

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOULOU D MAMMARI DE TIZI-OUZOU



FACULTE DE GENIE ELECTRIQUE ET D'INFORMATIQUE  
DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

**Mémoire de MAGISTER En ELECTROTECHNIQUE**  
**OPTION : Machines Electriques**

Présenté par

**SARAOUI RACHIDA**

Ingénieur d'Etat en Electrotechnique  
de l'UMMTO (Tizi-Ouzou)

**Thème**

Etude d'une machine synchrone avec la méthode des éléments finis

Soutenu publiquement le **31/ 05/ 2010** devant le jury composé de :

<b>Président</b>	<b>Salah HADDAD</b>	Professeur, UMMTO (Tizi-Ouzou)
<b>Rapporteur</b>	<b>Nacereddine BENAMROUCHE</b>	Professeur, UMMTO (Tizi-Ouzou)
<b>Examineur</b>	<b>M'hamed RACHEK</b>	Maître de Conférences, UMMTO (Tizi-Ouzou)
<b>Examineur</b>	<b>Tahar OTHMANE CHERIF</b>	Maître de Conférences, UMMTO (Tizi-Ouzou)
<b>Examineur</b>	<b>Youcef BOUTORA</b>	Maître de Conférences B, UMMTO (Tizi-Ouzou)

# REMERCIEMENTS

## *Remerciements*

Qu'il me soit d'abord permis de remercier et d'exprimer ma gratitude envers Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience durant toutes ces années d'étude.

J'adresse mes respectueux remerciements à Monsieur **Nacer-Eddine BENAMROUCHE**, Professeur à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour la confiance qu'il m'a donnée en acceptant d'être le rapporteur de ce mémoire. Je tiens à le remercier pour ses conseils et ses encouragements.

Je tiens tous particulièrement à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **Youcef BOUTORA**, Maître de Conférences à l'Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, pour la confiance qu'il m'a prodigué en proposant et en dirigeant ce travail. Je tiens également à le remercier pour ses encouragements et ses orientations, pour ses conseils précieux, pour le suivi de près de mon travail, pour l'aide qu'il m'a apporté pour mener à terme ce travail.

Je tiens aussi à remercier vivement Messieurs :

- **Salah HADDAD**, Professeur au Département d'Electrotechnique, UMMTO (Tizi-Ouzou), de m'honorer par sa participation au jury de ce mémoire.
- **M'hemed RACHEK**, Maître de Conférences, UMMTO (Tizi-Ouzou), pour l'honneur qu'il me fait par sa participation au jury de ce mémoire.
- **Tahar OTHMANE CHERIF**, Maître de Conférences, UMMTO (Tizi-Ouzou), pour l'honneur qu'il me fait par sa participation au jury de ce mémoire.

Pour finir :

- Je tiens à remercier ma famille et plus particulièrement mes parents qui m'ont toujours encouragé au cours de mes études.
- Je remercie également mon très cher Mohammed pour ses encouragements, sa compréhension et son soutien permanent.
- Je remercie également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.
- A tous mes collègues et amies qu'ils trouvent ici l'expression de ma plus sincère amitié.

R. SARAOU

# SOMMAIRE

## *Sommaire*

<b>Introduction générale</b> .....	<b>1</b>
------------------------------------	----------

### *Chapitre I*

#### *Les machines à aimants permanents*

I.1. Introduction .....	4
I.2. Les aimants permanents .....	4
I.2.1. Définition .....	4
I.2.2. Le diagramme B-H .....	5
I.3. Les matériaux constitutifs des aimants permanents .....	5
I.3.1. Les AlNiCo .....	6
I.3.2. Les ferrites .....	6
I.3.3. Les terres rares .....	6
I.4. Les machines tournantes à aimants permanents .....	8
I.4.1. Domaines d'application .....	8
I.4.2. Les couples au niveau d'une machine à aimants permanents .....	9
I.4.2.1. Couple statique .....	9
I.4.2.2. Couple de réluctance .....	9
I.4.2.3. Couple de détente .....	9
I.5. Alimentation des machines à aimants permanents .....	10
I.5.1. Les machines à f.e.m trapézoïdale .....	10
I.5.2. Les machine à f.e.m sinusoïdale .....	11
I.6. Différentes types de machines tournantes à aimants permanents .....	11
I.6.1. Les machines à flux radial .....	12
I.6.1.1. Les machines à rotor interne .....	12
I.6.1.2. Les Machines à rotor externe .....	14
I.6.2. Les machines à aimants discoïdes à champ axial .....	14
I.6.3. Machines à aimant à flux transverse .....	15
I.7. Conclusion .....	16

### *Chapitre II*

#### *La méthode des éléments finis*

II.1. Introduction .....	17
II.2. Présentation de la méthode des éléments finis .....	17
II.3. Formulations des équations d'électromagnétisme .....	18
II.4. Les conditions aux limites .....	20
II.5. Discrétisation et approximation .....	20
II.6. Formulation intégrale .....	22
II.7. Résolution .....	24
II.7.1. Résolution linéaire .....	24
II.7.2. Résolution non linéaire .....	25
II.8. Discrétisation temporelle .....	25
II.9. Conclusion .....	26

## **Chapitre III**

### **Modélisation par éléments finis d'une machine à aimants permanents**

III.1. Introduction .....	27
III.2. Modélisation par éléments finis des machines à aimants permanents.....	27
III.2.1. Les conditions aux limites.....	27
III.2.2. Sources de courants .....	28
III.2.3. Hypothèses d'étude .....	28
III.2.4. Modèle magnétostatique linéaire.....	28
III.2.5. Modèles des aimants permanents.....	30
III.2.6. Modèle électromagnétique non linéaire.....	30
III.3. Mise en œuvre du problème magnétostatique.....	33
III.3.1. Présentation de la machine étudiée.....	33
III.3.2. Maillage de la structure.....	33
III.3.3. Les conditions aux limites imposées.....	34
III.3.4. Etude dans le cas linéaire.....	34
III.3.4.1. Répartition des lignes de champ dans la machine.....	34
III.3.4.2. Répartition du potentiel et de l'induction le long de l'entrefer.....	36
III.3.5. Etude dans le cas non linéaire .....	38
III.3.5.1. Interpolation de la courbe $v(B^2)$ .....	39
III.3.5.2. Critère de convergence.....	40
III.3.5.3. Répartition de l'induction le long de l'entrefer (cas non linéaire).....	40
III.3.6. Comparaison linéaire- non linéaire .....	42
III.4. Conclusion .....	44

## **Chapitre IV**

### **Prise en compte du mouvement dans les machines électriques**

IV.1. Introduction.....	45
IV.2. Problématique.....	45
IV.3. Solution proposée.....	45
IV.4. Méthode de la bande de roulement dans la prise en compte du mouvement.....	46
IV.5. Les méthodes de renumérotation.....	47
IV.5.1. Définitions.....	47
IV.5.1.1. Graphes associés aux matrices creuses.....	47
IV.5.1.2. La méthode bande .....	48
IV.5.1.3. La méthode enveloppe (ligne de ciel) .....	49
IV.5.2. Méthode de Cuthill Mac Kee.....	50
IV.5.3. Méthode GPS .....	51
IV.5.4. Méthode de Sloan.....	52
IV.6. Méthode de renumérotation adoptée .....	54
IV.6.1. Principe de renumérotation adoptée.....	55
IV.6.2. Mise en application.....	57
IV.6.3. Influence du nombre de secteurs.....	58
IV.6.4. Comparaisons des performances de la méthode avec les méthodes classiques....	61
IV.7. Adaptation de la méthode des positions géométriques avec prise en compte du mouvement sur la machine à aimants permanents étudiée.....	65
IV.7.1. Stabilité de la méthode de renumérotation .....	66
IV.7.2. Coûts de la méthode pour la prise en compte du mouvement.....	67
IV.7.3. La distribution du champ magnétique en régime dynamique.....	67

IV.7.4. Les courbes d'induction magnétique en régime dynamique .....	68
IV.8. Conclusion .....	69

## *Chapitre V*

### *Calcul du couple dans la machine à aimants permanents*

V.1. Introduction.....	70
V.2. Méthodes de calcul du couple.....	70
V.2.1. Méthode des tenseurs de Maxwell.....	70
V.2.2. Méthode d'Arkkio.....	71
V.2.3. Méthode de variation de la coénergie magnétique.....	72
V.3. Application sur la machine à aimants permanents.....	72
V.4. Conclusion.....	79
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>80</b>

# **INTRODUCTION GENERALE**

La machine à aimants permanents a connu une évolution fulgurante depuis le début des années 80. Ce succès est dû essentiellement à la disponibilité d'aimants permanents à grande densité d'énergie d'une part et au développement de l'électronique de puissance d'autre part. L'utilisation des aimants permanents comme inducteurs au niveau des machines électriques induisent plusieurs avantages significatifs tels que : la diminution des pertes par effet Joule, réduction de l'encombrement causé par les enroulements inducteurs, élimination du contact glissant du aux balais et la réduction du bruit. L'apport le plus significatif les favorisant aux machines électriques conventionnelles est leur couple massique élevé, spécialement dans les applications industrielles exigeantes en encombrement et en puissance [1, 2, 3, 4].

Les apports importants des machines à aimants favorisent leur utilisation à des fins industrielles (industrie de pointe en particulier) ; l'étude de ce type de machines et la mise en place d'un modèle mathématique reproduisant leur fonctionnement est donc une tâche nécessaire.

Les modèles analytiques des machines synchrones à aimants permanents développés durant les dernières années ont vite montré leurs limites quant à la prise en considération effective des phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines. Ils ne sont possibles que moyennant un bon nombre d'hypothèses simplificatrices liées à la linéarité des milieux, la simplicité des géométries...etc. [5, 6, 7, 8].

La vulgarisation et le développement de l'outil informatique sont parmi les raisons qui ont projeté les méthodes numériques au devant de la modélisation. L'une des méthodes utilisées à cette fin est la méthode des éléments finis. C'est une méthode puissante qui permet d'intégrer pratiquement tous les phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines tels le mouvement et la saturation [3, 9, 10, 11, 12].

L'utilisation de la méthode des éléments finis conduit à la résolution de systèmes algébriques linéaires creux de grandes dimensions symétriques définis positifs. Cela pose le problème de stockage des matrices, ainsi que les coûts induits par la résolution [13, 14]. De plus, la prise en compte du mouvement induit constamment une modification des matrices, et la prise en compte de la saturation implique des calculs itératifs contraignants en coût.

Les problèmes de stockage et de coût de résolution sont généralement résolus par l'adoption d'une méthode de renumérotation des nœuds du maillage [15, 16, 17, 18].

Deux grandes classes de méthodes de renumérotation ont vu le jour :

- Les méthodes basées sur la théorie des graphes à l'exemple de la méthode GPS (Gibbs Poole et Stockmeyer) et Sloan [19, 20]. Elles sont efficaces mais présentent un inconvénient qui est la lenteur d'exécution due à la construction du graphe. De plus, elles sont plus destinées aux systèmes de faibles dimensions (<100).
- Les méthodes de renumérotation des maillages existent également, mais sont souvent destinées à des maillages particuliers et leurs auteurs ne font aucune indication quant aux coûts de ces méthodes [21, 22].

Dans la méthode des éléments finis, l'utilisation de la méthode de la bande de mouvement pour la prise en compte du mouvement conduit à la reconstruction des éléments

de la bande de mouvement, cette opération modifie la matrice de rigidité par augmentation de la largeur de bande et profil du système [23, 24]. Une méthode de renumérotation efficace est donc nécessaire afin de minimiser la largeur de bande et le profil du système et donc la minimisation du temps de résolution.

Dans notre étude, notre choix est porté sur une très récente méthode de renumérotation des nœuds d'un maillage donné dites méthode des positions géométriques [25]. Elle est adaptée aux structures cylindriques creuses, dont le cas des machines électriques. L'intérêt de cette méthode réside essentiellement dans le coût dérisoire en temps d'exécution et la mise en œuvre facile comparés aux autres méthodes de renumérotation existantes. De plus, elle s'adapte aisément aux méthodes de prise en compte du mouvement dans les machines électriques tel que la méthode de la bande de mouvement. L'application de cette méthode induit des temps de renumérotation très faible lors du mouvement en gardant un profil pratiquement constant avec le mouvement donc un gain en temps important.

Notre travail consiste en la modélisation électromagnétique d'une machine à aimants permanents alimentée en BDCM (Brushless direct current motor) en régime statique et dynamique. Cette étude est faite dans le cas linéaire et non linéaire. La méthode utilisée pour la résolution non linéaire est celle de Newton Raphson. Le mouvement étant pris en compte par la méthode de la bande de roulement, l'application de la méthode des positions géométriques est donc une alternative forte intéressante du fait qu'elle est efficace et très adaptée. Les performances de cette méthode sont comparées à celles des méthodes de renumérotations classiques.

Pour ce faire, nous avons subdivisé notre mémoire en quatre parties principales :

Dans le premier chapitre s'intitulant les machines à aimants permanents, nous présentons les différents types de machine à aimants permanents ; ceci après avoir revu les principaux matériaux utilisés de nos jours pour la fabrication de ces machines.

Le deuxième chapitre s'intitulant la méthode des éléments finis fait l'objet d'une présentation générale de la méthode des éléments finis.

Dans le troisième chapitre s'intitulant modélisation par éléments finis d'une machine à aimants permanents, nous adaptons la méthode des éléments finis à la modélisation électromagnétique des machines à aimants permanents, l'étude sur un type de machine à aimants permanents de type surfacique est faite dans le cas statique linéaire et non linéaire. Le modèle non linéaire est résolu à base de l'algorithme de Newton Raphson. Un programme informatique pour la mise en œuvre de cette méthode est donc élaboré ; le champ et l'induction magnétique obtenus le long de l'entrefer sont représentés. Une comparaison des résultats obtenus dans les deux cas linéaire et non linéaire est effectuée.

Dans le quatrième chapitre, la modélisation de la machine à aimants permanents est faite en régime dynamique avec prise en compte du mouvement par la méthode de la bande de mouvement, dans cet objectif nous présentons une très récente méthode de renumérotation dont les performances sont comparées à celles des méthodes de renumérotation classiques (GPS et Sloan) ; nous avons adapté cette méthode à la prise en compte du mouvement par la méthode de la bande de mouvement. Une application est faite sur la machine étudiée au chapitre précédent.

Dans le cinquième et dernier chapitre, après la détermination détaillée du champ magnétique, nous passons à l'exploitation des résultats à travers la détermination du couple électromagnétique dans la machine à aimants permanents étudiée. De plus, une comparaison des résultats obtenus par rapport à ceux obtenus avec un logiciel libre de calcul éléments finis FEMM (Finite Element Method Magnetics) est effectuée.

Une conclusion générale clôt notre étude.

# Chapitre I

## **Les machines à aimants permanents**

## I.1. Introduction

Les progrès réalisés ces dernières années dans des domaines aussi étendus que la physique des matériaux, la mécanique des structures et l'électronique de puissance ont permis la mise en œuvre de nouveaux concepts pour la conception des machines électriques. Plus particulièrement des avancées technologiques importantes réalisées dans le domaine des matériaux magnétiques durs conduisent à des réalisations performantes. En effet, les machines à aimants modernes permettent d'améliorer le rendement et de réduire la taille des machines. L'apport le plus significatif des aimants demeure toutefois un couple massique plus élevé que celui de la plupart des machines électriques conventionnelles. Ces apports importants sont le résultat de l'élargissement de leur gamme d'application ; ainsi que les innovations dans leurs géométries leur a permis d'atteindre une popularité élevée [4, 26, 27].

Le premier chapitre se résume à la présentation des machines à aimants permanents, leur classification selon la direction du flux et selon le type d'alimentation. Il est clair que les aimants permanents ont une influence directe sur le comportement de ces machines, donc une étude exempte des principaux matériaux à aimants permanents est sans doute incomplète.

## I.2. Les aimants permanents

Le choix des aimants permanents est un élément clé dans la conception des machines à aimants permanents ; cela est dû au fait que les propriétés des aimants affectent directement les performances de ces machines. Le choix s'effectue soit selon des critères techniques : propriétés magnétiques, mécaniques et thermiques ou selon des critères économiques [28].

### I.2.1. Définition

Les aimants permanents sont des solides ferromagnétiques ou ferrimagnétiques à température ambiante. Une fois aimantés, ils sont susceptibles de garder indéfiniment un certain état magnétique caractérisé par une aimantation rémanente notable et une résistance à la désaimantation élevée. Cette aimantation provient des dipôles magnétiques contenus dans ce matériau constitués d'ensembles de moments orbitaux et de spin des électrons [4, 29].

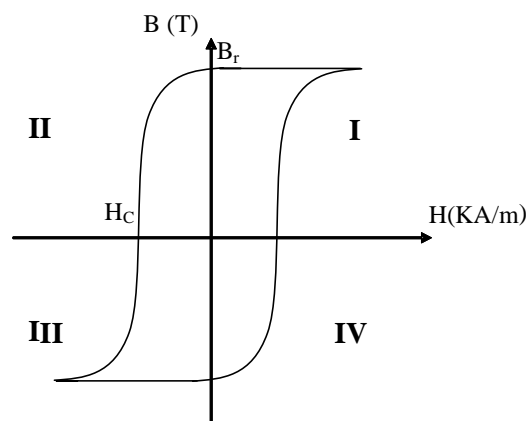


Fig. I. 1. Cycle d'hystérésis d'un aimant permanent

L'induction magnétique  $\vec{B}$  produit par l'aimant est :

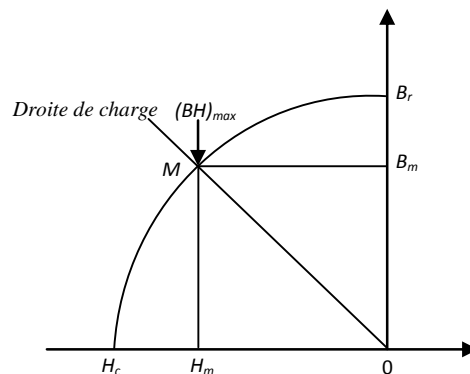
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (\text{I.1})$$

Avec :  $\vec{H}$  : Le champ magnétique ;  
 $\vec{M}$  : L'aimantation ;  
 $\mu_0$  : Perméabilité du vide.

### I.2.2. Le diagramme B-H

Une caractéristique spécifique aux aimants permanents est le cycle d'hystérésis (fig. I.1).

Soumis dans la plupart des applications électriques et notamment dans les machines électriques à un champ démagnétisant, due à la présence de l'entrefer, l'aimant travaille dans le quadrant II (fig. I.2).



**Fig.I.2.** Courbe de désaimantation [29]

Le diagramme B-H est d'une importance primordiale, il met en évidence un certain nombre de paramètres qui déterminent le choix d'un aimant pour les applications industrielles[29, 30, 31].

Parmi ces paramètres:

- Induction rémanente  $B_r$  : C'est l'indication résiduelle au circuit fermé ;
- Le champ coercitif  $H_c$  : Il correspond à la valeur du champ démagnétisant capable d'annuler l'induction rémanente. Plus sa valeur est élevée plus l'aimant est stable ;
- L'énergie spécifique  $(BH)_{\max}$  : Le produit  $(BH)_{\max}$  donne la valeur énergétique maximale de l'aimant par unité de volume, c'est une caractéristique très importante de l'aimant car ce produit constitue un excellent indicateur sur le volume minimal de l'aimant à utiliser ; ce qui permet de minimiser le prix de l'aimant.

En plus de ces trois caractéristiques, il est indispensable de connaître le point de curie de l'aimant qui représente la température au delà de laquelle l'aimant perd ces caractéristiques magnétiques tout en gardant la possibilité de remagnétisation.

### I.3. Les matériaux constitutifs des aimants permanents

De nos jours, les principaux matériaux utilisés pour fabriquer les aimants permanents sont : les alliages Aluminium, Nickel, Cobalt (AlNiCo) ; Storium ferrites et Baryum ferrites (ferrites) ; Samarium Cobalt (première génération des aimants à terre rares) (SmCo) ; Néodyme Fer Bore (deuxième génération des aimants à terre rares) (NdFeB).

### I.3.1. Les AlNiCo

Les AlNiCo ont été découverts au Japon et ont été développés dans la première moitié du 20<sup>ème</sup> siècle. Les AlNiCo sont des alliages à base d'Aluminium, de Nickel, et de Cobalt [28, 32].

Les attributs principaux des AlNiCo sont:

- Une induction rémanente relativement élevée ( $B_r \approx 1T$ );
- Faible champ coercitif, d'où risque élevé de démagnétisation;
- Un prix de revient élevé du à l'utilisation du Cobalt ;
- Dureté et rigidité (facile à casser) ;
- Une température de curie élevée (très stable) ;
- Fonte à une variété de forme.

L'utilisation de ces aimants est aujourd'hui en nette régression à cause de la non linéarité de leur caractéristique de démagnétisation et la cherté du Cobalt.

### I.3.2. Les ferrites

Les ferrites sont des composés d'oxyde de fer de Baryum ou de Strontium. Ils sont obtenus par frittage [28].

Introduits en 1953, les ferrites sont rapidement devenus en 1960, les matériaux à aimant les plus compétitifs au niveau de leur prix et les plus utilisés [28, 32].

Les ferrites sont beaucoup moins durs que les aimants métalliques AlNiCo, thermiquement stables, possèdent une caractéristique de démagnétisation pratiquement linéaire et un grand champ coercitif ce qui leur confère une bonne résistance à la démagnétisation. Une autre propriété importante des aimants céramiques est leur résistivité électrique importante qui supprime la possibilité de circulation de courant de Foucault, ils sont donc préférés pour les utilisations à hautes fréquences [4, 28, 33].

Les ferrites présentent toutefois une faible induction rémanente (0,4 ~ 0,6T), d'où la nécessité de recourir à des structures complexes de machines à concentration de flux pour atteindre des couples massiques et volumiques élevés [28].

### I.3.3. Les terres rares

C'est la dernière génération des aimants permanents. Ils sont plus performants du fait qu'ils réunissent simultanément deux qualités essentielles à savoir : une induction rémanente élevée et un grand champ coercitif.

On citera :

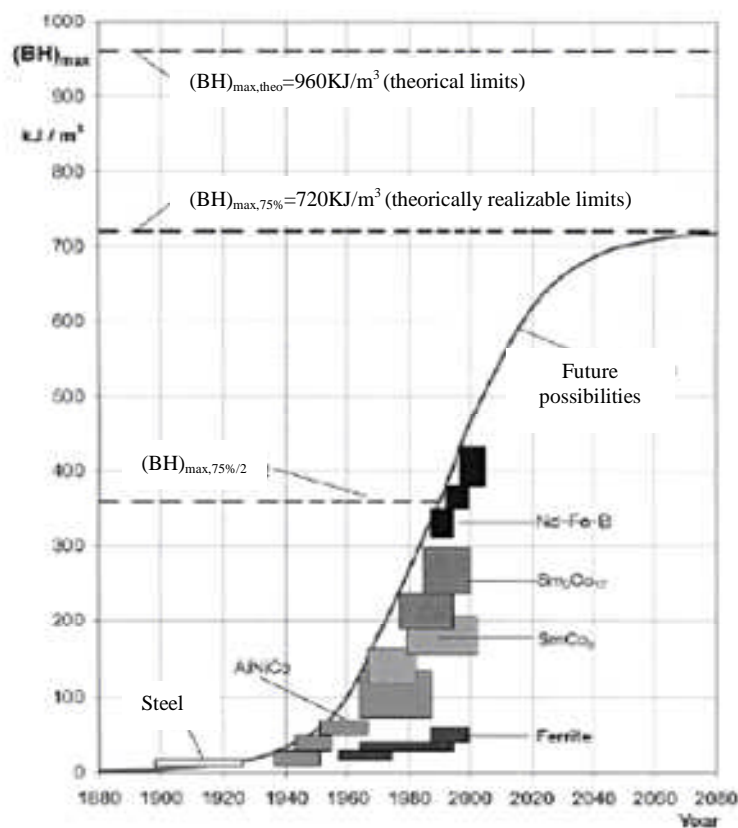
- Les Samarium Cobalt qui sont caractérisés par une grande induction rémanente et un grand champ coercitif comme le  $\text{SmCO}_5$  avec ( $B_r \approx 0.8T$ ) et ( $H_c \approx 600KA/m$ ) et le  $\text{Sm}_2\text{CO}_{17}$  avec ( $B_r \approx 1T$ ) et ( $H_c \approx 600KA/m$ ); de plus ; ils présentent une énergie spécifique des plus importantes et une température de curie relativement élevée [34]. Cependant, leur prix de revient élevé du à l'utilisation de Cobalt (matériau stratégique) d'une part, et la complexité de leur technologie de fabrication d'autre part, limitent leur utilisation aux machines à très hautes performances (aérospatiales, robotiques, aéronautiques) [4, 30].
- Les Néodyme Fer Bore qui présentent des performances supérieures au Samarium Cobalt et sont beaucoup moins coûteux mais leur sensibilité à la température

affecte leur performance. De plus ils ont tendance à s'oxyder à cause du fer qu'ils contiennent [28, 33].

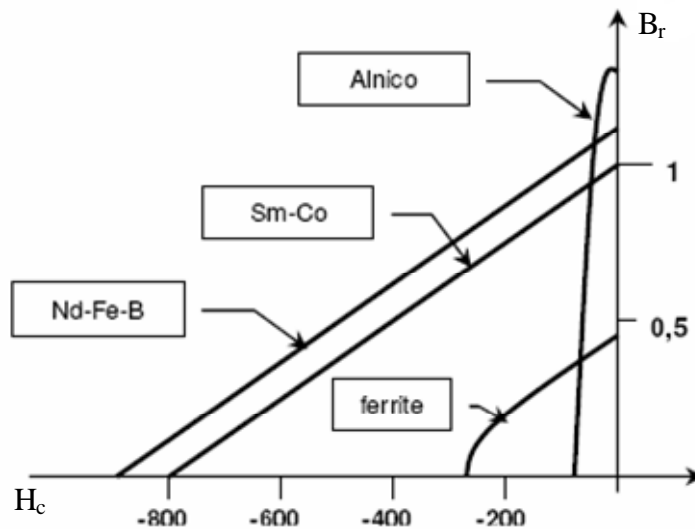
Des progrès récents ont permis d'accroître leur tenue en température, ce qui fait d'eux les matériaux à aimants les plus utilisés de nos jours [34].

Les terres rares sont en réalité plus abondantes dans la nature que ne laisse penser leur dénomination, c'est en fait la séparation des terres qu'on trouve mélangées dans les minerais naturels qui demande des investissements lourds.

Sur la figure (I.3), nous présentons les courbes de désaimantation des principaux types d'aimants ; et sur la figure (I.4), on illustre le développement de la densité volumique d'énergie des aimants au cours du 20<sup>ème</sup> siècle.



**Fig.I.4.** Evolution de l'énergie spécifique des aimants au cours du vingtième siècle [33]



**Fig. I.3.** Courbes de désaimantation des principaux types d'aimants [33]

#### I.4. Les machines tournantes à aimants permanents

Une machine à aimants permanents est une machine qui utilise des aimants permanents pour produire le champ magnétique d'excitation [35]. Ces machines ont beaucoup d'avantages dont :

- La puissance massique et volumique importante ;
- Les faibles pertes rotoriques ;
- L'absence du collecteur donc des frottements des balais, cela réduit le problème de maintenance.

##### I.4.1. Domaines d'application

Les machines à aimants permanents ont trouvé un grand domaine d'application allant de la robotique au moteur commercial standard pour une gamme de puissance allant de quelques microwatts à plusieurs mégawatts. Leur domaine d'utilisation est très varié comme : les équipements domestiques, automobiles, de transport, aérospatiaux, médicaux, informatiques...

Avec le développement de l'électronique de puissance et des technologies des matériaux à aimants permanents, il est possible de concevoir des générateurs pour la génération de puissance dans les navires, les avions, les autobus...



a) Rotor d'un servomoteur



b) Disque dur d'un ordinateur

**Fig. I.5.** Exemples d'utilisation des aimants permanents [27]

Une nouvelle approche a été prévue pour utiliser ces machines pour le contrôle de position dans les machines outils, robotiques, les servomoteurs de grande précision [27].

#### **I.4.2. Les couples au niveau d'une machine à aimants permanents**

On évalue les performances d'une machine à aimants permanents sur la base de critères économiques et techniques tels que le couple volumique et le minimum d'ondulations dans le couple lié à la structure ou à l'alimentation.

Les différents couples existants dans une machine à aimant permanent sont:

##### **I.4.2.1. Couple statique**

Le Couple statique est dû à l'interaction entre les courants d'induit et le champ inducteur. Celui-ci est donc limité par [4]:

- l'induction maximale dans l'entrefer, celle-ci ne doit pas dépasser la valeur à saturation du matériau, notamment dans les machines à concentration de flux. Elle doit être réduite aux grandes vitesses à cause des pertes fer qu'elle induit dans les parties statoriques ;
- la densité de courant statorique afin d'atténuer les pertes Joule ainsi que l'échauffement de la machine.

##### **I.4.2.2. Couple de réluctance**

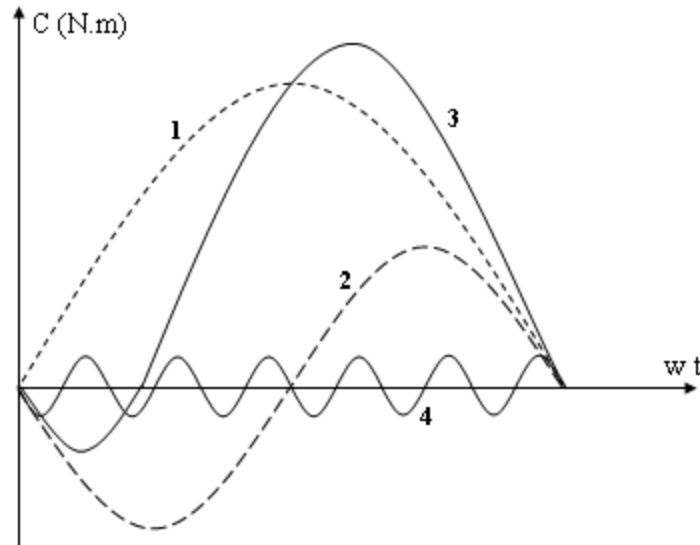
Dans les machines à entrefer variable (effet de saillance rotorique) le couple produit par la machine est dû au couple d'interaction et au couple de réluctance figure (I.6).

