

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Études

En vue de l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'État en Automatique

Thème

**Etude des méthodes de discrétisation
des régulateurs d'ordre fractionnaire.**

Proposé par : Mr Djennoune

Présenté par :

Dirigé par : Mr Djennoune

Melle LOUDAHI Ouiza

Soutenu le : 15 /07 /2010

Promotion 2010

J'exprime tout d'abord ma gratitude envers le bon Dieu qui m'a permis d'accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes vifs sentiments à mon promoteur Monsieur le professeur Djennoune Saïd qui a accepté de m'encadrer, m'aider et orienter tout au long de ce travail.

Je tiens également à remercier tous mes enseignants durant mon cursus universitaire, en particulier Monsieur Germah Saïd qui m'a aidé durant ce travail.

Je ne manque pas de remercier les membres du jury qui me feront l'honneur de juger mon travail.

En fin, à tous ceux qui m'ont aidé et encouragé de prêt ou de loin dans la concrétisation de ce mémoire, qu'ils retrouvent ici mes plus vifs sentiments.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents, pour leur amour, soutint, encouragement et la confiance totale qu'ils m'ont toujours accordé, qu'ils retrouvent ici l'expression de mon profond sentiment.

A mes chères et merveilleuses sœurs : Sabiha, Hafida, Taous et Djazira,

A mon unique, merveilleux et cher frère Aziz.

A ma chère grand- mère à qui je souhaite longue vie et santé.

A l'esprit de mes grands pères et ma grand- mère.

Au merveilleux mari de ma sœur Hakim.

A ma cousine Naima et à sa famille.

A tous mes amis.

A toute la promotion 2009 / 2010.

Sommaire

Introduction générale :	1
Chapitre I : Etude de la dérivation non entière.	
1-Introduction :.....	3
2-Intégration d'ordre non entier :.....	3
3-Dérivation d'ordre non entier :.....	5
3-1-Définition de Riemann Liouville :.....	6
3-2-Définition de Caputo :.....	7
3-3-Définition de Grunwald-Letnikov :.....	9
4-Modélisation des systèmes à mémoires larges par des modèles fractionnaires :.....	12
4-1-Exemple : Le transfert de chaleur :.....	12
4-2-Types de modèles d'ordre fractionnaire :.....	19
4-2-1-Représentation transfert des systèmes non entiers :.....	19
4-2-2-Représentation d'état des systèmes d'ordre fractionnaire :.....	20
4-2-3-Equation différentielle d'ordre non entier :.....	21
5-Conclusion :.....	25
Chapitre II : Etudes des régulateurs robustes non entiers.	
1-Introduction :.....	26
2-Généralités sur la commande fréquentielle :.....	26
2-1-La stabilité :.....	28
2-2-le degré de stabilité :.....	29
2-3-Comportement du système autour de la fréquence de croisement :.....	31
3-La commande d'ordre fractionnaire :.....	33
3-1-La commande CRONE :.....	33
II-3-1-1-La commande CRONE de première génération :.....	33
II-3-1-2-la commande CRONE de deuxième génération :.....	39
II-3-2-Le régulateur PID fractionnaire :.....	44
II-4-Conclusion :.....	46
Chapitre III : Les méthodes de discrétisation.	
1-Introduction :.....	48
2-Les classes des méthodes des discrétisation :.....	48
3-Etude des méthodes discrétisation directes :.....	49
4-Exemples :.....	52
5-Conclusion :.....	55
Chapitre IV : Applications.	
1-Introduction :.....	56
2-Exemple 1 : Discrétisation d'un intégrateur fractionnaire s^α :.....	56
3- Exemple 2 : Asservissement de position d'un moteur :.....	59
4- Conclusion :.....	62
Conclusion générale :	63

Durant ces dernières années, nous observons un nombre croissant de travaux sur l'application de la dérivation non entière et le calcul fractionnaire dans beaucoup de domaines liés à la modélisation et à la commande des systèmes.

En modélisation, la dérivation non entière permet une meilleure représentation et donc une meilleure compréhension des phénomènes physiques tels que la viscoélasticité, la relaxation, la diffusion et autres phénomènes à mémoire longue. Ces phénomènes se retrouvent dans la plupart des systèmes physiques comme les systèmes thermiques, les lignes de transmission, les systèmes chimiques, qui sont régis par le formalisme classique d'équations différentielles à paramètres répartis. Les opérateurs intégral-différentielle d'ordre non entier permettent une représentation plus compacte mettant en jeu un nombre de paramètres réduit.

Dans la synthèse des systèmes de commande, il est toujours recherché des correcteurs robustes qui sont capables de palier aux insuffisances d'un modèle pour représenter fidèlement le système réel. En effet, le correcteur est souvent déterminé sur la base d'un modèle dit nominal afin de satisfaire un cahier de charge dans lequel sont spécifiées les performances nominales. Pour prendre en compte l'éloignement incertain du modèle nominal de la réalité du système, des précautions, exprimées sous forme de marges de sécurité, (comme par exemple les marges de stabilité), sont prises en compte dans la conception du correcteur. Ces précautions permettent de garantir le maintien des performances lorsque le correcteur est implémenté réellement sur le système. Ce correcteur capable donc de reconduire les performances nominales sur le système réel en présence des incertitudes est dit « robuste ». A titre d'exemple, un PID offrant des marges de gain et des marges de phase suffisantes peut être considéré robuste envers certaines incertitudes comme les variations de phase et de gain sur le système réel.

L'introduction de la dérivation et de l'intégration non entières a ouvert de nouveaux horizons dans la conception de régulateurs robustes. En effet, en plus des paramètres classiques de conception comme les constantes proportionnelle, d'intégration et de dérivation, les ordres non entiers sont des degrés de liberté supplémentaires qui offrent la possibilité d'atteindre des performances en robustesse meilleures. Parmi les régulateurs d'ordre non entier ou fractionnaire proposés dans la littérature, nous pouvons citer le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) et le $PI^\alpha D^\beta$ qui est l'extension du PID classique.

L'un des inconvénients majeur des régulateurs fractionnaires est leur implémentation. Cela à cause de leur caractère de dimension infinie, il est impossible avec les moyens logiciels ou les dispositifs matériels actuels d'implémenter ou de réaliser le régulateur fractionnaire. Pour palier à ceci, des méthodes d'approximation permettant de trouver un équivalent entier (de dimension finie) au régulateur fractionnaire (de dimension infinie) ont été proposées.

D'autre part, il est bien admis de nos jours que l'ordinateur prend une place privilégiée dans la commande des systèmes. L'implémentation d'un régulateur sur ordinateur nécessite l'opération de discrétisation ou d'échantillonnage. Le problème de l'implémentation numérique des régulateurs fractionnaires se pose donc de manière cruciale. Plusieurs travaux ont été dédiés récemment à apporter diverses solutions.

C'est dans cette problématique que s'inscrit notre projet. L'objectif est d'étudier les différentes méthodes de discrétisation des régulateurs fractionnaires, de les illustrer sur des exemples numériques et de les comparer en confrontant leurs résultats de simulation.

Pour mener cette étude, nous avons organisé notre mémoire comme suit :

- Dans le premier chapitre nous donnons les définitions et les propriétés de la dérivation et de l'intégration non entière
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des régulateurs fractionnaires en temps continu.
- Dans le troisième chapitre, nous présentons les différentes méthodes de discrétisation. La méthode directe est étudiée de manière détaillée.
- En dernier chapitre, deux exemples numériques sont traités. La première porte sur la discrétisation d'un intégrateur fractionnaire et le second sur la discrétisation d'un régulateur fractionnaire inséré dans la chaîne d'asservissement en position d'un moteur à courant continu. Des résultats obtenus par des simulations effectuées sous Matlab sont interprétés.
- En conclusion, nous proposons quelques perspectives à notre travail.

1-Introduction :

Bien que le concept de la dérivation d'ordre non entier ne soit pas nouveau, son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernières décennies du 20^{ème} siècle. Durant cette période beaucoup de travaux ont trait à théorie. Dans ce chapitre, on présente les notions de base de ce concept, en essayant d'expliquer le plus simplement possible ces notions qui font l'objet des paragraphes (2) et (3). Dans le paragraphe (4), l'utilisation de la dérivation non entière en automatique, notamment dans la synthèse de régulateurs robustes dans une chaîne d'asservissement est illustrée par un exemple. Les définitions et les propriétés données ci-après sont détaillées dans [1] et [2].

2- Intégration d'ordre non entier :

Soit une fonction réelle $f(t)$, de la variable réelle t , continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

L'intégration répétée k fois de la fonction $f(t)$, également appelée l'intégrale $k^{\text{ième}}$ de $f(t)$, s'exprime par la formule de Cauchy :

$$I^k f(t) = \int_{t_0}^t dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} f(t_1) dt_1 = \frac{1}{(k-1)!} \int_{t_0}^t (t-\ell)^{k-1} f(\ell) d\ell \quad (\text{I-1})$$

k doit être un nombre entier positif à cause de l'utilisation de la fonction factorielle qui n'a de sens que pour des valeurs entières. Pour généraliser la formule de Cauchy (I-1) à un nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction factorielle peut être généralisée aux nombres réels, sous la forme de la fonction gamma (Γ) dite fonction d'Euler définie par :

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} v^{\lambda-1} e^{-v} dv, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{I-2})$$

On obtient alors la fonction d'intégration non entière suivante :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{I-3})$$

L'intégrale unilatérale (I-2) d'ordre réel et souvent appelée intégrale de Riemann-Liouville. Il est intéressant de souligner que dans la relation (I-2), la quantité $\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ vaut 1 lorsque l'ordre d'intégration α est égal à l'unité. L'intégrale classique d'ordre 1 de la fonction $f(t)$ correspond alors à l'aire délimitée par la fonction $f(t)$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[t_0, t]$. Dans le cas où α est non entier, l'équation (I-2) peut être écrite sous la forme :

$$I^\alpha f(t) = p_\alpha(t) \otimes f(t) \quad (1-4)$$

Avec : $p_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et \otimes étant le produit de convolution.

La fonction $p_\alpha(t)$ vient ainsi pondérer différemment chaque valeur de la fonction $f(t)$. L'intégrale d'ordre non entier de la fonction $f(t)$ peut alors être interprétée comme l'aire entre t_0 et t que délimite, par rapport à l'axe des abscisses, la fonction $f(t)$ pondérée par la fonction de la variable t , $p_\alpha(t)$: l'ordre non entier α permet de moduler la pondération de la fonction $f(t)$ à chaque pas d'intégration $d\tau$. Lorsque $\alpha < 1$, la valeur de l'intégrale en un point t est plus influencée par les points de son voisinage que par des points plus éloignés. Dans [1], la fonction de pondération $p_\alpha(t)$ est dénommée facteur d'oubli. La figure (I-1) montre les variations de $p_\alpha(t)$ pour différentes valeurs de α . La transformation de Laplace de l'intégrale d'ordre α de $f(t)$ causale ($f(t)=0$, pour $t \leq 0$), a la même expression que la transformation de Laplace de l'opération d'intégration entière, il suffit de remplacer l'ordre d'intégration entier par l'ordre non entier α . Elle est donnée par :

$$L[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{s^\alpha} L[f(t)] \quad (1-5)$$

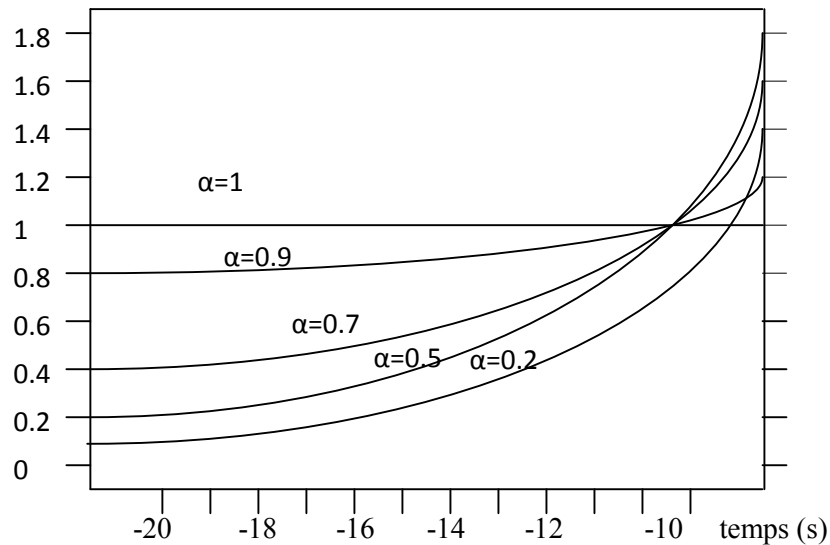


Figure-I-1 : Variation du facteur d'oubli $p_\alpha(t)$ pour $0 < \alpha < 1$.

3- Dérivations d'ordre non entier :

La dérivation d'ordre non entier est la généralisation de la fonction de dérivation entière à des ordres non entiers quelconques. Cette généralisation peut être obtenue à partir de l'intégration non entière (I-2), donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo. Une autre généralisation, basée sur la définition usuelle de la dérivation entière, est proposée par Grunwald-Letnikov. Pour expliquer l'essence des deux premières définitions, considérons le schéma de principe de la figure (I-2). Ce schéma montre que la dérivée de la fonction $f(t)$ à l'ordre non entier α (ici $\alpha=2.3$) compris entre $r-1$ et r (r étant un nombre entier positif, ici $r=3$), peut être déduite en utilisant la définition de l'intégration non entière (I-2) et la fonction de dérivation entière usuelle. On peut alors procéder de deux manières différentes donnant ainsi la définition de Riemann-Liouville et à la définition de Caputo.

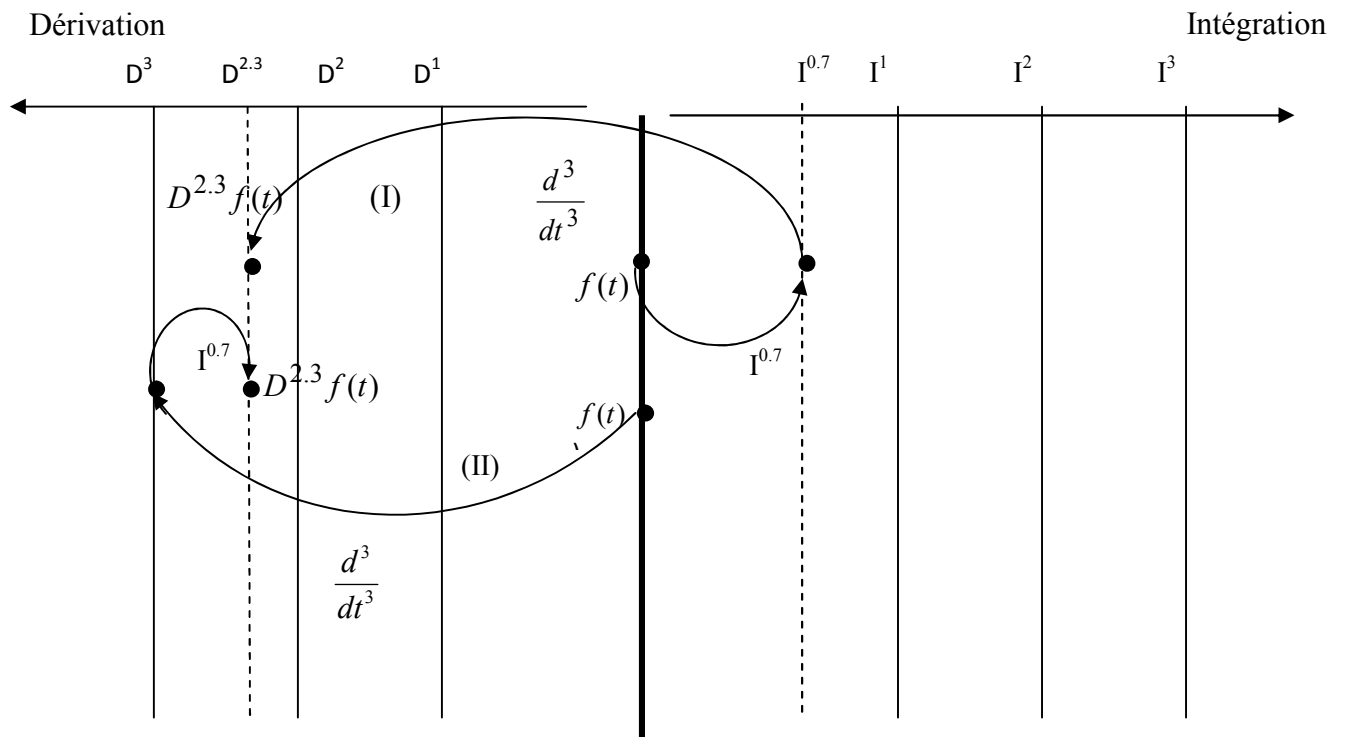


Figure I-2 : Principe de généralisation de l'opération de dérivation à des ordres non entiers.

3-1- Définition de Riemann-Liouville :

La première méthode peut être obtenue en deux étapes :

- intégrer d'abord la fonction $f(t)$ à l'ordre non entier $r - \alpha$.
- dériver le résultat ainsi obtenu à l'ordre entier r .

Cette définition est appelée la définition de Riemann-Liouville, son expression mathématique est donnée par :

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d^r}{dt^r} \left\{ \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} \quad (I-6)$$

Le symbole ${}^R D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée d'ordre non entier α par rapport à t de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Riemann-Liouville.

La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α de la fonction $f(t)$ causale selon cette définition est donnée par :

$$L[{}^R D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{r-1} s^i D^{\alpha-i-1} f(t) \Big|_{t=0} \quad (\text{I-7})$$

Où :

$D^{\alpha-i-1} \Big|_{t=0} f(t)$ représente la dérivée $(\alpha-i-1)$ ème de $f(t)$ lorsque $t=0$.

Ainsi, les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en 0 des dérivées $D^{\alpha-i-1} f(t)$ de $f(t)$, ($i=0, \dots, r-1$).

3-2- Définition de Caputo :

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscolénaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation non entière, elle est aussi obtenue en deux étapes :

- Dériver la fonction $f(t)$ à l'ordre entier r .
- Intégrer le résultat ainsi obtenu à l'ordre non entier $(\alpha-r)$ l'expression mathématique de cette définition est :

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau \quad (\text{I-8})$$

$f^{(r)}(\tau)$ étant la dérivée d'ordre entier r , par rapport à τ , de la fonction $f(\tau)$.

