REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT MATHEMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER
en
MATHÉMATIQUES

Spécialité
Recherche Opérationnelle : Aide à la décision

Thème

Contrôle Optimal Dans Une Banque d'Investissement

Présenté par :

Guenoun Henia
Issaoun Dalila

Devant le jury d'examen composé de :

B.Oukacha	**UMMTO**	**Président**
F.Rezki	**UMMTO**	**Examinatrice**
M.Aidene	**UMMTO**	**Promoteur**

soutenu : Octobre 2017

Table des matières

Remerciements

Avant tout propos, nous remercions «**Dieu** » le tout puissant qui nous a donné la sagesse et la santé pour faire ce modeste travail.

C'est avec un grand plaisir que nous exprimons nos gratitudes et nos sincères remerciements à notre promoteur : **Mr Aidene Mohamed** pour son orientation et encadrement dans l'élaboration de ce mémoire de fin d'études, nos remerciements vont aussi à tous les membres du jury pour avoir accepter d'honorer par leur jugement notre travail, et pour leur participation au jury.

Toutes nos reconnaissances sont adressées à tous les enseignants qui nous ont suivi infatigablement durant tout notre cursus universitaire.

Nous tenons à exprimer tout au fond de nos cœurs les reconnaissances à nos familles qui nous ont offert toujours un appui sûr par leurs soutiens et leurs encouragements. Nos vifs remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

A mes chers parents

A mes chers fréres et ma soeur

A toute ma famille

A tous mes amis en particulier Zohra et Lynda

A ma binôme Dalila

A tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin

Je dédie ce travail

Henia

Dédicaces

A mes chers parents

A mon cher mari

A mon cher frére et chères soeurs

A toute ma famille

A tous mes amis en particulier Zohra et Lynda

A ma binôme Henia

A tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin

Je dédie ce travail

Dalila

Introduction Générale :

L'optimisation peut être définie comme une branche mathématique orientée vers la recherche de la meilleure façon d'opérer des choix en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible. Elle fait partie des aides à la décision dans la mesure où elle propose des modèles conceptuels en vue d'analyser et de maîtriser des situations complexes pour permettre aux décideurs de comprendre et d'évaluer les enjeux et d'arbitrer ou de faire les choix les plus efficaces.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard...Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie...L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certains critères d'optimisation (contrôle optimal). Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales.

Historiquement, le problème de contrôle optimal est apparu après la seconde guerre mondiale dans le cadre de calcule des variations, répandant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique de vol. La formalisation de cette théorie a posé des questions nouvelles ; par exemple dans la théorie des équations différentielles ordinaires, et a motivé un concept de solution généralisé et a engendré de nouveaux résultats d'existence de trajectoires optimales.

On considère que la théorie moderne du contrôle optimal a commencée dans les années cinquante, avec la formulation du principe du maximum de Pontryagin, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcule des variations. Dès lors, la théorie a connu un essor spectaculaire, ainsi que de nombreuses applications. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien(nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : systèmes de freinage, assistance à la conduite, servomoteur, thermostats, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, circuits électriques, électroniques, télécommunications en général, contrôle des procédés chimiques, chaînes industrielles, ...La liste est infinie, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Le contrôle optimal sert à trouver une lois de commande pour un système donné de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint. Un problème de commande comprend donc un coût à optimiser, une fonction d'état est une variable de contrôle. Un problème de contrôle optimal se décomposer en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Pour les systèmes de contrôle linéaire en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R.E.Kalman, et pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. En suite une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum(ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal,on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir :

— Les méthodes directes : consistent à discrétiser le problème de contrôle(l'état et la commande)pour tout instant et se ramène à un problème d'optimisation ainsi obtenu, en se basant,par exemple, sur les méthodes d'Euler, Runge-Kutta, etc. Ces méthodes sont les plus simples à mettre en ouvre.

— Les méthodes indirects : quant à elles, consistent à appliquer le Principe du Maximum de Pontryagin(PMP), qui donne des conditions nécessaires d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant ces conditions. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation.

Dans ce mémoire on va résoudre le problème d'investissement dans une banque pour trouver le meilleur investissement (la commande optimale) pour avoir un bénéfice maximal en minimisant le temps.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

Chapitre 1 :

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique d'équations différentielles ordinaires qui sont la base fondamentale du contrôle optimal.

chapitre 2 :

Nous rappelons la formulation d'un problème de contrôle optimal, et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires, puis nous donnons l'énoncé général de Principe du Maximum de Pontryagin, et à la fin les méthodes numériques de résolution (les méthodes directes et les méthodes indirectes).

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution du problème en utilisant le Principe du Maximum de Pontryagin, et la présentation des résultats numériques obtenu sur MATLAB.

Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction :

Les équations différentielles constituent l'un des chapitres les plus importants de l'analyse, plusieurs problèmes pratiques sont modélisés par des équations différentielles.

Une équation différentielle est une relation entre une variable réelle, une fonction qui dépend de cette variable et un certain nombre de ses dérivées successives.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques,...etc. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiabilité, auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

1.2 Définitions fondamentales :

Définition 1.2.1.

Soit $X = \varphi(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \in \Re$, supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins, et que en tout point $t \in I$, il existe entre x et ses n premières dérivées une relation de la forme :

$$\varphi(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{d^2t}, ...\frac{d^nx}{d^nt}) = 0 \tag{1.1}$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = \varphi(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée " équation différentielle d'ordre n ".

Définition 1.2.2.

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de $\Re$, toute fonction $x = \varphi(t) \quad (t \in I)$, n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I.

Définition 1.2.3.

Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé "courbe intégrale"

1.3 Problème de Cauchy :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in [a, b] \tag{1.2}$$

avec $f : [a, b] * \Re^n \to \Re^n$

On appelle problème de Cauchy pour l'équation (1.2), le problème avec condition initiale en un point $t_0 \in [a, b]$ suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [a, b] \\ x(t_0) = x_0, t_0 \in [a, b], \quad x_0 \in \Re^n \end{cases} \tag{1.3}$$

Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $x(t)$ de l'équation (1.2) vérifiant la condition appelée : "condition initiale (t_0, x_0)".

Remarque :
Dans de nombreux exemples physiques, la variable t représente le temps, l'instant t_0 est alors appelé "instant initial"

Théorème 1.3.1. ***(Théorème d'existence et d'unicité)*** *[2]*

Si la fonction f est continue sur $[a, b] \in \Re$ et vérifie la condition de Lipschitz de rapport $L > 0$ suivante :
$\forall t \in [a, b], \quad \forall (x_1, x_2) \in \Re^n,$
$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$

alors le problème de Cauchy (1.3) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une solution globale unique.

1.4 Équations différentielles ordinaires :

1.4.1 Équations différentielles à variables séparées :

Définition 1.4.1.

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t)$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x).f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

donc

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

1.4.2 Équation différentielles homogènes :

Définition 1.4.2.

Une équation différentielle est dite homogène lorsqu'on peut la mettre sous la forme

$$\dot{x} = f(x/t) \tag{1.4}$$

Pour la résoudre on pose :

$Z(t) = x(t)/t$ *alors :*

$\dot{x} = \dot{Z}t + Z$

On reporte ces équations dans l'équation différentielle (1.4) *on obtient :*

$\dot{Z}t + Z = f(Z) \Leftrightarrow \dot{Z} = (f(Z) - Z)/t$

qui est une équation différentielle à variables séparées.

1.4.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre :

Définition 1.4.3.

Soient a, b et c trois fonctions définies sur un intervalle I de $\Re$ et x la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I. On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de type :

$$(E) : a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = c(t)$$

★ Solution générale de l'équation sans seconde membre :

Soit $(E_0) : a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = 0$, cette équation est appelée équation différentielle sans second membre, ou encore équation homogène associée à (E).

a étant une fonction ne s'annulant pas, on peut encore écrire

$$(E_0) : \dot{x}(t) + \frac{b(t)}{a(t)}x(t) = 0$$

.

Théorème 1.4.1. *[3]*

a et b étant des fonctions dérivables sur I avec a ne s'annulant pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0) : x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)}x(t) = 0$ est l'ensemble des fonctions x définies sur I par : $x(t) = ke^{-G(t)}$ où k est une constante réelle et G une primitive de la fonction $\gamma(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$

★ Solution particulière de l'équation différentielle (E) :

Définition 1.4.4.