Le couple de réluctance est dû à l'anisotropie du rotor. Comme le couple de réluctance est proportionnel au carré du courant, plus la valeur du courant est élevée, plus le décalage par rapport au maximum du couple varie. Cette variation diminue en intensité avec l'augmentation du nombre de paires de pôles car l'effet d'anisotropie est alors moindre [4].

##### **I.4.2.3. Couple de détente**

Appelé aussi couple de denture ou couple de réluctance d'encoches. C'est un couple pulsatoire dû à l'interaction des aimants avec les dents statoriques. En d'autres termes, c'est un couple dû à la variation de l'énergie magnétique au sein du moteur lorsque le rotor tourne à vide [4, 36].

Celui-ci est essentiellement dû aux forces qui s'exercent sur les extrémités des aimants. Les encoches du milieu de l'aimant, en raison de la symétrie des lignes de champ à vide, n'exerce aucune force tangentielle sur le rotor ; par contre, aux extrémités du pôle, les lignes de champ sont dissymétriques, il s'exerce alors un effort sur le rotor [4].



**Fig.I.6.** Différents couples dans les machines à aimants :

- 1- Couple d'interaction ;
- 2- Couple de réluctance ;
- 3- Couple résultant (somme des couples d'interaction et de réluctance) ;
- 4- Couple de détente (pour une structure de stator avec 6 encoches sous un pôle).

Une méthode traditionnelle très efficace pour réduire le couple de denture est l'inclinaison des encoches statoriques ou des aimants rotoriques d'un pas dentaire. Toutefois, cette solution présente une difficulté technique et un surcoût, une autre technique consiste à décaler les blocs d'aimants d'un pas dentaire, méthode de mise en œuvre facile mais induit une baisse de flux moyen sous un pôle, d'où une diminution du couple moyen.

D'autres méthodes ont été suggérées pour réduire le couple de denture comme [4, 35] :

- La diminution de la largeur d'ouverture des aimants ;
- L'utilisation des encoches semi-magnétiques (cales) ;
- L'utilisation d'un entrefer large.

## I.5. Alimentation des machines à aimants permanents

Les machines à aimant peuvent être classées d'après la distribution de l'induction et la forme du courant d'alimentation en deux grandes classes [32, 37] :

- Les machines à f.e.m trapézoïdale dites BDCM (Brushless Direct Current Machines).
- Les machines à f.e.m sinusoïdale dites PMSM (Permanent Magnet Synchronous Machines).

### I.5.1. Les machines à f.e.m trapézoïdale

Les moteurs à courant continu sans commutateur (BDCM) ont été introduits en 1962 par T.G.Wilson et PH. Trickey [73]. Ces moteurs appelés parfois ECM (Electronically Commutated Motors) est la copie quasi-conforme du moteur à courant continu à la différence près que la fonction de commutation réalisée mécaniquement par le collecteur est effectuée électriquement sans qu'aucun contact entre le stator et le rotor ne soit nécessaire. Elle présente

donc les avantages d'une machine à courant continu à savoir un couple facile à asservir à travers le courant d'induit, en éliminant ses inconvénients.

Ces machines ont une force contre électromotrice de forme trapézoïdale ou rectangulaire. L'alimentation de ces machines demande des courants statoriques rectangulaires et un enroulement statorique concentré pour produire un couple constant. À cause de la forme trapézoïdale, la position du rotor est commandée pour régler le courant circulant à travers deux phases statoriques. Ce type de machine est très utilisé à cause de la simplicité de sa commande; une seule boucle de courant suffit, donc peut coûteuse; cependant, un simple retard de commutation peut causer un grand couple pulsatoire, cela est l'inconvénient majeur qui fait que ce type de machine n'est pas utilisé pour les machines de grandes performances.

Afin de minimiser les couples pulsatoires, on alimente la machine avec des créneaux de courant de  $120^\circ$ . Cette alimentation consiste à alimenter à tout instant deux phases du moteur avec des créneaux de courant. La figure (I.7.a) montre la géométrie d'un moteur à courant continu à 4 pôles avec un enroulement concentré triphasé et la figure (I.7.b) montre le courant statorique et la forme d'onde de la f.e.m.

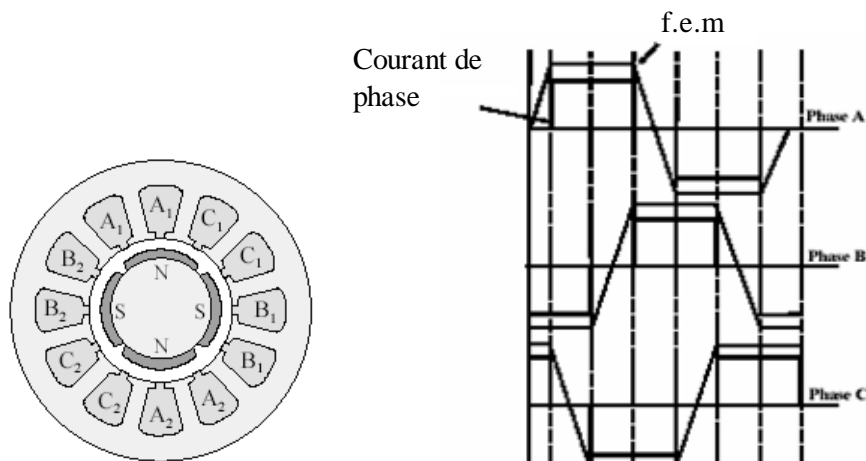


Fig. I.7.a. Moteur BDCM à 4 pôles

Fig. I.7.b. La forme du courant de phase et la f.e.m

Fig. I.7. Le courant de phase et la f.e.m d'un moteur BDCM à 4 pôles

### I.5.2. Les machine à f.e.m sinusoïdale

En principe, les machines à f.e.m sinusoïdale ne diffèrent pas des machines à f.e.m trapézoïdale dans la conception, cependant la forme d'onde du courant d'excitation est dans ce cas sinusoïdale, ce qui élimine l'ondulation du couple causée par la commutation. Ces machines présentent plusieurs avantages comparés aux (BDCM) comme : la capacité de contrôle du couple, le rendement ainsi que le fonctionnement dans une large gamme de puissance. Pour les entraînements de précision (robotique), ces machines sont préférées aux BDCM [35].

### I.6. Différentes types de machines tournantes à aimants permanents

La direction du flux magnétique peut subdiviser les machines à aimants permanents en trois classes principales : les machines à flux radial, les machines à flux axial, les machines à flux transverse [35].

### I.6.1. Les machines à flux radial

Il existe de nombreuses configurations du moteur ; la raison principale de cette diversité est que les utilisateurs ont tous des besoins spécifiques. Par exemple ; pour la conception du servo-moteur, l'inertie devra être la plus faible possible afin de permettre une accélération et une décélération la plus rapide possible. Il sera donc préférable d'utiliser un moteur à rotor intérieur avec des aimants à haute densité d'énergie. Tandis que pour une application où la vitesse doit rester la plus constante possible, un moteur à rotor extérieur du fait de son inertie est préférable.

Il faut souligner que le stator des machines à aimants permanents est similaire à celui des machines asynchrones conventionnelles [27].

#### I.6.1.1. Les machines à rotor interne

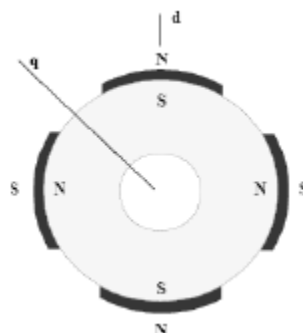
Ces machines présentent la majorité de celles à aimants permanents, elles présentent une configuration proche de celle des machines synchrones conventionnelles [4].

L'emplacement des aimants peut avoir un effet significatif sur le mécanisme de la machine, sur les caractéristiques électriques et spécialement sur les inductances de la machine. En fonction de la disposition des aimants au rotor, on distingue plusieurs types de machine [4, 26, 28]:

##### a) Les machines à entrefer constant ou à pôles lisses

Les aimants sont disposés directement contre la culasse magnétique tournante de telle sorte qu'ils couvrent l'arc polaire pour être utilisés sans pièces polaires (structure SPP) (voir figure I.8), et fournissent au niveau de l'entrefer une induction égale à des fuites près à celle existant dans l'aimant.

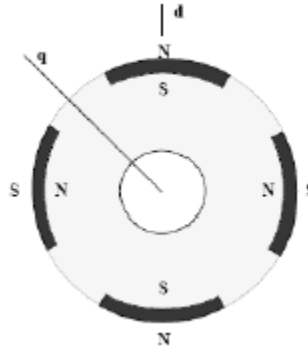
Cependant, pour des raisons de tenue mécanique, les aimants doivent être tenus par une frette et protégés de la corrosion dans le cas du Nd-Fe-Br. Le principal intérêt de cette structure réside dans la simplicité de sa réalisation et de sa commande. C'est la structure la plus utilisée de nos jours, principalement pour les applications à vitesse faible pour des problèmes de tenue mécanique. De plus, avec une telle structure ; l'entrefer magnétique est important (la perméabilité des aimants étant proche de celle de l'air) et l'inductance de l'induit est pratiquement constante (pas d'effet de saillance).



**Fig.I.8.** Rotor de machine à aimant périphérique (sans pièces polaires)

b) Les machines à entrefer variable (dites aussi à pôles saillants)

Les aimants utilisés sont accompagnés de pièces polaires (structure APP) (figure I.9). Dans ce cas, les aimants sont insérés dans le rotor ce qui permet d'avoir une bonne tenue mécanique du rotor ; cependant la variation de la réluctance provenant de l'anisotropie du rotor (présence des pièces polaires) peut contribuer à la production de l'ondulation du couple.

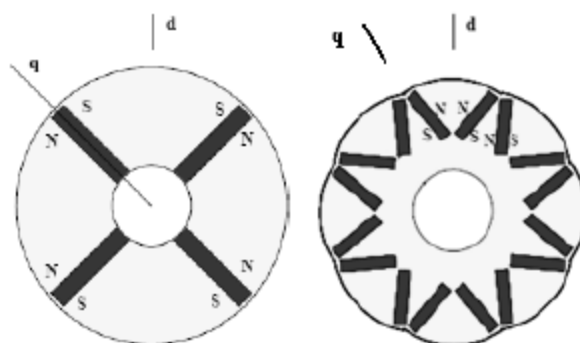


**Fig.I.9.** Rotor de machine à aimants avec pièces polaires (à aimants insérés)

Cette structure avec des aimants insérés fournit un diamètre rotorique petit, donc une faible inertie qui est souhaitable pour les performances dynamiques [28].

Les machines à pôles saillants se prêtent au montage dit « à concentration de flux » (figure I.10). Les aimants sont alors logés entre pièces polaires et leur aimantation est transversale, dans ces conditions, les flux de deux aimants adjacents s'ajoute dans la pièce polaire. Ce type de machine est très adapté pour des applications à fort couple.

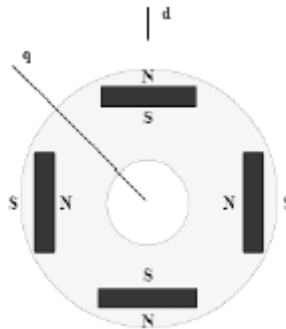
Avec un nombre de paires de pôles importants, la concentration de flux est plus importante, l'anisotropie réduite ; cependant l'effet de saturation atténue ces performances. Dans ces conditions, l'emploi d'aimant de type ferrites permet d'obtenir des inductions d'entrefer du même ordre de grandeur que dans les structures SPP utilisant des aimants à terres rares. Le coût des aimants est ainsi très réduit mais la réalisation mécanique est beaucoup plus complexe. En plus du grand nombre de pôles, la fréquence de fonctionnement est, à vitesse égale, plus élevée. Ainsi pour éviter des pertes trop fortes dans le fer statorique, ces machines ne sont utilisées qu'aux basses vitesses [4, 26].



**Fig.I.10.** Deux structure de rotor à concentration de flux

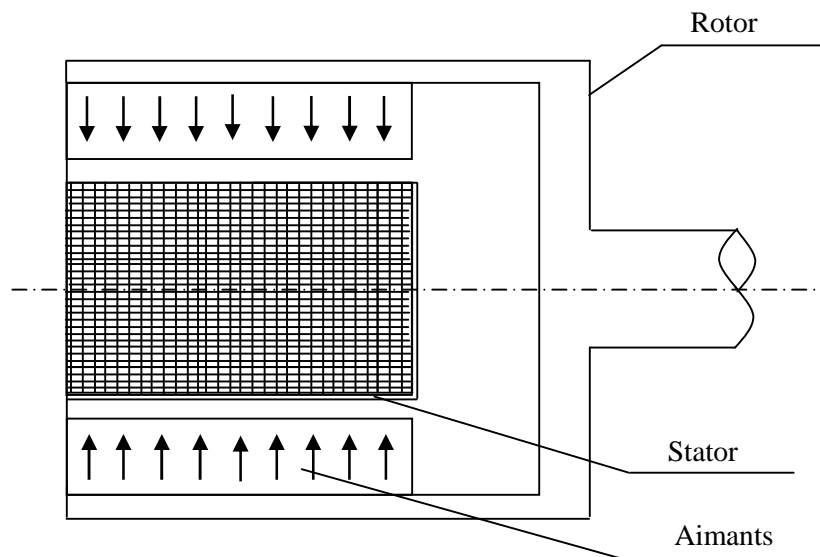
D'autres structures concernent les machines à aimants enterrés dans le rotor (figure I.11). La structure des inducteurs pour ce type de machine est à géométrie complexe. Les aimants sont enterrés à l'intérieur du rotor et protégés des éventuelles poussières ou contraintes mécaniques. Elles présentent un avantage qui réside dans la simplicité de

fabrication des aimants de forme parallélépipédique. Leur robustesse mécanique les destine aux grandes vitesses. Ces machines sont généralement équipées d'une cage d'écureuil pour les démarrages directs.



**Fig. I.11.** Rotor de machine à aimants internes

### I.6.1.2. Les machines à rotor externe

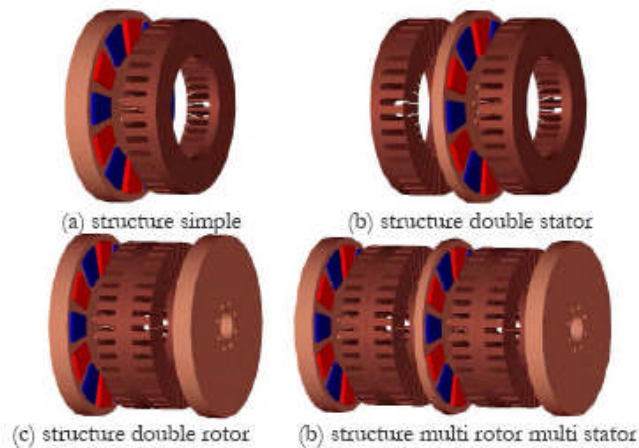


**Fig. I.12.** Structure de moteur à rotor externe

Cette structure présente l'avantage de ne faire appel qu'à un seul support (palier). Le collecteur électronique est généralement directement intégré sur le bout du stator opposé au palier. Ces moteurs sont utiles dans les entraînements à vitesse constante, avec application d'aimants performants les moins coûteux ou avec des aimants ferrites insérés ou collés à la surface du rotor [4].

### I.6.2. Les machines à aimants discoïdes à champ axial

Les moteurs discoïdes sont pourvus de disques fixes bobinés et de disques mobiles supportant les aimants permanents. L'avantage déterminant de la structure discoïde par rapport aux structures cylindriques provient de l'optimisation de la surface utile de génération du couple, qui se traduit par une puissance volumique importante [33]. Ces moteurs sont de construction simple, donc de faible coût ; de plus, du fait d'un entrefer pratiquement constant le couple de détente est inexistant. Cette structure fait l'objet d'une attention particulière, son application touche particulièrement le domaine où la miniaturisation est de rigueur.



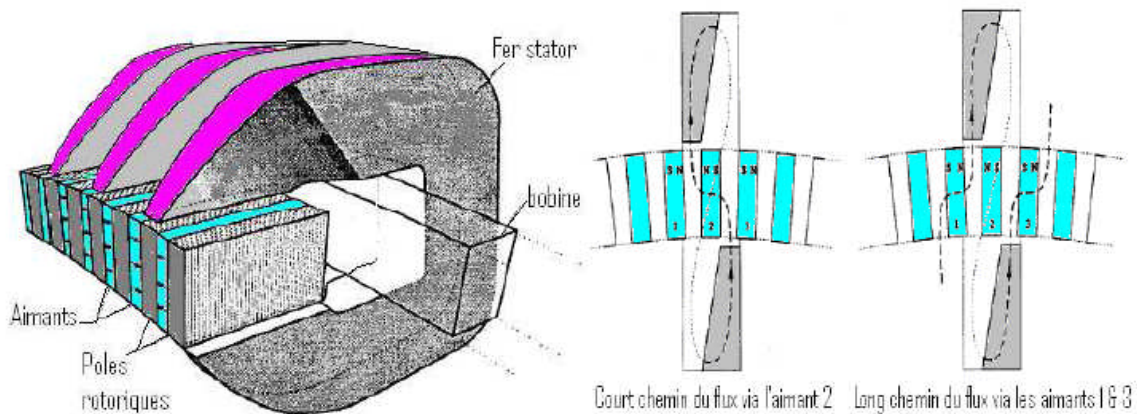
**Fig.I.13.** Vue d'une machine à flux axial (différentes configurations) [33].

Malgré sa puissance massique élevée, on souligne toutefois l'existence de contraintes mécaniques liées aux poussées axiales et des contraintes thermiques dues à la difficulté d'évacuation des pertes statoriques [4, 33].

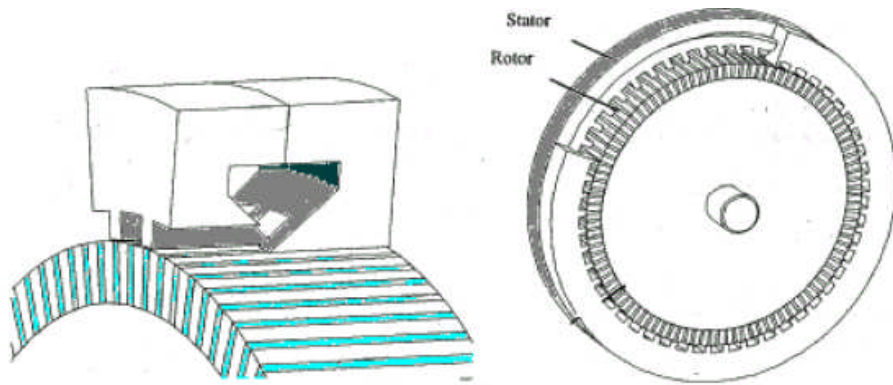
### I.6.3. Machines à aimant à flux transverse

Dans cette structure, des circuits magnétiques en forme de fer à cheval régulièrement disposés entourent le bobinage statorique de chaque phase, figure (I.14). Un moteur à flux transverse  $q$ -phasé comprendra alors plusieurs moteurs monophasés (circuits magnétiques) montés sur le même arbre et décalés d'un angle géométrique de  $2\pi/q$  figure (I.15) et figure (I.16).

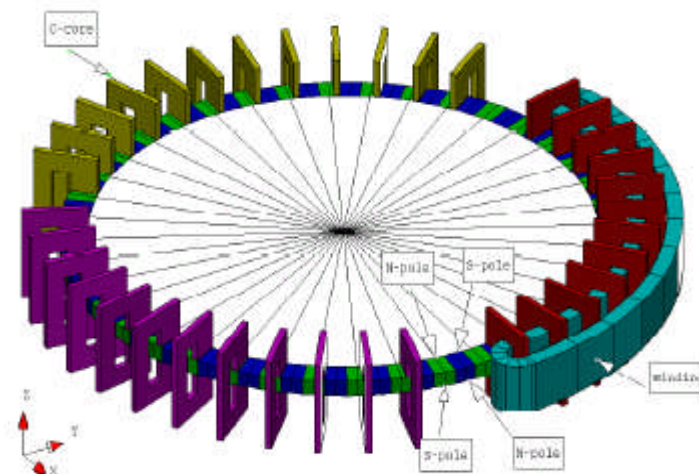
Ces structures sont particulièrement adaptées pour des exigences de forte densité de couple, toutefois sa complexité mécanique et son coût de réalisation font qu'elle est encore au stade de développement. Par ailleurs, on souligne des forts couples pulsatoires, des vibrations et des pertes fers excessives dues au caractère tridimensionnel du champ. Pour réduire ces pertes, on pourrait utiliser des matériaux magnétiques composites (poudre compacte) au détriment du couple volumique lié à un niveau d'induction de saturation relativement faible de ce type de matériau. En outre, les quelques réalisations effectuées ont mis en évidence que l'achèvement d'un fort couple volumique se traduit par un surdimensionnement de la partie convertisseur [33].



**Fig.I.14.** Principe d'une machine à flux transverse [33].



**Fig.I.15.** Vue d'une machine à flux transverse [33].



**Fig.I.16.** Vue d'une machine à flux transverse triphasée [33].

## I.7. Conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'une revue des principales structures des machines à aimants permanents existantes, ainsi que leur domaine d'application. La multitude des structures caractérisant ces machines, associée à la diversité des nuances d'aimants et à la régression relative du prix de revient des aimants permanents et surtout la constante évolution des techniques de commande augmentent leur intérêt, notamment avec tous les avantages qu'elles procurent (couple massique élevé, miniaturisation aisée, séparation du rotor et du stator...). Avec l'évolution du marché des aimants, ces machines peuvent surclasser les machines conventionnelles dans certaines applications, notamment la machine asynchrone connue pour sa robustesse et son moindre coût.

La multiplicité des structures fait que la modélisation n'est pas une chose aisée. On a recours à une modélisation électromagnétique. Cette dernière repose en général sur des méthodes de discrétisation numérique. L'une des méthodes les plus utilisées en ce sens est la méthode des éléments finis. C'est une méthode puissante qui permet d'intégrer pratiquement tous les phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines. Cette méthode fait l'objet du chapitre suivant.

# Chapitre II

## **La méthode des éléments finis**

## II.1. Introduction

La conception des dispositifs électromagnétiques requiert une connaissance sans cesse améliorée des phénomènes électromagnétiques. Les méthodes de calcul empiriques ou analytiques basées sur des modèles simplificateurs deviennent insuffisantes, dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux possèdent des caractéristiques non linéaires. La résolution de tels problèmes nécessite de recourir à des méthodes numériques.

La modélisation numérique des systèmes électromagnétiques dans les aspects d'analyses de performances, le contrôle et la surveillance des systèmes existants, le développement, la conception et l'optimisation de nouveaux dispositifs a connu une avancée considérable. Ceci est dû principalement à une croissance continue des besoins industriels à travers la recherche de nouveaux modèles d'une part, et d'une croissance des moyens informatiques d'autre part [38].

La méthode numérique la plus courante est la méthode des éléments finis, qui est une méthode très attractive dans la conception et l'analyse des dispositifs électromagnétiques. C'est une méthode très générale pour la résolution des divers problèmes rencontrés en pratique : stationnaires ou non, linéaires ou non, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions [39].

Dans ce qui suit, nous présentons la méthode des éléments finis, son application à la modélisation des dispositifs électromagnétiques. Les principales étapes de mise en œuvre de cette méthode sont donc présentées.

## II.2. Présentation de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis tient son origine dans l'analyse des structures [40]. Bien que les premiers calculs effectués avec cette méthode soient fournis par Courant [41] en 1943, la méthode des éléments finis n'a vu son application pour les problèmes d'électromagnétisme que depuis la fin des années 60. Les premières applications dans ce domaine reviennent à P. Silvester et M.V.K Chari [39].

L'évolution de la méthode est intimement liée au développement de l'ingénierie et de l'informatique. Son application dans des domaines variés comme l'aéronautique est un témoignage du haut degré de précision de la méthode [34].

D'une manière générale, cette méthode peut être définie comme une technique numérique d'approximation des solutions des équations aux dérivées partielles qui régissent les phénomènes physiques et leurs conditions aux limites.

L'objectif de cette méthode est de remplacer un modèle décrit dans un espace continu par un modèle discret équivalent en utilisant une approximation simple des variables inconnues sur des sous domaines, pour transformer les équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques dont la résolution fournit une solution approchée du problème [42].

### II.3. Formulations des équations d'électromagnétisme

Les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier au sein des dispositifs électrotechniques sont régis par les quatre équations de Maxwell et les équations caractéristiques du milieu [43].

Nous disposons alors des sept équations suivantes :

- Équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

- Équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

- Équation de conservation de flux magnétique

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

- Équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

- Les relations du milieu

$$\vec{B} = \mu(H)\vec{H} \quad \text{Ou} \quad \vec{H} = \nu(B)\vec{B} \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E} \quad (\text{II.6})$$

- La loi d'ohm

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (\text{II.7})$$

Avec :

- $\vec{B}(T)$  Induction magnétique,
- $\vec{D}(C.m^{-2})$  Induction électrique,
- $\vec{E}(V.m^{-1})$  Champ électrique,
- $\vec{H}(A.m^{-1})$  Champ magnétique,
- $\vec{J}(A.m^{-2})$  Densité de courant,
- $t(s)$  Temps,
- $\varepsilon(F.m^{-1})$  Permittivité,
- $\mu(H.m^{-1})$  Perméabilité magnétique,
- $\rho(C.m^{-3})$  Charge volumique,
- $\sigma(S.m^{-1})$  Conductivité,
- $\nu = (1/\mu)$  Réductivité magnétique.

• **Formulation des problèmes électromagnétiques**

Pour les fréquences utilisées en électrotechnique, les courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sont négligeables devant les courants de conduction ; l'équation (II.2) s'écrit alors :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II.8})$$

La relation de conservation de flux (II.3) permet de définir une fonction potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{II.9})$$

La combinaison des équations (II.5), (II.8) et (II.9) nous permet d'écrire:

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \text{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} \quad (\text{II.10})$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$\text{rot}(\nu \cdot \text{rot} \vec{A}) = \vec{J} \quad (\text{II.11})$$

Avec :  $\nu = (1/\mu)$

Considérons la loi de Lenz Faraday avec la relation (II.9), on aura :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\text{rot} \vec{A})}{\partial t} \quad (\text{II.12})$$

D'où :

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.13})$$

La relation (II.13) implique qu'il existe un potentiel scalaire V tel que :

$$\left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\text{grad} V \quad (\text{II.14})$$

En combinant la relation (II.14), la loi d'ohm et la relation (II.11) et après développement ; on obtient la relation (II.15) du potentiel vecteur magnétique A :

$$\text{rot}(\nu \cdot \text{rot} \vec{A}) = \vec{J}_0 - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{II.15})$$

Avec :  $\vec{J}_0$  : le courant de source.

Pour que  $\vec{A}$  soit complètement défini, il faut également fixer la valeur de sa divergence. On ajoute alors la condition de Jauge de Coulomb donnée par :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (\text{II.16})$$

En 2D, le potentiel vecteur ne possède qu'une seule composante non nulle  $\vec{A}_z$ , ce qui nous donne l'équation de diffusion suivante:

$$\text{rot}(\text{vrot}\vec{A}_z) = \vec{J}_0 - \sigma \frac{\partial \vec{A}_z}{\partial t} \quad (\text{II.17})$$

En développant l'équation (II.17) dans le cas cartésien bidimensionnel, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \text{v} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \text{v} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -J \quad (\text{II.18})$$

Où :  $A$  : la fonction scalaire inconnue, est le module de la composante  $\vec{A}_z$ , et où  $J$  est le module de la composante  $\vec{J}_{0z}$ .

#### II.4. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites décrivent les interactions entre le système à étudier et l'extérieur. Elles peuvent être de type imposées (condition de Dirichlet), dérivées imposées (condition de Neumann), ou une combinaison des deux (mixtes).

En plus des conditions précédentes, il peut exister des conditions cycliques ou anticycliques (périodicité ou anti-périodicité) :

$$A|_{\Gamma} = K.A|_{\Gamma} + d\Gamma \quad (\text{II.19})$$

$d\Gamma$  : Période spatiale suivant le contour  $\Gamma$ .

$k=1$  : cyclique ;

$k=-1$  : anti-cyclique.

#### II.5. Discrétisation et approximation

L'idée fondamentale de la méthode des éléments finis est de subdiviser la région à étudier en petites sous régions appelées élément finis constituant le maillage. Les fonctions inconnues sont approximées sur chaque élément fini par une simple fonction appelée fonction de forme qui est continue et définie sur chaque élément seul [38].

La forme des éléments est directement liée à la dimension du problème pour une géométrie en (2D), on utilise généralement des triangles ou des quadrilatères ; pour une géométrie en (3D), on utilise les tétraèdres, les prismes ou les hexaèdres [42, 44].

La discrétisation est une étape importante dans l'analyse éléments finis car la précision et les résultats escomptés dépendent de la méthode de discrétisation et de la finesse de cette subdivision en domaine [1].

La fonction inconnue est approchée dans chaque élément par une fonction d'interpolation nodale, faisant intervenir les valeurs de l'inconnue aux nœuds de ces éléments ainsi que les coordonnées géométriques de ces nœuds.

L'inconnue  $A$  est décrite dans chaque élément  $e$  par une combinaison linéaire des valeurs  $A_i^e$  aux nœuds [44]:

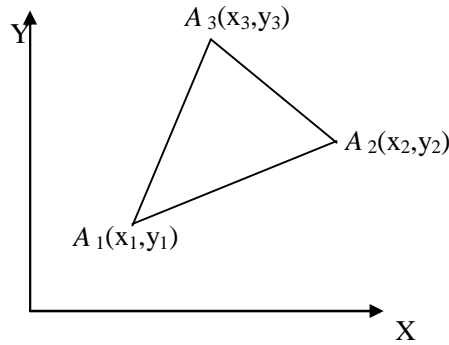
$$A^e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i^e A_i^e \quad (\text{II.20})$$

Les  $\alpha_i$  sont les fonctions de pondération devant vérifier :

$$\alpha_i^e(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{Si } i=j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Dans le cas du calcul du champ dans les structures électromagnétiques, les éléments de forme triangulaire sont les plus utilisés [40, 45]. Cette subdivision exclusivement triangulaire du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique et permet de traiter des expressions simples.