${}^C D_t^\alpha f(t)$ désigne la dérivée d'ordre non entier α de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Caputo. La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre α , par rapport à t , de la fonction $f(t)$ causale selon la définition de Caputo est donnée par :

$$L\left[{}^c D_t^\alpha f(t)\right] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{i=0}^{r-1} s^{\alpha-i-1} D^i f(t)\big|_{t=0} \quad (\text{I-9})$$

Où : $D^i f(t)\big|_{t=0}$ représente la $i^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$ lorsque $t=0$. Dans ce cas, les conditions initiales s'expriment en fonction des valeurs en $\mathbf{0}$ des dérivées entières $D^i f(t)$ de $f(t)$, ($i=0, \dots, r-1$). La définition de Caputo requiert donc que la fonction $f(t)$ ainsi que ses r dérivées successives soient nulles pour $t \leq 0$, ce qui la rend plus restrictive que la définition de Riemann-Liouville, qui exige la seule causalité de $f(t)$. Dans la résolution des équations différentielles d'ordre non entier, la solution obtenue en utilisant la définition de Riemann-Liouville, s'exprime en fonction de valeurs initiales d'ordre non entier $\left(y_0 \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(0) \dots\right)$, alors que l'utilisation de la définition de Caputo permet d'exprimer la solution en fonction des valeurs initiales entières. Dans le domaine de la science physique où les valeurs initiales des dérivées entières sont plus perceptibles que leurs dérivées non entières, la définition de Caputo semble donc plus adaptée dans ce cas. Une autre différence majeure entre les deux définitions apparaît lorsque la fonction à dérivée est une constante. En effet la dérivé à l'ordre non entier d'une constante selon la définition de Riemann-Liouville est une fonction non nulle dépendante de la variable t , alors que sa dérivée non entière selon la définition de Caputo est nulle.

$${}^R D_t^\alpha C = \frac{C(t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad {}^R D_t^\alpha C = 0 \quad (\text{I-10})$$

L'analogie avec la dérivation entière induit plutôt à adapter la définition de Caputo particulièrement pour la modélisation des phénomènes physiques pour lesquels il est plutôt facile de donner un sens aux conditions initiales. Alors que la définition de Riemann-Liouville est couramment utilisée en mathématique en raison de son caractère plus général.

3-3- Définition de Grunwald-Letnikov :

La dérivée généralisée d'une fonction $f(t)$, peut également être obtenue de façon plus naturelle en utilisant la définition entière usuelle. C'est la définition proposée par Grunwald.

Elle est plus adéquate au calcul numérique de la dérivation non entière. En effet, partant de la dérivée première :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (\text{I-11})$$

h : étant le pas de discrétisation, la dérivée seconde donne :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \quad (\text{I-12})$$

Un premier niveau de généralisation à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ donne :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left[(-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \right] \quad (\text{I-13})$$

n : étant un nombre entier, la notation $\binom{n}{j}$ représente la combinaison de j éléments parmi n dont l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (\text{I-14})$$

L'extension de l'équation (I-13) à des valeurs non entières $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de l'ordre de la dérivation étant immédiate.

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\infty} \left[(-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \right] \quad (\text{I-15})$$

La notion $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j! \Gamma(\alpha-j+1)} \quad (\text{I-16})$$

Pour des ordres de dérivation entiers $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la somme de l'équation (I-15) est limitée à $n+1$ termes. La valeur de la dérivée à un instant t est alors une combinaison linéaire des $n+1$ valeurs de la fonction $f(t - jh)$, $j = 0, \dots, n$. La dérivation entière donne ainsi une caractérisation locale de la fonction. Par contre, pour des ordres de dérivation non entiers, la dérivation non entière donne une caractérisation globale de la fonction. La formule de Grünwald s'apprête donc mieux pour l'élaboration d'un algorithme de calcul numérique de la dérivation non entière d'une fonction.

Algorithme de calcul :

Dans le cas où la fonction $f(t)$ est causale, en posant $t = kh$, cette condition se traduit par $f((k - j)h) = 0$ pour $k - j < 0$. Ainsi dans l'opération (I-15), la somme étendue de $j = 0$ à $j = \alpha$ se réduit à la somme étendue de $j = 0$ à $j = K$. Posons alors :

$$c(j) = \frac{1}{h^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \quad (\text{I-17})$$

La loi de récurrence entre les coefficients $c(j)$ et $c(j-1)$ est donnée :

$$\begin{cases} c(0) = \frac{1}{h^\alpha} \\ c(j) = c(j-1) \frac{j - \alpha - 1}{j} \end{cases} \quad j = 1 \dots k \quad (\text{I-18})$$

L'équation (I-15) s'écrit alors sous la forme plus adéquate au calcul numérique sous la forme :

$$Df(kh) = \sum_{j=0}^k c(j) f((k - j)h) \quad (\text{I-19})$$

$D^\alpha f(kh)$ représente la valeur de la dérivée α^{eme} de $f(t)$ à l'instant kh . Cette relation permet de montrer deux caractéristiques particulières de la dérivation non entière. Pour montrer la première, calculons les valeurs de la dérivée d'ordre α d'une fonction $f(t)$ pour les quatre premières valeurs de t échantillonné au pas h . elles sont données par :

$$\begin{cases} D^\alpha f(0) = c(0)f(0) \\ D^\alpha f(h) = c(1)f(0) + c(0)f(h) \\ D^\alpha f(2h) = c(2)f(0) + c(1)f(h) + c(0)f(2h) \\ D^\alpha f(3h) = c(3)f(0) + c(2)f(h) + c(1)f(2h) + c(0)f(3h) \end{cases} \quad (\text{I-20})$$

Plus la variable t augmente, plus le nombre de coefficient à ajouter devient important. De plus, pour calculer la dérivée à $t=kh$, les produits des coefficients $c(j)$ et des valeurs de la fonction $f((k-j)h)$ ne sont pas les mêmes que ceux utilisés pour calculer les valeurs précédentes de la dérivée. Cet algorithme nécessite donc un temps de calcul très important.

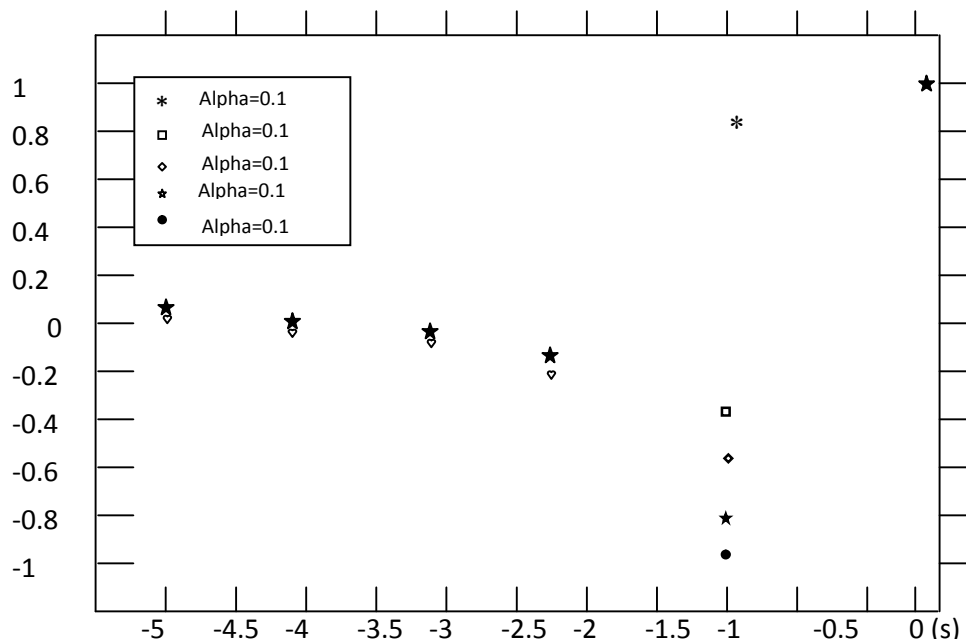


Figure I-3 : Variation des coefficients $c(j)$ en fonction de j pour différentes valeurs de α

Pour montrer l'autre caractéristique de la dérivation non entière, considérons la figure (I-3) qui montre les valeurs relatives des coefficients $c(j)$ par lesquels les valeurs passées de la fonction doivent être pondérées pour calculer la valeur de la dérivée de la fonction à l'instant présent, et ce, pour plusieurs valeurs de l'ordre non entier. Pour des ordres α non entiers, les coefficients de pondération ne sont pas nuls, mais leurs valeurs diminuent au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'instant présent, confirmant ainsi le caractère « facteurs d'oubli »

de ces coefficients. Par contre, pour une valeur entière de α (ici $\alpha=1$), les coefficients de pondération sont tous nuls sauf pour $j=0$ et $j=-1$. En effet, la dérivée d'ordre 1 d'une fonction à l'instant t dépend uniquement de ses valeurs à l'instant t ($j=0$) et l'instant précédent $t-h$

($j=1$). La formule de Grunwald considère l'approximation d'Euler au premier ordre. Pour avoir des résultats précis, il faut que la période d'échantillonnage soit très petite. Cependant, en raison du nombre de calcul et du nombre important de paramètres à stocker à chaque pas (mémoire longue), le choix d'un pas trop faible risquerait une explosion de calcul et une convergence non garantie et ce à cause des erreurs d'arrondi. Les calculs deviennent encore plus complexes dans le cas non commensurable où les $c(j)$ sont des matrices.

4- Modélisation des systèmes à mémoire longue par des modèles d'ordre fractionnaire :

L'intérêt de la modélisation à l'aide des équations différentielles linéaires à paramètres constants utilisant la dérivation entière usuelle est maintenant bien établie grâce à leur capacité à caractériser et représenter le comportement dynamique de la plupart des systèmes physiques. Néanmoins, l'utilisation de ces modèles nécessite parfois de négliger, voire même d'ignorer quelques caractéristiques du phénomène à modéliser. Cela est le cas d'une large classe de systèmes physiques mettant en jeu des phénomènes à mémoire longue, diffusifs, de viscoélasticité ou de relaxation. . Lorsque ces caractéristiques doivent être prises en compte, cela conduit à des modèles entiers de très grande dimension utilisant ainsi un nombre important de paramètres et de variables d'état. Ces phénomènes sont rencontrés dans beaucoup de domaines de la science et de la technologie (systèmes thermiques, mécaniques chimiques, etc.). Pour leur modélisation adéquate, on doit alors faire appel aux opérations de dérivation et d'intégration d'ordre non entier (ou fractionnaires).

4-1-Exemple : Le transfert de chaleur [3]:

Les phénomènes de diffusion ont été identifiés par des modèles non entiers dont les ordres sont fixés à priori égaux à 0,5, ou par modèles fractionnaires d'ordre commensurables, ce qui limite le degré de liberté des modèles considérés, et exige un certain nombre de paramètres pour la description du phénomène. La simulation du transfert de chaleur à l'interface de diffusion est basée sur la méthode numérique des différences finies qui permet de générer les données temporelles et fréquentielles indépendamment du caractère fractionnaire, et permet ainsi l'analyse des réponses temporelles et harmoniques ainsi que la validation des modèles estimés.

Equation de diffusion de chaleur :

Le transfert de chaleur idéalisé à une dimension est régi par l'équation suivante (Equation de la chaleur) [4]

$$\frac{\Phi T(r,t)}{\Phi t} = \frac{\alpha_c}{r^p} = \frac{\Phi}{\Phi r} \left(r^p \frac{\Phi T(r,t)}{\Phi r} \right) \quad \text{quand } 0 < R < \infty \text{ et } t > 0$$

$$\alpha_c = \frac{\lambda_c}{\rho c_p}$$

Où : α_c représente le coefficient de diffusivité.

R est l'abscisse du point de mesure.

λ_c est la conductivité thermique du milieu, supposée constante.

C_p représente la chaleur massique du milieu

ρ représente la densité massique du milieu

La géométrie du matériau considéré est caractérisée par la variable p telle que :

$p = 0$ pour une géométrie plane.

$p = 1$ pour une géométrie cylindrique

$p = 2$ pour une géométrie sphérique

Etude de transfert de chaleur dans un mur plan :

L'équation précédente dans le cas du milieu fini plan de section s_m correspond à

$p = 0$, et se simplifie conformément à :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Phi T(r,t)}{\Phi t} = \alpha_c \frac{\Phi^2 T(r,t)}{\Phi r^2} \quad \text{pour } 0 < r < \infty \text{ et } t > 0 \\ -\lambda_c s_m \frac{\Phi T(r,t)}{\Phi r} = \Phi(r,t) \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } t > 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-21})$$

$$T(r,t) = 0 \quad \text{quand } 0 < r < \infty \text{ et } t = 0$$

Considérons la configuration simple d'un mur plan homogène de longueur L soumis à l'une des extrémités A à un flux de chaleur $\Phi(0,t)$ (en l'abscisse $x = 0$), la face B, à l'autre extrémité, transmet la chaleur au milieu ambiant à travers une résistance thermique R : $\Phi(L,t) = T(L,t)/R$; la température $T(x,t)$ du mur est supposée uniforme en chaque point du plan parallèle aux faces A et B de la paroi. L'objectif étant de déterminer la fonction de transfert $H(s) = Y(s)/U(s)$ du système thermique. Ce système a pour entrée le flux de chaleur $\Phi(0,t) = u(t)$ sur la face A et pour sortie la température $T(x,t) = y(t)$. Le système thermique étant un système spatialement distribué, deux cas d'étude doivent être distingués : le premier caractérisé par l'abscisse $x = 0$ définit l'interface de diffusion thermique du milieu soit : $H(s) = T(0,s)/\Phi(0,s)$, le second correspond à l'étude du transfert défini en un point situé à une distance x de la surface d'application du flux de chaleur $H(s) = T(x,s)/\Phi(0,s)$.

Les conditions aux limites suivantes sont considérées :

- Sur la face A : $\Phi(0,s) = u(t)$.
- Sur la face B : $\Phi(L,t) = T(l,t)/R$.

La transformation de Laplace de l'équation (I-21) conduit à la solution de la forme :

$$T(x,s) = p(s)e^{\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha_c}}\right)} + q(s)e^{\left(x\sqrt{\frac{s}{\alpha_c}}\right)}$$

Les termes $p(s)$ et $q(s)$ dépendant des conditions initiales aux limites ; la solution analytique développée en annexe, lorsque l'on considère comme hypothèse simplificatrice que la température est égale à zéro ($T(l,t) = T_{ext} = 0$), a pour expression [4], [5] :

$$H_p(x,s) = \frac{\sinh\left((l-x)\sqrt{\frac{s}{\alpha_c}}\right)}{s_m \lambda_c \sqrt{\frac{s}{\alpha_c}} \cosh\left(l\sqrt{\frac{s}{\alpha_c}}\right)} \quad \text{(I-22)}$$

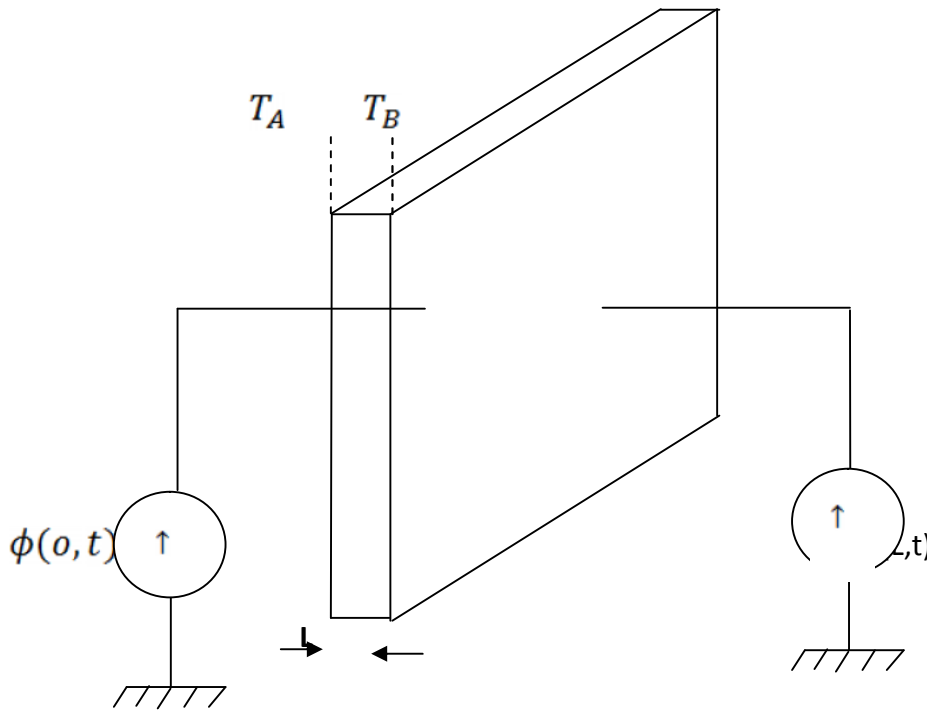


Figure I-4 : Transfert de chaleur dans un mur plan

Etude de l'interface de diffusion :

Le modèle étant développé autour d'un point de fonctionnement, l'expression de a fonction de transfert dans le cas de l'interface de diffusion ($x=0$) se ramène à celle de $H_p(s)$

exprimée comme suit :

$$H_p(s) = \frac{\tanh(l \sqrt{\frac{s}{\alpha_c}})}{S_m \lambda_c \sqrt{\frac{s}{\alpha_c}}}$$

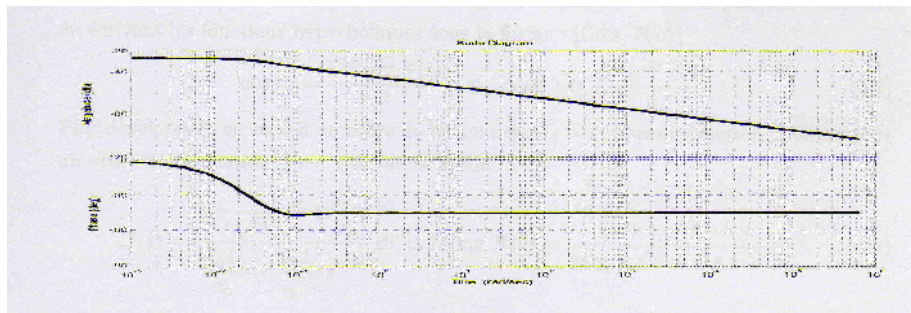


Figure I-5 : Diagrammes de Bode théorique

L'étude de l'interface de diffusion montre les comportements asymptotiques suivants :

$$\lim_{s \rightarrow 0} H_p(s) = \frac{L}{S_m \lambda_c} \frac{1}{\left(1 + \frac{L^2}{\alpha_c} S\right)}$$

Et

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H_p(s) = \frac{L}{S_m \lambda_c} \sqrt{\frac{\alpha_c}{s}}$$

Cette relation exprime un résultat bien connu : en hautes fréquences (régime transitoire $t \rightarrow 0$), l'interface de diffusion agit comme un intégrateur fractionnaire d'ordre 0,5 et les diagrammes de Bode du système en figure (I-6) si dessus montrent une pente de 10dB/décade et une phase de -45° en régime transitoire, et le modèle devient d'ordre entier pour les basses fréquences ($t \rightarrow \infty$). La réponse indicielle représentée dans la figure suivante montre un gain statique : $g_{sp} = 0,045$, et le régime permanent est atteint au bout de $t_s = 150$ s, ce qui qualifie le système au système relativement lent.

