

République Algérienne Démocratique et Populaire.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.
Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou



Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Option : Modélisation Mathématiques

Intitulé du mémoire

Sources et Contrôle des Erreurs dans le Calcul Numérique

Réalisé par :

IRNATENE Kahina

Dirigé par :

TALEB Lynda

Devant le jury d'examen composé de :

| | | | | |
|---------|--------|------------|-------|--------------|
| RAHMANI | Leila | Professeur | UMMTO | Président |
| TALEB | Lynda | MCB | UMMTO | Rapporteur |
| KOURAT | Hocine | MCB | UMMTO | Examineur |
| LASFER | Fazia | MAA | UMMTO | Examinatrice |

Année Universitaire : 2016/2017

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Notations | 2 |
| Introduction | 4 |
| 1 Approximation par la méthode des éléments finis | 5 |
| 1.1 Problème mixte Dirichlet-Neumann | 5 |
| 1.1.1 Formulation variationnelle | 6 |
| 1.1.2 Problème bien posé | 6 |
| 1.2 Approximation par éléments finis triangulaire P1 | 8 |
| 1.2.1 Discrétisation du domaine Ω | 8 |
| 1.2.2 Élément fini de Lagrange | 8 |
| 1.2.3 Espace discret | 9 |
| 1.2.4 Écriture du problème approché en éléments finis P1 | 12 |
| 2 Contrôle d'erreur et convergence de la méthode des éléments finis | 14 |
| 2.1 Majoration d'erreur-Théorème principal | 14 |
| 2.2 Démonstration du Théorème principal | 15 |
| 2.2.1 Étape 1 : Majoration par l'erreur d'interpolation | 16 |
| 2.2.2 Étape 2 : Décomposition sur les éléments | 16 |
| 2.2.3 Étape 3 : Passage à l'élément de référence | 16 |
| 2.2.4 Étape 4 : Majoration sur l'élément de référence | 18 |
| 2.2.5 Étape 5 : Assemblage des majorations locales | 19 |
| 2.2.6 Résultat final | 20 |
| Conclusion générale | 21 |
| Bibliographie | 22 |

Notations

- Ω : Ouvert de \mathbb{R}^n .
- $\partial\Omega = \Gamma$: Frontière de Ω .
- $C_0^1(\Omega)$: Espace des fonctions continûment différentiables et à support compact dans Ω .
- $C^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment différentiables dans Ω .
- L_{loc}^1 : Espace des fonctions intégrables sur les compacts de Ω .
- $D(\Omega)$: L'espace vectoriel des fonction C^∞ sur Ω à support compact inclus dans Ω .
- D^α : Dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
- $|\alpha|$: Longueur du multi-indice, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
- $\frac{\partial}{\partial n}$: Dérivée normale extérieure.
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = \text{grad} u$: Le gradient de u .
- $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien de u .
- V_h : Espace d'approximation.
- (K, Σ, P) : Élément fini.
- δ_{ij} : Symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon).

$diam(T_k)$: Le diamètre de l'élément T_k .

$Vect\{1, x, \dots, x^k\}$: L'espace vectoriel engendré par $1, x, \dots, x^k$.

Introduction

La grande majeure partie des équations aux dérivées partielles issues de la physique n'ont pas de solutions explicites et ne peuvent être résolues que par approche numérique. L'une des méthodes d'approximation la plus utilisée est la méthode des éléments finis, notamment en mécanique des fluides, voir [6], [8], [9]. Mais un des problèmes importants qui se posent, est de déterminer le degré de confiance que l'utilisateur peut accorder à la solution numérique obtenue. En effet, toute phase de discrétisation d'un problème continu entraîne inévitablement l'obtention d'une solution approchée plus ou moins représentative de la solution exacte ; par conséquent, afin de pouvoir certifier la qualité d'un calcul donné, il est nécessaire d'être en mesure d'estimer l'écart - appelé erreur de discrétisation - entre la solution approchée, issue de l'application de la méthode des éléments finis et la solution exacte (bien souvent inconnue) du problème continu. Mais les estimations d'erreurs ainsi obtenues ne sont, à vrai dire, que des évaluations du taux de convergence en fonction de la régularité de la solution et du type d'éléments finis utilisés, de telles estimations sont qualifiées d'estimations a priori, car elles ne dépendent pas de la solution approchée calculée, de ce fait elles nous permettent pas de déterminer l'erreur réalisée pour un maillage donné. A contrario, les estimations dites a posteriori, basées sur la solution discrétisée obtenue, permettent de majorer l'erreur de discrétisation de manière explicite, voir [2].

Nous allons voir que la méthode d'estimation d'erreur décrite dans ce travail débouche sur de véritables critères qui caractérisent l'erreur due à l'approximation par éléments finis. Il est par conséquent absolument nécessaire de comprendre et de contrôler le devenir de ces erreurs pour pouvoir justifier la validité et la précision des résultats obtenus, voir [1], [2].

Chapitre 1

Approximation par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords.