Dans le cas de l'élément triangulaire représenté sur la figure (II.1), les fonctions de pondération sont :



**Fig.II.1.** Élément triangulaire.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} [(x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} [(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y]$$

Où :  $\Delta$  est l'aire de l'élément.

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Delta &= [(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2)] / 2 \\ &= \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]\end{aligned}\quad (\text{II.21})$$

## II.6. Formulation intégrale

Une des originalités de la méthode des éléments finis réside dans le fait qu'elle est basée sur une formulation intégrale du phénomène analysé plutôt que sur la forme différentielle que représente l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites [46].

Deux types de formulation existent :

- La formulation variationnelle dont l'utilisation exige la connaissance au préalable de la fonctionnelle d'énergie du système. Le minimum de la fonctionnelle correspond à la solution de l'équation aux dérivées partielles sous les conditions aux limites. La recherche de la fonctionnelle est une tâche très difficile dans certain cas surtout pour les problèmes les moins étudiés [34].

Dans le cas des phénomènes magnétostatiques, la fonctionnelle d'énergie est donnée par [47]:

$$\mathfrak{S} = \iint_{\Omega} \left( \int_0^B v B dB \right) d\Omega - \iint_{\Omega} J A d\Omega \quad (\text{II.22})$$

La formulation résidus pondérés est établie directement à partir de l'équation physique à résoudre contrairement à la méthode variationnelle; ceci est l'avantage principal de cette méthode qui est comparativement plus simple et plus facile à comprendre et à appliquer [34].

Soit le résidu :

$$R(A) = L(A) - F_v \quad (\text{II.23})$$

Où :

$R$  : Le résidu de l'approximation;

$L(A)$  : L'opérateur différentiel;

$F_v$  : Fonction défini sur le domaine d'étude  $\Omega$ ;

$A$  : L'inconnu.

La méthode des résidus pondérés consiste à rechercher les fonctions ( $A$ ) qui annulent la forme intégrale pour toutes fonctions de pondération  $\Psi$ , dans tout le domaine d'étude  $\{\Omega\}$ .

$$\iint_{\Omega} \Psi \cdot R(A) d\Omega = 0 \quad (\text{II.24})$$

$\Psi$  : Fonction de pondération ou de projection.

Dans le cas de l'équation (II.18), l'intégrale devient :

$$\iint_{\Omega} \Psi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{II.25})$$

Après une intégration par parties et l'application des propriétés intégrales, on peut transformer l'équation (II.25) en :

$$\iint_{\Omega} v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} v \frac{\partial A}{\partial n} \Psi d\Gamma - \sigma \iint_{\Omega} \Psi \cdot \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega = \iint_{\Omega} J \cdot \Psi d\Omega \quad (\text{II.26})$$

En tenant compte des conditions aux limites de types Neumann ou Dirichlet sur la surface  $\Gamma$  le terme :  $\int_{\Gamma} v \frac{\partial A}{\partial n} \Psi d\Gamma$  s'annule, on obtient donc :

$$\iint_{\Omega} v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega + \sigma \iint_{\Omega} \Psi \cdot \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega = \iint_{\Omega} J \cdot \Psi d\Omega \quad (\text{II.27})$$

La méthode des résidus pondérés diffère selon le choix des fonctions de pondération, parmi ces méthodes : la méthode de Galerkin qui consiste à choisir comme fonction de pondération  $\Psi_i^e$  la fonction d'interpolation  $\alpha_i^e$ . L'application de cette méthode à l'équation (II.27) nous donne:

$$W = \iint_{\Omega} \left\{ v \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} A_k + v \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} A_k - J \alpha_i + \sigma \alpha_i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial A_k}{\partial t} \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{II.28})$$

L'intégration sur un élément donne l'expression suivante (sous forme matricielle) :

$$W^e(A) = [S]^e [A]^e - [F]^e + \sigma [T]^e \frac{\partial [A]^e}{\partial t} \quad (\text{II.29})$$

Où :  $[S]^e$  : est une matrice carrée (3x3) dont le terme général est donnée par :

$$S_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} v \nabla \bar{\alpha}_i \nabla \bar{\alpha}_j d\Omega_e \quad (\text{II.30})$$

$[F]^e$  : Est la matrice source (vecteur sollicitation), c'est une matrice colonne de dimension 3 dont le terme général est donné par:

$$F_i^e = \iint_{\Omega_e} J \alpha_i d\Omega_e \quad (\text{II.31})$$

Et :

$[T]^e$  : est une matrice carrée (3x3) dont le terme général est donnée par :

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \alpha_i \alpha_j d\Omega_e \quad (\text{II.32})$$

L'assemblage des matrices élémentaires  $[S]^e$  conduit à la matrice globale (de rigidité)  $[S]$ , il en est de même pour les vecteurs sollicitations élémentaires pour aboutir au

vecteur sollicitation global  $[F]$  ainsi que les matrices élémentaires  $[T]^e$  pour aboutir à la matrice  $[T]$  ; on aboutit donc à la relation matricielle globale suivante :

$$[S] [A] + \sigma [T] \frac{\partial [A]}{\partial t} = [F] \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas statique, la relation (II.33) se réduit à :

$$[S] [A] = [F] \quad (\text{II.34})$$

## II.7. Résolution

La résolution du système matriciel (II.34) est l'étape la plus importante de la méthode des éléments finis. La matrice  $S$  résultante est dans le cas général une matrice creuse, de grande taille, symétrique, non singulière (admet une matrice inverse), définie positive et à diagonale dominante.

La résolution de ce type de système nécessite un grand espace de stockage en mémoire et un grand temps de résolution. La résolution peut se faire par des méthodes numériques qui prennent deux axes distincts selon que le problème est linéaire ou non.

### II.7.1. Résolution linéaire

Le système matriciel (II.34) est linéaire lorsque la matrice  $S$  ne dépend pas de  $A$ . Dans ce cas, la résolution peut se faire soit par des méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre fini d'étapes (Gauss, Cholesky...), soit par des méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'amélioration d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaire étant difficile à prévoir, car dépendant de la structure de la matrice (Gradients Conjugués)[48, 49].

Beaucoup de programmes actuels utilisent les méthodes directes pour leur précision et leur temps de résolution qui est souvent prévisible [49, 50]. Cependant l'utilisation de ces méthodes est limitée aux systèmes de taille moyenne (inférieur à 5000) [17]. Au-delà, les méthodes indirectes sont le plus souvent utilisées, du fait qu'elles demandent moins d'espace mémoire. L'inconvénient des méthodes itératives est qu'elles sont susceptibles d'entraîner un cumul d'erreur dans le cas d'une résolution pas à pas dans le temps. De plus, pour ces méthodes, le temps de résolution dépend fortement des coefficients des matrices, de la précision désirée et autres facteurs liés à la nature du pré conditionnement utilisé [49].

La résolution optimale est celle qui est à la fois précise et rapide. La précision n'est obtenue que par le choix d'une méthode directe. La méthode de Cholesky étant plus rapide que celle de Gauss fait que notre choix a été porté sur cette méthode dans le programme mis en œuvre. Le problème d'espace mémoire est résolu en adoptant une méthode de stockage vectorielle. Nous avons utilisé dans notre cas, la méthode de la ligne de ciel qui s'adapte parfaitement à la résolution Cholesky.

Quant au coût, il est réduit en adoptant une des nombreuses méthodes de renumérotation qui permettent de réduire le profil des matrices, donc la taille du vecteur de

stockage, ainsi que la largeur de bande moyenne du système, dont le carré est proportionnel au temps de résolution [49].

Nous avons opté dans notre étude pour une très récente méthode de renumérotation facile à mettre en œuvre, rapide et qui s'adapte aisément au mouvement relatif des parties constituant les structures circulaires creuses, dont le cas des machines électriques tournantes [25].

### II.7.2. Résolution non linéaire

Les non linéarités peuvent apparaître dans la formulation d'un problème physique lorsque les paramètres physiques supposés constants sont fonctions de l'inconnu du problème. Dans le cas des problèmes électromagnétiques non linéaires, la réluctivité magnétique varie en fonction du potentiel vecteur magnétique et donc de l'induction magnétique. Dans ce cas, il est nécessaire d'approximer la réluctivité magnétique non linéaire en utilisant une fonction d'interpolation.

Parmi les méthodes d'interpolation existantes, on peut citer:

- Interpolation de Marocco [51];
- Interpolation par des splines [52];
- Interpolation hyperbolique [47].

Pour la résolution, on doit mettre en place un processus itératif jusqu'à stabilisation. La majorité des méthodes conduisent à résoudre un système linéaire à chaque itération ; parmi ces méthodes on trouve [49]:

- La méthode de substitution ;
- La méthode de Newton Raphson ;
- La méthode incrémentale.

La résolution non linéaire induit un ralentissement dans le processus de résolution et un risque de divergence. Dans ce dernier cas, on est amené à changer la solution initiale, la précision désirée, et parfois même l'algorithme de résolution. Le choix d'une meilleure précision est contraignant en temps de résolution.

Le choix d'une méthode de résolution directe permet de réduire le cumul d'erreur du à l'itérativité du processus de résolution en non linéaire, ce qui nous conforte dans le choix d'une méthode de résolution directe, à savoir la méthode de Cholesky.

### II.8. Discrétisation temporelle

Les problèmes d'évolution peuvent être de deux types : les problèmes liés à la propagation des ondes électromagnétiques ou aux courants de Foucault, on constate qu'en plus des dérivations par rapport à l'espace, il y a une dérivation par rapport au temps (équation II.33). La résolution de ce système différentiel sera effectuée généralement par une méthode aux différences finis (méthode pas à pas) [34, 38].

La dérivée partielle d'une grandeur  $A$  par rapport au temps est représentée par l'équation (II.35) ; à condition que le pas de temps  $\Delta t$  soit considéré comme suffisamment petit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A_k - A_{k-1}}{\Delta t} \quad (\text{II.35})$$

Parmi les méthodes d'intégration temporelle des systèmes différentielles du premier ordre on énumère ; les méthodes de Runge-Kutta (ordre 4), différences finis dans le temps, prédiction correction et la méthode d'Euler.

La méthode d'Euler répond de manière satisfaisante à la majorité des problèmes rencontrés en pratiques.

La méthode d'intégration d'Euler se formule comme suit :

$$\{A_{t+\theta\Delta t}\} = \theta\{A_{t+\Delta t}\} + (1-\theta)\{A_t\} \quad (\text{II.36})$$

Les valeurs de  $\theta$  détermine les schémas les plus utilisés [38] :

Valeurs de $\theta$	Nom du schéma
1	Euler implicite
0	Euler explicite
0.878	Liniger
2/3	Galerkine
1/2	Cranck-Nickolson

Le schéma d'Euler implicite est le schéma le plus utilisé pour des raisons de stabilité numérique.

## II.9. Conclusion

Ce deuxième chapitre a fait l'objet d'une représentation des principales étapes de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis. Dans le chapitre suivant, l'application de cette méthode particulièrement pour les machines à aimants permanents sera présentée. Une application sur une machine à aimants collés à la surface est faite dans le cas statique linéaire et non linéaire.

# Chapitre III

## **Modélisation par éléments finis d'une machine à aimants permanents**

### III.1. Introduction

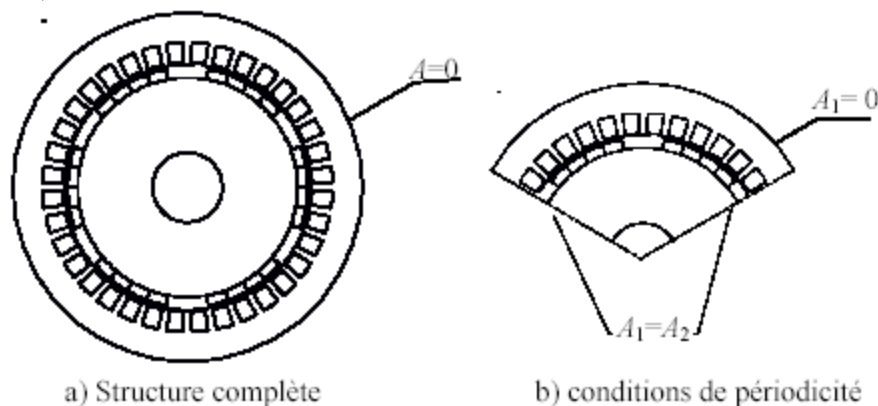
La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées dans la modélisation électromagnétique des machines électriques tournantes [53, 54]. Sa particularité réside dans le fait qu'elle permet d'intégrer diverses méthodes de prise en compte des phénomènes inhérents au fonctionnement de ces machines, tels les phénomènes de saturation magnétique, les couples pulsatoires du à un entrefer variable ainsi que les mouvements relatifs des parties statoriques et rotoriques [1].

Au profit des avantages qu'elles présentent, les machines à aimants permanents attirent l'attention des industriels et des chercheurs. De ce fait, dans ce présent chapitre, nous nous proposons d'appliquer la méthode des éléments finis à la modélisation des machines à aimants permanents dans le cas général ; puis de façon particulière à la machine à aimants permanents de type surfacique. En premier, l'étude porte sur le cas magnétique linéaire, ensuite la saturation est prise en compte par la méthode de Newton Raphson. Une comparaison des résultats obtenus par ces deux différents cas est effectuée. Un programme Fortran 90 est réalisé et appliqué de façon particulière à la machine à aimants permanents de type surfacique.

### III.2. Modélisation par éléments finis des machines à aimants permanents

#### III.2.1. Les conditions aux limites

Dans le cas des machines tournantes, deux cas peuvent se présenter selon le domaine d'étude figure (III.1) :



**Fig.III.1.** Conditions aux limites sur une machine tournante

a) L'étude se fait sur une partie de la machine [1] :

Dans ce cas, deux types de conditions aux limites se présentent :

-Condition de Dirichlet : Appliquée à la limite externe de la machine  $A = 0$ .

On suppose dans ce cas que nous n'avons aucune ligne de fuite à la surface externe de la machine.

-Condition de périodicité ou d'anti-périodicité : la machine est généralement coupée sur un pôle ou deux. Dans le premier cas, sur le premier plan de coupe, on trouve le même potentiel que dans le second plan de coupe ajouté du signe. La même chose se présente dans le cas de l'étude sur deux pôles (une période) sauf que les valeurs aux deux plans de coupe doivent présenter l'égalité figure (III.1.b), ceci dans le cas des machines synchrones. Cependant pour certains types de machines où il y a une certaine dissymétrie de construction

(par exemple cas des MRV ou le nombre de pôles au stator différent de celui du rotor), les plans de coupe sont difficiles à envisager. L'étude de la construction complète est envisagée.

b) L'étude se fait sur toute la machine [1] :

Dans ce cas, une seule condition est imposée : condition ( $A = 0$ ) sur le contour externe de la machine figure (III.1.a).

### III.2.2. Sources de courants

Ils se présentent sous deux formes : des courants directement appliqués avec une source de courant, où résultant d'une alimentation avec une source de tension à partir d'un circuit électrique, localisés dans les conducteurs de l'inducteur, et les courants équivalents des aimants placés dans les machines à aimants permanents.

### III.2.3. Hypothèses d'étude

Dans la modélisation des machines à aimants, des hypothèses simplificatrices sont souvent introduites et sont comme suit [1]:

1 - Les effets d'extrémités sont négligés (le problème est en 2-D). Il est à noter toutefois que dans le circuit électrique, l'inductance des extrémités des bobines sont prises en compte.

2 - Le stator des machines étudiées est généralement constitué de tôles feuilletées qui empêchent la circulation de courants induits suivant l'axe de la machine. La conductivité électrique est donc considérée nulle au niveau de la culasse statorique.

3 - La densité de courant  $J_s$  dans les enroulements de l'induit est supposée uniformément répartie. Cette densité est imposée par l'onduleur de tension contrôlé en courants alimentant la structure étudiée. Elle est déterminée par les caractéristiques de la structure étudiée (bobinage, forme des encoches...). Pour une encoche de section  $S$  comportant  $N$  conducteurs et traversée par un courant instantané de valeur  $i(t)$ , elle s'écrit ainsi :

$$J_s = \frac{Ni(t)}{S} \quad (\text{III.1})$$

Dans la pratique, afin d'uniformiser la répartition spatiale de la densité de courant sur la section, les bobines statoriques sont constituées de conducteurs finement subdivisés. De plus, pour éviter les éventuels déséquilibres des forces électromotrices induites dans les différents conducteurs, ceux-ci sont transposés de manière à occuper toutes les positions dans les encoches.

4 - Les pertes dues au phénomène d'hystérésis sont négligées.

### III.2.4. Modèle magnétostatique linéaire

Dans le cas magnétostatique (le champ électrique est produit par des sources indépendantes du temps), l'équation (II.15) se réduit à :

$$\text{rot}(v.\text{rot}\vec{A}) = \vec{J}_0 \quad (\text{III.2})$$

Dans le cas linéaire, la réductivité  $\nu$  est constante ; l'équation (III.2) peut être réécrite comme suit :

$$\nu \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \vec{J}_0 \quad (\text{III.3})$$

La représentation du champ magnétique dans une machine électrique est un problème qui ne peut être posé qu'en 3D. Cependant considérant l'hypothèse d'une longueur longue du rotor par rapport au stator, le problème peut être ramené en 2D, avec effets d'extrémités négligés.

Associée à la condition de Jauge de Coulomb ( $\text{div}\vec{A} = 0$ ), la relation (III.3) devient :

$$\nu \Delta A = -J \quad (\text{III.4})$$

Dans le cas cartésien, l'équation (III.4) devient :

$$\nu \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = -J \quad (\text{III.5})$$

En appliquant la formulation résidus pondérés à l'équation (III.5), on obtient :

$$\iint_{\Omega} \Psi \left\{ \nu \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) + J \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{III.6})$$

Après intégration par parties faibles, l'équation (III.6) devient :

$$\iint_{\Omega} \nu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \nu \cdot \Psi \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma - \iint_{\Omega} J d\Omega = 0 \quad (\text{III.7})$$

La condition de Neumann implicite permet d'éliminer le deuxième terme d'où :

$$\iint_{\Omega} \nu \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} \right) d\Omega + \iint_{\Omega} J d\Omega = 0 \quad (\text{III.8})$$

On utilisant la méthode de Galerkin et après intégration et assemblage, le système final à résoudre est :

$$[SL][A] = [F] \quad (\text{III.9})$$

Avec :  $[SL]$  : la matrice de rigidité dont le terme général est donné par :

$$SL_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \nu \nabla \vec{\alpha}_i \nabla \vec{\alpha}_j d\Omega_e = \iint_{\Omega_e} \frac{1}{\mu} \nabla \vec{\alpha}_i \nabla \vec{\alpha}_j d\Omega_e \quad (\text{III.10})$$

Et :

$[F]$  : Vecteur sollicitation dont le terme général est donné par (II. 31).

Les éléments de la matrice SL sont constant et ne dépend pas de l'inconnu A ; le système algébrique (III.9) est linéaire.

### III.2.5. Modèles des aimants permanents

En plus des courants appliqués ; dans le cas des aimants permanents, il existe des courants équivalents à la magnétisation des aimants, et dépendront de l'intensité de l'aimantation de ces aimants ainsi que leur orientation [52].

$$I_{i,j,k} = \frac{1}{2} H_c (C_{i,j,k} \cos \theta - C_{i,j,k} \sin \theta) \quad (\text{III.11})$$

Où :  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  désignent respectivement la projection du vecteur aimantation rémanente  $M$  sur les axes  $OX$  et  $OY$ .

Avec :

$$M = -\nu_r H_c \quad (\text{III.12})$$

Les valeurs  $I_i$  sont directement injectées sur les nœuds du triangle. De même nous avons :

$$c_{\substack{j \\ k}} = x_{\substack{k \\ j}} - x_{\substack{j \\ i}} \quad \text{et} \quad b_{\substack{j \\ k}} = y_{\substack{k \\ j}} - y_{\substack{j \\ i}} \quad (\text{III.13})$$

Et on procède par circulation pour les autres facteurs.

### III.2.6. Modèle électromagnétique non linéaire

Dans les problèmes où les matériaux peuvent être soumis aux phénomènes de saturation, la réductivité est une fonction du champ  $A$  ou de l'induction  $B$ , dans ce cas le problème est dit non linéaire [47].

Associée à la condition de Jauge l'équation (III. 2) s'écrit dans le cas cartésien comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J \quad (\text{III.14})$$

L'application de la formulation résidus pondérés à cette dernière donne :

$$\iint_{\Omega} \Psi \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{III.15})$$

Après une intégration par partie et l'application des propriétés intégrales, on peut transformer l'équation (III.15) en :

$$\iint_{\Omega} \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial A}{\partial n} \Psi d\Gamma = \iint_{\Omega} J \cdot \Psi d\Omega \quad (\text{III.16})$$

En tenant compte des conditions aux limites de types Neumann, on obtient:

$$\iint_{\Omega} \nu \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) d\Omega = \iint_{\Omega} J \cdot \Psi d\Omega \quad (\text{III.17})$$

En appliquant la méthode de Galerkin à l'équation (III.17), on obtient:

$$W = \iint_{\Omega} \left\{ v \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} A_k + v \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} A_k - J \alpha_i \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{III.18})$$

L'intégration sur un élément donne :

$$W^e(A) = \iint_{\Omega_e} \left( v \sum_{k=1}^3 \bar{\nabla} \alpha_i \bar{\nabla} \alpha_k A_k - J \alpha_i \right) d\Omega_e = 0 \quad (\text{III.19})$$

$W^e(A)$  : peut être réécrit comme suit :

$$W^e(A) = [SNL]^e [A]^e - [F]^e \quad (\text{III.20})$$

Où :

$[S]^e$  : est une matrice carrée (3x3) dont le terme général est donné par :

$$SNL_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} v (B^2) \nabla \bar{\alpha}_i \nabla \bar{\alpha}_j d\Omega_e \quad (\text{III.21})$$

Le système final résultant est :

$$[SNL][A] = [F] \quad (\text{III.22})$$

La réductivité magnétique étant non constante, elle dépend du champ  $A$  ou de l'induction  $B$  donc il en est de même pour la matrice  $[SNL]$ , dans ce cas ; il est nécessaire de mettre en place un processus itératif de résolution jusqu'à stabilisation. Dans notre travail, la méthode adoptée est celle de Newton Raphson.

La méthode de Newton est une approche rapide, sa vitesse de convergence est localement d'ordre quadratique, ce qui la rend la méthode la plus utilisée [55].

Soit à résoudre le système non linéaire (III.22):

La résolution du système matriciel est le même que de déterminer le zéro du résidu défini par :

$$R(A) = [F] - [SNL][A] = 0 \quad (\text{III.23})$$

Supposons qu'à l'itération ( $k$ ) nous avons obtenu une approximation  $A^k$  de la solution tel que le résidu ne soit pas nul [56].

$$R(A^k) = [F] - [SNL][A^k] \quad (\text{III.24})$$

A l'itération ( $k+1$ ) nous cherchons une approximation  $A^{k+1}$  de la solution tel que :

$$R(A^{k+1}) = \left\{ R(A^k + \Delta A^{k+1}) \right\} \approx 0 \quad (\text{III.25})$$

La méthode de Newton Raphson construit un processus itératif basé sur le développement en série de Taylor du résidu, limité à l'ordre 1 au voisinage de  $A$  ; en d'autres termes son approximation linéaire [56, 57].

$$R(A^k + \Delta A^{k+1}) = R(A^k) + \left[ \frac{\partial R(A^k)}{\partial A^k} \right] [\Delta A^{k+1}] \quad (\text{III.26})$$

$$-\left[ \frac{\partial R(A^k)}{\partial A^k} \right] [\Delta A^{k+1}] = \{R(A^k)\} \quad (\text{III.27})$$

Avec :

$$[\Delta A^{k+1}] = [A^{k+1}] - [A^k] \quad (\text{III.28})$$

A chaque pas de calcul  $k$  l'annulation du développement (III.26), revient à déterminer un incrément  $[\Delta A^k]$  de la solution finale.

$$[\Delta A^{k+1}] = -\left( \frac{\partial R(A^k)}{\partial A^k} \right)^{-1} R(A^k) \quad (\text{III.29})$$

Et :

$$[A^{k+1}] = [A^k] + [\Delta A^{k+1}] \quad (\text{III.30})$$

La résolution est stoppée dès que cet incrément devient suffisamment insignifiant [58]. En substituant (II.29) dans (II.30) et en remplaçant le résidu on obtient :

$$[A^{k+1}] = [A^k] + [SJ(A^k)]^{-1} ([F] - S[A^k][A^k]) \quad (\text{III.31})$$

Avec :

$[SJ(A)] = -\left[ \frac{\partial R(A^k)}{\partial A^k} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial [A]} \left( [S^k][A]^k \right) \right]$  : Est la matrice tangente ou Jacobienne qui joue le rôle d'accélération de convergence.

Le terme général de cette matrice est :

$$SJ_{i,j} = SL_{i,j} + 2 \frac{dv}{dB^2} \Delta_e \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 A_m (\nabla \alpha_m \alpha_i) (\nabla \alpha_n \alpha_j) A_n \quad (\text{III.32})$$

Le premier terme correspond au terme de la matrice déterminé dans le cas linéaire ; quant au second existe seulement en présence de matériaux non linéaires.

La résolution non linéaire dans le cas de la méthode de Newton Raphson revient à résoudre à chaque itération le système matriciel suivant jusqu'à stabilisation:

$$[SJ^k][\Delta A^{k+1}] = [R^k] \quad (\text{III.33})$$

### III.3. Mise en œuvre du problème magnétostatique

La résolution du problème magnétostatique linéaire ou non linéaire est effectuée sur la base d'un programme sous environnement Fortran 90. Les résultats du programme sont : les lignes du potentiel vecteur magnétique, l'induction radiale le long de l'entrefer ainsi que le potentiel vecteur magnétique.

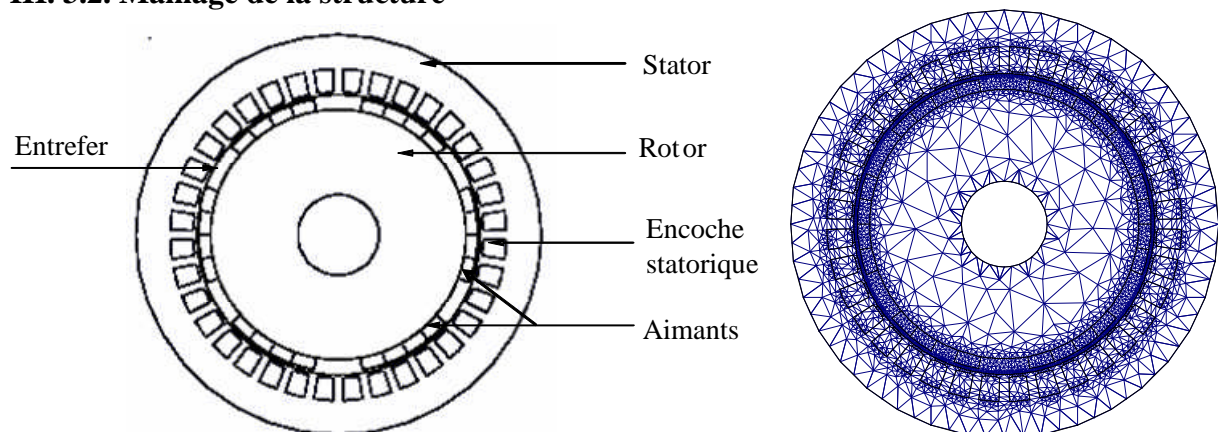
#### III.3.1. Présentation de la machine étudiée

La machine étudiée est une machine synchrone à aimants permanents étudiée aux laboratoires du GREEN (groupe de Recherche en électronique et électrotechnique de Nancy – France) [59]. Elle présente les caractéristiques du tableau (III.1) :

Caractéristique	Valeur
Puissance mécanique	60 kW
L'entrefer mécanique	0.3 mm
Diamètre externe	35 cm
Epaisseur d'aimant	1 cm
L'induction rémanente	1.03 T
Rayon rotorique	11cm
Longueur utile	171 mm
Nombre d'encoches	36
Nombre de paires de pôles	3
Densité d'encoche	1.77A/mm <sup>2</sup>
Rayon d'alésage	12.3 cm
Couple	159.2
Hauteur d'encoche	2.3 cm
Perméabilité des tôles	400 H/m

**Tableau. III.1.** Caractéristique de la machine étudiée

#### III. 3.2. Maillage de la structure



**Fig.III.2. a.** Structure de la machine étudiée **Fig.III.2. b.** Maillage de la machine étudiée (4522 nœuds et 8936 éléments)

**Fig. III. 2.** Structure et maillage de la machine étudiée

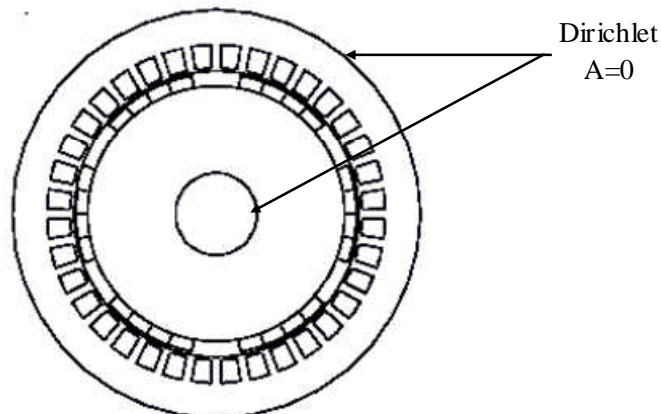
Le tracé de la géométrie d'étude a été réalisé à l'aide d'un logiciel libre sur le réseau internet (type freeware) f.e.m.m (Finite Element Method Magnetics) version 3.3 [60]; ce

logiciel présente une interface de dessin facile à manipuler, permet d'effectuer des maillages de type Delaunay sur les structures dessinées et créer des fichiers de données des maillages accessibles aux utilisateurs.

Vue la complexité des structures des machines, nous avons écrit un programme en langage Lua [61] décrivant toute la géométrie d'étude (voir figure (III. 2)) et exécuté sous f.e.m.m.