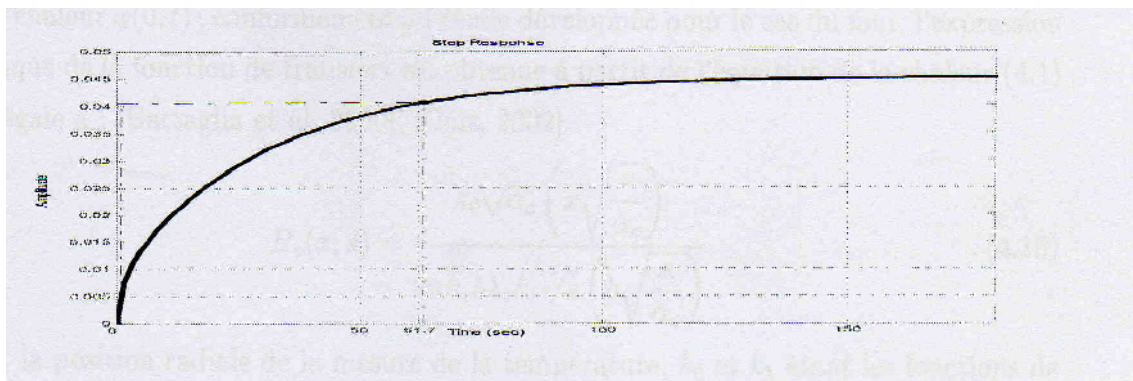


Figure I-6 : Réponse indicielle pour une géométrie plane**Représentation d'état fractionnaire de l'interface de diffusion :**

Dans le but de déterminer le modèle d'état théorique de l'interface de diffusion, les fonctions hyperboliques dans l'équation (I-22) sont remplacées par leur développement en séries. L'approximation obtenue est un modèle entier qui ne prend pas en compte le comportement fractionnaire du régime transitoire. Celui-ci peut être retrouvé en écrivant les fonctions hyperbolique sous la forme : [8]

$$\cos h z = \frac{e^{-z}(e^{2z}+1)}{2} \text{ et } \text{Sin } h z = \frac{(e^{2z}-1)}{2}$$

Ensuite en développant en série à un ordre de troncation $N_d > 1$; l'approximation obtenue pour un ordre $N_d = 2$ est de la forme :

$$h(s) = \frac{1 + \frac{l}{\sqrt{\alpha_c}} \sqrt{s} + \frac{l^2}{\alpha_c} s}{\frac{\lambda_c l}{\alpha_c} s + \frac{\lambda_c l^2}{\alpha_c^2} s^2}$$

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0,5} + b_2 s}{a_0 + a_1 s^{0,5} + b_0 + s^{3/2} + b_0 + a_2 s} \quad \text{avec } a_0 = a_1 = 0$$

Celle-ci conduit au modèle d'état fractionnaire d'ordre 0,5

$$\text{Tel que : } \begin{cases} D^{0,5} = A x(t) + B \\ Y(t) = C x(t) \end{cases}$$

En conclusion, l'étude théorique du transfert de chaleur dans une géométrie plane à montré que ce système peut être qualifié de système relativement lent, et que sa modélisation nécessitait deux modèles différents : l'un entier décrivant le régime permanent et l'autre fractionnaire pour le régime transitoire.

$$\text{Où } S^{(\alpha)}I_n = \text{diag} [s^{\alpha_1} \quad s^{\alpha_2} \quad \dots \quad s^{\alpha_n}]$$

Lorsque les matrices A, B, C possèdent les formes particulières qui rappellent la forme canonique commandable des modèles entiers données sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (I-23)$$

$$c = [c_1 c_2 \dots \dots \dots c_{n-1} c_n]$$

$$\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \dots \dots \alpha_{n-1} \alpha c_n]$$

Dans ce cas le modèle transfert test donné par:

$$G(s) = \frac{C_1 S^{B_1} + C_2 S^{B_2} + \dots \dots \dots + C_i S^{B_i} + \dots \dots \dots C_n S^{B_n}}{S^{\tilde{\alpha}_n} + a_1 S^{\tilde{\alpha}_{n-1}} + \dots \dots \dots a_i S^{\tilde{\alpha}_{n-i}} + \dots \dots \dots a_{n-2} S^{\tilde{\alpha}_2} + a_{n-1} S^{\tilde{\alpha}_1} + a_n}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = 0, B_2 = \alpha_1, B_i = \sum_{j=1}^{i=n} \alpha_j, \quad , B_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \\ \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1, \tilde{\alpha}_2 = \alpha_1 + a_2, \tilde{\alpha}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n=i} \alpha_j, \quad , \tilde{\alpha}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \end{array} \right.$$

4-2- Types de modèles d'ordre fractionnaires

4-2 -1- Représentation transfert des systèmes non entiers :

Lorsque les conditions initiales sont nulles, les transformations de la place de $D^{\alpha_i}y(t)$ et $D^{\beta_j}u(t)$ sont respectivement $S^{\alpha_i}y(s)$ et $S^{\beta_j}u(s)$. $y(s)$ et $u(s)$ étant les transformations de Laplace respective de $y(t)$ et $u(t)$.

En calculant la transformation de Laplace de l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i}y(t) + a_0 y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j}u(t) + b_0 u(t)$$

On obtient la fonction de transfert du système non entier donnée par :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j} + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} + a_0}$$

Dans le cas des systèmes d'ordre commensurable α_i , cette fonction de transfert s'écrit simplement :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j s^{j\alpha} + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha} + a_0} = \frac{\sum_{j=1}^m b_j (s^\alpha)^j + b_0}{\sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha i} + a_0}$$

Dans le cas général des systèmes non entiers multi variables, ayant l entrées et q sorties, décrit par le système d'équation différentielles d'ordre non entier, la matrice fonction de transfert s'écrit :

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{u_1}(s) & \cdots & G_{il}(s) \\ \vdots & \ddots & \\ G_{q1}(s) & \cdots & G_{ql}(s) \end{bmatrix}$$

Où chaque $G_{ij}(s)$ est une fonction de transfert.

4-2-2 Représentation d'état des systèmes non entiers

Le modèle d'état d'un système d'ordre non entier, multi variable continu invariant est défini , comme dans le cas entier, par deux équations :

- Une équation d'état dans laquelle chaque variable d'état $x_i(t)$ est dérivée à un ordre non entier α_i . dans cas on parle de la représentation d'état généralisée. Dans les systèmes commensurables, tous les états $x_i(t)$ sont dérivés à un même ordre non entier α .
- Une équation de sortie qui est une combinaison linéaire des états, comme dans le cas entier.

Le modèle d'état s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}(x) = Ax + BU \\ Y = Cx + DU \end{cases} \quad (\text{I-24})$$

$$D^{(\alpha)}(x) [D^{\alpha_1} x_1, D^{\alpha_2} x_2, \dots, D^{\alpha_n} x_n]$$

Dans le cas des systèmes commensurables le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{cases} D^{(\alpha)}(x) = Ax + BU \\ Y = Cx + DU \end{cases} \quad (\text{I-25})$$

$$D^{\alpha} x = D^{\alpha} [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (\text{I- 26})$$

La relation entre les matrices du modèle d'état (I-42) et le modèle transfert $G(s)$ peut être facilement calculée en utilisant la transformation de Laplace et en considérons les conditions initiales nulles. On obtient :

$$G(s) = C \left[(s^{(\alpha)} I_n - A)^{-1} B \right] + D \quad (\text{I-27})$$

4-3 – Equation différentielle d'ordre non entier :

De manière générale, un système d'ordre non entier mono variable, linéaire à temps invariant est décrit par une équation différentielle généralisée de la forme :

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) + a_0 y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) + b_0 u(t) \quad (\text{I-28})$$

D^{α} Désigne l'opérateur de dérivation d'ordre α . Les ordres de dérivation α et β sont des nombres réels positifs qu'on suppose, sans perte de généralité, tels que :

$$0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \text{ et } 0 < B_1 < B_2 < \dots < B_m$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (I-21) est :

$$D_{ne}(\lambda) \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{\alpha_i} + a_0 = 0$$

Cette équation est de forme polynomiale mais avec des puissances non entières. Nous donnons ci-dessous la méthode de résolution.

Calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier :

Le calcul des racines d'un polynôme d'ordre non entier donné par

$$D_{ne}(S) = a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 = 0$$

doit être considéré avec beaucoup de précautions en raison du caractère non entier des puissances de la variable s qui implique la multiformité de l'équation. En effet, si la variable

complexe s est écrite sous la forme $s = |s|e^{j\delta}$ avec $\delta = \delta_0 + 2k\pi$, il est possible d'exprimer une quelconque puissance de s par :

$$S^{\alpha_i} = |s|e^{j(\delta_0 + 2k\pi)\alpha_i} = |s|^{\alpha_i} e^{j\alpha_i\delta_0} e^{j2\alpha_i k\pi} \quad (\text{I-29})$$

- Lorsque α_i est un nombre entier, $e^{j2\alpha_i k\pi} = 1 \forall k$, ce qui exprime que S^{α_i} a un seul sens, traduisant ainsi l'uniformité du polynôme (I-24), dans ce cas entier.

- Dans le cas où α_i est nombre réel, le terme $e^{j2\alpha_i k\pi}$ dépend de k , exprimant que S^{α_i} a plusieurs sens et traduit ainsi la multiformité du polynôme non entier (I-24). Pour rendre cette équation uniforme, il faut éviter que l'argument de s décrive un tour complet, ce qui est possible en effectuant une coupure du plan complexe. Cependant, une telle coupure doit être effectuée suivant l'axe IR pour répondre au caractère indéfini de S^{α_i} pour $s \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. la coupure ainsi définie impose la détermination] $-\pi, \pi[$ pour l'argument de S et est bien conforme à la condition sur S , soit $S \in \mathbb{R}^-$ (Figure I-4).

Principe de la méthode :

On présente dans ce qui suit la méthode proposée par Oustaloup [1] pour résoudre le polynôme non entier (I-24), dont le principe consiste à remplacer les puissances non entières α_i par des nombres fractionnaires de la forme :

$$\alpha_i = \frac{r_i}{q} + e_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (\text{I-30})$$

q et r_i sont des nombres entiers et e_i est l'erreur de rationalisation de la puissance réelle α_i

L'entier q est calculé de sorte que la somme des erreurs de rationalisation e_i soit minimale et que les valeurs des entiers r_i aient des valeurs admissibles. Ainsi, le polynôme non entier $D_{ne}(s)$ (I-24) devient un polynôme fractionnaire et peut être écrit sous la forme :

$$D_f(s) = a_n s^{r_n/q} + a_{n-1} s^{r_{n-1}/q} + \dots + a_1 s^{r_1/q} + a_0 = 0 \quad (\text{I-31})$$

En effectuant le changement de variable :

$$P = s^{1/q} \quad (\text{I-32})$$

Le polynôme fractionnaire (I-27) devient un polynôme entier donné par :

$$D(p) = a_n P^{r_n} + a_{n-1} P^{r_{n-1}} + \dots + a_1 P^{r_1} + a_0 = 0 \quad (\text{I-33})$$

Ce polynôme possède alors r_n racines simples ou multiples. Connaissant ces racines, on peut, grâce au changement de variable (I-28), déduire les racines de polynôme fractionnaire $D_f(s)$ de l'équation (I-27) qui sont les approximations des racines du polynôme non entier (I-24). En effet, si p_i est une racine du polynôme entier $D(p)$ elle peut être écrite sous la forme

$$P_i |P_i| e^{j \arg(p_i)} \quad (i = 1, \dots, r_n) \quad (\text{I-34})$$

(p_i) et $\arg(p_i)$ sont respectivement le module et l'argument de la racine p_i les racines du polynôme fractionnaire $D_f(s)$, notées $S = (s) e^{j \arg(s)}$ correspondantes sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} |s| = |p_i|^q \\ \arg(s) = q \arg(p_i) + 2qk\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ -\frac{1}{2q} - \frac{\arg(p_i)}{2\pi} < k < \frac{1}{2q} - \frac{\arg(p_i)}{2\pi} \end{array} \right. \quad (\text{I-35})$$

La troisième relation de (I-31) permet de vérifier l'existence ses racines du polynôme fractionnaire, les deux premières relations permettent de les calculer. Il faut noter alors que :

- Lorsque $D(p)$ possède une racine réelle négative, en raison de la coupure du plan complexe, il ne lui correspond aucune racine de $D_f(s)$ donc de $D_{ne}(s)$, c'est ce que l'on appelle les racines multi modes aperiodiques.

- Une même racine de $D(p)$ peut engendrer plusieurs racines de $D_{ne}(s)$. (lorsque plusieurs valeurs de k vérifient la condition de l'équation (I-31)) d'un autre côté, une racine de $D(p)$ peut n'engendrer aucune racine de $D_{ne}(s)$ (lorsqu'il n'y a aucune valeur de k qui vérifie cette même condition).

On peut alors tirer les conclusions suivantes (caractéristiques des polynômes non entiers)

- Le nombre de racines d'un polynôme d'ordre non entier ne peut être déterminé au préalable ni à partir de la puissance la plus élevée de sa variable, ni à partir du nombre de ses coefficients.
- un polynôme non entier, peut avoir un nombre de racine beaucoup plus grand que le polynôme entier qui lui correspond par le changement de variable $p = S^\alpha$, comme il peut en avoir aucune alors que le polynôme entier en possède r_n .
- de ces deux conclusions on peut en déduire une autre caractéristique propre aux polynôme non entier . on ne peut pas reconstituer le polynôme non entier à partir de ces racines comme dans le cas des polynômes entiers.

5- Conclusion :

En automatique, on utilise cet outil de dérivation et intégration non entières pour synthétiser des correcteurs d'ordre fractionnaire, tels que : le correcteur CRONE qui se divise en trois générations, le correcteur PID fractionnaire, etc. L'étude de ces correcteurs fera l'objet du chapitre suivant.

1-Introduction

Dans une chaîne de commande, le système à commander peut être représenté par un modèle dynamique fractionnaire ou par un modèle classique d'ordre entier. Dans les deux cas, la commande par régulateur fractionnaire consiste à insérer un correcteur de type fractionnaire. Dans ce présent mémoire, on s'intéresse exclusivement à la commande d'un procédé d'ordre entier linéaire monovarié par des correcteurs d'ordre non entier et ce dans le but de relever l'apport de ces derniers, notamment en matière de robustesse.

La synthèse des correcteurs non entiers se base sur des spécifications qui sont relevées de la théorie de la commande fréquentielle classique, et qui doivent refléter aussi bien la stabilité que la robustesse du système en boucle fermée. Ces performances sont rappelées dans ce chapitre.

2-Généralités sur la commande fréquentielle

La figure (II-1) représente le schéma fonctionnel d'une commande automatique standard, où $C(s)$ et $P(s)$ sont respectivement les fonctions de transfert du correcteur et du procédé à commander.

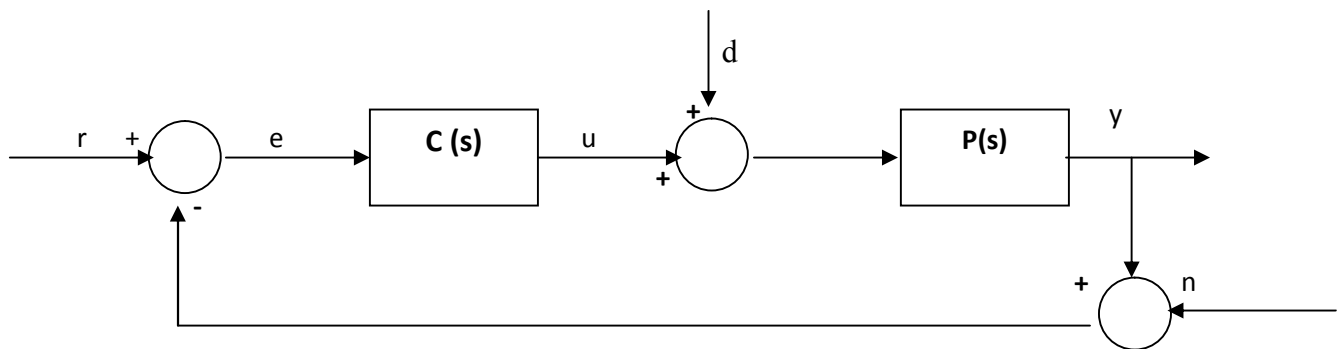


Figure II-1 : description de la boucle de commande.

Différentes entrées agissent sur le système en boucle fermée : r : représente la consigne, d : la perturbation de charge, n : le bruit de mesure. La grandeur à commander y , l'écart e ainsi que l'entrée de commande u sont les signaux d'observation présentant un intérêt pour l'analyse.

Le signe "-" associé au bruit de mesure a été introduit uniquement pour simplifier l'écriture des relations.

Soit $L(s)$ la fonction de transfert de la boucle ouverte

$$L(s) = C(s) P(s) \quad (\text{II-1})$$

Comme le système est linéaire, les relations fondamentales entre les entrées r , d et n , la sortie y et les grandeurs internes e et u , peuvent être exprimées à l'aide des fonctions de transfert.

Soit $R(s)$, $E(s)$, $D(s)$, $Y(s)$ et $N(s)$ les transformées de Laplace respectives de $r(t)$, $e(t)$, $u(t)$, $d(t)$, $y(t)$ et $n(t)$; les relations suivantes peuvent être obtenues à partir du schéma de la figure (II-1) :

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} R(s) + \frac{P(s)}{1+L(s)} D(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)} N(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)} R(s) - \frac{P(s)}{1+L(s)} D(s) - \frac{1}{1+L(s)} N(s) \quad (\text{II-2})$$

$$U(s) = \frac{C(s)}{1+L(s)} R(s) - \frac{L(s)}{1+L(s)} D(s) + \frac{C(s)}{1+L(s)} N(s)$$

On remarque que plusieurs fonctions de transfert intervenant dans les équations (II-2). Elles sont identiques et sont dénommées « les quartes fonctions de sensibilité ». Elles permettent de décrire entièrement les relations entre les grandeurs d'intérêt du système de commandes :

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \text{Fonction de sensibilité complémentaire}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \quad \text{Fonction de sensibilité}$$

$$P(s)S(s) = \frac{P(s)}{1+L(s)} \quad \text{Fonction de sensibilité de charge} \quad (\text{II-3})$$

$$C(s)S(s) = \frac{C(s)}{1+L(s)} \quad \text{Fonction de sensibilité de bruit}$$

Avec : $T(s)+S(s)=1$

Ces fonctions de transfert possèdent des propriétés intéressantes pour la conception du système de commande, tout particulièrement les fonctions de sensibilité $S(s)$ et de sensibilité complémentaire $T(s)$. En effet, le module de S à $s=0$ quantifie le rejet de la perturbation de charge ainsi que la sensibilité à de petites variations des paramètres de procédé. Le module de $T(s)$ quantifie la réponse à la consigne ainsi qu'au bruit de mesure.

2-1- Stabilité :

La stabilité est une propriété fondamentale que doit satisfaire toute commande automatique, sa perte peut mettre le système en risque. Elle est définie comme suit :

Définition 1 : un système est stable si à une entrée bornée il fait correspondre une sortie bornée.

Définition 2 : un système est stable si sa réponse libre tend vers zéro quant le temps t tend vers l'infini.

Un système asservi de fonction de transfert en boucle ouverte $L(s)$ est stable si son polynôme caractéristique $1+L(s)$ ne possède pas de racines à partie réelle positive. Mais, ce critère ne peut pas être utilisé lorsque la conception de régulateur doit se faire dans le domaine fréquentiel. Le critère de Nyquist est plus indiqué puisqu'il est basé sur le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(s)$. Le critère de Nyquist consiste en une interprétation de principe de l'argument. Le contour de Nyquist \mathcal{C} parcourt l'axe imaginaire du plan complexe de $-j\infty$ à $+j\infty$ ainsi qu'un demi cercle de rayon infini qui englobe le demi-plan droit du plan complexe. Lorsque s ($s=\sigma+j\omega$) parcourt une fois le contour \mathcal{C} , $L(s)$ décrit une courbe appelée diagramme de Nyquist. Le critère de Nyquist peut alors être formulé de la manière suivante :

Soit m le nombre total de zéros instables de la boucle ouverte. Le système en boucle fermée est BIBO stable si et seulement si le diagramme de Nyquist évite le point critique -1 et l'encercle exactement m fois dans le sens trigonométrique géométrique direct. Dans le cas des systèmes à déphasage minimal, le critère se simplifie. Le système est BIBO stable si le lieu de Nyquist de $L(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ n'encercle pas le point critique $(-1,0)$ du plan complexe.

