

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MDULDUD MAMMARI DE TIZI-OUZDU
FACULTÉ DE GENIE DE LA CONSTRUCTION
DÉPARTEMENT DE GENIE MÉCANIQUE



Mémoire

De fin d'études

En Vue de l'obtention du Diplôme De Master Académique En Génie

Mécanique

Option : Energétique

Thème:

*Modélisation et Simulation numérique du mouvement
d'une particule solide dans un écoulement de fluide*

Présenté par:

- OUAKED ACHOUR

- KASSA FATEH

Proposé et dirigé par :

- Mr. S.ZOUAOUI

- Mr. H.DJEBBOURI

Promotion 2012/2013



UNIVERSITE MOULOU MAMMERI DE TIZI OUZOU

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Diplôme

Master Académique en génie mécanique
Spécialité Energétique.

Titre

Modélisation et Simulation numérique du mouvement d'une particule solide dans un écoulement de fluide.

Proposé et Dirigé

Mr : Salah Zouaoui
Mr : Hassane Djebouri

Année 2013

Réalisé

Ouaked Achour
Kassa Fateh

Nombre de pages texte **45 pages**

Annexes **2 pages**

Nombre de références bibliographiques : **11 références**

Résumé

Le contexte général de ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la modélisation des écoulements diphasiques (solide/liquide). Les travaux réalisés portent sur la compréhension et la modélisation statistique des mécanismes de transport de particules solides dans un écoulement. Des simulations numériques directes captées aux calculs de trajectoires. Nous avons proposé une méthode des éléments discret pour l'étude de contact entre deux particules solides pour permettre de déterminer le mouvement de la particule solide, En particulier, cette modélisation est appliquée pour notre configuration afin de prédire les trajectoires des particules, représente les résultats obtenus sont confrontés aux résultats des simulations numériques.

Mots-clés

Transport solide
Fluidisation
Méthode des éléments discrets



Remerciements

- Nous remercions **Mr. ZOUAOUI Salah** de nous avoir communiqué la rigueur nécessaire pour mener à bien un tel travail, de même qu'une partie de sa grande culture scientifique, son soutien et sa compréhension dans les moments difficiles.
- Nous adressons nos remerciements à **Mr. DJEBBOURI Hassane**, qui a accepté voici un peu plus de six mois d'être notre directeur de ce mémoire, au cours de nos rencontres, on a pu apprécier, outre sa gentillesse et sa disponibilité, ses qualités pédagogiques, sa passion pour la mécanique et ses remarques constructives sur notre travail. Il a aussi fortement contribué aux aspects numériques de ce travail.
- Nous remercions **Mr. MENGELTI Ali** pour le temps qu'il a consacré pour ce travail, grâce à sa curiosité, on a découvert un univers des mathématiques varié et passionnant, on a pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui et on espère avoir la chance de voir cette collaboration continuer.
- Nos remerciements vont également à **Mr. TIACHACHT Samir** et **Mr. DAHMANI Merzak** pour le temps qu'ils ont consacré de nous expliquer les problèmes de la simulation numérique, ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail, nous remercions aussi **Mr. HAMZAOUI** pour la documentation et l'explication du cours de volume fini.
- Nos remerciements se terminent pas ici, on ne doit pas oublier **Mr. HAMDDAD** pour leur gentillesse et leur disponibilité.
- Ces cinq années d'études et d'échanges nous ont aussi permis d'enrichir notre culture dans de nombreux domaines et nous pouvons remercier **Mr: Abdedou, Nebbali, Bouazzouni, Rabia**, ainsi que tous les enseignants du département Mécanique.
- Nos remerciements vont également aux **membres de jury** de ce mémoire, sous la présidence de **Mr. BOUSSAFEUR**, les examinateurs: **Mr. HAMZAOUI** et **Mr. SALHI** par leurs remarques nous ont confortés et guidés dans notre projet d'intégrer le monde de la recherche.

Dédicaces

- A la mémoire de mes très chers parents « Mohamed » et « Ouiza » que Dieu pout puissant leur accorde paix et pitié à leur âmes, qui nous ont quitté jeunes et qui auront aimé vivre ce moment, je leur dédie ce modeste travail fruit de leur sacrifices et leur prières.
- A mes sœurs Lynda et Melissa.
- A mon frère Amine.
- A mon cousin Khaled.
- A ma tante Ouiza.
- A mes grands-mères Baya et Dahbia.
- A mes amis de Jijel « Reyad » et « Yacine » je tiens à les remercier pour l'invitation qui m'ont offert de passer une semaine de vacances à Jijel .
- Il serait difficile de citer ici toutes les personnes qui ont contribué à faire de ces six mois de ce mémoire, une période agréable et enrichissante. A bon entendeur... j'adresse tout de même une pensée particulière à : Nadia LAMRAOUI, Kahina, Zineb et Hakima.
- J'espère n'avoir oublié personne. Ces années d'études universitaire ont été très bénéfiques pour moi, je quitte la vie d'étudiante avec un peu de nostalgie.

Il faut se tourner vers l'avenir mais jamais je n'oublierai cette partie de ma vie qui a été un mélange de peines et d'intenses joies, encore un grand merci à tous.

OUAKED Achour



Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A ceux qui m'ont tout donné sans rien attendre en retour mis à part ma réussite, à ceux qui m'ont appris à aller au bout de Mes ambitions, à ceux qui ont toujours cru en moi : à mes très

Chers parents.

A ma sœur Samira, son mari Samir et leurs fils Younes

A mes frères Mourad, Mouloud et Smail

Que dieu les protège tous

A mon binôme Achour et à ses parents que dieu le tout puissant l'accueille dans son vaste paradis.»Nchallah. À ses sœurs Lynda et Melissa, à son frère Amine sans oublié son cousin Khaled.

Que dieu les protège.

A tous mes amis(es) : L.Mouloud, M.Hamza de la promotion Génie Mécanique, S.Samir, H.Nacer, Z.Hakim, B.Omar, B.Karim,

A.Sofiane et O.Hakim de la résidence Oued aissi.

A toute la promotion de génie mécanique énergétique 2012/2013.

*A tous les membres de l'Association des Activités de Jeunes *Issegman* de mon village.*

Kassa fateh

*****Sommaire*****

Introduction générale..... 01

***** **Premier chapitre** *****

Généralités sur le transport de solide dans un fluide

1. Introduction	02
2. Généralités et définitions	02
3. Les différents mondes de transport solide	03
3.1. La fluidisation	03
3.2. La suspension	03
3.3. Le charriage	03
4. Mécanique du transport des solides	04
4.1. Caractérisation d'un écoulement	04
5. Mouvement d'une particule solide dans un fluide.....	05
5.1. Les forces exercées sur une particule solide	05
5.1.1. Le poids de la particule et la poussée d'Archimède	06
5.1.2. Une force due à la masse ajoutée à la particule	06
5.1.3. La force de Basset	07
5.1.4. La force de Trainée	07
5.1.5. La force de Portance	08
5.1.6. La force de Magnus	09
5.1.7. La force d'accélération du fluide	09
5.2. Equation de mouvement d'une l'articule.....	09
6. conclusion	09

***** Deuxième Chapitre *****

Modélisation Mathématique

1.	Introduction	10
2.	Modélisation de la trajectoire d'une particule solide dans un fluide	11
2.1.	Modélisation de la trajectoire d'une particule solide pour le Cos d'une conduite Horizontale	12
2.2.	Modélisation de la trajectoire d'une particule solide pour le Cos d'une conduite inclinée	17
3.	Conclusion	20

***** Troisième Chapitre *****

Modélisation numérique

1.	Introduction	21
2.	Description du programme de calcul	21
2.1.	Données de programme	21
2.2.	Les conditions initiales	21
3.	La trajectoire d'une particule solide en saltation	22
3.1.	Organigramme 1	22
3.2.	Résultats et discussion	23
4.	L'effet de la variation de la vitesse de fluides sur les hauteurs et longueurs Moyennes des sauts	25
4.1.	Organigramme 2	25
4.2.	Résultats et discussion.....	26
5.	L'effet de la variation de la pente sur les hauteurs et longueurs moyennes des sauts	27
5.1.	Organigrammes 3	27
5.2.	Résultats et discussion	28
6.	Conclusion.....	29

Simulation du mouvement d'une particule solide :

Couplage DEM-VOF

1. Introduction	30
2. La méthode des éléments discrets(DEM)	30
3. Principe de la méthode des éléments discrets	30
3.1. Résolution multi-contact.....	31
4. Les différents modèles de la DEM	33
4.1. Le modèle de Candall pour Corps indéformables	33
4.1.1. Rappel de variations	35
4.1.1. A. Définition d'un mouvement vibratoire	35
4.1.1. B. Equation de Lagrange pou un seul degré de liberté (1ddl)	35
B.1. cas des systèmes conservatifs.....	35
B.2. cas des systèmes dissipatif.....	35
B.3. cas des systèmes forcés	36
4.2. Le modèle d'Hertz (Corps déformables)	38
5. Méthodes des volumes finis (vof)	40
6. Les différentes étapes de l'approche numérique	41
7. Résultats et discussion	44
8. Conclusion.....	44

Conclusion générale	45
---------------------------	----

Liste des figures

Liste des Tableaux

Nomenclature

Résumé

Abstract

Liste Des Figures

Figure	Désignation	Page
Fig (1.1)	Les différents types de transport solide dans un fluide.	03
Fig (1.2)	Mouvement d'une particule solide dans un écoulement de fluide.	05
Fig (1.3)	Les forces exercent sur une particule solide en saltation.	05
Fig (2.1)	particules en saltation dans une conduite inclinée.	10
Fig (2.2)	particules en saltation dans une conduite horizontale.	10
Fig (3.1)	Organigramme donnant la trajectoire d'une particule solide en saltation.	22
Fig (3.2)	Trajectoire de la particule solide.	23
Fig (3.3)	Trajectoires expérimentales obtenus par Magali JODEAU.	24
Fig (3.4)	Organigramme donnant l'effet de la variation de la vitesse de fluide sur les hauteurs et longueurs moyennes des sauts.	25
Fig (3.5)	Longueurs moyennes des sauts en fonction de la vitesse de fluide (U_f).	26
Fig (3.6)	Hauteurs moyennes des sauts en fonction de la vitesse de fluide U_f .	26
Fig (3.7)	Organigramme donnant l'effet de la variation de la pente sur les hauteurs et longueurs moyennes de sauts.	27
Fig (3.8)	Les hauteurs moyennes des sauts en fonction de la pente.	28
Fig (3.9)	Les longueurs moyennes des sauts en fonction de la pente.	28
Fig (4.1)	Contact binaire entre deux particules.	32
Fig (4.2)	Modélisation du contact entre deux grains.	34
Fig (4.3)	Contact entre deux particules assimilées un modèle de vibration [9].	34
Fig (4.4)	Contact d'Hertz entre une particule solide et un plan.	38
Fig (5.1)	Volume de contrôle pour une situation 2D.	41
Fig (5.2)	La géométrie et les conditions aux limites sur Gambit.	42
Fig (5.3)	Maillage de la géométrie réalisé dans Gambit.	42
Fig (5.4)	L'évolution des courbes des résidus.	43
Fig (5.5)	Sauts d'une particule solide.	44
Fig (5.6)	Trajectoire d'une particule solide.	44

Liste des tableaux

Tableau (1.1) : Quelques nombres adimensionnels permettant de caractériser l'écoulement diphasique (liquide/solide).

Tableau (1.2) : Les corrélations du coefficient de traînée en fonction de nombre de Reynolds.

Tableau (3.1) : longueurs et hauteurs des sauts.

Indices

η : La constante d'intégration 1 pour l'équation (2.9) suivant (x) pour une conduite horizontale.

γ : La constante d'intégration 2 pour l'équation (2.9.c) suivant (x) pour une conduite horizontale.

μ : La constante d'intégration 1 pour l'équation (2.10) suivant (y) pour une conduite horizontale.

β : La constante d'intégration 1 pour l'équation (2.10.a) suivant (y) pour une conduite inclinée.

ψ : La constante d'intégration 1 pour l'équation (2.15.a) suivant (x) pour une conduite inclinée.

δ : La constante d'intégration 2 pour l'équation (2.15.c) suivant (x) pour une conduite inclinée.

Nomenclature

- \vec{U}_p : Vitesse de la particule [m. S⁻¹]
- \vec{U}_f : Vitesse de fluide [m. S⁻¹]
- \vec{U}_{PN} : Vitesse de la particule suivant la normale [m. S⁻¹]
- \vec{U}_{PT} : Vitesse de la particule suivant la tangentielle [m. S⁻¹]
- **D** : Diamètre de la conduite [m]
- **d_p** : Diamètre de la particule [m]
- **V** : Viscosité cinématique du fluide [m². S⁻¹]
- **μ** : Viscosité dynamique du fluide [kg. m⁻¹. S⁻¹]
- **ρ_f** : Masse volumique du fluide [kg. m⁻³]
- **ρ_p** : Masse volumique de la particule [kg. m⁻³]
- **m_f** : La masse de fluide [kg]
- **m_p** : La masse de la particule [kg]
- \vec{g} : La force de gravitation [m. S⁻²]
- \vec{Fg} : La force de la particule et la poussée d'Archimède [N]
- \vec{Fm} : La force de la masse ajoutée à la particule [N]
- $\vec{FBasset}$: La force de Basset [N]
- $\vec{F_T}$: La force de traînée [N]
- $\vec{F_P}$: La force de portance [N]
- \vec{F}_{magnus} : La force de Magnus [N]
- **R** : Rayon de la particule [m]
- **α** : Rayon de la surface du contact (particule/plan) [m]
- **Hm** : La hauteur moyenne des sauts [m]
- **Lm** : La longueur moyenne des sauts [m]
- **C_T** : Coefficient de traînée.
- **C_P** : Coefficient de portance.

- C_m : Coefficient de masse ajoutée.
- C : Coefficient de frottement.
- \vec{F}_{af} : La force d'accélération du fluide [N]
- \vec{R}_T : La force de contact entre deux particules [N]
- \vec{f} : La force de frottement [N]
- \vec{F}_q : La force extérieure [N]
- \vec{F} : La force existée à partir de l'énergie élastique [N]
- δ : Le chevauchement entre deux particules solides [m]
- ε : La déformation existée entre la particule et le plan [/]
- E_{el} : Energie élastique [J]
- $E_{el_{tot}}$: Energie élastique totale [J]
- E : Le module de Young du matériau [pa]
- T : L'énergie cinétique [J]
- U : L'énergie potentielle [J]
- L : La fonction de Lagrange [J]
- $\vec{\Omega}$: La vitesse angulaire de la particule [rad.s^{-1}]
- T_0 : La température initiale du fluide dans la conduite [k]

Les nombres adimensionnelles

- Re : Nombre de Reynolds de fluide.
- Rep : Nombre de Reynolds des particules.
- Sh : Nombre de shields.
- St : Nombre de stokes.



**Introduction
Générale**

Introduction générale :

Les écoulements fluides- particules solides se présentent dans divers domaines. La connaissance du comportement des particules solides permet le traitement et l'amélioration de plusieurs procédés industriels dans le domaine du génie des procédés (le séchage, l'agitation, le mélange et la séparation...), le domaine aéronautique, etc. Ce type d'écoulement intervient également dans certains phénomènes naturels tels que le charriage torrentiel, le transport de cendres à la suite d'une éruption volcanique et le phénomène de sédimentation, etc.

La modélisation des phénomènes, qui interviennent dans ce type de transport, doit être devancée par des acquis théoriques. Ces acquis concernent essentiellement le mouvement des particules entraînées par un mouvement relatif du fluide et les forces auxquelles la particule solide est soumise. L'analyse de ces phénomènes nécessite la maîtrise de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent), l'évolution des interactions éventuelles entre les particules et surtout de l'effet qu'elles engendrent sur la variation des propriétés physiques de l'écoulement (force de traînée, vitesse relative, ...) et également l'influence des propriétés de transport du milieu environnant sur la prédiction des trajectoires des particules.

L'objet de ce mémoire est de modéliser les trajectoires des particules solides et déterminer leurs caractéristiques (longueur et hauteur moyennes) et voir l'influence de certains paramètres (vitesse de fluide, inclinaison de la conduite) sur ces dernières. Les résultats sont confrontés aux résultats expérimentaux de Magali.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré aux généralités sur le transport solide. Le mouvement de la particule solide, dans un écoulement de fluide. Est introduit l'équation qui régit ce mouvement est décrite à partir de la loi fondamentale de la dynamique.