### III.3.3. Les conditions aux limites imposées

Les conditions aux limites imposées sont de type Dirichlet comme montré sur la figure (III. 3) :



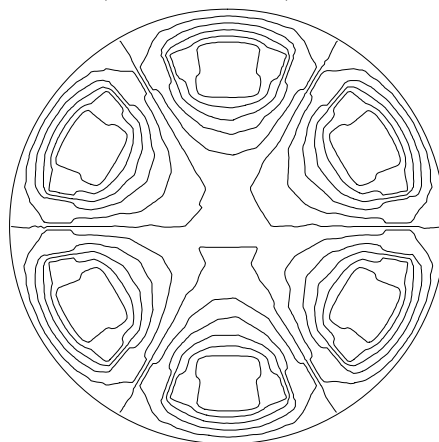
**Fig.III.3.** Les conditions aux limites imposées

### III. 3. 4. Etude dans le cas linéaire

Dans ce qui suit, nous représentons les lignes d'induction dans toute la machine étudiée ainsi que la répartition de l'induction et du potentiel vecteur magnétique au milieu de l'entrefer. Ces résultats sont obtenus en considérant le circuit magnétique non saturé (cas linéaire).

#### III. 3. 4. 1. Répartition des lignes de champ dans la machine

a) *En fonctionnement à vide (aimants seuls)*



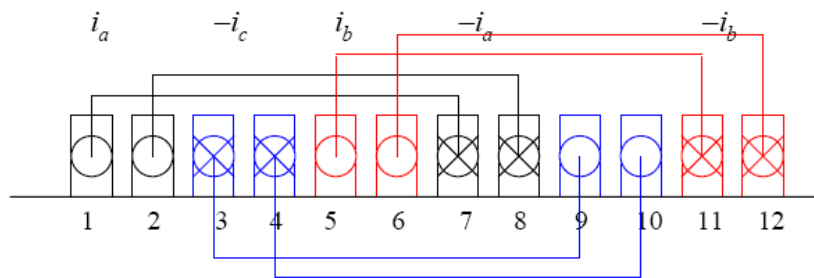
**Fig. III. 4.** Cartographie des lignes d'induction à vide

Nous considérons dans ce cas une répartition des lignes de champ dans le circuit magnétique obtenue quand le stator n'est pas alimenté. Seuls les aimants sont source de

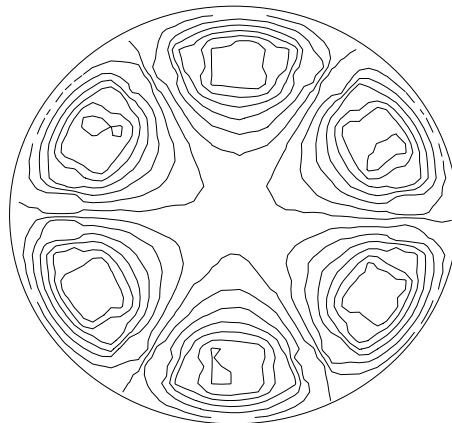
champ (voir Fig. III. 4). Les lignes de champ se concentrent dans les dents statoriques avant de pénétrer dans le dos du stator. Les lignes d'induction sortent radialement des aimants.

*b) En fonctionnement en charge (aimants et enroulements statoriques)*

L'alimentation de la machine est faite en BDCM (Brushless Direct Current Motor ou moteur à courant continu sans balais). L'enroulement de la machine est à pas diamétral en simple couche, le nombre d'encoches par pôle et par phase est de deux. Les trois phases sont alimentées alternativement avec des courants positifs, négatifs et nuls (voir figure.III.5). La densité des courants est de  $1.77 \text{ A/mm}^2$  [59]. On constate que la symétrie des lignes de champ obtenue en (fig. III.4) (aimants seuls) n'est plus respectée (fig. III.6).

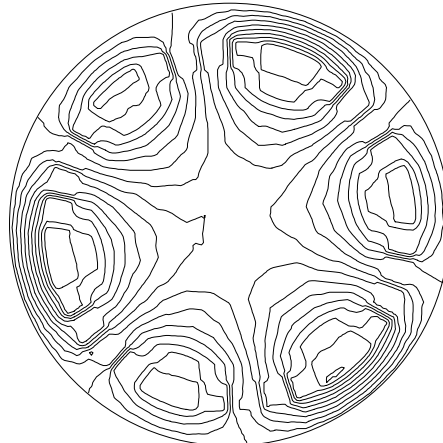


**Fig. III. 5.** Bobinage en simple couche sur un pôle



**Fig. III. 6.** Cartographie des lignes d'induction en charge

*c) Influence des courants dans les enroulements seuls*



**Fig. III. 7.** Cartographie des lignes de champ créée par les courants statoriques

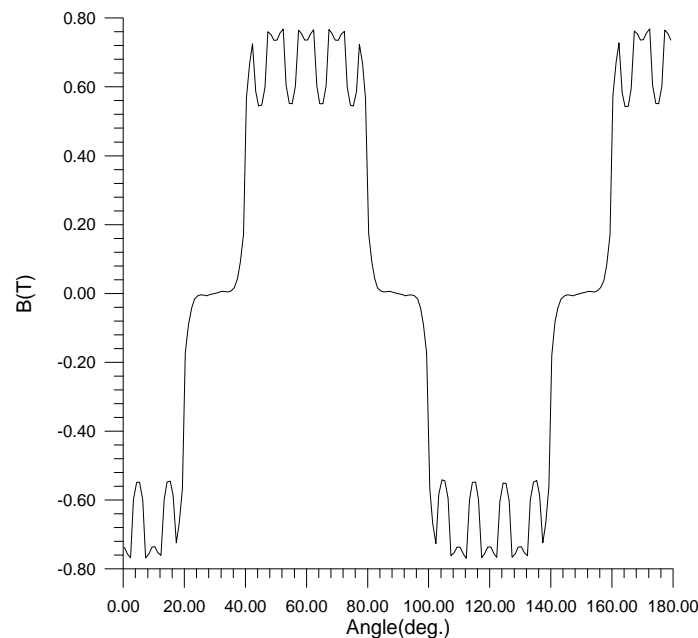
On considère dans ce cas que les sources sont constituées seulement par les courants dans les enroulements (les aimants sont considérés désexcités ou enlevés) (figure III.7). Les six pôles formés par les enroulements sont bien visibles. Il est à noter que certaines encoches ne sont pas soumises à une densité d'induction. Les valeurs relevées sont bien faibles comparées à celles induites par les aimants seuls. Les aimants représentent la principale source de champ dans la machine.

### III. 3.4. 2. Répartition du potentiel et de l'induction le long de l'entrefer

L'induction magnétique peut être dérivée du potentiel vecteur magnétique (voir équation II.9).

Dans ce qui suit, nous représentons l'évolution de l'induction et du potentiel dans l'entrefer, et plus précisément, en son juste milieu.

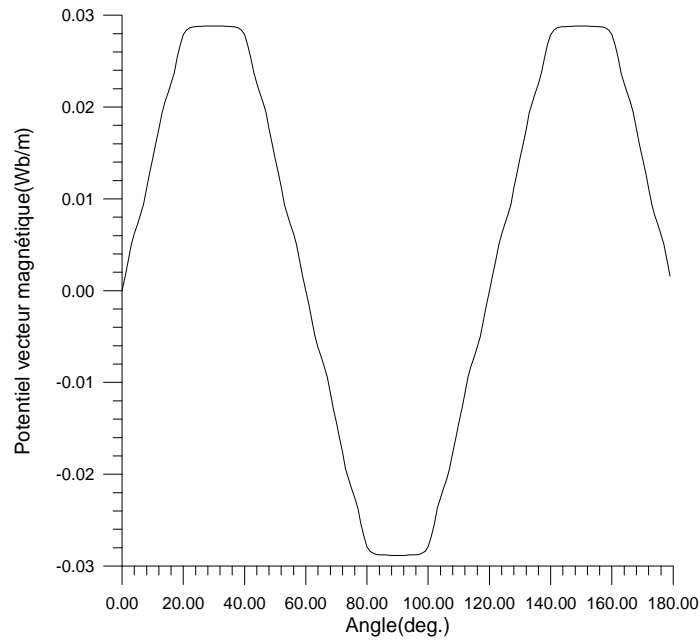
#### a) Fonctionnement à vide (aimants seuls)



**Fig.III.8.** Répartition de l'induction magnétique le long de l'entrefer à vide

Les aimants utilisés sont en NdFeBr d'induction rémanente 1,03 T. Les valeurs trouvées coïncident aux résultats de la référence [59]. Les valeurs maximales d'induction avoisinent les 0,8 T. L'effet des dentures sur la répartition de la composante normale de l'induction est bien visible sur la figure (III. 8).

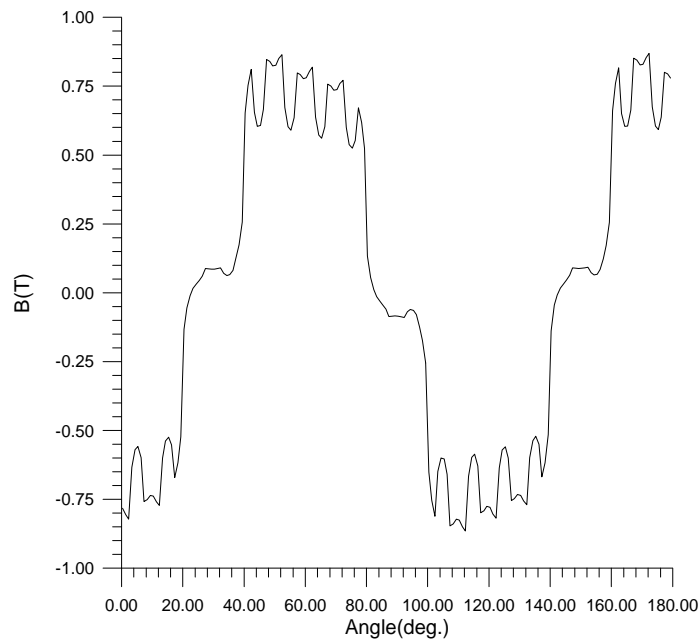
La variation du potentiel vecteur magnétique le long de l'entrefer est donnée en figure (III.9).



**Fig.III.9.** Répartition du potentiel le long de l'entrefer à vide

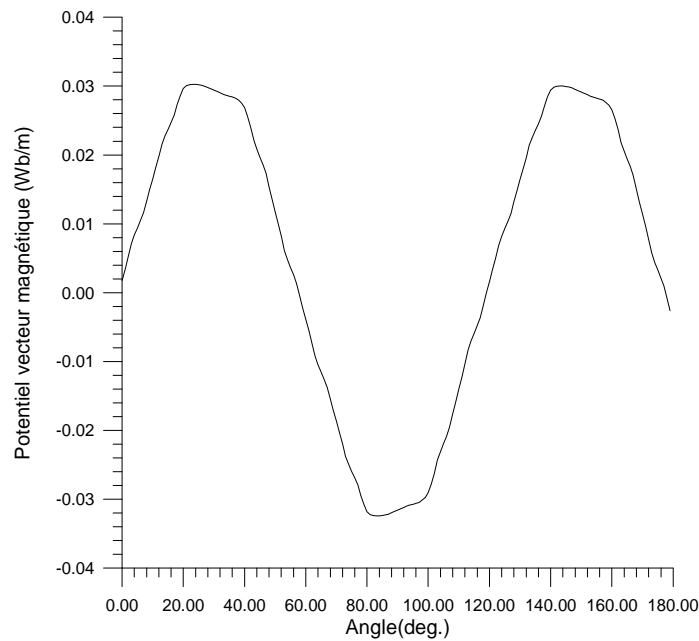
*b) Fonctionnement en charge*

Les courants d'induit augmentent l'induction d'un côté du pôle et la réduisent de l'autre côté. Ce phénomène est très visible sur la courbe représentée en figure (III. 10).



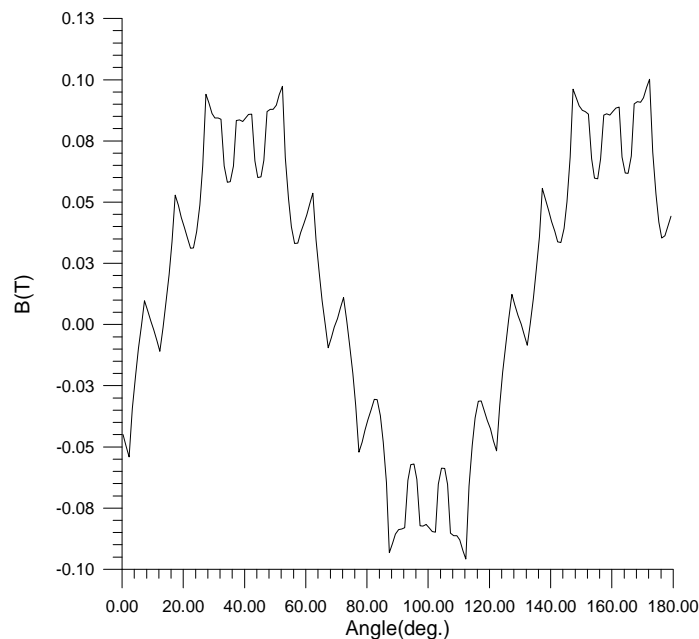
**Fig. III. 10.** Répartition de l'induction le long de l'entrefer en charge

La répartition du potentiel vecteur magnétique est donnée en figure (III. 11).



**Fig. III. 11.** Répartition du potentiel le long de l'entrefer en charge

En figure (III. 12), le niveau d'induction le long de l'entrefer introduit par les enroulements seuls est montré. Les valeurs sont de 7 à 8 fois plus faibles que celles induites par les aimants. Par le principe de superposition en régime linéaire, l'induction obtenue en (fig. III. 10) est la superposition des inductions des courbes (III. 8) et (III. 12).



**Fig. III. 12.** Répartition de l'induction le long de l'entrefer induite par les courants seuls.

### III. 3. 5. Etude dans le cas non linéaire

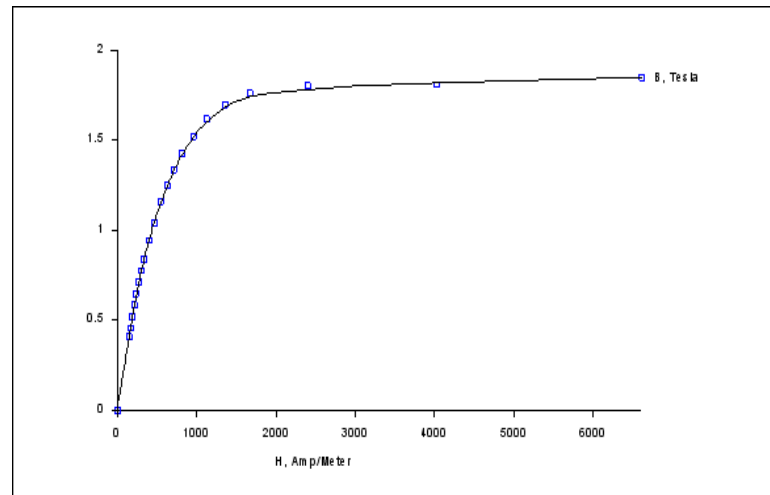
Dans le cas non linéaire, la réductivité magnétique  $n$ 'est plus constante. Elle dépend de l'induction magnétique  $B$  et donc du potentiel vecteur magnétique  $A$ . La résolution du système matriciel non linéaire (III.22) dont la matrice de rigidité SNL dépend de l'inconnue  $A$  via la réductivité magnétique  $\nu$ , ne peut être effectué que par la mise en œuvre d'un processus

itératif à partir d'une solution initiale jusqu'à convergence. En utilisant la méthode de Newton présentée au paragraphe (III.2.6), la résolution du système matriciel revient à résoudre à chaque pas le système (III.33). Le processus est arrêté lorsque l'incrément  $\Delta A_k$  devient insignifiant. Ceci est réalisé après vérification d'un certain critère de convergence. La détermination des éléments de la matrice [SJ] nécessite la réévaluation de la réductivité et de sa dérivée à chaque itération. Pour ce faire, il est nécessaire de définir une interpolation de la courbe  $v(B^2)$ .

### III. 3. 5. 1. Interpolation de la courbe $v(B^2)$

Connaissant la caractéristique magnétique  $B(H)$  du matériau utilisé, la courbe  $v(B^2)$  peut être déterminée. La caractéristique non linéaire du matériau que nous avons utilisé est représentée par la figure (III. 13).

L'interpolation spline cubique d'une courbe entraîne la continuité de sa première et seconde dérivée. La continuité de la première dérivée fait que la méthode est très souhaitable pour la méthode de Newton. Par conséquent, l'interpolation spline cubique est utilisée dans notre travail pour l'interpolation de la courbe de la réductivité magnétique.



**Fig. III. 13.** Caractéristique magnétique du fer statorique et rotorique

Pour l'interpolation de la courbe  $v = f(B^2)$ , la gamme  $0 < B^2 < B_{\max}^2$  est divisée en un ensemble de segments, et chaque segment est interpolé par une approximation polynomiale. En posant  $x = B^2$ , la réductivité est interpolée sur chaque intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $X$  par une fonction de forme cubique [52]:

$$v(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (\text{III.34})$$

Où :  $a_i, b_i, c_i, d_i$  sont des coefficients inconnus.

En appliquant les conditions de continuité de la fonction (sa première et seconde dérivée) et la condition aux limites suivantes :

$$(v'')_l = (v'')_n = 0 \quad (\text{III.35})$$

La réductivité peut être exprimée par :

$$v(x) = Cv_{k-1} + Dv_k + C(C^2 - 1)v_{k-1}'' + D(D^2 - 1)v_k'' \quad (\text{III.36})$$

Et sa première dérivée par :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v_k - v_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - \left\{ (3C^2 - 1)v_{k-1}'' - 3(D^2 - 1)v_k'' \right\} \frac{x_k - x_{k-1}}{6} \quad (\text{III.37})$$

Avec :  $C = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$  et  $D = \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}$

### III. 3. 5. 2. Critère de convergence

A chaque itération k de calcul du champ A dans les problèmes non linéaires, nous avons calculé la quantité suivante [47]:

$$Som(k) = \frac{\sum_{i=1}^m |A_i^{k+1} - A_i^k|}{\sum_{i=1}^m |A_i^{k+1}|} \quad (\text{III.38})$$

Où :  $A_i^k$  est la valeur nodale du champ A au nœud i, et m le nombre total de nœuds de la subdivision.

Som(k) représente l'erreur relative moyenne selon la norme Euclidienne d'ordre 1. Le test d'arrêt des calculs est défini par l'inéquation suivante :

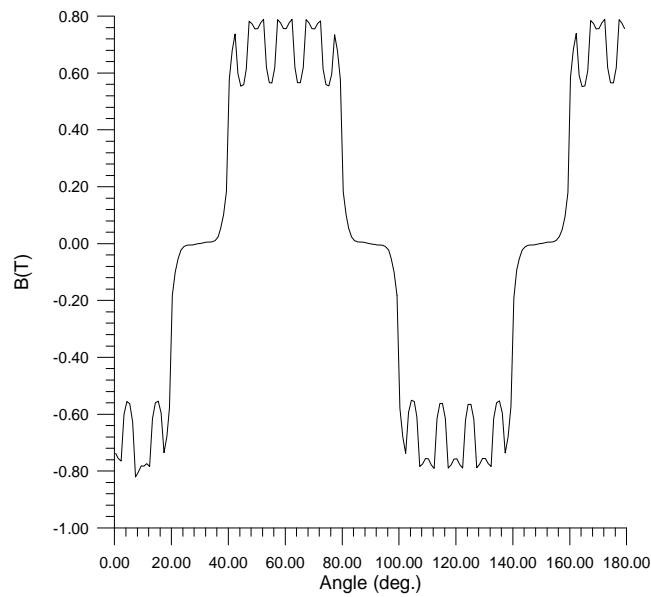
$$Som(k) < \varepsilon \quad (\text{III.39})$$

Où  $\varepsilon$  est un nombre positif choisi selon la précision désirée dans la détermination du champ A.  $\varepsilon$  : est appelé tolérance relative moyenne.

### III. 3. 5. 3. Répartition de l'induction le long de l'entrefer (cas non linéaire)

#### a) Fonctionnement à vide (aimants seuls)

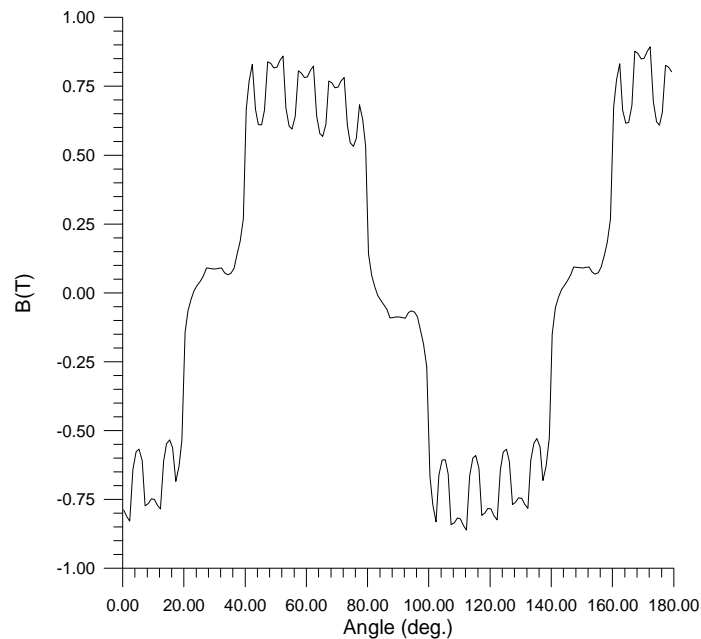
Les valeurs maximales de l'induction sont au voisinage de 0,8 T. Les dents statoriques ont une influence directe sur la variation de l'induction (figue III.14).



**Fig. III. 14.** Répartition de l'induction le long de l'entrefer à vide

*b) Fonctionnement en charge*

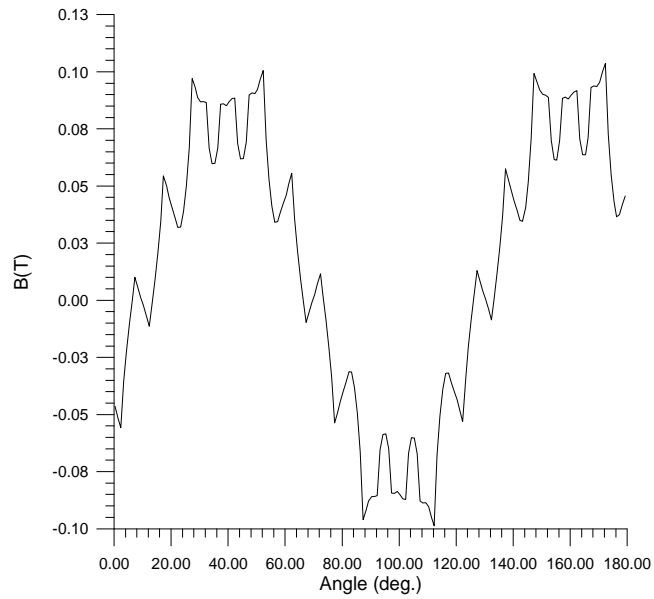
Les courants d'induit influencent la répartition de l'induction dans l'entrefer, elle est plus élevée sur l'un des côtés des pôles comme montré sur la figure (III. 15).



**Fig. III. 15.** Répartition de l'induction le long de l'entrefer en charge

*c) Induction créée par les courants statoriques*

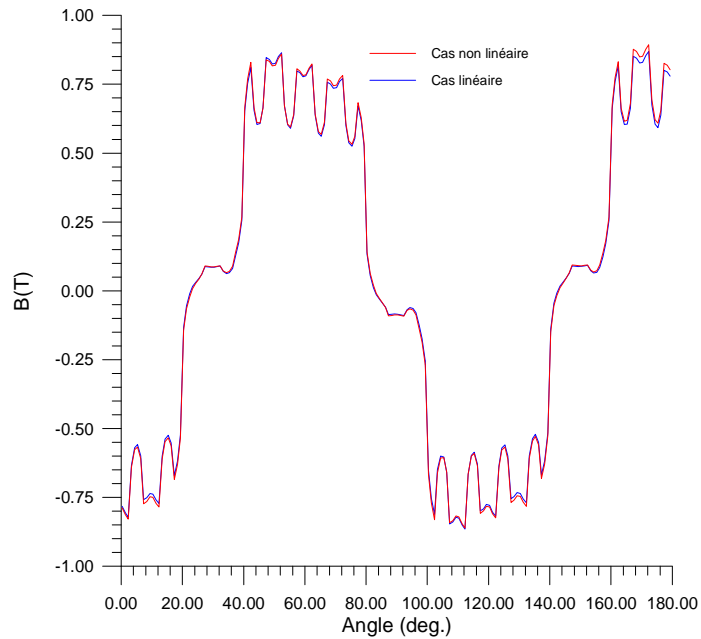
L'induction le long de l'entrefer introduite par les enroulements seuls est montrée sur la figure (III. 16). Les valeurs de l'induction sont très faibles par rapport à celles induites par les aimants.



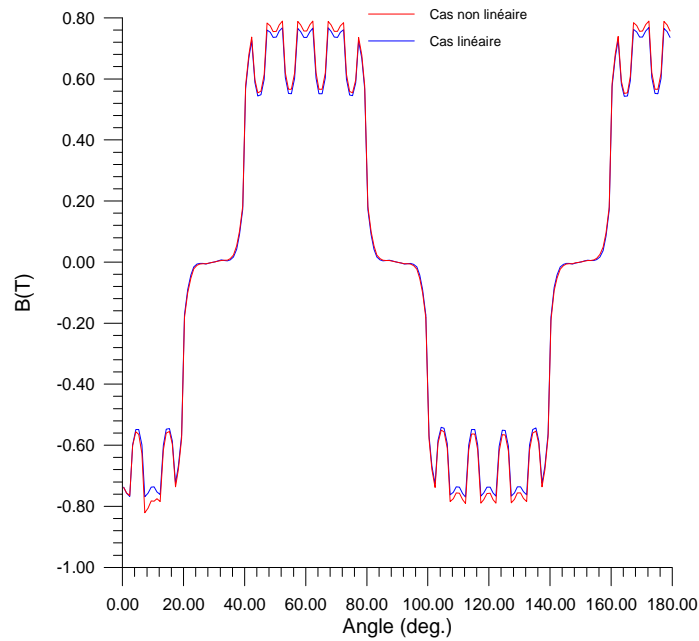
**Fig. III. 16.** Répartition de l'induction le long de l'entrefer créée par les courants statoriques.

### III. 3. 6. Comparaison linéaire- non linéaire

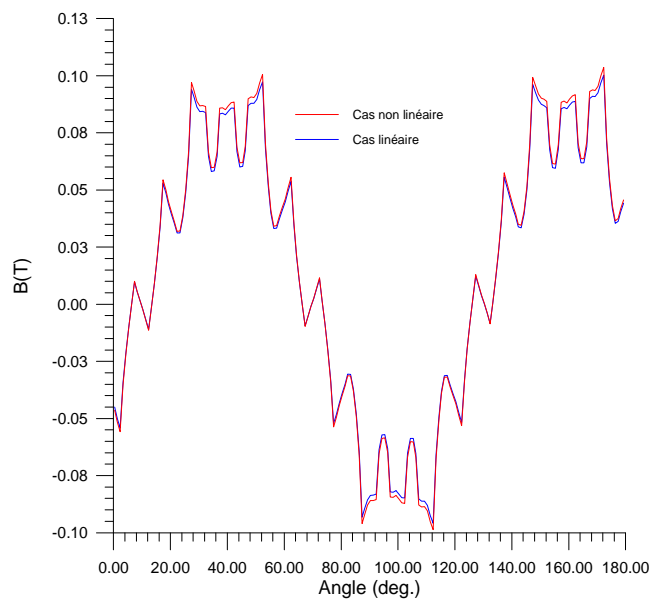
Une comparaison des courbes d'induction le long de l'entrefer dans le cas linéaire et non linéaire est faite sur les figures (III. 17), (III. 18) et (III. 19) :



**Fig.III.17.** Comparaison de la répartition de l'induction le long de l'entrefer en charge



**Fig.III.18.** Comparaison de la répartition de l'induction le long de l'entrefer à vide



**Fig. III. 19.** Comparaison de la répartition de l'induction le long de l'entrefer créée par les courants statoriques

Les courbes d'induction dans le cas non linéaire dépasse légèrement les courbes d'induction dans le cas linéaire ceci est du au fait que la machine est de type surfacique, et la saturation n'est pas très importante.

**III.4. Conclusion**

A travers ce chapitre, l'application de la méthode des éléments finis a été faite pour la modélisation électromagnétique dans le cas statique d'une machine à aimants permanents de type surfacique dans le cas linéaire et non linéaire. Ceci est réalisé par la mise en œuvre d'un programme de résolution éléments finis avec le langage de programmation Fortran 90. Les lignes de champ sont représentées ainsi que la répartition de l'induction dans l'entrefer. Les résultats ont montrés que les aimants permanents sont la principale source de champ dans la machine.

La modélisation des machines électriques du fait qu'elles sont tournantes nécessite de recourir à des techniques de prise en compte du mouvement à l'exemple de la méthode de la bande de roulement. La prise en compte du mouvement est l'objet d'étude du chapitre suivant.

# Chapitre IV

**Prise en compte du mouvement dans  
les machines électriques**

## IV.1. Introduction

L'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes électromagnétiques conduit toujours à des matrices creuses symétriques définies positives. Le système d'équations algébrique linéaire résultant est de large dimension [13], il est donc évident qu'il demande un grand espace mémoire et un grand temps de calcul. Le coût généré par la résolution de ce système dépend de sa taille, de la méthode de stockage utilisée, ainsi que de la méthode de résolution choisie [17]. L'optimisation du temps de résolution nécessite d'effectuer une numérotation adéquate des nœuds du maillage.

Dans l'application à des systèmes statiques (inertes) ou le maillage n'est pas modifié, ou dans le cas des méthodes sans remaillage sont appliquées, des méthodes de renumérotation efficaces sont disponibles, ou le critère de coût (temps d'exécution) n'est pas très influent. Cependant, pour des structures où le remaillage est exécuté soit de façon globale ou locale, des méthodes de renumérotation efficaces et rapides sont plus qu'indispensables [1].

Dans ce chapitre, nous présentons une des nouvelles méthodes de renumérotation, les performances de cette dernière sont comparées à celle des méthodes classiques. L'adaptation de cette méthode à la prise en compte du mouvement par la méthode de la bande de roulement est également présentée. Une application est faite sur la machine à aimants permanents étudiée.