1.1 Problème mixte Dirichlet-Neumann

Soit Ω ouvert borné de \mathbb{R}^2 régulier connexe de frontière $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ou $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. On suppose $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$, . Soit le problème de trouver u tel que :

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$u = u_D \quad \text{sur } \Gamma_D \quad (1.2)$$

$$\partial_n u = g_N \quad \text{sur } \Gamma_N \quad (1.3)$$

\mathbf{n} désigne le vecteur normal sortant à Γ , $f \in L^2(\Omega)$, $c \in \mathbb{R}_+$, $u_D \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$, et $g_N \in L^2(\Gamma_N)$ sont données.

1.1.1 Formulation variationnelle

On multiplie l'équation (1.1) par une fonctions test $v \in D(\Omega)$, et on intègre par parties en utilisant la formule de Green se donne :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que } u|_{\Gamma_D} = u_D \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma + c \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \end{cases} \quad (1.4)$$

u étant connu sur Γ_D on prendra $v|_{\Gamma_D} = 0$, et ayant $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = g$, on en déduit :

Le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u|_{\Gamma_D} = u_D \text{ et :} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + c \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

La condition $u|_{\Gamma_D} = u_D$ est une condition essentielle alors que la condition $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_N} = g$ est une condition naturelle .

Notons :

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\} \quad (1.6)$$

Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + c \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma, \end{cases} \quad (1.7)$$

1.1.2 Problème bien posé

Montrons, à présent, que le problème (1.7) est bien posé. Comme on a $u_D \neq 0$ on fait un relèvement r_D de u_D dans $H^1(\Omega)$, on considère le problème en la variable $u_0 = u - r_D \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$.

On obtient le problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : \\ \int_{\Omega} (\nabla u_0 \nabla v + c u_0 v) dx = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla r_D \nabla v + c r_D v) dx \end{cases} \quad (1.8)$$

Soit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0 \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u_0, v) = l_D(v) \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec $a(u_0, v) = \int_{\Omega} (\nabla u_0 \nabla v + c u_0 v) dx \quad \forall u_0, v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$
 $l_D(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla r_D \nabla v + c r_D v) dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$

Montrons l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème de Lax-Milgram

$$\begin{aligned}
\text{On a : } |l_D(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla r_D \nabla v + c r_D v) dx \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f v| dx + \int_{\Gamma_N} |g v| d\Gamma + \int_{\Omega} |\nabla r_D \nabla v| dx + |c| \int_{\Omega} |r_D v| dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \\
&\|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} + \|\nabla r_D\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |c| \|r_D\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|r_D\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |c| \|r_D\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|r_D\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |c| \|r_D\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} + \|r_D\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + |c| \|r_D\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de $l_D(v)$

- Montrons que la forme bilinéaire $a(., .)$ est continue on a :

$$\begin{aligned}
|a(u_0, v)| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla u_0 \nabla v + c u_0 v) dx \right| \\
&\leq \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |c| \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\leq (|c| + 1) \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité de $a(u_0, v)$

On montre aussi que $a(., .)$ est coercive en utilisant l'inégalité de Poincaré comme ($v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$) et :

- $c > 0$

$$a(u_0, v) = \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + c v^2) dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 = \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|v\|_{L^2}^2$$

$$2\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \alpha \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

$$\geq \min(1, \alpha) (\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2)$$

$$\|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq \frac{\min(1, \alpha)}{2} \|v\|_{H^1}^2, \text{ donc } a \text{ est coercive.}$$

Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution .

1.2 Approximation par éléments finis triangulaire P1

1.2.1 Discrétisation du domaine Ω

Définition 1.2.1. *maillage triangulaire*

Supposons Ω de frontière polygonale.

Nous définissons un maillage triangulaire sur Ω de sorte qu'il soit entièrement recouvert par N_T petits triangles T_k ($k \in \{1, \dots, N_T\}$) de taille maximale h (où h est le diamètre du cercle inscrit à ce triangle). On note q_i , $i \in \{1, \dots, N_S\}$ les points du maillage ainsi formé, c'est-à-dire les N_S sommets de tous les triangles de la triangulation. Parmi ces sommets, N_f sont sur la frontière Γ du domaine et $N_i = N_S - N_f$ sont internes (i.e. non situés sur Γ).

Définition 1.2.2. *maillage triangulaire admissible*

Soit τ_h un maillage triangulaire du domaine Ω .

On dit que τ_h est un maillage admissible si pour tous éléments distincts T_k et T_j de τ_h , on a :

$$T_k \cap T_j = \begin{cases} \text{Soit } \emptyset, \\ \text{Soit un sommé commun,} \\ \text{Soit un coté commun.} \end{cases} \quad (1.10)$$

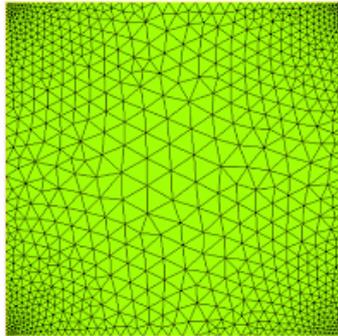


figure 1 : Maillage triangulaire admissible.

1.2.2 Élément fini de Lagrange

Définition 1.2.3. *Unisolvance*

Soit $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ un ensemble de N points distincts de \mathbb{R}^n . Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonctions de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que Σ

est P -unisolvant si pour réel $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il existe un unique élément p de P tel que $p(a_i) = \alpha_i$, $i = 1, \dots, N$.