Le second chapitre est consacré à la modélisation mathématique d'un écoulement fluide-particule dans une conduite horizontale et une autre inclinée. Les équations ont été résolues avec un certain nombre d'hypothèses simplificatrices.

Dans le troisième chapitre, nous avons élaboré un programme informatique, écrit sous le langage MATLAB, qui permet de suivre le mouvement d'une particule solide dans un écoulement de fluide. Nous avons également étudié l'effet de la variation de certaines données sur les paramètres du saut.

Le dernier chapitre est consacré à la modélisation de la trajectoire d'une particule dans un écoulement de fluide en utilisant le code FLUENT. Deux méthodes numériques ont été présentées dans ce chapitre, la méthode des volumes finis pour le fluide et la méthode des éléments discrets pour le solide.



CHAPITRE 1 :
Généralités Sur Le
Transport Solide Dans
Un Fluide

1. Introduction :

La fluidisation est souvent la technique la plus adaptée aux transformations physiques ou chimiques impliquant la mise en contact d'une phase solide et une phase liquide. Cette technique présente de ses nombreux avantages par rapport aux autres techniques. Pour un lit de particules, dans un état fluidisé, les interactions fluide-particules compensent le poids des particules, de telle sorte que chaque particule est complètement supportée par le fluide.

Les applications industrielles de ces systèmes étant beaucoup plus importantes. Ceci en dépit du fait que les utilisations possibles de la fluidisation liquide, dans l'industrie, ont été proposées dès le 16^{ème} siècle comme un moyen de séparer les solides de tailles différentes.

Toutefois, de nouveaux procédés impliquant la fluidisation liquide, ont été étudiés, notamment, dans le domaine de l'hydrométallurgie, la technologie alimentaire, les processus biochimiques, le traitement des eaux, etc. Ces nouveaux procédés devraient attirer plus d'attention, par conséquent, d'importants fonds de recherche dans ce domaine.

Dans la modélisation du transport des solides dans les fluides, sont utilisées certaines équations qui font intervenir des termes directement issus de l'étude du mouvement d'une particule.

Avant d'aborder les différentes forces appliquées à une particule en mouvement, il est d'abord utile de donner quelques généralités et quelques définitions rencontrées dans ce domaine et présenter par la suite les différents modes de transport solide.

2. Généralités et définitions :

Le transport solide, en général, est le transport de matériaux solides par un écoulement de fluides. Ce domaine est encore au stade de développement [1].

La difficulté majeure dans la modélisation de ce mode de transport est due à la diversité des phénomènes mis en jeu, à savoir :

- Ecoulements turbulents avec géométrie souvent complexe.
- Granulométrie non uniforme de la phase solide.
- L'interaction solide-liquide ainsi que l'interaction entre particules solides.

3. Les différents modes de transport solide :

Sous l'effet d'un flux liquide, les particules solides sont susceptibles d'être mises en mouvement dans les cours d'eau dans une conduite. Trois modes de transport de particules solides peuvent se manifester : la suspension, le charriage et la fluidisation [1]. Une fois qu'une particule solide est arrachée dans le fluide, il peut y avoir roulement ou glissement sur le fond (**charriage**). Dans le cas où la particule solide est légère alors l'écoulement n'est plus turbulent, elle peut quitter le fond (**suspension**) et se déplacer au cœur de l'écoulement.

3.1. La fluidisation :

Un lit fluidisé est constitué d'un ensemble de particules solides traversé de bas en haut par un fluide. Les particules sont mises en mouvement et subissent de nombreuses interactions par leur taille et la densité du fluide.

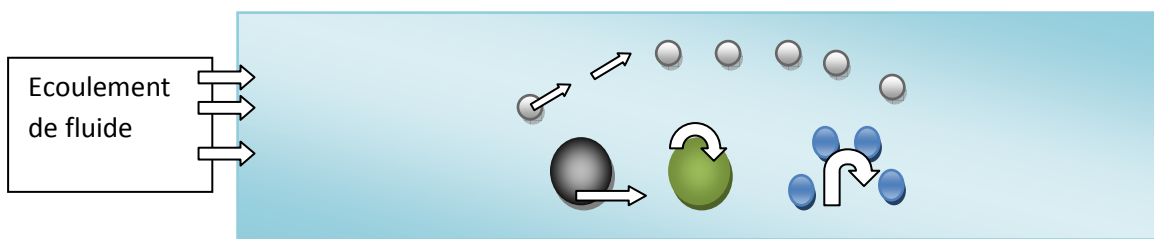
Lit fluidisé homogène : lorsque la vitesse d'écoulement du fluide augmente, le volume du lit fluidisé augmente de manière régulière. Les particules solides sont bien réparties sur l'ensemble du lit. Cette fluidisation est dite homogène.

3.2. La suspension :

Concerne les particules fines (légères) qui sont maintenues dans le corps de l'écoulement.

3.3. Le charriage :

Concerne les particules grossières de diamètre supérieur à 0.5 mm. L'effet des forces hydrodynamiques exercées par l'écoulement d'eau se traduit sur les particules par un mouvement de **roulement**, de **glissement** ou de **saltation** avec :







-  Charriage (roulement).
-  Charriage (glissement).
-  Charriage (saltation).
-  Suspension des particules des diamètres inférieurs à 0.5mm.

Figure (1.1) : Les différents types de transport solide dans un fluide.

4. Mécanique du transport des solides :

Nos allons présenter les propriétés d'un écoulement dans un canal et le mouvement d'une particule dans un écoulement liquide :

4.1. Caractérisation d'un écoulement :

D'après le principe de l'analyse dimensionnelle, on définit le nombre adimensionnel de Reynolds qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. nombre de Reynolds

$$R_e = U_f \cdot \frac{D}{\nu} \dots\dots\dots (1.1)$$

Où :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_f} : \text{est la viscosité cinématique du fluide.}$$

Ce nombre caractérise le régime d'écoulement [2] :

- Si : $Re < 500$: l'écoulement est dit laminaire.
- Si : $Re > 2000$: l'écoulement est dit turbulent.
- Si : $500 < Re < 2000$: correspond à un régime transitoire.

Nous présentons, dans le tableau suivant, quelques nombres adimensionnels couramment utilisés dans le domaine des écoulements fluide-particules solides :

Nombre de Reynolds du fluide	$R_e = U_f D / \nu$	$Re < 500$: écoulement laminaire $Re > 2000$: écoulement turbulent
Nombre de Reynolds des particules	$R_{ep} = U_f - U_p \cdot d_p / \nu$	/
Nombre de Schields	$Sh = T_0 / (\rho_p - \rho_f) \cdot g \cdot d_p$	Indicateur de début de mouvement
Nombre de stokes	$St = 8m_p U_p / \rho_f U_f - U_p \cdot \pi R^2$	Indicateur de couplage entre phase liquide et phase solide

Tableau (1.1) : Quelques nombres adimensionnels caractérisant l'écoulement diphasique (liquide/solide) [2].

5. Mouvement d'une particule solide dans un fluide :

Dans un courant d'eau, une particule est soumise à des forces de la part du liquide, à la gravité, à des forces de contact avec d'autres particules solides.

Les forces hydrodynamiques sont les résultantes des forces de pression et de contrainte agissant à la surface de la particule.

L'écriture des forces dépend des propriétés de l'écoulement diphasique liquide - solide et de la valeur du nombre de Reynolds des particules [2].

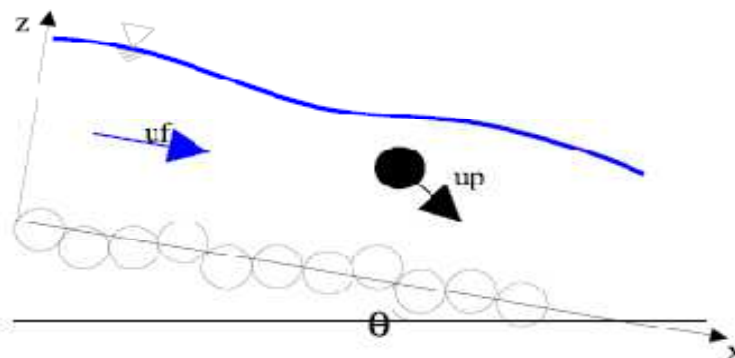


Figure (1.2) : Mouvement d'une particule solide dans un écoulement de fluide.

5.1. Les forces exercées sur une particule solide :

D'après Nino et Garcia [2], les forces, exercées sur une particule solide de forme sphérique, sont (voir figure 1.3) :

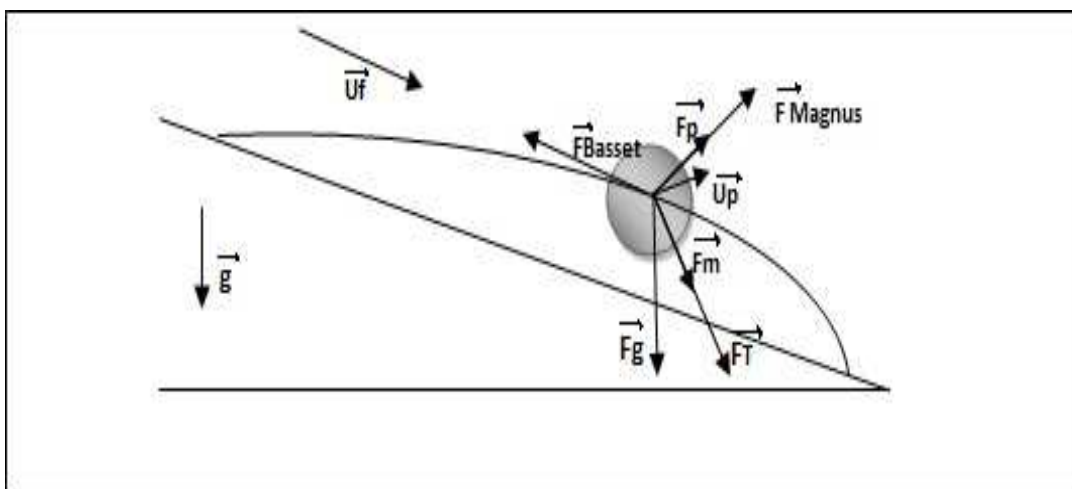


Figure (1.3) : les forces exercées sur une particule solide en saltation [3].

5.1.1. Le poids de la particule et la poussée d’Archimède

Le poids de la particule est donné par : $m_p \vec{g}$

La force due à la poussée d’Archimède est : $- m_f \vec{g}$

La force d’Archimède résulte de l’action du fluide sur la particule immergée. Cette force est proportionnelle au volume de la particule immergée et opposée à la gravité.

La résultante de la force d’Archimède et de la gravité est appelée **flottabilité**, elle s’écrit :

$$\vec{F}_g = (m_p - m_f) \vec{g} \dots\dots\dots(1.2)$$

avec : $\rho = \frac{m}{V}$ et $v = \frac{4}{3} \pi R^3$: le volume de la sphère.

alors :

$$\vec{F}_g = (\rho_p - \rho_f) \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} \dots\dots\dots(1.3)$$

Remarque : Pour des masses volumiques du fluide et des particules solides assez proches, la force d’Archimède est importante. Dans les systèmes fluidisés gaz /solide, cette force est négligeable car la masse volumique du solide est très supérieure à celle du gaz [4].

5.1.2. Une force due à la masse ajoutée à la particule

Cette force est créée lorsque l’une des phases subit une accélération. Celle-ci engendre alors l’accélération de l’autre phase. Si nous prenons l’exemple d’une particule qui se déplace, elle entraîne dans son mouvement le fluide qui l’entoure. L’inertie du fluide environnant s’ajoute alors à l’inertie de la particule elle-même [4].

Dans le cas du déplacement d’une particule à la vitesse \vec{U}_p , dans un écoulement d’un fluide de vitesse uniforme \vec{U}_f , la force de masse ajoutée s’écrit :

$$\vec{F}_m = m_f C_m \frac{d(\vec{U}_f - \vec{U}_p)}{dt} \dots\dots\dots(1.4)$$

D'où :

$$\vec{F}_m = \rho_f \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot C_m \frac{d(\vec{U}_f - \vec{U}_p)}{dt} \dots\dots\dots (1.5)$$

Avec

- C_m : coefficient de masse ajoutée. qui dépend uniquement de la forme de la particule. Pour une particule sphérique, ce coefficient vaut : $C_m=0.5$.
- \vec{U}_f : la vitesse du fluide (m/s).
- \vec{U}_p : la vitesse de la particule (m/s).

5.1.3. Une force dite de Basset :

Cette force est due à l'effet de la viscosité du fluide. Lorsque la particule subit une accélération, le fluide réagit avec un certain retard à cause de la viscosité qui diffuse la quantité de mouvement [4].

La force de Basset est reliée au temps écoulé depuis l'accélération de la particule. Cette force est donnée par la relation suivante :

$$\vec{F}_{Basset} = \frac{3}{2} (dp)^2 \rho_f \sqrt{\pi V} \int_{-\infty}^t \frac{d(\vec{U}_f - \vec{U}_p)}{dx} \frac{dT}{\sqrt{t-T}} \dots\dots\dots (1.6)$$

Cette force est dans la plus part des cas négligée à cause de la présence d'un grand nombre de particules dispersées dans l'écoulement de fluide.

5.1.4. Une force de traînée :

Cette force représente les frottements entre les deux phases fluide et solide [4]. Elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\vec{F}_T = -\frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 \cdot C_T \cdot |\vec{U}_p - \vec{U}_f| (\vec{U}_p - \vec{U}_f) \dots\dots\dots (1.7)$$

Avec :

- C_T : le coefficient de traînée, pour les particules à grand nombre de Reynolds des particules ($Rep > 1$), C_T est proche de 1.

Plusieurs études analytiques, expérimentales et numériques conduisent à des corrélations standards du coefficient de traînée. L'évolution du coefficient de traînée est directement liée au nombre de Reynolds [5]. Nous donnons, dans le tableau suivant, quelques corrélations importantes qui sont applicables dans les écoulements fluide-solide :

R_{ep}	C_T	R_{ep}	C_T
$R_{ep} < 0.1$	$C_T = \frac{24}{R_{ep}}$	$10^2 < R_{ep} < 10^3$	$C_T = \frac{98.33}{R_{ep}} - \frac{2778}{R_{ep}} + 0.364$
$0.1 < R_{ep} < 1$	$C_T = \frac{22.27}{R_{ep}} + \frac{0.0903}{R_{ep}} + 3.69$	$10^3 < R_{ep} < 5.10^3$	$C_T = \frac{148.62}{R_{ep}} + \frac{4.75 \cdot 10^4}{R_{ep}} + 0.357$
$1 < R_{ep} < 10$	$C_T = \frac{29.166}{R_{ep}} - \frac{3.8889}{(R_{ep})^2} + 1.222$	$5.10^3 < R_{ep} < 10^4$	$C_T = \frac{490.546}{R_{ep}} + \frac{57.87 \cdot 10^4}{(R_{ep})^2} + 0.46$
$10 < R_{ep} < 100$	$C_T = \frac{46.5}{R_{ep}} - \frac{116.67}{(R_{ep})^2} + 0.6167$	$10^4 < R_{ep} < 5.10^4$	$C_T = \frac{1662.5}{R_{ep}} + \frac{5.4167 \cdot 10^4}{(R_{ep})^2} + 0.5191$

Tableau (1.2) : Les corrélations donnant le coefficient de traînée en fonction du Reynolds des particules.

5.1.5. Une force de portance

Il s'agit de l'ensemble des gradients de pression et du cisaillement exercé sur un élément fluide [2] qui serait à la place de la particule, elle s'exprime comme suit :

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{2} \rho_f \pi (R)^2 C_p (U^2_T - U^2_B) \vec{n} \dots \dots \dots (1.8)$$

- C_p : est un coefficient de portance. Pour les grands nombre de Reynolds $C_p = 0.5$.
- Les indices T et B indiquent respectivement le dessus et le dessous de la particule et \vec{n} est un vecteur unitaire normal.

5.1.6. Une force dite de Magnus:

Cette force est due à la rotation de la particule [3], elle est donnée par :

$$\vec{F}_{Magnus} = \rho_p |\vec{U}_f - \vec{U}_p| \left(\vec{\Omega} - \frac{1}{2} \frac{\partial U_f}{\partial z} \right) \vec{u}_z \dots \dots \dots (1.9)$$

Où :

$\vec{\Omega}$: la vitesse angulaire de la particule.