## IV.2. Problématique

Les dispositifs électromagnétiques et notamment les convertisseurs électromagnétiques peuvent comporter des parties en mouvement relatif. La méthode de la bande de mouvement est l'une des premières et efficaces techniques de prise en compte du mouvement dans les machines électriques. La prise en compte du mouvement par cette méthode nécessite une redéfinition des numéros des nœuds. Cette opération fait que la largeur de bande et le profil de la matrice de rigidité augmente [23] ; ce qui conduit à un grand temps de calcul.

L'application d'algorithmes de renumérotation rapides et efficaces est donc requise pour accompagner les renumérotations locales des éléments de la bande de roulement. A chaque renumérotation locale, on devra effectuer une renumérotation globale. Les méthodes classiques RCM (Reverse Cuthill Mac Kee), GPS (Gibbs Poole et Stockmeyer), Sloan ... présentent l'inconvénient d'avoir constamment recours à un graphe, ce qui induit un coût trop important dans leur application.

## IV.3. Solution proposée

Afin de résoudre le problème posé, nous nous proposons d'adopter une méthode de renumérotation des structures circulaires creuses. C'est une méthode qui agit directement sur les nœuds des maillages. De plus, elle s'adapte bien pour dissocier les maillages des structures circulaires présentant des parties en mouvement, de ce fait une renumérotation séparée des deux parties, elle peut être donc exploitée pour prendre en compte le mouvement avec les méthodes de la ligne de glissement et la bande de mouvement.

#### IV. 4. Méthode de la bande de roulement dans la prise en compte du mouvement

La bande de roulement/mouvement est l'une des premières techniques de prise en compte du mouvement dans les structures électromagnétiques. Elle consiste à créer une bande d'éléments réguliers dans l'entrefer qui subdivise la machine en trois parties (fig. IV.1) [63]. Un mouvement relatif est entamé, lors du mouvement les éléments de la bande sont déformés et lorsque la limite de distorsion des éléments est atteinte à cause du mouvement du rotor ; il devient nécessaire de remailler la bande de roulement. Cette méthode est utilisée en 2D qu'en 3D. La structure globale du maillage est modifiée, et la largeur de bande de la matrice de rigidité augmente [23]. Pour conserver un maillage satisfaisant, il devient nécessaire d'optimiser la connexion des différents nœuds; le temps de remaillage est plus long mais celui de résolution est conservé [1].

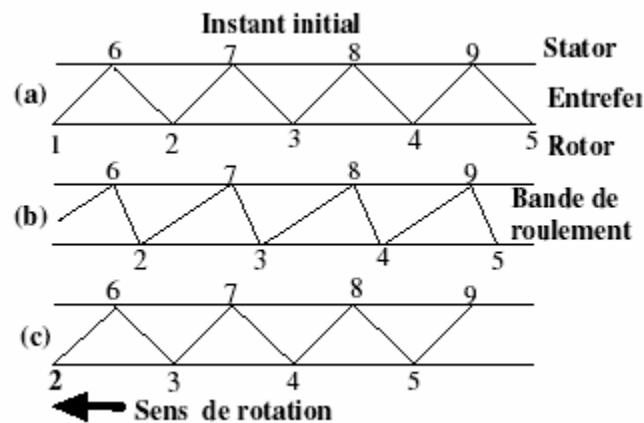


Fig. IV.1. Bande de roulement

Cette méthode est simple à appliquer et assure une continuité naturelle des champs entre les deux parties, de plus elle n'affecte pas la nature creuse et symétrique de la matrice de rigidité. Cependant, elle présente un certain nombre de problèmes d'ordre numérique. A chaque remaillage de la bande, le système doit être complètement restructuré, ce qui induit des temps importants. En plus de l'augmentation de la largeur de bande et du profil après chaque remaillage de la bande, des erreurs ou bruits numériques dus à la déformation relative des éléments de la bande sont induits pour le calcul de la force électromotrice et du couple magnétique. Un autre problème surgit lors de l'application de la méthode dans le cas d'une modélisation sur un découpage du domaine sur un ou deux pôles. Le mouvement fait apparaître des nœuds supplémentaires sur un des contours latéraux du domaine. La matrice augmente de taille et les conditions aux limites deviennent plus difficiles à appliquer (conditions de périodicité ou d'anti-périodicité) [23].

Il faut noter qu'une prise en compte de la structure complète représente une solution robuste, puisqu'elle élimine toutes les contraintes de conditions aux limites. Cependant, dans ce type de structures, le système à résoudre et la largeur de bande sont plus importants que dans le premier cas. Seules des méthodes de renumérotation efficaces et rapides sont à même de pallier à ce problème.

Pour ses avantages, la méthode de la bande de mouvement a été choisie pour la prise en compte du mouvement dans la machine étudiée.

## IV.5. Les méthodes de renumérotation

Les premier travaux ayant trait aux méthodes de renumérotation ont commencé à paraître depuis le milieu des années soixante dont la plupart ont porté sur la théorie des graphes associés aux matrices. Ces méthodes sont implémentées dans la plupart des logiciels éléments finis depuis les années 80 [64].

Plusieurs méthodes de renumérotation des graphes ont vu le jour : la méthode de Cuthill Mac Kee inverse (RCM); sa version améliorée, la méthode GPS [19] (Gibbs Poole et Stockmeyer) ainsi que la méthode de Sloan [20] sont de nos jours les algorithmes de renumérotation des graphes les plus utilisés.

### IV.5.1. Définitions

#### IV.5.1.1. Graphes associés aux matrices creuses

Soit une matrice  $A$  quelconque de dimension  $(n \times n)$  symétrique définie positive. A chaque ligne est associé un élément diagonal non nul, qu'on appellera nœud. A tout élément non nul de chaque ligne sera associé un couplet (ligne-colonne) représenté par un segment liant les nœuds de la ligne et la colonne du couplet.

Cette combinaison de nœuds et de segments forment un graphe  $G$  associé à la matrice  $A$  et noté [19] :

$$G^A = (X^A, E^A) \quad (\text{IV.1})$$

Où :  $X^A$  représente l'ensemble des nœuds de la matrice  $A$ , et  $E^A$  l'ensemble des segments de la matrice  $A$ .

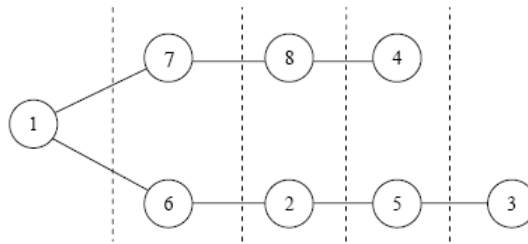
Et :  $\{x_i, y_j\} \in E^A$ , si et seulement si  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i \neq j$

Où :  $x_i$  et  $x_j$  représentent les nœuds de  $X^A$ , et les couples  $\{x_i, y_j\}$  les segments de  $E^A$ .

Soit l'exemple suivant, dont on dispose d'une matrice  $A$  dont les éléments non nuls sont représentés par le symbole  $\otimes$ . Les éléments diagonaux représentent les nœuds et les éléments non nuls représentent les segments. Le graphe contient donc 08 nœuds et 07 segments.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \otimes & \otimes & & \\ & 2 & & & \otimes & \otimes & & \\ & & 3 & \otimes & & & & \otimes \\ & & \otimes & 4 & & & & \\ & \otimes & & & 5 & & & \otimes \\ \otimes & \otimes & & & & 6 & & \\ \otimes & & & \otimes & & & 7 & \\ & & & & \otimes & & & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Le graphe associé à cette matrice est donné par la figure (IV.2) :



**Fig. IV.2.** Graphe à niveaux associé à la matrice  $A$

Le graphe construit ci-dessus figure (IV.2) est dit graphe à niveaux. Ce dernier en contient cinq. Le diamètre  $D$  du graphe (ou excentricité) est le nombre maximal de niveaux que possède le graphe. L'épaisseur d'un niveau se compte en la distance numérique maximale entre les numéros des nœuds d'un même niveau.

Deux nœuds  $x$  et  $y$  sont dit adjacents s'ils forment un segment du graphe ; pour  $y \in X$ , le segment adjacent de  $Y$  est [19] :

$$Adj(y) = \{x \in X \mid \{x, y\} \in E \forall y \in Y\} \quad (IV.3)$$

Le degré d'un nœud est donné par le nombre de nœuds qui lui sont adjacents [19] :

$$\deg(y) = \{i \mid x_i = Adj(y) \forall x \in X\} \quad (IV.4)$$

#### IV.5.1.2. La méthode bande

Cette méthode permet d'effectuer un stockage en matrice bande dans le cas des systèmes non symétriques, et ou semi-bande dans le cas des systèmes symétriques, comme c'est généralement le cas avec la méthode des éléments finis.

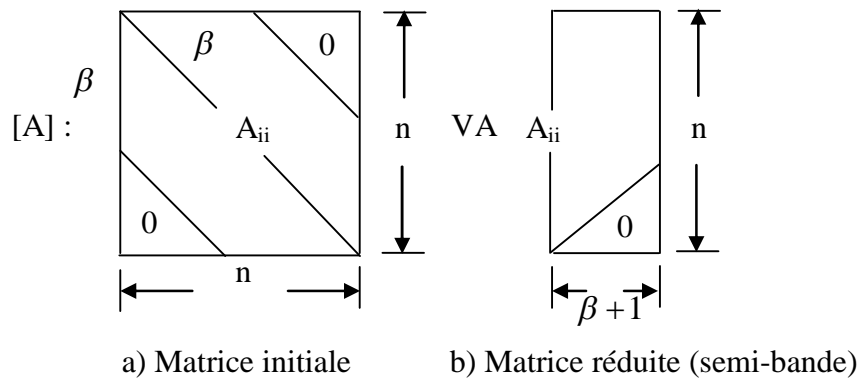
Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive. Pour chaque ligne de cette matrice est associée une largeur de bande  $\beta_i$  qui représente la distance maximale entre l'élément diagonal et le dernier élément non nul de la ligne [24].

$$\beta_i(A) = i - \min \{j \mid a_{ij} \neq 0\} \quad (IV.5)$$

La largeur de bande maximal de  $A$  est définie par :

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(A) = \max \{\beta_i(A) \mid 1 \leq i \leq N\} \\ &= \max \{i - j \mid a_{ij} \neq 0\} \end{aligned} \quad (IV.6)$$

Le stockage bande ou semi-bande consiste à stocker une matrice carrée de dimension  $(n \times n)$  dans une table rectangulaire  $VA$  de dimension  $(n \times (2\beta + 1))$  dans le cas non symétrique; soit  $(n \times (\beta + 1))$  dans le cas symétrique, ceci engendre la réduction des matrices initiales [42].



**Fig. IV.3.** Stockage semi-bande

Pour une factorisation LU (matrice triangulaire inférieure et supérieure) et une résolution Cholesky, il a été montré que si ( $\beta \ll N$ ), le nombre d'opérations  $N_{op}$  demandé est une fonction du carré de  $\beta$ .

$$N_{op} = O(N\beta^2) \quad (IV.7)$$

Ainsi la réduction de  $\beta$  conduit à un rapport de réduction au carré du nombre d'opération nécessaire pour une résolution complète avec la résolution Cholesky, donc la réduction du temps de résolution [24].

#### IV.5.1.3. La méthode enveloppe (ligne de ciel)

Le stockage en ligne de ciel (skyline) est la méthode de stockage la plus efficace, très adaptée pour la résolution Cholesky.

Le profil ou enveloppe de  $A$  est définie par [24] :

$$Env(A) = \{ \{i, j\} / 0 < i - j \leq \beta_i(A) \} \quad (IV.8)$$

Une autre définition du profil ou enveloppe est donnée par la « largeur de front », très utilisée dans les méthodes dites frontales. Celle-ci, dénommée également frontwidth et donnée par l'intersection des colonnes avec le profil (nombre d'éléments contenus dans le profil).

$$\omega_i = \left| \left\{ k \mid k > i \text{ et } a_{ki} \neq 0 \forall l < i \right\} \right| \quad (IV.9)$$

$$|Env(A)| = \sum_{i=1}^N \omega_i(A) \quad (IV.10)$$

La méthode enveloppe consiste à stocker les termes d'une matrice  $A$  dans trois vecteurs (dans le cas non symétrique) et dans deux vecteurs (dans le cas symétrique). Dans le cas symétrique, le premier vecteur contient les termes du triangle supérieur de  $A$  organisés par colonnes descendantes (sous termes diagonaux) ; tandis que le second vecteur contient les termes diagonaux [41].



On constate donc que la largeur de bande à diminuer (elle passe de 6 à 2).

Le choix du nœud de départ est crucial pour l'efficacité de la méthode. La méthode RCM fut enrichie par la méthode GPS qui permet de choisir le meilleur sommet pour la renumérotation.

### IV.5.3. Méthode GPS

Gibbs Poole et Stockmeyer [15], introduisent en 1975 les notions d'excentricité maximale des graphes dans le but de choisir le meilleur nœud de départ. Ils proposèrent une méthode qui permette de déterminer un nœud de départ assurant une excentricité maximale.

La méthode décrit un graphe comme étant une succession de niveaux, et affecte une excentricité ou diamètre aux graphes. De même, la notion d'épaisseur de niveaux est introduite pour décrire le nombre de nœuds contenus dans chaque niveau. La distance  $d(x, y)$  entre deux nœuds est décrite comme étant le plus court chemin pouvant relier ces deux nœuds.

L'excentricité d'un nœud est définie comme étant la distance maximale pouvant le relier à un autre nœud :

$$l(x) = \max\{d(x, y) / y \in X\} \quad (\text{IV.14})$$

Le diamètre du graphe est défini comme étant l'excentricité maximale :

$$\delta(G) = \max\{l(x) / x \in X\} \quad (\text{IV.15})$$

Un nœud est dit périphérique si son excentricité égale au diamètre du graphe. Ce nœud est le meilleur nœud de départ « starting node ». Les auteurs de la méthode ne garantissent cependant pas que le résultat de leur algorithme soit le nœud optimal, mais les nœuds trouvés ont une grande excentricité, et ont préféré l'appellation du nœud pseudo-périphérique.

Un graphe se structure en niveaux  $M_i$  à partir d'un nœud de départ  $x$  comme suit :

$$M(x) = \{M_0(x), M_1(x), M_2(x), \dots, M_l(x)\}$$

$$\text{Avec } M_0(x) = (x) \text{ et } M_1(x) = Adj(M_0(x))$$

$$\text{Et } M_i(x) = Adj(M_{i-1}(x)) - M_{i-2}(x), \forall i = 1, \dots, l(x)$$

L'épaisseur du graphe est donnée par le nombre maximal d'éléments dans les niveaux :

$$w(x) = \max\{|M_i(x)| \quad 0 \leq i \leq l(x)\} \quad (\text{IV.16})$$

Et l'épaisseur de la structure de niveaux pour un nœud de départ  $r$   $h(r)$  est simplement son nombre total de niveaux.

L'algorithme GPS présenté par [19] est résumé comme suit :

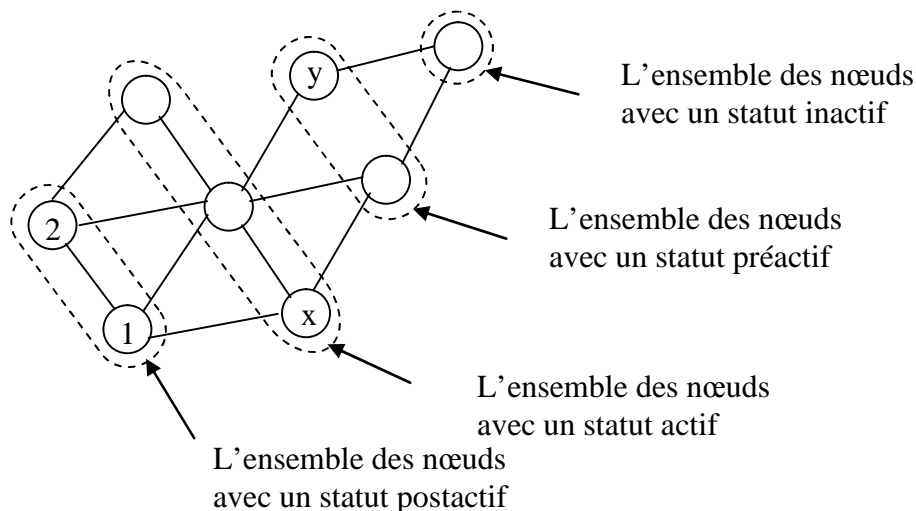
1- Choisir un nœud de départ arbitraire;



au nœud final. Le nœud de plus grande priorité est numéroté comme le nœud suivant et est supprimé de la liste qui sera mise à jour en utilisant les informations des connectivités du graphe et le processus est répété jusqu'à ce que tous les nœuds soient renumérotés.

Le degré courant est déterminé comme suit : les nœuds postactifs ont un degré courant nul; tandis que le degré courant des nœuds actifs est égale au nombre des préactifs voisins. Le degré courant des nœuds réactifs est égal au nombre des préactifs voisins. Le degré courant des nœuds préactifs est égale au nombre des préactifs et actifs voisins plus un. Chaque nœud inactif à un degré courant qui est égale à son degré plus un.

Après que la renumérotation est complète, tous les nœuds sont postactifs et leur degré courant est zéro.



**Fig. IV.4.** Terminologie utilisée pour la renumérotation des nœuds par la méthode de Sloan

L'algorithme de renumérotation de Sloan se présente alors comme suit [20] :

1-Entrer avec les nœuds donnant un pseudo-diamètre ; les nœuds  $s$  et  $e$  .

2-Construire la structure de niveaux à partir du nœud  $e$  :

$$L(e) = \{L_1, L_2, \dots, L_h(e)\}$$

et calculer les distances  $\delta_i$  de chaque nœud  $i$  par rapport au nœud final.

3- Assigné à chaque nœud dans le graphe un statut inactif et calculer sa priorité initiale  $p_i$  .

4- Poser  $l = 0$  , où :  $l$  : est le nombre total des nœuds renumérotés et assigné au nœud  $s$  un statut préactif.

Soit  $q$  la liste prioritaire de longueur  $n$  .

Inséré  $s$  dans la liste prioritaire en posant  $n = 1$  et  $q_n = s$  .

- 5- Quand la liste prioritaire n'est pas vide, faire les étapes 6 à 9.
- 6-Chercher dans la liste prioritaire et localiser le nœud  $i$  qui a la priorité maximale. Soit  $m$  : l'indice du nœud  $i$  tel que  $q_m = i$ .
- 7-Supprimer le nœud  $i$  de la liste prioritaire en posant  $q_m = q_n$  et décrémenter  $n$  :  $n \leftarrow n - 1$  si le nœud  $i$  n'est pas préactif partir à l'étape 8.  
Sinon, examiner chaque nœud  $j$  qui est adjacent au nœud  $i$  et incrémenter sa priorité. Si le nœud  $j$  est inactif, alors l'insérer dans la liste prioritaire avec un statut préactif en posant  $n \leftarrow n + 1$  et  $q_n = j$ .
- 8-Numéroter le nœud  $i$  avec son nouveau numéro par incrémentation du nombre total de nœuds ( $l \leftarrow l + 1$ ) et en posant  $n_i = l$  où  $n$  est la liste des numéros des nœuds. Assigner au nœud  $i$  un statut postactif.
- 9-Examiner chaque nœud  $j$  qui est adjacent au nœud  $i$ . Si le nœud  $j$  n'est pas préactif, alors ne rien faire. Sinon assigner au nœud  $j$  un statut actif, et on examine chaque nœud  $k$  qui est adjacent au nœud  $j$ ; si le nœud  $k$  n'est pas postactif, alors on incrémente sa priorité et si le nœud  $k$  est inactif, l'insérer dans la liste prioritaire avec un statut préactif en posant  $n \leftarrow n + 1$  et  $q_n = k$ .
- 10-Sortir avec une nouvelle renumérotation des nœuds  $n$  tels que  $n_i$  est le numéro du nœud  $i$ .

Les méthodes basées sur la renumérotation des graphes représentent un obstacle de taille pour les problèmes découlant de la méthode des éléments finis : en effet il faut d'abord construire les éléments de la matrice à réduire, construire à partir de cette matrice le graphe associé, appliquer l'algorithme de renumérotation, puis reconstruire la matrice en stockage en semi-bande ou en profil suivant la méthode de résolution préconisée. Un problème de stockage primaire se pose donc [1]. Une solution consiste à renuméroter directement les nœuds des maillages, cela permet de construire directement une matrice réduite en largeur de bande et en profil.

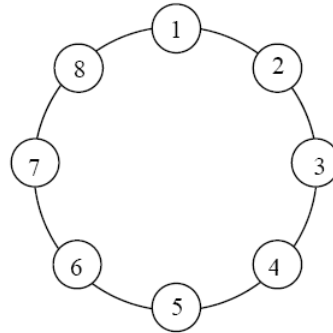
Un autre inconvénient de ces méthodes c'est qu'elles ne s'adaptent pas aux méthodes de prise en compte du mouvement particulièrement la méthode de la bande de roulement. De ce fait, nous proposons d'appliquer une méthode de renumérotation susceptible d'éliminer les inconvénients cités.

#### IV.6. Méthode de renumérotation adoptée

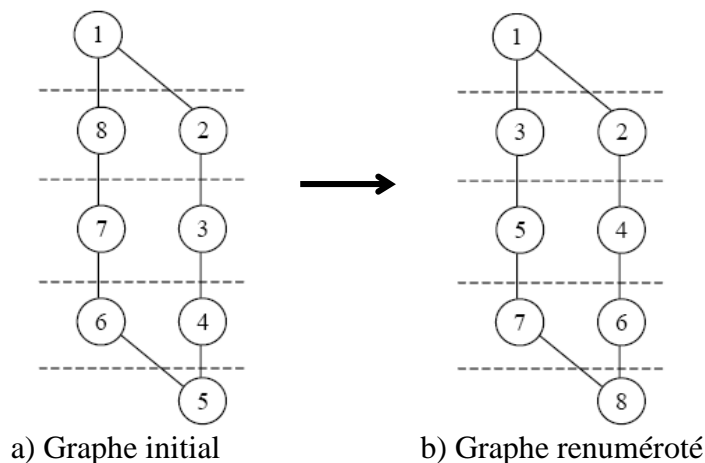
Cette méthode est entièrement consacrée aux structures cylindriques creuses. Elle a été appliquée pour la première fois en [4] pour des maillages réguliers. Elle a ensuite été adaptée aux maillages de type Delaunay [1, 17, 25, 65]. Elle est particulièrement adaptée aux structures des machines électriques tournantes.

### IV.6.1. Principe de renumérotation adoptée

Soit le graphe de la figure (IV.5) ; il représente une structure circulaire de base. En appliquant le principe de l'excentricité maximale, et en numérotant niveau par niveau, on obtient la renumérotation de la figure (IV.6. b), où on constate que sur le côté gauche on retrouve des nombres impairs et sur le côté droit des nombres pairs.



**Fig. IV.5.** Graphe fermé associé à une structure simple circulaire



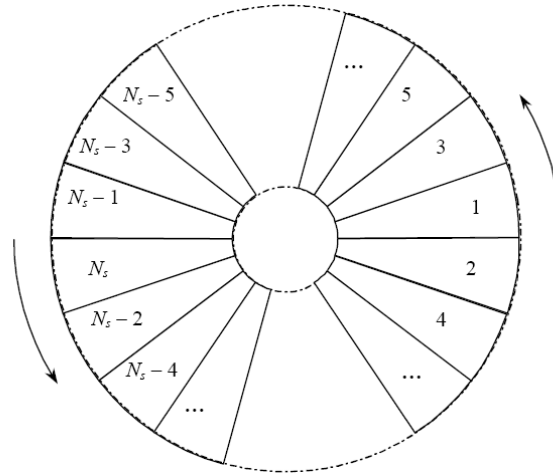
**Fig. IV.6.** Renumerotation de la structure circulaire en utilisant le principe de l'excentricité maximale

Ce principe est à la base de l'élaboration de la méthode de renumérotation des maillages adoptée dans [25]. Cette méthode est plus adaptée pour les maillages des structures circulaires creuses. Cela consiste simplement à modifier la numérotation des nœuds en établissant un lien direct entre la position géométrique des nœuds  $(r, \theta)$  et leur renumérotation.

Soit une structure cylindrique creuse quelconque. Effectuons une triangularisation au sens de Delaunay. Il s'agit maintenant de numérotter ou de renumérotter les nœuds obtenus. Décomposons la structure en  $N_s$  secteurs ; où  $N_s$  est un nombre pair. Chaque secteur porte alors une ouverture angulaire de  $2\pi / N_s$ . La numérotation de ces secteurs est particulière (voir figure IV.7).

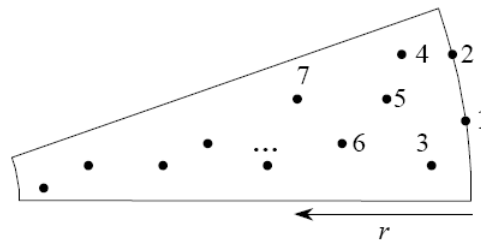
- Les secteurs sont numérotés dans le sens trigonométrique avec des nombres impairs de 1 à  $N_s - 1$ . Cette opération concerne la moitié de la structure.

- La seconde moitié de la structure est numérotée de  $N_s$  à 2 avec des numéros pairs dans le sens des aiguilles d'une montre.



**Fig. IV.7.** Décomposition et numérotation des secteurs

Les nœuds de chaque secteur sont numérotés dans le sens croissant (ou décroissant) de leur position radiale  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  (voir fig. IV. 8).



**Fig. IV.8.** Renumérotation des nœuds selon le rayon

L'algorithme nécessaire pour réaliser cette numérotation est de construction facile. La méthode réside en une renumérotation basée sur un positionnement géométrique selon les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  des nœuds d'où le nom méthode des positions géométriques. Il s'agit donc principalement d'opérations de tris. Les nœuds sont classés dans des secteurs correspondant à  $(\theta)$ , puis sont triés dans un vecteur  $V$  en fonction du rayon  $r$ .

L'algorithme se présente comme suit :

$$\Delta\theta = 2\pi / N_s$$

Pour  $i$  allant de 1 à  $Nn$  faire

Calculer  $\theta_i$

$$k = \text{entière}(\theta_i / \Delta\theta)$$

Si  $(k \leq N_s/2)$  alors  $l_k = 2k + 1$

Sinon  $l_k = 2(N_s - k)$

Finsi

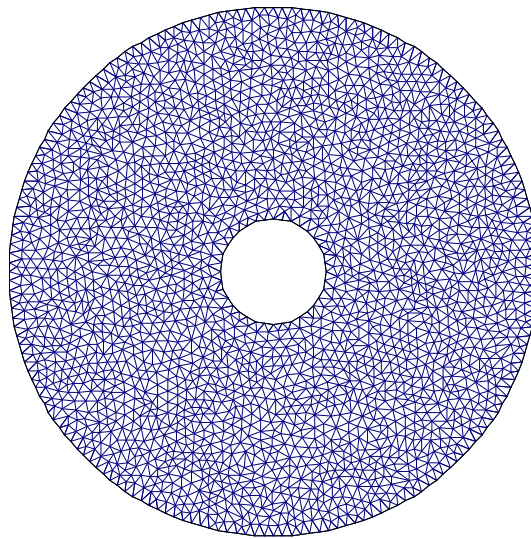
$$P(l_k) = P(l_k + 1)$$

$$V(P(l_k), l_k) = i$$

```
Fin pour i
Pour i allant de 1 à  $Ns$  faire
  Pour j allant de 1 à  $P(i)$ 
    Pour k allant de  $j+1$  à  $P(i)$ 
      Si  $R_{V(k,i)} \succ R_{V(j,i)}$  alors
        Permuter  $V(k,i)$  et  $V(j,i)$ 
      Fin si
    Fin pour k, j et i.
```

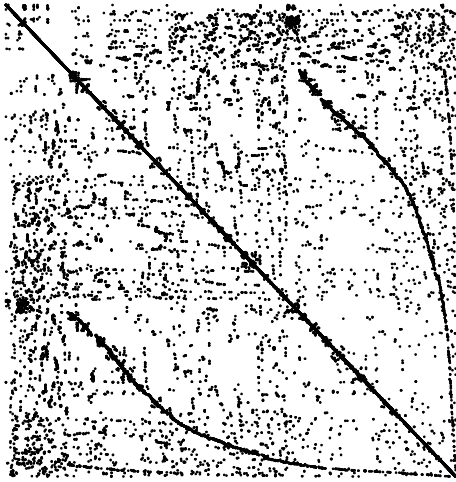
#### IV.6. 2. Mise en application

Soit une structure cylindrique creuse quelconque dont le maillage est représenté sur la figure (IV.9).

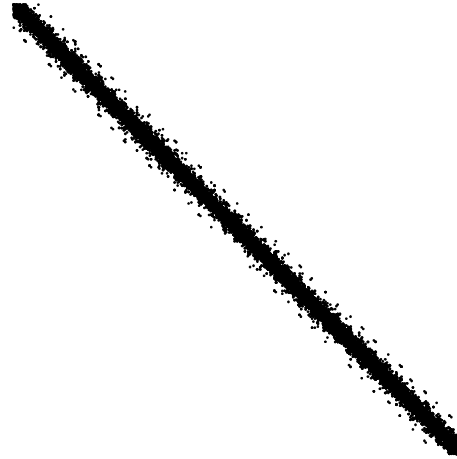


**Fig. IV.9.** Exemple de maillage d'une structure circulaire creuse quelconque

En figure (IV.10), nous voyons la structure de la matrice de rigidité résultante d'un maillage Delaunay d'une structure creuse quelconque (fig. IV.9) en 3852 nœuds et 7364 éléments. L'application de la méthode de renumérotation adoptée a donné une matrice bande dont le profil est donné en figure (IV.11). Il est à noter que seuls les éléments non nuls sont représentés sur la matrice. Nous constatons de visu une réduction du profil et de la largeur de bande.