On appelle "solution particulière" de l'équation différentielle $a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = c(t)$ toute fonction x vérifiant cette équation.

Remarque :

Pour obtenir une solution particulière de (E), soit une fonction proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est-à-dire de remplacer les "x" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre.

★ Ensemble des solutions d'une équation différentielle :

Théorème 1.4.2. *[3]*

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ où x_0 est la solution de l'équation sans second membre, et x_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Théorème 1.4.3. *[3]*

Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) possède une unique solution vérifiant une condition initiale de type : $x(A) = B$.

1.4.4 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants :

Définition 1.4.5.

Soient $a \neq 0$, b et c trois constantes réelles, d une fonction dérivable sur I et x la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur I.
On appelle "équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants" toute équation de type

$$(E) : a\dot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = d(t)$$

.

★ Solution générale de l'équation sans second membre :

Théorème 1.4.4. *[3]*

On considère l'équation différentielle sans second membre $(E_0) : a\dot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, l'équation caractéristique associée est : $ar^2 + br + c = 0$.
Les solutions de (E_0) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: (dans tous les cas, a et b sont des constantes réelles quelconques avec $a \neq 0$) sont données ci-dessous :

Cas 1 : $\Delta > 0$

a-Solutions de l'équation caractéristique associée :

Deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad et \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

b-Solution générale de (E_0) ***:***

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Cas 2 : $\Delta = 0$

a-Solutions de l'équation caractéristique associée :

Une racine double réelle :

$$r = -\frac{b}{2a}$$

b-Solution générale de* (E_0) *:

$$x(t) = (At + B)e^{rt}$$

Cas 3 : $\Delta < 0$

a-Solutions de l'équation caractéristique associée :

Deux racines complexes conjuguées

$$\alpha + i\beta \quad et \quad \alpha - i\beta$$

b-Solution générale de* (E_0) *:

$$x(t) = e^{\alpha t}[Acos(\beta t) + Bsin(\beta t)]$$

★ Solution particulière de l'équation différentielle (E) :

Définition 1.4.6.

On appelle solution particulière de l'équation différentielle $a\dot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = d(t)$ toute fonction x vérifiant cette équation.

Remarque :

Pour obtenir une solution particulière, ainsi une fonction est supposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est-à-dire de remplacer les "x" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre.

★ Ensemble de solutions d'une équation différentielle :

Théorème 1.4.5. *[3]*

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme : $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ où x_0 est la solution de l'équation sans second membre et x_p une solution particulière de l'équation complète.

Théorème 1.4.6. *[3]*

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) *possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales.*

1.5 Méthodes de résolutions numériques :

Pour résoudre les équations différentielles, il existe plusieurs méthodes : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et n'est possible que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles ; parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit.

1.5.1 Méthode d'Euler :

En mathématiques, la méthode d'Euler nommée ainsi en l'honneur du mathématicien *Leonahard Euler*, est une procédure numérique pour résoudre approximativement des équations différentielles du premier ordre avec une condition initiale (problème de Cauchy) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) & \\ x(t_0) = x_0 & \qquad\qquad (\textit{condition initiale}) \\ t \in [t_0, t_n] & \end{cases}$$

Où f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note C_f sa courbe représentative dans un repère quelconque.
On veut déterminer les valeurs approchées des images de n nombres $x_1, x_2, ...x_n$ par cette fonction et construire la courbe intégrale sur l'intervalle $I = [t_0, t_n]$ même si on ne connaît pas l'expression de f explicitement.
On peut diviser I en n intervalles et on choisit :

$h = \frac{t_n - t_0}{n}$ ou encore $h = t_i - t_{i-1}$

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h \\ t_2 = t_1 + h = t_0 + 2h \\ . \\ . \\ . \\ t_n = t_{n-1} + h = t_0 + nh \end{cases}$$

Pour tout réel $t_i \in I$, on a :

$$f(t_i) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h} \simeq \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h}$$

quand h est très proche de zero, alors :
$x(t_i + h) = x(t_i) + f(t_i)h$ est une équation de la tangente à la courbe C_f en t_i, $\quad i = \overline{0.n}$.

Supposons qu'on connaît :
.La dérivée f de x ;
.Un point $M_0(t_0, x_0)$ de la courbe avec $x_0 = x(t_0)$;
.Un pas h fixé, proche de 0 ;
alors, pour $i = 0$:
$x_1 = x(t_1) = x(t_0 + h) = x(t_0) + f(t_0)h$
$M_1(t_1, x_1)$ est le deuxième point proche de la courbe C_f.
Le segment $[M_0, M_1]$ approche la courbe sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.
On peut itérer cette méthode afin d'obtenir une courbe approchée de C_f donnée par $x_{n+1} = x_n + hf(t_n)$.

a-Méthode d'Euler explicite :

L'équation $\dot{x} = f(t, x)$ est discrétisée comme :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t_i) = f(t_i, x_i) \simeq \frac{x_{i+1} - x_i}{h}$$

x_i : connu ;
x_{i+1} : inconnu ;
$h = t_{i+1} - t_i$: le pas de la méthode.
d'où :

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h$$

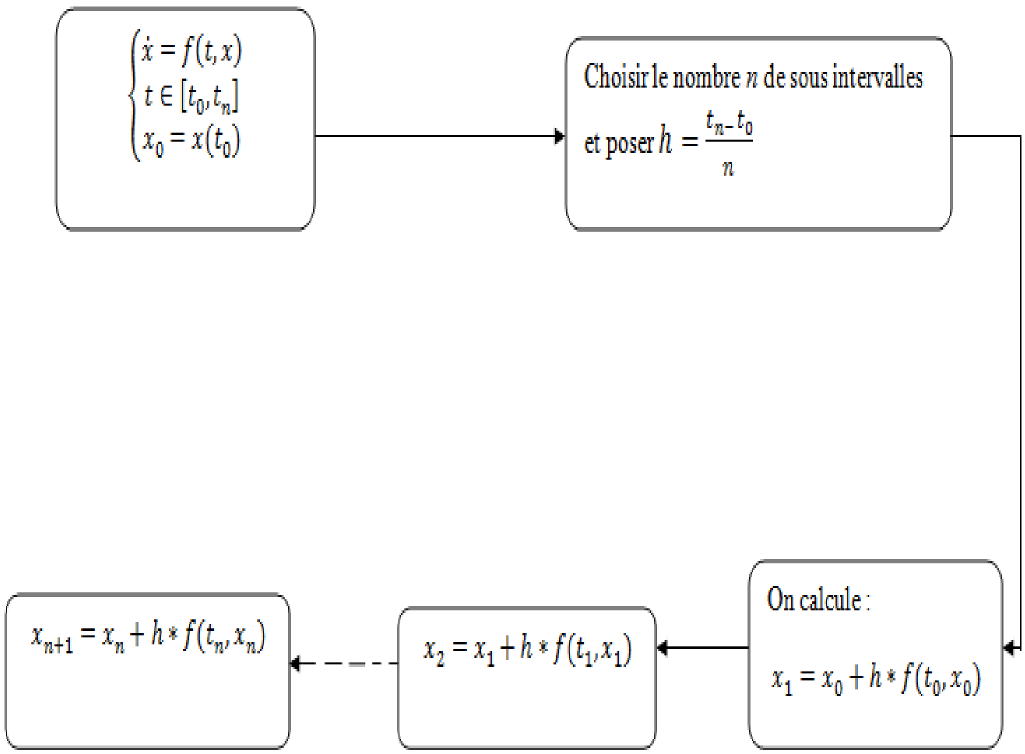

FIGURE 1.1 – Diagramme de la méthode d'Euler explicite

b-Méthode d'Euler implicite :

L'équation $\dot{x} = f(t, x)$ est discrétisée comme :

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t_i) = f(t_i) \simeq \frac{x_{i+1} - x_i}{h}$$

d'où :

$$x_i = x_{i+1} - f(t_{i+1}, x_{i+1})h$$

.

Exemple : Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\dot{x} = ax, \qquad x(t_0 = 0) = 1 \ , \qquad avec \ \ a \in \Re$$

— **La méthode d'Euler explicite :**

Selon cette méthode alors :
$x_{i+1} = x_i + hax_i = x_i(1 + ha)$

— **La méthode d'Euler implicite :**

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1})$$

Si f est assez régulière(une fonction suffisamment dérivable) et h est assez petit ; le schéma implicite a une solution unique :$\dot{x} = ax$, $x(0) = 1$
alors :$x_{i+1} = x_i + hax_{i+1}$ et $x_i = x_{i+1}(1 - ha)$.