5.1.7. Une force due à l'accélération du fluide [3] :

Elle s'exprime comme suit :

$$\vec{F}_{af} = \rho_f \frac{4}{3} \pi (R)^3 \frac{d\vec{U}_f}{dt} \dots \dots \dots (1.10)$$

5.2. Equation de mouvement d'une particule :

A partir du principe fondamental de la dynamique, on obtient l'équation (1.11) de mouvement d'une particule solide dans un fluide :

$$m_p \frac{d\vec{U}_P}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rho_p V_p \frac{d\vec{U}_P}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\rho_p \frac{4}{3} \pi (R)^3 \frac{d\vec{U}_P}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_m + \vec{F}_{Basset} + \vec{F}_T + \vec{F}_p + \vec{F}_{Magnus} + \vec{F}_{af} \dots \dots \dots (1.11)$$

6. Conclusion

Dans ce chapitre, quelques généralités sur le transport solide, ont été présentées. Nous avons illustré l'ensemble des paramètres et des phénomènes de transport solide ainsi que les caractéristiques de l'écoulement fluide.

Nous avons montré que le mouvement d'une particule, dans un écoulement fluide, est décrit par un ensemble de forces exercées sur la surface de cette particule. Ensuite nous nous sommes intéressés au terme de la force de traînée exercée par le fluide à la surface de la particule et nous avons exposé quelques corrélations donnant le coefficient de traînée.

A green scroll graphic with a white border, featuring a rolled-up edge on the left and a small circular detail on the top right. The text is centered on the scroll.

CHAPITRE II :

**Modélisation
Mathématique**

1. Introduction :

Ce chapitre est consacré à l'étude analytique de la trajectoire d'une particule solide en saltation dans une conduite inclinée et une autre horizontale (voir figures 2.1 et 2.2). La démarche consiste à appliquer l'équation fondamentale de la dynamique (1.11), sur une particule solide en mouvement de saltation, dans un écoulement à travers une conduite. Cette équation est projetée suivant les deux axes ox et oy et intégrée pour obtenir à la fin l'équation donnant la trajectoire de la particule solide.

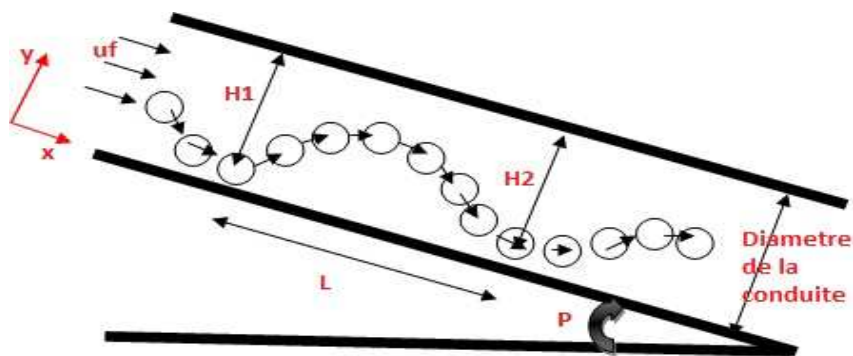


Figure (2.1) : particules en saltation dans une conduite inclinée.

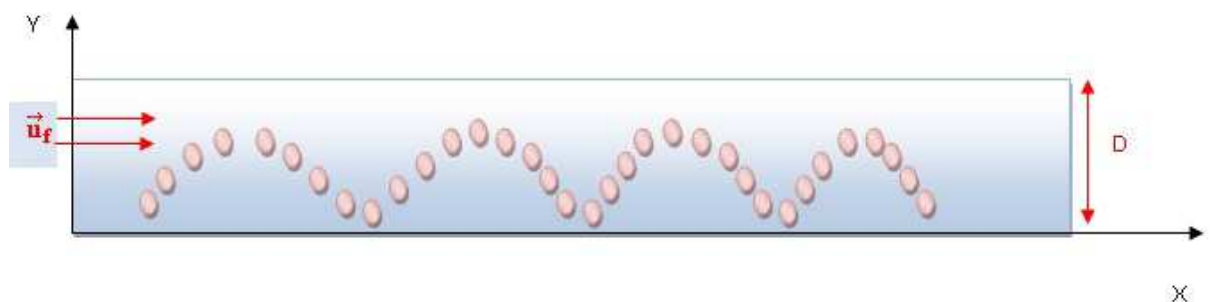


Figure (2.2) : particules en saltation dans une conduite horizontale.

2. Modélisation de la trajectoire d'une particule solide dans un fluide :

Pour modéliser la trajectoire d'une particule solide, il suffit de résoudre l'équation fondamentale de la dynamique (1.11) :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_m + \vec{F}_{Basset} + \vec{F}_T + \vec{F}_p + \vec{F}_{Magnus} + \vec{F}_{af}$$

Cette équation va nous permettre de déterminer la trajectoire d'une particule dans un écoulement de fluide. La prédiction de ses trajectoires dépend de plusieurs paramètres, à savoir: la nature de la particule, les propriétés physiques de chaque phase (solide et liquide) et le nombre de Reynolds de la particule qui est directement lié au coefficient de traînée.

Du fait de l'existence d'un grand nombre de particules dispersées dans le fluide, on néglige la force de Basset. La force de Magnus est également négligée car la particule solide n'a pas de rotation sur elle-même et se trouve isolée dans l'écoulement (absence d'interactions entre particules). L'équation de la dynamique s'écrit alors :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_m + \vec{F}_T + \vec{F}_p + \vec{F}_{af} \dots \dots \dots (2.1)$$

On remplace chaque force par sa relation ($\vec{F}_g, \vec{F}_m, \vec{F}_{af}$) et on laisse de coté la force de portance et celle de traînée (\vec{F}_T, \vec{F}_p) :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} = (m_p - m_f) \vec{g} + m_f C_m \frac{d(\vec{U}_f - \vec{U}_p)}{dt} + m_f \frac{d\vec{U}_f}{dt} + \vec{F}_T + \vec{F}_p \dots \dots \dots (2.2)$$

Après développement, on trouve :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} - m_f C_m \frac{d(\vec{U}_f - \vec{U}_p)}{dt} - m_f \frac{d\vec{U}_f}{dt} = (m_p - m_f) \vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_p$$

d'où :

$$m_p \frac{d\vec{U}_p}{dt} - m_f C_m \frac{d\vec{U}_f}{dt} + m_f C_m \frac{d\vec{U}_p}{dt} - m_f \frac{d\vec{U}_f}{dt} = (m_p - m_f) \vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_p \dots \dots \dots (2.3)$$

Puisqu'on s'intéresse à la trajectoire de la particule solide alors on néglige $\frac{d\vec{U}_f}{dt}$ devant les autres forces. L'équation (2.3) devient :

$$(m_p + C_m m_f) \frac{d\vec{U}_p}{dt} = (m_p - m_f) \vec{g} + \vec{F}_T + \vec{F}_p \dots \dots \dots (2.4)$$

On prendra comme expression de la force de trainée celle proposé par Wiberg [2], qui se décompose :

$$F_{Tx} = -\frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Tx} (U_{Px} - U_{fx}) |U_{Px} - U_{fx}|$$

$$F_{Ty} = -\frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Ty} (U_{Py} - U_{fy}) |U_{Py} - U_{fy}|$$

avec :

$$U_{fy} = 0 \quad \text{et} \quad U_{fx} = U_f$$

On supposera que la force de portance est égale à une valeur constante déterminée expérimentalement par Magali. Cette force dépend de la différence des vitesses au-dessous et au-dessus de la particule solide. Les équations à résoudre suivant les axes ox et oy sont :

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{Px}(t) = (m_p - m_f) g_x - \frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Tx} (U_{Px} - U_{fx}) |U_{Px} - U_{fx}| + F_{Px} \dots \dots \dots (2.5)$$

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{Py}(t) = (m_p - m_f) g_y - \frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Ty} (U_{Py} - U_{fy}) |U_{Py} - U_{fy}| + F_{Py} \dots \dots \dots (2.6)$$

2.1. Modélisation de la trajectoire d'une particule pour le cas d'une conduite horizontale :

A partir des équations (2.5) et (2.6) obtenues, on projette la force du poids et la force de portance sur les axes ox et oy , on aura :

$$F_{gx} = 0 \quad \rightarrow \quad g_x = 0$$

$$F_{gy} = - (m_p - m_f) g \quad \rightarrow \quad g_y = - g$$

et :

$$F_{Px} = 0$$

$$F_{Py} = F_P$$

Les équations (2.5) et (2.6) deviennent :

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{Px}(t) = -\frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Tx} (U_{Px} - U_{fx}) |U_{Px} - U_{fx}|$$

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{Py}(t) = - (m_p - m_f) g - \frac{1}{2} \rho_f \pi R^2 C_{Ty} (U_{Py})^2 + F_P$$

Ce qui donne :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_x}}{(m_p + C_m m_f)} \right] (U_{P_x} - U_{f_x}) |U_{f_x} - U_{P_x}| \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\dot{U}_{P_y}(t) = - \left[\frac{(m_p - m_f)g - F_P}{(m_p + C_m m_f)} \right] - \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_y}}{(m_p + C_m m_f)} \right] (U_{P_y})^2 \dots \dots \dots (2.8)$$

On pose :

$$a_1 = \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_x}}{(m_p + C_m m_f)} \right]$$

$$(a_2)^2 = \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_y}}{(m_p + C_m m_f)} \right] \quad \text{et} \quad (b_2)^2 = \left[\frac{(m_p - m_f)g - F_P}{(m_p + C_m m_f)} \right]$$

avec :

$$a_2 = \sqrt{(a_2)^2} \quad \text{et} \quad b_2 = \sqrt{(b_2)^2}$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = a_1 (U_{P_x} - U_{f_x}) |U_{f_x} - U_{P_x}| \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\dot{U}_{P_y}(t) = - (a_2)^2 (U_{P_y})^2 - (b_2)^2 \dots \dots \dots (2.10)$$

Pour obtenir la position de la particule solide suivant ox et oy, on intègre, par rapport au temps, les deux équations du mouvement (2.9) et (2.10) :

- Pour l'équation (2.9) suivant ox:

$$\dot{U}_{P_x}(t) = a_1 (U_{P_x} - U_f) |U_f - U_{P_x}|$$

On suppose que $U_f > U_{P_x}$, l'équation (2.9) devient :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = a_1 (U_{P_x} - U_f)^2 \dots \dots \dots (2.9.a)$$

On pose :

$$W = U_{P_x} - U_f$$

Alors : $W' = a_1 W^2$

$$\int \frac{W'}{W^2} dt = \int a_1 dt$$

ce qui donne :

$$-\frac{1}{W} = a_1 t + \eta \quad \text{et} \quad (\eta : \text{est la constante d'intégration}).$$

On remplace W par sa relation et on déduit :

$$U_{P_x}(t) = -\frac{1}{a_1 t + \eta} + U_f \dots \dots \dots (2.9.b)$$

Pour déterminer la constante d'intégration (η), il faut utiliser les conditions initiales :

à : $t=0 \rightarrow U_{P_x}(0) \rightarrow$ sont des valeurs déduites aléatoirement.

$$U_{P_x}(0) = -\frac{1}{\eta} + U_f$$

D'où : $\eta = -\frac{1}{U_{P_x}(0) - U_f}$: la constante d'intégration.

Ensuite on intègre l'équation (2.9.b) pour obtenir l'équation de position suivant l'axe ox :

$$\int U_{P_x}(t) dt = \int \left(-\frac{1}{a_1 t + \eta} + U_f \right) dt$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{a_1} \int \frac{1}{t + \frac{\eta}{a_1}} dt + \int U_f dt$$

$$x_p(t) = -\frac{1}{a_1} \ln \left(t + \frac{\eta}{a_1} \right) + U_f t + \gamma \dots \dots \dots (2.9.c)$$

γ : est une constante d'intégration qu'on détermine à partir des conditions initiales :

à : $t=0 \rightarrow x_p(0) = 0$

$$-\frac{1}{a_1} \ln \left(\frac{\eta}{a_1} \right) = -\gamma$$

$\gamma = \frac{1}{a_1} \ln \left(\frac{\eta}{a_1} \right)$: représente la constante d'intégration.

- Pour l'équation (2.10) suivant oy :

$$\dot{U}_{P_y}(t) = - (a_2)^2 (U_{P_y})^2 - (b_2)^2$$

Après développement, on aura :

$$\dot{U}_{Py}(t) = - (b_2)^2 \left(\left(\frac{a_2}{b_2} U_{Py}(t) \right)^2 + 1 \right).$$

Si on pose : $Z(t) = \frac{a_2}{b_2} U_{Py}(t)$

On remplace $Z(t)$ dans l'équation (2.10), on trouve :

$$\dot{U}_{Py}(t) = - (b_2)^2 (Z^2 + 1) \dots \dots \dots (2.10.a)$$

Avec : $\dot{U}_{Py}(t) = \frac{b_2}{a_2} z'(t)$

On remplace $\dot{U}_{Py}(t)$ dans l'équation (2.10.a) :

$$\frac{b_2}{a_2} Z' = - (b_2)^2 (Z^2 + 1)$$

$$Z' = - a_2 b_2 (Z^2 + 1)$$

$$\frac{Z'}{Z^2 + 1} = - a_2 b_2$$

On pose également : $Z(t) = W \Rightarrow dw = Z'(t) dt$

d'où:

$$\int \frac{Z'}{Z^2 + 1} dt = - \int a_2 b_2 dt$$

$$\int \frac{1}{W^2 + 1} dw = - \int a_2 b_2 dt$$

ce qui donne : $\arctan w = - a_2 b_2 t + \mu$ et (μ : la constante d'intégration)

avec: $W = \tan (- a_2 b_2 t + \mu)$

On remplace W et on trouve :

$$W = Z(t) = \frac{a_2}{b_2} U_{Py}(t) = - \tan (a_2 b_2 t + \mu)$$

$$U_{Py}(t) = - \frac{b_2}{a_2} \tan (a_2 b_2 t + \mu) \dots \dots \dots (2.10.b)$$

Utilisons les conditions initiales pour déterminer (μ) :

à : $t=0 \rightarrow U_{Py}(0) \rightarrow$ cette vitesse est déduite de façon aléatoire

$$U_{Py}(0) = \frac{b_2}{a_2} \tan(\mu)$$

$$\mu = \arctan \left[\frac{b_2}{a_2} U_{Py}(0) \right]$$

En intégrant l'équation (2.10.b), on détermine l'équation de la position suivant oy :

$$\int U_{Py}(t) dt = \int \left(- \frac{b_2}{a_2} \tan (a_2 b_2 t + \mu) \right) dt$$

$$y_P(t) = \frac{b_2}{a_2} \frac{1}{a_2 b_2} \ln |(\cos(a_2 b_2 t + \mu))| + B$$

avec:

B : la constante d'intégration

$$y_P(t) = \frac{1}{(a_2)^2} \ln |(\cos(a_2 b_2 t + \mu))| + B \dots\dots\dots$$

(2.10.c)

L'utilisation des conditions initiales donne la constante d'intégration B :

$$\text{à : } t = 0 \Rightarrow y_P(0) = 0$$

$$0 = \frac{1}{(a_2)^2} \ln |(\cos(a_2 b_2 t + \mu))| + B$$

$$B = - \frac{1}{(a_2)^2} \ln (\cos(\mu))$$

Finalement, on remplace les constantes d'intégrations par leurs expressions et on obtient la forme finale des équations de position de la particule solide suivant ox et oy pour le cas d'une conduite horizontale:

$$x_p(t) = - \frac{1}{a_1} \ln \left(t + \frac{1}{a_1} \left(- \frac{1}{(U_{Px}(0) - U_f)} \right) \right) + U_f t + \frac{1}{a_1} \ln \left(- \frac{1}{a_1 (U_{Px}(0) - U_f)} \right) \dots\dots\dots (2.11)$$

$$y_p(t) = \frac{1}{(a_2)^2} \ln \left| \cos(a_2 b_2 t + \arctan \left(\frac{b_2}{a_2} U_{Py}(0) \right)) \right| - \frac{1}{(a_2)^2} \ln \left| \cos(\arctan \left(\frac{b_2}{a_2} U_{Py}(0) \right)) \right| \dots\dots (2.12)$$

2.2. Modélisation de la trajectoire d'une particule pour le cas d'une conduite inclinée :

De la même façon que pour le cas horizontal, on projette la force du poids et la force de portance suivant ox et oy , on obtient :

$$F_{g_x} = (m_p - m_f)g_x \quad \text{et} \quad g_x = g \sin \arctan(I)$$

$$F_{g_y} = (m_p - m_f)g_y \quad \text{et} \quad g_y = -g \cos \arctan(I)$$

avec:

$$F_{P_x} = 0$$

$$F_{P_y} = F_P$$

Alors les équations (2.5) et (2.6) pour le cas incliné deviennent :

