RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE

ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERIE DE TIZI OUZOU

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

MÉMOIRE DE MASTER

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES A LA GESTION

THÈME :

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME MIN-MAX EN PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE PRIMALE ET CONTRÔLE OPTIMAL

Réalisé et présenté par:

Mr. TAKHARBOUCHT Fayssal **Mr. FOUDIL-BEY Toufik**

Proposé et dirigé par :

Mr.CHEBBAH Mohammed **U.M.M.T.O**

Devant le jury d'examen :

***Présidente : Mme. LESLOUS Fadila** **U.M.M.T.O**

***Examinateur : Mr. GOUBI Mouloud** **U.M.M.T.O**

2019/2020

Remerciements

Tout d'abord, Grand remerciement à Dieu le plus puissant de nous avoir donné la santé, la volonté et la patience pour pouvoir réalisé et mener à terme ce modeste travail de recherche.

Nous tenons à remercier et exprimer notre gratitude envers notre professeur Mr CHEBBAH.M Pour l'aide qu'il nous a fournie et les connaissances qu'il a su nous transmettre.
Nous le remercions également pour sa disponibilité et la qualité de ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous adressons également nos remerciements aux président et membres du jury pour bien vouloir évaluer notre travail.

Nos sincères remerciements à toutes les personnes qui nous ont soutenus par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques qui ont su guider notre réflexion.

Nous voudrons exprimer notre reconnaissance envers nos parents, nos familles et nos amis qui nous ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de notre cursus universitaire.

℘ Dédicace ℘

Je dédie ce modeste travail :

La mémoire de ma défunte mère « paix a son âme », qui m'a toujours soutenu dans mon parcours et mes études, et même si aujourd'hui elle n'est pas présente avec nous sa pensée continue à me guider vers le succès

Mon cher père, mes frères et mes sœurs, qui m'ont encouragé durant toutes les années de mes études, et qui m'ont soutenu jusqu'à la fin.

A tous mes vrais amis(es).

« FAYSSAL »

ꕤ *Dédicace* ꕤ

Je dédie ce modeste travail :

Tout d'abord et avant tout a mes chers parents qui ont veillé sur moi pour que je me retrouve la ou je suis aujourd'hui,

Qui m'ont encouragé durant toutes les années de mes études, et qui m'ont soutenu jusqu'à la fin.

A mes frères et mes chères sœurs

A mes vrais amis (es).

« TOUFIK-WALID »

SOMMAIRE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le développement technologique soumet l'homme aux contraintes d'un système de relations économiques de plus en plus complexe. On constate qu'il y a de plus en plus d'éléments nouveaux qui doivent être pris en considération lors des prises de décisions concernant une action donnée (organisation d'une production, un réseau de transport...etc) et que ces prises de décisions deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques. C'est ainsi que s'est développé un domaine des mathématique basé sur l'activité de décision : appelé Recherche Opérationnelle.

Les premiers problèmes qui marquent le début des recherches opérationnelles ont été posés pendant la seconde guerre mondiale. A cette époque l'homme était préoccupé par l'organisation des opérations militaires et surtout aérienne (nombre d'avions, la formulation à adapter, la fréquence des vols pour avoir le maximum d'efficacité…etc).
Par la suite, les méthodes de recherches opérationnelles se sont de plus en plus appliqués aux problèmes économiques et commerciaux.
Elles se sont imposées auprès des dirigeants des grands organismes économiques et industriels comme les seuls outils permettant de prévenir aussi objectivement que possible sur les conséquences de leurs actions.
Une des parties essentielles de la Recherche Opérationnelle est la programmation linéaire, qui étudie la maximisation ou la minimisation de fonctions linéaires soumises à des contraintes linéaires.

La programmation linéaire est un outil très puissant qui permet d'aborder un grand nombre de problèmes d'optimisation en apparence très différents, dans des contextes très divers relevé des mathématiques de la recherche opérationnelle et à des applications en gestion ainsi en économie, en statistique, physique...etc.

Il s'agit d'un outil versatile et puissant, régulièrement cité par des entreprises comme un des modèles les plus utilisés de la Recherche Opérationnelle.

La programmation linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires et à partir de ces contraintes on doit optimiser une fonction également linéaire appelée « Fonction objectif ».

Dans le premier chapitre nous proposons de résoudre un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution du problème min-max avec des contraintes simples en programmation linéaire par la méthode adaptée. Et en suite nous généraliserons les contraintes dans le troisième chapitre (méthode primale).

Le quatrième chapitre nous allons étudier les notions de base du contrôle optimal et la contrôlabilité des systèmes linéaires, tout en donnant un petit aperçu sur le Principe du Maximum de Pontryagin.

A la fin, dans le dernier chapitre, on terminera par définir le logiciel de programmation MATLAB, et l'application des exemples étudier sous MATLAB.

CHAPITRE I
RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous proposons de résoudre un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée. Cette méthode a été inventée par les professeurs R.Gabasov et F.M.Kirillova de l'université de Minsk, en Biélorussie dans les années 80. Elle est dite adaptée car elle garde certaines structures de la méthode du simplexe comme elle permet d'avoir une solution approchée.

I.1 POSITION DU PROBLÈME :

Considérons le problème suivant :

$$(\mathrm{P1})\begin{cases} f(x) = C'x \to \max & (1) \\ Ax = b & (2) \\ d_1 \leq x \leq d_2 & (3) \end{cases}$$

Où x, c', d_1, d_2 sont des n-vecteurs réels. b est un m-vecteur réel ; C' transposé de C

$A = A[I, J]$: Une $m \times n$ matrice.

$I = \{1 \ldots m\}$: L'ensemble des indices lignes de A.

$J = \{1 \ldots n\}$: L'ensemble des indices colonnes de A.

Définition 1.1 :

Tout vecteur $x = x(J)$ vérifiant les contraintes (2) et (3) est dit plan du problème (P1)

- Un plan x^0 est optimal si $C'x^0 = \max C'x$
- Un plan x^ε est ε-optimal "solution approchée à ε-prés " si $f(x^o) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$,

  $\varepsilon > 0$ réel donné.

Définition 1.2 :

L'ensemble des indices $J_B \subset J, |J_B| = m$ est appelé support (appui) du problème (P1) si : $\det A_B \neq 0$ tel que : $A_B = A[I, J_B]$ est la matrice du support (matrice d'appui).

De là en choisissant un support J_B, tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme :

$x(J) = (x(J_B), x(J_H)),\ J_H = J - J_B$, où

$x(J_B)$ Est l'ensemble des composantes sur les indices du support,

$x(J_H)$ Est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support,

De la même manière la matrice A peut s'écrire de la façon suivante :

$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H))$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme suivante :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H)) \cdot (x(J_B), x(J_H)) = b$$
$$Ax = A(I, J_B) \cdot x(J_B) + A(I, J_H) \cdot x(J_H) = b$$

Comme A_B est inversible ($\det A_B \neq 0$), on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H.x_H)$, où $A_H = A(I, J_H)$.

Définition 1.3 :

La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B, est appelé support-plan (plan d'appui) du problème (P1).

Définition 1.4 :

Le support plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si : $d_{1j} < x_j < d_{2j}, j \in J_B$

I.2 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONELLE :

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ non dégénéré et $\bar{x} = x + \Delta x$ un autre plan

(Δx accroissement de x),

D'un côté : $$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) = C'\bar{x} - C'x$$
$$= C'(x + \Delta x) - C'x = C'\Delta x$$

D'un autre côté : $\begin{cases} Ax = b \\ A\bar{x} = A(x+\Delta x) = b \end{cases} \Rightarrow A\Delta x = 0$

$$\Rightarrow A_B \Delta x_B + A_H \Delta x_H = 0$$

On multiplie par $A_B^{-1} \Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \Delta x_H$

$$\Rightarrow \Delta f(x) = -(C'_B A_B^{-1} A_H - C'_H)\Delta x_H$$

Posons les vecteurs suivants :

$y' = C'_B A_B^{-1}$ Vecteurs des potentiels.

$\Delta'_j = y'A(I, j) - C'_j \Leftrightarrow \Delta' = y'A - C'; j \in J$ (Δ Vecteurs des estimations).

Remarque 2.1 :

Par construction, les composantes de support du vecteur Δ sont nulles : $\Delta_B = \Delta(J_B) = 0$

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(\bar{x}) - f(x) = C'\bar{x} - C'x = C'(x+\Delta x) - C'x = C'\Delta x \\ &= C'(J_B)\cdot \Delta x(J_B) + C'(J_H)\cdot \Delta x(J_H) = C_B{}'\Delta x_B + C_H{}'\Delta x_H \end{aligned}$$

Comme $Ax = b$ et $A\cdot \bar{x} = b$ alors

$$A\cdot \Delta x = 0 \Rightarrow A_B \cdot \Delta x_B + A_H \cdot \Delta x_H = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \cdot \Delta x_H$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta f(x)$, on obtient :

$$\Delta f(x) = (-C'_B A_B^{-1} A_H + C'_H)\cdot \Delta x_H = -\Delta'_H \cdot \Delta x_H = -\sum_{j\in J_H} \Delta_j \cdot \Delta x_j \quad (4)$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible (réalisable) alors, l'accroissement Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \le \Delta x_j \le d_{2j} - x_j, j \in J \quad (5)$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (4) sous les contraintes (5) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0, \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0, \\ d_{1j} - x_j \le \Delta x_j \le d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j = 0, \end{cases} \qquad j \in J_H$$

Et est égal à :

$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{\Delta_j \geq 0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j \leq 0} \Delta_j (x_j - d_{2j}), j \in J_H \Rightarrow$ appelé valeur de sub-optimalité.

De là il en résulte que :

$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$

Et pour $\bar{x} = x^0$, on aura $f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$.

De cette dernière inégalité, on déduit le critère d'optimalité suivant :

THEORÈME 2.1 : (critère d'optimalité).

Les inégalités :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \text{si} \quad \Delta_j \geq 0, \\ x_j = d_{2j} & \text{si} \quad \Delta_j \leq 0, \\ x_j \in [d_{1j}, d_{2j}] & \text{si} \quad \Delta_j = 0, \quad j \in J_H \end{cases} \tag{6}$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, J_B\}$.

PREUVE :

Conditions suffisantes :

Si les inégalités (6) sont vérifiées alors $\beta(x, J_B) = 0$ et comme $\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$, pour tout $\bar{x}$, donc

$f(\bar{x}) \leq f(x)$, $\forall \bar{x} \Rightarrow x$ est optimal.

Conditions nécessaires :

Soit $\{x, J_B\}$ un support optimal non dégénéré et supposons que les inégalités (6) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire, il existe un indice $J_0 \in J_H$ tel que :

$\Delta_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0}$ Ou $\Delta_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$

Prenons par exemple le 2eme cas : $\Delta_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$, θ un réel positif non nul et ℓ un vecteur (direction).

Il faut trouver θ , ℓ tel que : $A \cdot \bar{x} = b, d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela :

- sur J_H, posons :

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \in J_H - j_0 \\ \theta & \text{si} \quad j = j_0 \end{cases}$$

Avec $\theta > 0$

$\Delta x(J_B) = -A_B^{-1} A_H \Delta x(J_H) = -\theta A_B^{-1} a_{j_0}$, $\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non dégénéré.

En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta \cdot \ell$ dans la formule d'accroissement, on obtient :

$\Delta f(x) = \Delta f(\bar{x}) - f(x) = -\theta \cdot \Delta_{j_0} \cdot \ell_{j_0} > 0$.

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

THEORÈME 2.2 : (Critère de sub-optimalité).

Soit $\varepsilon > 0$ donné, pour l'ε-optimalité du plan x, il est suffisant de trouver un tel support J_B, pour lequel la valeur de sub-optimalité vérifie l'inégalité suivante : $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$.

PREUVE :

Conditions suffisantes :

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \Delta f(x) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε-optimal, ce qui permet d'obtenir le résultat anticipé.

Faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

Pour cela construisons le problème dual de (P1) :

$$\begin{cases} \Theta(\lambda) = b'\mu - v'd_1 + w'd_2 \rightarrow \min \\ A'\mu - v + w = C, \\ v' \geq 0, w' \geq 0, \mu \in \Re^n \end{cases}$$

Le vecteur $\lambda = (\mu, v, w)$ construit de la manière suivante :

$\mu = y;$

$v_j = \Delta_j, w_j = 0 \quad$ si $\quad \Delta_j \geq 0,$

$v_j = 0, w_j = -\Delta_j \quad$ si $\quad \Delta_j \leq 0, j \in J$

Est un plan dual (solution admissible du dual).

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\Delta_j>0} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\Delta_j<0} \Delta_j (x_j - d_{2j}),\ j \in J_H$$
$$= \sum_{j\in J} \Delta_j x_j - \sum_{\Delta_j>0} \Delta_j d_{1j} - \sum_{\Delta_j<0} \Delta_j d_{2j},\ j \in J_H$$
$$= \Delta' x - \Delta' d_1 - \Delta' d_2$$
$$= (y'A - C')x - v'd_1 + w'd_2$$
$$= -C'x + y'b - v'd_1 + w'd_2$$
$$= -C'x + \Theta(\mu, v, w)$$
$$= C'x^o - C'x + \Theta(\mu, v, w) - C'x^0;$$
$$\beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x + \Theta(\mu, v, w) - \Theta(\mu^0, v^0, w^0)$$
$$\beta(x, J_B) = \beta_x + \beta(J_B);$$

β_x : Mesure de la non optimalité de x,

$\beta(J_B)$: Mesure du non optimalité de l'appui J_B .

$\beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x + \beta(J_B) - \beta(J_B^0)$;

Pour $J_B = J_B^0$ c'est-à-dire $\beta(J_B) = \beta(J_B^0) \Rightarrow \beta(x, J_B) = C'x^0 - C'x \leq \varepsilon$, car x est ε-optimal.

Remarque 2.2 :

Soit $\{x, J_B\}$un plan d'appui non dégénéré de départ :

Si $\beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow x$ est optimal.

Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow x$ est ε-optimal.

Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$on passe à l'itération de l'algorithme.

I.3 DÉROULEMENT DE LA MÉTHODE :

La méthode de résolution est constituée de 02 procédures :

- Changement de plan : consiste à augmenter $C'x$
- Changement de support (appui) : consiste à diminuer $\theta(\lambda)$. .

I.3.1 ÉTAPE 1 : CHANGEMENT DE PLAN

Soit $\bar{x}$ un nouveau plan qui sera construit de la manière suivante :

$\bar{x} = x + \theta\ell$; ℓ : étant la direction du changement,

θ : (Un réel positif) le pas maximale le long de la direction ℓ (tel que $f(\bar{x}) \geq f(x)$).

Le vecteur de direction $\ell = (\ell(J_B), \ell(J_H))$ est construit de la manière suivante :

Sur J_H , on pose $\theta = 1$ et

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0, \\ d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0, \\ 0 & \text{si} \quad \Delta_j = 0, j \in J_H, \end{cases} \tag{7}$$

et $\ell(J_B) = -A_B^{-1} A_H \cdot \ell(J_H)$ pour avoir $A\bar{x} = b$.

Pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \le \bar{x} \le d_2$ il faut calculer

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{si} \quad \ell_j > 0 \\ \infty & \text{si} \quad \ell_j = 0, j \in J_B \end{cases}$$

$\theta_{j_0} = \min(\theta_j)$ pour $j \in J_B$

Et le pas maximal sera $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0})$.

De là, le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$ et la valeur de sub-optimalité pour le nouveau plan sera :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H^-}} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$= \beta(\bar{x}, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} \Delta_j \ell_j \qquad \text{(en remplaçant les } \ell_j \text{ données par (7))}$$

$$= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B).$$

De cette dernière expression on conclut :

- Si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \bar{x}$ est optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \le \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ est ε-optimal
- Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe au changement du support $J_B \to \bar{J}_B (A_B \to \bar{A}_B)$.

I.3.2 ÉTAPE 2 : CHANGEMENT DU SUPPORT

Le changement du support $A_B \to \bar{A}_B$ consiste à faire un changement du co-plan Δ vers $\bar{\Delta}$ et du vecteur des potentiels y vers $\bar{y}$ de telle sorte que :

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B)$, pour cela on pose :

$$\begin{cases} \bar{\Delta}(J) = \Delta(J) + \sigma_0 t(J) \in \Re^n & (8) \\ \bar{y}(I) = y(I) + \sigma_0 t(I) \in \Re^m & (9) \end{cases}$$

Où t : est la direction de diminution de la fonction duale,

σ_0 : est le pas maximal le long de cette direction.

Calcul de t et σ0 :

En utilisant la définition de Δ et y on obtient :

$\bar{\Delta} = \bar{y}'A - C' = (y' + \sigma_0 t'(I))A - C' = \Delta' + \sigma_0 t'(I)A$

De là : $t'(J) = t'(J)A(I,J) \Rightarrow t'(J_B) = t'(J)A(I,J_B) \Rightarrow t'(I) = t'(J_B) \cdot A_B^{-1}$

Ce qui nous donne $t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$.

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, le pas θ^0 est donné par $\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}) = \theta_{j_0}; j_0 \in J_H$

On cherchera un indice $j_i \in J_H$ qui entrera dans la base à la place de j_0.

Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -signe(\ell_{j_0}) & \text{si} \quad j = j_0 \\ 0 & \text{si} \quad j \in J_B - j_0 \end{cases}$$

$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$

Et calculons : $\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min\limits_{j \in J_H}(\sigma_j)$

$$\sigma_j = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \begin{array}{l} \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \text{ ou} \\ \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0, j \in J_H \end{array} \\ +\infty & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

- Le calcul de σ_0 vérifie $\overline{\Delta}_j \Delta_j \geq 0, \forall j \in J$.
- $\overline{\Delta}(j_1) = 0$.

Le nouveau support sera $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$, et on remarque que la quantité $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B)$ est égale à : $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \sum\limits_{j \in \overline{J}_{H^+}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum\limits_{j \in \overline{J}_{H^-}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{2j})$

Où : $\overline{J}_{H^+} = \{ j \in J_H / \overline{\Delta}_j \geq 0 \}$, $\overline{J}_{H^-} = \{ j \in J_H / \overline{\Delta}_j \leq 0 \}$,

Selon la relation (8) et sur J_B :

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = \sum_{j \in J_{H^+}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} \Delta_j (\overline{x}_j - d_{2j}) + \sigma_0 (\sum_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}))$$

$$\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) + \sigma^0 (\sum_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}))$$

$t \cdot \ell = 0$ car $A \cdot \ell = 0 t'(J_B) = t'(J) A(I, J_B)$ et $t'(J_H) = t'(J_B) A_B^{-1} \cdot A(I, J_H)$.

Par construction toutes les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0.

Posons $\alpha = \alpha_0 = \sum\limits_{j \in J_{H^+}} t_j (\overline{x}_j - d_{1j}) + \sum\limits_{j \in J_{H-}} t_j (\overline{x}_j - d_{2j}) = -(1 - \theta^0) \cdot \sum\limits_{j \in J_{H^-}} t_j \ell_j = (1 - \theta^0) t_j \ell_j$

$$\alpha = \alpha_0 = (1 - \theta^0) t_{j_0} \ell_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{1 j_0} & \text{si } t_{j_0} = 1 \\ -(x_{j_0} + \ell_{j_0} - d_{2 j_0}) & \text{si } t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

Donc $\beta(\overline{x}, \overline{J}_B) = (1 - \theta^0) \cdot \beta(x, J_B) - \sigma_0 |\alpha_0|$.

I.4 ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

● soit $\{x, J_B\}$un support plan de départ

1. **Calculer**

- $y' = C'_B A_B^{-1}$
- $\Delta' = y'A - C'$
- $\beta(x, J_B)$

  Si $\beta(x, J_B) = 0 \Rightarrow \{x, J_B\}$ est optimal $\Rightarrow$arrêt du processus

  Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Rightarrow \{x, J_B\}est\varepsilon$-optimal $\Rightarrow$arrêt du processus

  Sinon $\Rightarrow$aller à **2**.

2.

- Déterminer le vecteur $\ell(J)$,
- Déterminer le vecteur $\overline{x}(J)$,
- Calculer $(1-\theta^0)\cdot\beta$

  Si $(1-\theta^0)\cdot\beta < \varepsilon$, $\{\overline{x}, J_B\}$ est ε-optimal$\Rightarrow$ arrêt du processus.

  Si $\theta^0 = 1$, $\{\overline{x}, J_B\}$ est optimal$\Rightarrow$ arrêt du processus.

  Si $(1-\theta^0)\cdot\beta > \varepsilon$ aller à **3**.

3. Changement de support :

- Calculer le vecteur t
- Calculer $\sigma_{j_1} = \min\limits_{j\in J_H}(\sigma_j)$
- le nouvel support est $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$
- Aller à **I** (on passe à une nouvelle itération avec un support plan $\{\overline{x}, \overline{J}_B\}$).

I.5 EXEMPLE D'APPLICATION :

Nous allons résoudre le problème suivant par la méthode adaptée :

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 \rightarrow \max \\
\\
5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 - x_6 = 2 \\
- x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 + 5_6 = 3 \\
- 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\
\\
-4 \leq x_1 \leq 2 \\
-4 \leq x_2 \leq 3 \\
-4 \leq x_3 \leq 4 \\
-5 \leq x_4 \leq 5 \\
-6 \leq x_5 \leq 6 \\
-7 \leq x_6 \leq 7
\end{cases}
$$

Avec :

$$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6),; d_1 = (-4;-4;-4;-5;-6;-7),;$$
$$d_2 = (2;3;4;5;6;7),; c' = (1;-2;3;-4;5;6),; b' = (2;2;3;4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ -6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Par la méthode adaptée : nous prenons comme solution initial le vecteur défini comme suit (en prenant $x_4 = x_6 = 0$)

$$x = \begin{pmatrix} -9.3655 \\ 7.2507 \\ 0.6797 \\ 0 \\ 0.1782 \\ 0 \end{pmatrix} \quad J_B = \{1,2,3,5\}$$

1ere Itération :

Δ	χ	ℓ	θ	$\bar{\chi}$	t
0	-31//3310	1001/331	9/13	448/1381	0
0	2400/331	-3124/331	337/781	-1125/913	0
0	1269/1867	6629/276	325/2351	4	-1
1860/331	0	-5	1	-1099/1590	239/331
0	59/331	-1363/312	2045/1446	-564/1325	0
3029/200	0	-7	1	-925/956	-965/331

$\beta = \beta_1 = 22799/170$, $(1-\theta_1)\beta_1 = 19185/166$

2eme Itération

Δ	χ	ℓ	θ	$\bar{\chi}$	t
0	448/1381	852/529	/	1317/965	/
0	-1125/913	689/551	/	1201/558	/
-5013/965	4	∞	/	4	/
1803/965	-1099/1590	-2986/693	/	-5	/
0	-564/1325	300/509	/	158/965	/
0	-925/956	731/685	/	96/956	/

$\beta_1 = 4052/491, (1-\theta_1)\beta_1 = 0$

Donc {(1317/965, 1201/558, 4, -5, 158/965, 96/956)} est optimal.

CHAPITRE II

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME min-max AVEC CONTRAINTES SIMPLES EN PROGRAMATION LINÈAIRE AVEC LA MÈTHODE ADAPTÉE.

INTRODUCTION :

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la résolution de problème **min-max** avec des contraintes simples en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE mise en avant par R. Gabasov et F.M. Kirillova .

II.1 POSITION DU PROBLÈME :

Considérons le problème min-max en programmation linéaire suivant **:**

$$(P2)\begin{cases} f(x) = \min\limits_{k \in K} (c_k' x + \alpha_k) \to \max\limits_{x}, \\ d_1 \leq x \leq d_2, \end{cases}$$

Où x, d_1, d_2 sont des n-vecteurs réels, $c_k, k \in$ K des n-vecteurs ,
α_k Des scalaires, c_k' le transposé du vecteur c_k , $k \in$ K,
K = {1……....p}: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f .

Définition 1.1 :

- Tout vecteur x vérifiant $d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j}$, $j \in$ J, est dit plan du problème (P2).
- Un plan x^0 est optimal si x^0 réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (P2).
- Un plan x^{ε} est dit ε- optimal si : $f(x^0) - f(x^{\varepsilon}) \leq \varepsilon$, (ε > 0, réel donné).

Définition 1.2 :

Soit x un plan du problème (P2) et considérons l'ensemble K(x) défini comme suit :

$$K(x) = \{k \in K, \ f(x) = c_k' x + \alpha_k\}.$$

K(x), est appelé ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle f .
K(x) ≠∅, pour tout plan x du problème (P2) .

On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :

ω (K) = (ω_k , $k \in$ K)

$\omega_k = \omega_k(x) = c_k^{'} x + \alpha_k - f(x)$, $k \in$ K, (10)

Conséquences : En prenant un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$, on construit le vecteur

$\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}) - \omega_k(x)$, $k \in$ K.

- $\omega_k(x) \geq 0$, $k \in$ K.
- $\min\limits_{k \in K} \omega_k(x) = 0$.
- $\Delta\omega_k \geq -\omega_k$, $k \in$ K, en effet, $\Delta\omega_k = \omega_k(\bar{x}) - \omega_k(x) = c_k^{'} \Delta x + f(x) - f(\bar{x})$

$k \in$ K, et on remarque que $\Delta\omega_k + \omega_k = c_k^{'} \Delta x - f(\bar{x}) + c_k^{'} x + \alpha_k$

$= c_k^{'}(x + \Delta x) + \alpha_k - f(\bar{x})$

$= c_k^{'} \bar{x} + \alpha_k - f(\bar{x}) \geq 0$

$\Rightarrow \Delta\omega_k \geq -\omega_k$, $k \in$ K.

II.2 SUPPORT DE LA FONCTIONNELLE :

Considérons les sous-ensembles d'indices J_f, K_f, $K_f \subset K$ et $J_f \subset J$, tel que $|K_f| = |J_f| + 1$ (| . | désigne le cardinal),

Et formons la matrice

$\Delta_j = (\Delta_j(K_f, J_f),\ e(K_f))$ (11)

Où :

$\Delta(K,J) = -C(K,J)$ et $e(K) = (e_k = 1, k \in K)$ (12)

$C(K,J)$ est la matrice formée par les P vecteurs lignes $c_k^{'}$, $k \in K$.

L'ensemble $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est appelé support de la fonctionnelle si :

La matrice Δ_f inversible.

II.3 SUPPORT PLAN :

La paire $\{x, Q_f\}$ formée du plan x et du support Q_f est appelée support plan du problème (P2).

Le support plan $\{x, Q_f\}$ est dit non dégénéré si :

- $d_{1j} < x_j < d_{2j}$, $j \in J_f$
- $c_k^{'} x + \alpha_k > f(x)$, $k \in K_H = K - K_f$

II.4 ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

En utilisant le support Q_f, on construit le vecteur des estimations $\Delta(J)$:

$$\Delta'(J) = \gamma'(K_f).\Delta(K_f, J), \tag{13}$$

Où $\gamma'(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1}, en sachant que cette dernière peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta_f^{-1} = \begin{pmatrix} D(J_f, K_f) \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix} \tag{14}$$

De là, on a les relations suivantes :

- $\gamma'(K_f) = (0'(J_f), 1).\Delta_f^{-1}$ (15)
- $\sum_{k \in K} \gamma_k = 1.$ (16)
- $\Delta(J_f) = 0(J_f)$ (17)

Définition 4.1 :

- Le support Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0, k \in K_f$.
- Le support $Q_f\{K_f, J_f\}$ avec $J_f = \phi$ est régulier, par définition.

Par la suite, on ne considérera que des supports réguliers.