1.5.2 Méthode de Runge-Kutta (RK) :

Considérons le problème de Cauchy du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) & \\ x(t_0) = x_0 & \qquad \textit{condition initiale} \\ t \in [t_0, t_n] & \end{cases}$$

Les méthodes RK utilisent plus d'un point intermédiaire pour calculer la valeur de x_{i+1} à partir de la valeur de x_i $(i = \overline{0.n})$.
Ces méthodes définissent deux étapes successives ; où $h = t_{i+1} - t_i$ est le pas de discrétisation en t :

Étape 1 :

Elle permet de définir les valeurs de t ; en connaissant :
-le terme initial : t_0 ;
-la relation de récurrence : $t_i = t_{i-1} + h$

Étape 2 :

Elle permet d'évaluer les valeurs de x, en connaissant :
-le terme initial : x_0 ;
-la relation de récurrence de chaque méthode RK2

a-Méthode RK2 :

Les étapes de la méthode de RK2 sont :
$a-$ utiliser la méthode d'Euler sur un demi pas : $x_{\frac{i+1}{2}} = x_i + f(t_i, x_i)\frac{h}{2}$
$b-$ poser $f_{i+\frac{1}{2}} = f(t_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$
$c-$ sur la totalité de pas : $x_{n+1} = x_n + f_{n+\frac{1}{2}}h$

b-Méthode RK4 :

Les étapes de la méthode RK4 sont :
$a-$ calculer la première variante : $k_1 = f(t_i, x_i)h$
$b-$ au milieu du pas on pose : $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2})h$
$c-$ calculer l'évaluation $k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2})h$
$d-$ calculer l'évaluation $k_4 = f(t_i + h, x_i + k_3)h$

alors :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}$$
.

L'interprétation géométrique des variantes k_1, k_2, k_3, k_4 :
k_1 : est la pente du début de l'intervalle ;
k_2 : est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de x au point $t_n + \frac{h}{2}$ par le biais de la méthode d'Euler ;
k_3 : est de nouveau, la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer x ;
k_4 : est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur x calculée en utilisant k_3
x_{n+1} : est le schéma de la méthode RK_4, ou bien la moyenne des quatre pantes, en affectant des poids plus grands aux pantes au point milieu.

Le diagramme ci-dessous résume les étapes de la méthode :

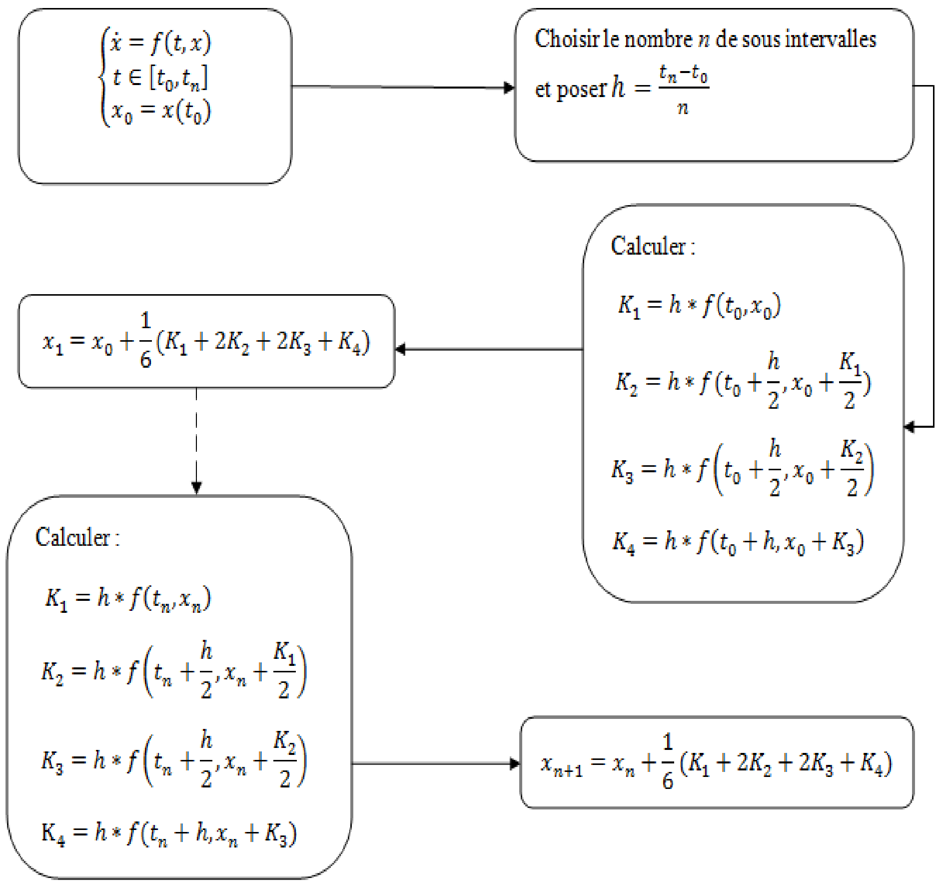

FIGURE 1.2 – Diagramme de la méthode de Runge Kutta 4

Chapitre 2

Contrôle optimal

2.1 Introduction :

La commande optimale a pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de cette discipline, ainsi que des applications dans des domaines très divers. La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (où contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un état final en minimisant un certain critère. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentielles, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard...Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, biologie, chimie, économie...L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certain perturbation (stabilisation), ou encore déterminer des solutions optimales, ou commande optimale.

2.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal :

Un problème de contrôle optimal comporte trois (3) éléments :

$a-$ Une fonction objectif (coût) J donnée :

$$J(u(t)) = C(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)\, dt \longrightarrow opt \tag{2.1}$$

$b-$ Une contrainte qui prend la forme d'une équation différentielle du 1^{er} ordre décrivant l'évaluation de la variable d'état :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \tag{2.2}$$

$c-$ Des conditions spécifiant les valeurs limites des trajectoires des variables d'état :

$$x(t_0) = x_0 \in M_0 \qquad x(t_f) = x_f \in M_1 \tag{2.3}$$

t : indice de temps ;
t_0 : le temps initial ;
t_f : temps final ;
$x(t)$: le vecteur des variables d'état ;
$x(t_0)$: les valeurs initiales ;
$x(t_f)$: les valeurs finales ;
$u(t)$: le vecteur des variables de contrôle (commande) ;
Nous supposons que chaque composante de ce vecteur est une fonction continue par partie du temps t, mesurable et bornée ;
U : l'ensemble des contrôles admissibles ;
c : une application de classe c^1 par rapport à x et aussi est une fonction algébrique scalaire appelée le dividende terminal ;

g : la fonction coût intermédiaire ;
M : variété différentielle $\Re^n$;
n et m sont les cardinalités des vecteurs d'état et de contrôle respectivement ;
f : une fonction suffisamment régulière dérivable.

Dans tous qui se suit on note :
$x = x(t), \quad u = u(t).$
$x_0 = x(t_0), \quad x_f = x(t_f).$

Le problème général du contrôle optimal est de la forme :

$$J(u) = c(x_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x, u, t)\, dt \longrightarrow opt$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \\ x(t_f) = x_f \in M_1 \\ u \in U \end{cases} \tag{2.4}$$

Remarque : Dans le cas linéaire le système différentielle du problème (2.4) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, t_f] \end{cases} \tag{2.5}$$

$A(n * n)$: la matrice d'état ;
$B(n * m)$: la matrice de contrôle ;

L'objectif de résolution d'un problème de contrôle est de trouver une solution optimale (contrôle optimal) ou de stabiliser le système (problème de stabilisation).

2.3 Définitions essentielles :

Définition 2.3.1. ***(signal d'entrée)***

On appelle signal d'entrée le stimulus appliqué au système de commande au moyen d'un contrôle afin d'y provoquer une réponse spécifique.

Définition 2.3.2. ***(Signale de sortie)***

On appelle signale de sortie la réponse effective obtenue à partir d'un système.