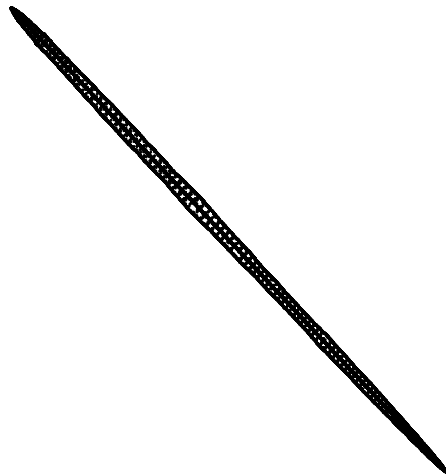


**Fig. IV.10.** Profil de la matrice obtenue avant renumérotation

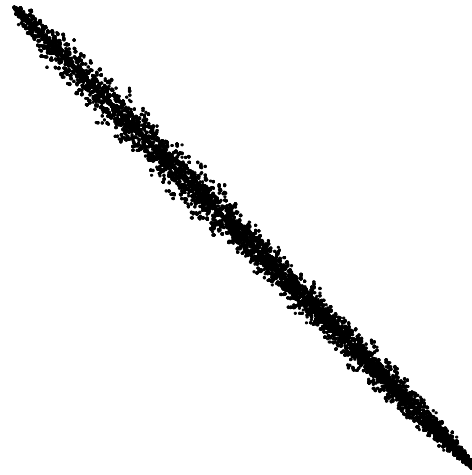


**Fig. IV.11.** Profil de la matrice obtenue avec la méthode des positions géométrique

Les profils des matrices obtenues après renumérotation avec les algorithmes GPS et Sloan fourni respectivement en [19] et [20] sont représentés en figures (IV. 12) et (IV. 13).



**Fig. IV.12.** Profil des matrices obtenues avec la méthode GPS

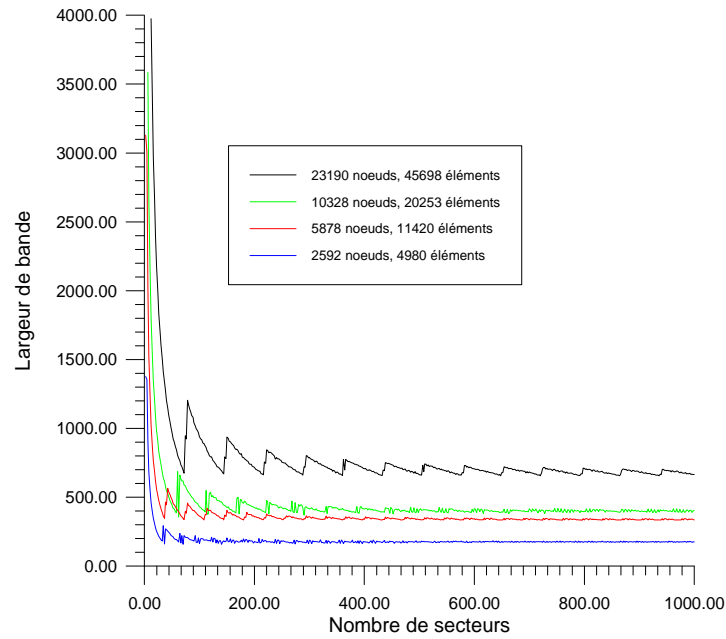


**Fig. IV.13.** Profil des matrices obtenues avec la méthode de Sloan

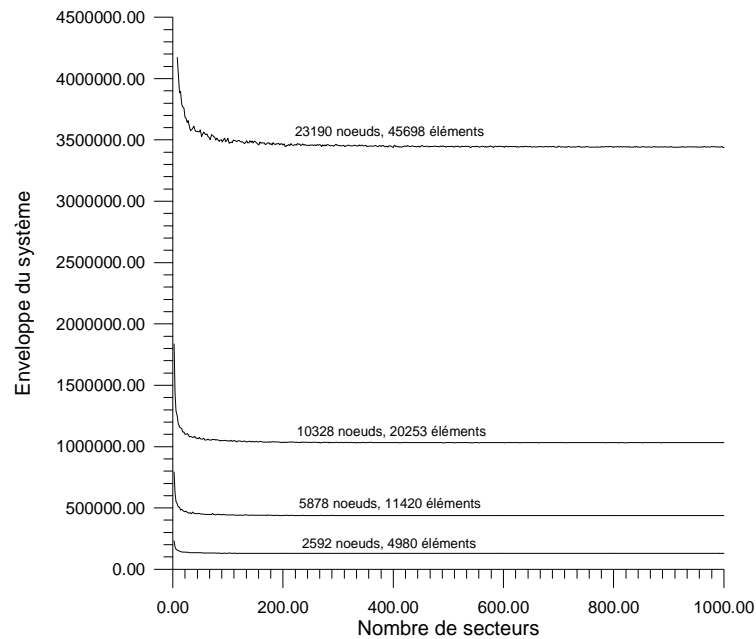
### IV.6.3. Influence du nombre de secteurs

Le choix du nombre de secteurs est crucial pour l'efficacité de la méthode. En effet, un grand nombre de secteurs implique un moindre nombre de nœuds par secteur à ordonner, ce qui réduit le temps d'exécution de la méthode, mais cela peut entraîner des secteurs vides de nœuds, ce qui peut affecter négativement les performances de la méthode.

Les figures (IV.14) et (IV.15), mettent en évidence que la largeur de bande et le profil du système issu de l'exemple étudié sont inversement proportionnels au nombre de secteurs. Une certaine stabilité est relevée pour  $N_s$  élevé.

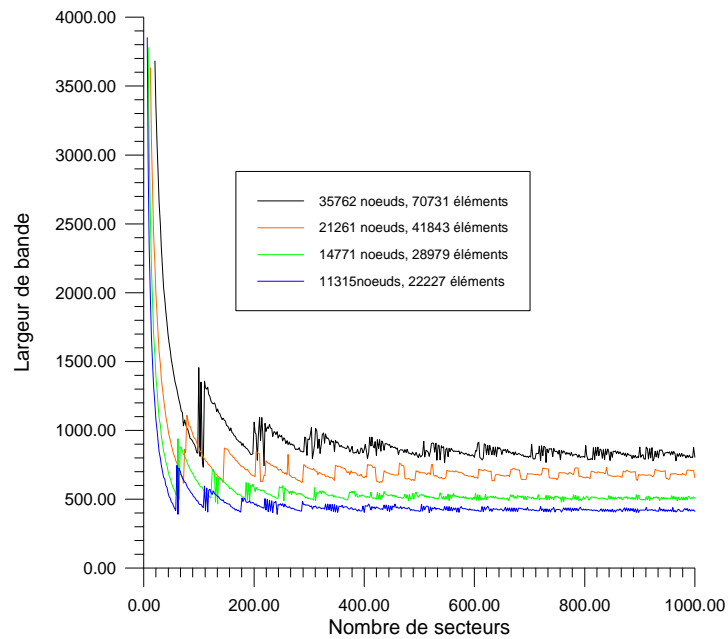


**Fig. IV.14.** Influence du nombre de secteurs sur la largeur de bande (structure circulaire creuse (Fig. IV.9.))

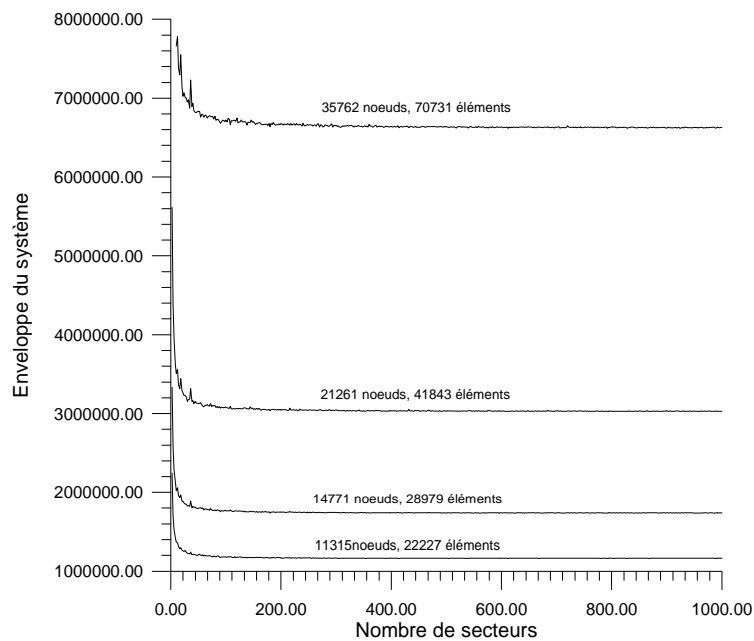


**Fig. IV.15.** Influence du nombre de secteurs sur le profil (structure circulaire creuse (Fig. IV.9.))

De même, l'application de cette méthode sur la structure de la machine à aimants permanents étudiée au chapitre précédent, permet de confirmer que la largeur de bande et le profil du système sont inversement proportionnels au nombre de secteurs (voir figure (IV.16) et (IV.17)).



**Fig. IV.16.** Influence du nombre de secteurs sur la largeur de bande (machine étudiée)



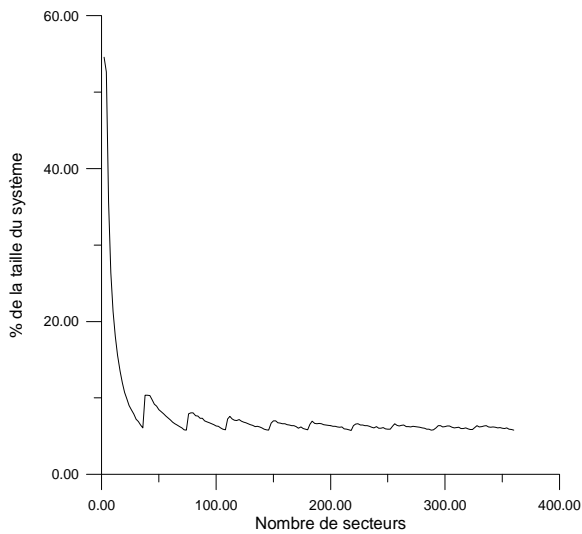
**Fig. IV.17.** Influence du nombre de secteurs sur le profil (machine étudiée)

On constate que pour des maillages inférieurs à 20000 nœuds environ, un nombre de secteurs supérieur ou égal à 300 suffit pour obtenir un profil réduit et une largeur de bande minimale.

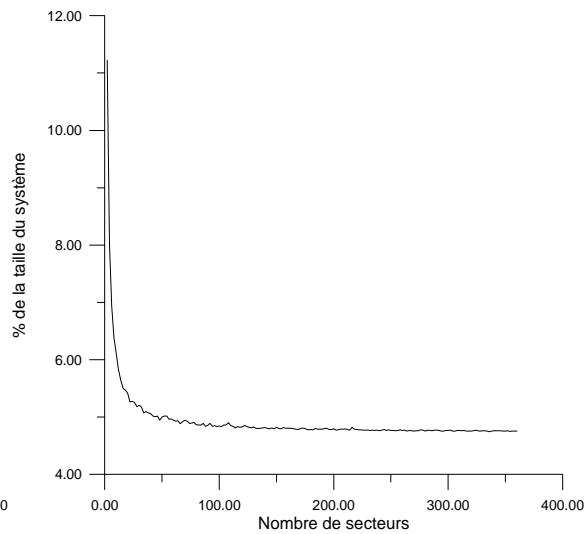
Pour des raisons de commodité de programmation le nombre de secteurs a été arrêté à 360, ce qui permet d'obtenir des secteurs d'ouverture de un degré.

Pour le maillage de la machine ayant 6647 nœuds et 12994 éléments, la largeur de bande obtenue après renumérotation est de 378 qui correspond environ 6% de la taille du système et le profil obtenu vaut 481957 qui correspond à 4.75% du profil initial.

Les figures (IV.18) et (IV. 19) montrant l'influence du nombre de secteurs sur le profil et la largeur de bande de la matrice de rigidité liée au maillage adopté nous conforte dans le choix que nous avons fait par rapport au nombre de secteurs choisis.



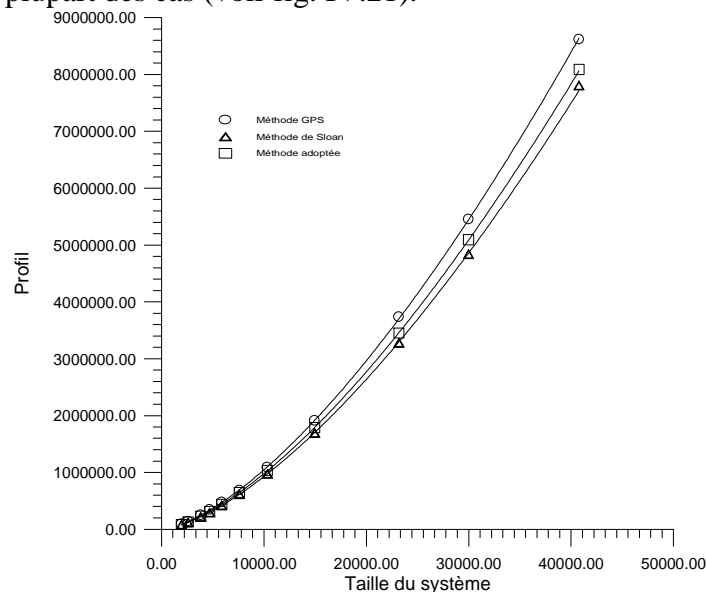
**Fig. IV.18.** Influence du nombre de secteurs sur la largeur de bande (machine étudiée)



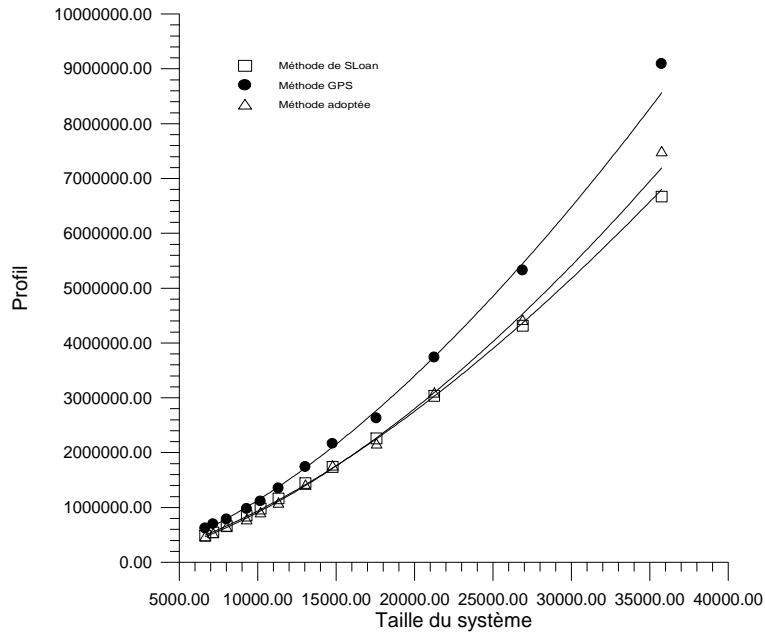
**Fig. IV.19.** Influence du nombre de secteurs sur le profil (machine étudiée)

#### IV.6. 4. Comparaisons des performances de la méthode avec les méthodes classiques

Une comparaison des profils obtenus avec la méthode des positions géométriques et les méthodes de renumérotation classiques GPS et Sloan est faite sur les deux figures (IV.20) et (IV.21). On constate un profil réduit par rapport à celui obtenu avec la méthode GPS et légèrement supérieur à celui obtenu avec la méthode de Sloan. Dans le cas de la machine étudiée, les profils obtenus avec la méthode de Sloan et la méthode adoptée sont pratiquement équivalents dans la plupart des cas (voir fig. IV.21).

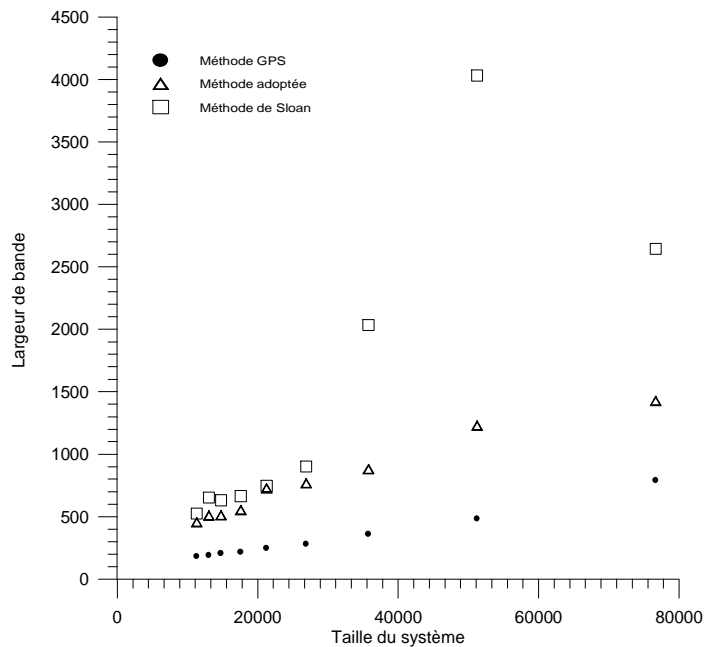


**Fig. IV.20.** Comparaison des profils obtenus avec la méthode GPS, la méthode de Sloan et la méthode adoptée (structure circulaire creuse (Fig. IV.9.))

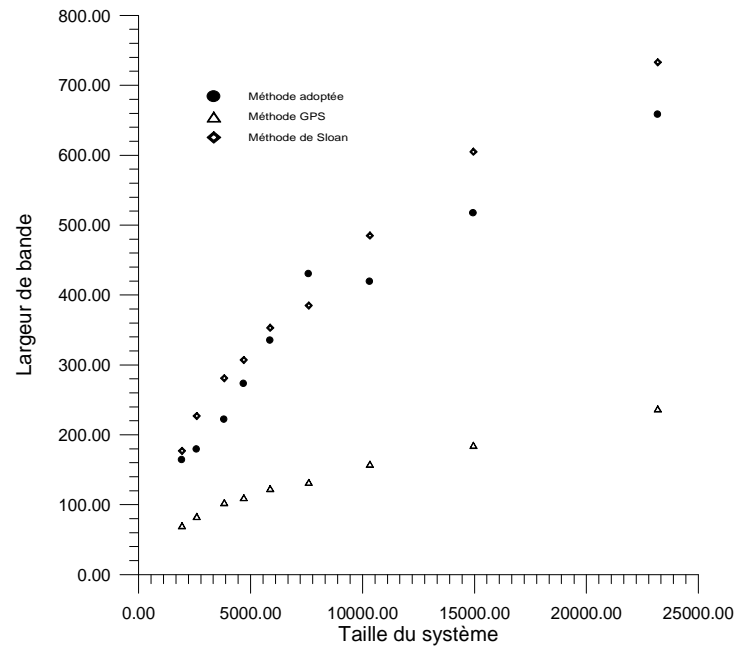


**Fig. IV.21.** Comparaison des profils obtenus avec la méthode GPS, la méthode de Sloan et la méthode des positions géométriques (machine étudiée)

Une comparaison des largeurs de bandes obtenues avec la méthode des positions géométriques et celles obtenues avec la méthode de renumérotation classique GPS et Sloan est faite sur les deux figures (IV.22) et (IV.23). La largeur de bande obtenue avec la méthode de renumérotation adoptée est dans les deux cas supérieure à celle obtenue avec la méthode GPS et dans la plupart des cas inférieure à celle obtenue avec la méthode de Sloan.



**Fig. IV.22.** Comparaison des largeurs de bande obtenues avec la méthode GPS, la méthode de Sloan et la méthode des positions géométriques (machine étudiée).



**Fig. IV.23.** Comparaison des largeurs de bande obtenues avec la méthode GPS, la méthode de Sloan et la méthode des positions géométriques (structure circulaire creuse (Fig. IV.9.))

En conséquences des résultats obtenus, la méthode peut être considérer comme une méthode de réduction de profil qui peut concurrencer la méthode Sloan, d'autant plus qu'elle permet une réduction de la largeur de bande significative par rapport à la méthode de Sloan.

Les tableaux (IV.1) et (IV.2) mettent en évidence le pourcentage de réduction du profil obtenu avec les différentes méthodes par rapport au profil initial. L'utilisation de la méthode adoptée permet une réduction de profil très élevée qui atteint 95% au plus du profil avant la renumérotation. Le taux est donné relativement au profil initial (avant renumérotation).

Maillages		GPS		Sloan		Méthode adoptée	
Ne (éléments)	N (Nœuds)	Env.	% Env.	Env.	% Env.	Env.	% Env.
41843	21261	3735986	2.93	3099388	2.43	3034219	2.376
22227	11315	1349303	4.33	1088843	3.49	1163496	3.73
18235	9293	974309	4.90	787958	3.60	849191	4.27
15680	8008	782417	5.36	651964	4.47	657677	4.51
13985	7152	697635	6.08	533942	4.65	545218	4.75
12994	6647	619891	6.11	476171	4.69	481957	4.75
8936	4522	658167	11.46	430180	7.49	223706	3.89

**Tableau. IV.1.** Tableau comparatif des profils obtenus avec les différentes méthodes sur la structure de machine à aimants permanents étudiée

Il faut également notée que pour le maillage de la structure étudiée utilisé (8936 éléments et 4522 nœuds) la méthode des positions géométriques est la méthode qui donne un profil minimal par rapport aux autres méthodes (Tab. IV.1).

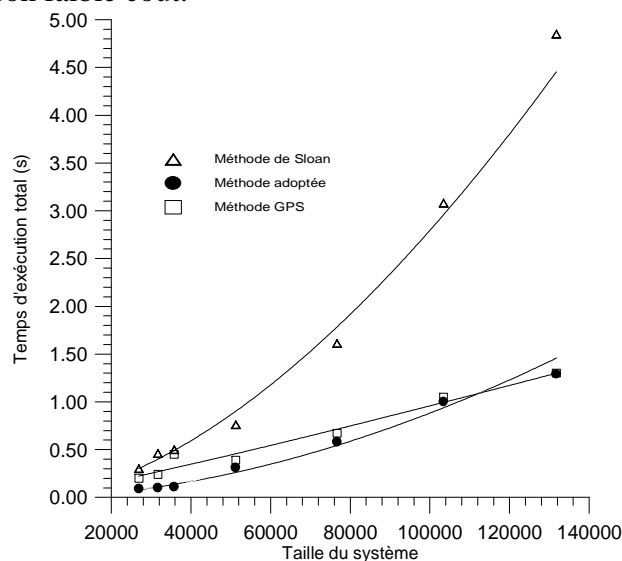
Maillages		GPS		Sloan		Méthode adoptée	
Ne (éléments)	N (Nœuds)	Env.	% Env.	Env.	% Env.	Env.	% Env.
45698	23190	3733448	1.83	3279542	1.61	3451960	1.69
20253	10328	1089508	2.69	974975	2.41	1033510	2.55
11420	5878	473150	3.57	418267	3.16	438250	3.30
9064	4696	342372	4.15	292688	3.5	312822	3.75
7364	3825	248059	4.53	217918	3.98	231698	4.23
4980	2592	138087	6.43	78727	5.71	84593	6.14

**Tableau. IV.2.** Tableau comparatif des profils obtenus avec les différentes méthodes (structure circulaire creuse (Fig. IV.9.))

Une comparaison des temps de renumérotation est faite sur la machine à aimants permanents. Le programme de renumérotation de la méthode adoptée est réalisé en langage Fortran 90, de même, les programmes qui mettent en œuvre la méthode GPS et Sloan sont écrits sous le même langage et sont fournis respectivement par [19] et [20]. Les différentes simulations ont été faites sur un micro PC Pentium IV, de fréquence 2 GHz et une RAM de 256 Mo.

La comparaison des temps de renumérotation obtenus avec la méthode de renumérotation adoptée et le temps d'exécution total de la méthode de Sloan et GPS (le temps de construction du graphe et celui de sa renumérotation) montre que le temps de renumérotation avec la méthode GPS est légèrement supérieur par rapport à celui obtenu avec la méthode de renumérotation adoptée pour 360 secteurs, et celui obtenu avec la méthode de Sloan est très supérieur (trois ou quatre fois supérieur).

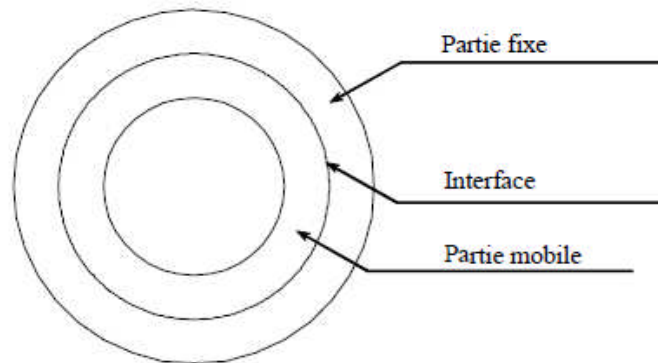
D'après les constats effectués on peut conclure que, même si la méthode de Sloan est la méthode qui donne un profil minimal, sa largeur de bande importante et son coût élevé la défavorise par rapport à la méthode adoptée, d'autant plus que nous aurons à effectuer une renumérotation à chaque pas de déplacement. La méthode des positions géométriques donne un profil très proche de celui donné par la méthode de Sloan et peut être donc considérée comme une excellente méthode de réduction de profil pour une application aux machines électriques tournantes vu son faible coût.



**Fig. IV.24.** Coûts comparés de la méthode adoptée avec le temps d'exécution total de la méthode de Sloan et la méthode GPS.

### IV.7. Adaptation de la méthode des positions géométriques avec prise en compte du mouvement sur la machine à aimants permanents étudiée

Pour la prise en compte du mouvement, cette méthode peut être assouplie en divisant la matrice  $V$  en deux matrices, l'une liée à la partie statique nommée  $V_s$  et l'autre liée à la partie mobile  $V_r$ .

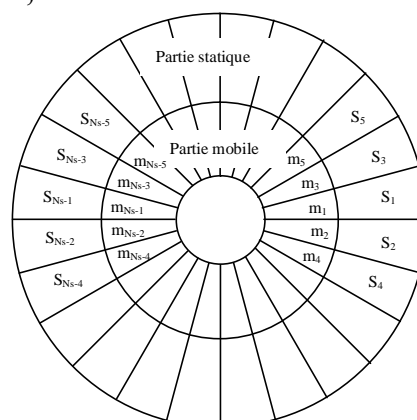


**Fig. IV.25.** Décomposition de la structure circulaire creuse en deux structures circulaires creuses

Pour l'adaptation de la méthode de renumérotation avec prise en compte du mouvement avec la méthode de la bande de roulement, on considère deux parties de la structure cylindrique (voir fig. IV.25). Une partie mobile et une partie statique; dans ce cas on dispose de deux types de secteurs ceux de la partie statique et ceux de la partie mobile. Deux matrices sont créées contenant les secteurs de chaque partie : une matrice  $S$  correspondant à la partie statique et une matrice  $M$  correspondant à la partie mobile (voir fig. IV.26). Les deux parties sont divisées en 360 secteurs. Chaque secteur constitue une colonne de la matrice associée ( $s_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $S$ ).

Par l'application de la méthode adoptée, le vecteur permutation est construit de la manière suivante :

$$prm = \{s_1, m_1, s_2, m_2, s_3, m_3, \dots\}$$



**Fig. IV.26.** Division de la machine en secteurs

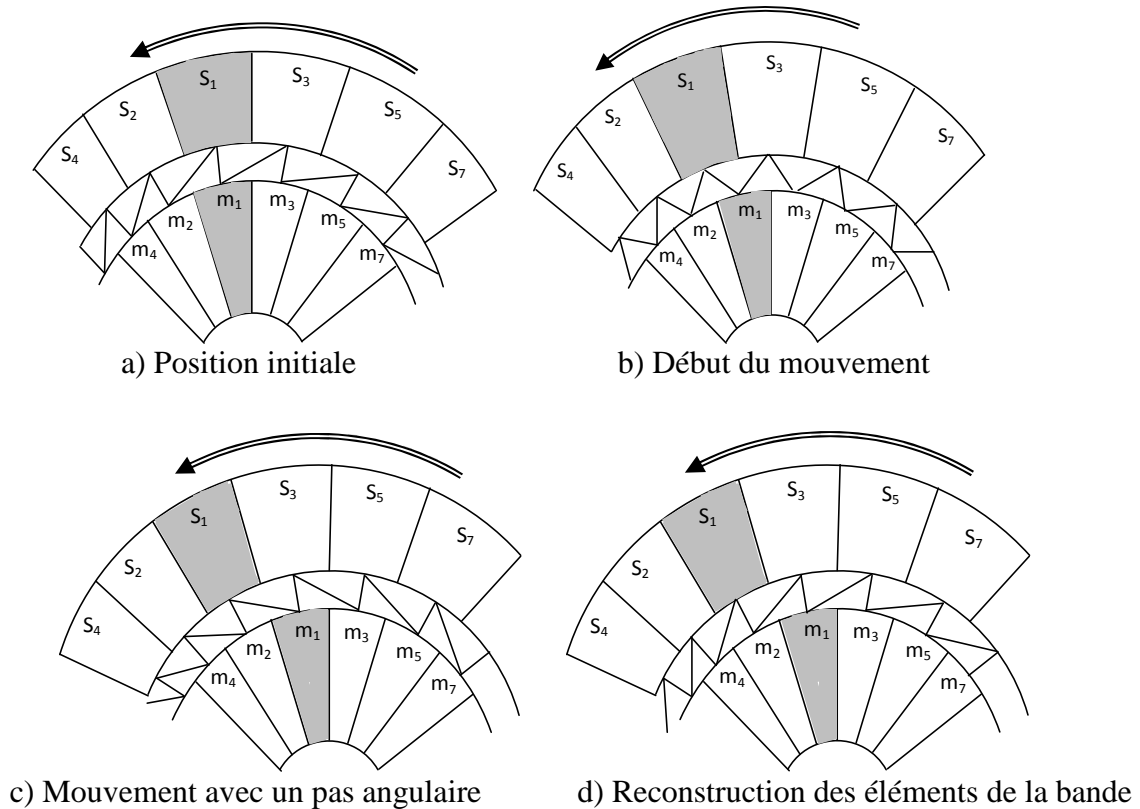
Quand les éléments de la bande sont reconstruits, les secteurs de la partie mobile  $m_i$  sont déplacés relativement par rapport aux secteurs de la partie statique  $s_i$ .

La méthode proposée est alors adaptée par la connexion de ces secteurs d'une manière spéciale. Le secteur  $s_1$  est connecté aux secteurs  $m_2$  et  $s_2$  à  $m_4$ ...