Considérons un support plan $\{x, Q_f\}$ de départ du problème $(P2)$ et soit un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$, calculons la quantité suivante :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x). \tag{18}$$

De la relation (1) et du plan $\bar{x}$, on a :

$\bar{\omega}_k = c_k' \bar{x} + \alpha_k - f(\bar{x})$, $k \in K$, de là il en résulte que :

$$\bar{\omega}(K) - \omega(K) = \Delta\omega(K) = -\Delta(K, J).\Delta x - e(K).\Delta f(x), \tag{19}$$

Qui nous donne le système de cramer suivant :

$$\Delta\omega(K_f) = -\left(\Delta(K_f, J_f), e(K_f)\right)\begin{pmatrix}\Delta x_f \\ \Delta f(x)\end{pmatrix} - \Delta(K_f, J_H), \Delta x_H .$$

De là on obtient la solution suivante :

$$\begin{pmatrix}\Delta x_f \\ \Delta f(x)\end{pmatrix} = -\Delta_f^{-1}\Delta\omega(K_f) - \Delta_f^{-1}\left(\Delta(K_f, J_H)\Delta x_H\right).$$

En utilisant la relation (14), on obtient :

$$\Delta x(J_f) = -D(J_f, K_f)\Delta(K_f, J_H)\Delta x(J_H) - D(J_f, K_f)\Delta\omega(K_f) . \tag{20}$$

$$\Delta f(x) = -\Delta'(J_H)\Delta x(J_H) - \gamma'(K_f)\Delta\omega(K_f) . \tag{21}$$

Le maximum de (21) sous les contraintes suivantes :

- $d_{1j} - x_j \le \Delta x_j \le d_{2j} - x_j, \, j \in J_H$
- $\Delta\omega_k \ge -\omega_k , \quad k \in K_f$

Est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{2j} - x_j & si \ \Delta_j < 0 \\ \Delta x_j = d_{1j} - x_j & si \ \Delta_j < 0 \\ \Delta\omega_k = -\omega_k ; k \in K_f , J \in J_H \end{cases}$$

Et est égal à :

$$\beta = \beta(x, Q_f) = \sum_{j\in J_H^+}\Delta_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-}\Delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f}\gamma_k\omega_k \tag{22}$$

Appelée valeur de sub-optimalité du support plan $\{ x , Q_f \}$,

Où : $J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \ge 0\}$, $\quad J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j \le 0\}$

De là on a :

$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \le \beta(x, Q_f)$ et pour $\bar{x} = x^0$

On obtient

$$0 \le f(\bar{x}) - f(x) \le \beta(x, Q_f) \tag{23}$$

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

THEOREME 4.1 :(Critère d'optimalité).

Les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & \Delta_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j} & \Delta_j \leq 0 \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & \Delta_j = 0 \qquad\qquad j \in J_H \\ \omega_k = 0 & si\ \gamma_k \geq 0, k \in K_f \\ \omega_k \geq 0 & si\ \gamma_k = 0, k \in K_f \end{cases} \tag{24}$$

Sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, Q_f\}$

Condition suffisante : Soit $\{x, Q_f\}$un support plan du problème $(P2)$, pour lequel les conditions (24) sont vérifiées, alors la relation (22) donne $\beta(x, Q_f) = 0$. En outre quelque soit $\bar{x}$, d'après la relation (24) $f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_f) = 0$, d'où l'optimalité du support plan $\{x, Q_f\}$.

Condition nécessaire : Soit $\{x, Q_f\}$ un support plan optimal non dégénéré et supposons que les conditions (24) ne sont pas vérifiées, on a alors les deux cas possibles:

I. $\exists j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$.

II. $\exists K_0 \in K_f / \gamma_{k_0} > 0,\ \omega_{k_0} > 0$

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta\ell$ avec $\theta > 0$.

Pour cela choisissons

❖ **LE CAS I** :

$$\exists j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0}$$

Posons : $\ell_{j_0} = signe(\alpha_0)$ ou $\alpha_0 = d_{1j_0} - x_{j_0}$ si $\Delta_{j_0} > 0$ et $x_{j_0} > d_{1j_0}$,

$\ell_j = 0, \forall j \in J_{H-j_0}, \Delta\omega_k = 0, k \in K_f$

Et $\ell(J_f) = -D(J_f, K_f)\Delta(J_f, K_H)\ell(J_H)$ d'après la relation (21)

$\Delta_{j_0} > 0$ et $x_{j_0} > d_{1j_0}, \exists\theta_1 > 0 / \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{1j_0}$.

On obtient donc dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 signe(\alpha_0), \bar{x}_j = x_j, \forall j \in J_H - J_0$

$\Rightarrow \forall j \in J_H, \bar{x}_j = x_j - \theta_1\ell_j, \theta_1 > 0, d_{1j} \leq x_j - \theta_1\ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}$

D'autre part, puisque $\{x, Q_f\}$ est un support plan non dégénéré, on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j} \forall j \in J_f$ il existe $\theta_2 > 0$ tel que $d_{1j} \leq x_j - \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f$.
Donc pour θ, suffisamment petit $\bar{x} = x + \theta\ell$, est un plan du problème (P2) et on obtient :$\Delta f(x) = -\theta\Delta_{j_0}$ signe$(\alpha_0) > 0$, ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, Q_f\}$.

- ❖ **LE CAS II** :

Posons $\Delta\omega_{k_0} = -\theta_1\omega_{k_0}, \theta_1 > 0, \Delta\omega_k = 0, \forall k \in K_f - K_0$ et $\ell(J_H) = 0(J_H)$
$\ell(J_f) = D(J_H, K_f)\omega(K_f)$(D'après la relation (21)).

Comme $\{x, Q_f\}$est un support plan non dégénéré, alors on a :
$d_{1j} < x_j < d_{2j} \forall j \in J_f$, donc il existe $\theta_2 > 0$ tel que $d_{1j} \leq x_j - \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f$
Donc pour un θ suffisamment $\bar{x} = x + \theta\ell$, est un plan du problème (P2), et on obtient :
$\Delta f(x) = 0.\gamma_{k_0}\omega_{k_0} > 0$, ce qui contredit l'optimalité du support plan $\{x, Q_f\}$.

THEORÈME 4.2 : (Critère de sub-optimalité).
Soit $\varepsilon > 0$un nombre réel donné. Pour l'ε-optimalité du plan x, il est suffisant de trouver un tel support Q_f pour lequel la valeur de sub-optimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, Q_f) \leq \varepsilon. \tag{25}$$

PREUVE : Condition suffisante.

Si $\beta(x, Q_f) \leq \varepsilon$, alors de la relation (24), on obtient
$\Delta f(x) \leq \varepsilon$, ce qui implique que x est ε-optimal.

Faisons une décomposition de $\beta(x, Q_f)$.ℝ

Pour cela construisons le problème dual de (P2) :

$$(D2)\begin{cases} \Theta(X) = \lambda'\alpha + v'd_1 + w'd_2 \to \min \\ -\lambda'(K).C(K,J) - v'(J) + w'(J) = 0'(J) \\ \lambda'(K).e(K) = 1 \\ \lambda \in R_+^p \\ v, w \in R_+^n \end{cases}$$

Le vecteur $X = (\lambda, v, w)$, construit de la manière suivante

$$\begin{cases} \lambda'(K_f) = (0'(J_f),1)\Delta_f^{-1}, & \lambda'(K_H) = 0 \\ v_j = \Delta_j, w_j = 0 & si \quad \Delta_j \geq 0 \\ v_j = 0, w_j = -\Delta_j & si \quad \Delta_j < 0 \end{cases}$$

Est un plan du problème dual (D2).

$$\beta(x, Q_f) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k \omega_k$$

En introduisant le plan dual ci-dessus, on obtient :

$$\beta(x, Q_f) = -\sum_{j\in J_H^+} \Delta_j (d_{1j}) - \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j (d_{2j}) + \sum_{j\in J_H} \Delta_j (x_j) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k \omega_k$$

$$\gamma'(K_f)\omega(K_f) = -\Delta(J_H).x(J_H) + \gamma'(K_f)\alpha(K_f) - f(x).$$

$$\beta(x, Q_f) = \lambda'\alpha - v'd_1 + w'd_2 - f(x) + f(x^0) - \Theta(X^0)$$

$$= (\Theta(X) - \Theta(X^0)) + (f(x^0) - f(x))$$

Désignons par :

$$\beta(x) = (f(x^0) - f(x))$$

$$\beta(Q_f) = (\Theta(X) - \Theta(X^0))$$

Donc $\beta(x, Q_f) = \beta(x) + \beta(Q_f)$,

Où $\beta(x)$ est appelé, l'écart de non optimalité du plan x ,

Et $\beta(Q_f)$ est l'écart du non optimalité du support Q_f

Remarque 4.1 :

A partir de l'expression $\beta(x, Q_f) = \beta(x) + \beta(Q_f)$, on conclut que l'amélioration du support plan $\{x, Q_f\}$, peut se faire indépendamment les uns des autres.

Si $\beta(x, Q_f) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support plan $\{x, Q_f\}$.

II.5 ITERATION DE L'ALGORITHME :

La méthode de résolution est constituée de deux procédures :

- Changement de plan,
- Changement du support.

II.5.1 ÉTAPE 1 : LE CHANGEMENT DE PLAN

Le changement du plan x au plan $\bar{x}$, a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle $f : f(\bar{x}) \geq f(x)$
On construit alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$, où le vecteur ℓ est la direction d'amélioration du point x et $\theta^0 (\theta^0 \geq 0)$ le pas maximal le long de cette direction .

La vectrice direction ℓ est définie comme suit :

$$\ell_j \begin{cases} d_{1j} - x_j, & si \quad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j, & si \quad \Delta_j < 0 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad , j \in J_H$$

En vertu du fait que $\Delta\omega(K_f) \geq -\omega(K_f)$
On peut écrire $\Delta\omega(K_f) = -\theta\omega(K_f)$ avec $\theta \leq 1$, ce qui résulte à partir de (20) que :

$$\ell(J_f) = D(J_f, K_f)(-\Delta(K_f, J_H)\ell(J_f) + \omega(J_f))$$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

I. $d_{1j} \leq x + \theta^0 \ell \leq d_{2j}, \forall j \in J.$

II. $\Delta\omega_k \geq -\omega_k, \forall k \in K.$

La condition **I)** est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0, 1]$, et sur J_f, pour $\theta \in \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & si, \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & si, \ell_j > 0 \\ \infty & si, \ell_j = 0, \ j \in J_f \end{cases}$$

$\theta_{j_0} = \min(\theta_j)$ pour $j \in J_f$.

Quant à la deuxième condition **II),** elle est vérifiée pour $\theta \leq 1$sur K_f , et sur K_H
Pour : $\theta = \theta_{k_0}, \theta_{k_0} = \min\limits_{k \in K_H}(\theta_k)$

$$\theta_K = \begin{cases} \dfrac{c'_k x + \alpha_k - f(x)}{\beta(x, Q_f) - c'_k \ell}, & si, c'_k \ell \leq \beta(x, Q_f) \\ \infty & si.non \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc : $\theta^0 = \min(1, \theta_{k_0}, \theta_{j_0})$

Donc : $\beta(\bar{x}, Q_f) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_f)$

Alors :

Si $\theta^0 = 1$ alors le support plan $\{\bar{x}, Q_f\}$ est optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_f) \leq \varepsilon$ alors le support plan $\{\bar{x}, Q_f\}$ est ε-optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_f) \geq \varepsilon$ alors on passe au changement de support.

II.5.2 ÉTAPE 2 : LE CHANGEMENT DU SUPPORT

Le changement du support s'accompagne de la diminution de la fonctionnelle duale : c'est-à-dire que le changement de Q_f vers $\bar{Q}_f$ entraîne le changement du plan dual, (λ, v, w) vers $(\bar{\lambda}, \bar{v}, \bar{w})$. De là posons

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \lambda + \sigma.\delta\lambda = \lambda + \sigma t(K) \\ \bar{v} = v + \delta v \\ \bar{w} = w + \delta w \end{cases}$$

Où t est la direction admissible du changement du plan dual,

σ, le pas maximal le long de cette direction .

Ici on remplace v, w par $\Delta : \bar{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$.

Le calcul de la direction admissible et du pas maximal se fait comme suit :

A partir de $\bar{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$,

$t'(J) = \delta\lambda'(K)\Delta(K, J)$ (car $\lambda'(K) = 0$) , on obtient $t'(J_f) = \delta\lambda(K)\Delta(K, J_f)$.