Définition 2.3.3. ***(Système en boucle ouverte)***

Un système en boucle ouverte est un système où le signal de commande (contrôle) est indépendant du signale de sortie. Dans les systèmes de ce type le contrôle est une application.

$$t \mapsto u(t)$$

d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles présentés dans le diagramme suivant :

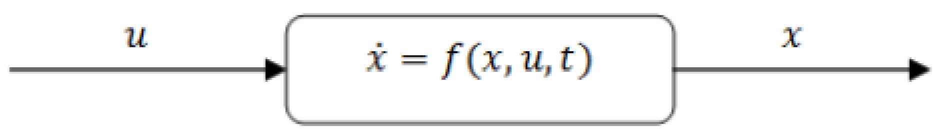

FIGURE 2.1 – Système en boucle ouverte

Définition 2.3.4. ***(Système en boucle fermée)***

Un système en boucle fermée est un système où le signal de commande (le contrôle) dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie.
ces contrôles sont appelés rétroaction ou bouclage (feed back) ce sont des applications

$$u \mapsto R(x(t))$$

définies sur les variables d'état du système.

Le système en boucle fermée est donné par :

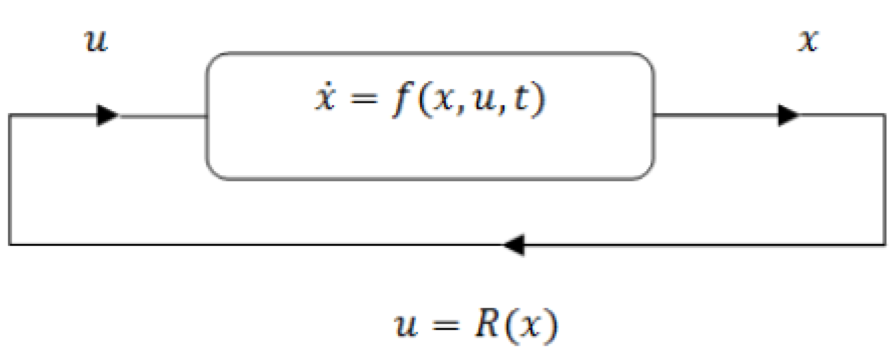

FIGURE 2.2 – Système en boucle fermée

Définition 2.3.5. ***(Contrôle admissible)***

On désigne par U un ensemble convexe fermé de $\Re^m$, un contrôle u est dit admissible si $u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq t_f$.

Définition 2.3.6. ***(Contrôle réalisable)***

Un contrôle est dit réalisable s'il est admissible et que la réponse x satisfait aux conditions terminales.

Définition 2.3.7. ***(Contrôle optimal)***

Un contrôle u est dit optimal si la trajectoire associée à u vérifie

$$x_f \in frAcc(t_f)$$

$frAcc$: est la frontière de l'ensemble accessible Acc.

2.4 Différents type de système de contrôle :

2.4.1 Système de contrôle linéaire :

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \tag{2.6}$$

Les solutions de ce système linéaire sont données par :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))\, ds$$

$M(.)$ est la résolvante du système homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t), \ \ M(0) = Id$

2.4.2 Système de contrôle non linéaire :

On appelle un système du contrôle non linéaire, tout système différentielle de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x \in M, \quad u \in U \tag{2.7}$$

f non linéaire. Le système (2.8) s'obtient par linéarisation de système non linéaire (2.7) à l'équilibre (x_e, u_e) pour que $f(x_e, u_e) = 0$.
si on pose

$X = x - x_e,$ $\qquad\qquad V = u - u_e,$

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e, u_e),$ $\qquad\qquad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_e, u_e)$

On obtient l'équation :

$$\dot{x} = AX + BV + O(X, V) \tag{2.8}$$

Le système commandé donné par (2.8) s'appelle alors, *l'approximation linéaire* (ou *le linéarisé tangent*) du système non linéaire (2.7)

2.5 Ensemble d'accessibilité :

2.5.1 Cas linéaire :

Définition 2.5.1.
Considérons le système :

$$\forall\ t \in I: \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.9}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f)\ /u \in [t_0, t_f]\}$$

Où $x_u(.)$ est la solution de système (2.9) associée au contrôle u.
Autrement dit $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités terminales des solutions de (2.9) au temps t_f, lorsqu'on fait varier le contrôle u. On peut dire aussi, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps t_f.

Théorème 2.5.1. *[1]*

Considérons le système de contrôle linéaire dans $\Re^n$

$$\forall\ t \in I: \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t); \quad x(t_0) = x_0$$

Où $\Omega \subset \Re^m$ est compact. Soit $t_f > 0$ et $x_0 \in \Re^n$, alors pour tout $t \in [t_0, t_f]$, $Acc(x_0; t_f)$ est un compact, convexe et varie continûment avec $t \in [t_0, t_f]$.

2.5.2 Cas non linéaire :

Définition 2.5.2.

L'ensemble accessible en temps t_f pour le système (2.7), noté $Acc(x_0, t_f)$, est l'ensemble des extrémités au temps t_f des solutions du système partant de x_0 au temps $t = 0$. Autrement dit, c'est l'image de l'application entrée-sortie en temps t_f.

Théorème 2.5.2. *[6] Considérons le système de contrôle*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \ \ x(t_0) = x_0$$

Où la fonction f est de classe C^1 sur $\Re^{1+n+m}$, et les contrôles u appartiennent à l'ensemble U des fonctions mesurables à valeur dans un compact $\Omega \subset \Re^m$. On suppose que :

— *il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée est uniformément bornée par b sur $[t_0, t_f]$, i.e.*

$$\exists\ b > 0 \mid \forall\ u\ \ \in U\ \ \ \forall t \in [t_0, t_f]\ \ \ \|x_u(t)\| \leq b \tag{2.10}$$

— *pour tout (t, x), l'ensemble des vitesses*

$$V(t, x) = \{f(t, x, u) | u \in \Omega\} \tag{2.11}$$

est convexe. Alors l'ensemble $Acc(x_0, t)$ est compact et varie continûment en t sur $[t_0, t_f]$

2.6 Commandabilité (contrôlabilité) :

2.6.1 commandabilité des systèmes linéaires autonomes :

Définition 2.6.1.

Pour certains types de problèmes, avant leurs résolutions, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions en utilisant les notions de commandabilité ou contrôlabilité. Elle consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois le problème de contrôlabilité est résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère.

Définition 2.6.2.

Un système défini par :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

est dit autonome si les matrices $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont constantes, (ne dépendent pas du temps),

c'est-à-dire $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) + r(t), \qquad x(t_0) = x_0$

Définition 2.6.3.

Le système autonome $\dot{x} = Ax + Bu$ où l'état $x \in \Re^n$, la commande (on dit aussi l'entrée) $u \in \Re^m$ et les matrices A et B sont constantes et de tailles $n * n$ et $n * m$ respectivement, est dit contrôlable (ou commandable) si pour tous les états x_0 et $x_1 \in \Re^n$, il existe une commande mesurable, bornée $u(t)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en un temps fini t.

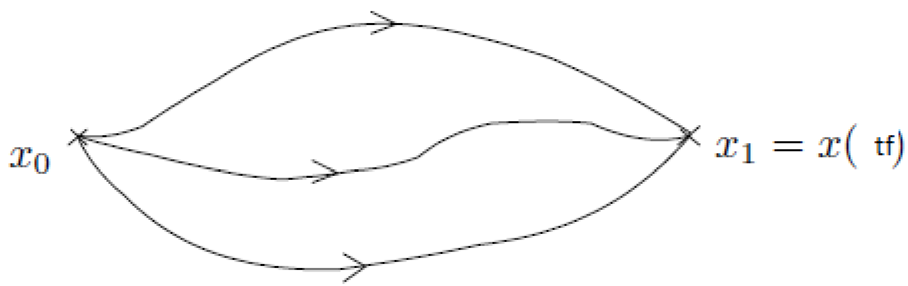

FIGURE 2.3 – Trajectoires associées à la commande u reliant x_0 à x_1

Le critère de Kalman :

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient A et B deux matrices constantes sur $[t_0, t_f]$ et on note :

$$C = C(A, B) = (B, AB, ..., A^{n-1}B)$$

La matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, ..., A^{n-1}B$.

Théorème 2.6.1. ***(Critère de Kalman)****[4]*

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est commandable en temps t_f (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman C est de rang $n =$

$dim(x)$, on écrit :

$$rang(A, B) = n$$

Remarque :

La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de x_0. Autrement dit si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Exemple :

Soit le système décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Où : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ (états), $m = 1$ (entrée).

