ ;
end;

end;

end;

end;
 $mi = s$ ;
 $j_0 = 1; g = mi(1)$ ;
for  $i = 1 : \text{length}(mi)$ 
if ( $g > mi(i)$ )
     $g = mi$ ;
     $j_0 = i$ ;
end;

```

```

end;
K)[1,θ];
θ = min(K');
disp('Le pas admissible est :θ =')
disp(θ)
x = x' + θ * l;
F = c' * x';
disp('Le nouveau plan est :x =')
disp(x)
disp('La valeur de la fonction du critère est :F =')
disp(F)
for j = 1 :length(JB)
if(j == j0)
j0 = JB(j);
end;

end;
disp('J0 =')
disp(j0)
β1 = (1 - θ) * β; %β1 = β(x̄, JB)
disp('La valeur de suboptimalitépour le nouveau plan est :β(x̄, JB) =')
disp(β1)
end;

if(β1 == 0)
disp('La solution est optimale')
disp('Le vecteur des potentiels est :y'' =')
disp(y)
disp('Le vecteur des estimation est :E =')
disp(E)
disp('Le plan optimal est :x =')
disp(x)
disp('La valeur optimalde la fonction du critère est :F =')
disp(F)
nb = nb + 1;
disp('Le nombre des itération de l"algorithme est :nb =')
disp(nb)
return;
end;

if(β1 ≤ ε)
disp('La solution est ε-optimal')
disp('Le plan est :x =')
disp(x)
disp('La valeur du critère est :F =')
disp(F)
nb = nb + 1
disp('Le nombre des itération de l"algorithme est :nb =')
disp(nb)
return;
else
disp('Passons au changement du support')
%Changement du support JB ↔ J̄B

```

```

disp('On cherchera un indice  $j_1 \in J_H$  qui va entrer dans la base à la place de  $j_0$ ')
xx = x(j0);
xz = sediff(x(JB), x(j0));
db1 = d1(JB);
db2 = d2(JB);
for i = 1 : length(JB)
if(db1(i) == xx)
t(i) = 1;
else if(db2(i) == xx)
t(i) = -1;
else
t(i) = 0;
end;
end;

end;
T = t;
disp('t(JB) =')
disp(T)
Tt = T * AB-1 * AH;
disp('t(JH) =')
disp(Tt)
for(i = 1 : length(JH))
if ((E(i) < 0) & (Tt(i) > 0)) | ((E(i) > 0) & (Tt(i) < 0))
zu = i;
Ez(zu) = E(i);
Tz(zu) = Tt(i);
ss = -(Ez/Tz);
end;

end;
si = min(ss)
j1 = 1; ab = ss(1);
for i = 1 : length(ss)
if (ab > ss(i))
ab = ss;
j1 = i;
end;

end;
for j = 1 : length(JH)
if(j == j1)
j1 = JH(j);
end;

end;
disp('J1 =')
disp(j1)
JB = setdiff(JB, j0);
JB = union(JB, j1);
JH = setdiff(JH, j1);
JH = union(JH, j0);

```

```
disp('Le nouveau support est :JB =')
disp(JB)
disp('Le nouveau du hors-support est :JH =')
disp(JH)
x = x';
end;