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{P_x}(t) = (m_p - m_f)g \sin \arctan(I) - \frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_x} (U_{P_x} - U_{f_x}) |U_{P_x} - U_{f_x}|$$

$$(m_p + C_m m_f) \dot{U}_{P_y}(t) = -(m_p - m_f)g \cos \arctan(I) - \frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_y} (U_{P_y})^2 + F_P$$

Donc on aura :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = \left[\frac{(m_p - m_f)g \sin \arctan(I)}{(m_p + C_m m_f)} \right] + \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_x}}{(m_p + C_m m_f)} \right] (U_{P_x} - U_{f_x}) |U_{f_x} - U_{P_x}| \dots \dots \dots (2.13)$$

$$\dot{U}_{P_y}(t) = - \left[\frac{(m_p - m_f)g \cos \arctan(I) - F_P}{(m_p + C_m m_f)} \right] - \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_y}}{(m_p + C_m m_f)} \right] (U_{P_y})^2 \dots \dots \dots (2.14)$$

On pose :

$$(c_1)^2 = \left[\frac{(m_p - m_f)g \sin \arctan(I)}{(m_p + C_m m_f)} \right] \quad \text{et} \quad (c_2)^2 = \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_x}}{(m_p + C_m m_f)} \right]$$

$$(d_1)^2 = \left[\frac{(m_p - m_f)g \cos \arctan(I) - F_P}{(m_p + C_m m_f)} \right] \quad \text{et} \quad (d_2)^2 = \left[\frac{\frac{1}{2}\rho_f \pi R^2 C_{T_y}}{(m_p + C_m m_f)} \right]$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = (c_1)^2 + (c_2)^2(U_{P_x} - U_f) |U_f - U_{P_x}| \dots\dots\dots (2.15)$$

$$\dot{U}_{P_y}(t) = - (d_2)^2(U_{P_y})^2 - (d_1)^2 \dots\dots\dots (2.16)$$

L'intégration des deux équations du mouvement donne la position de la particule solide suivant ox et oy :

- Pour l'équation (2.15) suivant ox :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = (c_1)^2 + (c_2)^2(U_{P_x} - U_f) |U_f - U_{P_x}|$$

Comme $U_f > U_{P_x}$, alors l'équation (2.15) devient :

$$\dot{U}_{P_x}(t) = (c_1)^2 + (c_2)^2 (U_{P_x} - U_f)^2 \dots\dots\dots (2.15.a)$$

On pose:

$$W = U_{P_x} - U_f$$

alors: $W' = (c_1)^2 + (c_2)^2 W^2$

$$W' = (c_1)^2 \left(1 + \frac{(c_2)^2}{(c_1)^2} W^2 \right)$$

On pose également :

$$Y = \frac{c_2}{c_1} W \quad \text{et} \quad Y' = \frac{c_2}{c_1} W'$$

On remplace W' dans Y', on aura :

$$Y' = \frac{c_2}{c_1} (c_1)^2 \left(1 + \frac{(c_2)^2}{(c_1)^2} W^2 \right)$$

Donc:

$$Y' = c_1 c_2 (1 + Y^2)$$

D'où :

$$\frac{Y'}{1+Y^2} = c_1 c_2$$

On peut écrire aussi :

$$Y(t) = z(t) \quad \Rightarrow \quad dz = Y'(t) dt$$

$$\int \frac{Y'}{1+Y^2} dt = \int c_1 c_2 dt$$

$$\int \frac{1}{1+z^2} dz = \int c_1 c_2 dt$$

alors :

$$\arctan z = (c_1 c_2 t + \psi) + U_f$$

ψ représente la constante d'intégration. On remplace par $z(t)$ et W dans l'équation (2.15.b) et on obtient :

$$U_{Px}(t) = \frac{c_1}{c_2} \tan(c_1 c_2 t + \psi) + U_f \dots \dots \dots (2.15.b)$$

Pour déterminer la constante d'intégration ψ , il faut utiliser les conditions initiales :

à : $t = 0 \rightarrow U_{Px}(0) \rightarrow$ sont des valeurs prises aléatoirement.

$$U_{Px}(0) = \frac{c_1}{c_2} \tan(\psi) + U_f$$

D'où :

$$\psi = \arctan\left(\frac{c_2}{c_1}(U_{Px}(0) - U_f)\right)$$

On intègre l'équation (2.15.b) pour déterminer l'équation de la position suivant ox :

$$\int U_{Px}(t) dt = \int \left[\frac{c_1}{c_2} \tan(c_1 c_2 t + \psi) + U_f \right] dt$$

$$x_p(t) = \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{c_1 c_2} \ln |(\cos(c_1 c_2 t + \psi))| + U_f t + \sigma \quad \text{avec } \sigma : \text{ la constant d'intégration.}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{(c_2)^2} \ln |(\cos(c_1 c_2 t + \psi))| + U_f t + \sigma \dots \dots \dots (2.15.c)$$

Utilisons la condition initiale pour déterminer la constante d'intégration (σ) :

$$\text{à : } t = 0 \quad \rightarrow \quad x_p(0) = 0$$

Donc :

$$\sigma = - \frac{1}{(c_2)^2} \ln (\cos(\psi))$$

La forme finale de l'équation de position de la particule solide, suivant ox pour un canal incliné après avoir remplacé les expressions des constantes d'intégration, est :

$$x_p(t) = \frac{1}{(c_2)^2} \ln \left| \left| \cos \left(c_1 c_2 t + \arctan \left(\frac{c_2}{c_1} (U_{Px}(0) - U_f) \right) \right) \right| \right| + U_f t - \frac{1}{(c_2)^2} \ln \left| [\cos(\arctan(\frac{c_2}{c_1}(U_{Px}(0) - U_f)))] \right| \dots\dots\dots(2.17)$$

Pour l'équation (2.16) suivant oy, l'équation (2.16) est de même forme que l'équation (2.10). La seule chose qui change c'est les constantes définies dans les équations (2.15) et (2.16). La même procédure d'intégration est suivie pour déterminer l'équation de position suivant oy qui donne la même forme que l'équation (2.12).

3. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle mathématique régissant le mouvement de la particule solide en saltation dans un fluide en régime non-permanent à l'intérieur d'une conduite horizontale et inclinée. Nous avons imposé des conditions initiales, issues de l'expérience de Magali, sur la particule pour résoudre l'équation de la dynamique.

CHAPITRE III :

Résolution numérique - Résultats et Discussions

1. Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à la détermination des trajectoires des particules solides dans un écoulement de fluide (eau). Un programme de calcul, écrit sous le langage Matlab, a été élaboré. Ce programme permet de modéliser le mouvement des particules solides. Les résultats obtenus par notre code de calcul seront confrontés aux résultats expérimentaux de Magali JODEAU [2]. Il est à noter que certains paramètres, utilisés dans le programme de calcul, sont tirés à partir de l'expérience de Magali. Le problème étudié a été sommairement résolu comme suit :

Après intégration des équations (2.9), (2.10), (2.15) et (2.16), on obtient les équations des vitesses $U_{P_x}(t)$ et $U_{P_y}(t)$. L'exécution des instructions du programme donne les trajectoires de la particule solide $x_p(t)$ et $y_p(t)$ ainsi que la longueur et la hauteur moyennes des sauts.

2. Description du programme de calcul :

2.1. Données du programme :

Les données du programme sont séparées en deux catégories. La première comporte les paramètres tirés de l'expérience de Magali telles que la pente, les propriétés du fluide et des particules solides. La seconde catégorie comporte le coefficient de la masse ajoutée C_m , le coefficient de traînée C_T et la force de portance F_p . Des paramètres, appelés paramètres de calage, sont pris comme suit [2]:

- $C_m = 0.5$
- Une pente de 10% et 17.5%.
- $F_p = 8.4 \cdot 10^{-4}$ N
- $C_{T_x} = 0.35$
- $C_{T_y} = 0.65$
- $U_f = 0.41$ m/s
- Le rayon de la particule $R = 0.003$ m.
- la masse de la particule $m_p = 2.87 \cdot 10^{-4}$ kg.

2.2. Les conditions initiales :

La résolution numérique des équations précédentes, soit pour le cas d'une conduite horizontale ou bien inclinée, nécessitent la donnée de conditions initiales. La position de départ ($t=0$) est la position (0.0).

3. La trajectoire d'une particule solide en saut :

3.1. Organigramme1 :

Cet organigramme explique la démarche suivie dans le programme de calcul pour suivre la trajectoire d'une particule solide en saut dans une conduite inclinée de pente $p=17.5\%$:

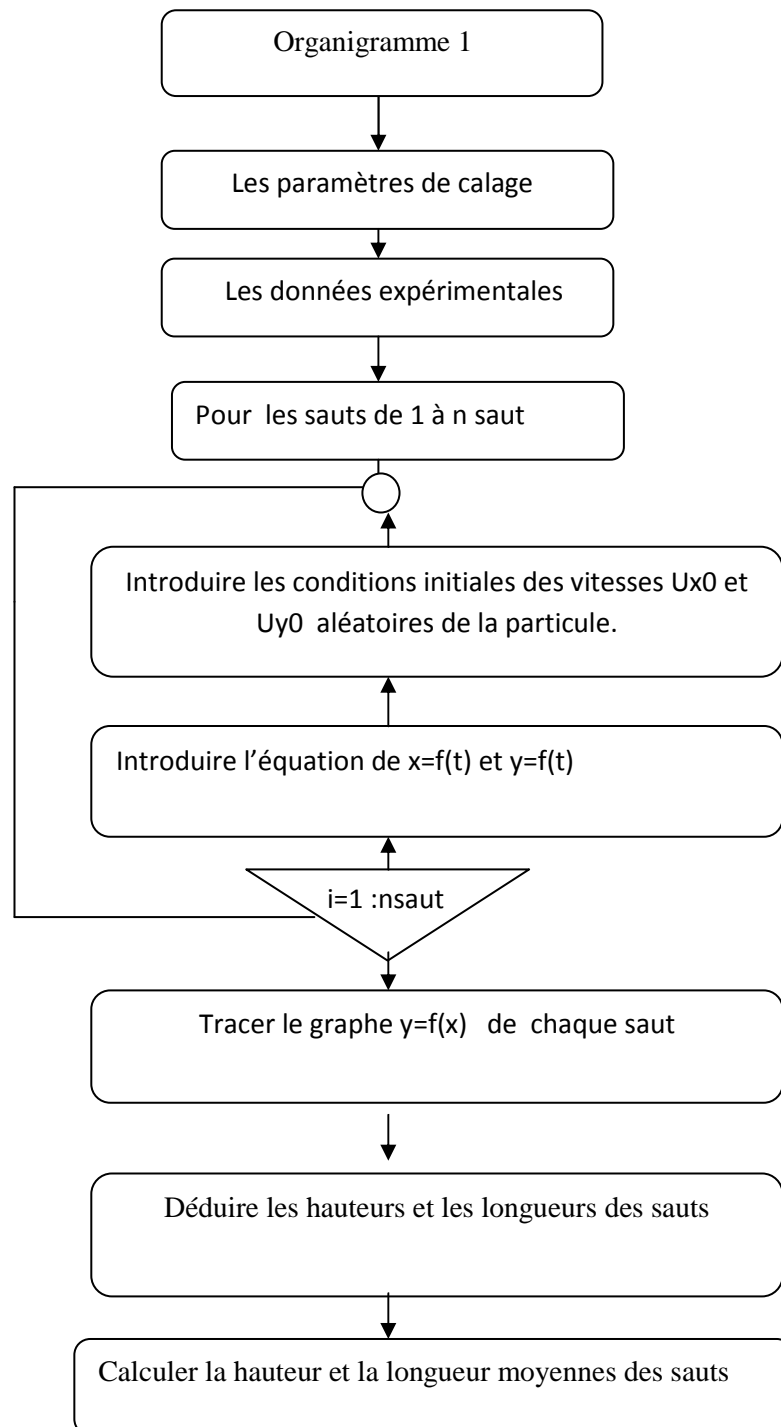


Figure (3.1): Organigramme donnant la trajectoire d'une particule solide en saut.

3.2. Résultats et discussion :

La figure (3.2) donne les trajectoires des particules solides dans un écoulement d'eau de vitesse $U_f = 0.41$ m/s:

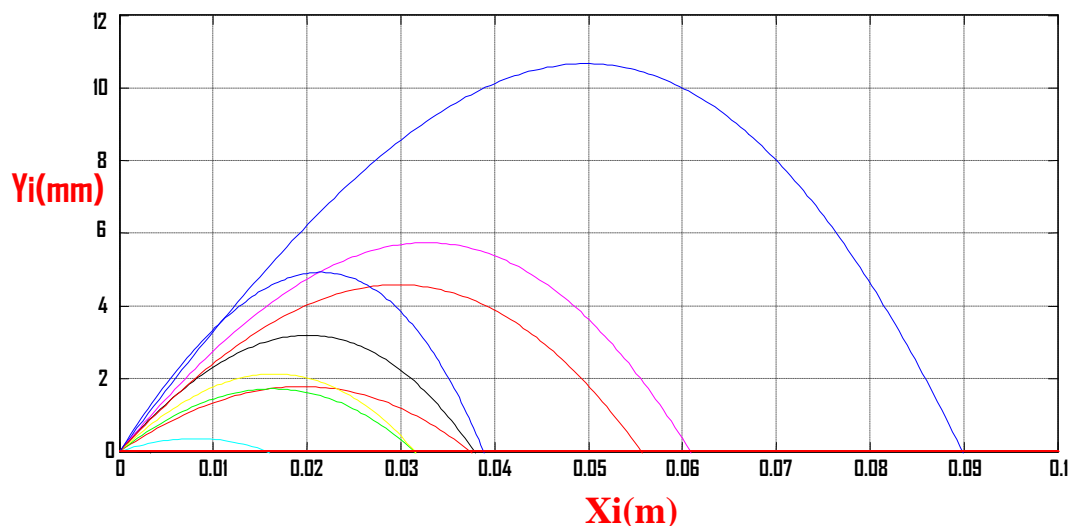


Figure (3.2): Trajectoires de la particule solide.

Les longueurs et les hauteurs des sauts sont résumées dans le tableau suivant :

Numéro de saut	Longueur (m)	Hauteur (m)
Saut1	0.037868	0.0031973
Saut2	0.037411	0.0017911
Saut3	0.089851	0.010667
Saut4	0.031445	0.0017263
Saut5	0.031543	0.0021362
Saut6	0.060892	0.0057446
Saut7	0.015795	0.00035835
Saut8	0.0017515	3.6253 e-6
Saut9	0.055633	0.0045862
Saut10	0.038833	0.0049309

Tableau (3.1) : Longueurs et hauteurs des sauts

La longueur et la hauteur moyennes des sauts sont :

La hauteur moyenne: $H_m = 0.0035$ m

La longueur moyenne: $L_m = 0.0401$ m

Les résultats expérimentaux obtenus par MAGALI, pour le cas d'une conduite inclinée d'une pente $p=17.5\%$ pour un écoulement à surface libre, sont donnés dans la figure (3.3) suivante :

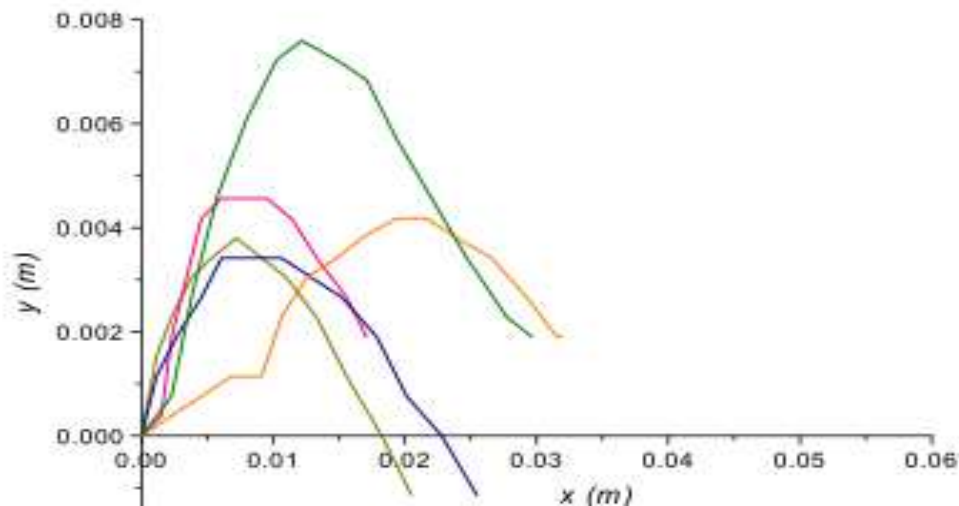


Figure (3.3): Trajectoires expérimentales obtenues par Magali JODEAU [2].