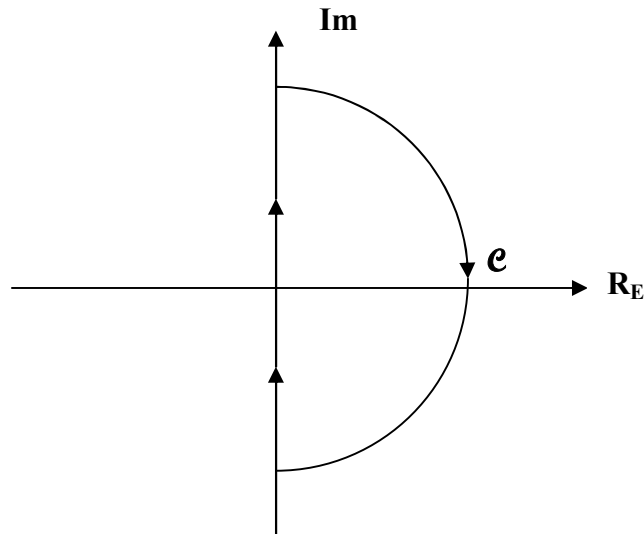


Figure II-2 : Contour de Nyquist

2-2 Degré de stabilité :

Si la position de lieu de la réponse fréquentielle en boucle ouverte vis-à-vis du point critique détermine la stabilité de la boucle fermée, la distance minimale par rapport à ce point va caractériser la « réserve de stabilité » ou « la robustesse en stabilité » vis-à-vis des incertitudes du modèle du procédé à commander. Quantitativement, cette notion s'exprime par le « degré de stabilité » du système, qui peut être mesurée par les paramètres suivants :

- **Les marges de stabilité :** que constituent les marges de gain et de phase, et quantifient la distance au point -1

Soit ω_{180} la fréquence où la phase de $L(j\omega)$ est de -180° , la marge de gain Mg nous indique de combien le gain peut être augmenté pour atteindre la limite de stabilité, elle est donnée par :

$$Mg = \frac{1}{|L(j\omega_{180})|_{db}} \quad (\text{II-4})$$

Soit ω_c la fréquence où $L(j\omega)$ un gain égale à 1, la marge de phase M_Q est égal au retard de phase requis pour atteindre la limite de stabilité, elle est donnée par :

$$M_Q = \pi + \arg(L(j\omega_c)) \quad (\text{II-5})$$

ω_c est la fréquence de gain unité mais également la fréquence de croisement, elle est approximativement égale à la fréquence de coupure en boucle fermée. Des valeurs typiques pour le choix de M_Q sont entre 30° et 60° , et pour M_g entre 2 et 5.[9]

La figure (II-3) donne la signification graphique des marges de phase et de gain dans le plan de Black.

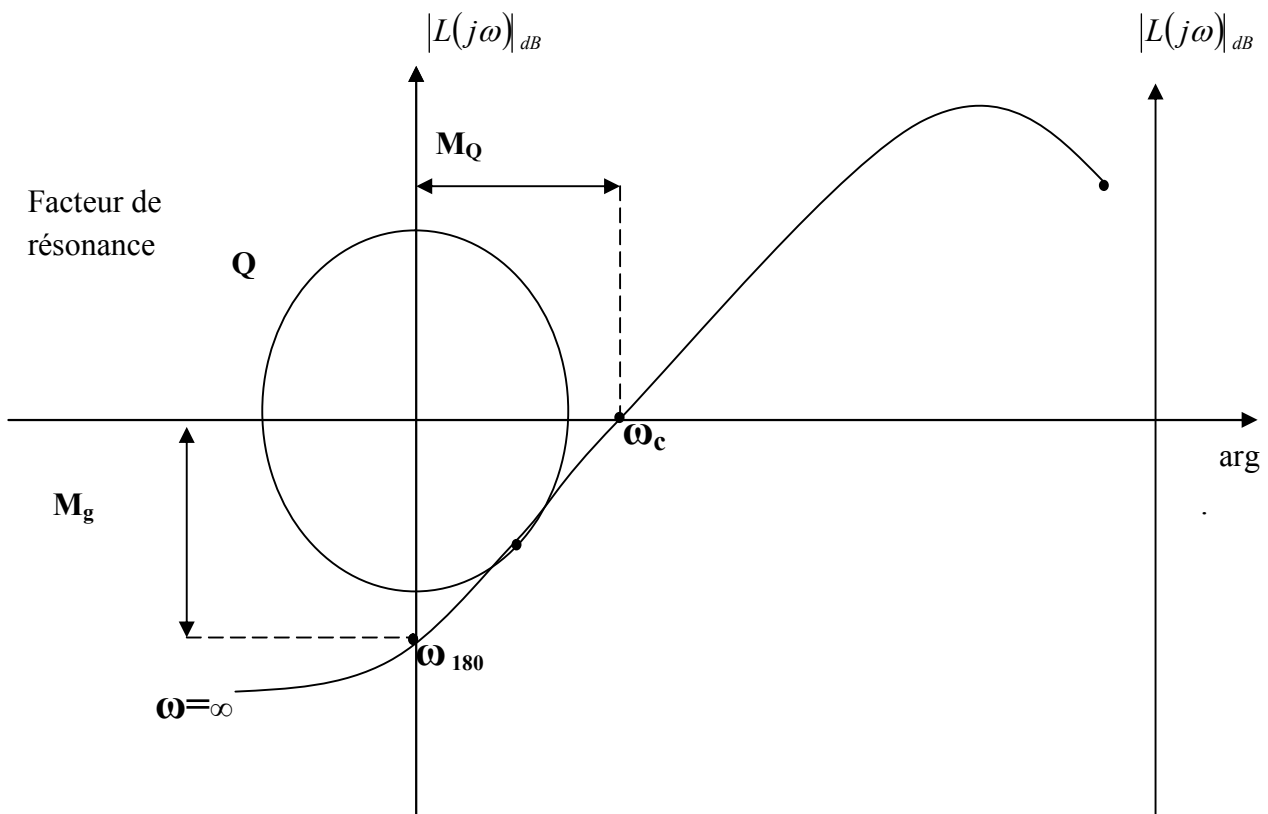


Figure (II-3) : Marges de stabilité dans le plan de Black

- **Le facteur d'amortissement en boucle fermée** : il caractérise le temps de décroissance des dépassements du mode oscillatoire de la réponse libre ou indicielle.

- **Le facteur de résonance en boucle fermée** : il est donné par la graduation du contour d'amplitude de l'abaque de black tangent au lieu de black de la boucle ouverte.
- **Le premier dépassement réduit** : il caractérise l'importance des oscillations transitoires de la réponse libre ou indicielle de la boucle fermée.

2-3- Comportement du procédé autour de la fréquence de croisement :

Trois types de comportement sont distingués :

- **Un comportement asymptotique** : il correspond à un domaine de fréquences pour lequel le diagramme de phase est assimilable au diagramme asymptotique correspondant (figure II-4)

Un procédé peut présenter un ou plusieurs comportement asymptotique, il est dit l'ordre p lorsqu'il correspond à un blocage de phase à $p\pi/2$.

- **Un comportement quasi asymptotique** : il est caractérisé par une phase variante lentement avec la fréquence (figure II-5).

Un comportement quasi asymptotique d'ordre p correspond à un pseudo blocage de la phase à $-p\pi/2$.

- **Un comportement quelconque** : il est défini comme un comportement qui n'est ni asymptotique ni quasi asymptotique (figure II-6). Il est donc caractérisé par une phase qui varie rapidement avec la fréquence, et correspond à un domaine de fréquences qui avoisine ou contient une ou plusieurs fréquences transitionnelles.

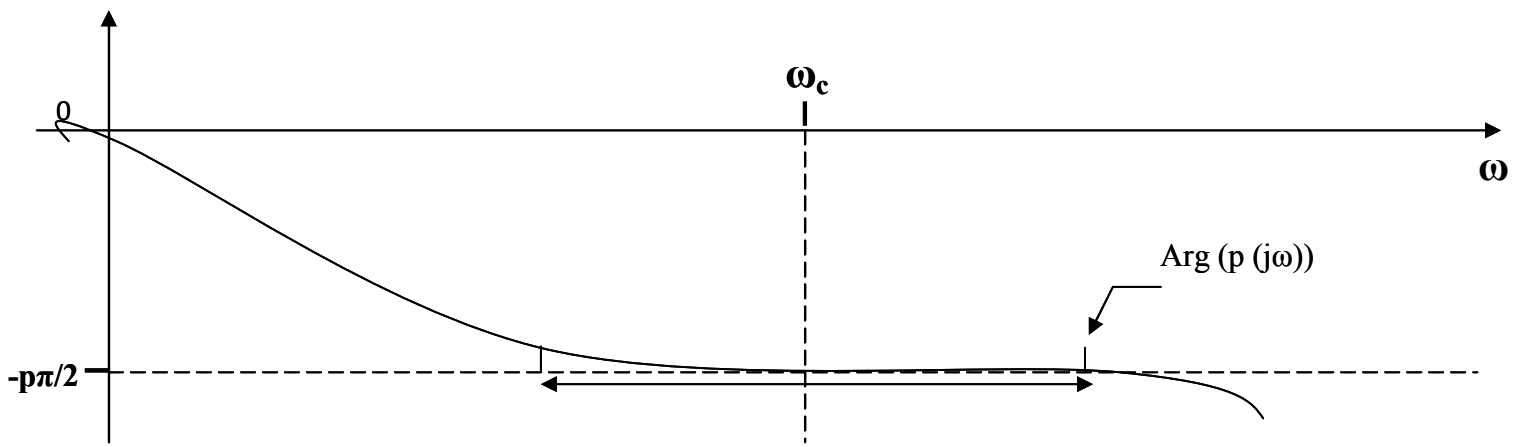


Figure II-4 : Comportement asymptotique d'ordre p

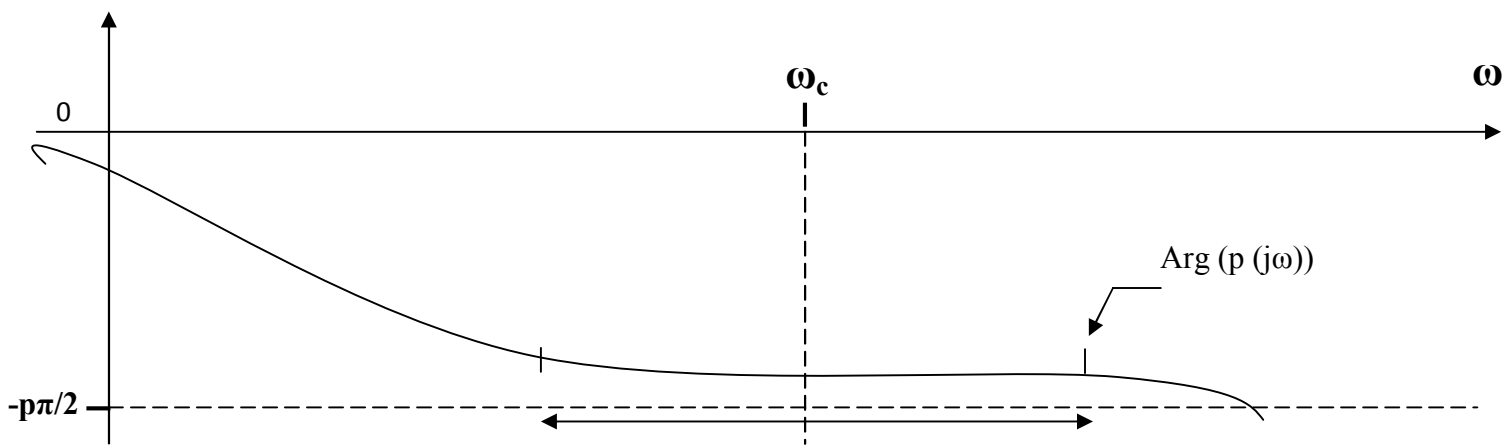


Figure II-5 : Comportement quasi asymptotique d'ordre p

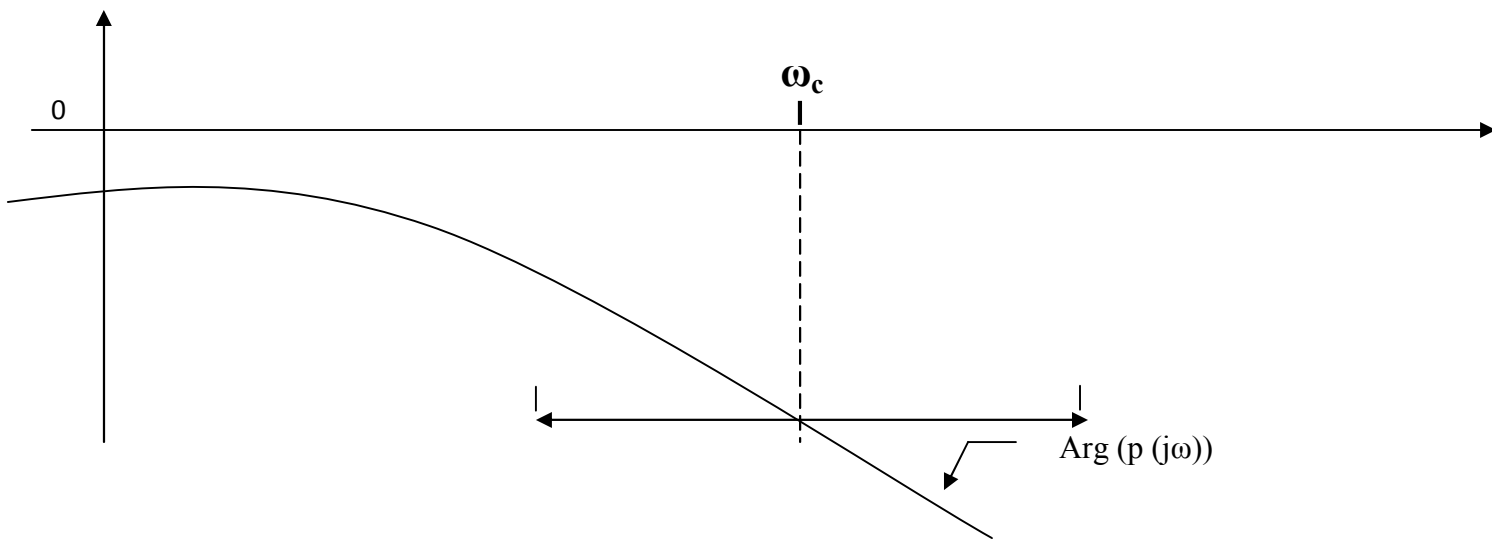


Figure II-6 Comportement quelconque

Les figures (II-4, II-5, II-6) représentent le comportement de procédé $P(s)$ autour de la fréquence de croisement.

3-La commande d'ordre fractionnaire :

Dans le cadre d'une approche fondée sur les marges de stabilité, la commande d'ordre fractionnaire préconise de réaliser, autour de la fréquence de croisement, un comportement fréquentiel en boucle ouverte le plus proche possible de celui de fonction idéale de Bode. Le lieu de Black du dérivateur généralisé qui décrit cette fonction sous forme d'une droite verticale centrée sur la fréquence de croisement, permet une marge de gain infinie et une marge de phase constante, donc un degré de stabilité, robuste vis-à-vis des variations du gain en boucle ouverte. En effet, cette variation se traduit par une translation verticale du lieu de Black, permettant le maintien de la marge de phase.

3-1-La commande CRONE :

La commande CRONE (commande robuste d'ordre non entier) a pour objectif le maintien des performances dynamiques fréquentielles ou temporelles en présence de variation de certains paramètres du système. L'idée est d'avoir la fonction de transfert corrigé indépendante de ces paramètres et qui ne dépend que de l'ordre non entier de dérivation. La première fonction de ce type a été proposée par Bode en 1945 appelée fonction idéale de Bode. La commande CRONE se conjugue en trois générations, le choix d'une génération se base conjointement sur le comportement du système autour de la fréquence de croisement, et sur la nature des modifications sur le gain et sur la phase. La première et la deuxième génération se basent sur la fonction idéale de Bode, elles sont applicables lorsque la réparamétrisation conduit uniquement à des variations sur le gain.

3-1-1-La commande CRONE de première génération :

Afin d'assurer la robustesse du degré de stabilisation à travers celle de la marge de phase, la commande CRONE de la première génération préconise, lorsque le système présente un comportement asymptotique ou quasi asymptotique autour de la fréquence de croisement, de lui associer un correcteur à phase constante. Cette phase doit être calculée de sorte à placer judicieusement le gabarit fréquentiel selon la marge de phase requise.