nb = nb + 1;
adaptee(A,b,c,d1,d2,JB,x,nb)
```

2.8 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté une des méthodes de résolution d'un système dynamique la méthode adaptée qui permet d'avoir une solution exacte et approchée, nous avons clarifié et rappelé cette méthode, et la résolution avec le principe du maximum .

EXEMPLES D'APPLICATION

3

3.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode adaptée à un problème de contrôle optimal.

3.2 EXEMPLE

Résolution par la méthode Adaptée

Soit le problème à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = c'x(t_f) \rightarrow \max \\ \dot{x} = Ax(t) + bu(t) \quad \text{pour } t \in [0,3] \\ x(0) = x_0 = (1 \ 0 \ 1), \quad \text{et } Hx(t_f) = g \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0,3] \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{aligned} c' &= (1 \ 1 \ 1), \\ b &= (0 \ 2 \ 1), \end{aligned}$$

Et

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le problème initial prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = \int_0^3 c'F(3)F^{-1}(t)bu(t)dt + c'F(3)x_0 \rightarrow \max_u \\ \int_0^3 HF(3)F^{-1}(t)bu(t)dt = g - HF(3)x_0 \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0,3] \end{array} \right.$$

Le rang $[b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b] = 3$, donc on continue le processus, de plus le système est stable pour $N = 3, A^3 = [0]$.

où $F(t)$ est la résolvante, solution du système : $\dot{F}(t) = AF(t), F(0) = I_3$, qui est égale à :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4.5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$t \in T$.

$$u(t) = u_j = cst, \quad t \in [\tau_j, \tau^j], \quad T = [0, 3] = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j], \quad \tau_j - \tau^j = h > 0$$

tel que $\tau_1 = t_0 = 0$ et $\tau^N = t_f = 3$ pour $j = 1, \dots, N$

Cela nous permet d'aboutir au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = \sum_{j=1}^N u_j \int_{\tau_j}^{\tau^j} c(t) dt + c'F(3)x_0 \rightarrow \max_u \\ \sum_{j=1}^N u_j \int_{\tau_j}^{\tau^j} \phi(t) dt = g - HF(3)x_0 \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0, 3], j = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Soit $J_B \subset \{1, \dots, N\}$

avec

$$\phi(t) = HF(t_f)F^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5 \\ \frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5 \end{pmatrix}$$

Et

$$C(t) = c'F(t_f)F^{-1}(t)b = \left(\frac{1}{2}t^2 - 4t + 6.5 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = \sum_{j=1}^N c_j u_j dt + c'F(3)x_0 \rightarrow \max_u \\ \sum_{j=1}^N \phi_j(t) u_j dt = g - HF(3)x_0 \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0, 3], j = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Principe de discrétisation :

Posons $T = [0, 3] = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j], \tau_j - \tau^j = 1$ pour $N = 3$, ce qui implique :

$$T = [0, 3] = [0, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3]$$

Calculons C_j et ϕ_j pour $j = 1, 2, 3$:

$$C_j = \int_0^3 c(t) dt$$

$$\phi_j = \int_0^3 \phi(t) dt$$

$$C(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - 4t + 6.5\right)$$

On a pour $j = 1$

$$c_1 = \int_0^1 \frac{t^2}{2} - 4t + 6.5 = \left[\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 6.5t\right]_0^1 = \frac{14}{3}$$

pour $j = 2$

$$c_2 = \int_1^2 \frac{t^2}{2} - 4t + 6.5 = \left[\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 6.5t\right]_1^2 = \frac{5}{3}$$

pour $j = 3$

$$c_3 = \int_2^3 \frac{t^2}{2} - 4t + 6.5 = \left[\frac{t^3}{6} - 2t^2 + 6.5t\right]_2^3 = \frac{-1}{3}$$

Et

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5 \\ \frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5 \end{pmatrix}$$

On a pour $j = 1$

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5\right) \\ \int_0^1 \left(\frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5\right) \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \left[\frac{t^3}{6} - 4t^2 + 27.5t\right]_0^1 \\ \left[\frac{t^3}{6} - 3t^2 + 16.5t\right]_0^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{3} \\ \frac{41}{3} \end{pmatrix}$$