Le vecteur permutation devient donc pour le premier pas :

$$prm = \{s_1, m_2, s_2, m_4, s_3, m_1, s_4, m_6, \dots\}$$

Par l'application de cette méthode la modification du vecteur permutation est effectuée pour chaque pas et les éléments de la bande sont reconstruits.



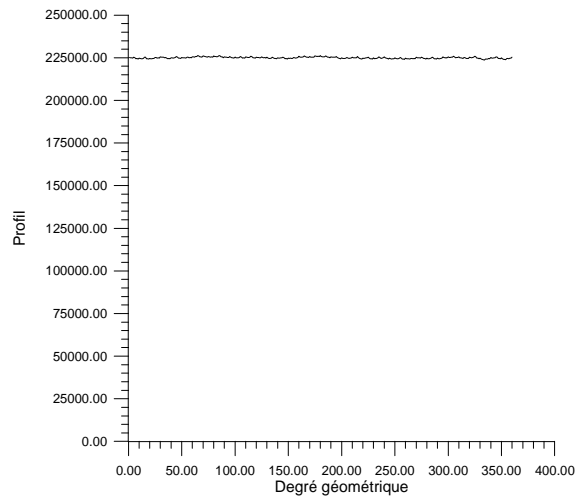
**Fig. IV.27.** Adaptation de la méthode proposée à la méthode de la bande de roulement

La modélisation de la machine à aimants permanents en régime dynamique est faite avec considération du mouvement avec la méthode de bande de mouvement [72]. Dans ce cas, la machine est décomposée en deux parties. Entre ces deux parties, une bande est créée (voir fig. IV.27.a). Cette bande contient 720 éléments et 360 nœuds sur chaque contour. Quand la limite de distorsion est atteinte (voir fig. IV.27.c), les éléments de la bande de roulement sont reconstruits (voir fig. IV.27.d).

#### IV.7.1. Stabilité de la méthode de renumérotation

Le programme de renumérotation développé effectue une renumérotation complète dans le cas de la prise en compte du mouvement (redéfinition des tables de coordonnées généralisées et des connectivités pour les nœuds du rotor avec renumérotation locale dans la bande de mouvement).

La variation du profil en fonction de l'angle de rotation présenté sur la figure (IV.28) met en évidence que l'application de la méthode des positions géométriques entraîne un profil pratiquement constant lors du mouvement, ce qui permet de conclure que la méthode des positions géométriques induit un profil stable.



**Fig. IV.28.** Variation du profil avec la rotation

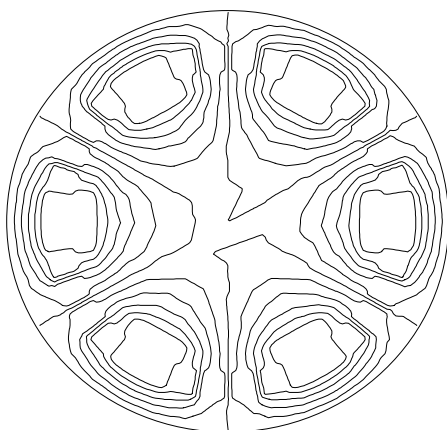
La subdivision en secteurs et la construction de la matrice  $V$  ne s'effectue qu'une seule fois, c'est-à-dire lors du premier pas. Le vecteur permutation est construit simplement à chaque pas de déplacement, par un agencement des colonnes de la matrice  $V$ . Les temps de renumérotation sont ainsi extrêmement réduits. Elle est donc très adaptée à la prise en compte du mouvement par la méthode de la bande de mouvement.

#### IV.7.2. Coûts de la méthode pour la prise en compte du mouvement

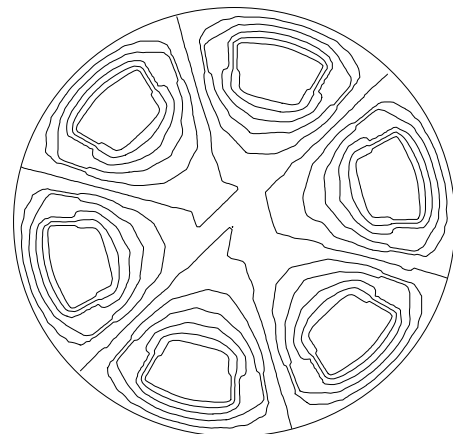
La procédure complète de rotation (redéfinition des coordonnées des nœuds du rotor, redéfinition des connectivités de la bande de roulement, renumérotation des nœuds de toute la structure) n'a duré que 2,50 secondes pour 360 pas de rotation sur le même PC déjà décrit. Chaque pas de déplacement aura coûté moins de 6 millièmes de seconde avec redéfinition complète du maillage à chaque pas, tandis que le temps d'exécution avec la méthode de Cholesky est en moyenne de 0.14 s par pas. Ces temps sont largement réduits pour les PC équipés des processeurs actuels.

#### IV.7.3. La distribution du champ magnétique en régime dynamique

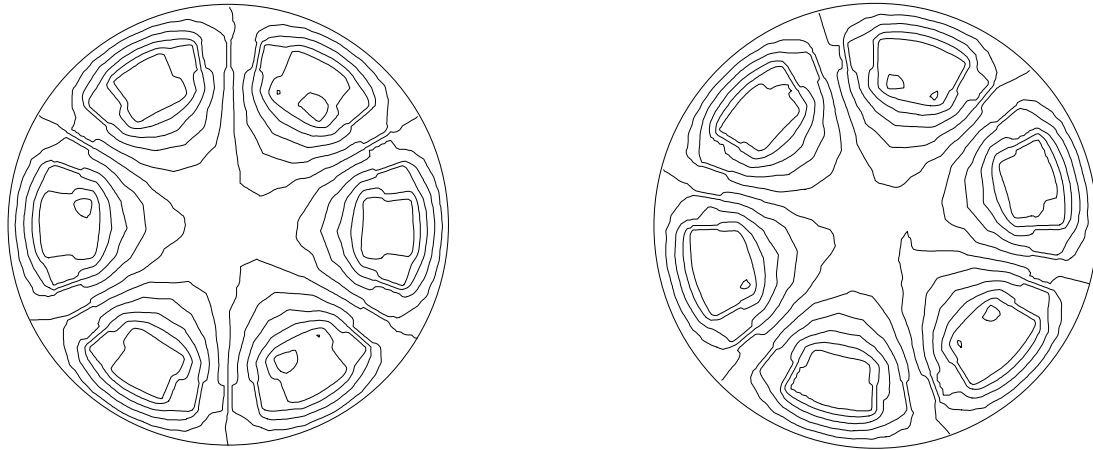
La distribution du champ magnétique dans la machine étudiée est représentée sur la figure (IV.29) pour différentes positions rotoriques à vide et en charge.



a) Pour une position rotorique  $30^\circ$  géom.  
à vide



b) Pour une position rotorique  $45^\circ$  géom.  
à vide



c) Pour une position rotorique 30° géom.  
en charge

d) Pour une position rotorique 45° géom.  
en charge

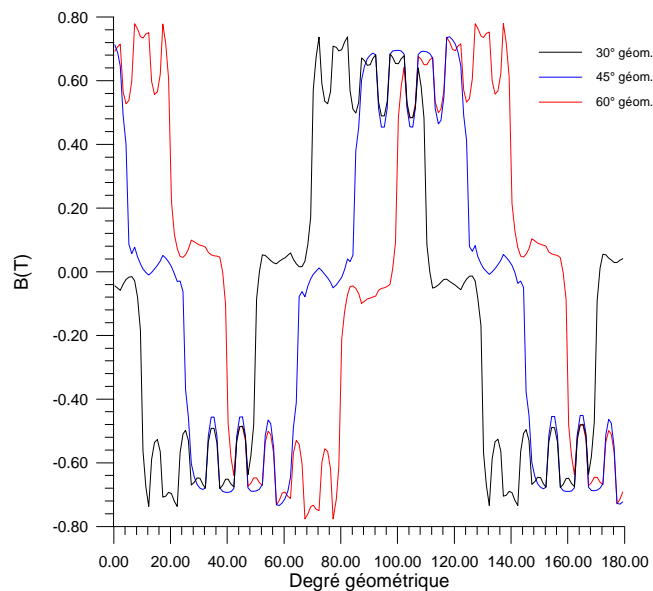
**Fig. IV.29.** Cartographie des lignes de champ en régime dynamique

La symétrie des lignes de champ à vide et en charge change en fonction de la position du rotor, l'orientation des lignes de champs dépend donc de la position des aimants qui sont sources du flux.

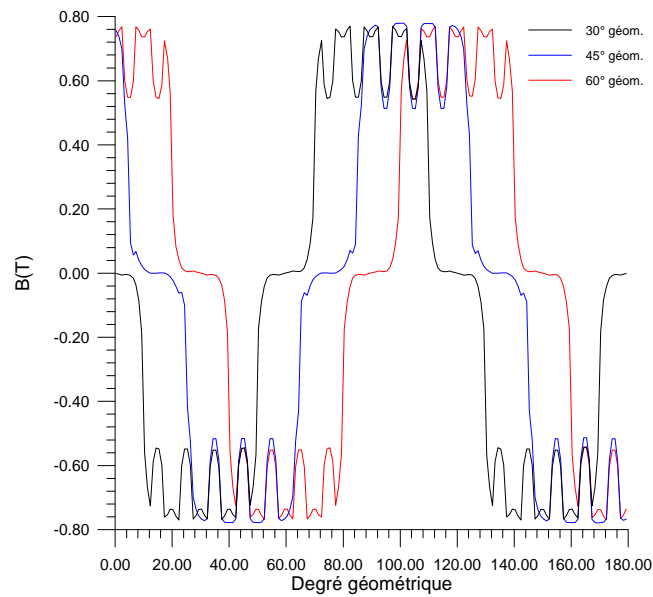
#### IV.7.4. Les courbes d'induction magnétique en régime dynamique

L'induction radiale le long de l'entrefer est illustrée sur les figures (IV.30) et (IV.31) pour différentes positions rotoriques.

L'induction magnétique à vide et en charge change de déphasage en fonction de la position du rotor ceci est du au fait que ces inductions dépend de la position des aimants.



**Fig. IV.30.** Induction radiale le long de l'entrefer en charge pour différentes positions rotoriques



**Fig. IV.31.** Induction radiale le long de l'entrefer à vide pour différentes positions rotoriques

#### IV. 8. Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté une méthode de renumérotation des maillages que nous avons vu comme une méthode de réduction de profil ceci par comparaison aux méthodes de renumérotation classiques GPS et Sloan.

Cette méthode est, de plus, avantageuse par :

- sa mise en œuvre très facile ;
- la réduction du profil donc du temps de résolution (particulièrement avec la résolution Cholesky) ;
- adaptabilité à la prise en compte du mouvement (particulièrement la méthode de la bande de mouvement) ;
- et élimination du temps de construction du graphe (donc rapidité de renumérotation).

Cette méthode a été appliquée à la modélisation dynamique d'une machine à aimants permanents. La rapidité et la stabilité de la méthode ont été constatées. Le temps d'une résolution pour un maillage de 4522 nœuds et 8936 éléments a pris en tout 50,4 secondes, ce qui constitue une excellente performance. Des temps comparés en [25] montrent un avantage certain par rapport à la méthode GPS.

La mise en œuvre d'un programme rapide et efficace pour le calcul du champ magnétique dans une machine électrique n'est pas la finalité de la méthode des éléments finis. Il est nécessaire d'exploiter les résultats ; un exemple d'exploitation sera étudié dans le chapitre suivant.

# Chapitre V

## **Calcul du couple dans la machine à aimants permanents**

## V.1. Introduction

La détermination du couple après le calcul détaillé du champ magnétique est l'un des objectifs finals dans la plupart des calculs numériques dans les machines électriques tournantes. Le couple est une quantité très significative donnant des informations pertinentes sur le fonctionnement du moteur [46, 62, 66].

Dans ce cinquième et dernier chapitre, on propose d'exploiter les résultats du calcul éléments finis qui est fait à travers le calcul du couple électromagnétique par plusieurs méthodes. Une comparaison des résultats obtenus est faite avec ceux fournis par le logiciel de calcul éléments finis FEMM (Finite Element Method Magnetics).

## V.2. Méthodes de calcul du couple

Différentes méthodes d'évaluation du couple existent ; elles peuvent être classées en deux catégories [34] :

- a- Les méthodes basées sur le résultat direct fourni par les équations du potentiel vecteur magnétique.
- b- Méthodes basées sur la densité de la force sur les surfaces du matériau magnétique.

Parmi les méthodes de la première catégorie, on peut citer :

- La méthode des tenseurs de Maxwell ;
- La méthode d'Arkkio ;
- La méthode de la variation de la coénergie magnétique.

Dans la seconde catégorie, il existe plusieurs techniques utilisant des formulations basées sur des sources équivalentes ; courants, charges magnétiques et la combinaison des deux [67, 68, 69].

### V.2.1. Méthode des tenseurs de Maxwell

La méthode des tenseurs de Maxwell est la méthode générale la plus efficace pour le calcul de la force et du couple sur un objet avec la méthode des éléments finis. L'utilisation de cette méthode est prédominante dans la littérature ; son avantage principal est que la force est déterminée par une seule résolution éléments finis [52, 70].

La force globale sur un objet peut être calculée par l'intégration des tenseurs de Maxwell sur une surface arbitraire entourant l'objet [70, 71].

En 2D, le tenseur de Maxwell est défini comme [52] :

$$T = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2}|B|^2 & B_x B_y \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2}|B|^2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.1})$$

La force globale est déterminée par :

$$F = \int_v \text{div} T dv \quad (\text{V.2})$$

Après l'utilisation du théorème de Green, la force est donnée par:

$$F = \int_s \left[ \frac{1}{\mu_0} (B \cdot n) B - \frac{1}{2\mu_0} B^2 n \right] ds \quad (\text{V.3})$$

Où  $s$  : est une surface arbitraire entourant l'objet.

$n$  : est le vecteur unitaire normal à la surface d'intégration.

En 2D, l'intégrale sur la surface est réduite à une intégrale linéique le long de l'entrefer (dans le cas des machines électriques). Si un cercle de rayon  $r$  est pris comme le contour d'intégration, la force est obtenue comme suit [23]:

$$F = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{\mu_0} (B_r B_\theta) e_\theta + \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_\theta^2) e_r \right] r d\theta \quad (\text{V.4})$$

Où :  $B_r$  et  $B_\theta$  : sont les inductions radiales et tangentielles respectivement.

$e_r$ ,  $e_\theta$  : sont les vecteurs unitaires radiales et tangentielle respectivement.

Le couple est déterminé à partir de la composante tangentielle de la force peut être déterminée par [23]:

$$T_e = l \int_\Gamma r \frac{1}{\mu_0} B_r B_\theta d\Gamma \quad (\text{V.5})$$

Où :  $l$  : est la longueur axiale et  $\Gamma$  : est le contour d'intégration.

Il à été montré que les résultats fourni par la méthode des tenseurs de Maxwell dépend du contour d'intégration choisi [66]. Arkkio a proposé donc une autre méthode.

### V.2.2. Méthode d'Arkkio

Cette méthode est une variante de la méthode de Maxwell, elle consiste en l'intégration du couple déterminé par Maxwell dans tout le volume de l'entrefer.

En Remplaçant dans l'équation (V.5),  $d\Gamma = r d\varphi$  on obtient [34]:

$$T_e = \frac{l}{\mu_0} \int_\Gamma r^2 B_r B_\theta d\varphi \quad (\text{V.6})$$

Considérons que  $r$  est défini à l'intérieur de l'entrefer et ce dernier est limité par un rayon interne  $r_i$  et un rayon externe  $r_s$ , théoriquement le couple ne varie pas avec le rayon, et donc on peut écrire :

$$T_e(r_s - r_r) = \int_{r_r}^{r_s} T_e dr \quad (\text{V.7})$$

En remplaçant l'équation (V.6) dans (V.7) on obtient :

$$T_e = \frac{l}{\mu_0(r_s - r_r)} \int_{S_e} r B_r B_\phi ds \quad (\text{V.8})$$

Où :  $S_e$  est la surface de l'entrefer.

### V.2. 3. Méthode de variation de la coénergie magnétique

Le couple peut être calculé par la dérivée de la coénergie magnétique par rapport au déplacement à courant constant [23] :

$$T_e = L d\bar{w} / d\alpha = d \left( \int_v \int_0^H B dH dv \right) / d\alpha \quad (\text{V.9})$$

$$\bar{w} = \int_v \int_0^H B dH dv \quad (\text{V.10})$$

Dans le cas linéaire, la coénergie magnétique est équivalente à l'énergie qui est donnée par :

$$w = \int_v \int_0^B H dB dv \quad (\text{V.11})$$

En modélisation numérique cette dérivée peut être approximée par la différence entre deux calculs successifs

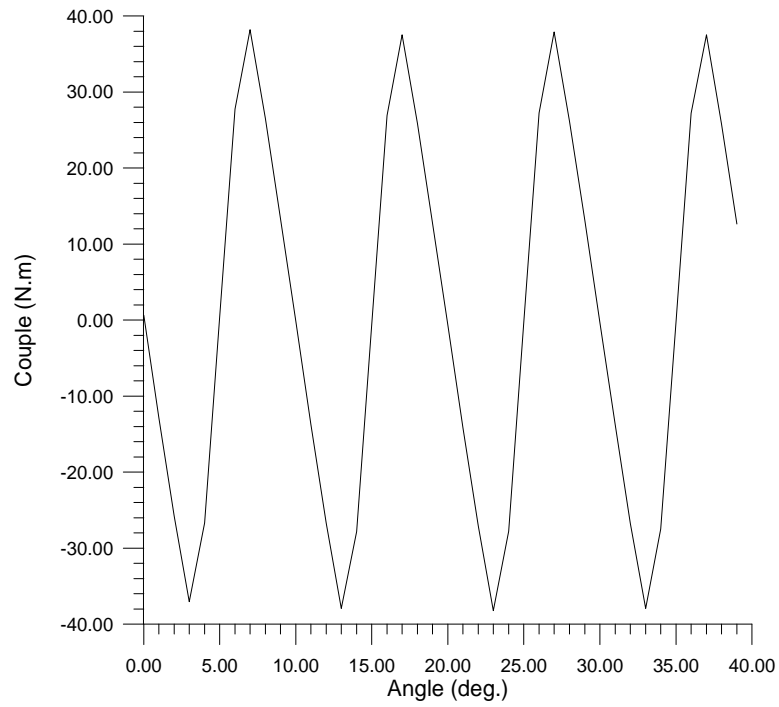
$$T_e = L (\bar{W}_{\alpha+\delta\alpha} - \bar{W}_\alpha) / \delta\alpha \quad (\text{V.12})$$

Où :  $L$  est la longueur axiale et  $\delta_\alpha$  est le pas de déplacement.

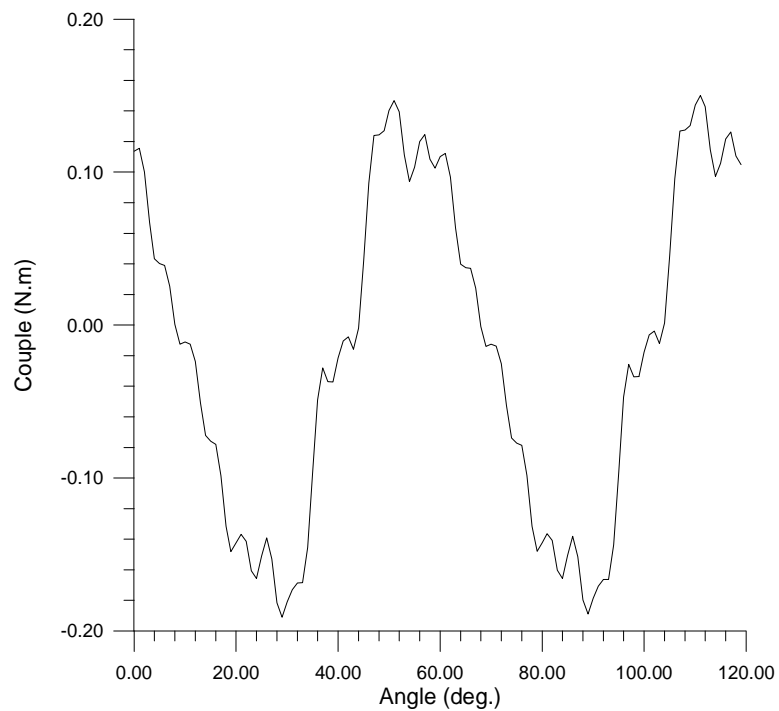
### V.3. Application sur la machine à aimants permanents

Dans l'objectif de calculer les différents couples dans la machine à aimants permanents étudiée dans les chapitres précédent, le programme de résolution éléments finis met en œuvre deux méthodes de calcul du couple à savoir la méthode de la variation de la coénergie magnétique ainsi que la méthode d'Arkio [72].

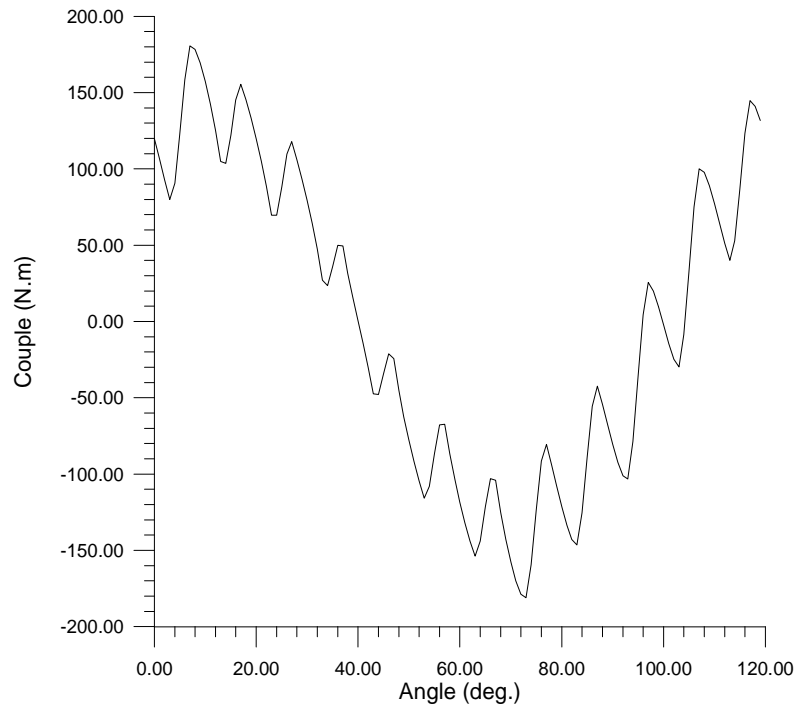
Les résultats des différents couples obtenus par la méthode d'Arkio sont représentés sur les figures ((V.1), (V.2) et (V.3)):



**Fig.V.1.** Couple de détente obtenu par la méthode d'Arkkio

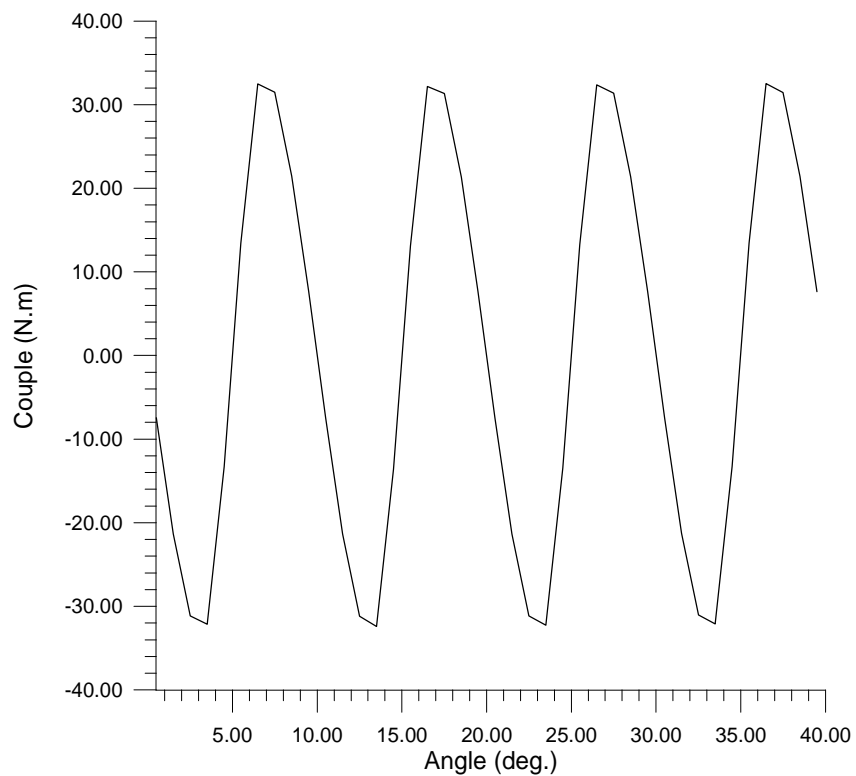


**Fig.V.2.** Couple de réluctance obtenu par la méthode d'Arkkio

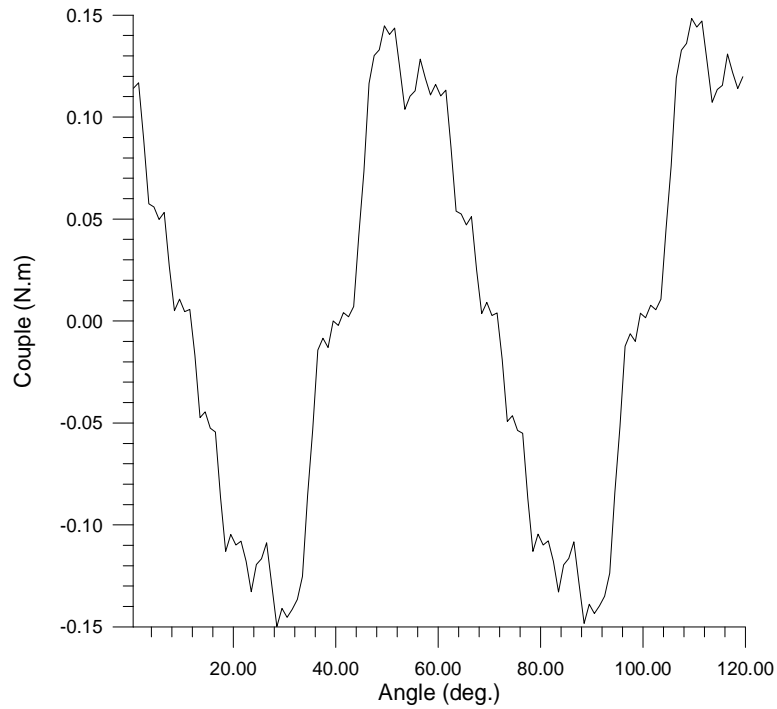


**Fig.V.3.** Couple électromagnétique en charge obtenu par la méthode d'Arkkio

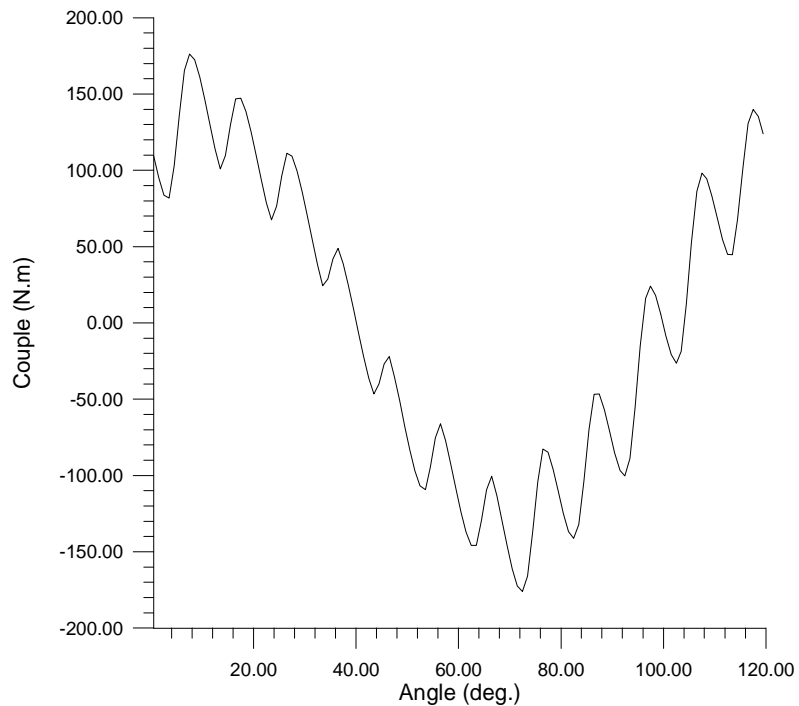
Les résultats des couples obtenus par la méthode de la variation de la coénergie magnétique sont représentés sur les figures ((V.4), (V.5) et (V.6)):



**Fig.V.4.** Couple de détente obtenu par la méthode de la variation de la coénergie magnétique



**Fig.V.5.** Couple de réluctance obtenu par la méthode de la variation de la coénergie magnétique



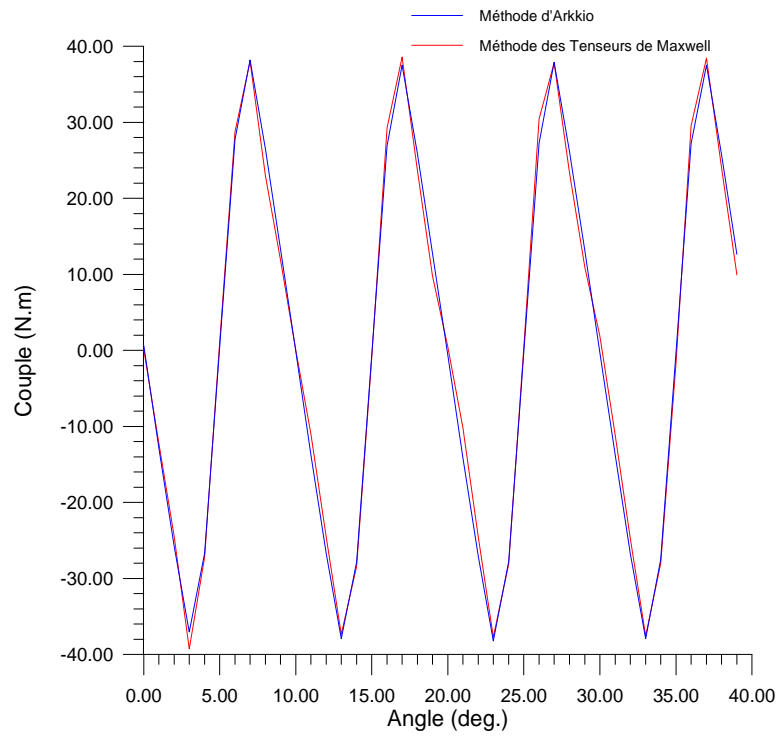
**Fig.V.6.** Couple électromagnétique en charge obtenu par la méthode de la variation de la coénergie magnétique

L'analyse du couple électromagnétique de la machine étudiée permet de constater qu'il est très important, sa valeur maximale est de 183 N.m.