Ceci revient à dire que la fonction :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : p &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longrightarrow (p(a_1), \dots, p(a_N)) \end{aligned}$$

est bijective.

En pratique, on montrera que Σ est P -unisolvance en vérifiant que $\dim P = \text{card } \Sigma$, puis en montrant l'injectivité ou la surjectivité de \mathcal{L} .

L'injectivité de \mathcal{L} se démontre en établissant que la seule fonction de P s'annulant sur tous les points de Σ est la fonction nulle .

La surjectivité de \mathcal{L} se démontre en exhibant une famille p_1, \dots, p_N d'éléments de P tels que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, c'est-à-dire un antécédent pour \mathcal{L} de la base canonique de \mathbb{R}^n . En effet, étant donnés des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, la fonction $p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ vérifie alors $p(a_j) = \alpha_j$, $j = 1, \dots, N$.

Définition 1.2.4. *Un élément fini de Lagrange est un triplet (T, Σ, P) tel que*

- * T est un élément géométrique dans notre cas, un triangle.
- * $\Sigma = \{q_1, \dots, q_N\}$ l'ensemble des sommets N de T .
- * P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur T , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P=N$).

1.2.3 Espace discret

On désigne par P_1 l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à un. Il est engendré par 1 , x et y . On définit

$$V_h = \{v_h \in \tilde{V}_h, v_{h/\Gamma_D} = u_D\},$$

avec

$$\tilde{V}_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_{h/\Gamma_k} \in P_1, \forall k \in \{1, \dots, N_T\}\}.$$

Proposition 1.2.1. *1. Les fonctions de \tilde{V}_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_S sommets q_i du maillage .*

2. La dimension de \tilde{V}_h est N_S et une base de \tilde{V}_h est formée des fonctions w_i , $i \in \{0, 1, 2, \dots, N_S\}$ suivantes : $w_i \in \tilde{V}_h$, $w_i(q_j) = \delta_{ij}$ (indice de Kronecker).

on a :

$$\forall v_h \in \tilde{V}_h, v_h(x, y) = \sum_{i=0}^{N_S} v_h(q_i) w_i(x, y).$$

Les scalaires $v_h(q_i)$, $i \in \{0, 1, 2, \dots, N_S\}$ sont les degrés de liberté de la fonction $v_h \in \tilde{V}_h$.

3. $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$ et pour toute fonction $v_h \in \tilde{V}_h$ on a au sens des distributions

$$\frac{\partial v_h}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_T} \chi_{T_k} \frac{\partial}{\partial x} (v_h / T_k).$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial y} = \sum_{k=1}^{N_T} \chi_{T_k} \frac{\partial}{\partial y} (v_h / T_k).$$

démonstration : Dans un triangle T_k de la triangulation v_h s'écrit

$$v_h(x) = \alpha + \beta x + \delta y.$$

Les coefficients sont solution du système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta x_1 + \delta y_1 = v_h(q_1) \\ \alpha + \beta x_2 + \delta y_2 = v_h(q_2) \\ \alpha + \beta x_3 + \delta y_3 = v_h(q_3) \end{cases}$$

Son déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

On a $D = \pm 2 \text{ aire}(T_k) = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$

On en déduit que la restriction de v_h est entièrement déterminée par les valeurs aux trois sommets du triangle T_k .

La dimension de $\dim \tilde{V}_h \leq N_S$.

Pour avoir $\dim \tilde{V}_h = N_S$, on montre que les fonctions P_1 par morceaux sont continues sur $\bar{\Omega}$. Pour cela, il suffit de montrer que le raccord entre deux triangles T_k et $T_{k'}$ est continue.

Plaçons nous dans le cas où (AB) est l'interface entre 2 triangles .

On note $v = v_{h/T_k}$ et $v' = v_{h/T_{k'}}$. On a

$$(v - v')(A) = (v - v')(B) = 0.$$

Soit $M \in [A, B]$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda A + (1 - \lambda)B$. Ainsi,

$$(v - v')(M) = (v - v')(\lambda A + (1 - \lambda)B) = \lambda(v - v')(A) + (1 - \lambda)(v - v')(B) = 0.$$

Ainsi $\dim \tilde{V}_h = N_S$.

Montrons que la famille est libre : soient N_S scalaire $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_S}$ tel que la fonction $v_h(x) = \sum_j^{N_S} \lambda_j w_j(x)$ soit nulle. En particulier,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N_S\}, 0 = v_h(q_i) = \sum_{j=1}^{N_S} \lambda_j w_j(q_i) = \lambda_i.$$

Chacun des coefficients λ_i est donc nul, et la famille est libre.

Comme elle comporte N_S éléments, c'est une base de \tilde{V}_h et tout élément $v_h \in \tilde{V}_h$ s'écrit sous la forme

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_S} v_h(q_j) w_j(x).$$

Montrons le troisième point.