Comme $\delta\lambda'(K).e(K) = 0$ ce qui donne :

$$(t'(J_f), 0) = \delta\lambda'(K_f)(\Delta(k_f, J_f), e(K_f)) + \delta\lambda'(K_H)(\Delta(k_H, J_f), e(k_H))$$

Alors

$$\delta\lambda'(K_f) = (t'(J_f), 0)\Delta_f^{-1} - \delta\lambda'(K_H)(\Delta(k_H, J_f), e(k_H))\Delta_f^{-1}$$

Donc

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)\Delta(k_f, J_H) + \delta\lambda'(k_H)\Delta(k_f, J_H)$

$t'(J_f)$et $\delta\lambda'(K_H)$ sont construit de manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème duale (D2) :

- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, *on pose* $t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0})$
- $\theta^0 = \theta_{j_0}$, *on pose* $\delta\lambda_{k_0} = 1, \delta\lambda(K_{H-k_0}) = 0, t(J_f) = 0$

Le calcul du pas maximal σ^0:

$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}; \sigma_{k_1})$

Où $\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j)$ *pour* $j \in J_H$

$$\sigma_J \begin{cases} \dfrac{-\Delta_j}{t_j} \; si & \Delta_j t_j < 0 \\ 0 \quad si & \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ & \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \\ +\infty \quad \text{dans les autres cas} & \end{cases}$$

Et d'autre part $\sigma_{k_1} = \min(\sigma_k)$, $k \in K_f$,

$$\sigma_k \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & si\ \delta \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

n

On construit le nouveau support $\bar{Q}_{f0}$ comme suit : -

- $Si\ \ \theta^0 = \theta_{j_0}\ et\ \ \sigma^0 = \sigma_{k_1}\quad alors\ \bar{J}_f = J_f - j_0, \bar{K}_f = K_f - k_1$
- $Si\ \ \theta^0 = \theta_{j_0}\ et\ \ \sigma^0 = \sigma_{j_1}\quad alors\ \bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \bar{K}_f = K_f$
- $Si\ \ \theta^0 = \theta_{k_0}\ et\ \ \sigma^0 = \sigma_{j_1}\quad alors\ \bar{J}_f = J_f - j_0, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$
- $Si\ \ \theta^0 = \theta_{k_0}\ et\ \ \sigma^0 = \sigma_{k_1}\quad alors\ \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

La construction du nouveau support $\bar{Q}_f = \{\bar{K}_f, \bar{J}_f\}$, détermine une itération de la méthode, si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme de résolution suivant :

II.6 ALGORITHME DE RÉSOLUTION :

1. Soit le support plan $\{x, Q_f\}$ du problème $(P2)$et $\varepsilon > 0$, un nombre réel donné .

2. Calculer $\beta(x, Q_f)$

Si $\beta(x, Q_f) = 0$ alors $\{x, Q_f\}$est **optimal**

Si $\beta(x, Q_f) < \varepsilon$ alors $\{x, Q_f\}$ est **ε-optimal**

Si $\beta(x, Q_f) > \varepsilon$ alors continuer le processus

3.Calculer

- $\ell(J_H); \ell(J_f)$
- $\theta^0 = \min(1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0})$
- calculer $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$

Si $\beta(\bar{x}, Q_f) = 0$ alors $\{\bar{x}, Q_f\}$est **optimal**

Si $\beta(\bar{x}, Q_f) < \varepsilon$ alors $\{\bar{x}, Q_f\}$est **ε-optimal**

Si $\beta(\bar{x}, Q_f) > \varepsilon$ alors continuer le processus

4. Si $\theta^0 = \theta_{k_0}$

$\delta\lambda_{k_0} = 1; \delta\lambda'(K_H - k_0) = 0; t(J_f) = 0$

$\delta\lambda'(K_f) = -\delta\lambda'(K_H)(\Delta(k, J_H), e(K_H))\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)(\Delta(k, J_H))$

Faire (6)

- Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$

$t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0}); t'(J_f - J_0) = 0$

$\delta\lambda'(K_H) = 0$

$\delta\lambda'(K_f) = (t'(J_f), 0)\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)(\Delta(k_f, J_H))$

Faire (5)

5. calculer σ^0

$\sigma^0 = \sigma_{j_1} : \bar{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \bar{K}_f = K_f$

$\sigma^0 = \sigma_{k_1} : \bar{J}_f = (J_f - j_0), \bar{K}_f = K_f - k_1$

Aller à (2)

6. calculer σ^0

$$\sigma^0 = \sigma_{j_1} : \bar{J}_f = J_f \cup j_1, \bar{K}_f = K_f \cup k_0$$

$$\sigma^0 = \sigma_{k_1} : \bar{J}_f = J_f, \bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$$

Aller à (2)

II.7 EXEMPLE D'APPLICATION :

Soit le problème min-max suivant :

$$\min_k \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 - x_6 - 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 - 5x_6 - 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 - 5x_6 - 3 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 + 4 \end{pmatrix} \to \max, \ avec \begin{pmatrix} -4 \le x_1 \le 2 \\ -4 \le x_2 \le 3 \\ -4 \le x_3 \le 4 \\ -5 \le x_4 \le 5 \\ -6 \le x_5 \le 6 \\ -7 \le x_6 \le 7 \end{pmatrix}$$

Avec :

$$x' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6),; d_1 = (-4;-4;-4;-5;-6;-7),;$$
$$d_2 = (2;3;4;5;6;7),; \alpha = (-2,-2,-3,4)$$

$$c'_k = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & 1 & -5 \\ 6 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1ere itération :

Δ	χ	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
5	-4	6	/	-5/7	5
3	-4	0	/	-4	-4
-2	-4	8	/	8/21	0
4	-5	0	/	-5	-3
5	-6	12	/	4/7	1
1	-7	0	/	-7	4

$\beta(x, Q_f) = 106$ **,** $\beta(\bar{x}, Q_f) = 3117/65$

2eme itération

Δ	χ	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
-5/4	-5/7	1494/545	/	19/35	3/2
0	-4	19/4	28/19	-9/5	0
-2	8/21	76/21	/	72/35	-2
7/4	-5	0	/	-5	-5/2
-17/4	4/7	38/7	/	108/35	7/2
4	-7	0	/	-7	2

$\beta(x,Q_f)=2831/84$, $\beta(\bar{x},Q_f)=2533/140$

3eme itération

Δ	χ	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
-1	19/35	1444/991	/	2	/
0	-9/5	17/15	72/17	-2/3	/
-7/3	72/35	27/14	/	4	/
4/3	-5	0	/	-5	/
11/3	108/35	102/35	/	6	/
13/3	-7	0	/	-7	/

$\beta(x,Q_f)=1751/105$, $\beta(\bar{x},Q_f)=0$. Donc $\{\bar{x},Q_f\}$ est optimal.

CHAPITRE III

LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME min-max AVEC DES CONTRAINTES GÉNÉRALISÉES EN PROGRAMMATION LINÈAIRE PAR LA MÈTHODE ADAPTÉE

INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution d'un problème **min-max** avec des contraintes généralisées (méthode primale) dans la programmation linéaire par la méthode adaptée mise en avant par R.Gabasove et F.M Kirillova.

III.1 PRESENTATION DE PROBLÈME :

On appelle problème min- max en programmation linéaire tout problème ; qui consiste à maximiser (resp minimiser) une fonctionnelle f définie par : $f(x) = \min_{k \in K}(C'_k x + a_k)$

(resp $f(x) = \max_{k \in K}(C'_k x + a_k)$) sur un sous-ensemble de $\mathfrak{R}^n$ défini par des contraintes linéaires.

Considérons le problème suivant :

$$(P3) \quad \begin{cases} f(x) = \min_{k \in K}(C'_k x + a_k) \to \max_x \\ Ax = b \\ d_1 \le x \le d_2 \end{cases}$$

Où x, d_1, d_2 sont des n-vecteurs réels, $C_k, k \in K$ des n-vecteurs.

b un m-vecteur, $a_k, k \in K$ des scalaires, C'_k la transposé du vecteur $C_k, k \in K$.

$A = A[I, J]$: $(m * n)$ matrice, rang $A = m \le n$.

$K = \{1 \ldots p\}$: L'ensemble des indices des composantes de la fonctionnelle f .

$I = \{1 \ldots m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A.

$J = \{1 \ldots n\}$: L'ensemble des indices des colonnes de A.

$C[K, J]$: $(p * n)$ matrice formée par les vecteurs lignes $C'_k, k \in K$.

III.2 DEFINITIONS DE BASE:

1. **Plan admissible :** On appelle plan admissible (solution réalisable) ; tout vecteur x de $\Re^n$ vérifiant les contraintes du problème (P3)
2. **Plan optimal :** Un plan x^0 est optimal s'il réalise le maximum de la fonctionnelle du problème (P3) i.e. $f(x) \leq f(x^0)$ plan admissible. $\forall x$ plan de (P3).

- i.e. $f(x) \leq f(x^0), \forall x$ plan admissible.

3. **Plan sub-optimal (ou plan ε-optimal):** Soit $\varepsilon > 0$ réel donné.

   Tout plan x^ε vérifiant l'inégalité suivante $f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$ est dit plan sub-optimal (ou plan ε-optimal).

4. **Support plan :** Soit $J_B \subset J / |J_B| = m$ « un ensemble d'indices de J ».

   L'ensemble J_B est appelé « support des contraintes de (P3) » si et seulement si :

   det $A(I, J_B) \neq 0 \Leftrightarrow A_B$ inversible,

   $\Rightarrow A(I, J_B) = A_B$ est dite « matrice du support ».

   La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B est appelée « support-plan ».

III.3 VECTEURS DES ECARTS DE LA FONCTIONNELLE :

Soit x un plan du problème (P3) et $K(x)$ ensemble des indices des composantes actives de la fonctionnelle

$$K(x) = \{k \in K : f(x) = C'_k x + \alpha_k\}$$

$K(x) \neq \emptyset$, pour tout plan x du problème (P3).

On définit le vecteur des écarts des composantes de la fonctionnelle f :

$\omega(k) = \{\omega_k, k \in K\}$ Avec :

$$\omega_k = \omega_k(x) = C'_k x + a_k - f(x), k \in K \tag{26}$$

Conséquences :

$* \, \omega_k(x) \geq 0, k \in K$

$* \min \omega_k(x) = 0, \forall k \in K$

$\Delta\omega_k \geq -\omega_k, k \in K_f$

III.4 SUPPORT(APPUI) DE LA FONCTIONNELLE :

Considérons les deux sous-ensembles d'indice K_f et J_f avec :

$$K_f \subset K \text{ et } J_f \subset J / |K_f| = |J_f| + 1$$

Construisons la matrice suivante :

$$\Delta(K,J) = C(K,J_B)A_B^{-1}A(I,J) - C(K,J) \tag{27}$$

Soit le vecteur $e(K) = (e_k = 1, k \in K)$

En formant par la suite la matrice :

$$\Delta_f = (\Delta(K_f, J_f), e(K_f)) \tag{28}$$

L'ensemble $Q_f = \{K_f, J_f\}$ est appelé «support de la fonctionnelle » si la matrice Δ_f correspondante est régulière i.e. $\det \Delta_f \neq 0$.

Support plan non dégénéré : Le support-plan $\{x, J_B\}$ est dit « non dégénéré »si et seulement si :

- $d_{1j} < x_j < d_{2j}$, $\forall j \in J_B \cup J_f$
- $c_k' x + \alpha_k > f(x)$. $k \in K_H = K - K_f$.

Définition 4.1 :

On définit le vecteur des estimations $\Delta(J)$ par

$$\Delta'(J) = \gamma'(K_f)\Delta(K_f, J) \tag{29}$$

$$\mu'(I) = \gamma'(K_f).C(K_f, J_B).A_B^{-1} \tag{30}$$

Où $\gamma'(K_f)$ est la dernière ligne de la matrice Δ_f^{-1}.

Et $\mu'(I)$ est le vecteur des potentiels.

De là, on retire les relations suivantes :

- $\gamma'(K_f) = (0'(J_f),1)\Delta_f^{-1}$
- $\gamma'(K_f)e(k_f) = 1.$
- $\Delta(J_f) = 0(J_f).$
- $\Delta(J_B) = 0(J_B).$

Remarque 4.1 :

L'ensemble $Q_p = \{J_B, Q_f\}$ formé du support des contraintes et du support de la fonctionnelle est appelé support du problème (P3).

- Le support Q_f de la fonctionnelle est dit régulier si $\gamma_k \geq 0$, $k \in K_f$.
- Le support Q_p du problème est dit régulier si Q_f est régulier.
- Le support $Q_f \{K_f, J_f\}$ avec $J_f = \varnothing$ est régulier, par définition.

Par la suite, on ne considère que des supports réguliers.

La paire $\{x, Q_p\}$ formée du plan x et du support Q_p est appelée support-plan (plan d'appui) du problème (P3).

III.5 FORMULE D'ACCROISSEMENT DE LA FONCTIONNELLE :

Soit $\{x, Q_p\}$ où Q_p un plan d'appui de départ non dégénéré du problème (P3) et $\overline{x} = x + \Delta x$ un plan quelconque, et nous calculons la quantité représentant l'accroissement de la fonctionnelle f , telle que :

$$\Delta f(x) = f(\overline{x}) - f(x) \tag{31}$$

Soit $\Delta\omega$ le vecteur d'accroissement des écarts de la fonctionnelle tel que :

$$\Delta\omega(K) = C(K,J).\Delta x - e(K).\Delta f(x) \tag{32}$$

A partir de la relation (27), on aura :

$$\Delta\omega(K) = -\Delta(K,J).\Delta x - e(k).\Delta f(x) \tag{33}$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} \Delta x_f \\ \Delta f(x) \end{pmatrix} = \Delta_f^{-1}\Delta\omega(K_f) - \Delta_f^{-1}(\Delta(K_f, J_H))\Delta x_H, J_H = J - (J_B \cup J_f)$$

En utilisant la décomposition de la matrice Δ_f^{-1} et on aura comme dernière solution :

$$\Delta x(J_f) = -D(J_f, K_f)\cdot\Delta(K_f, J_H)\Delta x(J_H) - D(J_f, K_f)\cdot\Delta\omega(K_f) \tag{34}$$

$$\Delta f(x) = -\Delta'(J_H)\Delta x(J_H) - \gamma'(K_f)\Delta\omega(K_f) \tag{35}$$

$$\Delta_f^{-1} = \begin{pmatrix} D(J_f, K_f) \\ \gamma'(K_f) \end{pmatrix}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (35) sous les contraintes suivantes :

$* \; d_{1j} - x_j \le \Delta x_j \le d_{2j} - x_j, j \in J_H$

$* \; \Delta\omega_k \ge -\omega_k, k \in K_f$

Est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta x_j = d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0, \\ \Delta x_j = d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0, \\ \Delta\omega_k = -\omega_k & \quad j \in J_H, k \in K_f \end{cases}$$

Et est égale à

$$\beta = \beta(x, Q_p) = \sum_{j\in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}) + \sum_{k\in K_f} \gamma_k \omega_k \tag{36}$$

Sachant que :

$$J_H^+ = \{j \in J_H / \Delta_j \ge 0\} \quad , J_H^- = \{j \in J_H / \Delta_j \le 0\}$$

$\beta(x, Q_p)$ est appelée valeur de sub-optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Remarque 5.1 :

Pour tout plan admissible $\bar{x}$, du problème (P3), la valeur de sub-optimalité $\beta(x, Q_p)$ du support plan $\{x, Q_p\}$vérifie :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \le \beta(x, Q_p) \tag{37}$$

En particulier pour un plan optimal $\bar{x} = x^0$ on obtient :

$$0 \le f(x^0) - f(x) \le \beta(x, Q_p) \tag{38}$$

A partir de l'inégalité (29), on déduit le critère suivant :

THEOREME 5.1 : (Critère d'optimalité)

Soit les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_j = d_{1j} & si \quad \Delta_j \geq 0 & \\ x_j = d_{2j} & si \quad \Delta_j \leq 0 & \\ d_{1j} \leq x_j \leq d_{2j} & si \quad \Delta_j = 0 & j \in J_H \\ \omega_k \geq 0 & si \quad \gamma_k = 0 & k \in K_f \\ \omega_k = 0 & si \quad \gamma_k \geq 0 & k \in K_f \end{cases} \tag{39}$$

Sont suffisantes pour l'optimalité et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont aussi nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, Q_p\}$.