Etant donné la boucle de commande représentée par la figure (II-1). Lors d'une réparamétrisation du système, sa réponse en fréquences $P(j\omega)$ devient :

$$P'(j\omega) = P(j\omega) + \Delta P(j\omega) \dots \quad (\text{II-6})$$

De même, pour la fréquence de croisement :

$$\omega' = \omega_c + \Delta\omega_c \quad (\text{II-7})$$

L'expression définissant la marge de phase est égale à :

$$M_Q + \pi + \arg C(j\omega_c) + \arg P(j\omega_c) \quad (\text{II-8})$$

Celle ci devient après réparamétrisation :

$$M'_Q = \pi + \arg C(j\omega'_c) + \arg P(j\omega'_c) \quad (\text{II-9})$$

Ce qui correspond à une variation de marge de phase donnée par :

$$\Delta M_Q = M'_Q - M_Q = \arg C(j\omega'_c) + \arg P(j\omega'_c) - \arg C(j\omega_c) - \arg P(j\omega_c) \quad (\text{II-10})$$

$$\text{Soit :} \quad \Delta M_Q = \Delta M_p + \Delta M_r \quad (\text{II-11})$$

En posant :

$$\Delta M_p = \arg P(j\omega'_c) - \arg P(j\omega_c) \quad (\text{II-12})$$

$$\text{et :} \quad \Delta M_r = \arg C(j\omega'_c) - \arg C(j\omega_c) \quad (\text{II-13})$$

ΔM_p représente la variation de la phase du procédé lorsque $P(j\omega)$ varie de $\Delta P(j\omega)$ et de $\Delta\omega_c$. ΔM_r représente la variation de la phase du correcteur lorsque la fréquence ω_c varie de $\Delta\omega_c$. Ces expressions montrent que les variations de la marge de phase de la boucle ouverte résultent de la somme des variations de la phase du procédé et des variations de la phase de correcteur. La stratégie consiste à réaliser :

$$\Delta M_Q = 0 \quad (\text{II-14})$$

Cette condition sera assurée par un correcteur à phase constante autour de ω_c , que réalise un dérivateur généralisé qui présente une phase constante sur tout l'intervalle des fréquences. Pour des considérations pratiques le dérivateur généralisé (idéal) est remplacé par un dérivateur généralisé borné en fréquence. Le correcteur sera donné par:

$$C_n(j\omega) = c_0 \left(\frac{1 + s/\omega_b}{1 + s/\omega_h} \right); n \in R \quad (\text{II-15})$$

La figure (II-7) représente les diagrammes de Bode du dérivateur généralisé borné en fréquences qui définit le correcteur, et la figure (II-8) schématisé le principal de placement en phase du gabarit fréquentiel, qui sera appelé $\beta(j\omega)$. Pour un comportement asymptotique d'ordre P du procédé, et un placement en phase égale à $-n'\pi/2$ du gabarit, le correcteur doit apporter un déphasage constant de $n\pi/2$.

$$\arg(P(j\omega)), \arg(\beta(j\omega))$$

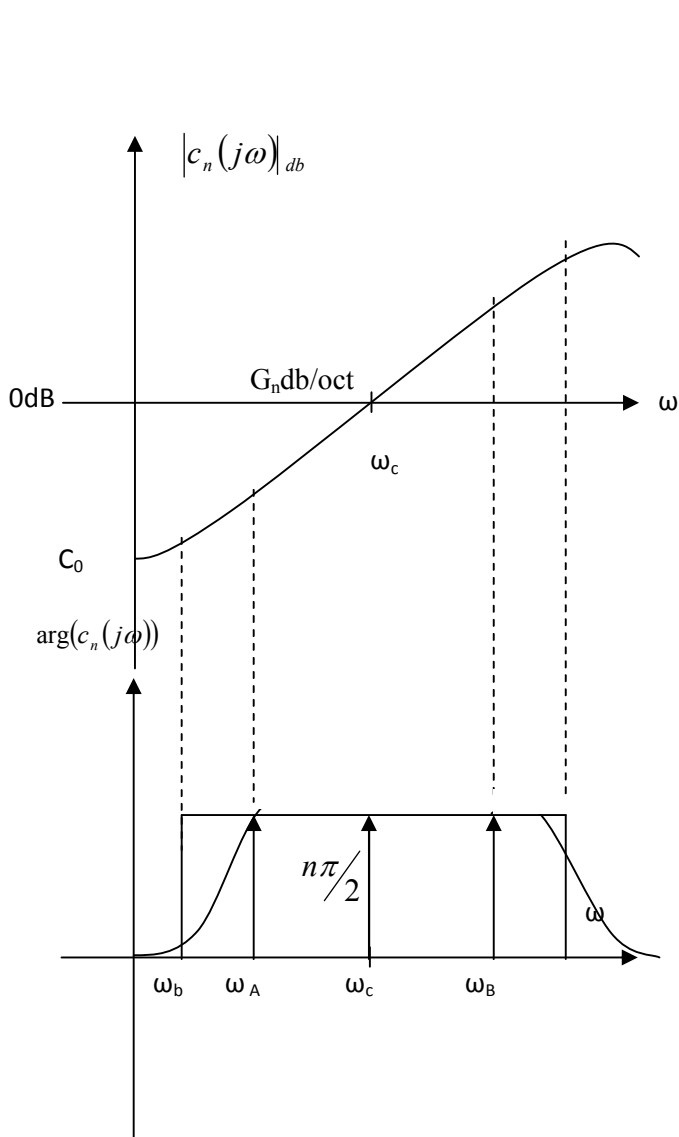


Figure II-7 : Diagrammes de Bode du régulateur CRONE première génération

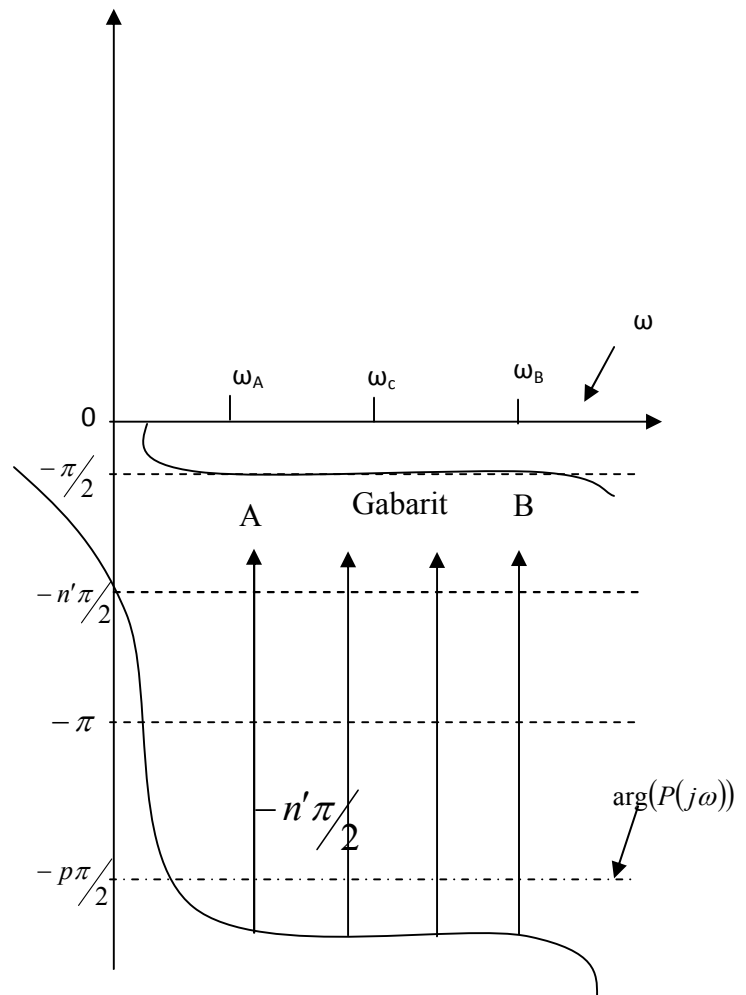


Figure II-8 : Effet du correcteur CRONE de première génération sur le comportement du procédé entre ω_A et ω_B

Il reste à déterminer l'ordre n , la figure (II-8) traduit la relation :

$$\arg C(j\omega) = \arg \beta(j\omega) - \arg P(j\omega) \quad (\text{II-16})$$

Soit : $\omega \in [\omega_A, \omega_B.]$

$$\arg C(j\omega) = -n'\pi/2 - (-p\pi/2) = (p - n')\pi/2 \quad (\text{II-17})$$

Sachant que $\arg C(j\omega) = n\pi/2$, l'ordre non entier n du correcteur est donc donné par :

$$n = p - n' \quad (\text{II-18})$$

n' se déduit des spécifications sur le degré de stabilité qui doit être chiffré par la marge de phase, le facteur de résonance, ou le coefficient d'amortissement.

- **A partir du facteur de résonance Q :**

A partir de la formule définissant la marge de phase, on peut écrire :

$$M_Q = \pi + \arg \beta(j\omega) = \pi - n'\pi/2 = \frac{\pi}{2}(2 - n') \quad (\text{II-19})$$

n' est alors donné par :

$$n' = 2 \left(1 - \frac{M_Q}{\pi} \right) \quad (\text{II-20})$$

Si les spécifications sont données par la valeur du facteur de résonance Q :

$$Q = \frac{1}{\sin(n'\pi/2)} \quad (\text{II-21})$$

De là on déduit n' :

$$n' = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{1}{Q} \right) \quad (\text{II-22})$$

- **A partir du coefficient d'amortissement ξ :**

Lorsqu'on veut imposer la valeur du coefficient d'amortissement ξ , on utilise cette formule :

$$\xi = -\cos \frac{\pi}{n'} \quad (\text{II-23})$$

D'où on tire :

$$n' = \frac{\pi}{\ar \cos(-\xi)} \quad (\text{II-24})$$

Enfin, pour que le correcteur puisse annuler les erreurs de position et de traînage, ou lui associe en série la transmittance suivante :

$$c_{nb}(s) = \left(\frac{\omega'_b}{s} + 1 \right)^{nb} \quad \text{Avec } \omega'_b \leq \omega_b \quad (\text{II-25})$$

Si n_{pb} représente l'ordre du comportement asymptotique du système en basses fréquences, l'ordre n_b s'obtient comme suite :

- Lorsque $n_{pb} = 0$: $n_b = 1$ pour annuler l'erreur de position.
Et $n_b = 2$ pour annuler l'erreur de traînage.
- Lorsque $n_{pb} = 1$: $n_b = 0$ pour annuler l'erreur de position
 $n_b = 1$ Pour annuler l'erreur de traînage.
- Lorsque $n_{pb} \geq 2$: $n_b = 0$ pour annuler les erreurs de position et de traînage.

Et afin d'atténuer le bruit en haute fréquences, on lui associe également en série un filtre passe bas d'ordre n_h , tel que :

$$c_{nh}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega'_h} \right)^{nh}} \quad \text{Avec } \omega'_h \geq \omega_h \quad (\text{II-26})$$

$n_h = 0$ Pour que la sensibilité de l'entrée demeure en hautes fréquences.

$n_h \geq 1$ pour que la sensibilisé de l'entée diminue avec les hautes fréquences.

3-1-2-La commande CRONE de deuxième génération :

Un régulateur CRONE de première génération n'a de sens que si le procédé présente un comportement asymptotique, ou a la rigueur quasi asymptotique, autour de la fréquence de croisement. Le correcteur de deuxième génération apporte la solution dans le cas d'un comportement quelconque.

L'objectif consiste alors à annuler les variations de la marge de phase par la réalisation des deux exigences suivantes (figure II-9) :

- Un gabarit verticale que doit fermer le lieu de black en boucle ouverte, et qui doit avoir une phase comprise entre A et B qui doit avoir une phase comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ autour de ω_c , pour l'état paramétrique nominal du procédé.
- Un glissement de gabarit sur lui-même lors d'une réparamétrisation du possédé, cette condition étant vérifiée lorsque la réparamétrisation conduit uniquement à des variations du gain autour de ω_c .

La variation du gain en boucle ouverte peuvent être occasionnées par :

- Une modification de l'ensemble des paramètres du procédé si ω_c appartient à un comportement asymptotique du procédé.
- Une modification de gain et des fréquences transitionnelles éloignées de ω_c dans le cas ou cette dernière appartient à un comportement quelconque du procédé.

La forme et le glissement vertical du gabarit assurent non seulement la constance de la marge de phase, mais également (figure II-10) :

- La constance du facteur de résonance, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'amplitude.
- La constance du coefficient d'amortissement, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'iso amortissement.

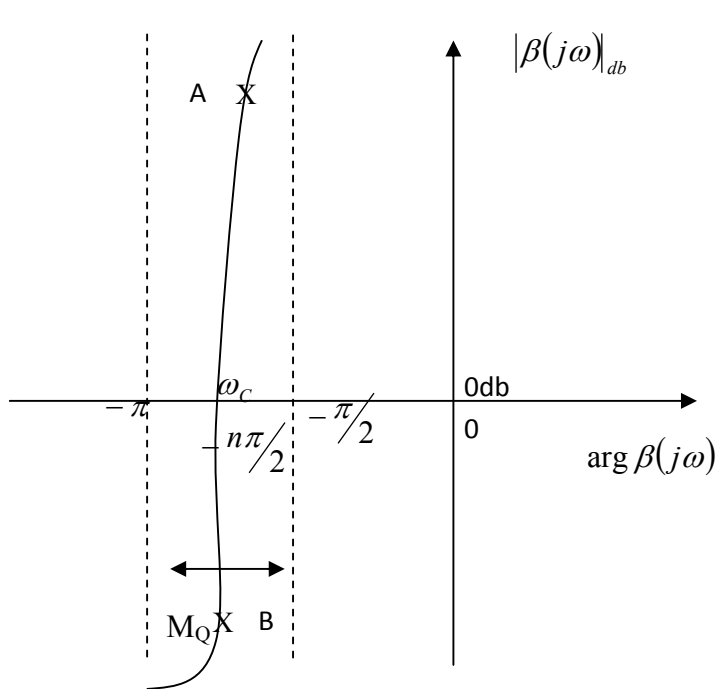


Figure II-9 : Représentation du gabarit dans le plan de black, l'ordre n associé au gabarit détermine son placement en phase à $-n\pi/2$

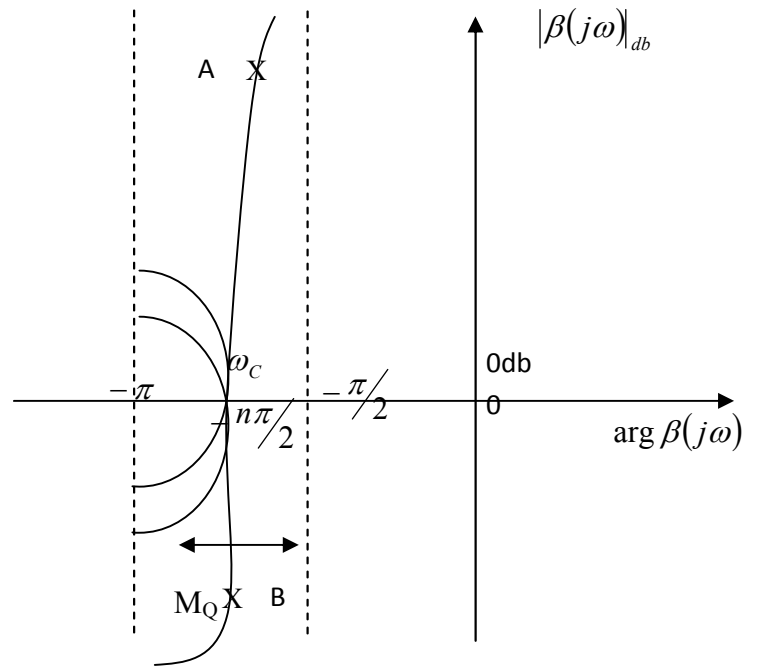


Figure II-10 : Glissement vertical du gabarit assure à la fois la robustesse de M_Q ; Q ET ξ

L'observation de la figure II-9 montre que la fonction de transfert en boucle ouverte est décrite par un intégrateur d'ordre non entier compris entre 1 et 2, soit :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_c}{s}\right)^n ; n \in]1,2[\tag{II-27}$$

De fréquence de croisement ω_c , et a phase constante :

$$\arg \beta(j\omega) = -\frac{n\pi}{2} \tag{II-28}$$

Le comportement dynamique en boucle fermée est complètement caractérisé par la fonction de sensibilité S(s) et la fonction de sensibilité complémentaire T(s), soit selon (II-3) :

$$T(s) + \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^n} \quad (\text{II-29})$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^n}{1 + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^n} \quad (\text{II-30})$$

La fonction $T(s)$ présente une fréquence de résonance ω_r et un facteur de résonance Q dont il est utile de donner les expressions :

$$\omega_r = \left(-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)^{1/n} \omega_c \quad (\text{II-31})$$

Et

$$Q(n) = \frac{|T(j\omega_r)|}{|T(j0)|} = \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)} \quad (\text{II-32})$$

Cette expression montre que le facteur de résonance est exclusivement lié à l'ordre non entier n permettant ainsi d'introduire la notion de résonance robuste. Les pôles de l'équation caractéristique de la boucle fermée sont donnés par :

$$\begin{cases} s_1 = \omega_c \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \\ s_2 = \omega_c \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

Puisque $1 < n < 2$, s_1 et s_2 sont complexes conjugués et forment un angle au centre 2θ avec

$$\theta = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{figure (II-11).})$$

Les pôles se déplacent avec un angle constant (fixé par l'ordre n), lorsque ω_c varie. La robustesse dans le plan s (complexe) est donc illustrée par deux demi-droites formant le même angle σ par rapport à l'axe des réels et appelées demi-droites d'iso-amortissement.

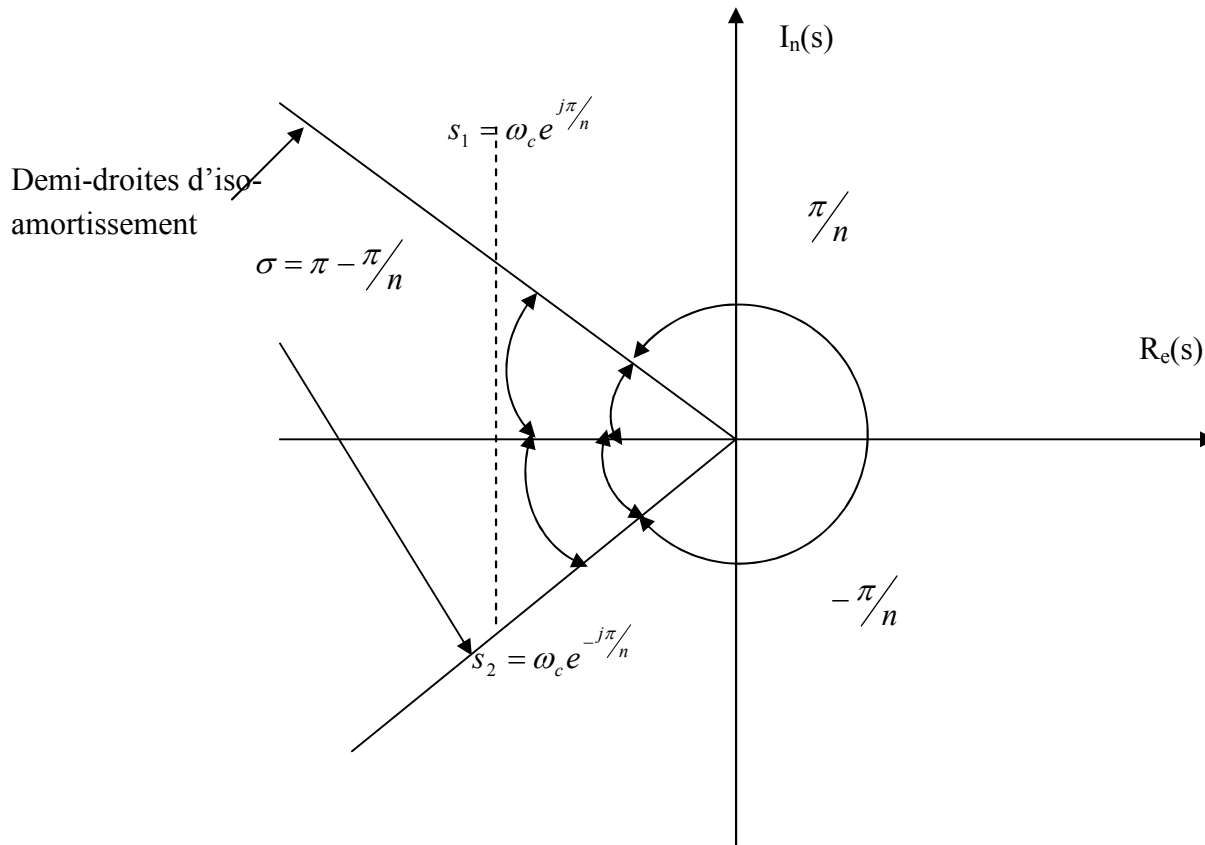


Figure II-11 : Lieu des pôles de la boucle fermée dans le plan complexe.