Soit $v_h(x) \in \tilde{V}_h$, $v_h \in L^2(\Omega)$ car $v_h \in L^\infty(\Omega)$ et Ω est borné. Montrons que $\frac{\partial v_h}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_h}{\partial y}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in D(\Omega), \langle \frac{\partial v_h}{\partial x}, \varphi \rangle &= - \langle v_h, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle \\ &= - \sum_{k=1}^{N_T} \int_{T_k} v_h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= \sum_{\kappa=1}^{N_T} \int_{T_\kappa} \frac{\partial v_h}{\partial x} \varphi - \int_{\partial T_\kappa} [v_h \varphi \nu_{i,k}] d\sigma \end{aligned}$$

où $\nu_{i,k}$ est la i ème composante de la normale sortante ν_k de T_k .

Montrons que le terme sur le bord est nul :

1. soit ∂T_k fait partie du bord de Ω et dans ce cas $\varphi = 0$,
2. soit ∂T_k est une arête interne et dans ce cas si on note AB cette arête comme $\nu_k = -\nu_{k'}$ on a

$$\int_{[AB]} v_h \varphi \nu_{i,k} + \int_{[AB]} v_h \varphi \nu_{i,k'} = 0, \forall i = 1, 2.$$

D'où

$$\langle \frac{\partial v_h}{\partial x}, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{N_T} \langle \chi_{T_k} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_h|_{T_k}) \varphi \rangle.$$

Ainsi, on a

$$\left(\frac{\partial v_h}{\partial x}\right)_{/T_k} = \frac{\partial(v_h|_{T_K})}{\partial x}.$$

Donc, $\frac{\partial v_h}{\partial x} \in L^2(\Omega)$.

Par la suite, on admet que les sommets internes du maillage correspondent aux indices $i \in \{1, N_i\}$.

Pour l'espace discret V_h , on a le résultat suivant.

- Corollaire 1.2.1.** 1. Les fonctions de V_h sont entièrement déterminées par les valeurs qu'elles prennent en chacun des N_i sommets internes du maillage
 2. $\dim V_h = N_i$ et

$$\forall v_h \in V_h, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i)w_i(x).$$

Les scalaires $v_h(q_i)$ pour $i \in \{1, N_i\}$ sont les degrés de libertés de la fonction v_h .

3. $V_h \subset H^1(\Omega)$.

Preuve : $v_h = \sum_{i=1}^{N_s} v_h(q_i)w_i(x)$ car $v_h \in \tilde{V}_h$. Comme $v_h(q_i) = 0$ pour tout $q_i \in \Gamma$, on a

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_i} v_h(q_i)w_i(x).$$

Cette famille est génératrice et libre donc c'est une base de V_h .

1.2.4 Écriture du problème approché en éléments finis P1

Dans ce paragraphe, on va écrire le problème approché dans l'espace V_h . Pour cela, notons \mathbf{I} l'ensemble des indices des nœuds du maillage correspondants à une valeur inconnue de la solution u . C'est à dire ici l'ensemble des nœuds n'appartenant pas à Γ_D . Notons \mathbf{J} l'ensemble des indices des sommets du maillage appartenant à Γ_D . La solutions $u_{0,h}$ s'écrira dans la base des w_j pour $j \in \mathbf{I}$ selon :

$$u_{0,h}(x, y) = \sum_{j \in \mathbf{I}} u_j w_j(x, y)$$

La fonction auxiliaire r_D sera approchée par une fonction $r_{D,h}$ continue et affine par morceaux prenant les valeurs imposées sur Γ_D et nulle sur tous les nœuds d'indices $j \in \mathbf{J}$

$$r_{D,h}(x, y) = \sum_{j \in \mathbf{J}} u_D(x_j, y_j)w_j(x, y)$$

Pour ce choix de $r_{D,h}$ on a :

1. La solution cherchée u_h et la solution calculée $u_{0,h}$ prennent les mêmes valeurs aux points où la solution u est inconnue.
2. Les conditions aux limites ne produisent qu'une modification limitée du système linéaire qui n'intervient que sur quelques composantes du second-membre.

En injectant dans la formulation variationnelle tous ces éléments on obtient le problème approché dans V_h

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les valeurs } u_j \text{ pour } j \in \mathbf{I} \text{ telles que :} \\ \sum_{j \in \mathbf{I}} (\int_{\Omega} \nabla w_j \nabla w_i + c w_j w_i) u_j = \int_{\Omega} f w_i dx dy + \int_{\Gamma_N} g w_i d\Gamma \\ - \sum_{j \in \mathbf{J}} (\int_{\Omega} \nabla w_j \nabla w_i + c w_j w_i) u_D(x_i, y_j) \quad \forall i \in \mathbf{I} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

On obtient un système de $N_{\mathbf{I}}$ équations à $N_{\mathbf{I}}$ inconnues où $N_{\mathbf{I}}$ désigne le nombre de points du maillage d'indices $i \in \mathbf{I}$ donc le nombre de nœuds correspondant à des valeurs inconnues de la solution. Ce système s'écrit sous la forme matricielle

$$AU = F \quad (1.12)$$

avec A la matrice définie par :

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla w_j \nabla w_i + c w_i w_j) dx dy \quad (1.13)$$

et F le vecteur second-membre de composantes :

$$F_i = \int_{\Omega} f w_i dx dy + \int_{\Gamma_N} g w_i d\Gamma - \sum_{j \in \mathbf{J}} (\int_{\Omega} \nabla w_j \nabla w_i + c w_j w_i) u_D(x_j, y_j) \quad (1.14)$$

En raison du choix de fonctions w_i à support limité, on obtient une matrice creuse c'est-à-dire un grand nombre de ses coefficients sont nuls .