pour $j = 2$

$$\phi_2(t) = \begin{pmatrix} \int_1^2 (\frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5) \\ \int_1^2 (\frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5) \end{pmatrix}$$

$$\phi_2(t) = \begin{pmatrix} [\frac{t^3}{6} - 4t^2 + 27.5t]_1^2 \\ [\frac{t^3}{6} - 3t^2 + 16.5t]_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{26}{3} \end{pmatrix}$$

pour $j = 3$

$$\phi_3(t) = \begin{pmatrix} \int_2^3 (\frac{1}{2}t^2 - 8t + 27.5) \\ \int_2^3 (\frac{1}{2}t^2 - 6t + 16.5) \end{pmatrix}$$

$$\phi_3(t) = \begin{pmatrix} [\frac{t^3}{6} - 4t^2 + 27.5t]_2^3 \\ [\frac{t^3}{6} - 3t^2 + 16.5t]_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

En utilisant les dernières quantités, le problème (3.1) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = \frac{14}{3}u_1 + \frac{5}{3}u_2 - \frac{1}{3}u_3 \rightarrow \max_u \\ 71u_1 + 50u_2 - 32u_3 = -9 \\ 41u_1 + 26u_2 + 14u_3 = -6 \\ \|u(t)\| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0,3], j = 1, \dots, N. \\ g = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} \\ \frac{15}{2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Considérons le support contrôle non dégénéré $\{u^1, \tau_B\}$ avec $\tau_B = \{2,3\}$ et $u^1 = (0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\phi_B = (\phi_2, \phi_3) = \begin{pmatrix} \frac{50}{3} & \frac{32}{3} \\ \frac{26}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

avec

$$\det \phi_B = \frac{-44}{3} \neq 0 \text{ donc inversible et } \phi_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{44} & \frac{32}{44} \\ \frac{26}{44} & \frac{-50}{44} \end{pmatrix}$$

Calculons les vecteurs des potentiels et des estimations :

$$\begin{cases} y' = c'_B \phi_B^{-1} \\ E' = \Delta(t) = y' \phi - c' \end{cases}$$

tel que

$$y' = \left(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right) \begin{pmatrix} \frac{-7}{22} & \frac{16}{22} \\ \frac{13}{22} & \frac{-25}{22} \end{pmatrix}$$

$$y' = \left(\frac{-8}{11}, \frac{17.5}{11}\right)$$

On à

$$\Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

et

$$\Delta_1 = y' \phi_1 - c_1$$

$$\Delta_1 = \frac{589}{66} > 0$$

La valeur de suboptimalité est :

$$\beta \{u^1, \tau_B\} = \sum_{\Delta > 0} \Delta_1(t)(u_1^1 - d_1) = \frac{589}{66} \simeq 8.92 > \varepsilon \text{ Alors } \{u^1, \tau_b^1\} \text{ est non optimal, alors on passe au changement du plan.}$$

changement du plan $u^1 \rightsquigarrow u^2$

$$u^1 \rightsquigarrow u^2 = u^1 + \theta l.$$

Déterminer le vecteur $l(t)$

$$\text{sur } \tau_H : \begin{cases} \theta = 1 \\ l_1 = d_1 - u_1^1 = -1 \end{cases}$$

$$\text{pour } l(B) = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = -\phi^{-1} 1_B \phi_H l_H = \begin{pmatrix} \frac{53}{22} \\ \frac{-34}{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} l_2 = \frac{53}{22} > 0 \\ l_3 = \frac{-34}{22} < 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \frac{d_2 - u_2}{l_2} = \frac{33}{53}$$

$$\theta_3 = \frac{d_1 - u_3}{l_3} = \frac{33}{34}$$

Le pas admissible maximal : $\theta^o = \min \{1, \theta_2, \theta_3\} = \min \left\{1, \frac{33}{53}, \frac{33}{34}\right\}$ ce qui implique : $\tau_o = 2$.

Et donc la nouvelle commande u^2 est :

$$u^2 = u^1 + \theta^o l = \left(\frac{-33}{53}, 1, \frac{-539}{1166}\right)$$

le nouveau support controle est avec $\{u^2, \tau_B^1\}$:

$\beta \{u^2, \tau_B^1\} = (1 - \theta^0)\beta \{u^1, \tau_B^1\} = \frac{5890}{1749} \simeq 3.36 > \varepsilon$, alors on passe au changement du support

changement du support $\tau_B^1 \rightsquigarrow \tau_B^2$

$$\tau_B^1 \rightsquigarrow \tau_B^2 = \{1, 3\}$$

$$\phi_B^2 = \begin{pmatrix} \frac{71}{3} & \frac{32}{3} \\ \frac{41}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det \phi_B = \frac{-106}{3} \neq 0.$$

$$\phi^{-1} 1_B = \begin{pmatrix} \frac{7}{53} & \frac{-16}{53} \\ \frac{-41}{106} & \frac{71}{106} \end{pmatrix}$$