La fréquence naturelle ω_n , la fréquence propre ω_p et le facteur d'amortissement ξ qui constituent les paramètres caractéristiques du mode oscillatoire sont donnés par :

$$\omega_n = \omega_c = |s_{1,2}| \quad (\text{II-34}).$$

$$\xi(n) = \cos \theta = -\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (\text{II-35}).$$

$$\omega_p = \omega_c \sin \theta = \omega_c \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{II-36}).$$

L'expression (II-35) montre que le facteur d'amortissement est exclusivement lié à l'ordre de dérivation n illustrant la notion du mode oscillatoire.

Synthèse de régulateur CRONE de deuxième génération :

La fonction de transfert en boucle ouverte est décrite par un intégrateur d'ordre fractionnaire, en remplaçant celui-ci par l'intégration d'ordre fractionnaire borné en fréquences correspondantes, et en lui associant les transmittance c_{nb} et $c_{nh}(s)$ décrites précédemment on obtient :

$$\beta(j\omega) = \left[k_b \left(\frac{\omega'_b}{s} + 1 \right) \right]^{n_b} \frac{\omega_c}{\omega_b} \left[\frac{1 + \frac{s}{\omega_n}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right]^n \left[\frac{k_h}{1 + \frac{s}{\omega'}} \right]^{n_h} \quad (\text{II-37})$$

Où

$$k_b = \left[\left(\frac{\omega'_b}{\omega_c} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \quad (\text{II-38})$$

Et

$$k_h = \left[\left(\frac{\omega_c}{\omega'h} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (\text{II-39})$$

Pour assurer un gain unitaire à la fréquence ω_c , le correcteur $C(s)$ se calcule comme suit :

$$c(s) = \frac{\beta(j\omega)}{p(j\omega)} \quad (\text{II-40})$$

3-2-Régulateur PID fractionnaire (PIⁿ D^m) :

La fonction de transfert du régulateur proportionnel, intégral et dérivé fractionnaire (PIⁿ D^m) se déduit de celle de PID classique, en généralisant l'intégration et la dérivation à des ordres réels n et m respectivement, soit :

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^n} + k_d s^m \quad n, m \in]0, 2[\quad (\text{II-41})$$

Les conditions à réaliser, sont comme suite :

- Marge de phase M_Q et fréquence de gain unité ω_c , ceci est réalisé par les deux conditions suivantes :

$$\arg(L(j\omega_c)) + \arg(C(j\omega_c)) + \arg(P(j\omega_c)) = -\pi + M_Q \quad (\text{II-42})$$

$$|L(j\omega_c)|_{db} = |C(j\omega_c)P(j\omega_c)|_{db} = 0dB \quad (\text{II-43})$$

- Robustesse vis-à-vis des variations du gain, par l'annulation des variations de la phase en boucle ouverte :

$$\left[\frac{d[\arg(C(j\omega)P(j\omega))]}{d\omega} \right] = 0 \quad (\text{II-44})$$

- Robustesse vis-à-vis du bruit de mesure, on a vu que pour une bonne atténuation du bruit de mesure influant en hautes fréquences, il faut garantir un faible gain, dans cette région fréquentielle, pour la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$, soit alors :

$$\left| T(j\omega) = \frac{C(j\omega)P(j\omega)}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \right|_{db} \leq A_{db} \quad \forall \omega \geq \omega_s > \omega_c \quad (\text{II-45})$$

Et parce que les systèmes physiques sont des systèmes passe-bas cette condition peut se réécrire sous la forme :

$$|T(j\omega_s)|_{db} = Adb \quad (II-46)$$

- Robustesse vis-à-vis de la perturbation de charge, pour un bon rejet des perturbations de charge influant en basses fréquences, il faut garantir un faible gain, dans cette région fréquentielle, pour la fonction de sensibilité $S(s)$, soit alors :

$$\left| S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \right|_{db} \leq Bdb \quad \forall \omega \leq \omega_i < \omega_c \quad (II-47)$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, cette condition devient :

$$|S(j\omega_i)|_{db} = Bdb \quad (II-48)$$

Les constantes A et B sont généralement prise comme étant égale à -20 db, et l'annulation de l'erreur statique est assurée par l'intégration d'ordre n. les paramètres positifs K_p , K_i et K_d et les ordres n, et m s'obtiennent par la résolution de problème d'optimisation non linéaire multivariable avec contrainte, en considérant la partie gauche de l'expression (II-44) comme fonction objective à minimiser, et expressions (II-42), (II-43), (II-46) et (II-48) comme étant les contraintes.

-Résolution du problème d'optimisation non linéaire multivariable :

La résolution de problème d'optimisation s'effectue au moyen la toolbox d'optimisation du logiciel MATLAB, à travers l'utilisation de la fonction FMINCON. Il s'agit alors de poser le problème suivant :

$$\min_x f(x)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} C(x) \leq 0 \\ C_{eq}(x) = 0 \\ lb \leq x \leq ub \end{cases}$$

$F(x)$ étant la fonction non linéaire multivariable à minimiser, x le vecteur des paramètres, $C_{eq}(x)$ est le vecteur des égalités non linéaire, $C(x)$ est le vecteur des inégalités non linéaires, lb et ub sont respectivement les bornes inférieure et supérieure du vecteur des paramètres. L'instruction se formule de la manière suivante :

[Parameter, error]=FMINCON ('main-fun',init-cond,[],[],[],lb,ub,'constraint-fun',options).

Où :

- Main-fun est la fonction à minimiser $f(x)$.
- init-cond est un vecteur d'estimées initiales de la solution.
- constraint-fun fonction contenant l'ensemble des contraintes sous forme d'égalité puis d'intégralité.
- Options est la structure dans laquelle on définit les paramètres d'optimisation, tels que le nombre maximal d'itération, et les critères d'arrêt.
- Parameter contient la solution finale.
- Error est la valeur de la fonction objective à la solution finale.

4-Conclusion :

Nous avons cité dans ce chapitre les principaux régulateurs fractionnaires. Leur synthèse est effectuée dans le domaine fréquentiel. Dans le cadre de la commande fractionnaire, la boucle ouverte prend une forme d'un intégrateur fractionnaire, du moins sur intervalle fréquentiel défini autour de la fréquence de croisement. Cela confère au système en boucle fermée la propriété de robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations du gain de la boucle ouverte. La commande CRONE de première et de deuxième génération applique directement ce principe. Pour ce qui est de la synthèse du correcteur PID fractionnaire, le calcul des valeurs optimales s'effectue par la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire et

non convexe auquel il est difficile de trouver une solution satisfaisante. La synthèse de ces correcteurs nécessite l'implémentation analogique en utilisant des approximations telles que l'approximation d'Oustaloup, l'approximation de Charef, l'approximation de Matsuda. L'implémentation numérique de ces correcteurs dans le cadre de la commande par ordinateur nécessite l'opération de discrétisation. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

1-Introduction :

De nos jours, la commande par calculateur numérique est largement utilisée. La mise en œuvre d'une commande numérique par calculateur peut se faire de deux manières. La première est d'obtenir d'abord l'équivalent discret du modèle en temps continu du procédé puis de synthétiser la commande numérique en utilisant les méthodes discrètes. La deuxième consiste d'abord à synthétiser le correcteur en temps continu puis d'obtenir sa version numérique en utilisant les méthodes de discrétisation. C'est cette dernière approche que nous allons utiliser dans ce chapitre. L'implémentation d'un correcteur sur un ordinateur nécessite l'opération de discrétisation qui consiste à trouver l'équivalent discret $C(z)$ du correcteur analogique $C(s)$.

Si dans le cas entier le passage d'une fonction de transfert en temps continu $C(s)$ à son équivalent discret en temps discret $C(z)$ peut être obtenu par les méthodes de discrétisation simples (transformée en z) ; ceci n'est plus évident dans le cas fractionnaire. Le principe de discrétisation repose sur le remplacement de l'opérateur « s » par une fonction « $w(z)$ » appelées opérateurs. Il y a deux classes de méthodes de discrétisation : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Dans ce chapitre, nous nous sommes limités à l'étude de la discrétisation directe utilisant différents opérateurs (Tustin, Al-alaoui, Euler, Simpson). La contribution majeure de ce chapitre est d'introduire la formule récursive de discrétisation avec des ordres d'approximation différents. Cette dernière simplifie le travail en utilisant les troncations approximatrices tels que : la CFE, PSE.

2-Classes des méthodes de discrétisation :

2-1- Méthodes directes :

Elles consistent à remplacer l'opérateur d'ordre fractionnaire s^{α} par une fonction génératrice $[w(z)]^{\alpha}$ (dimension infinie) dans $C(s)$ (après avoir limité l'ordre) pour obtenir $C(z)$ qui est la fonction de transfert discrétisée de $C(s)$.

2-3- Méthodes indirectes :

La discrétisation par les méthodes indirectes se fait en deux étapes. La première consiste à donner un modèle fractionnaire en temps continu en utilisant un équivalent rationnel qui peut être déduit par l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire s^{α} par un modèle entier. La deuxième étape est la discrétisation classique de la fonction de transfert en s obtenue dans la première étape.

3- Méthodes de discrétisation directes :

Nous distinguons deux étapes :

- **Etape 1 :**

Remplacer l'opérateur d'ordre fractionnaire par une fonction génératrice : $s^\alpha = [\mathbf{w}(z)]^\alpha$.
Quatre fonctions génératrices sont proposées à partir desquelles découlent les quatre méthodes :

1. **Méthode d'Euler (Grunwald) :**

$$s^\alpha = \left[\frac{1}{T} (1 - z^{-1}) \right]^\alpha = \frac{1}{T^\alpha} \left(1 - \alpha z^{-1} + \frac{(\alpha-1)}{2} z^{-2} + \dots \right)$$

2. **Méthode de Tustin :**

$$s^\alpha = \left[\frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \right]^\alpha = \left(\frac{2}{T} \right)^\alpha \left(1 - 2\alpha z^{-1} + 2\alpha^2 z^{-2} + \dots \right)$$

3. **Méthode de Simpson :**

$$s^\alpha = \left[\left(\frac{3}{T} \right) \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 + 4z^{-1} + z^{-2})} \right]^\alpha = \left(\frac{3}{T} \right)^\alpha \left(1 - 4\alpha z^{-1} + 2\alpha(4\alpha + 3)z^{-2} + \dots \right)$$

4. **Méthode d'Al-Alaoui :**

$$s^\alpha = \left[\left(\frac{8}{7T} \right) \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1}/7)} \right]^\alpha = \left(\frac{8}{7T} \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{8}{7} \right) \alpha z^{-1} + \left(\frac{-24}{49} \alpha + \frac{32}{49} \alpha^2 \right) z^{-2} + \dots \right)$$

T représente la période d'échantillonnage.

- **Etape 2 :**

Nous avons remarqué que l'expansion de l'opérateur d'ordre fractionnaire par les différentes méthodes citées précédemment, conduit à des séries infinies qu'on doit approximer en utilisant des méthodes d'approximation comme CFE et PSE.

1. Approximation discrète en utilisant l'expansion de séries entière (PSE) :

En utilisant une fonction génératrice correspondante à une des méthodes précédentes (Tustin, Euler, . . .) et en utilisant l'expansion de série entière (PSE) de cette fonction, on obtient la fonction de transfert rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire suivante :

$$D^{\pm\alpha}(z) = APSE[u] = A. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[A_n(z^{-1}, \alpha) / A_n(z^{-1}, -\alpha) \right]$$

Où : $A_0(z^{-1}, \alpha) = 1$

$$A_n(z^{-1}, \alpha) = A_{n-1}(z^{-1}, \alpha) - C_n z^n A_{n-1}(z, \alpha)$$

$$C_n = \begin{cases} \alpha/n & \text{pour } n \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

Donc : $D^{\pm\alpha}(z) \approx A. A_n(z^{-1}, \alpha) / A_n(z^{-1}, -\alpha)$

Avec : A qui change selon la fonction génératrice comme suit :

$$A = \begin{cases} (2/T)^\alpha & \text{Tustin} \\ (8/7T)^\alpha & \text{Al-alaoui} \\ (1/T)^\alpha & \text{Euler (Grunwald)} \\ (3/T)^\alpha & \text{Simpson} \end{cases}$$

PSE[u] représente l'expression qui résulte de l'expansion de série entière de la fonction u .
Avec : u qui change selon la fonction génératrice comme suit :

$$u = \begin{cases} (1-z^{-1})^\alpha & \text{Euler} \\ [(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]^\alpha & \text{Tustin} \\ [(1-z^{-1})(1+z^{-1})/(1+4z^{-1}+z^{-2})]^\alpha & \text{Simpson} \\ [(1-z^{-1})/(1+z^{-1}/7)]^\alpha & \text{Al-alaoui} \end{cases}$$

Le tableau suivant présente les expressions des $A_n(z^{-1}, \alpha)$ pour $n=1, \dots, 9$

n	$A_n(z^{-1}, \alpha)$
0	1
1	$-\alpha z^{-1} + 1$
3	$-(1/3)\alpha z^{-3} + (1/3)\alpha 2z^{-2} - \alpha z^{-1} + 1$
5	$-(1/5)\alpha z^{-5} + (1/5)\alpha 2z^{-4} - [(\alpha/3) + (\alpha^3/15)]z^{-3} + (2/5)\alpha 2z^{-2} - \alpha z^{-1} + 1$
7	$-(\alpha/7)z^{-7} + (\alpha^2/7)z^{-6} - [(\alpha/5) + (2\alpha^3/35)]z^{-5} + [(26/105)\alpha^2 + (\alpha^4/105)]z^{-4} - [(1/3)\alpha + (1/21)\alpha^3]z^{-3} + (3/7)\alpha 2z^{-2} - \alpha z^{-1} + 1$
9	$-(\alpha/9)z^{-9} + (\alpha^2/9)z^{-8} - [(\alpha/7) + (\alpha^3/21)]z^{-7} + [(34/189)\alpha^2 + (2/189)\alpha^4]z^{-6} - [(1/5)\alpha + (16/189)\alpha^3 + (1/945)\alpha^5]z^{-5} + [(17/63)\alpha^2 + (1/63)\alpha^4]z^{-4} - [(1/3)\alpha + (1/9)\alpha^3]z^{-3} + (4/9)\alpha 2z^{-2} - \alpha z^{-1} + 1$

Tableau III-1-les formules de $A_n(z^{-1}, \alpha)$ pour $n=1, \dots, 9$

2. Approximation discrète en utilisant l'expansion de fraction continue (CFE) :

Une autre méthode pour obtenir l'équivalent discret de l'opération d'ordre fractionnaire, qui combine la règle trapézoïdale et l'expansion des fractions continues, cette méthode implique l'utilisation de la fonction génératrice. La fonction de transfert résultante, rapprochant l'opérateur d'ordre fractionnaire peut être exprimée sous la forme suivante :

$$D^{\pm\alpha}(z) = Y(z)/F(z) = A. \text{CFE}[u] \\ = A. P_p(z^{-1})/Q_q(z^{-1})$$

où

- CFE[u] : dénote la fonction de transfert résultante de l'application de l'expansion continue de la fonction u.
- A et u : changent comme précédemment.
- p et q : sont les ordres de l'approximation ($p=q=n$).

-P et Q : sont des polynômes de degré p et q correspondants aux variables z^{-1} . Les formules de P et de Q seront présentés dans le tableau suivant :

p=q	$P_p(z^{-1})$ ($k=-1$), et $Q_q(z^{-1})$ ($k=0$)
1	$(-1)^k \alpha z^{-1} + 1$
3	$(-1)^k (\alpha^3 - 4\alpha) z^{-3} + (6\alpha^2 - 9) z^{-2} + (-1)^k 15\alpha z^{-1} + 15$
5	$(-1)^k (\alpha^5 - 20\alpha^3 + 64\alpha) z^{-5} + (-195\alpha^2 + 15\alpha^4 + 225) z^{-4} + (-1)^k (105\alpha^3 - 735\alpha) z^{-3} + (420\alpha^2 - 1050) z^{-2}$ $+ (-1)^k 945\alpha z^{-1} + 945$
7	$(-1)^k (784\alpha^3 + \alpha^7 - 56\alpha^5 - 2304\alpha) z^{-7} + (10612\alpha^2 - 1190\alpha^4 - 11025 + 28\alpha^6) z^{-6}$ $+ (-1)^k (5348\alpha + 378\alpha^5 - 11340\alpha^3) z^{-5} + (99225 - 59850\alpha^2 + 3150\alpha^4) z^{-4}$ $+ (-1)^k (17325\alpha^3 - 173250\alpha) z^{-3} + (-218295 + 62370\alpha^2) z^{-2} + (-1)^k 135135\alpha z^{-1} + 135135$
9	$(-1)^k (-52480\alpha^3 + 147456\alpha + \alpha^9 - 120\alpha^7 + 4368\alpha^5) z^{-9} + (45\alpha^8 + 120330\alpha^4 - 909765\alpha^2 -$ $4410\alpha^6 + 893025) z^{-8} + (-1)^k (-5742495\alpha - 76230\alpha^5 + 1451835\alpha^3 + 990\alpha^7) z^{-7} +$ $(-13097700 + 9514890\alpha^2 - 796950\alpha^4 + 13860\alpha^6) z^{-6} + (-1)^k (33648615\alpha -$ $4505400\alpha^3 + 135135\alpha^5) z^{-5} + (-23648625\alpha^2 + 5101030 + 945945\alpha^4) z^{-4} + (-1)^k (-64186425\alpha$ $+ 4729725\alpha^3) z^{-3} + (16216200\alpha^2 - 72972900) z^{-2} + (-1)^k 34459425\alpha z^{-1} + 344599425$

Tableau III-2- les formules de $P_p(z^{-1})$ et de $Q_q(z^{-1})$ pour $p=q=1, \dots, 9$

4- Exemples :

Exemple 1 :

La discrétisation de $s^{0.5}$ avec une période d'échantillonnage $T=0.001s$, en utilisant la méthode de Tustin approximée par l'expansion de série entière (PSE), donne les modèles suivants :

$$G_1(z) = \frac{44.72z - 22.36}{z + 0.5}$$

$$G_3(z) = \frac{44.72z^3 - 22.36z^2 + 3.727z - 7.454}{z^3 + 0.5z^2 + 0.08333z + 0.1667}$$

$$G_7(z) = \frac{44.72z^7 - 22.36z^6 + 4.792z^5 - 7.986z^4 + 2.795z^3 - 4.792z^2 + 1.597z - 3.194}{1z^7 + 0.5z^6 + 0.1071z^5 + 0.1786z^4 + 0.0625z^3 + 0.1071z^2 + 0.0357z + 0.07143}$$

$$G_9(z) = \frac{44.72z^9 - 22.36z^8 + 4.969z^7 - 8.075z^6 + 3.061z^5 - 4.947z^4 + 2.041z^3 - 3.641z^2 + 1.242z + 2.485}{1z^9 + 0.5z^8 + 0.1111z^7 + 0.1806z^6 + 0.06845z^5 + 0.1106z^4 + 0.04563z^3 + 0.07738z^2 + 0.02778z + 0.05556}$$

Exemple 2 :

On refait le même travail que l'exemple 1, mais en utilisant l'approximation par l'expansion de fraction continue (CFE), on obtient les modèles suivants :

$$G_1(z) = 44.72 \frac{z-0.5}{z+0.5}$$

$$G_3(z) = 44.72 \frac{z^3 - 0.5z^2 - 0.5z + 0.125}{z^3 + 0.5z^2 - 0.5z - 0.125}$$

$$G_7(z) = 44.72 \frac{z^7 - 0.5z^6 - 1.5z^5 + 0.625z^4 + 0.625z^3 - 0.1875z^2 - 0.0625z + 0.007813}{z^7 + 0.5z^6 - 1.5z^5 - 0.625z^4 + 0.625z^3 + 0.1875z^2 - 0.0625z - 0.007813}$$

$$G_9(z) = 44.72 \frac{z^9 - 0.5z^8 - 2z^7 + 0.875z^6 + 1.313z^5 - 0.4688z^4 - 0.3125z^3 + 0.07813z^2 + 0.01953z - 0.001953}{1z^9 + 0.5z^8 - 2z^7 - 0.875z^6 + 1.313z^5 + 0.4688z^4 - 0.3125z^3 - 0.07813z^2 + 0.01953z + 0.001953}$$

Les diagrammes de Bode présentés par la figure (III-1) montrent que l'approximation est d'autant meilleure que l'ordre d'approximation est élevé. D'autre part, les courbes de modules sont mieux approximées que celles de la phase. La méthode de Tustin combinée à CFE offre de meilleurs résultats. Enfin, l'approximation n'est valable que sur un certain nombre de décades qui dépend de la période d'échantillonnage et de l'ordre d'approximation. On doit noter que la méthode de discrétisation introduite donne toujours une fonction de transfert en z avec une phase minimale stable.