Le système (1.9) s'écrit sous forme matricielle élémentaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{6}c & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{h^2}{6}c & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{h^2}{6}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_I \\ u_J \\ u_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_I \\ f_J \\ f_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_I \\ g_J \\ g_K \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} 1 + \frac{h^2}{6}c & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{h^2}{6}c & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{h^2}{6}c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{dI} \\ u_{dJ} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Contrôle d'erreur et convergence de la méthode des éléments finis

Le but de ce chapitre est de fournir une estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_1$ en norme $\|\cdot\|_1$ qui désigne la norme H^1 . Nous supposons les fonctions suffisamment régulières.

Le domaine Ω étant polygonal, il peut être recouvert exactement par le maillage τ_h considéré.

2.1 Majoration d'erreur-Théorème principal

Avant d'estimer l'erreur d'approximation on donne les définitions suivantes :

Définition 2.1.1. Une famille de triangulations est dite régulière s'il existe $\sigma > 0$ telle que

$$\forall h > 0, \forall T \in (\tau_h)_{h>0}, \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad (2.1)$$

ρ_T désigne le diamètre du plus grand cercle inscrit dans T .

h_T plus grande distance entre deux points de T

- Cette condition permet d'éviter des éléments trop aplatis.
- Pour la convergence de la méthode des éléments finis, il est nécessaire que la condition soit satisfaite.

Définition 2.1.2. On appelle opérateur de P -interpolation sur Σ l'opérateur π_T , qui à toute fonction v définie sur T , associe la fonction $\pi_T v$ de P définie par

$$\pi_T v = \sum_{i=1}^N v(q_i) w_i,$$

Définition 2.1.3. Deux éléments finis (T, P_T, Σ_T) et $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ sont affine-équivalents ssi il existe $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ affine $F_T(\hat{x}) = \hat{B}_T \hat{x} + b_T$ tel que :

- $T = F_T(\hat{T})$;
- $\{P_T = \hat{p} \circ F_T^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}$ ($p(x) = \hat{p}(\hat{x})$, si $x = F_T(\hat{x})$);
- $\Sigma_T = \{F_T(\hat{q}_i), \hat{q}_i \in \hat{\Sigma}, i = 1, \dots, N\}$

Théorème 2.1.1. (Résultat principal)

Soit $(\tau_h)_{h>0}$ une suite de maillages réguliers de Ω . Soit $u \in H^1(\Omega)$, la solution exacte, et $u_h \in V_h$, la solution approchée par éléments finis P_1 . Alors la méthode des éléments finis P_1 converge c'est-à-dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0 \quad (2.2)$$

Si de plus $u \in H^2$, il existe $C > 0$ telle que

$$\forall h > 0, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)} \quad (2.3)$$

2.2 Démonstration du Théorème principal

Les différentes étapes du calcul sont les suivantes :

- i- L'erreur d'approximation sera bornée par l'erreur d'interpolation

$$\|u - u_h\|_1 \leq C \|u - \pi_h u\|_1$$

- ii- On se ramènera à des majorations locales sur chaque élément

$$\|u - \pi_h u\|_1^2 \leq \sum_{T \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{1,T}^2$$

- iii- On se ramènera à l'élément de référence

$$\|u - \pi_h u\|_1 \leq C(T) \|\hat{u} - \hat{\pi}_h \hat{u}\|_{1,\hat{T}}$$

- iv- Majoration sur l'élément de référence

$$\|\hat{u} - \hat{\pi}_h \hat{u}\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C} |\hat{u}|_{2,\hat{T}}$$

- v- Assemblage des majorations locales

$$\|u - \pi_h u\|_1 \leq C' h |\hat{u}|_2$$

Pour évaluer l'erreur $\|u - u_h\|$, on choisira un élément u_h qui sera l'interpolé de u et on montrera que cette erreur est d'ordre h . On rappelle d'abord le lemme de Céa suivant :

Lemme 2.2.1. *de C ea*

On a l'estimation suivante :

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où M est la constante de continuité de a et α la constante d'ellipticité.

2.2.1 Etape 1 : Majoration par l'erreur d'interpolation

Le lemme de C ea indique que :

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.4)$$

On peut l'appliquer en particulier à $v_h = \pi_h u$, ce qui donne

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_h u\|_1 \quad (2.5)$$

2.2.2 Etape 2 : Décomposition sur les éléments

On a :

$$\|u - \pi_h u\|_1^2 = \sum_{T \in \tau_h} \|u - \pi_h u\|_{1,T}^2 = \sum_{T \in \tau_h} \sum_{l=0}^1 \|u - \pi_h u\|_{l,T}^2$$

Le calcul est alors ramen e à un calcul sur chaque élément, pour toutes les semi-normes $|\cdot|_{l,T}$, $l = 0, 1$.