La comparaison des résultats numériques et expérimentaux de Magali montrent que les trajectoires modélisées se distinguent un peu des trajectoires expérimentales. Toutefois, l'allure des deux figures reste comparable. Cet écart peut être expliqué par :

- La longueur des sauts modélisés qui apparaît plus grande que la longueur des sauts expérimentaux peut être expliquée par l'effet de la présence d'un lit de particules, pour le cas de l'expérience de Magali. Ces particules imposent des positions de début et de fin de saut alors, cela devrait avoir pour effet la réduction des longueurs des sauts expérimentaux.
- Les trajectoires expérimentales sont affectées par les chocs entre particules.

La vitesse de fluide est un paramètre qui peut être déterminant dans la trajectoire de la particule solide. Afin d'étudier l'effet de ce paramètre, nous avons fait un programme de calcul qui donne les longueurs et les hauteurs moyennes des sauts. L'organigramme suivant explique les principales étapes du programme de calcul :

4. l'effet de la variation de la vitesse de fluide sur les hauteurs et longueurs moyennes des sauts :

4.1. Organigramme 2 :

Cet organigramme explique la démarche suivie dans le programme pour voir l'effet de la variation de la vitesse de fluide sur la longueur et la hauteur moyennes des sauts :

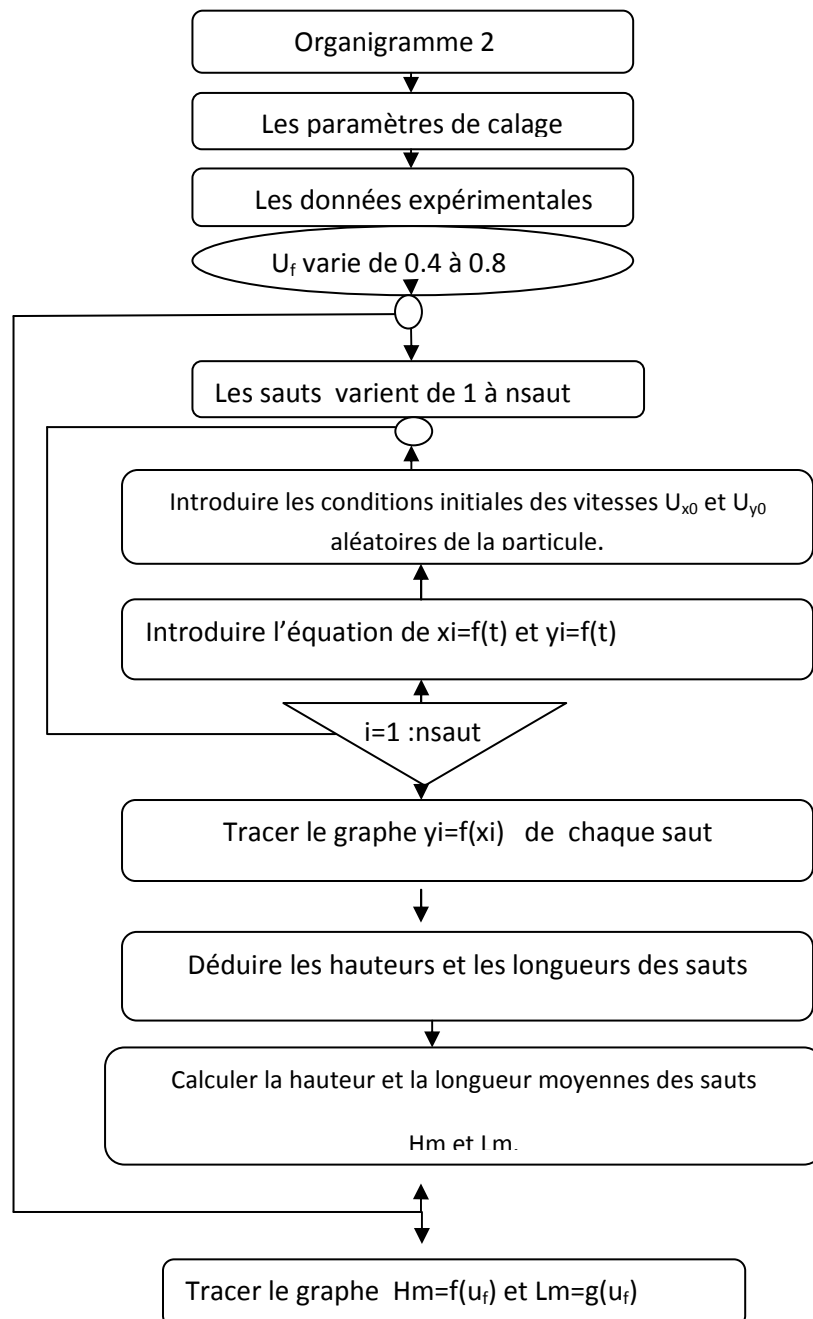


Figure (3.4): Organigramme donnant l'effet de la variation de la vitesse de fluide sur les hauteurs et longueurs moyennes des sauts.

L'effet de ce paramètre se fait pour le cas d'une conduite inclinée d'une pente $P=10\%$. On fait varier la vitesse de fluide autour d'une valeur $U_f = 0.41$ m/s.

4.2. Résultats et discussion :

Les résultats, donnant la longueur nette la hauteur moyenne des sauts en fonction de la vitesse de fluide, sont donnés dans les figures (3.5) et (3.6) :

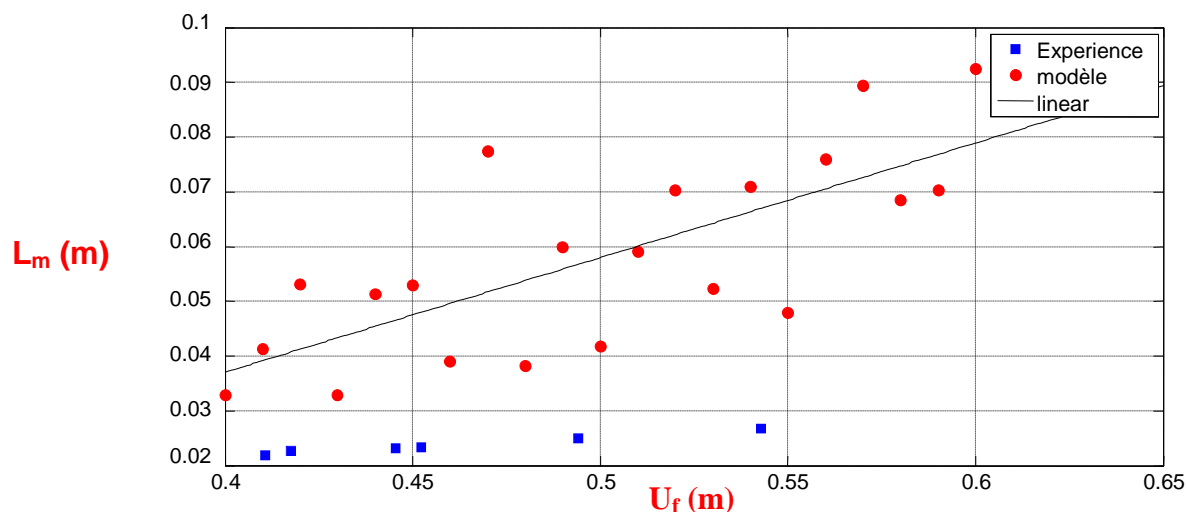


Figure (3.5): Longueurs moyennes des sauts en fonction de la vitesse de fluide U_f

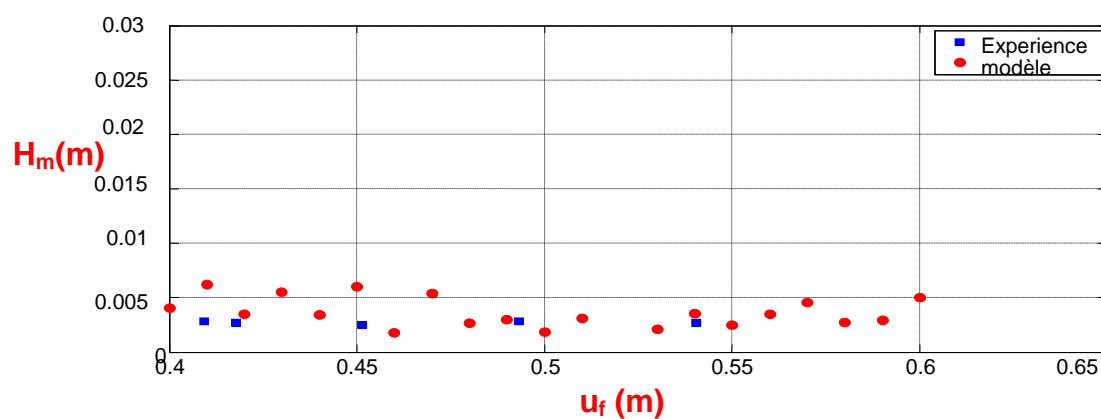


Figure (3.6): Hauteurs moyennes des sauts en fonction de la vitesse de fluide U_f ,

La figure (3.5) montre que la longueur des sauts augmente avec l'augmentation de la vitesse de fluide. On remarque également que cette augmentation est plus significative pour le cas de notre modèle comparativement à l'expérience. En revanche, la figure (3.6) montre que la hauteur moyenne des sauts oscille autour d'une valeur moyenne pour les deux cas. par conséquent, on peut conclure que la vitesse de fluide n'a pas d'influence considérable sur la hauteur des sauts.

5. L'effet de la pente sur les hauteurs et longueurs moyennes des sauts :

On s'intéresse à l'effet de la pente sur les sauts pour une vitesse de fluide $U_f = 0.41\text{m/s}$.

5.1. Organigramme3:

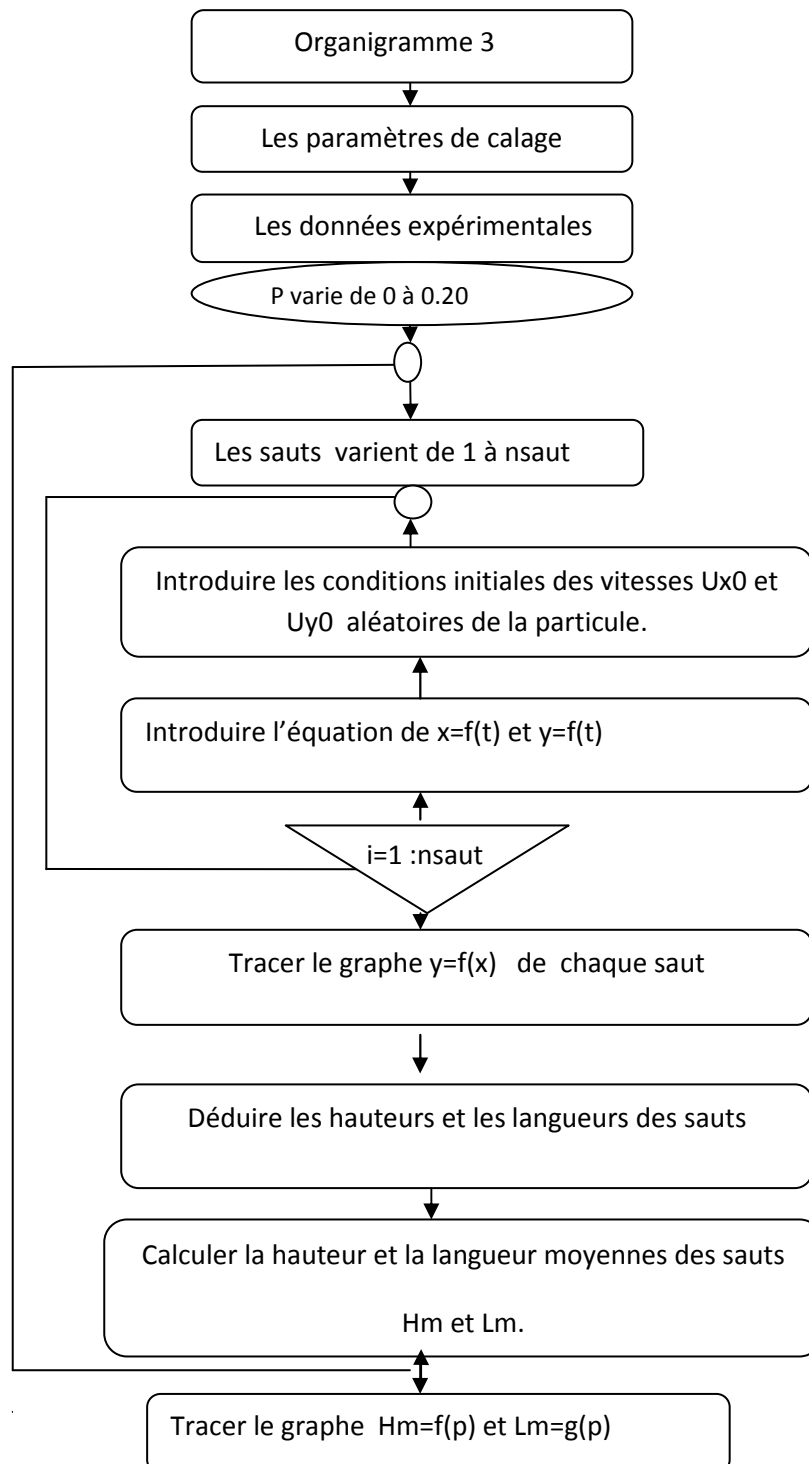


Figure (3.7): Organigramme donnant l'effet de la variation de la pente sur les hauteurs et longueurs moyennes de sauts.

5.2. Résultats et discussion :

Les résultats, donnant la longueur et la hauteur moyennes des sauts en fonction de la vitesse de fluide, sont donnés dans les figures (3.8) et (3.9) :

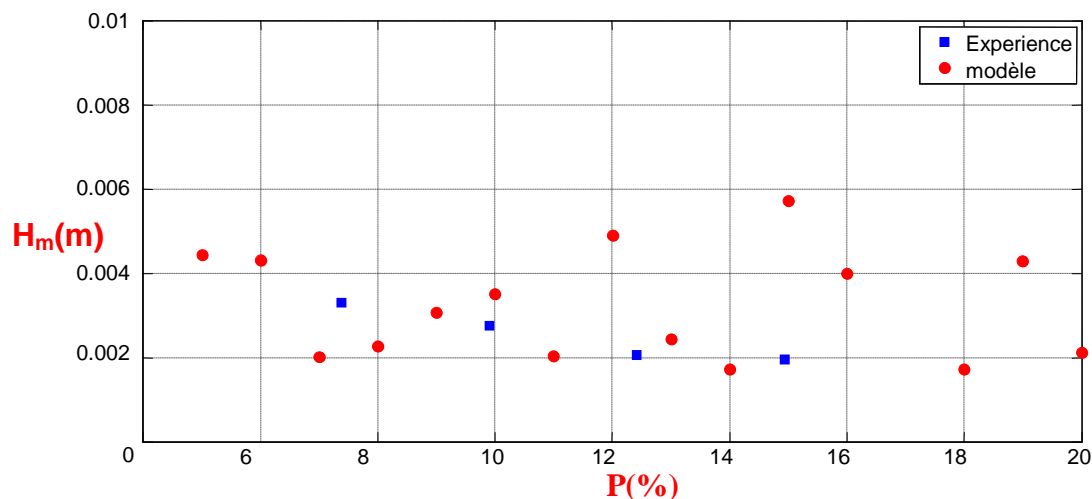


Figure (3.8): Les hauteurs moyennes des sauts en fonction de la pente.