calculons les vecteurs des potentiels et des estimations pour le support τ_B^2 :

$$y' = \left(\frac{79}{106}, \frac{-173}{106} \right)$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 0$$

$$\Delta_2 = y' \phi_2 - c_2 = \frac{-1087}{159} < 0$$

la valeur de suboptimalité pour le support contrôle $\{u^2, \tau_B^2\}$ est :

$$\beta \{u^2, \tau_B^2\} = \Delta_2(u_2^2 - d_2) = \frac{-1087}{159}(1 - 1) = 0$$

Alors le support-plan $\beta \{u^2, \tau_B^2\}$ est optimal.

Procédure finale :

Construisons la quasi-commande $\omega(t), t \in T = [0, 3]$:

$$\omega = \begin{cases} -1 & \Delta(t) > 0 \\ 1 & \Delta(t) < 0, \quad t \in T \end{cases}$$

Calculons $\chi(t_f)$ la trajectoire correspondante à $\omega(t)$:

$$\chi(t_f) = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \sum_{j=0}^N F^{-1}(t) b u(t) dt$$

$H\chi(t_f) = g$, alors $\omega(t)$ est optimale.

si $H\chi(t_f) \neq g \Rightarrow$ la procédure finale.

Alors on construit le vecteur $\lambda(\tau_B)$:

$$\lambda(\tau_B) = \phi^{-1} 1_B (g - H\chi(t_f)) = 0$$

Résolution par le principe du maximum

Soit le système à résoudre (3.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = c'x(t_f) \rightarrow \max \\ \dot{x} = Ax(t) + bu(t) \quad \text{pour } t \in [0,3] \\ x(0) = x_0 = (1 \ 0 \ 1), \quad \text{et } Hx(t_f) = g \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0,3] \end{array} \right.$$

On résoudre le système dynamique :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^t F(t)F^{-1}(s)bu(s)ds.$$

supposons $x_0 = (1 \ 0 \ 1)$

$$x(t_f) = \int_0^{t_f} F(t_f)F^{-1}(t)bu(t)dt.$$

Delà le problème (3.1) sera :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = c'F(3)x_0 + \int_0^3 c'F(3)F^{-1}(t)bu(t)dt \rightarrow \max_u \\ \int_0^3 HF(3)F^{-1}(t)bu(t)dt = g \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in T = [0,3] \end{array} \right.$$

où $C(t) = c'F(3)F^{-1}(t)b$,

posons $\phi(t) = HF(3)F^{-1}(t)bu(t)$, $t \in T = [0,3]$

Soit $\tau_B = \{2,3\} \subset T$ le support.

Définisons le vecteur des potentiels :

$$y' = (y_1, y_2) = c'_B \phi_B^{-1} = (-0.7 \ 1.5)$$

Et le vecteur des estimations :

$$E(t) = \Delta(t) = (y_1, y_2)\phi(t) - c(t), t \in [0,3]$$

$$E(t) = ((y_1, y_2)H - c')F(3)F^{-1}(t)b.$$

$$E(t) = \frac{y_1 t^2}{2} + \frac{y_2 t^2}{2} - 8y_1 t - 6y_2 t + \frac{55y_1}{2} + \frac{35y_2}{2} - \frac{t^2}{2} + 4t - \frac{13}{2}$$

$$\Delta(t) = E(t) = \frac{t^2}{2}(y_1 + y_2 - 1) + t(-8y_1 - 6y_2 + 4) + \frac{55y_1}{2} + \frac{35y_2}{2} - \frac{13}{2}$$

d'où la solution est égale :

$$t_{1,2} = \frac{-8y_1 - 6y_2 + 4 \pm \sqrt{(-8y_1 - 6y_2 + 4)^2 - (y_1 + y_2 - 1)(55y_1 + 35y_2 - 13)}}{y_1 + y_2 - 1}$$

$$\text{Soit la fonction } \psi'(t) = (y'H - c')F(3)F^{-1}(t) = (y_1 + y_2 - 1; y_1t - y_2t + t + 6y_1 + 4y_2 - 2; \frac{y_1t^2}{2} + \frac{y_2t^2}{2} - \frac{9y_1t}{2} - 4y_2t + \frac{27y_1}{2} + \frac{15y_2}{2} - \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{-3}{2})$$

La fonction $\psi(t)$ est solution du système

$$\dot{\psi} = -A'\psi, \psi(3) = H'y - c$$

Où

$$\psi(3)' = (y_1, y_2)H - c'$$

$$\text{Delà } E(t) = \psi'(t)b, t \in [0, 3]$$

En utilisant le critère d'optimalité on obtient :

$$u^o = \text{signe} \psi'(t)b, t \in [0, 3]$$

Delà l'Hamiltonien est égale à :

$$H(x, \psi, u, t) = \psi'(t)(Ax + bu)$$

$$= \psi'(t)Ax + \psi'bu$$

Où

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \psi(3) = y'H - c'$$

$$\max_{|u| \leq 1} \Rightarrow u(t) = \text{signe} \psi'(t)b, t \in [0, 3].$$

CONCLUSION GÉNÉRALE

La théorie du contrôle optimal est un domaine très vaste qui a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs.

Dans la vie réelle le contrôle optimal désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser.

L'application de la théorie du contrôle est intervenue dans plusieurs domaines pratiques