Preuve :

- **Condition suffisante :**

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan du problème (P3), et supposons que les conditions (39) sont vérifiées pour le plan d'appui $\{x, Q_p\}$, pour cela on aura que $\beta(x, Q_p) = 0$

De là, pour tout plan admissible $\bar{x}$, et d'après la relation (39)

$f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, Q_p) = 0$, donc $f(\bar{x}) - f(x) = 0$ d'où $\{x, Q_p\}$est un plan optimal.

- **Condition nécessaire :**

Soit $\{x, Q_p\}$ un support plan optimal non dégénéré du problème (P3), et pour lequel les conditions (39) ne sont pas vérifiées, alors on distingue deux cas suivants :

I. $\exists j_0 \in J_H / \Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}$ ou $\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}$ (40)

II. $\exists k_0 \in K_f / \gamma_{k_0} > 0, \omega_{k_0} > 0.$ (41)

Construisons alors un nouveau plan $\bar{x} = x + \theta\ell$ tel que $f(\bar{x}) > f(x)$, avec

θ : Le pas admissible ; $\theta > 0$.

ℓ : La direction admissible.

Considérons d'abord le premier cas :

- **LE CAS I :**

- $\exists j_0 \in J_H$ tel que $\begin{cases} \Delta_{j_0} > 0 \\ \Delta_{j_0} < 0 \end{cases}$ ou $\begin{matrix} x_{j_0} > d_{1j_0} \\ x_{j_0} < d_{2j_0} \end{matrix}$

On pose $\ell_{j_0} = signe(a_0)$ où

$$a_0 = \begin{cases} d_{1j_0} - x_{j_0} & si \quad \Delta_{j_0} > 0, \quad x_{j_0} > d_{1j_0} \\ d_{2j_0} - x_{j_0} & si \quad \Delta_{j_0} < 0, \quad x_{j_0} < d_{2j_0} \end{cases}$$

$\ell_j = 0, \forall j \in J_{H-j_0}, \Delta\omega_k = 0, k \in K_f$

$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f)$ et

$\ell(J_f) = -D(J_f, K_f)\Delta(J_f, K_f)\ell(J_H)$

$\Delta_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}, \exists\theta_1 > 0 / \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} - \theta_1 \geq d_{1j_0}$.
$\Delta_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}, \exists\theta_2 > 0 / \bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_2 \leq d_{2j_0}$.

On obtient dans ce cas $\bar{x}_{j_0} = x_{j_0} + \theta_1$ signe(a_0), $\bar{x}_j = x_j \forall j \in J_{H-j_0}$

$\Rightarrow \forall j \in J_H, \bar{x}_j = x_j + \theta_1 \ell_j, d_{1j} \leq x_j + \theta_1 \ell_j = \bar{x}_j \leq d_{2j}$.

D'autre part, puisque $\{x, Q_p\}$ est un support plan non dégénéré, alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall j \in J_f \cup \mathrm{J_B}$

il existe $\theta_2 > 0$ tel que : $d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_{B.}$

Pour $\theta^0 = \min(\theta_1, \theta_2), \bar{x} = x + \theta^0 \ell$ et par construction de $\ell(J_B)$ et $\ell(J_f)$ est aussi un plan du problème (P3) et on obtient :

$\Delta f(x) = -\theta^0 \Delta_{j_0} signe(a_0) > 0$ ce qui contredit l'optimalité du plan $\{x, Q_p\}$.

- **LE CAS II :**

Dans ce cas on pose $\Delta\omega_{k_0} = -\theta\omega_{k_0}, \theta > 0$ et $\Delta\omega_k = 0 \ \forall k \in K_f \setminus \{k_0\}$.

Et $\ell_{J_H} = 0(J_H)$,

$\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f)$, et

$\ell(J_f) = D(J_f, K_f) \cdot \omega(K_f)$.

Comme $\{x, Q_p\}$ est un plan non dégénéré, alors on a :

$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_B$, donc $\exists \theta_2 > 0$ tel que :

$d_{1j} \leq \bar{x}_j = x_j + \theta_2 \ell_j \leq d_{2j}, \forall j \in J_f \cup J_{B.}$

Donc pour un θ_1 suffisamment petit tel que $\theta_1 = \min(\theta_2, \theta)$. $\bar{x} = x + \theta_1 \ell$ est un plan du problème (P3).

Et on obtient :

$\Delta f(x) = \theta_1 \gamma_{k_0} \omega_{k_0} > 0.$

Ce qui contredit l'optimalité du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

THEOREME 5.2 : (Critère de sub-optimalité)

Pour $\varepsilon > 0$ un réel donné, la condition suivante :

$$\beta(x, Q_p) \leq \varepsilon \tag{42}$$

Est suffisante pour l' $\varepsilon - optimalité$ du plan d'appui $\{x, Q_p\}$.

Preuve : (condition suffisante)

Si $\beta(x, Q_f) \leq \varepsilon$, alors de la relation (38) ; on obtient $\Delta f(x) \leq \varepsilon$, ce qui implique que x est ε-optimal.

En faisant une décomposition de $\beta(x, Q_p)$ pour cela nous construisons le problème dual du problème (P3) suivant :

$$(D3) \quad \begin{cases} \Phi(X) = \lambda' a + y' b - v' d_1 + w' d_2 \to \min \\ -\lambda'(K) \cdot C(K, J) + y'(I) A(I, J) - v'(J) + w'(J) = 0'(J) \\ \\ \lambda'(K) \cdot e(K) = 1 \\ \lambda \in \Re_+^p \text{ , } v, w \in \Re_+^n \text{ , } y \in \Re^m \end{cases} \tag{43}$$

$X(\lambda, y, v; w)$ vecteur dual construisons un vecteur admissible de (D)

Construit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \lambda'(K_f) = (0'(J_f),1)\Delta_f^{-1} \quad ; \quad \lambda'(K_H) = 0 \\ y'(I) = \lambda'(K_f).C(K_f, J_B)A_B^{-1} \\ v_j = \Delta_j, w_j = 0 \quad \text{si} \quad \Delta_j \geq 0 \\ v_j = 0, w_j = -\Delta_j \quad \text{si} \quad \Delta_j < 0 \end{cases}$$

Est un plan du problème dual (D).

$$\beta(x, Q_p) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (x_j - d_{2j}) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \omega_k$$

En introduisant le plan ci-dessus, on obtient :

$$\beta(x, Q_p) = -\sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (d_{1j}) - \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (d_{2j}) + \sum_{j \in J_H} \Delta_j (x_j) + \sum_{k \in K_f} \gamma_k \omega_k$$

$$\gamma'(K_f)\omega(K_f) = \gamma'(K_f)(C(K_f, J).x(J) + a(K_f) - e(K_f).x(J))$$

Introduisons la matrice $\Delta(K, J)$, on obtient alors :

$$\gamma'(K_f)\omega(K_f) = -\Delta'(J_H).x(J) + \gamma'(K_f)C(K_f, J_{\mathbf{B}})A_B^{-1}b - f(x) + \lambda' a$$

$$\beta(x, Q_p) = \lambda' a + y' b - v' d_1 + w' d_2 - f(x)$$

$$= \lambda' a + y' b - v' d_1 + w' d_2 - f(x) + f(x^0) - \Phi(X^0)$$

$$= \underbrace{\left(\Phi(X) - \Phi(X^0)\right)}_{\beta(Q_p)} + \underbrace{\left(f(x^0) - f(x)\right)}_{\beta(x)}$$

D'où le résultat :

$$\beta(x, Q_p) = \beta(x) + \beta(Q_p)$$

Où

$\beta(x)$: Est la mesure du non optimalité du plan x.

$\beta(Q_f)$: Est la mesure du non optimalité du support Q_p.

III.6 DEROULEMENT DE LA METHODE :

La méthode de résolution est constituée de deux procédures suivantes :

- Changement de plan
- Changement de support

III.6.1 ÉTAPE 1 : CHANGEMENT DE PLAN.

Dans cette étape de l'itération, consiste à construire un nouveau plan admissible $\bar{x}$

Tel que : $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$

Désignons par :

θ^0 : Est le pas admissible maximal le long de la direction $\ell(\theta > 0, réel)$

ℓ : Est une direction admissible au points x.

Le changement du plan $\bar{x}$, a pour effet d'augmenter la valeur de la fonctionnelle

$f : f(\bar{x}) \geq f(x)$

*Pour $j \in J_H$ on pose :

$$\ell_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & \text{si} \quad \Delta_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \Delta = 0 \end{cases} \tag{44}$$

Pour avoir $A\bar{x} = b$, on prend $\ell(J_B) = -A_B^{-1} A(I, J_H \cup J_f)\ell(J_H \cup J_f)$ et $\ell(J_f)$.

est calculé de la manière suivante :

En vertu du fait que $\Delta\omega(K_f) \geq -\omega(K_f)$ peut s'écrire $\Delta\omega(K_f) = -\theta\omega(K_f)$ avec $\theta \leq 1$, ce qui résulte à partir de la relation (34)

$\ell(J_f) = D(J_f, K_f)(-\Delta(K_f, J_H)\ell(J_f) + \omega(J_f))$

Soit θ^0 la valeur maximale du pas pour lequel les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $d_{1j} \leq x + \theta^0 \ell \leq d_{2j}, \forall j \in J$
2. $\Delta\omega_k \geq -\omega_k, \forall k \in K.$

La condition **1.** est vérifiée sur J_H pour $\theta \in [0,1]$, et sur $J_f \cup J_B$, pour $\theta = \theta_{j_0}$

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_{1j} - x_j}{\ell_j} & \text{si } \ell_j < 0 \\ \dfrac{d_{2j} - x_j}{\ell_j} & \text{si } \ell_j > 0 \\ \infty & \text{si } \ell_j = 0, j \in J_f \cup J_B \end{cases} \tag{45}$$

$\theta_{j_0} = \min(\theta_j)$, et pour $j \in J_f \cup J_B$

Quant à la deuxième condition **2.** est vérifiée $\theta \leq 1$ sur K_f, et sur K_H pour $\theta_{k_0} = \min(\theta_k), k \in K_H$

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{C_k' x + \alpha_k - f(x)}{\beta(x, Q_p) - C_k' \ell} & \text{si } C_k' \ell \leq \beta(x, Q_p) \\ \infty & \text{si non} \end{cases}$$

Le pas maximal θ^0 est donc $\theta^0 = \min(1, \theta_{k_0}, \theta_{j_0})$

Donc $\beta(\bar{x}, Q_p) = (1 - \theta^0)\beta(x, Q_f)$.

Alors :

Si $\theta^0 = 1 \Rightarrow \beta(\bar{x}, Q_p) = 0 \Rightarrow \bar{x}$ est optimal i.e. le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$ est un plan optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) \leq \varepsilon \Rightarrow \bar{x}$ est ε-optimal i.e. le support plan $\{\bar{x}, Q_p\}$ est ε-optimal.

Si $\beta(\bar{x}, Q_p) > \varepsilon \Rightarrow$ on passe au changement du support.

III.6.2 ÉTAPE 2 : CHANGEMENT DE SUPPORT.

Le changement d'appui se poursuit par la diminution de la fonctionnelle duale c'est-à-dire :

Le changement de $Q_p \to \overline{Q}_p$ entraîne le changement du plan dual (λ, γ, v, w) vers $(\overline{\lambda}, \overline{\gamma}, \overline{v}, \overline{w})$. De là, on pose :

$$\begin{cases} \overline{\lambda} = \lambda + \sigma.\delta\lambda = \lambda + \sigma t(K) \\ \overline{v} = v + \delta v \\ \overline{w} = w + \delta w \\ \overline{y} = y + \sigma \cdot \delta y \end{cases}$$

Où :

t: est la direction admissible du changement du plan dual ;

σ :le pas maximal le long de cette direction.

Ici on remplace v, w par $\Delta : \overline{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$.

Le calcul de la direction admissible et le pas maximal se fait comme suit :

A partir de $\overline{\Delta} = \Delta + \sigma t(J)$.

$$t'(J) = \delta y'(I)A(I,J) - \delta\lambda'(K)C(K,J). \quad (46)$$

Ce qui résulte que $t'(J_B) = \delta y'(I)A_B - \delta\lambda'(K)C(K,J_B)$

Donc $\delta y'(I) = t'(J_B)A_B^{-1} + \delta\lambda'(K)C(K,J_B)A_B^{-1}$

On remplaçant dans (37) on aura :

$$t(J) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J) + \delta\lambda'(K)\Delta(K,J)$$

Ce qui donne

$$(t'(J_f),0) = (t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_f).0) + \delta\lambda'(K_f)\big(\Delta(K_f,J_f).e(K_f)\big) + \delta\lambda'(K_H)\big(\Delta(K_H,J_H).e(K_H)\big)$$

Alors

$$\delta\lambda'(K_f) = (t'(J_f),0) - (t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_f).0) - \delta\lambda'(K_H)\big(\Delta(K_H,J_f),e(K_H)\big)\Delta_f^{-1}$$

Donc

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H) + \delta\lambda'(K_H)(\Delta(K_H,J_H) + \delta\lambda'(K_f)(\Delta(K_f,J_H)))$$

$t'(J_f)$, $t'(J_B)$ et $\delta\lambda'(K_H)$ sont construit d'une manière à assurer une diminution de la fonctionnelle du problème dual (D).