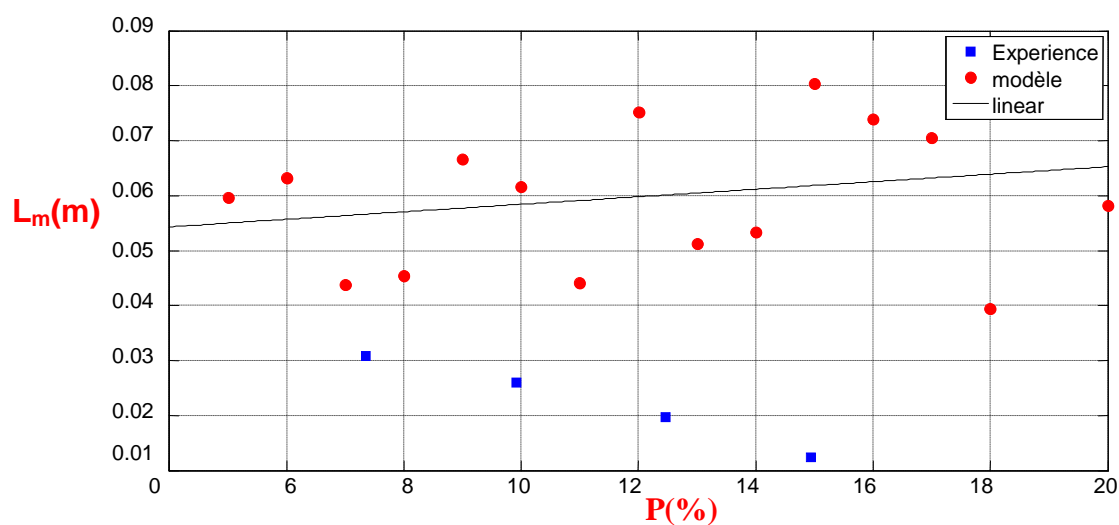


Figure (3.9): Les longueurs moyennes des sauts en fonction de la pente

D'après la figure (3.8), on constate que la hauteur des sauts ne dépend pas significativement de la pente, elle varie entre 0.002mm et 0.004 mm. La figure (3.9) indique que la longueur des sauts diminue avec l'augmentation de la pente pour le cas expérimental. En revanche, pour le cas de notre modèle, on remarque que la longueur augmente mais de manière faible; elle est presque constante. Cette divergence, dans le cas des longueurs, peut être expliquée par l'effet de la surface libre pour le cas de l'expérience de Magali ainsi que le modèle choisi qui est trop simplifié.

6. Conclusion :

Pour ce chapitre on a réussi à modéliser les trajectoires des particules sphériques sur des sauts indépendants. Les conditions initiales de chaque saut, sont générées de façon aléatoire pour s'approcher au mieux des conditions expérimentales. Nous avons également étudié les effets de la pente et de la vitesse du fluide sur les trajectoires des particules.

Les trajectoires modélisées par le programme Matlab sont comparés aux données expérimentales de Magali, ces résultats présentent des effets de la surface libre (la hauteur d'eau de canal) sur les trajectoires. Le modèle montre une augmentation de la longueur des sauts avec l'augmentation de la pente alors que l'expérimental de Magali montre le contraire. Cela est du à la diminution de la hauteur d'eau de canal. Pour l'effet de la vitesse de fluide sur les trajectoires, on note une augmentation des longueurs des sauts autant sur le modèle que l'expérimental alors que les hauteurs des sauts restent quasiment constantes avec l'augmentation de la vitesse de fluide.

CHAPITRE IV :

***Simulation du mouvement
d'une particule solide :
Couplage DEM-VOF***

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

1. Introduction :

Le problème de transport solide dans les fluides, étudié dans le chapitre précédent, sera abordé dans ce chapitre en utilisant cette fois-ci le code de calcul Fluent. Dans ce code de calcul, la modélisation de l'écoulement de fluide est basée sur la méthode des volumes finis tandis que la modélisation des particules solides (matériaux granulaires) est basée sur la méthode des éléments discrets. L'intérêt des scientifiques pour ces matériaux est justifié par la place très importante qu'ils occupent dans notre environnement naturel à travers des exemples comme les sols, les roches etc.... par ailleurs, de multiples procédés industriels de transformations mettent en œuvre des matériaux granulaires comme les comprimés pharmaceutiques, les produits agro-alimentaires, les matériaux de construction, etc. L'approche en éléments discrets est généralement utilisée pour aborder la problématique du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints.

Il n'existe pas un cadre unifié pour la rhéologie des matériaux granulaires qui soit adapté à toutes les compositions (forme, taille) et tous les états possibles (solide, liquide, gaz). L'approche classique en mécanique des structures consistant à traiter le matériau comme un milieu continu caractérisé par une loi de comportement est inadaptée pour la simulation numérique de milieux granulaires, bien que des modèles aient été développés pour la modélisation d'un milieu granulaire comme un fluide complexe.

Nous présentons, dans ce chapitre, les deux méthodes numériques utilisées par le code Fluent :

2. La méthode des éléments discrets (DEM) :

La méthode des éléments discrets est basée sur la dynamique moléculaire. Elle permet l'étude de collections de grains en interaction. Cette méthode numérique consiste à intégrer le mouvement de chacune des particules tout en tenant compte de leurs interactions qui peuvent être de différentes natures. La caractérisation et la modélisation de ces interactions constituent un point clé de ces méthodes car elles sont à la base d'une bonne prédiction du comportement macroscopique d'un matériau granulaire [6].

3. Principe de la méthode des éléments discrets :

Cette méthode (DEM) comprend deux corps d'études dans le milieu discret par une approche discrète :

L'approche discrète : le milieu est considéré comme discontinu et représenté par l'assemblage d'un ensemble d'éléments modélisés (Muller 1996) [7].

Les trois étapes principales de cette approche consistent :

- D'abord définir la géométrie du milieu et donner ses caractéristiques.
- Définir ensuite un organigramme qui détecte les liens entre ces éléments par leurs formes et leur répartition spatiale.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

- Donner les lois physiques des forces d'interaction existant dans le comportement des éléments à l'état initial puis lors d'un contact avec un autre élément.

Alors deux corps dominent cette dernière approche : celle dite des corps indéformables et celle des corps déformables.

Dans les corps indéformables, le choc est considéré comme instantané, le contact a lieu en un point et les éléments ne peuvent pas se chevaucher.

Dans les corps déformables, lorsque deux éléments sont en contact ils peuvent se chevaucher. Les contacts ont une durée non nulle et les interactions entre les éléments varient de façon continue au cours du chevauchement.

3.1. Résolution multi-contact :

Un problème multi-contact est composé d'une collection de corps en interaction. On peut considérer qu'un contact est défini entre deux objets, en gardant à l'esprit qu'un objet peut être en contact avec plusieurs autres, alors il peut être impliqué simultanément dans plusieurs contacts binaires.

On doit donc être capable de définir tous les contacts potentiels. Cette étape de détection des contacts pose principalement des problèmes techniques, liés notamment à la diminution de son coût en termes de temps de calcul. L'idée pour simplifier et optimiser cette détection est de procéder de façon hiérarchisée en suivant ces étapes :

- Eliminer les contacts potentiels entre particules trop lointaines.
- Détection fine (intersections, projections), pour statuer sur les paires d'objets restantes.

Après l'étape de détection, chaque contact binaire entre deux corps est formulé. Considérons deux corps a et b potentiellement en contact (figure 4.1), on se place dans un cas simplifié où on considère deux objets convexes, dans une configuration déterminée; on s'affranchit ainsi des problèmes (techniques, ou d'existence) inhérents à la formulation du contact entre deux corps dans le cas général (repère de contact mobile). On peut alors définir deux points A et C les plus proches, portés respectivement par les corps a et b. Soit T le plan, en 3D ou en 2D, passant par A, tangent à la surface du corps a et \vec{n} la normale à ce plan dirigée vers l'extérieur [7].

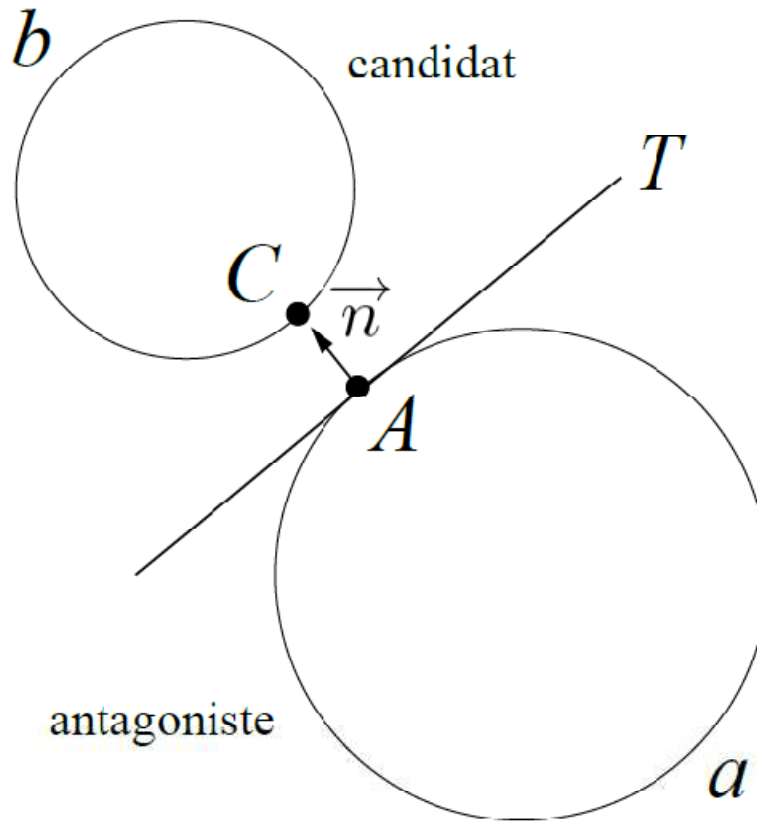


Figure (4.1) : contact binaire entre deux particules

Avec ces notations, la distance algébrique δ entre les corps a et b est définie par :

$$\delta = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} \dots \dots \dots (4.1)$$

La vitesse relative entre les deux corps \vec{U}_P est la différence de vitesse entre les points A et C notées respectivement \vec{V}_A et \vec{V}_C (voir **annexe A**) :

$$\vec{U}_P = \vec{V}_C - \vec{V}_A \dots \dots \dots (4.2)$$

On peut décomposer la vitesse relative \vec{U}_P en une composante normale (\vec{U}_{PN}) et une composante tangentielle (\vec{U}_{PT}), on a alors :

$$\vec{U}_{PN} = \vec{U}_P \cdot \vec{n} \dots \dots \dots (4.3)$$

$$\vec{U}_{PT} = \vec{U}_P - \vec{U}_{PN} \cdot \vec{n} \dots \dots \dots (4.4)$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

et

$$\vec{U}_P = \vec{U}_{PN} \cdot \vec{n} + \vec{U}_{PT} \dots \dots \dots (4.5)$$

Soit $\vec{R}p$ la force de contact entre les corps. On peut aussi la décomposer en une composante normale ($\vec{R}p_N$), portée par le vecteur \vec{n} , et une composante tangentielle ($\vec{R}p_T$), dans le plan tangent T :

$$\vec{R}p_N = \vec{R}p \cdot \vec{n} \dots \dots \dots (4.6)$$

$$\vec{R}p_T = \vec{R}p - \vec{R}p_N \cdot \vec{n} \dots \dots \dots (4.7)$$

et :

$$\vec{R}p = \vec{R}p_N \cdot \vec{n} + \vec{R}p_T \dots \dots \dots (4.8)$$

L'unilatéralité du contact entre les corps (a) et (b) se traduit par le fait que le point (C) appartenant au corps (b), appelé **candidat**, ne peut traverser le plan (T), tangent à la surface du corps (a), appelé **l'antagoniste**.

La force de contact ($\vec{R}p$) est alors définie comme la force empêchant le corps (b) de pénétrer le corps (a) et donc dirigée de corps (a) vers (b).

La condition d'unilatéralité du contact (condition de Signorini [7]), s'écrit avec la notation précédente :

$$\begin{aligned} \delta > 0 &\rightarrow R_{pN} = 0 \\ \delta < 0 &\rightarrow R_{pN} \geq 0 \dots \dots \dots (4.9) \end{aligned}$$

La première ligne de l'équation (4.9) indique que si les corps ne sont pas en contact, la force de contact est nulle. La deuxième ligne de cette équation montre l'existence d'une force de contact.

4. Les différents modèles de la DEM :

Le choc entre deux corps (solide/solide) ou (solide/paroi plane) est un phénomène très compliqué. Plusieurs approches existent pour modéliser ce phénomène :

4.1. Le modèle de Candall pour les corps indéformables :

Le modèle de Candall est le modèle le plus simple et le plus utilisé pour le cas des corps indéformables. Dans ce modèle, un grain est représenté par son rayon, sa masse, son moment d'inertie et ses propriétés de contact [8].

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

Les déformations de chaque grain sont supposées être petites en comparaison de leur taille, alors sont négligeables (voir figure 4.2).

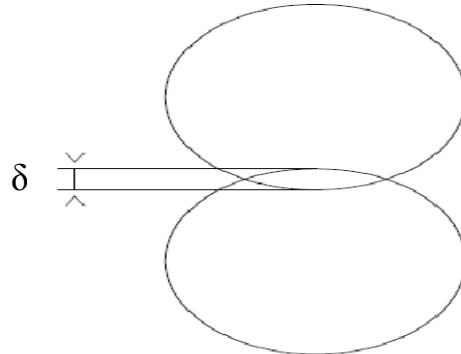


Figure (4.2) : Modélisation du contact entre deux grains.

Par analogie à des systèmes de vibrations :

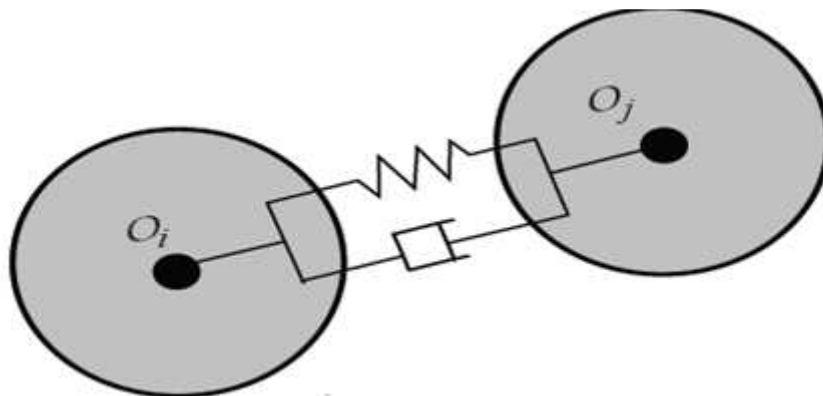


Figure (4.3) : Contact entre deux particules assimilées un modèle de vibration [9].

Donc on peut dire des ressorts et des amortisseurs existent à chaque contact. Ainsi que les forces de contact sont déterminées par le chevauchement entre éléments voisins.

Ou bien dit un élément peut être vu comme un disque rigide avec un manteau de ressorts et d'amortisseurs à sa périphérie.

Au point de contact entre deux éléments le ressort et l'amortisseur sont activés. Dans la direction normale par exemple, la compression du ressort de contact est déterminée par le chevauchement des particules, tandis que la compression de l'amortisseur est déterminée par les vitesses relatives des particules.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

4.1.1. Rappel de vibrations :

4.1.1. A. Définition d'un mouvement vibratoire :

On dit qu'un système mécanique vibre, ou oscille, lorsqu'il est animé d'un mouvement de va-et-vient autour d'un état d'équilibre statique ou non. Généralement ses systèmes sont réductibles à point matériel et un ressort, c'est le résultat d'une modélisation mathématique du dispositif réel.

4.1.1. B. Equations de Lagrange pour un seul degré de liberté (1ddl) :

B.1. Cas des systèmes conservatifs

L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial(T-U)}{\partial q} = 0 \dots\dots\dots (4.10)$$

Avec :

- T : l'énergie cinétique.
- U : l'énergie potentielle.

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$L = T - U \dots\dots\dots (4.11)$$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \dots\dots\dots (4.12)$$

B.2. Cas des systèmes dissipatifs

Considérons une situation physique dans laquelle la particule est soumise à des forces de frottement visqueux dans la résultante \vec{f} est de la forme :

$$\vec{f} = - C \vec{V} \dots\dots\dots(4.13)$$

Avec :

C : coefficient de frottement

L'équation de Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \vec{f} \dots\dots\dots (4.14)$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

B.3. Cas des systèmes forcés

Considérons le cas d'une force extérieure dépendante du temps agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement .

Dans ce cas l'équation de Lagrange peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} - \vec{f} = \vec{F}_q \dots \dots \dots (4.15)$$

D'où :

\vec{F}_q : représente la force extérieure.

Alors le mouvement des deux particules étudié par le modèle de Candall intéressant à la situation ou les particules sont soumises à des forces de frottement donc dans ce modèle le système est dissipatifs :

D'après lagrangien (l'équation 4.14) :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \delta} = \vec{f}$$

Et de (l'équation 4.13) :

$\vec{f} = - C \dot{\delta}$: représente la force d'amortissement ou de frottement.