Et la matrice de commandabilité associée :

$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$det(C) = -1 \neq 0 \Rightarrow rang \quad C = n = 2$

donc le système est commandable (contrôlable).

2.6.2 commandabilité des systèmes non linéaire

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le système linéarisé partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire. Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Étant donnée un point $x_1 \in \Re^n$, trouver un temps t_f et un contrôle u sur $[t_0, t_f]$ tel que la trajectoire x_u associée à u, vérifie :

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(t_f) = x_1$$

.

Définition 2.6.4.

soit $t_f > 0$*, l'application entrée-sortie en temps* t_f *du système contrôlé* (2.12) *initialisé à* x_0 *est l'application :*

$$\begin{aligned} E_{x_0,t_f} : U &\longrightarrow \Re^n \\ u &\longmapsto x_u(t_f) \end{aligned}$$

Où U *l'ensemble des contrôles admissibles, i.e l'ensemble des contrôles* u *tel que la trajectoire associée est bien définie sur* $[t_0, t_f]$*. Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps* t_f *associe à un contrôle* u *le point final de la trajectoire associée à* u

Définition 2.6.5.

Le système (2.12) *est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis* x_0 *si :*

$$\Re^n = \cup_{t_f \geq 0} Acc(x_0, t_f)$$

il est dit contrôlable en temps t_f *si :* $\Re^n = Acc(x_0, t_f)$

2.7 Principe du maximum :

Dans cette section on donne une version générale de principe du maximum de Pontryagin. Ce théorème est difficile à démontrer. En revanche lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la preuve est simple, et on arrive au principe du maximum dit faible. C'est à cette version plus simple que nous allons d'abord nous intéresser. Puis nous passerons au cas général.

2.7.1 Principe du maximum faible :

a - Le problème de Lagrange :

Dans ce problème on cherche des conditions nécessaires d'optimalité pour le système :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \tag{2.13}$$

Où les contrôles $u(.) \in U$ sont définis sur $[t_0, t_f]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_1$, le problème est d'optimiser un coût de la forme :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t))dt \tag{2.14}$$

Où t_f est fixé.

Associons au système (2.14) le système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ \dot{x}^0(t) = f^0(t, x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.15}$$

et notons $\tilde{x} = (x, x^0)$, $\tilde{f} = (f, f^0)$. Le problème revient donc à chercher une trajectoire solution de (2.13) joignant les points $\tilde{x}_0 = (x_0, x^0)$ et $\tilde{x}_1 = (x_1, x^0(t_f))$, et minimiser la dernière coordonnée $x^0(t_f)$.

L'ensemble des états accessibles à partir de $\tilde{x}_0$ pour le système (2.13) est :

$$\tilde{Acc}(\tilde{x_0}, t_f) = \cup_{u(.)}(t_f, \tilde{x_0}, u)$$

Lemme :[1]
Si le contrôle associé au système de contrôle (2.13) est optimal pour le coût (2.14), alors il est singulier sur $[t_0, t_f]$ pour tout le système augmenté (2.15).

Démonstration :

Notons $\tilde{x}$ la trajectoire associée, solution du système augmenté (2.15), issue de $\tilde{x}_0 = (x_0, x^0)$. Le contrôle u étant optimal pour le coût de (2.14), il en résulte que le point $\tilde{x}(t_f)$ appartient à la frontière $\tilde{Acc}(\tilde{x}_0, t_f)$. En effet sinon, il existerait un voisinage de point $\tilde{x}(t_f) = (x_1, x^0(t_f))$ dans $\tilde{Acc}(\tilde{x}_0, t_f)$ contenant un point $\tilde{y}(t_f)$ solution du système (2.13) et tel que l'on ait $y^0(t_f) < x^0(t_f)$, ce qui contredirait l'optimalité du contrôle u. Par conséquent le contrôle u est un contrôle singulier pour le système augmenté (2.15) sur $[0, t_f]$♦.

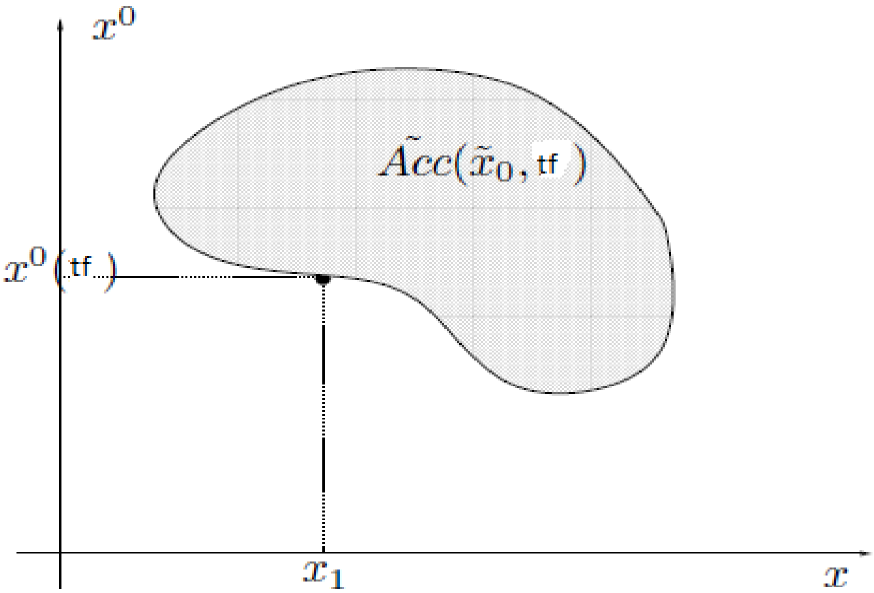

FIGURE 2.4 – Ensemble accessible augmenté

Théorème 2.7.1. *[1]*

Si le contrôle u associé au système de contrôle (2.13) *est optimal pour le coût* (2.14)*, alors il existe une application* $p(.)$ *absolument continue sur* $[t_0, t_f]$*, à valeur dans* $\Re^n$*, appelée vecteur adjoint, et un réel* $p^0 \leq 0$ *tels que le couple* $(p(.), p^0)$ *est non trivial, les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [t_0, t_f]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.16}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \tag{2.18}$$

Où H est le Hamiltonien associé au système (2.13) et au coût (2.14)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u)\rangle + p^0 f^0(t, x, u) \tag{2.19}$$

b-Problème de Mayer-Lagrange :

On modifie le problème précèdent on introduisant le coût

$$J(x,t) = g(t, x_u(t)) + \int_{t_0}^{t} f^0(s, x_u(s), u(s))ds, \tag{2.20}$$

et où le temps final t n'est pas fixé. Soit M_1 une variété de $\Re^n$. Le problème de contrôle optimal est alors de déterminer une trajectoire solution de :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0$$

Où les contrôles $u(.)$ sont dans l'ensemble U des contrôles admissibles sur $[t_0, t_f]$ tel que $x(t_f) \in M_1$, et de plus $x(.)$ minimise sur $[t_0, t_f]$ le coût (2.20).

Théorème 2.7.2. *[5]*

Si le contrôle u est optimal sur $[t_0, t_f]$ alors il existe une application $p : [t_0, t_f] \to \Re^n$ absolument continue, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(.), p^0)$ est non trivial, et

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, p(t)),$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0,$$

Où H est le Hamiltonien au système (2.13) *et au coût* (2.20)

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$$

2.7.2 Principe de maximum de Pontryagin (PMP) :

Le principe du maximum de Pontryagin énonce que la trajectoire optimale vérifie les trois conditions suivantes :

$a-$ L'équation adjoint :

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x, u, p, t)}{\partial x} \tag{2.21}$$

Dans le cas ou l'état final est libre, une condition apparaît sur la valeur finale de l'état adjoint :

$$p(t_f) = p_0 \frac{\partial g(x(t_f))}{\partial x(t_f)} \tag{2.22}$$

$b-$ Une condition qui suppose qu'aucune contrainte n'est subie par la commande, c'est la condition de stationnarité :

$$\frac{\partial H(x, u, p, t)}{\partial u} = 0 \tag{2.23}$$

$c-$ L'équation d'état $\dot{x} = \frac{\partial H(x,u,p,t)}{\partial p}$ avec $x(t_0) = x_0$

Remarque :
La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum.

2.7.3 Condition de transversalité :

La condition de transversalité est une contrainte supplémentaire (ou une condition finale), qui est énoncée sur l'état adjoint dans le cas où l'état final est libre. La formule de cette condition est donnée par l'équation (2.20).