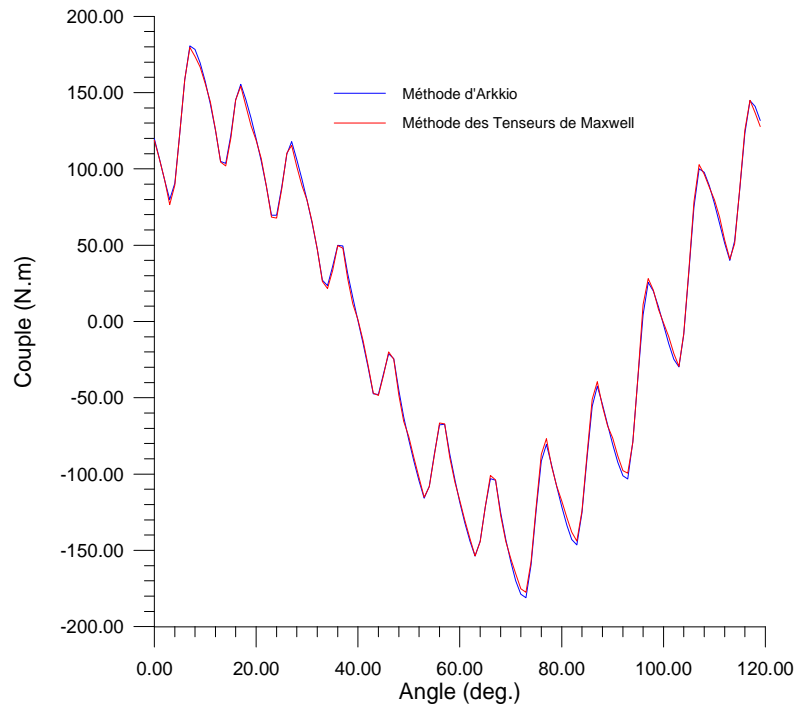
On constate aussi que le couple de réluctance est très faible ceci est dû au fait que la machine est de type surfacique.

On constate également la présence d'un couple de détente significatif, celui-ci représente environ 20% du couple total.

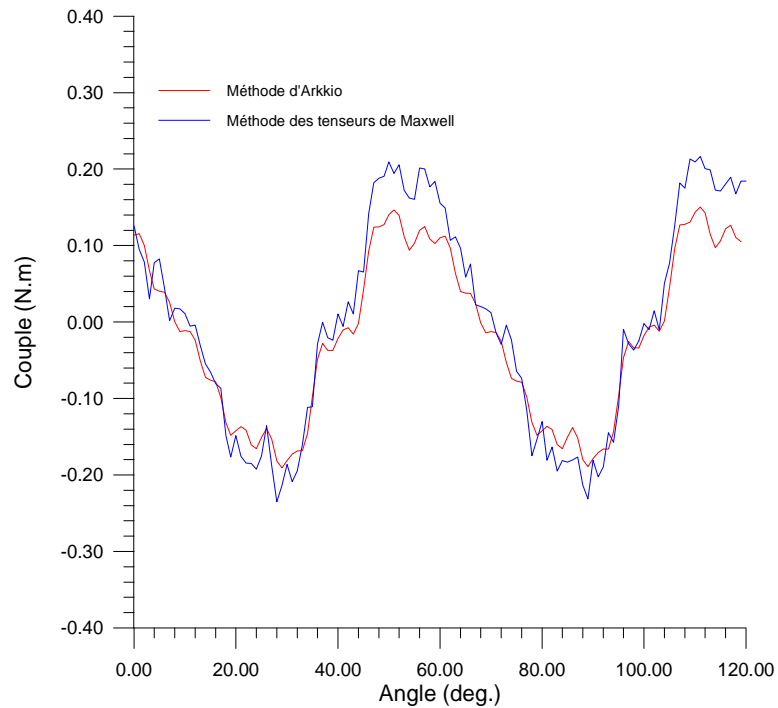
Afin de vérifier l'exactitude des résultats, ces derniers sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode de remaillage à l'aide d'un programme écrit sous Lua et est exécuté par le logiciel de calcul éléments finis FEMM. Dans ce dernier cas, le couple est déterminé par la méthode des tenseurs de Maxwell ainsi que la méthode de la variation de la coénergie magnétique.



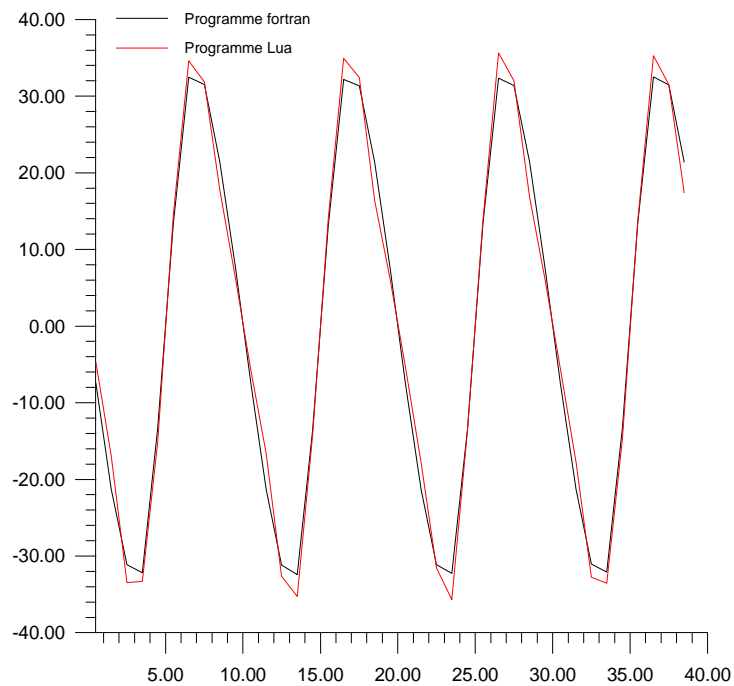
**Fig.V.7.** Comparaison des résultats du couple de détente obtenus par la méthode des tenseurs de Maxwell et la méthode d'Arkio



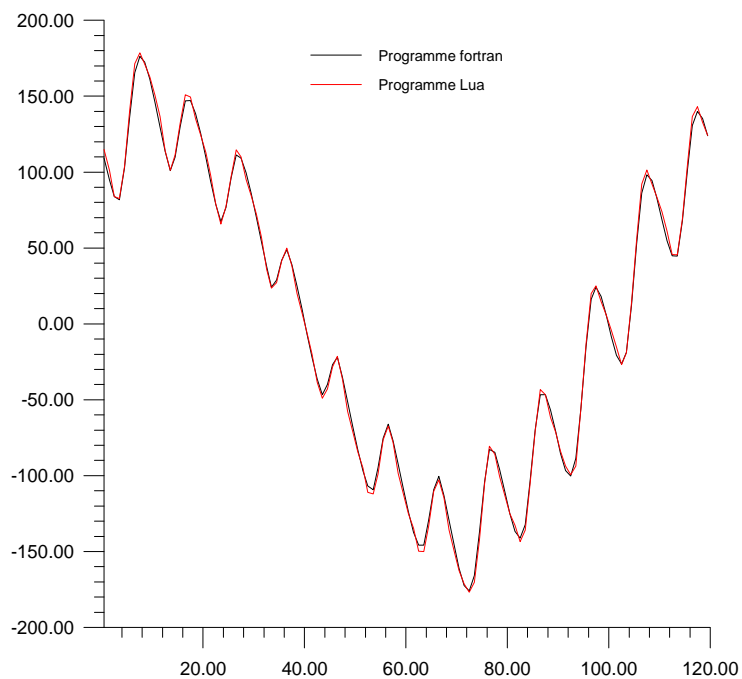
**Fig.V.8.** Comparaison des résultats du couple électromagnétique en charge obtenus par la méthode des tenseurs de Maxwell et la méthode d'Arkkiio



**Fig.V.9.** Comparaison des résultats du couple de réductance obtenus par la méthode des tenseurs de Maxwell et la méthode d'Arkkiio



**Fig. V.10.** Comparaison des résultats du couple obtenus avec la méthode de la variation de la coénergie magnétique



**Fig.V.11.** Comparaison des résultats du couple obtenus par la méthode de la variation de la coénergie magnétique

La comparaison des allures des couples nous permet de constater que le programme élaboré et celui de remaillage donnent des résultats pratiquement identiques, ce qui permet de confirmer l'exactitude des résultats obtenus.

Le temps total de simulation du programme Fortran est de 68 S (environ 0.2 seconde par pas), le programme inclut les deux méthodes de calcul du couple et également le programme de renumérotation. Tandis qu'avec la méthode de remaillage de la structure possédant le même maillage en utilisant un programme écrit sous Lua et exécuté sous le logiciel de calcul éléments finis F.E.M.M (Finite Element Method Magnetics) ; le temps de simulation est de 9 secondes par itération ce qui donne pour une rotation complète 54 minutes. Le gain en temps est donc très important ; le coût de résolution est réduit par l'adoption de la méthode des positions géométriques.

#### **V.4. Conclusion**

Ce chapitre a fait l'objet de la mise en œuvre de deux méthodes de calcul de couple à savoir la méthode d'Arkkio et la méthode de la variation de la coénergie magnétique ; ainsi que l'exploitation de la méthode des tenseurs de Maxwell et la méthode de la variation de la coénergie magnétique qui sont déjà programmé dans le logiciel FEMM. Les résultats des couples obtenus par les différentes méthodes sont pratiquement identiques. Le calcul du couple est l'une des finalités du calcul numérique par la méthode des éléments finis. L'avantage du programme Fortran incluant la méthode de renumérotation adoptée est la rapidité d'exécution du programme mis en œuvre.

# Conclusion Générale

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques la plus efficace et la plus utilisée pour l'étude et la conception des dispositifs électromagnétiques. Pour des configurations complexes comme celles des machines électriques, la méthode des éléments finis est une méthode puissante pour la résolution des problèmes de champ électromagnétique.

Les apports importants des machines à aimants modernes augmentent leur domaine d'utilisation de plus en plus ; l'étude de ces machines est donc indispensable. Notre travail a porté sur la modélisation électromagnétique d'une machine à aimants permanents de type surfacique avec la méthode des éléments finis en régime statique et dynamique.

Pour l'étude de la machine dans le cas linéaire, un programme de résolution éléments finis est établi dans le but de résoudre l'équation du potentiel vecteur magnétique dans la machine. Le programme fournit les résultats des lignes de champ dans la machine, la répartition de l'induction magnétique et le potentiel vecteur magnétique le long de l'entrefer.

L'analyse des machines électriques inclut les effets de saturation du fer ainsi la résolution des problèmes de champ non linéaire est demandée. Une telle résolution nécessite de recourir à des algorithmes efficaces. L'algorithme que nous avons utilisé à cette fin est celui de Newton Raphson. Un autre programme de résolution est donc établi dans le cas non linéaire. Les résultats fournis sont pratiquement les mêmes que dans le cas linéaire ceci est dû au fait que la machine n'est pas saturée.

Les machines électriques étant tournantes ; leur étude nécessite l'utilisation de techniques de prise en compte du mouvement des parties tournantes. La prise en compte du mouvement se fait avec diverses méthodes avec et sans remaillage. L'une des méthodes avec remaillage qui est très utilisée est la méthode de la bande de roulement. L'utilisation de cette méthode induit un problème majeur qui est l'augmentation de la largeur de bande et le profil des matrices de rigidité issues de la discrétisation éléments finis. Le remède à ce problème est l'application d'algorithme de renumérotation afin de conserver un maillage satisfaisant.

Les méthodes de renumérotation relevées dans la littérature qui sont encore en plein essor de développement sont efficaces mais coûteuses. La méthode de Cuthill Mac kee Inverse (RCM) est la méthode de base. La méthode GPS qui est une amélioration de la méthode RCM est l'une des méthodes les plus rapides et souvent utilisée comme méthode de référence. La méthode de Sloan est également l'une des méthodes de réduction de profil les plus performantes.

Ces méthodes sont appliquées particulièrement à la renumérotation des graphes associés aux matrices creuses. Ce sont des méthodes de renumérotation indirectes des maillages, des méthodes directes existent également, mais sont généralement destinées à des maillages particuliers.

Dans notre travail, nous avons appliqué une très récente méthode de réduction de profil; méthode caractérisée par une mise en œuvre facile comparativement aux autres méthodes de renumérotation. Elle est basée sur une renumérotation des nœuds en établissant un lien direct entre la position géométrique des nœuds  $(r, \theta)$  et leur renumérotation. Elle peut être adaptée pour dissocier les maillages de deux structures statorique et rotorique et procéder à une renumérotation séparée des deux parties ; elle peut donc être exploitée pour prendre en compte le mouvement par la méthode de la bande de mouvement.

L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle s'applique directement sur un maillage et elle ne nécessite pas la construction d'un graphe, ce qui élimine le temps de construction du graphe.

La comparaison des performances de cette méthode avec les autres méthodes classiques, nous a permis de déceler ce qui suit :

L'application de cette méthode permet de pallier au problème du coût induit par la renumérotation en présentant des temps de renumérotation faible. Les temps de renumérotation total sont légèrement inférieurs à ceux fournis par la méthode GPS, pour une première renumérotation et sont trois fois ou quatre fois inférieurs à ceux fournis par la méthode de Sloan.

La largeur de bande obtenue avec cette méthode est supérieure à celle fournie par la méthode GPS, mais elle est généralement réduite par rapport à celle fournie par la méthode de Sloan.

Le profil obtenu avec la méthode est réduit par rapport au profil initial (95% au plus de réduction), ce qui est très avantageux pour une résolution Cholesky. Le profil obtenu avec cette méthode est inférieur à celui obtenu avec la méthode GPS mais légèrement supérieur à celui obtenu par la méthode de Sloan.

La méthode peut être donc considérée comme une méthode de réduction de profil caractérisé par un coût de renumérotation minime.

De plus, la méthode est adaptée et extrêmement rapide pour la prise en compte du mouvement. L'adaptation de la méthode à la prise en compte du mouvement est faite sur une machine à aimants permanents de type surfacique. Les profils obtenus à chaque pas de déplacement du rotor par rapport au stator dans le cas d'un maillage global à chaque pas sont pratiquement constant (une variation de l'ordre de 0.5 %). Le temps de renumérotation dans ce cas est de 2.50 s pour une rotation complète de 360 tours qui est très inférieur ; tandis que le temps de résolution est de 50,4 secondes pour une rotation complète, il est donc très faible.

Un exemple d'exploitation du programme élaboré est présenté à travers le calcul du couple électromagnétique dans la machine étudiée, l'efficacité de l'intégration de la méthode de renumérotation dans le programme de résolution se voit spécialement dans le temps d'exécution qui est très réduit par rapport à celui obtenu par la méthode de remaillage.

La méthode présentée est dédiée aux maillages éléments finis des structures circulaires creuses et elle est en son stade primaire. Elle peut être modifiée par le couplage avec d'autres méthodes de renumérotation afin qu'elle s'adapte à des structures non circulaires.

Le programme de résolution éléments finis établi ne tient pas compte du circuit électrique extérieur, cela constitue donc la continuité de ce travail. La prise en compte du circuit électrique permet l'élaboration d'un modèle de résolution éléments finis complet et l'intégration de la méthode des positions géométriques dans ce cas permettra de minimiser des temps de résolution importants induits par la prise en compte du circuit électrique dans les machines électriques tournantes.

# BIBLIOGRAPHIE

## *Bibliographie*

- [1] Y. Boutora, "Elaboration de nouvelles méthodes de renumérotation des maillages en vue d'une modélisation électromagnétique des machines synchrones à aimants permanents avec la méthode des éléments finis", thèse de doctorat, ENP, Alger, 2007.
- [2] A. Boglietti, M. Chiampi, D. Chiarabaglio, M. Tartalia, "Finite element analysis of permanent magnet motor", IEEE Transactions on magnetic, vol.25, No. 5, September 1989.
- [3] M. A. Jabbar, H. N. Phya, Z. Liu, C. Bi, "Modelling and simulation of brushless permanent-magnet DC motor in dynamic conditions by time stepping technique", IEEE Transactions on industry applications, vol. 40, No.3, May/June 2004.
- [4] Y. Boutora, "Calcul d'une BDCM excitée par des aimants à aimantation parallèle", mémoire de magister, UMMTO, Tizi-Ouzou, 2000.
- [5] P. Thelin, H. P. Nee, "Analytical calculation of the air gap flux density of PM-motors with buried magnets", proceeding of ICEM' 98, Istanbul, Turkey, September, vol. 2, pp. 1161-1171.
- [6] F.M. Sargos, A. Rezzoug, "Calcul analytique du champ engendrer par des aimants dans l'entrefer d'une machine à rotor denté", J. Phys. III, Janvier 1991, PP.103-110.
- [7] A. Rezzoug, F.M. Sargos, A. Youmsi, "Analytical study of permanent magnet cylindrical synchronous machines fed by rectangular currents", Conf. on the evolution and modern aspects of synchronous machines, August 27-29, 1991, Zurich, pp.1071-1075.
- [8] P. Ragot, "Modélisation analytique multiphysique pour la conception optimale de moteurs synchrones à aimants permanents", thèse de Doctorat, école polytechnique fédérale de Lausanne, Septembre 2008.
- [9] S. Ratnajeevan and H. Hoole, "Rotor motion in the dynamic finite element analysis of rotating electrical machinery", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-21, No.6, pp.2292-2295, November 1985.
- [10] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos and N. Sadowski, "Using High-Order Finite Elements In Problems With Movement", IEEE Transactions on Magnetics, Vol 40. No. 2, March 2004, PP. 529-532.
- [11] M'hemed Rachek, Mouloud Feliachi, "3-D simulation techniques using FE methods: Application to eddy current non-destructive testing", NDT&E International 40 (2007), pp. 35-42, Elsevier Publications.
- [12] Z. Shoujun, D. Kung, T. G. Hen "Finite element method based on equivalent magnetic energy method for computation of 2D nonlinear current field", Journal of Shanghai University, vol.1, No.3, December 1997.
- [13] R. S. Chen, E.K.N .Yung, "SSOR preconditioned conjugate gradient method for solution of large sparse linear equations from vector FEM", Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001.
- [14] D. P. O'Leary, "Solving Sparse Linear Systems: Taking the Direct Approach", Computing in Science and Engineering, vol.7, issue 5, Sept - Oct 2005, pp. 62 - 67.

- [15] N. Gibbs, W. Poole, P. Stockmeyer, "An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix", *SIAM Journal on Numerical Analysis* 13 (1976), pp. 235–251.
- [16] A. Esposito, M.F. Cattalano, F. Malucelli, L. Tarricone, "A new matrix bandwidth reduction algorithm", *Operations Research Letters* 23, 1999, pp. 99–107.
- [17] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet, "Maillage et minimisation de largeur de bande pour les structures cylindriques creuses", *Worskshop sur la modélisation en électrotechnique et mécanique, AJOT – MEM'05, ISSN 1111-357X, ENP Alger, 13 – 14 Avril 2005*, pp. 21-26.
- [18] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet, S. Mezani, "Bandwidth and profile minimization of sparse matrices of triangular meshes of cylindrical geometries", *EMF 2006, Aussois, 21-23 Juin, France*.
- [19] A. George, J.W-H. Liu. "Computer solution of large sparse positive definite systems", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [20] S. W. Sloan, "A fortran program for profile and wavefront reduction", *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 28, 2651-2679 (1989).
- [21] A. Kaveh, G. R. Roosta, "A graph theoretical method for frontwidth reduction", *Advances in Engineering Software*, N° 30, pp.789–797, 1999.
- [22] A. Kaveh, "Ordering for Bandwidth Reduction", *Computers & Structures*, 1986, Vol. 24, N°3, pp. 413- 420.
- [23] N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenk, and J.Cros, "Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement", *IEEE Trans.On Magnetic*. vol.28, No.2, March 1992, pp. 1410–1413.
- [24] Y. Boutora, N. Takorabet, R. Ibtouen, and S. Mezani, "A new method for minimizing the bandwidth and profile of square matrices for triangular finite element mesh", *IEEE Trans.On Magnetic*. vol. 43, No.4, April 2007, pp. 1513– 1516.
- [25] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet, G. Olivier, "A new fast renumbering mesh method for taking into account of movement for cylindrical structures in finite elements analysis", *13<sup>th</sup> CEFC, Athenes, 01-04 May.2008*, PP 47.
- [26] G. Lacroux, "Les actionneurs électriques : pour la robotique et les asservissements", *Edition Technique et Documentation, Lavoisier, 1994*.
- [27] B. Sight, B. P. Sight, S. Dwivedi, "A State Of Art On Different Configurations Of Permanent Magnet Brushless Machines", *IE(I)Journal-EL*, vol.87, June 2006.
- [28] L. Gasc, "Conception d'un actionneur à aimants permanents à faible ondulation de couple pour assistance de direction automobile : Approches par la structure et par commande", *Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, Novembre 2004*.
- [29] J. Degauque, "Matériaux à propriétés magnétiques dures : notions de base", *Techniques de l'Ingénieur, traité Matériaux métalliques*, vol. M 4600, pp. 1-15.
- [30] G. Lacroux, "Les aimants permanent ", *Edition Technique et Documentation, 1989*.

- [31] P. Robert, "Matériaux d'électrotechniques", Edition Dunod, 1987.
- [32] T. Heikkila, "Permanent magnet synchronous motor for industriel inverter applications-analyse and design", Doctor Thesis, Lappeeranta University, Finlande, 2002.
- [33] R. Lateb, "Modélisation des machines asynchrones et synchrones à aimants avec prises en comptes des harmoniques d'espaces et de temps: application à la propulsion marine par POD", thèses de doctorat de l'I.N.P.L (Institut National Polytechniques de Lorraine), Octobre 2006.
- [34] J. Pedro, A. Bastos, N. Sadowski, "Electromagnetic modeling by finite element methods", Library of Congress cataloguing in publication data, 2003.
- [35] J. Puranen, "Induction motor versus permanent magnet synchronous motor in motion control applications: a comparative study", Thesis for the degree of doctor of sciences (Technology), Acta Universitatis Lappeenrantaensis, Finlande, December 2006.
- [36] H. Zeroug, B. Boukais, H. Sahraoui, "Analysis of torque ripple in a BDCM", IEEE Trans. On magnetic, vol.38, No.2, March 2002.
- [37] E. L. Carrilo Arroyo, "Modelling and simulation of permanent magnet synchronous motor drive system", Master thesis, University of Puerto Rico, 2006.
- [38] M. Rachek, "Modélisation par éléments finis de systèmes électromagnétiques en mouvement de structures tridimensionnelles : application au couplage magnétique-mécanique et au contrôle non destructif par courant de Foucault", thèse de doctorat, UMMTO, 2007.
- [39] P. Silvester, M.V.K. Chari, "Finite element solution of saturable magnertic field problems", IEEE Transactions on power apparatus and systems, vol.PAS-89, N° 7, Sept /Oct 1970.
- [40] M. N. O. Saduki, "A simple introduction to finite element analysis of electromagnetic problems", IEEE Transactions on education, vol.32, No. 2, May 1989.
- [41] R.Courant, "Variationnal Methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", bull.am.math.soc. , vol.49, 1943.
- [42] G. Dhatt, D. Touzot "Une présentation de la méthode des éléments finis", Editions Maloinés, Paris, 1984.
- [43] J. C. Sabonnadière, J. L. Coulomb, "Calcul du champs électromagnétiques", Technique Ing.vol.D3020, pp. 1-17.
- [44] E. Cheveau, "Contribution au calcul électromagnétique et thermique des machines électriques : application à l'étude de l'influence des harmoniques sur l'échauffement des moteurs asynchrones", thèse de Doctorat de l'université de Nantes, 2001.
- [45] D. Mushamalirwa, N. Germa, J.C. Steffens, "A 2-D finite element mesh generator for thermal analysis of underground power cables ", IEEE Transactions on Power Delivery, vol.3, No. 1, January 1988, PP. 62-68.
- [46] J. C. Sabonnadière, J. Louis, "La méthode des éléments finis- du modèle...à la CAO", Edition HERMES paris 1986.

- [47] M. Feliachi, "Contribution au calcul du champ électromagnétique par la méthode des éléments finis en vue d'une modélisation dynamique des machines électriques", thèse de docteur ingénieur, conservatoire national des Arts et Métiers (CNAM), Université de Paris VI, Janvier, 1981.
- [48] M. Boumahrat et A. Gourdin, " Méthodes numériques appliquées avec nombreux problèmes résolus en Fortran 77 ", OPU Editions, Alger, 1993.
- [49] G. Dhatt, G. Touzot, E. Lefrançois, "Méthode des éléments finis", Editions Germes Lavoisier, Paris, 2005.
- [50] A. Foggia, "Computer Methods and Software Engineering for Magnetic Devices – A General Survey ", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, N°26 (1982), pp.318-323.
- [51] F. Hecht, A. Marocco, F. piriou, A. Razek, "Modélisation des systèmes électrotechniques par couplage des équations électriques et magnétiques", Revue phys. Appli.25 (1990), pages 649-659.
- [52] K. Hamayer and R. Belmans, "Numerical modelling and design of electrical machines and devices", Boston MA: WIT-PRESS.1999.
- [53] P. Thelin, J. Soulard, H.-P. Nee, and C. Sadarangani, "Comparison between different ways to calculate the induced No-Load Voltage of PM Synchronous Motors using Finite Element Method", International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS'01), Bali, Indonesia, October, 2001.
- [54] A. Demenko, "Movement Simulation in Finite Element Analysis of Electric Machine Dynamics", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 32. No 3, May 1996.
- [55] F. Ossart, V. Ionita, "Convergence de la méthode du point fixe modifiée pour le calcul du champ magnétique avec hysthérésis", Eur.Phys-J.AP.5, 63-69,1999.
- [56] C. Neago and F. Ossart, "Analysis of convergence in non linear magnetostatic finite element problems", IEEE Transactions on magnetics, vol. 30, N°5, September 1994.
- [57] M. Chiampi and M. Repello, "An improved technique for non linear magnetic problems", IEEE Transactions on magnetics, vol. 30, N°6, November 1994.
- [58] A. Lefèvre, "Contribution à la modélisation électrique, électromagnétique et thermique des transformateurs : Application à l'étude de l'échauffement sur charges non linéaires", thèses de doctorat de l'université de Nantes, Octobre 2006.
- [59] A. De Bernardinis, "Etude et optimisation d'un ensemble alternateur à aimants / redresseur commandé. Application a un véhicule hybride", thèse de Doctorat de L'Institut National Polytechnique de Lorraine, 19 décembre 2000.
- [60] [www.femm.foster-miller.net](http://www.femm.foster-miller.net), David Meeker, Finite Element Method Magnetics, version 3.3, March 14, 2003.
- [61] [www.lua.org](http://www.lua.org) , Lua version 4.1 (beta), February 14, 2002.

- [62] J. Mizia, K. Damiak, A. R. Easthan, G. Dawson, "Finite element force calculation: comparison of methods for electric machines", IEEE Transactions on magnetics, vol. 24, N°1, January 1988.
- [63] J. Gyselink, L. Vandeveldel, P. Dular, C. Geuzaine, W. Legros, "A general method for the frequency domain FE modeling of rotating electromagnetics devices", IEEE Tans. On magnetics, vol.39, May 2003.
- [64] A. Lim, B. Rodrigues, F. Xiao, "Using an evolutionary algorithm for bandwidth minimization evolutionary computation", CEC 2003, December 8 -12, 2003, pp. 678 – 683.
- [65] Y. Boutora, R. Ibtouen, N. Takorabet, "Development of a Nodes Numbering Method for the Minimization of the bandwidth in Triangular Meshes of Cylindrical Geometries", The Tenth Internl Middle East Power Conference MEPCON 2005, Port Said, Egypt, December 13-15 , pp 179 – 183.
- [66] M. E. H. Benbouzid, G. Reyne, S. Derou and A. Foggia, "Finite element modeling of a synchronous machine: Electromagnetic force and mode shapes", IEEE Transactions on magnetics, vol. 29, N° 2, March 1993.
- [67] W. Muller, "Comparison of different methods of force calculation", IEEE Trans. On magnetics, vol.26, No. 2, March 1990.
- [68] R. Rezig, N. Ikhlef, M. R. Mekidèche, "Numerical comparison between electromagnetic forces calculations methods", International Journal of Electrical and Power Engineering 1(3), pp. 328-331, 2007.
- [69] L. H. D. Medrros, G. Reyne, G. Meunier, "About the distribution of forces in permanent magnets", IEEE Transactions on magnetics, vol. 35, N°3, May 1999.
- [70] L. H. Medrros, G.Reyne, G. Meunier, "Comparison of global force calculation on permanent magnet" ,IEEE Transactions on magnetics, vol. 24, N°5, September 1998.
- [71] M. Antila, E. Lantto, and A. Arkkio, "Determination of Forces and Linearized Parameters of Radial Active Magnetic Bearings by Finite Element Technique", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 34, No. 3, May 1998.
- [72] R. Saraoui, Y. Boutora, N. Benamrouche, M. Ounnadi, "Application d'une Méthode de Renumérotation des Maillages en vue d'une Modélisation Electromagnétique d'une Machine à Aimants Permanents avec la Méthode des Eléments Finis", ICEL'09 - 4ème Conférence Internationale sur l'Electrotechnique, U.S.TOran ' M.B', Algérie, 10-11 Novembre 2009.
- [73] T.G. Wilson, P.H. Trickey, "D.C. Machine With Solid State Commutation", AIEE paper # CP62-1372, Oct 7, 1962.