Avec :

- $T = \frac{1}{2} m \dot{\delta}^2$: l'énergie cinétique.
- $U = \frac{1}{2} K \delta^2$: l'énergie potentielle.
- $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\delta}^2 - \frac{1}{2} K \delta^2$.

Alors :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left(\frac{1}{2} m \dot{\delta}^2 - \frac{1}{2} K \delta^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\frac{1}{2} m \dot{\delta}^2 - \frac{1}{2} K \delta^2 \right) = - C \dot{\delta}$$

$$\frac{d}{dt} [m \dot{\delta}] + K \delta = - C \dot{\delta}$$

$$m \ddot{\delta}(t) + k \delta(t) = - C \dot{\delta}(t) \dots \dots \dots (4.16)$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants qui peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\delta} + 2 \lambda \dot{\delta} + W_0^2 \delta = 0 \dots \dots \dots (4.17)$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

Ou :

- λ : est un coefficient positif appelé coefficient d'amortissement définie par :

$$\lambda = \frac{c}{2m} \dots\dots\dots (4.18)$$

- w_0 : représente la pulsation propre définie par

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \dots\dots\dots (4.19)$$

- T : la période :

$$T = \frac{2\pi}{w_0} \dots\dots\dots (4.20)$$

- f : la fréquence :

$$f = \frac{1}{T} \dots\dots\dots (4.21)$$

La solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de λ par rapport à w_0 :

- Si : $\lambda > w_0$ on dit que le système est suramorti ou apériodique

$$\delta(t) = A_1 e^{[-\lambda - \sqrt{-\lambda^2 - w_0^2}] t} + A_2 e^{[-\lambda + \sqrt{-\lambda^2 - w_0^2}] t} \dots\dots\dots (4.22)$$

Ou :

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales
 $\delta(0) = \delta_0$ et $\dot{\delta}(0) = 0$.

- Si : $\lambda = w_0$ on dit que l'on a un amortissement critique.

$$\delta(t) = \delta_0 (1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \dots\dots\dots (4.23)$$

- Si : $\lambda < w_0$ on dit que le système est sous - amorti ou pseudopériodique.

$$\delta(t) = A e^{-\lambda t} \cos(w_A t + \Phi) \dots\dots\dots (4.24)$$

Avec :

$$w_A = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}$$

$$\Phi = - \arctg \left(\frac{\lambda}{w_A} \right)$$

$$A = \frac{w_0}{w_A} \delta_0$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

4.2. Modèle d'Hertz pour les corps déformables:

La description du contact de Hertz, obtenue 1880 et publiée en 1881 par Heinrich Rudolf Hertz s'applique au contact de deux particules ou bien contact d'une particule avec un plan.

Le contact d'Hertz se réfère aux contraintes localisées qui se développent lorsque deux surfaces viennent en contact et se déforment sous l'action des forces appliquées. Et le degré de déformation dépend de l'élasticité du matériau en contact qui entraîne une fatigue du matériau et l'apparition de fissures sous la surface [10].

Nous on s'intéressant au contact d'une particule (forme sphérique) et d'un plan :

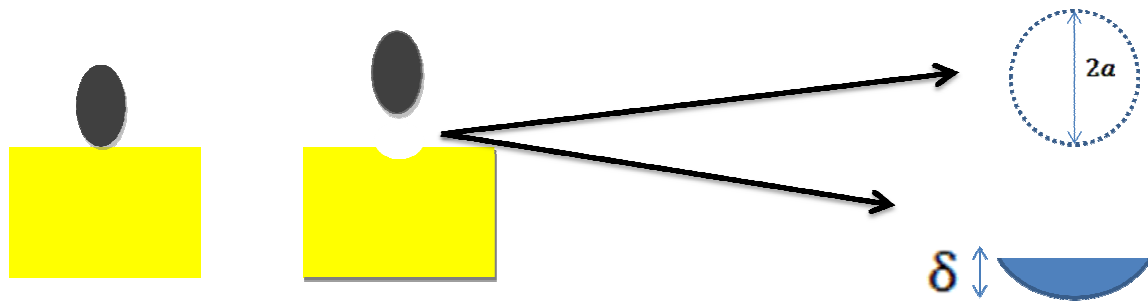


Figure (4.4) : Contact d'Hertz entre une particule solide et un plan.

Donc pour cette situation la surface de contact augmente avec l'enfoncement de la particule sur le plan et qui forme un disque dont le rayon (a) donnée par :

$$a^2 = R \cdot \delta \dots\dots\dots (4.25)$$

Ou :

- a : le rayon de la surface du contact (le rayon du disque formée entre la particule et le plan).
- R : le rayon de la particule solide.

Déformation du matériau

Lors d'un chevauchement le déplacement (δ) avec une aire de contact de rayon (a) avec ($a \ll R$) la déformation est de l'ordre de :

$$\varepsilon = \delta / a \dots\dots\dots (4.26)$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

La région dans laquelle la déformation du matériau est de l'ordre de (δ/a) à un volume de l'ordre de :

$$V = a^3 \dots\dots\dots (4.27)$$

Energie élastique

L'énergie élastique par unité de volume pour une déformation (ϵ) s'écrit :

$$E_{el} = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \dots\dots\dots (4.28)$$

En remplaçant par la relation (4.26) on aura :

$$E_{el} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\delta^2}{a^2}\right) \dots\dots\dots (4.29)$$

Ou :

- E : est le module de Young du matériau.

L'énergie élastique totale s'obtient par le produit de la densité maximale d'énergie élastique par le volume déformé :

$$E_{el_{tot}} = E_{el} \cdot V \dots\dots\dots (4.30)$$

En remplaçant par la relation (4.27), on obtient :

$$E_{el_{tot}} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\delta^2}{a^2}\right) a^3 = \frac{1}{2} E a \delta^2 \dots\dots\dots (4.31)$$

En combinant cette énergie avec la relation (4.25), on obtient :

$$E_{el_{tot}} = \frac{1}{2} E (R)^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{5}{2}} \dots\dots\dots (4.32)$$

Zone de contact

La force s'obtient à partir de l'énergie élastique totale ($E_{el_{tot}}$) en dérivant par rapport au déplacement (δ) :

Avec dérivation de la relation (4.31) donne :

$$F = \frac{dE_{el_{tot}}}{d\delta} = \frac{1}{2} E a 2 \delta$$

Ou:

$$F = E a \delta$$

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

Ensuite en remplace par la relation (4.25), on obtient :

$$F = E (R)^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (4.33)$$

Donc on déduit le déplacement (δ) de la zone de contact :

$$\delta = \left(\frac{F}{(R)^{\frac{1}{2}} E} \right)^{\frac{2}{3}} \dots\dots\dots (4.34)$$

Le rayon de la surface du contact s'exprime par :

$$a = \left(\frac{FR}{E} \right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots (4.35)$$

La méthode DEM est la plus souvent utilisée comme un modèle de description et de compréhension quantitative de phénomènes complexes comme le frottement, ou bien les chocs. Ce travail est un premier pas vers un outil numérique prédictif pour cette classe de problème dont la résolution reste encore aujourd'hui problématique.

5. Méthode des volumes finis (VOF) :

La méthode des volumes finis se base sur la subdivision du domaine d'étude en un nombre finis de volumes de contrôle (maillage) qui convient pour la simulation numérique des différents types d'équations de lois de conservation [11]. Cette méthode a atteint un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires.

Le principe de cette méthode est basé sur une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques. Il consiste essentiellement à :

- La discrétisation du domaine considéré en volume de contrôle.
- La formulation intégrale des équations différentielles aux dérivées partielles.
- Le choix d'un schéma représentant la variation de la quantité physique et l'assemblage des diverses équations.
- Le modèle doit être stable et convergent.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

Les étapes précédentes sont illustrées dans la figure (5.1) suivante :

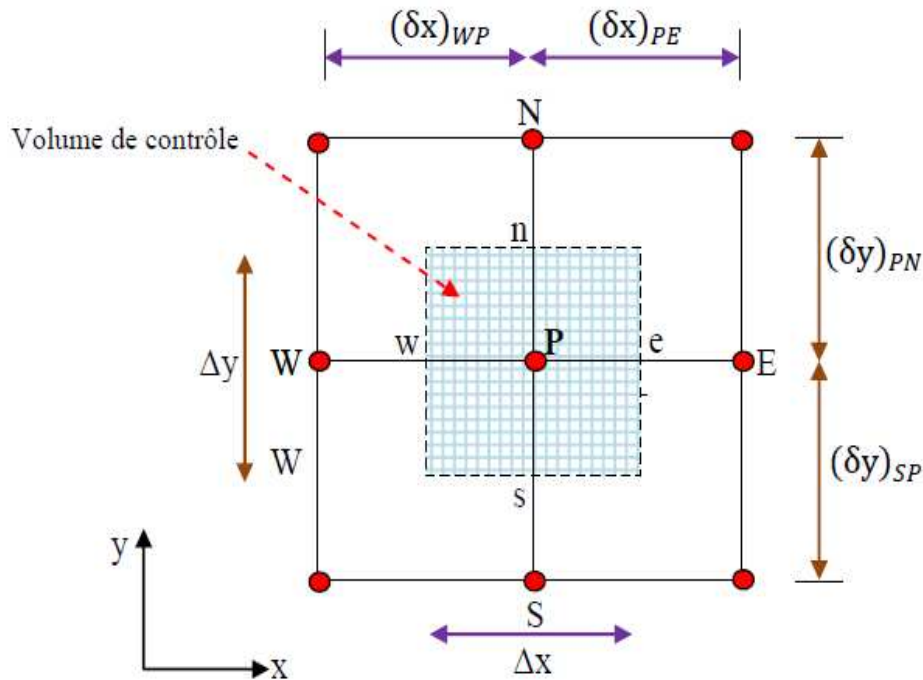


Figure (5.1) : Volume de contrôle typique pour une situation 2D,[11].

Le domaine de calcul est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires, appelés « volume de contrôle », comme indiqué dans la figure (5.1). chacun de ces derniers englobe un nœud dit nœud principal (p), les points E et W (ou bien O) Est et Ouest sont des voisins dans la direction (x), tandis que N et S entourant P est montré par les lignes discontinues. Les faces du volume de contrôle sont localisées aux points e et w dans la direction (x), n et s dans la direction (y).

6. Les différentes étapes de l'approche numérique :

Avant de présenter les résultats numériques obtenus par le code Fluent, on décrit d'abord les étapes principales suivies dans cette simulation.

- **Utilisation de Gambit:** ce logiciel est un mailleur (2D/3D). Il est utilisé pour créer le domaine d'étude (volume ou surface), mailler ce domaine et définir les conditions aux limites du problème physique. Le fichier est ensuite exporté sous le format .msh pour que Fluent puisse le lire.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

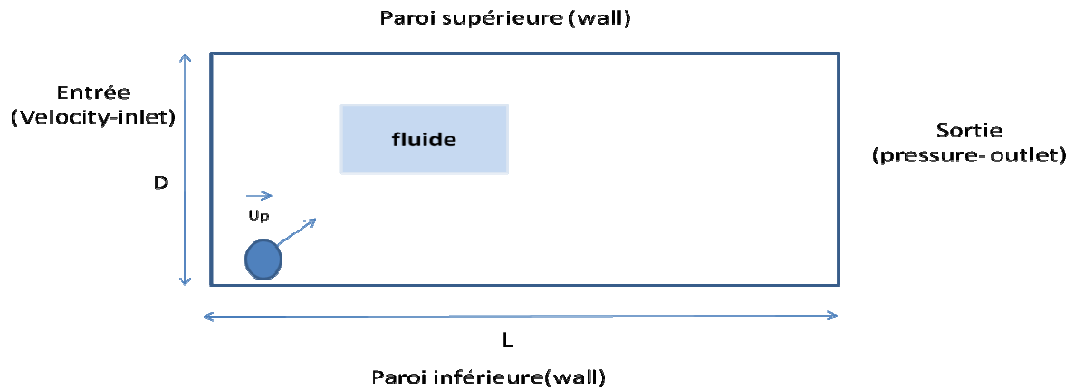


Figure (5.2) : la géométrie et les conditions aux limites.

Le maillage obtenu, conduit à des bons résultats est nécessite une optimisation entre plusieurs paramètres qui influent sur les calculs numériques.

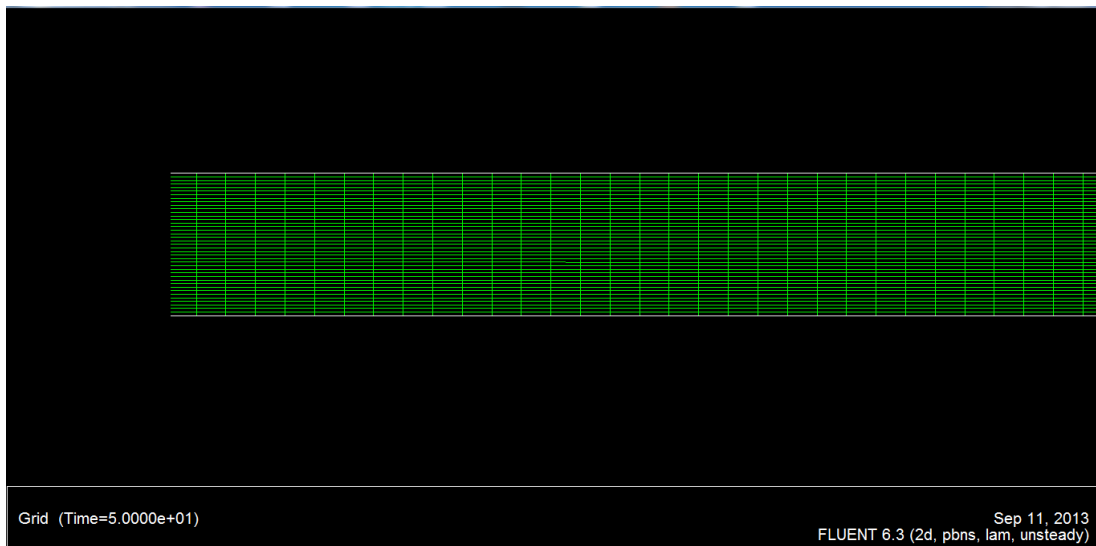


Figure (5.3) : Maillage de la géométrie réaliser dans Gambit.

- **Utilisation de Fluent:** L'utilisation de Fluent est simple. Une fois que le logiciel est lancé, une interface graphique apparait, il suffit de suivre l'ordre des menus de gauche à droite. Après avoir fait toutes les étapes nécessaires pour résoudre le problème, il ne reste qu'à lancer les calculs par le sous-menu iterate. Une fois que les résultats convergent, tels qu'ils sont montrés sur la figure (5.3), on passe à l'injection des particules solides. Les propriétés du matériau solide utilisé peuvent être choisies dans le menu *injections*.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

Les propriétés des matériaux utilisés sont :

Le fluide (eau):

- Densité: 1000 kg/ m^3 .
- La vitesse : 0.41 m/s .

La particule (gypse):

- Densité: 2320 kg/ m^3 .
- Diamètre : 0.003m .
- La vitesse:
 - Suivant OX: 0.45 m/s .
 - Suivant OY: 0.02 m/s .

La conduite (aluminium):

- Diamètre: 0.02m .
- Longueur: 4m .