2.7.4 Exemple :

Soit le système continu du premier ordre défini par l'équation différentielle :

$$\dot{x} = -x + u$$

que l'on désir amener au bout d'un temps t_f donné, d'un état initial x_0 donné à un état final voisin de zéro, en minimisant, l'énergie de la commande. Pour réaliser cet objectif, on considère le critère à minimiser :

$$J(u(t)) = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \int_0^{t_f} \frac{1}{2}u^2 dt$$

1. Hamiltonien :

$$H = p(-x+u) - \frac{1}{2}u^2$$

2. Conditions d'optimalité :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p \quad \rightarrow \quad \dot{p} - p = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p - u = 0 \quad \rightarrow \quad u^0 = p$$

Remarque :

$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -1, \;\; u$ c'est bien un maximum.
Transversalité initiale : x_0 donné, p_0 inconnu
Transversalité finale : $x(t_f)$ inconnu,
critère terminal $\frac{1}{2}x^2(t_f)$ implique $p(t_f) = -x(t_f)$.

3. Intégration

a)Du système adjoint :

$$p = p_0 e^t$$

b)Du processus : en remplaçant u par la commande optimale, il s'écrit :

$$\dot{x} + x = p_0 e^t$$

D'où

$$x = (x_0 - \frac{1}{2}p_0)e^{-t} + \frac{1}{2}p_0 e^t$$
$$\dot{x} = -(x_0 - \frac{1}{2}p_0)e^{-t} + \frac{1}{2}p_0 e^t$$

4. La condition de transversalité finale $p(t_f) + x(t_f) = 0$ permet s'écrire :

$$p_0 e^{t_f} + (x_0 - \frac{1}{2}p_0)e^{-t_f} + \frac{1}{2}p_0 e^{t_f} = 0$$

D'où :

$$p_0 = \frac{2}{1 - 3e^{2t_f}} x_0$$

5. La commande optimale :

$$u^0(t) = \frac{2}{1 - 3e^{2(t_f - t)}} x(t)$$

2.8 Méthodes numériques en contrôle optimal :

Dans ce titre on présente deux types de méthodes numériques pour résoudre le problème de contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Ces méthodes peuvent traiter un problème de contrôle optimal plus général qui cherche par exemple à minimiser une fonction non linéaire. Parmi les méthodes directes on trouve la méthode de résolution par l'approche de la programmation linéaire, qui est la méthode adaptée appelée aussi méthode du support(Gabasov). Une autre méthode directe est la méthode de discrétisation du problème initial. Elle consiste à discrétiser la solution du système et le contrôle en transformant le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes. Les méthodes indirects sont basées sur une méthode de tire après l'application du principe du maximum de Pontryagin. Ces méthodes ont l'extrême précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix de la condition initiale.

Pour plus sur les différentes méthodes numériques on se réfère au livre de Emmanuel Trélat()

2.8.1 Méthode directe :

Les méthodes directs ont pris de l'importance dans le domaine du contrôle optimal numérique depuis les années 80. Il existe deux approches de ces méthodes à savoir :

— Discrétisation :
  Cette approche basée sur la discrétisation totale ou partielle du problème, consiste à arriver à la résolution d'un problème linéaire en se basant sur la méthode d'Euler ou de Runge-Kutta, dont la solution est loin de celle du problème de départ, sauf dans le cas où la commande est impulsive(c'est-à-dire $U(t) \equiv U_j,\ t \in [\tau_j, \tau_{j+1}],\ \tau_j - \tau_{j+1} \leq h$ et $T = U_{j=1}^{N}[\tau_j, \tau_{j+1}]$).

— Approche de la programmation linéaire
  L'exemple de cette approche plus utilisée en contrôle optimal, est la méthode adaptée, inventée par R.Gabasov et F.M.Kirillova durant les années 80. Cette méthode nous permet d'avoir une solution approchée et permet de démarrer l'itération à partir d'un point intérieur, d'ailleurs elle s'appelle la méthode de point intérieur.

Les méthodes directes sont très facile à appliquer, et relativement robuste à l'utilisation. On peut traiter un système avec un grand nombre de variables d'état. Leur précision est limitée par la précision de la discrétisation, donc le nombre de variables utilisées, peut s'avérer insuffisante pour certains problèmes. Les méthodes directes fournissent une trajectoire et une commande en boucle ouverte(u en fonction du temps).Cela rend ces méthodes moins adaptées à certains cas particulier, comme le problème du système d'équation non linéaire, et pour sortir de cette situation désagréable, nous optant pour une deuxième approche.

2.8.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe de Maximum de Pontryagin (PMP) qui donne une condition nécessaire d'optimalité. On cherche en suite les trajectoires vérifiant ces conditions, et qui numériquement se ramène à une méthode de tir. Le choix de ces méthodes s'explique par leurs avantages, la bonne rapidité de convergence(quand il y a convergence) et leurs grande précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal mais lourdement dépendante de point initial.En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en la résolution d'un système d'équation non linéaire.

2.9 Conclusion :

La théorie de contrôle optimal a résolu beaucoup de problèmes dans différents domaines, notamment dans le cas où la stabilité d'un système qui modélise un phénomène quelconque est très importante, mais aussi dans le but de maintenir un équilibre d'un système commandé.

Malgré, les études faites autour de la théorie du contrôle optimal qui a répondu à la plus part des problèmes, elles restent toujours incomplètes et constituent un domaine de recherche très actif.

Chapitre 3

Application du contrôle optimal dans une banque d'investissement

3.1 Introduction :

Une banque est une entreprise qui fait le commerce de l'argent : elle reçoit et garde pour le compte de ses clients leurs capitaux, propose divers placement(épargne), fournit des moyens de paiement(chèques, carte bancaire, etc) et de change, prête de l'argent, et plus généralement se charge de tous services financier.

Une banque d'investissement est une banque, ou une division de la banque, qui rassemble l'ensemble des activités de conseil, d'inter-médiation et d'exécution ayant trait aux opérations dites de haut de bilan(introduction en bourse, émission de dette, fusion/acquisition) de grands clients corporate(entreprise, investisseur, mais aussi états...). Ces activités sont généralement scindées en entités distinctes, habituellement désignées par des anglicismes : les opérations de la finance d'entreprise, de marchés financiers, et des opérations de financement.

En différencie parfois la banque d'investissement de la banque de affaire en attribuant à la première les activités de marchés et à la seconde celle de finance d'entreprise.

3.2 Position du problème :

Considérons une banque, qui gère une certaine quantité d'argent, et doit répondre aux besoins éventuels de ses clients on leurs accordant un emprunt d'argent.Pour cela la banque doit disposer d'argent immédiatement disponible, qui lui rapport moins d'intérêt que l'argent investi dans des titres financiers. La banque investit donc une partie du capital dans l'achat des titres.

Le problème est de déterminer une politique financière qui réalise et compromis entre quantité d'argent disponible et l'argent investi, tout en maximisant le gain.

La banque veuille à satisfaire en termes de qualité,rapidité, de sécurité et de coût des exigences de ses clients.Cependant, dans certaines configurations de marché, l'exécution de l'ordre peut être retardée, partielle ou impossible, indépendamment de la volonté de la banque. C'est notamment le cas lorsque la liquidité est insuffisante par rapport à la taille de l'ordre, ou lors d'une suspension de séance.

3.2.1 Notation :

$x(t)$: Quantité d'argent disponible au temps t.

$u(t)$: La quantité d'argent à réinvestir au temps $t \geq 0$ avec $0 \leq u(t) \leq 1$.

x_0 : La quantité d'argent possédée au temps $t = 0$ avec $x_0 > 0$.

t_f : La période du temps désignée.

$p(t_f) = 0$: La condition de transversalité (terminale).

3.2.2 Modélisation de ce problème :

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif d'où la nécessité d'une définition du problème en terme physique et sa modélisation en termes mathématiques. En connaissant la fonction à optimiser $J(u(t))$, le modèle, l'état $x(t) \in \Re^n$ à chaque instant t , et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande u qui optimise l'objectif.
L'objectif de la banque est de déterminer la commande optimale(le meilleur investissement)sur la période de temps $[0, t_f]$ pour avoir un bénéfice maximal.

La fonction objectif de problème posé est :

$$J(u(t)) = \int_0^{t_f} (1 - u(t))x(t)dt \to max$$

t_f est un temps final fixé.