2.2.3 Etape 3 : Passage à l'élément de référence

Le passage à l'élément de référence est justifi e par le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit T un élément quelconque de τ_h , et \hat{T} l'élément de référence. Soit F la transformation affine de \hat{T} vers T : $F(\hat{x}) = B(\hat{x}) + b$ avec B inversible.*

On a :

$$\forall v \in H^l(T), \quad |\hat{v}|_{l,\hat{T}} \leq C \|B\|_2^l |\det(B)|^{-\frac{1}{2}} |v|_{l,T} \quad (2.6)$$

Pour toutes les semi-normes $|\cdot|_{l,\hat{T}}$, $l = 0, 1$.

Preuve. *Soit v une fonction l fois différentiable au point x . On note $D^l v(x)$ sa dérivée directionnelle au point x . Il s'agit donc d'une forme linéaire symétrique sur \mathbb{R}^2 . On notera $D^l v(x) \cdot (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$*

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. On a alors :

$$|v|_{l,T}^2 = \int_{x \in T} \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^{|\alpha|} v(x)\|^2 dx \quad (2.7)$$

En posant :

$$\|D^l v(x)\| = \sup_{(\xi_1, \xi_2) \in (\mathbb{R}^*)^2} \frac{D^l v(x) \cdot (\xi_1, \xi_2)}{|\xi_1| |\xi_2|}, \quad (2.8)$$

on déduit qu'il existe des constantes γ_1 et γ_2 telles que

$$\gamma_1 |v|_{l,T} \leq \left(\int_{x \in T} \|D^l v(x)\|^2 dx \right)^{1/2} \leq \gamma_2 |v|_{l,T} \quad (2.9)$$

Par ailleurs, si l'on utilise le changement de variables $x = B\hat{x} + b$ dans $D^l v(x)$, il vient

$$\|D^l \hat{v}(\hat{x})\| \leq \|B\| \|D^l v(x)\| \quad (2.10)$$

or, $D^l v(x) = D^l v(F(\hat{x}))$. Donc

$$\int_{\hat{x} \in \hat{T}} \|D^l \hat{v}(\hat{x})\|^2 d\hat{x} \leq \|B\|^{2l} \int_{\hat{x} \in \hat{T}} \|D^l v(F\hat{x})\|^2 d\hat{x} = \|B\|^{2l} |\det B|^{-1} \int_{x \in T} \|D^l v(x)\|^2 dx \quad (2.11)$$

En minorant et en majorant dans l'inégalité précédente, il vient alors

$$\gamma_1^2 |\hat{v}|_{l,\hat{T}}^2 \leq \|B\|^{2l} |\det B|^{-1} \gamma_2^2 |v|_{l,T}^2 \quad (2.12)$$

D'où le résultat.

Corollaire 2.2.1. On a de même

$$\forall v \in H^l(T), \quad |v|_{l,T} \leq C \|B^{-1}\|_2^l |\det B|^{1/2} |\hat{v}|_{l,\hat{T}} \quad (2.13)$$

Pour toutes les semi-normes $|\cdot|_{l,T}$, $l = 0, 1$.

Estimation de $\|B\|$

Soit h_T le diamètre de T , c'est-à-dire le maximum des distances euclidiennes entre deux points de T . On a :

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=\hat{\rho}} \frac{\|Bx\|}{\hat{\rho}} \quad (2.14)$$

Soit x un vecteur de \mathbb{R}^2 tel que $\|x\| = \hat{\rho}$. Par définition de $\hat{\rho}$, il existe deux points \hat{y} et \hat{z} de \hat{T} tels que $x = \hat{y} - \hat{z}$. Alors $Bx = B\hat{y} - B\hat{z} = F(\hat{y}) - F(\hat{z}) = y - z$ avec y et z appartenant à T . Par définition de h_T , $\|y - z\| \leq h_T$. Donc $\|Bx\| \leq h_T$. En reportant dans la définition de $\|B\|$, on obtient donc

$$\|B\| \leq \frac{h_T}{\hat{\rho}} \quad (2.15)$$

Et on a évidemment de même :

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho_T} \quad (2.16)$$

2.2.4 Etape 4 : Majoration sur l'élément de référence

Le résultat principal est le suivant :

Théorème : Soient l un entier tels que $0 \leq l \leq 2$. Si $\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^2(\hat{T}), H^l(\hat{T}))$ laisse $P_1(\hat{T})$ invariant (c'est à dire vérifie $\forall \hat{p} \in P_1(\hat{T}), \hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}$), alors

$$\exists C(\hat{T}, \hat{\pi}), \forall \hat{v} \in H^2(\hat{T}), |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq C|\hat{v}|_{2, T} \quad (2.17)$$

Démonstration :

$\hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^2(\hat{T}), H^l(\hat{T}))$, et donc $I - \hat{\pi} \in \mathcal{L}(H^2(\hat{T}), H^l(\hat{T}))$ car $l \leq 2$. Et donc $|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^2(\hat{T}), H^l(\hat{T}))} \|\hat{v}\|_{2, \hat{T}}$.