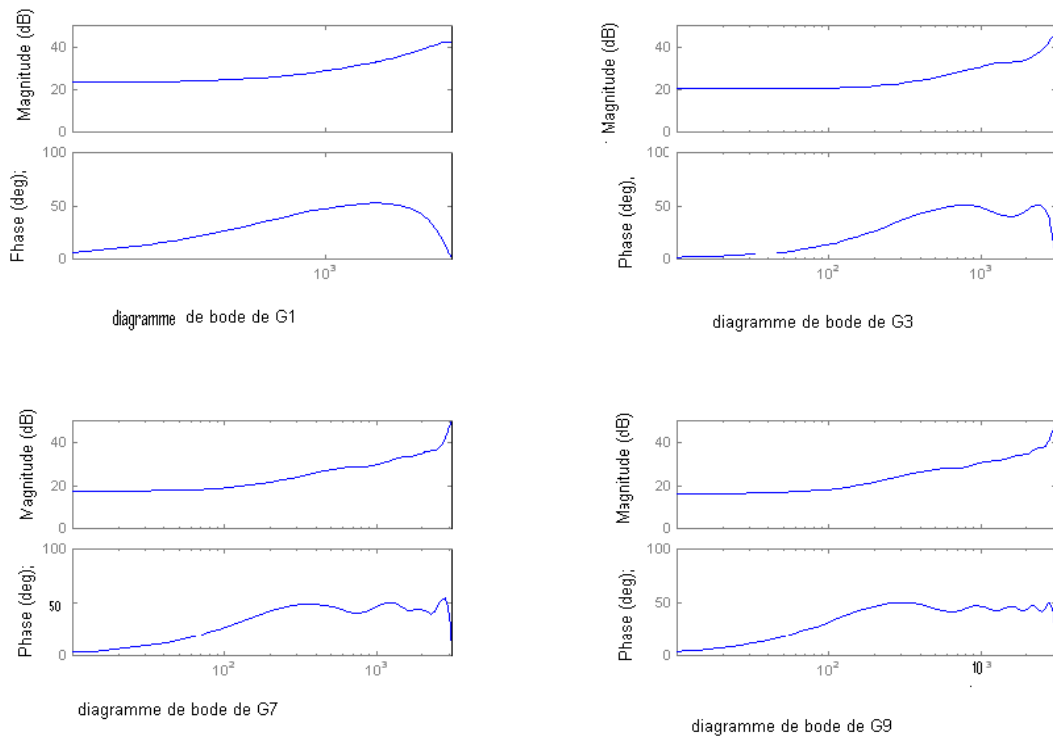


Figure III-1-a- Tustin + PSE

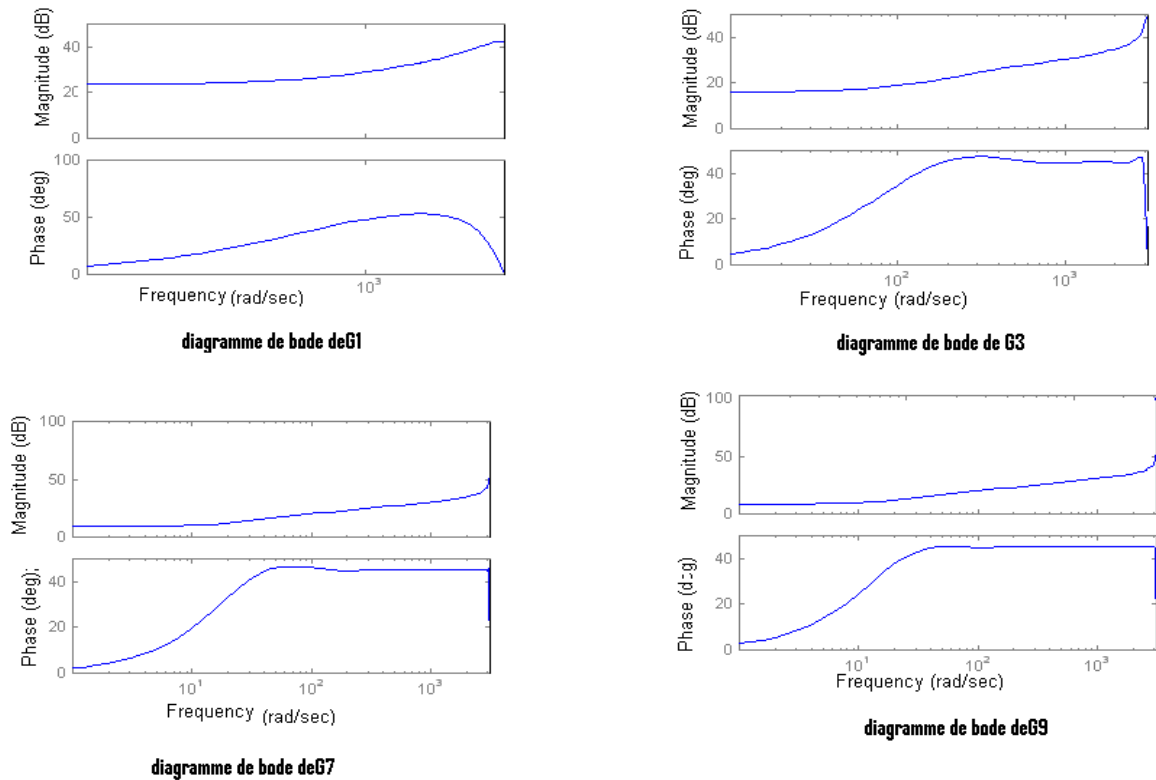


Figure III-1-b : Tustin + CFE

Figure III-1- Discrétisation approximée de $s^{0.5}$ à $T=0.001s$

5-Conclusion

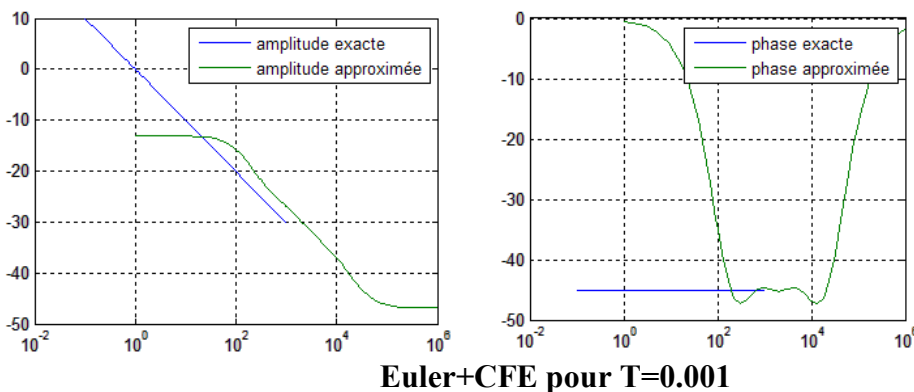
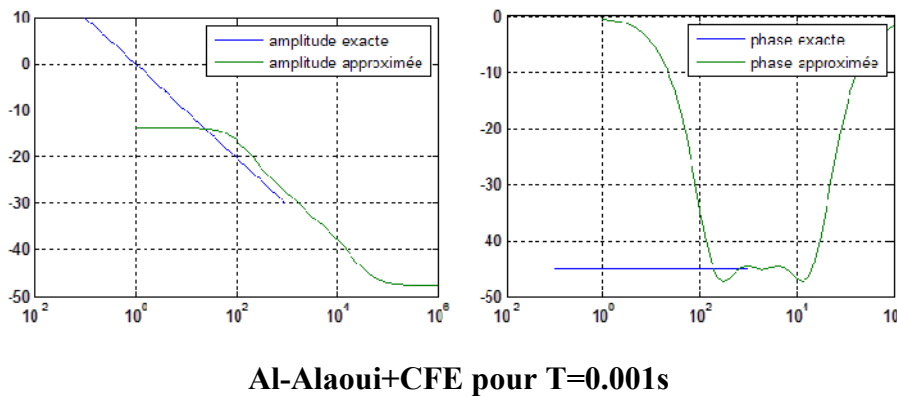
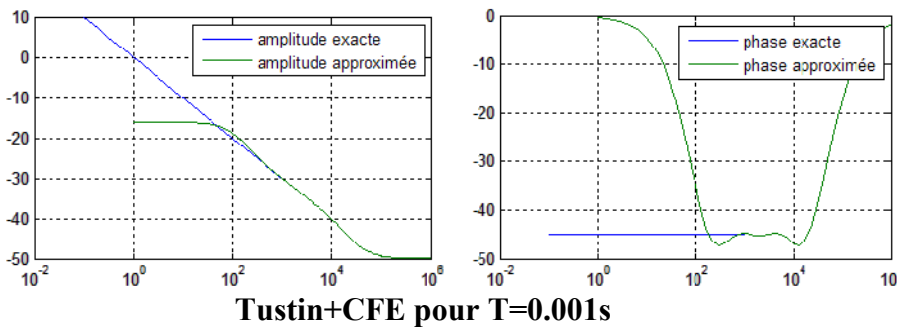
Les méthodes de discrétisation sont essentielles dans l'implémentation digitale des régulateurs d'ordre fractionnaire. Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes de discrétisation directes (Tustin, Al-alaoui, Euler (Grunwald), Simpson). Ces méthodes nécessitent une étape d'approximation. Nous avons ainsi étudié deux méthodes d'approximation (PSE, CFE). Ces méthodes sont illustrées sur deux exemples d'application.

1- Introduction

Dans ce chapitre deux exemples d'implémentation numérique de régulateurs fractionnaires sont présentés. La méthode d'approximation CFE est choisie en raison de meilleurs résultats qu'elle peut apporter comme cela a été remarqué dans le précédent chapitre. Les différentes fonctions génératrices seront utilisées afin de comparer leur efficacité.

2- Exemple 1 : discrétisation d'un intégrateur d'ordre fractionnaire

Soit l'intégrateur d'ordre fractionnaire suivant s^α avec $\alpha = -0.5$. En le discrétisant par les différentes méthodes citées auparavant en faisant varier la période d'échantillonnage T. Les résultats de simulation seront présentés par les figures ci-dessous :



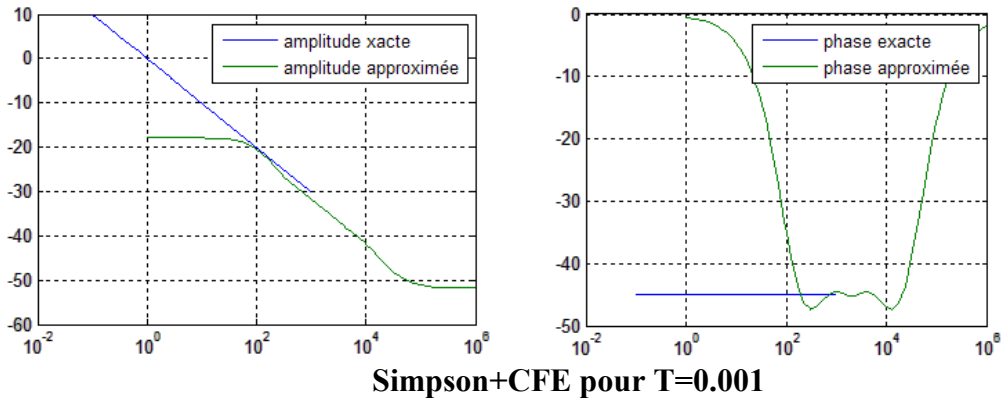
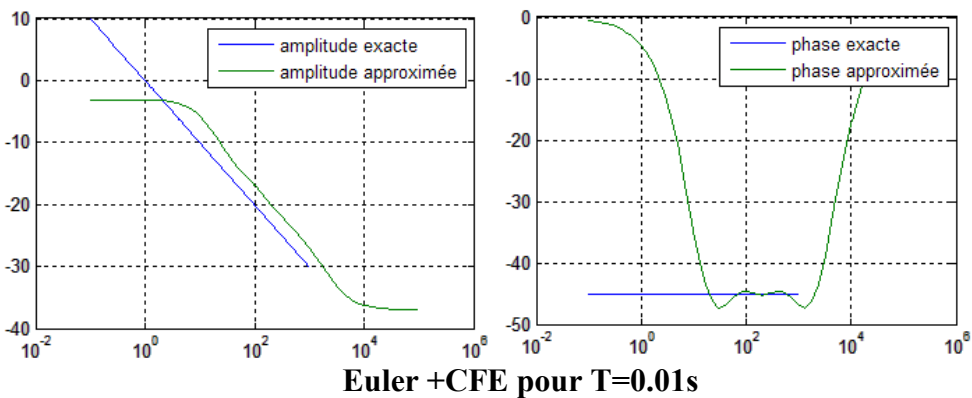
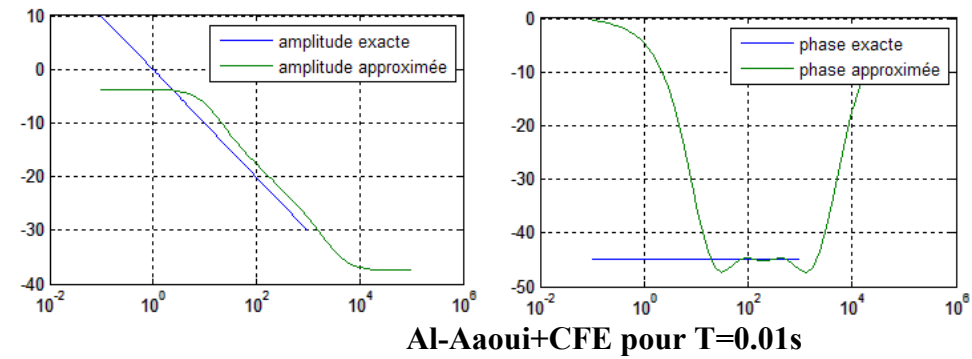
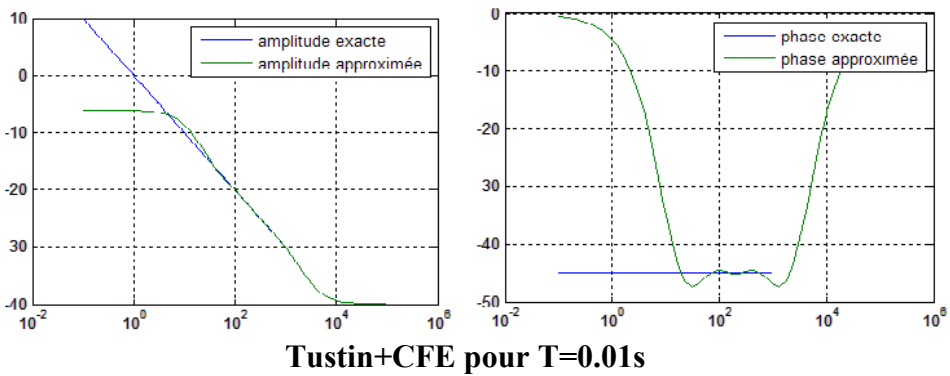


Figure IV-1- : discrétisation de $s^{-0.5}$ et la comparaison des résultats avec ceux du cas continu pour T=0.001s



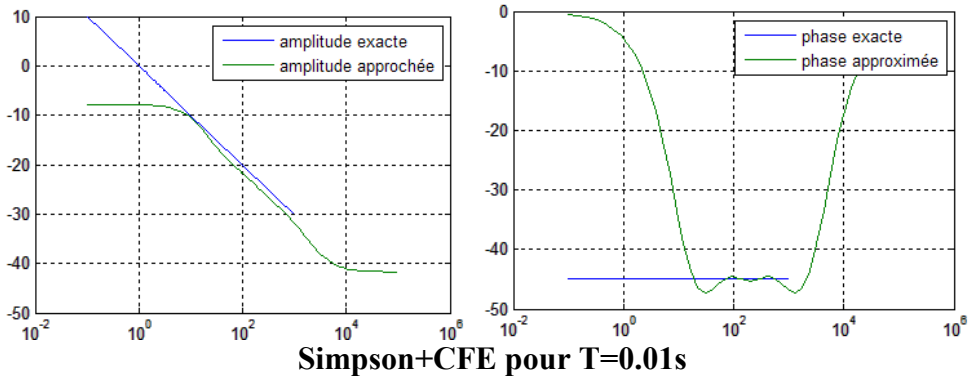
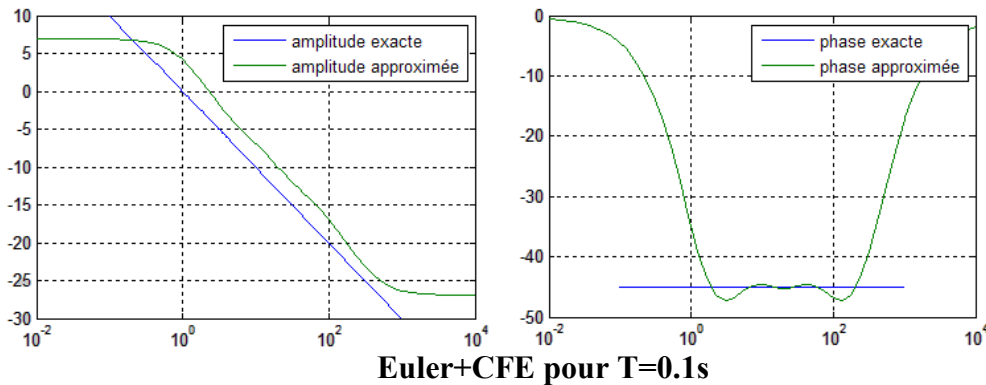
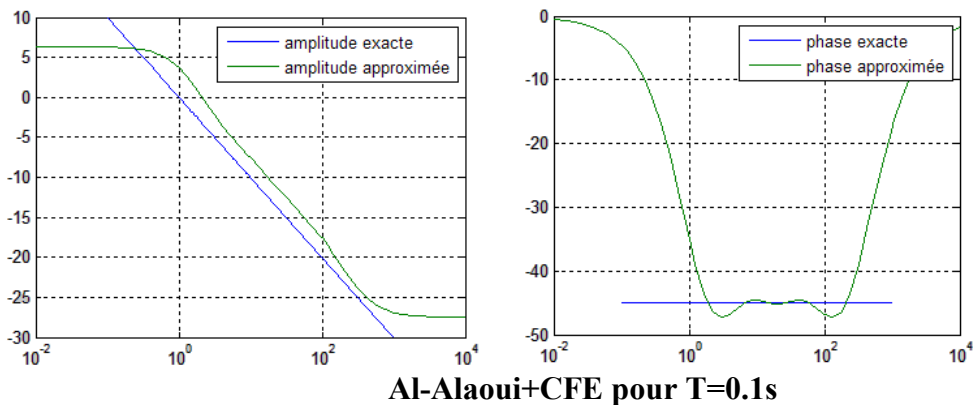
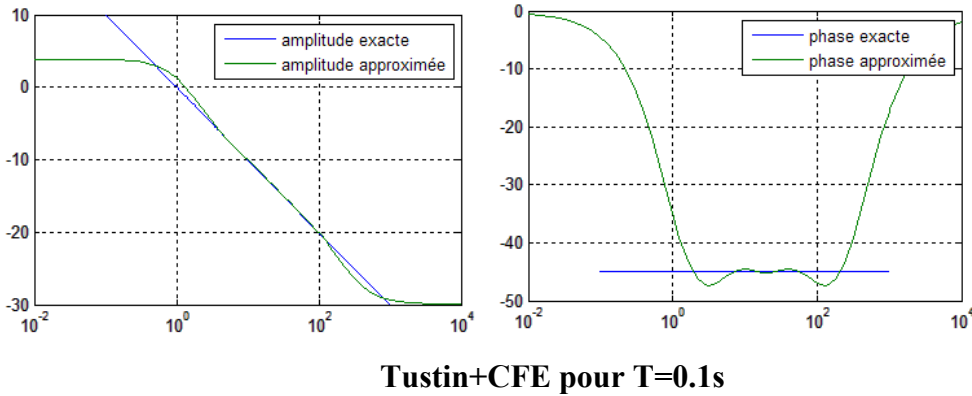