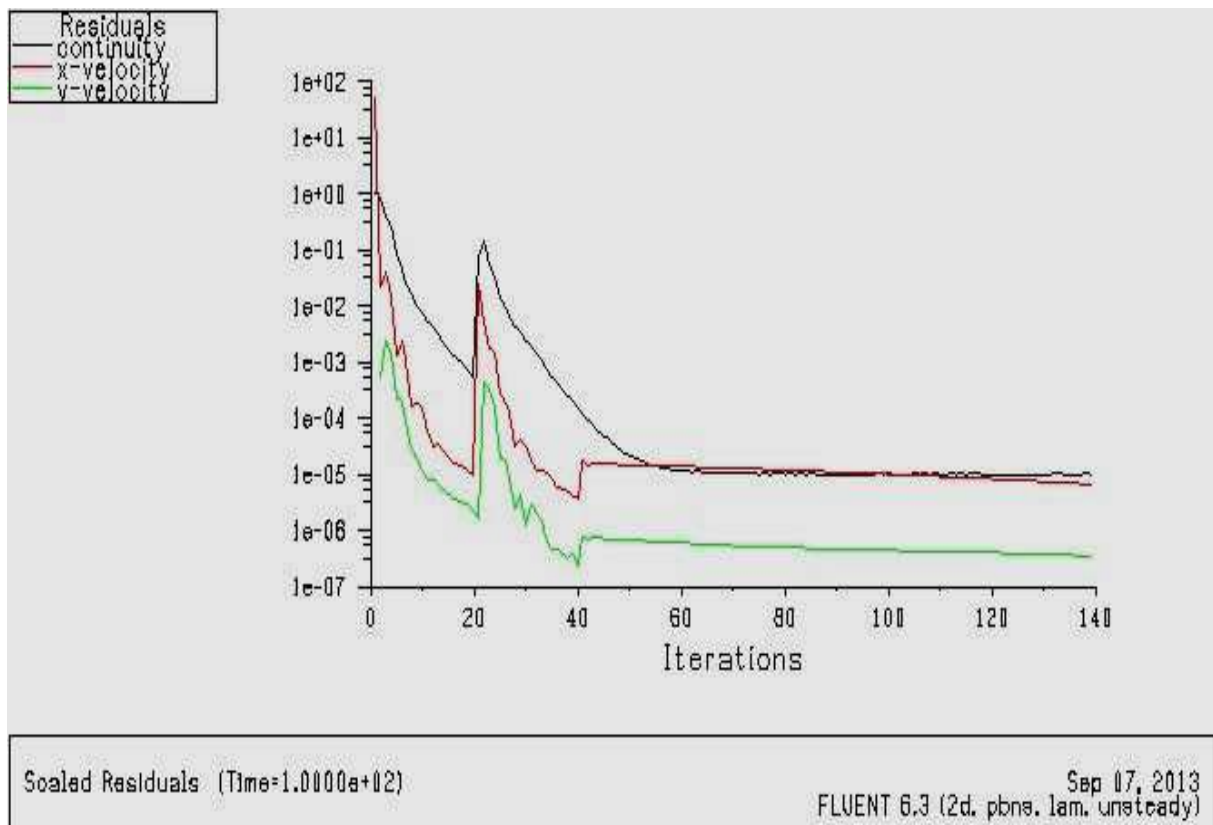


Figure (5.4) : L'évolution des courbes des résidus.

Chapitre IV : Simulation du mouvement d'une particule solide : Couplage DEM-VOF

7. Résultats et discussion :

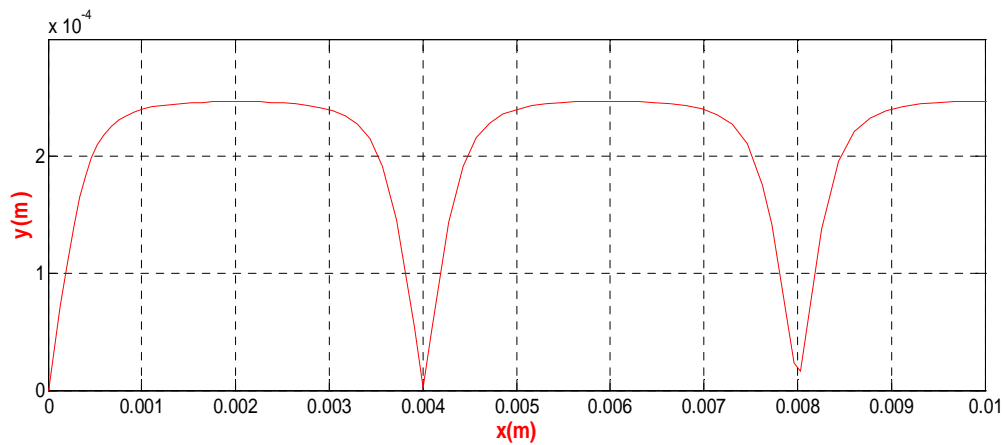


Figure (5.5) : Sauts d'une particule solide.

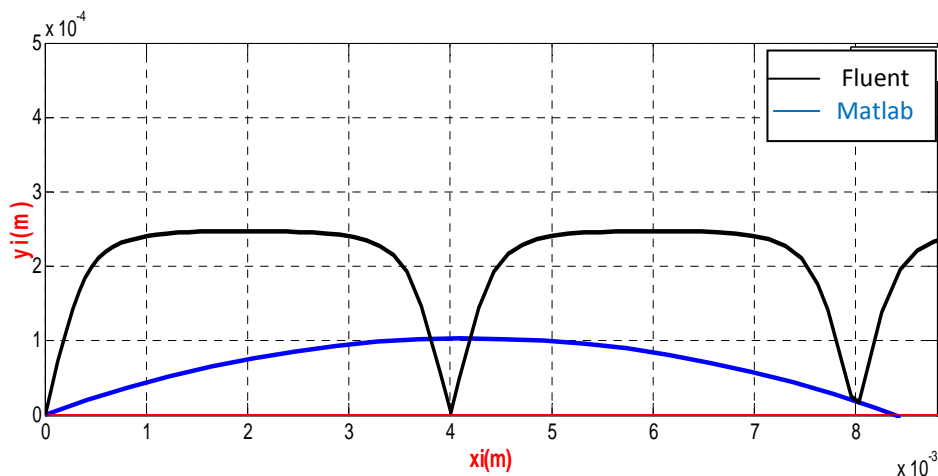



Figure (5.6) : Trajectoire d'une particule solide.

Les figures (5.4) et (5.5) donnent la trajectoire d'une particule solide modélisée par le code de calcul Fluent et notre programme de calcul. Le rebondissement de la particule solide après son interaction avec la paroi de la conduite est bien montré. La comparaison de ces résultats numériques montre que les trajectoires modélisées se distinguent un peu, toutefois, l'allure des deux figures reste comparable.

8. Conclusion :

Dans cette partie, nous avons essayé de modéliser la trajectoire d'une particule solide dans un écoulement d'eau en utilisant le code fluent. Les résultats obtenus, à travers ces simulations, ont certes permis de visualiser cette trajectoire sans toutefois réussir à avoir la concordance avec les résultats obtenus par notre programme de calcul et ceux de Magali. Par conséquent, il serait plus judicieux de faire une étude paramétrique pour donner au problème une dimension beaucoup plus quantitative que qualitative.



Conclusion
Générale

Conclusion générale-perspectives

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la modélisation et la simulation du mouvement d'une particule solide dans un fluide en écoulement. Il est à noter que jusqu'au jour d'aujourd'hui peu de travaux ont été réalisés dans ce domaine. Deux objectifs principaux ont été fixés dans ce présent travail, à savoir:

- La compréhension des mécanismes essentiels qui sont à l'origine du transport solide par charriage.
- La modélisation des trajectoires des particules solides sur des sauts indépendants.

Afin d'atteindre ces objectifs, nous avons commencé notre étude par une recherche bibliographique qui illustre l'ensemble des paramètres et des phénomènes du transport solide. Par la suite nous avons abordé la partie analytique par des développements mathématiques pour le cas d'une conduite inclinée et une conduite horizontale. Le principe est basé sur la projection et l'intégration de l'équation fondamentale de la dynamique.

La résolution numérique des équations mathématiques a été réalisée par le logiciel Matlab. Un programme écrit sous ce logiciel a permis de déterminer les trajectoires des particules sphériques sur des sauts indépendants. Le même travail a été reproduit par le code de calcul Fluent et les résultats obtenus par les deux logiciels ont été confrontés aux résultats expérimentaux de Magali.

La comparaison des résultats a montré une certaine concordance entre les résultats obtenus numériques et expérimentaux. Toutefois un petit écart entre les résultats apparaît dans certaines situations. Cet écart n'est pas trop significatif, il peut être expliqué par le fait que le problème est trop simplifié vu la difficulté de tenir compte de tous les paramètres qui interviennent dans ce type de transport. Par conséquent, il serait plus judicieux de faire une étude paramétrique pour donner au problème une dimension beaucoup plus quantitative que qualitative.

Au terme de ce travail, un certain nombre de perspectives peut être envisagé, à savoir:

- Voir l'influence des interactions entre plusieurs particules solides sur leurs trajectoires.
- Mettre en place un dispositif expérimental permettant de valider les résultats numériques.



Annexe

Caractérisation du champ de vecteur de la vitesse entre deux corps solides indéformable en contact :

Un solide indéformable est un ensemble de points matériels ont on peut calculer, pour chacun, la vitesse et l'accélération en appliquant les définitions de la cinématique du point.

Toutefois, la cinématique d'un solide en mouvement possède des particularités lui permettent une étude simplifiée du mouvement global.

Rappel de mouvement relatif :

Soit (S) un solide indéformable en mouvement par rapport à un repère (r). pour déterminer le vecteur vitesse de tout point (M) de (S) par rapport à (r), $\vec{V}(M \in S / r)$, il suffit de connaître les deux éléments suivants :

- Le vecteur de la vitesse de translation d'un point A de S par rapport à (r) : $\vec{V}(A \in S / r)$.
- Le vecteur vitesse instantanée de rotation de S par rapport à (r) : $\vec{\omega}(S / r)$.

Alors grâce à la relation fondamentale liant les vecteurs vitesses d'un même solide indéformable, on a :

$$\vec{V}(M \in S / r) = \vec{V}(A \in S / r) + \vec{\omega}(S / r) \wedge \overrightarrow{MA}$$

Notre objectif l'étude deux particules solides indéformables on contact, ainsi déterminant le vecteur de la vitesse relative existant entre ces deux particules:

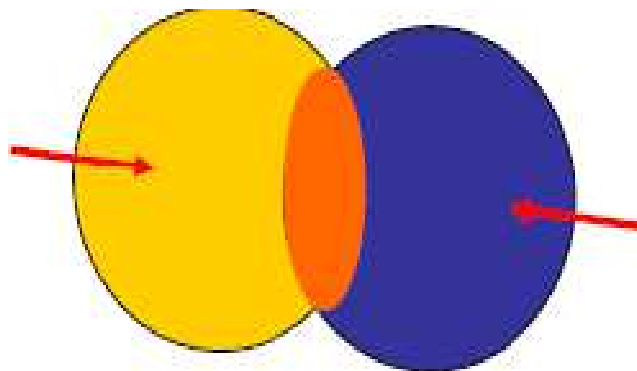


Figure (Annexe A.1): Le contact de deux particules.

Pour bien comprendre on va choisir une autre figure plus d'explication à la vitesse.

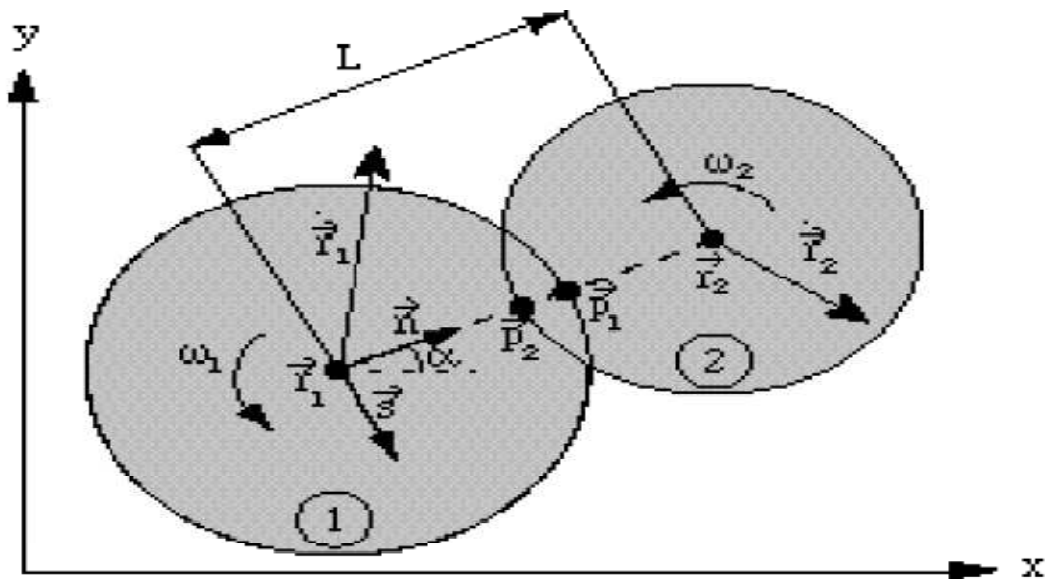


Figure (Annexe A.2) : Les différentes vitesses (translation et rotation) entre deux particules [9].

La figure Annexe A.2 montre les notations utilisées. Soient deux particules solides numérotés 1 et 2 comme indiqué, leur vitesse de translation \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , tandis que leur vitesse de rotation est désignée par \vec{W}_1 et \vec{W}_2 , et est positive dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Chaque particule solide a un rayon (R), une masse (m) et la gravité est désignée par le vecteur \vec{g} , \vec{n} le vecteur unitaire orienté vers l'extérieur.

Alors pour déterminer la vitesse relative en appliquant la relation définie avant pour chaque particule:

- Pour la particule 1 : $\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{W}_1 \wedge R_1 \vec{n}$
- Pour la particule 2 : $\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 + \vec{W}_2 \wedge R_2 \vec{n}$

Alors la vitesse relative entre les deux particules notée (\vec{U}), c'est la différence de vitesse entre la particule 1 et la particule 2 notées respectivement :

$$\vec{U} = \vec{V}'_1 - \vec{V}'_2$$

$$\vec{U} = \vec{V}_1 - \vec{W}_1 \wedge R_1 \vec{n} - \vec{V}_2 - \vec{W}_2 \wedge R_2 \vec{n}$$

D'où :

$$\vec{U} = (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) - (\vec{W}_1 R_1 + \vec{W}_2 R_2) \vec{n}$$

Donc pour caractériser les des vectrices vitesses d'un solide indéformable par rapport à un repère, il suffit de connaître le vecteur de la vitesse d'un point quelconque du solide par rapport au repère et le vecteur de la vitesse instantanée de rotation du solide par rapport au repère.



Bibliographies

Bibliographies

- [1] **Frey Philippe**, étude d'un écoulement diphasique (Fluide/Particules solides), (Philippe.Frey@irstea.fr)
- [2] **Magali Jodeau**, Mémoire de DEA, Cemagref Grenoble, Etude expérimentale des mécanismes de transport solide par charriage torrentiel **Février – Septembre 2004**.
- [3] **Tabias Böhm**, Thèse de doctorat, université Grenoble 1 – Josef Fourier; motion and interaction of a set of particles in a supercritical flow. Mouvement et interaction d'un ensemble de particules dans un écoulement supercritique » **Février 2005**.
- [4] **Nassima Kechroud**, thèse de doctorat, université Ferhat ABBAS de Setif, Caractérisation du Comportement Dynamique de la Phase Continue D'un lit Fluidise – solide par anémométrie laser et analyse temps – fréquence **Juin 2012**.
Yazid Belkhelfa, thèse de doctorat, Institut Nationale des sciences Appliquées de Rouen, Etude de comportement dynamique et du transfert de matière et de chaleur entre des particules sphériques et un écoulement laminaire ou turbulent **Juillet 2008**.
- [5] **François Bigillon**, thèse de doctorat, université Grenoble 1 Joseph Fourier, Etude du mouvement bidimensionnel d'une particule dans un courant d'eau sur Forte pente **Octobre 2001**.
- [6] **Vincent Riche feu**, laboratoire de mécanique et Génie civil université Montpellier 2 – place Eugène bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, Etude par élément 3d du comportement de matériaux granulaires humides Faiblement contraintes, **2006**.
- [7] **Alexandre Martin**, thèse de doctorat, université de Montpellier 2, Ecoulement Confine d'un matériau granulaire en interaction avec un gaz, application à la relocalisation du combustible nucléaire. **Février 2010**.

- [8] **Didier Muller**, thèse de doctorat, école polytechnique Fédérale de Lausanne (Département mathématique), techniques informatiques efficaces pour la simulation de milieux granulaires par des méthodes d'élément distincts. **Juillet 1996.**
- [9] **sylvain Gavaille** , thèse de doctorat , école normale supérieure de Cachan, stratégies de couplage de modèle discret-continu en dynamique explicite **Septembre 2009.**
- [10] **Heinrich Hertz** ,(contact entre corps élastiques) J.Fur reine und angewandte mathematik, vol 92 ,1881 pages (156-171).
- [11] **Menni Younes**, Mémoire de Diplôme de magistère en physique, université Abou Beker Belkaid Telmcen, Etude Numérique comparative entre deux types de chicanes et ailettes (Trapé ziodale et triangulaire) utilisées pour améliorer les performances des capteurs solaires plans à air. **Juin 2012.**

Abbés Azzi, Cours de volumes Finis, USTO-MB, Faculté de génie – Mécanique, Bp1505 El-m'Anouar 31000, Oran.

Email : azzi.abbes@yahoo.fr

Kamal GUERAOU, module 9 : analyse numérique méthode des volumes finis (cours), université Mohammed – AGDAL faculté des sciences Rabat, **2009-2010.**