Le problème est modélisé à l'aide d'équation différentielle linéaire.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t)x(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Avec $x(0) = x_0, \quad o$ù $\; x_0 > 0, \quad 0 \leq t \leq t_f$.

La modélisation de ce problème nous a conduit à un problème de contrôle optimal de la forme :

$$\begin{cases} J(u(t)) = C'x(t) \to max \\ \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ U = \{u \in \Re \;\; tq \;\; 0 \leq t \leq t_f, \;\; t \in [0, t_f]\} \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $f \;\; : \;\; \Re * \Re^n * \Re^m \longrightarrow \Re^n$ est une fonction non linéaire de classe C^1, et u le contrôle (commande) défini sur $[0, 1]$.

3.2.3 La résolution analytique du problème :

On obtient le système :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_0^{t_f}(1-u(t))x(t)dt \\ \dot{x}(t) = u(t)x(t) \\ 0 \leq u(t) \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_f \\ x(0) = x_0, \quad p(t_f) = 0 \end{cases}$$

★ **La fonction Hamiltonienne :**

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = p^0(1-u(t))x(t) + pu(t)x(t)$$

$$= (1-u(t))x(t) + p(t)u(t)x(t)$$

★ **Le vecteur adjoint :**

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), p(t), p^0, u(t))}{\partial x(t)} = u(t)(1-p(t)) - 1$$

★ **La résolution de l'équation différentielle :**

$$maxH_{\ 0\leq u\leq 1}\ (t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = max_{\ 0\leq u\leq 1}\ ((1-u(t))x(t) + p(t)u(t)x(t))$$

$$= max_{\ 0\leq u\leq 1}\ (x(t)u(t)(p(t)-1))$$

Comme $\quad x(t) \geq 0 \Rightarrow$ signe de $u(t) =$ signe $(p(t)-1)$

c'est-à-dire $u(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; p > 1 \\ 0 & si \;\; p \leq 1 \end{cases}$

$p(t_f) = 0 \Rightarrow$ comme $p(t)$ est continue $\Rightarrow p(t) \leq 0$ au voisinage de t_f

C'est-à-dire : $p(t) \leq 1, \quad t \in \nu(t_f)$

Donc :

$$u(t) = 0 \quad t \in \nu(t_f)$$

.

$$\Rightarrow \dot{p}(t) = -1 \;\Rightarrow p(t) = -t + c$$

.

Selon la condition de transversalité $p(t_f) = 0$ alors $p(t_f) = -t_f + c = 0 \quad \Rightarrow c = t_f$. alors

$$p(t) = t_f - t, \quad t \in \nu(t_f)$$

.

On a

$$p(t) \leq 1 \quad \Rightarrow t_f - t \leq 1, \quad t \in \nu(t_f)$$

Donc

$$t_f - 1 \leq t \leq t_f$$

.

$$\Rightarrow \begin{cases} u^0(t) = 0, & t \in [t_f - 1, t_f] \\ u^0(t) = 1, & t \in [0, t_f - 1] \end{cases}$$

Donc :

Pour $u = 1$:

$$\dot{x}(t) = x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 e^t \quad t \in [0, t_f - 1]$$

.

Pour $u = 0$:

$$\dot{x}(t) = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = C^{ste} = x_0 e^{t_f - 1} \quad t \in [t_f - 1, t_f]$$

.

3.2.4 Résolution à l'aide du logiciel MATLAB :

MATLAB est une abréviation de MATrix LABoratory écrit à l'origine, en fortran, par C.Moler.

MATLAB est un logiciel commercial de calcul interactif. Il permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique. Il peut donc être utilisé pour la résolution approchée d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles ou de systèmes linéaires,. . . etc. avec ses fonctions spécialisées, MATLAB peut être considéré comme un langage de programmation adapté pour les problèmes scientifiques.

Le programme suivant est effectué sous MATLAB, on utilise le principe du maximum de Pontryagin function dx = mast2(t,x)

dx = zeros(2,1) ;
dx(1) =x(1)*sign(x(2)-1) ;
dx(2) =(1-x(2))*sign(x(2)-1)-1 ;

function res=mast1(p0)

[T,Y]=ode45('mast2',[0,6],[15,p0(1)]) ;
res=[Y(end,2)]
clear
clc
program12

temps CPU=cuptime ;

[p,fval]=fsolve('mat1',20)

$[T, y] = ode45('mat2', [0, 6], [15, p])$
temps CPU=cuptime ;

$y_1 = Y(:, 2)$;
$u = []$;

for $i = 1 \ : \ length(T)$

if $y1(i) - 1 > 0$
$u(i) = 1$;

else
$u(i) = 0$;
end

end
u ;

figure(1)
plot(T,Y(:,1),'r') ;

figure(2)
plot(T,Y(:,2),'k') ;

figure(3)
plot(T,u)

Après l'exécution on obtient les figures suivantes :

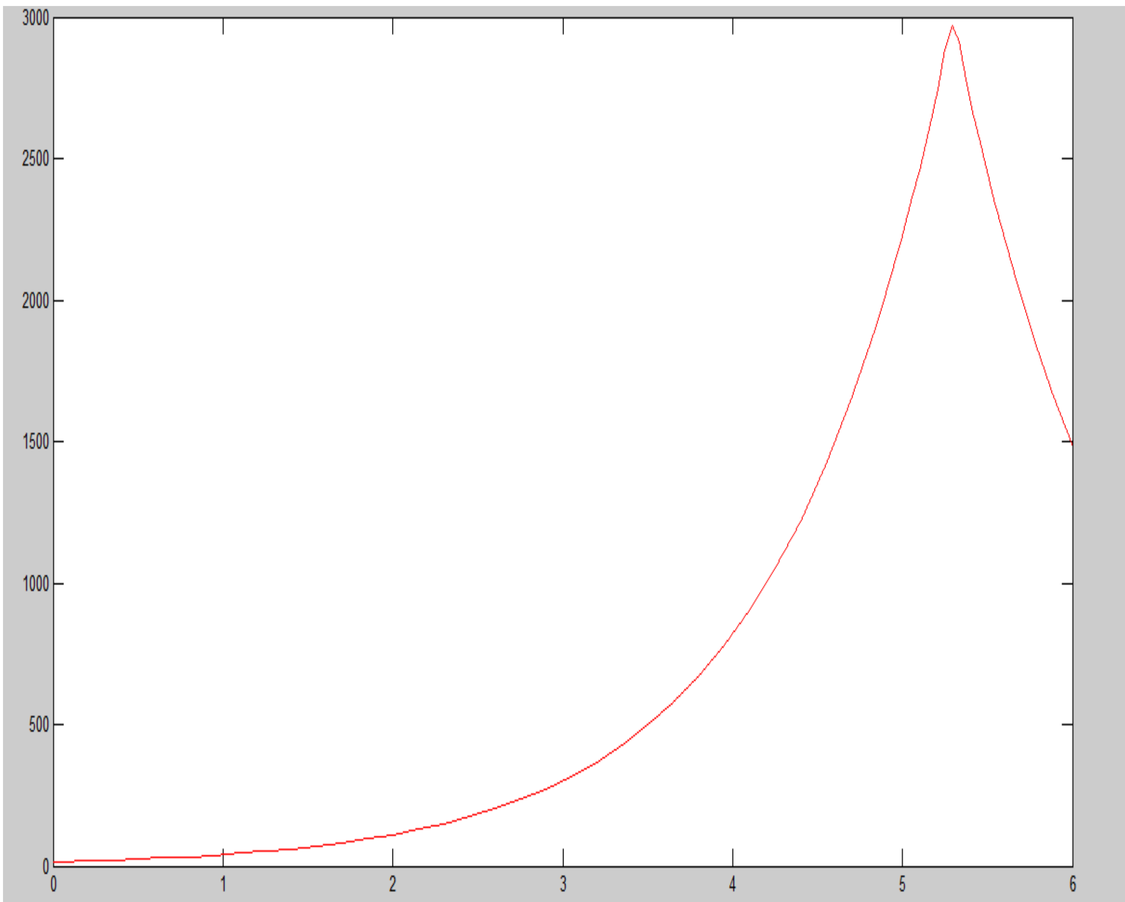

FIGURE 3.1 – L'évolution de la quantité d'argent dans une période d'investissement (6 mois)