♦ $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0}), t(J_f \cup J_B - J_0) = 0,\ \delta\lambda(K_H) = 0$

♦ $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on pose $\delta\lambda_{k_0} = 1$, $\delta\lambda(K_{H-k_0}) = 0$, $t(J_f \cup J_B) = 0$

-calcul du pas maximal σ^0 :

$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{k_1})$

Où $\sigma_{j_1} = \min(\sigma_j) / j \in J_H$

$$\sigma_j \begin{cases} -\dfrac{\Delta_j}{t_j} & \text{si} \quad \Delta_j t_j < 0 \\ 0 & \text{si} \quad \Delta_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ & \quad\quad ou \\ & \quad\quad \Delta_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \\ +\infty & \quad\quad \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

σ_{j_1} assure la diminution de la valeur de sub-optimalité.

D'autre part : $\sigma_{k_1} = \min\limits_{k \in K_f}(\sigma_k)$

$$\sigma_k \begin{cases} -\dfrac{\lambda_k}{\delta\lambda_k} & \text{si} \quad \delta\lambda_k . \lambda_k < 0 \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

σ_{k_1} assure la régularité de l'appui $\overline{Q}_p$.

On construit le nouveau plan $\overline{Q}_p$ comme suit :

-Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_f = (J_f - j_0), \overline{K}_f = K_f - k_1$

-Si $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \overline{K}_f = K_f$

-Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$ $j_0 \in J_B$ alors :

-Si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B) A_B^{-1} A(I, j_2) \neq 0$ alors $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2$, $\overline{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

Faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}$ $j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_j$ alors $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_f = (\bar{J}_f - j_0) \cup j_1$, $\bar{K}_f = K_f$

Sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = \bar{J}_B$, $\bar{J}_f = \bar{J}_f - j_0$, $\bar{K}_f = K_f - k_1$

Sinon $\exists j_2 \in \bar{J}_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$ alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$, $\bar{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1$, $\bar{J}_f = J_f$, $\bar{K}_f = K_f$

-si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_f = J_f \cup j_1$, $\bar{K}_f = K_f \cup k_0$

-si $\theta^0 = \theta_{k_0}$ et $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\bar{J}_B = J_B$, $\bar{J}_f = J_f$, $\bar{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$

La construction du nouveau support $\bar{Q}_p = \{\bar{K}_f, \bar{J}_B\}$, détermine une itération de la méthode, si bien que tous les résultats sont résumés dans l'algorithme de résolution suivant :

III.7 ALGORITHME DE RESOLUTION :

1. Soit le plan d'appui $\{x, Q_p\}$du problème (P3) et $\varepsilon > 0$ un nombre réel donné.
2. Calculer $\beta(x, Q_p)$:

   Si $\beta(x, Q_p) = 0$ alors $\{x, Q_p\}$ est optimal, arrêt du processus.

   Si $\beta(x, Q_p) < \varepsilon$ alors $\{x, Q_p\}$ est $\varepsilon -$optimal, arrêt du processus.

   Si $\beta(x, Q_p) > \varepsilon$ alors on passe à l'itération.
3. Calculer :
   - $\ell(J_H); \ell(J_f); \ell(J_B)$
   - $\theta^0 = \min(1; \theta_{k_0}; \theta_{j_0})$
   - $\bar{x} = x + \theta^0 \ell$

   Si $\beta(\bar{x}, Q_p) = 0$ alors $\{\bar{x}, Q_p\}$ est optimal, arrêt du processus.
   Si $\beta(\bar{x}, Q_p) < \varepsilon$ alors $\{\bar{x}, Q_p\}$ est $\varepsilon -$optimal, arrêt du processus.
   Si $\beta(\bar{x}, Q_p) > \varepsilon$ alors continuer le processus.

4. **Si** $\theta^0 = \theta_{k_0}$

$$\delta\lambda_{k_0} = 1; \delta\lambda(K_H - k_0) = 0; t(J_f \cup J_B) = 0$$
$$\delta\lambda'(K_f) = -\delta\lambda'(K_H)\big(\Delta(K_H, J_f); e(K_H)\big)\Delta_f^{-1}$$

$t'(J_H) = \delta\lambda'(K)(\Delta(K, J_H))$ **Faire (6).**

•**Si** $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_B$

$t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0}); t'(J_B - j_0) = 0, t'(J_f) = 0$

$\delta\lambda'(K_H) = 0$

$\delta\lambda'(K_f) = -\left(t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_f).0\right)\Delta_f^{-1}$

$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H) + \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H)$

Faire (4).

• **Si** $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

$t_{j_0} = -signe(\ell_{j_0}); t'(J_f - j_0) = 0, t'(J_B) = 0$

$\delta\lambda'(K_H) = 0, \delta\lambda'(K_f) = \left(t'(J_B).0\right)\Delta_f^{-1}, t'(J_H) = \delta\lambda'(K_f)\Delta(K_f, J_H)$

Faire (5).

Si $\exists j_2 \in J_f / t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) \neq 0$ alors $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_2, \overline{J}_f = (J_f - j_2) \cup j_0$

Faire comme le cas $\theta^0 = \theta_{j_0}, j_0 \in J_f$

Si $\sigma^0 = \sigma_{j_*}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B, \overline{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_*, \overline{K}_f = K_f$.

Sinon si $\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B, \overline{J}_f = J_f - j_0, \overline{K}_f = K_f - k_1$.

Aller à (2).

Sinon $t'(J_B)A_B^{-1}A(I, j_2) = 0$, pour tout $j_2 \in \overline{J}_f$ alors $\sigma^0 = \sigma_{j_1}$

Et $\overline{J}_B = (J_B - j_0) \cup j_1, \overline{J}_f = J_f, \overline{K}_f = K_f$

Aller à (2).

5. Calculer σ^0 : Si

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B, \overline{J}_f = (J_f - j_0) \cup j_1, \overline{K}_f = K_f$.

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J}_B = \overline{J}_B, \overline{J}_f = J_f - j_0, \overline{K}_f = K_f - k_1$.

Aller à (2).

6. Calculer σ^0 :

$\sigma^0 = \sigma_{j_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_f = J_f \cup j_0, \overline{K}_f = K_f \cup k_0$.

$\sigma^0 = \sigma_{k_1}$ alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_f = J_f, \overline{K}_f = (K_f - k_1) \cup k_0$.

Aller à (2).

III.8 EXEMPLE D'APPLICATION :

Soit le problème min-max suivant :

$$
(P3)\begin{cases}
f(x)=\min\limits_{k}\begin{pmatrix} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5+6x_6-2 \\ 6x_1-5x_2+4x_3-7x_4+2x_5-x_6-2 \\ x_1-3x_2+5x_3-7x_4+2x_5-x_6-3 \end{pmatrix}\to\max\limits_{k} \\[2ex]
\frac{-3}{2}x_1+3x_2+\frac{7}{2}x_3-\frac{37}{10}x_4-\frac{21}{4}x_5-\frac{43}{20}x_6=2 \\
\frac{9}{4}x_1-x_2-3x_3+x_4+4x_5-x_6=2 \\
2x_1+3x_2+\frac{35}{4}x_3+5x_4+\frac{79}{100}x_5-\frac{7}{4}x_6=3 \\
-9x_1+5x_2+4x_3+3x_4+2x_5+x_6=4 \\[2ex]
-4\le x_1\le 2 \\
-4\le x_2\le 3 \\
-4\le x_3\le 4 \\
-5\le x_4\le 5 \\
-6\le x_5\le 6 \\
-7\le x_6\le 7
\end{cases}
$$

Avec

$$x'=(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6),;d_1=(-4;-4;-4;-5;-6;-7),;$$
$$d_2=(2;3;4;5;6;7),;b=(2;2;3;4);\alpha=(-2,-2,-3)$$

$$c_k=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 6 \\ 6 & -5 & 4 & -7 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 5 & -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}\quad k=\overline{1,3};$$

$$A=\begin{pmatrix} -3/2 & 3 & 7/2 & -37/10 & -21/10 & -43/20 \\ 9/4 & -1 & -3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 35/4 & 5 & 79/100 & -7/4 \\ -9 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1ere itération

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
0	**1091/1641**	**-5007/590**	**863/1570**	**97/10819**	**0**
0	**2041/827**	**-7454/345**	**5167/17260**	**1396/1391**	**0**
0	**1429/1648**	**5195/531**	**1088/2187**	**-294/1441**	**0**
0	**413/1114**	**-853/205**	**697/540**	**424/47791**	**0**
-2078/105	**0**	**6**	**0**	**342/841**	**4156/1133**
4423/894	**0**	**-7**	**0**	**-399/841**	**-536/1031**

$\beta(x, Q_p) = 86350/563$, $\beta(\bar{x}, Q_p) = 7006/49$

2eme itération

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
0	**97/10819**	**-2318/293**	**534/1033**	**-1026/547**	**0**
0	**1396/1391**	**-9829/488**	**827/3329**	**-4**	**1**
0	**-294/1441**	**3183/349**	**1446/3137**	**1103/535**	**0**
0	**424/47791**	**-2083/537**	**1977/1507**	**-1099/1257**	**0**
-3031/188	**342/841**	**5543/991**	/	**4979/2772**	**691/325**
4919/1111	**-399/841**	**-3191/489**	/	**-4979/2376**	**-1455/1151**

$\beta(x, Q_p) = 22147/186$, $\beta(\bar{x}, Q_p) = 4564/51$

3eme itération

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
0	**-1026/547**	**2697/1613**	**452/195**	**-1737/1445**	**0**
1415/404	**-4**	**0**	/	**-4**	**7769/2479**
0	**1103/535**	**2279/739**	**824/1311**	**2749/832**	**0**
0	**-1099/1257**	**-2685/631**	**1459/1505**	**-813/314**	**0**
-4572/527	**4979/2772**	**660/157**	/	**2216/635**	**1011/142**
0	**-4979/2376**	**3248/459**	**1069/831**	**559/736**	**0**

$\beta(x,Q_p)=9847/270$, $\beta(\bar{x},Q_p)=14395/661$

4eme itération

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
0	**-1737/1445**	**1267/1269**	**1889/589**	**-1139/1381**	**0**
16299/2456	**-4**	**0**	/	**-4**	**-275/1104**
0	**2749/832**	**790/429**	**65/172**	**4**	**-1**
0	**-813/314**	**2175/856**	**760/801**	**-3198/901**	**0**
-711/457	**2216/635**	**1594/635**	/	**2774/625**	**1129/1539**
0	**559/736**	**2491/590**	**799/540**	**8936/3805**	**0**

$\beta(x,Q_p)=2519/645$, $\beta(\bar{x},Q_p)=2155/887$

5eme itération

Δ	x	ℓ	θ	$\bar{x}$	t
0	**-1139/1381**	/	/	/	/
10903/1785	**-4**	/	/	/	/
-1071/505	**4**	/	/	/	/
0	**-3198/901**	/	/	/	/
0	**2774/625**	/	/	/	/
0	**8936/3805**	/	/	/	/

$\beta(x,Q_p)=0$, Donc $\{\bar{x},Q_f\}$ est optimal.

CHAPITRE IV

CONTRÔLE OPTIMAL, PRÉSENTATION ET THÉORIES

INTRODUCTION

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable *t* qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.

Les applications sont très nombreuses et dans des domaines très divers, comme la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, économie, etc...

L'objectif de la théorie du contrôle peut être :

- de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbations ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation
- de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, et c'est l'objectif principal de ce chapitre.

Du point de vue mathématique un système contrôlé est un système dynamique dont l'état est décrit par une fonction inconnue dite fonction d'état (ou variable d'état), qui vérifie une ou plusieurs lois d'évolution (très souvent ce sont des équations différentielles, mais d'autres types d'équations peuvent être envisagées : équations intégrales, aux différences, stochastiques, etc...). On supposera qu'on peut agir sur le système (en fait sur l'état du système) via une ou plusieurs fonctions qu'on appelle des contrôles (ou commandes). Un autre type de problème qu'on peut rencontrer, mais qui revient au même sur le plan mathématique, est le fait que le système en lui-même est mal connu, c'est à dire qu'il y a un ou plusieurs paramètres qui ne sont pas connus, ou qui sont inaccessibles ou difficile à mesurer directement. On cherche alors à déduire ces paramètres en les voyant comme des contrôles et en observant l'état du système; c'est ce qu'on appelle le problème inverse.

IV.1 THÉORIES DU CONTRÔLE OPTIMAL ET DES SYSTEMES DE CONTRÔLE :

Le problème général du contrôle optimal est constitué des données suivantes :

1. **Objet de la commande :**

Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système dépendant de celles-ci est une tâche très importante c'est l'étape de la modélisation mathématique.

Les variables nommées « variables d'états » seront notées x_i , $i = 1 \ldots n$.

Le système évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de $t : x_i(t)$.

Les n variables d'états vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps $T = [t_0, t^*]$; ce sont des équations de la forme générale :

$$\dot{x}_i = f^i(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m), i = 1 \ldots n$$

Les variables de contrôle seront notées $u_j(t)$, $j = 1, \ldots, m$.

2. Conditions initiales du système :

La condition de départ du système, $x_0 = x(t_0)$ est un vecteur dans un plan de phase.

En réalité, les composantes de $x(t)$ et de x_0 peuvent représenter physiquement : la vitesse, la position , la température et d'autres paramètres mesurables.

3. Le but de la commande :

Dans un problème de contrôle optimal, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la condition initiale $x_0 = x(t_0), (x_0 \in M_0)$ à une autre position $x^* = x(t^*), (x^* \in M_1)$ où :

M_0 est l'ensemble de départ,

M_1 est l'ensemble d'arrivée.

4. Classes de commandes admissibles :

L'ensemble U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être non-borné, borné, ou du type bang-bang défini ci-dessous.