On utilise maintenant l'invariance de $P_1(\hat{T})$:

$$\forall \hat{p} \in P_1(\hat{T}), \hat{v} - \hat{\pi}\hat{v} = (I - \hat{\pi})(\hat{v}) = (I - \hat{\pi})(\hat{v} + \hat{p}) \quad (2.18)$$

Donc

$$|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{l, \hat{T}} \leq \|I - \hat{\pi}\|_{\mathcal{L}(H^2(\hat{T}), H^l(\hat{T}))} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{2, \hat{T}} \quad (2.19)$$

On aura donc démontré le théorème si l'on montre que

$$\exists C, \forall \hat{v} \in H^2(\hat{T}) \quad \inf_{\hat{p} \in P_1(\hat{T})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{2, \hat{T}} \leq C|\hat{v}|_{2, \hat{T}} \quad (2.20)$$

Soit $(f_i)_{i=0,1}$ une base du dual de $P_1(\hat{T})$. D'après le théorème d'Hahn-Banach, il existe des formes linéaires continues sur $H^2(\hat{T})$, que l'on notera encore f_i , et qui prolongent les f_i . En particulier, si $\hat{p} \in P_1(\hat{T})$ vérifie $f_i(\hat{p}) = 0$, ($i = 0, 1$), alors $\hat{p} = 0$. Nous allons montrer que

$$\exists C, \forall \hat{v} \in H^2(\hat{T}), \|\hat{v}\|_{2, \hat{T}} \leq C\{|\hat{v}|_{2, \hat{T}} + \sum_{i=0}^1 |f_i(\hat{v})|\} \quad (2.21)$$

On aura le résultat souhaité en appliquant (2.21) à $\hat{v} + \hat{q}$, avec \hat{q} tel que $f_i(\hat{q}) = f_i(-\hat{v})$. La relation (2.21) se démontre par l'absurde . Si elle n'est pas vraie, alors il existe une suite de fonctions \hat{v}_2 de $H^2(\hat{T})$ telles que

$$\|\hat{v}_2\|_{2,\hat{T}} = 1, |\hat{v}_2|_{2,\hat{T}} \rightarrow 0, \text{ et } \forall i \quad f_i(\hat{v}_2) \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

Par complétude de $H^2(\hat{T})$, on extrait une sous-suite convergente vers $\hat{v} \in H^2(\hat{T})$. Mais $|\hat{v}_2|_{2,\hat{T}} \rightarrow 0$. Donc $\hat{v} \in P_1(\hat{T})$ et $f_i(\hat{v}) = 0$. D'où une contradiction.

2.2.5 Etape 5 : Assemblage des majorations locales

Majoration sur un élément quelconque En rassemblant les résultats précédents, on peut établir une majoration sur un élément quelconque T du maillage . On a :

$$|v - \pi_T v|_{l,T} \leq C \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} |\hat{v} - \hat{\pi} \hat{v}|_{l,\hat{T}} \text{ d'après (2.13)}$$

$$\leq C \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} C(\hat{T}, \hat{\pi}) |\hat{v}|_{2,\hat{T}} \text{ d'après (2.17)}$$

$$\leq C \|B^{-1}\|^l |\det B|^{1/2} C(\hat{T}, \hat{\pi}) |\hat{v}|_{2,\hat{T}} C \|B\|^2 |\det B|^{-1/2} |v|_{2,T} \text{ d'après (2.4)}$$

$$\leq C \frac{h^l}{\rho^l} C(\hat{T}, \hat{\pi}) C \frac{h_1^2}{\rho^2} |v|_{2,T} \text{ d'après (2.15) et (2.16)}$$

D'où finalement :

$$|v - \pi_1 v|_{l,T} \leq \hat{C}(\hat{\pi}, \hat{T}) \frac{h_1^2}{\rho^2} |v|_{2,T} \quad (2.23)$$

Il est important de remarquer à ce niveau que \hat{C} est indépendant de T .

Assemblage des résultats locaux

On va maintenant reprendre la majoration (2.23) pour tout les éléments du maillage et toutes les valeurs de $l = 0, 1$. On va définir deux quantités représentatives du maillage :

- h tel que $h_T \leq h, \forall T \in \tau_h$ (diamètre maximum des éléments)
- σ tel que $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \forall T \in \tau_h$ (caractérise l'aplatissement des éléments)

Alors :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_T V\|_{1,T}^2 &= \sum_{l=0}^1 |v - \pi_T V|_{l,T}^2 \\ &\leq \sum_{l=0}^1 \hat{C}^2(\hat{\pi}, \hat{T}) \left(\frac{h_1^2}{\rho^l}\right)^2 \text{ d'après (2.23)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^1 \hat{C}^2(\hat{\pi}, \hat{T}) \left\{ \left(\frac{h_1}{\rho_T} \right)^l h_T^{1-l} h_T^1 \right\}^2 |v^2|_{2,T} \\
&\leq \left\{ \sum_l^1 \hat{C}^2(\hat{\pi}, \hat{T}) \sigma^{2l} h^{2-2l} \right\} [h^1 |v|_{2,T}]^2
\end{aligned}$$

Le terme entre accolades ne tend ni vers 0 ni vers l'infini quand h tend vers 0. D'où :

$$\|v - \pi_T v\|_{1,T} \leq \hat{C}'(\hat{\pi}, \hat{T}, \sigma, h) h^1 |v|_{2,T} \quad (2.24)$$