Notre objectif dans ce mémoire est l'étude d'un problème de contrôle optimal , on a présenter dans le premier chapitre quelques concepts de base de la théorie du contrôle optimal, ainsi nous avons donné la structure d'un problème de contrôle optimal puis évoqué la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires et le principe du maximum.

Ainsi ,dans le cadre de ce travail, nous avons étudié une méthode directe de résolution des problèmes linéaires de contrôle optimal et en présentant des exemples d'applications de cette méthode.

Ce travail nous a permis de dégager plusieurs perspectives à explorer dans les travaux futurs. Parmi ces perspectives, nous citons :

-En théorie, il est intéressant d'appliquer la méthode de résolution directe des problème linéaire de contrôle optimal pour la résolution .

-En pratique, différents problèmes que ce soit en économie, en agriculture, en automatique...etc, peuvent être modélisés par des problèmes de contrôle optimal et résolus par la méthode étudiée.

BIBLIOGRAPHIE

- Mohamed Aidene, IL Vorob'ev, et Brahim Oukacha. Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax performance index. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 45(10) :1756–1765, 2005.
- REDJIL Amel. *Les équations stochastiques contrôlées gouvernées par un G-mouvement brownien*. PhD thesis, UNIVERSITE BADJI MOKHTAR ANNABA, 2018.
- VG Boltyanskiy, Revaz V Gamkrelidze, YEF MISHCHENKO, et LS Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. 1962.
- Mohammed Chebbah. *Résolution et implementation d'un problème Min-Max en controle optimal*. PhD thesis, Tizi-Ouzou, 2006.
- R Gabasov et FM Kirillova. Méthodes constructives d'optimisation. *Problèmes de la commande.-Minsk : Universitetskoyé*, page 2, 1984.
- R Gabasov et FM Kirillova. Adaptive method of solving linear programming problems. *Preprint series of university of Karlsruhe, institut for statistic and mathematics*, 1994.
- Rudolf Emil Kalman. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A : Control*, 1 (2) :152–192, 1963.
- Rudolf Emil Kalman et al. Contributions to the theory of optimal control. *Bol. soc. mat. mexicana*, 5(2) :102–119, 1960.
- Kahina Louadj. *Résolution de problème paramétrés de controle optimal*. PhD thesis, Université de Bouira, 2012.
- Lev Semenovich Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. CRC press, 1987.
- Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*, volume 36. Vuibert Paris, 2005.

تلخيص

شهدت نظرية التحكم تطورًا كبيرًا في السنوات الأخيرة ، وبما أنها لا تزال في تطور مستمر ، فمن الصعب تقديم تحليل مفصل. يرتبط تطوير هذا التخصص بالمشكلات العملية التي تم حلها بمرور الوقت ومن خلال تطبيقاتها المثيرة للاهتمام في مختلف المجالات : قدمنا في عملنا المفهوم الأساسي لنظرية التحكم (فئات الأوامر ، إمكانية التحكم ، المبدأ من الحد الأقصى ، طرق الدقة العددية) دعونا ندرس طريقة مباشرة للقرار (الطريقة المعدلة) وكذلك أمثلة للتطبيق.

Résumé

La théorie du contrôle a connu un grand développement durant ces dernières années ,et comme elle est encore en constante évolution il est difficile de fournir une analyse détaillée .Le développement de cette discipline est liée aux problèmes pratique qui ont été résolus au cours du temps et par ses applications intéressantes dans divers domaines.Dans notre travail nous avons donnée les notion de base de la théorie du contrôle (classes de commandes, contrôlabilité, Principe du maximum de pontryagin, méthodes de résolutions numériques) en études une méthode direct de résolution (méthode adaptée) ainsi que des exemples d'application.

Abstract

Control theory has undergone a great development in recent years, and as it is still constantly evolving it is difficult to provide a detailed analysis. The development of this discipline is linked to practical problems that have been solved over time and by its interesting applications in various fields. In our work we gave the basic notion of control theory (classes of commands, controllability, Principle of the maximum of pontryagin, methods of numerical resolutions) let us study a direct method of resolution (adapted method) as well as examples of application.