- **Commande bornée :**

La commande $u(t)$ est dite commande bornée si elle peut être minorée et majorée par

Des constantes a_j et b_j , par la forme suivante :

$a_j \leq u_j(t) \leq b_j$, $j = 1, \ldots, m$, $t \in \left[t_0, t^*\right]$.

Si de plus $a_j \leq u_j(t) \leq b_j$, et qu'on peut remplacer u_j par v_j en posant :

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$$

Et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$.

Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

- **Commande Bang-Bang :**

Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle bang-bang, si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \ldots, m$; on a : $|u_j(t)| = 1$.

5. Critères de qualité :

L'objectif lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui indique que le système atteint un état désirable.

Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système.

Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est également décrit par la formule suivante :

$$J(x,u) = g\left(t^*, x^*\right) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t,x,u)dt$$

Cette fonctionnelle comporte deux termes :

1. $g\left(t^*, x^*\right)$: est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t^* ; il a son importance lorsque t^* est libre, sinon il est constant.
2. $\int_{t_0}^{t^*} f_0(t,x,u)dt$: il dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables du contrôle u .

- Les variables nommées variables d'état seront notées $x_i, i = 1, \dots, n$. On a des systèmes qui évoluent dans le temps ; donc les x_i sont des fonctions de temps notées :

$$x_i(t), t \in [t_0, t^*]$$

- Les composantes du contrôle seront notées $u_j(t), j = 1, \dots, m$ elles doivent êtres intégrables par rapport à t.
- Les n variables d'état vont être gouvernées par n équations différentielles du premier ordre, nommées équations d'état de la forme :

  $\dot{x} = f(t, x, u)$, $t \in [t_0, t^*]$.

  $\dot{x}$ est le vecteur dérivé par rapport au temps t de toutes les composantes de x.

IV.2 POSITION DU PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL :

Dans cette partie nous présentons la formule générale d'un problème de contrôle optimal.

Pour tout contrôle $u \in U$, on définit le coût de la trajectoire associée à $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ par :

$$J(x, u) = g(t^*, x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt,$$

avec U l'ensemble des contrôles admissibles sur $[t_0, t^*]$.

Donc la formule générale du problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} J(x, u) = g(t^*, x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t)) dt \to \min_u & (1), \\ \dot{x}_u(t) = f(t, x(t), u(t)) & (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 & (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 & (4), \\ u \in U, \quad t \in I = [t_0, t^*] & (5). \end{cases} \qquad (47)$$

Où :

- M_0 (ensemble de départ) et M_1 (ensemble d'arrivée) : sont des sous-ensembles de $\mathfrak{R}^n$,
- I un intervalle de $\mathfrak{R}$,
- $x_0 = x(t_0)$ est la position initiale du système (2),
- $x(t^*)$ est sa position terminale.

En pratique la position du système peut représenter la vitesse, la position, la température …etc.

Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x(t)$ solutions de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, qui minimise le coût $J(x,u)$ en satisfaisant les contraintes.

2.1Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque :

$f_0(t,x,u)=1,\ g(t^*,x^*)=0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression :

$$\min_u \int_{t_0}^{t^*} 1dt .$$

2.2 Coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_u g(t^*,x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t,x,u)dt.$$

Remarque 2.1 :

Il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et dans ce cas on parlera d'un problème en temps et en coût optimal.

2.3 Problème de Mayer-Lagrange :

L'objectif du problème de Mayer-Lagrange est de minimiser le coût :

$$J(t^*,u) = g(t^*,x^*) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t,x,u)dt .$$

- Lorsque $g = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle $J \Rightarrow$ on parlera d'un problème de Lagrange.
- Lorsque $f_0 = 0 \Rightarrow$ on parlera d'un problème de Mayer.

IV.3 CONTRÔLABILITÉ :

La contrôlabilité est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle optimal, elle a été introduite par Kalman en 1960 pour des systèmes linéaires de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener en temps fini d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit (voir figure 1.1)

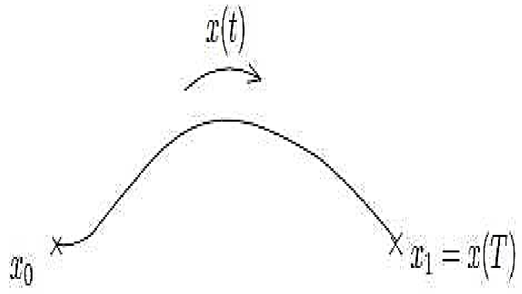


Figure 1.1 Problème de contrôlabilité

Dans cette section, nous allons étudier le problème de contrôlabilité en présentant certaines de ses propriétés.

Définition 3.1:

Considérons le système contrôlé (48) :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathrm{I} \ ; \ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{48}$$

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t^* > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t^*) = \{x_u(t^*), u \in U\}.$$

Où $x_u(t^*)$ est la solution du système (48) associé au contrôle u .

Autrement dit : $Acc(x_0, t^*)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.2) au temps t^*, lorsqu'on fait varier le contrôle u (voirfigure1.2**)**

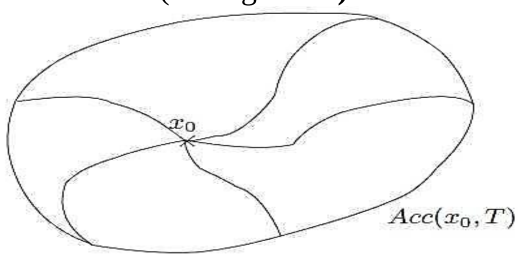


Figure 1.2 Ensemble accessible

3.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires :

La formulation mathématique d'un système de contrôle linéaire est la suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \ , \ x(t_0) = x_0, \forall t \in \mathrm{I}.$$

Où :

I : Est un intervalle de $\Re$,

A , B et r sont trois applications localement intégrables sur I à valeurs respectivement dans $M_n(\Re), M_{n,m}(\Re)$ et $\Re^n$.

$M_n(\Re)$ est l'ensemble des matrices réelles de dimension n ,

$M_{n,m}(\Re)$ est l'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes.

L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables localement bornées sur I à valeurs dans un sous ensemble $U \subset \Re^m$.

Soit $F(.) : \mathrm{I} \to M_n(\Re)$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ défini par :

$$\begin{cases} \dot{F} = A(t)F(t), \\ F(t_0) = \mathrm{I}d, \end{cases}$$

Où $\mathrm{I}d$ désigne la matrice identité.

Pour tout contrôle u le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$, $x(0) = x_0$ admet une unique solution $x(.) : \mathrm{I} \to \Re^n$ absolument continue donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t^*} F(t)F(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \ t \in \mathrm{I}.$$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la solution du système s'écrit comme suivant :

$x(t) = F(t)\int_{t_0}^{t^*} F(s)^{-1} B(s)u(s)ds$, elle est linéaire en u .

Le théorème suivant donne une condition générale de la contrôlabilité des systèmes linéaires.

Théorème 3.1 :

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si :

La matrice $C(t^*) = \int_{t_0}^{t^*} F(t)^{-1} B(t)B'(t)F(t)^{-1} dt,$ dite « matrice de contrôlabilité » est inversible.

Remarque 3.1 :

Cette condition ne dépend pas de x_0, c'est-à-dire que si un système linéaire est contrôlable en temps t^* depuis x_0, alors il est contrôlable en temps t^* depuis tout point.

3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes :

Le système (1.2) est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t.

Dans ce cas, la matrice $F(t) = e^{At}$, et la solution du système associée au contrôle u s'écrit de la manière suivante : $\forall t \in \mathrm{I}\ x(t) = e^{At}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t^*} e^{-As}(B(s)u(s) + r(s))ds\right)$.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contraintes sur le contrôle.

Théorème 3.2 :

On suppose que $U = \mathfrak{R}^m$. Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps t^* si et seulement si la matrice $C = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est de rang n.

Remarque 3.2 :

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition « rang $C = n$ »est appelée condition de Kalman.

Remarque 3.3 :

Dans le cas où le contrôle u est contraint, c'est-à-dire il appartient à un sous ensemble $U \subset \mathfrak{R}^m$, les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A.

IV.4 PRINCIPE DU MAXIMUM DE PONTRYAGIN :

Le principe du maximum de Pontryagin a été formulé par le mathématicien russe Lev Semenovich Pontryagin en 1956, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations.

Il donne une condition nécessaire d'optimalité, il a été établi à l'origine pour calculer la trajectoire en temps minimal pour l'envoi d'une fusée sur la lune.

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} J(t^*,u) = g(t^*,x(t^*)) + \int_{t_0}^{t^*} f_0(t,x(t),u(t))dt \to \min_u & (1), \\ \dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)) & (2), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 & (3), \\ x(t^*) = x_1 \in M_1 & (4), \\ u \in U, \quad t \in I = [t_0,t^*] & (5). \end{cases} \qquad (49)$$

Avant d'énoncer ce principe, nous allons introduire certaines définitions et propriétés essentielles :

Définition 4.1 :

Le contrôle u est dit extrémal sur $[t_0,t^*]$; si la trajectoire du système (2) du problème de contrôle (49) associé à u vérifie $x(t) \in \partial Acc(x_0,t^*)$, $t \in \mathrm{I} = [t_0,t^*]$

Définition 4.2 :

Un contrôle $u_0(t), t \in [t_0,t^*]$ est dit optimal si $u^0(t)$ est extrémal et $J(u^0(t)) < J(u(t))$ pour tout contrôle extrémale (linéaire) $u(t), t \in [t_0,t^*]$

Théorème 4.1 :

Considérons le système $\forall t \in \mathrm{I}$, $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $x(t_0) = x_0$

Supposons que le domaine des contraintes noté Ω est compact. Soit $t^* > 0$. Le contrôle u est extrémale sur $\mathrm{I} = [t_0,t^*]$ si et seulement si il existe une solution non triviale $p(t), t \in \mathrm{I}$, de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que :

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{u \in U} p(t)B(t)u \qquad (50)$$

pour presque tout $t \in [t_0,t^*]$.

Définition 4.3 :

Le vecteur $p(t) \in \Re^n$ est appelé « Vecteur adjoint ».

Dans ce cas, la fonction $\gamma(t) = p(t)B(t)$ est appelée « Fonction de commutation »

Définition 4.4 :

Le temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t), t \in [0, T]$ change de signe est appelé «Temps de commutation».

Théorème 4.2 : (Principe du Maximum de Pontryagin)

Considérons le système de contrôle dans $\Re^n$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{51}$$

Où :

$f : \Re \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$ De classe C^1, les contrôles sont des applications mesurables bornées à valeurs dans $U \subset \Re^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de $\Re^n$.Notons par U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps t. On définit le coût comme suit :

$$J(t^*, u) = \int_{t_0}^{t^*} f_0(t, x(t), u(t))dt + g(t^*, x(t^*)),$$

Où $f : \Re \times \Re^n \times \Re^m \to \Re^n$ et $g : \Re \times \Re^n \times \Re^m \to \Re$ de classe C^1, $x(.)$est la solution de (1.51) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant :

Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût J . Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(.)$ est optimal sur $[t_0, t^*]$, alors il existe une application $p(.) : [t_0, t^*] \to \Re^n$ absolument continue, appelé «vecteur adjoint », et un réel $p^0 \leq 0$ tel que le couple $(p(.), p^0)$est non trivial et tel que pour presque tout $t \in [t_0, t^*]$,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{52}$$

$$\dot{p} = \frac{-\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \tag{53}$$

Où $H(t, x, p, p^0, u) = p(t) f(t, x, u) + p^0 f^0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[t_0, t^*]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u). \quad (54)$$

Si de plus le temps final pour joindre M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t^*

$$\max_{u \in U} H(t^*, x(t^*), p(t^*), p^0, u) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t^*, x(t^*)). \quad (55)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\Re^n$ ayant des espaces tangents en $x(t_0) = x_0 \in M_0$ et $x(t^*) = x_1 \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou l'une des deux)

$$p(0) \perp t^*_{x(0)} M_{0,} \quad (56)$$

$$p(t^*) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t^*, x(t^*)) \perp t^*_{x(t^*)} M_1. \quad (57)$$

Ces deux conditions sont appelées « Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint »

Remarque 4.1 :

Si f et f_0 ne dépendent pas du temps t, d'une autre manière si le système considéré est autonome, alors l'Hamiltonien H ne dépend pas de t et on a :

$$\forall t \in [t_0, t^*], \quad \max_{u \in U} H(t, x(t), p(t), p^0, u) = Cste.$$

- La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum.
- Lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximisation (54) devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$

CHAPITRE V

LOGICIEL MATLAB ET APPLICATION INFORMATIQUE.

INTRODUCTION :

La programmation informatique est un ensemble d'outils et de techniques permettant de résoudre des problèmes mathématiques par ordinateurs, elle sert à trouver une solution optimale de n'importe quel type de problème.

Le processus de résolution un problème mathématique exige un grand nombre de calculs donc il est mieux de l'exécuter par machine.

Pour cela on a choisi le logiciel MATLAB qui fournit environnement de calcul matriciel simple, efficace, interactif permettant la mise en œuvre des algorithmes développés dans le cadre des projets linpack et eispack.

V.1 DEFINITION DE LOGICIEL MATLAB :

Le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory) est spécialisé dans le domaine du calcul matriciel numérique. Tous les objets définis dans le MATLAB les sont donc au moyen des vecteurs et des matrices/tableaux de nombres. Un ensemble important d'opérateurs et de fonctions de MATLAB de base facilitent leur manipulation et des opérations comme par exemple le produit et l'inversion matricielles (inv), la transposition (') ou encore le calcul des valeurs propres, font partie de la bibliothèque standard. D'autres fonctions servant à la création et à la manipulation de matrices et de tableaux (diag, rand, ones, zeros, linspace) sont également disponibles en nombre.

L'environnement MATLAB se présente sous la forme d'un espace de travail (Workspace), ou un interpréteur de commandes exécute des opérations et des fonctions de MATLAB. Les sources de celles-ci sont disponibles, écrites en " langage " MATLAB, voir en C ou en Fortran. L'utilisateur peut les modifier, mais en s'en inspirant, il peut surtout créer et rajouter ses propres fonctions.