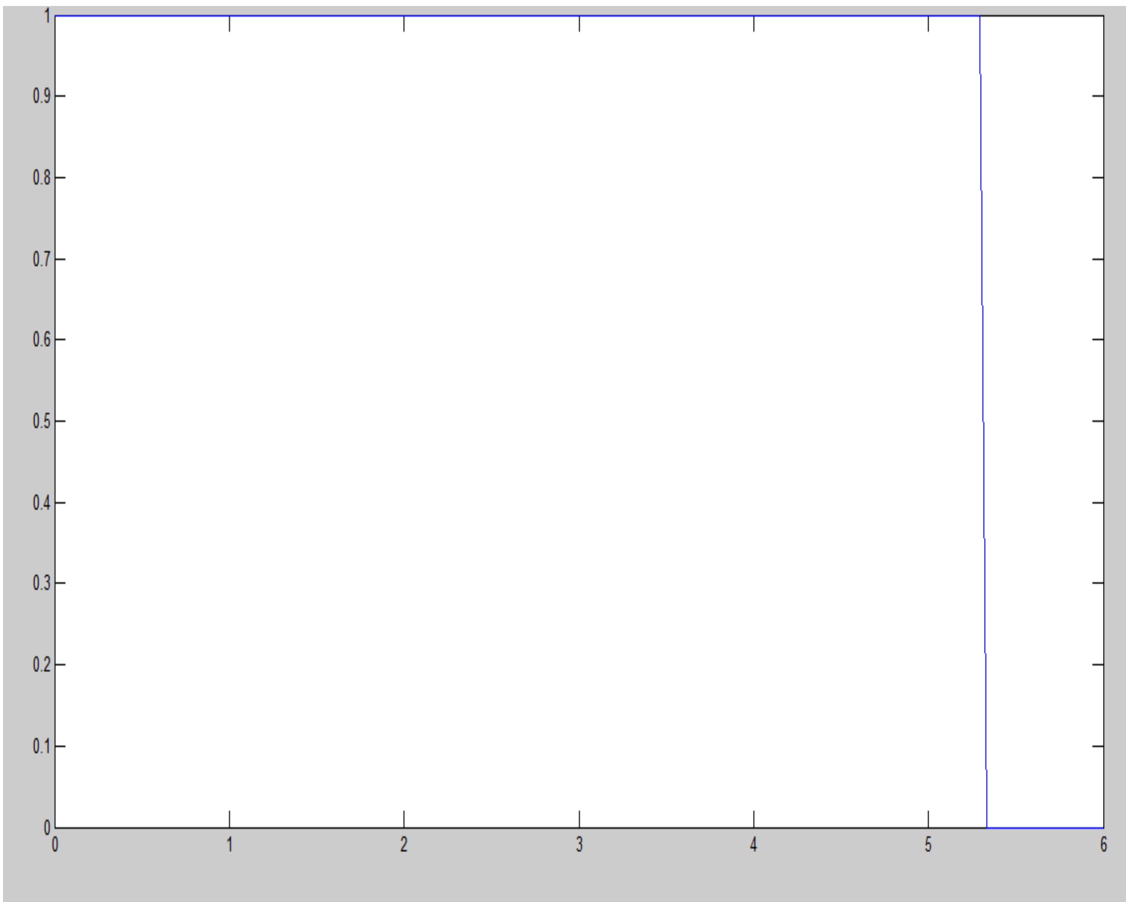

Figure 3.2 – La trajectoire de u en fonction de temps

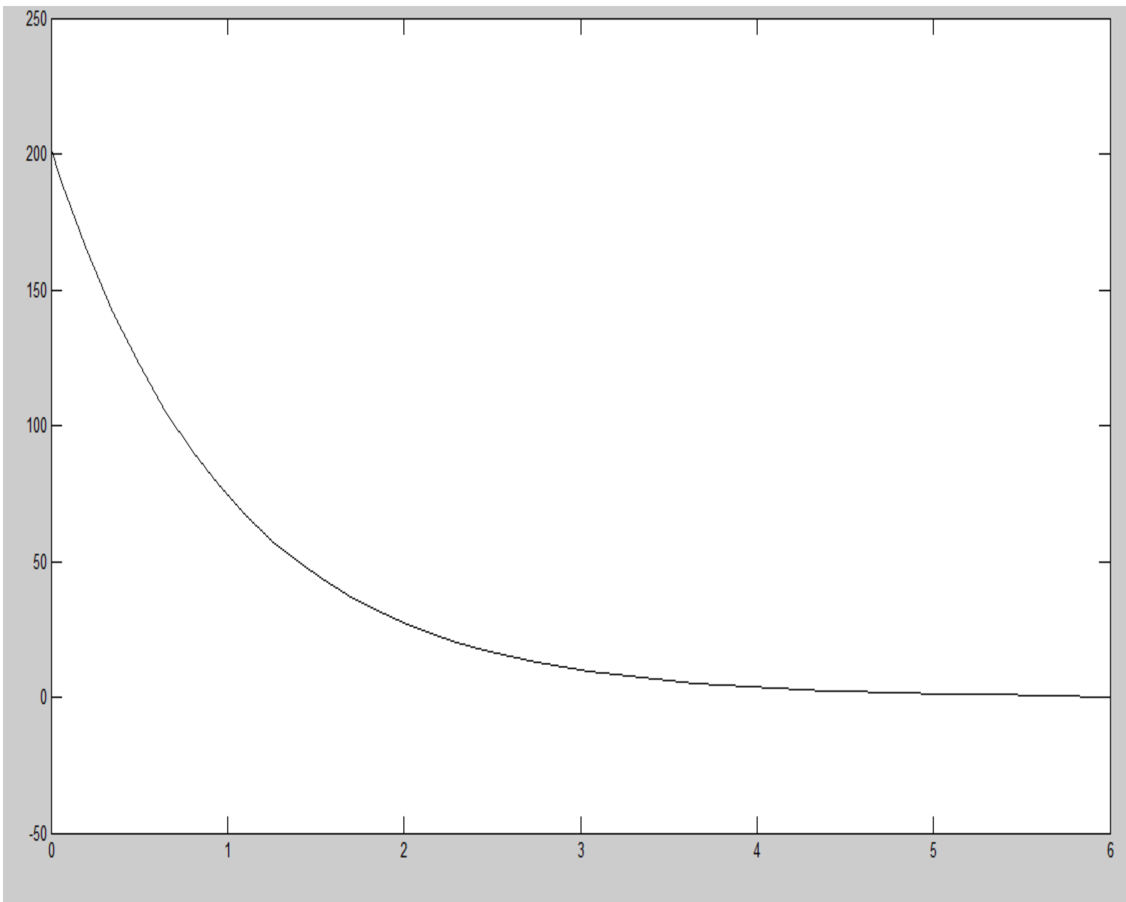

FIGURE 3.3 – La trajectoire de p en fonction de temps

Conclusion Générale :

L'objectif de ce travail est de trouver une solution à un problème de contrôle optimal dans une banque d'investissement, et de trouver une stratégie optimale pendant une période de temps fixée.

Pour ce faire, on a présenté d'abord des généralités sur les équations différentielles et quelques méthodes de résolution numériques car la modélisation d'un système de contrôle peut avoir recours à des équations différentielles.

Puis on a parlé sur la théorie du contrôle optimal, dont on a abordé quelques méthodes de résolution des problèmes (méthodes directes et indirects). Et pour résoudre notre problème on a choisit une méthode basée sur le principe du maximum.

Les méthodes indirectes sont réputées pour leur rapidité et leur précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal. En effet, ces méthodes transforment le problème de contrôle original en un problème qui consiste à résoudre un système d'équations différentielles.

En perspective de ce travail il est souhaitable de raffiner l'étude, pour l'application de cette méthode à des exemples plus complexes.

Bibliographie

[1] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, premier édition 2005, vuibert collection "Mathématiques Concrètes.

[2] Emmanuel Trélat, Contrôle optimal : théorie et application. Vuibert, collection mathématiques concrètes 2005.

[3] Équations Différentielles, 2008-2010, http ://mathématique.daval.free.fr.

[4] David.J.Hull. Optimal control theory for applications 2003. (

[5] Boudi.Z. Le contrôle optimal en finance. Thèse de Master. Université Mouloud Mammeri Tizi-ouzou.

[6] Emmanuel Trélat. Contrôle Optimal : théorie et applications. Université Paris Sud, laboratoire AN-EDP, Mathématiques, UMR 8628.