Figure IV-2- : discrétisation de $s^{-0.5}$ et la comparaison des résultats avec ceux du cas continu pour T=0.01s



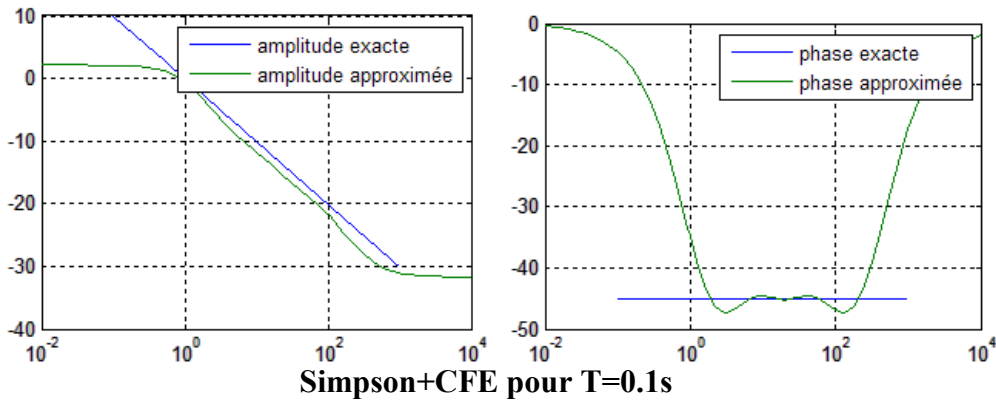


Figure IV-3- : discrétisation de $s^{-0.5}$ et la comparaison des résultats avec ceux du cas continu pour $T=0.1s$

Interprétations :

Les diagrammes de Bode présentés par les figures (IV-1),(IV-2),(IV-3), montrent que la discrétisation par la méthode de Tustin approximée par CFE , donne de meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes ; les tracés sont très proches de ceux du continu. Donc nous pouvons conclure que la discrétisation par la méthode de Tustin est la plus efficace pour reproduire les performances du cas continu.

3- Exemple 2 : Asservissement de position d'un moteur

Le système de banc d'essai d'un servomécanisme de position est un moteur à courant continu avec un arbre élastique. Le modèle utilisé dans notre simulation, schématisé par la figure (IV-1), est un banc d'essai qui se compose d'un moteur à courant continu, d'une boîte de transmission, d'un arbre élastique et d'une charge.

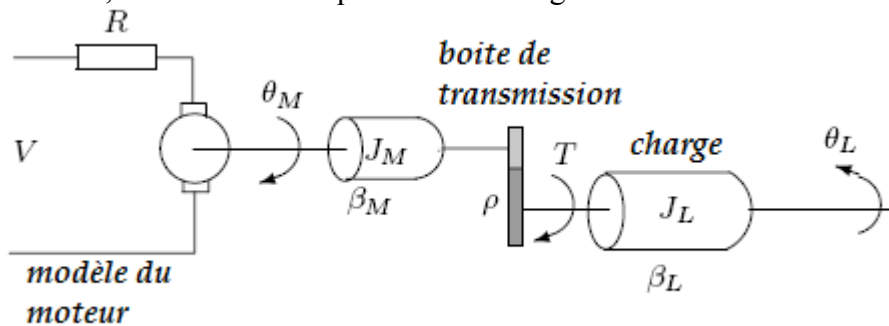


Figure IV-4- Le modèle du banc d'essai d'asservissement de position

Le système de banc d'essai de la figure (IV-4) peut être modélisé par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d\omega_L}{dt} = -\frac{k_\theta}{J_L} \left(\theta_L - \frac{\theta_M}{\rho} \right) - \frac{\beta_L}{J_L} \omega_L \quad (IV-1)$$

$$\frac{d\omega_M}{dt} = \frac{k_T}{J_M} \left(\frac{V - k_T \omega_M}{R} \right) - \frac{\beta_M \omega_M}{J_M} + \frac{k_\theta}{\rho J_M} \left(\theta_L - \frac{\theta_M}{\rho} \right)$$

Où : V est la tension appliquée au moteur.

T est le couple agissant sur la charge

ω_L est la vitesse angulaire de la charge.

ω_M est la vitesse angulaire du moteur.

J_M et J_L sont les moments d'inertie du moteur et de la charge nominale.

k_θ et k_T sont la rigidité en torsion et la constante du moteur.

β_M et β_L sont les coefficients de frottement visqueux.

ρ est le rapport de réduction.

R est la résistance de l'armature.

En définissant les variables d'état comme suit : $[\theta_L \ \omega_L \ \theta_M \ \omega_M]$, le modèle ci-dessus peut être converti en une forme dans l'espace d'état, linéaire en temps invariant (LTI) :

$$\dot{x}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_\theta}{J_L} & -\frac{\beta_L}{J_L} & \frac{k_\theta}{\rho J_L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_\theta}{\rho J_M} & 0 & -\frac{k_\theta}{\rho^2 J_M} & -\frac{\beta_M + k_T^2 / R}{J_M} \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_T}{R J_M} \end{bmatrix} V$$

$$\theta_L = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x_p \quad (IV-2)$$

$$T = \begin{bmatrix} k_\theta & 0 & -\frac{k_\theta}{\rho} & 0 \end{bmatrix} x_p$$

La seule mesure disponible pour l'asservissement est θ_L . La position angulaire de la charge doit être fixée à une valeur désirée en réglant (ajustant) la tension appliquée V. L'arbre élastique a une force de cisaillement limitée (finie) si bien que le couple T doit rester à l'intérieur de limites spécifiées. Du point de vue entrée-sortie, l'installation (le procédé) a une seule entrée V, qui est manipulée par le régulateur. Il a deux sorties, une mesurée et réinjectée au régulateur (θ_L), et une non mesurée T. Les paramètres du système asservis expérimental de position sont donnés dans le tableau suivant :

symboles	valeurs	symboles	valeurs
k_θ	1280.2	ρ	20
k_T	10	β_M	0.1
J_M	0.5	β_L	25
J_L	25	R	20

Tableau IV-1- les paramètres du système servomécanisme

En remplaçant ces valeurs dans l'équation (IV-2), on obtint la fonction de transfert du système suivante :

$$G(s) = \frac{2.56}{s^4 + 11.2 s^3 + 67.81 s^2 + 528.7 s - 1.918 \cdot 10^{-13}} \tag{IV-3}$$

Les expériences [5], ont fait le choix d'associer à ce système un régulateur d'ordre fractionnaire (PID fractionnaire) à la place d'un PID classique grâce aux améliorations qu'il apporte au système. Ce PID fractionnaire a la forme suivante :

$$C(s) = 135.12 + (0.01/s^{0.7}) - 31.6 s^{0.6} \tag{IV-4}$$

Les résultats de simulations sont donnés par la figure (IV-5):

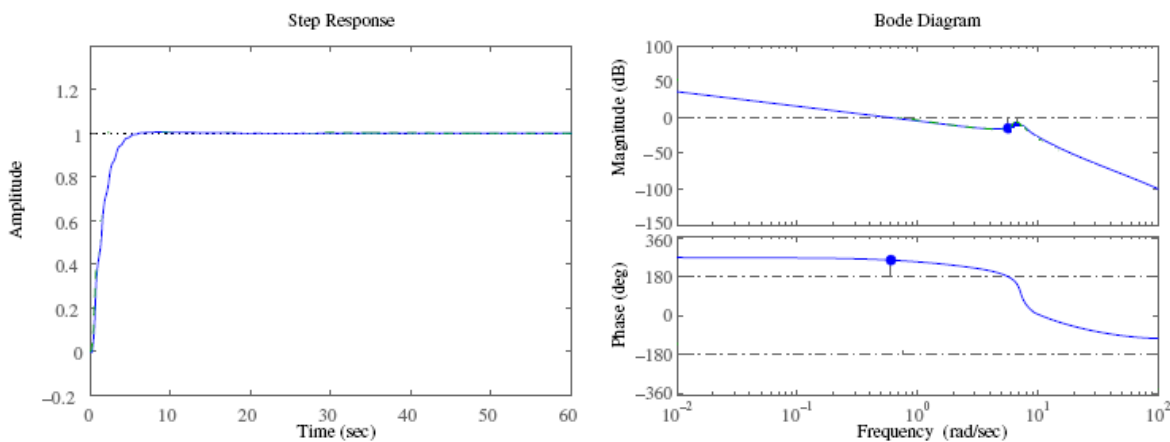


Figure IV-5- Réponse indicielle et diagramme de Bode du système corrigé par un PID fractionnaire en temps continu

Notre travail consiste à discrétiser le régulateur PID fractionnaire et l'associer au système continu. On prend comme méthode de discrétisation celle de Tustin approximée par CFE à un ordre $n=5$, et comme période d'échantillonnage $T=0.8s$ ($0.5 \leq T \leq 1.5$, théorème de Shanon), on obtient un régulateur PID fractionnaire échantillonné de la forme suivante :

$$C(z) = \frac{34340 z^6 + 24650 z^5 - 63610 z^4 - 14900 z^3 + 22570 z^2 + 2208 z - 1935}{427.3 z^6 - 42.73 z^5 - 547 z^4 + 40.59 z^3 + 164.3 z^2 - 6.782 z - 10.19} \quad (\text{IV-5})$$

Les résultats de simulation sont représentés par la figure (IV-6) :

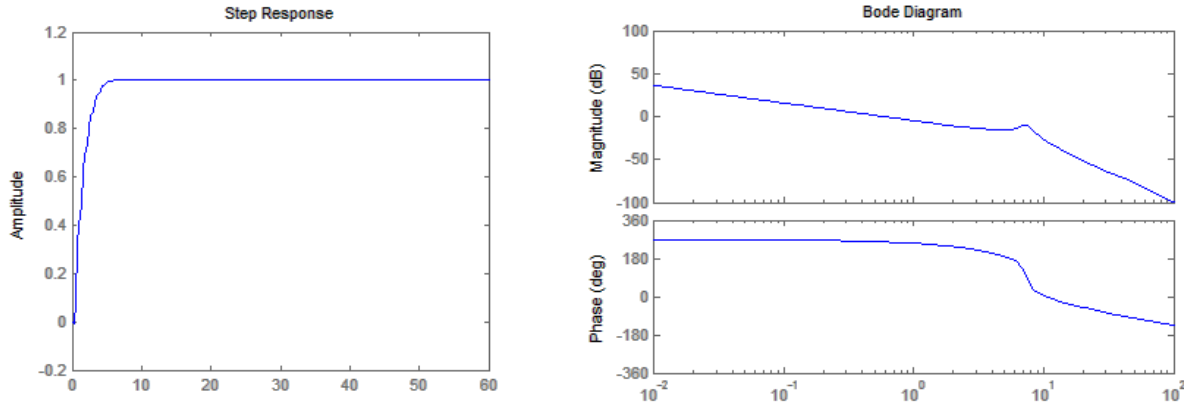


Figure IV-6- la réponse indicielle et le diagramme de Bode du système contrôlé par un PID fractionnaire échantillonné

La figure (IV-6) présente la réponse indicielle et les diagrammes de Bode du système entier continu contrôlé par un régulateur PID fractionnaire discrétisé par la méthode de Tustin. On remarque que le système est stable et a une réponse indicielle de mêmes caractéristiques que celle du cas continu. Ceci est aussi vrai pour les diagrammes de Bode de phase.

4- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les méthodes de discrétisation sur deux exemples. Le premier exemple consiste à illustrer les performances de ces méthodes sur un intégrateur. Dans le second exemple, nous avons considéré un asservissement contrôlé par un régulateur d'ordre fractionnaire. Il s'agit de montrer la possibilité d'implémenter numériquement un régulateur fractionnaire et d'analyser les performances et les dégradations introduites. L'exemple 1 a bien montré l'efficacité de la méthode de discrétisation de Tustin pour reproduire les performances du cas continu. Cette méthode a donc été appliquée sur le deuxième exemple. Les résultats obtenus sur les performances de l'asservissement sont proches de ceux du cas continu.

Notre travail a pour objectif l'étude des méthodes de discrétisation de régulateurs fractionnaires en vue de leur implémentation sur un ordinateur. Cette étude est illustrée par deux exemples numériques qui nous ont permis de comparer les différentes méthodes.

Nous avons étudié la méthode directe qui consiste dans une première étape à remplacer l'opérateur symbolique fractionnaire par une fonction génératrice dans le domaine discret puis dans une seconde étape à approximer la fonction de transfert fractionnaire en z ainsi obtenue par des méthodes d'approximation.

Au terme de notre étude et sur la base de l'analyse des résultats de simulation, nous avons pu dégager les conclusions suivantes :

- La méthode d'expansion en fraction continue CFE donne de meilleurs résultats parmi les autres méthodes d'approximations (PSE, Taylor).
- La fonction génératrice de Tustin est la plus appropriée car elle permet de reproduire fidèlement les performances obtenue dans le domaine en temps continu.
- L'approximation est d'autant meilleure que l'ordre de troncature est plus grand.
- La période d'échantillonnage influe sur la plage de fréquences où l'approximation est réellement réalisée.

Cette comparaison ne peut être ni exhaustive ni irréfutable. Elle est basée sur un examen plus ou moins visuel sur des tracés de simulation obtenus sur deux exemples. Cependant, elle constitue une base de réflexion pour une étude plus approfondie et éventuellement obtenir des arguments théoriques permettant de comparer l'efficacité des différentes méthodes.

Ce projet nous a permis de découvrir un outil tout à fait nouveau qui est celui de la dérivation non entière et l'intérêt qu'il possède dans la modélisation des systèmes physiques et dans leur commande.

Comme perspective à notre travail, nous envisageons les directions suivantes :

- Implémentation réelle du régulateur fractionnaire échantillonné sur le banc d'essai expérimental constitué d'un aérotherme existant au laboratoire L2CSP et comparer ses performances en robustesse à celles de la commande adaptative déjà mise en œuvre.
- Etude des méthodes indirectes.
- Proposition d'une méthode unifiée paramétrée afin de faciliter le choix de l'implémentation.

Notre travail a pour objectif l'étude des méthodes de discrétisation de régulateurs fractionnaire en vue de leur implémentation sur un ordinateur. Cette étude est illustrée par deux exemples numériques qui nous ont permis de comparer les différentes méthodes.

Nous avons étudié la méthode directe qui consiste dans une première étape à remplacer l'opérateur symbolique fractionnaire par une fonction génératrice dans le domaine discret puis dans une seconde étape à approximer la fonction de transfert fractionnaire en z ainsi obtenue par des méthodes d'approximations.

Au terme de notre étude et sur la base de l'analyse des résultats de simulation, nous avons pu dégager les conclusions suivantes :

- La méthode d'expansion en fraction continue CFE donne de meilleurs résultats parmi les autres méthodes d'approximations (PSE, Taylor).
- La fonction génératrice de Tustin est la plus appropriée car elle permet de reproduire fidèlement les performances obtenues dans le domaine temps continu.
- L'approximation est d'autant meilleure que l'ordre de troncature est plus grand.
- La période d'échantillonnage influe sur la plage de fréquences où l'approximation est réellement réalisée.

Cette comparaison ne peut être ni exhaustive irréfutable. Elle est basée sur un examen plus ou moins visuel sur des tracés de simulation obtenus sur deux exemples. Cependant, elle constitue une base de réflexion pour une étude plus approfondie et éventuellement obtenir des arguments théoriques permettant de comparer l'efficacité des différentes méthodes.

Ce projet nous a permis de découvrir un outil tout à fait nouveau qui est celui de la dérivation non entière et l'intérêt qu'il possède dans la modélisation des systèmes physiques et dans leur commande. Il nous a permis aussi

Comme perspective à notre travail, nous envisageons les directions suivantes

- Implémentation réelle du régulateur fractionnaire échantillonné sur le banc d'essai expérimental constitué d'un aérotherme existant au laboratoire L2CSP et comparer ses performances en robustesse à celles de la commande adaptative déjà mise en œuvre.
- Etude des méthodes indirectes
- Proposition d'une méthode unifiée paramétrée afin de faciliter le choix de l'implémentation.

Bibliographie

[1] **A.Oustaloup**: « Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire ». Edition Masson, PARIS, 1983.

[2] **A.Oustaloup** (1995) : « La dérivation non entière : théorie synthèse et application ». Edition Hermes, Paris, 1995

[3] **T.Abdennebi ép. Djamah**: « Identification des systèmes par des modèles d'ordre fractionnaire ». Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU, 2010.

[5] **R.Mansouri**: « Contribution à l'analyse et la synthèse des systèmes d'ordre fractionnaire par la représentation d'état ». Tèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU, 2008.

[6] **B.M.Vinagre, Y.Q.Chen et I.Petras** : « Two methods for Direct Discretisation of Fractional-order Differentiator/Integrator ». Automatica, Elsevier Journal, 2001.

[7] **D.Xue, C.Zahao et Y.Q.Chen** : « Fractional Order PID Control of a DC-Motor with Elastic Shaft : A case Stady ». Proceeding of the 2006 American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16,2006.

[9] **L.Ait-Messaoud** : « application de la dérivation d'ordre fractionnaire en regulation ». Mémoire de Magister, Université Mouloud Mammeri de TIZI-OUZOU, 2009.