En sommant ensuite sur tous les éléments du maillage :

$$\begin{aligned}
\|v - \pi_h v\|_1^2 &= \sum_{K \in \tau_h} \|v - \pi_T v\|_{1,T}^2 \\
&\leq \sum_{T \in \tau_h} [\hat{C}'(\hat{\pi}, \hat{T}, \sigma, h) h |v|_{2,T}]^2
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\|v - \pi_h v\|_1 \leq C(\tau_h) h |v|_2 \quad (2.25)$$

2.2.6 Résultat final

En reportant (2, 25) dans (2.5), on obtient le résultat final classique de majoration d'erreur :

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch |u|_2 \quad (2.26)$$

Conclusion

Dans ce travail, on a introduit la méthode d'approximation par éléments finis de Lagrange. Cette méthode est basée sur la construction de l'espace de dimension finie V_h et la réécriture du problème aux limites sous une forme variationnelle par intégration sur le domaine d'étude Ω . Pour obtenir le système linéaire à partir de l'équation intégrale, on introduit les fonctions d'interpolation et les fonctions de base exprimées ici par les fonction de base $P1$ de Lagrange en dimension 2 associées à un maillage admissible.

L'objet de ce travail est de donner une idée simple sur l'application de la méthode des éléments finis en dimension 2 d'une part.

D'autre part, une étude détaillée sur une majoration possible d'erreur d'interpolation par les éléments finis de Lagrange est présentée en dimension 2.

Résumé : Dans ce travail, on a introduit la méthode d'approximation par éléments finis de Lagrange.

Cette méthode est basée sur la construction de l'espace de dimension finie V_h et la réécriture du problème aux limites sous une forme variationnelle par intégration sur le domaine d'étude Ω .

Pour obtenir le système linéaire à partir de l'équation intégrale, on introduit les fonctions d'interpolation et les fonctions de base exprimées ici par les fonction de base $P1$ de Lagrange en dimension 2 associées à un maillage admissible.

L'objet de ce travail est de donner une idée simple sur l'application de la méthode des éléments finis en dimension 2 d'une part.

D'autre part, une étude détaillée sur une majoration possible d'erreur d'interpolation par les éléments finis de Lagrange est présentée en dimension 2.

Mots clés : Problème mixte Dirichlet-Neumann, Approximation par la méthode des éléments finis, Contrôle d'erreur, la convergence de la méthode des éléments finis.

Bibliographie

- [1] K.Segeth, *A review of some a posteriori error estimates for adaptive finite element methods*, Technical University of Liberec, Czech Republic, 27 December 2008.
- [2] M.Ainsworth, .J. Tinsley Oden, *A posteriori error estimation in finite element analysis*, Computer. Methods Appl. Mech. Engrg. 142(1997) 1-88.
- [3] P.Diez, .J.José Egozcue, .A.Huerta, *A posteriori error estimation for standard finite element analysis*, Universitat Politècnica de Catalunya, Compus Nord C-2, Vol 163, Issues 1,4, pp. 141-157,1998.
- [4] J.Liang Liu, *Exact a posteriori error analysis of the least squares finite element method*, Departement of applied mathematics, National Chiao Tung University, 2000.
- [5] H.Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et Application*, Dunod, Paris,1999.
- [6] M.Choi, *Méthode des éléments-finis par l'exemple*, Université de Caen, France, Avril 2010.
- [7] D.Christion, *Méthode des éléments finis*, Université de Cergy Pontoise, France, 2005/2006.
- [8] J-P.Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, EDP Sciences, 2006.
- [9] G.Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Edition de l'école polytechnique, Paris, 7 juillet 2012.
- [10] J-H Saiac, *méthode des élément finis*, 24 Mars 2005.
- [11] K.Saleh, *Introduction à la méthode des élément finis*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, le 22 décembre 2011.

- [12] M.Kern, *Éléments finis aspects mathématiques*, ENSMP,S3735,22-26 novembre.
- [13] M.Kern, *Introduction à la méthode des éléments finis*, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004-2005.
- [14] R.Herbin, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Université Aix Marseille 1, 17 avril 2010.
- [15] S.Nicaise, *Analyse numériques et équations aux dérivées partielles*, Dunod,Paris, 2000.
- [16] V.Manet, *Méthode des éléments finis*, France,4-14 Nov 2013.
- [17] G.Allaire et F.Alougs, *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, École polytechnique, 16 janvier 2015.
- [18] J.L.Lions et E.Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol.1.
- [19] D.Robert et L.Jacques-Louis, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Volume 4 Integral Equations and Numerical Methods, 2000.
- [20] Bamberger, *Equations Aux Derivees Partielles Et Applications*, Articles Dedies A Jacques Louis Lions.
- [21] R.Glowinski et S.Korotov, *Conjugate Gradient Algorithms and Finite Element Methods*,Scientific Computation.
- [22] S.Fliss, *Analyse mathématique et numérique de problèmes de propagation des ondes dans des milieux périodique infinis localement perturbés*, 13 Avr 2010.
- [23] F.Alouges, *Éléments finis en dimension $N \geq 2$* , 1er Avril 2014.
- [24] E.Goncalvés, *Méthodes, Analyse Et Calculs Numériques*, Septembre 2005.
- [25] A.ERN et G.Stoltz, *Calcul Scientifique*, Décembre 2014.