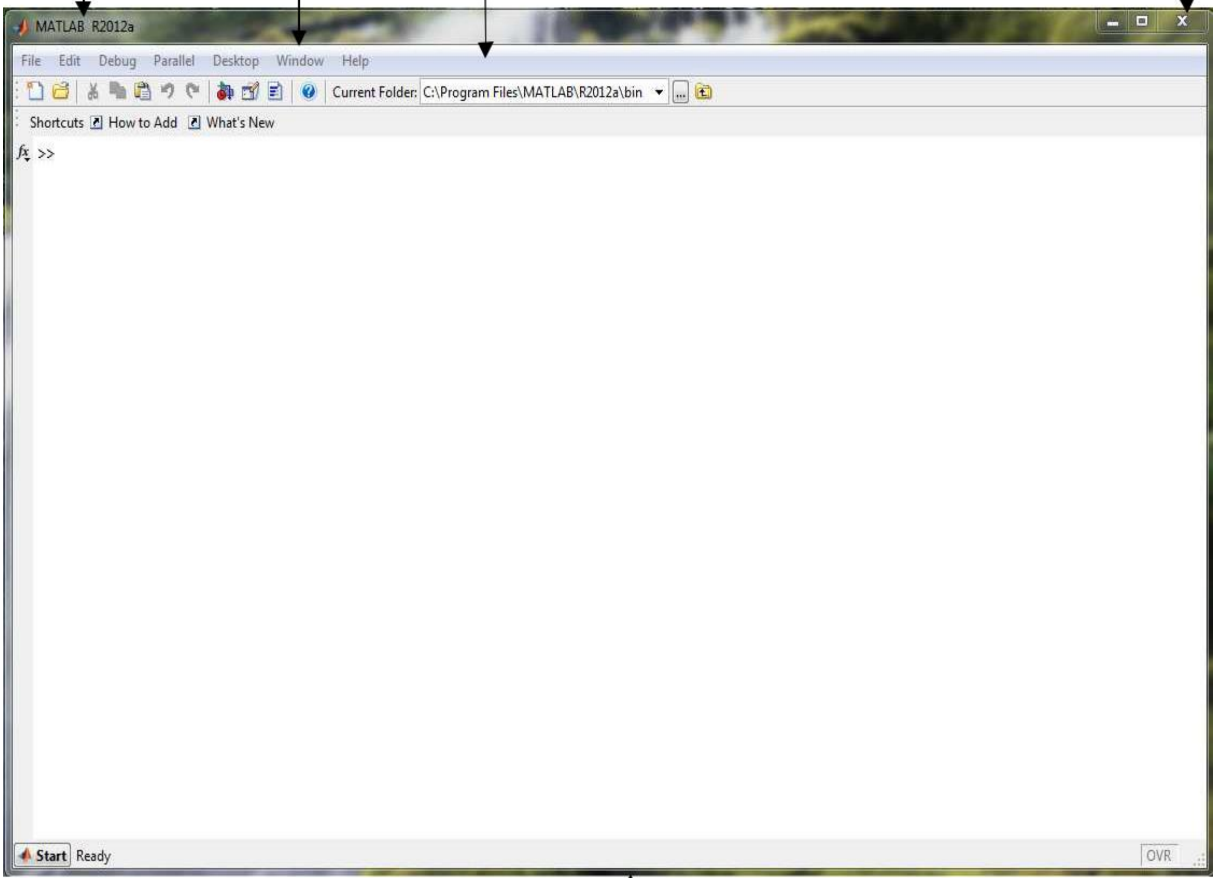
Le "langage" MATLAB contient un minimum de structures de programmation (structure itérative, structure conditionnelle, sous-routine) mais reste très rudimentaire. L'avantage est qu'il est très simple et très rapide à programmer, offrant une grande tolérance (syntaxe simple, pas de définition des types, etc.), ce qui permet un gain appréciable en temps de mise au point. L'ingénieur peut par ce moyen être plus efficace dans l'analyse d'un problème, en concentrant ses efforts sur celui-ci et non pas sur l'outil servant à le résoudre.

V.2 DESCRIPTION DE LA FENETRE MATLAB :

La barre de titre :

La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de titre, contenant à sa gauche une icône et à sa droit les trois boutons << mise en icône>>, <<minimisation/maximisation>> et <<fermeture>>.

Barre de titre Barre de menu Barre d’outils fermeture



Barre d’état

FIG 1 : La fenêtre principale de logiciel MATLAB.

La barre du menu : Contient 5 fenêtres (en général) :

- File (fichier) permet d’obtenir l’éditeur de programme ;
- Edit (Edition) permet de couper / coller dans la ligne de commande et autre ;

- Debug permet l’exécution d’un programme et autres ;
- Window (fenêtre) permet le passage aux différentes du logiciel ;
- Help (aide) accède au menu d’aide.

La barre d’outils : La barre d’outils en 9, qui sont souvent des raccourcis de fonctions contenues dans les menus. De gauche à droit (entre autre) :

- Ouvrir un nouveau fichier dans l’éditeur ;
- Rappeler un ancien fichier dans l’éditeur ;
- Couper ;
- Copier ;
- Coller ;
- Annuler ;
- Appeler l’aide.

La fenêtre de commande : Elles se divisent en deux zones :

- La zone historique, qui ne peut être modifiée, mais dont on peut copier des pattiers ;
- La zone de commande éditable.

La zone de commande permet (comme le nom l’indique) de taper une commande qui sera accepté à l’aide de touche <return> ou <entrée>.

V.3 MÉTHODE DE TRAVAIL :

Edition et sauvegarde des fichiers MATLAB : Dans un premier temps, on peut se contenter d’introduire ses commandes une à une au niveau de l’espace de travail ou elles sont interprétées directement.

Cependant, par la suite, il est beaucoup plus pratique d´écrire sa séquence de commandes complété au moyen d’un éditeur, puis de sauver le tout dans un fichier avec l’extension « .m ». Cette séquence pourra alors être exécutée dans MATLAB par simple introduction du nom du fichier.

Aide en ligne : En plus de l’aide de Window, une aide en ligne est disponible pour chaque commande de MATLAB. Il suffit d’introduire : « help nom de commande ».

V.4 CRÉATION DE FICHIERS DE COMMANDE ET DE FONCTIONS UTILISATEUR:

Fichiers de commande ("script files") : Un fichier de commande (script file) est un fichier ASCII d'extension « .m » contenant une suite de commandes MATLAB. Il être exécuté directement en tapant simplement son nom dans l'espace de travail MATLAB.

Fonctions : De nouvelles fonctions peuvent être ajoutées à MATLAB par l'utilisateur. Il suffit de créer un fichier de nom

nom_ de_ function.m

Contenant les commandes à exécuter et dont l'entête a le format :
function [liste des arguments de sortie] = nom de fonction (liste des arguments d'entrée). Contrairement aux fichiers de commande, les variables intervenant dans les fonctions sont locales. Les commentaires documentant les fonctions peuvent être insérés en les faisant précéder du symbole %.*

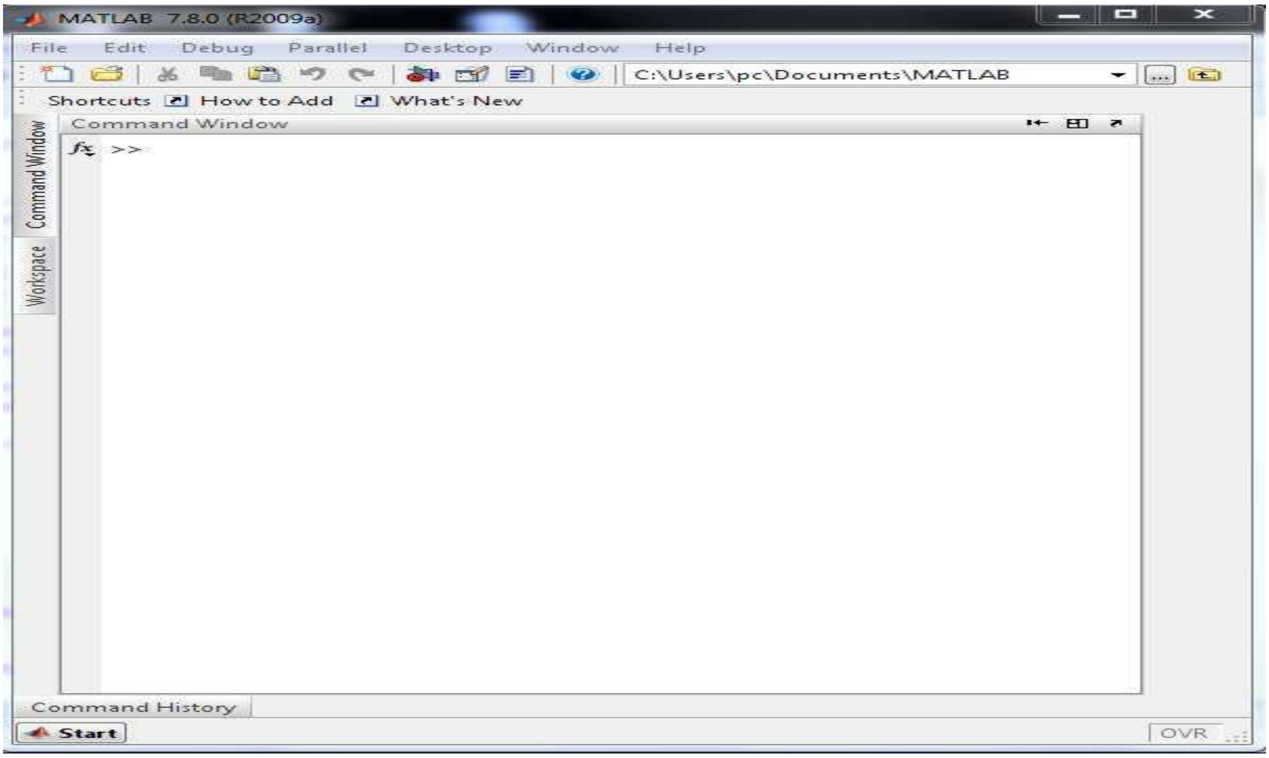


FIG 2 : La fenêtre d'édition de fichier.

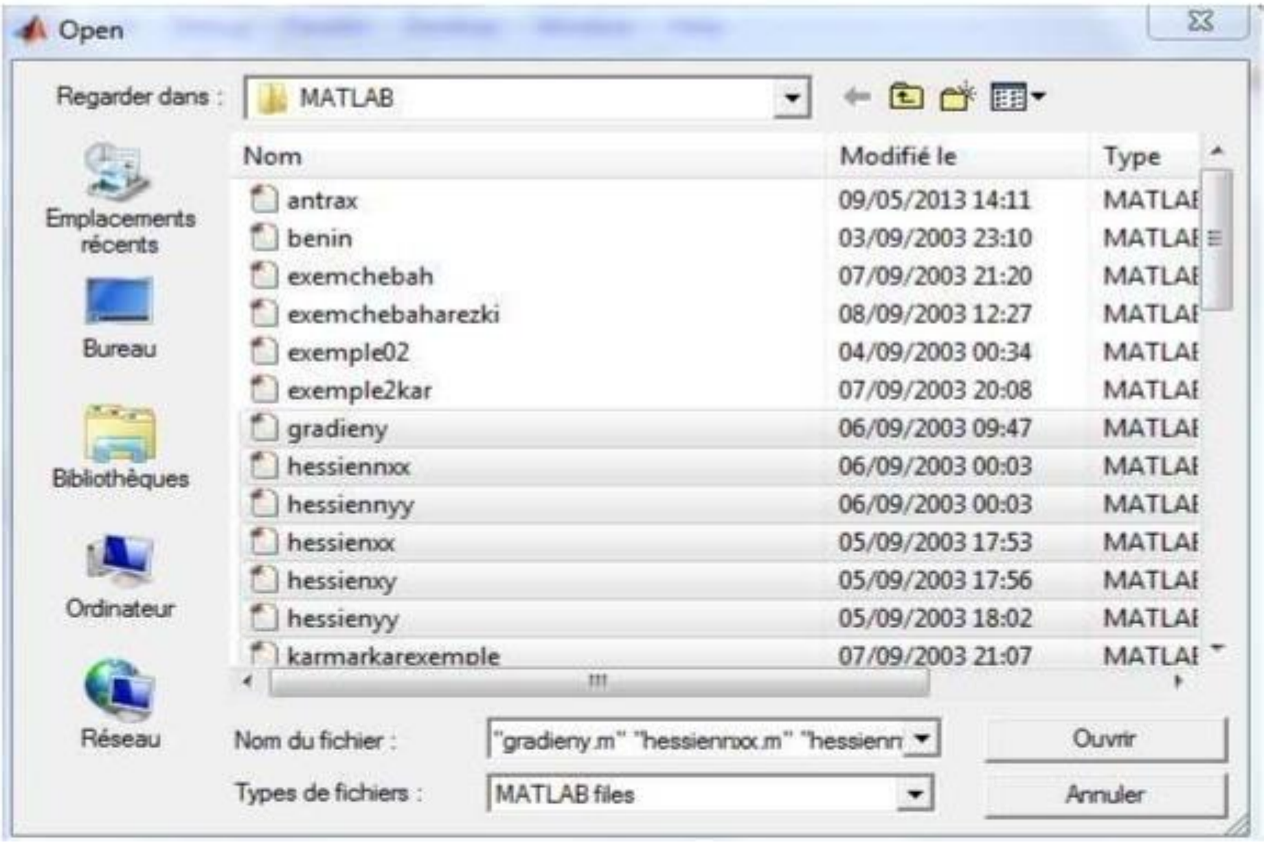


FIG 3 : La fenêtre d'édition de fichier.

V.5 RÉSOLUTION DES EXEMPLES ETUDIÉS SOUS MATLAB :

Voici les figures suivantes qui nous montrent la résolution des problèmes étudiés dans les chapitres précédents (**I, II et III**) sous le logiciel MATLAB :

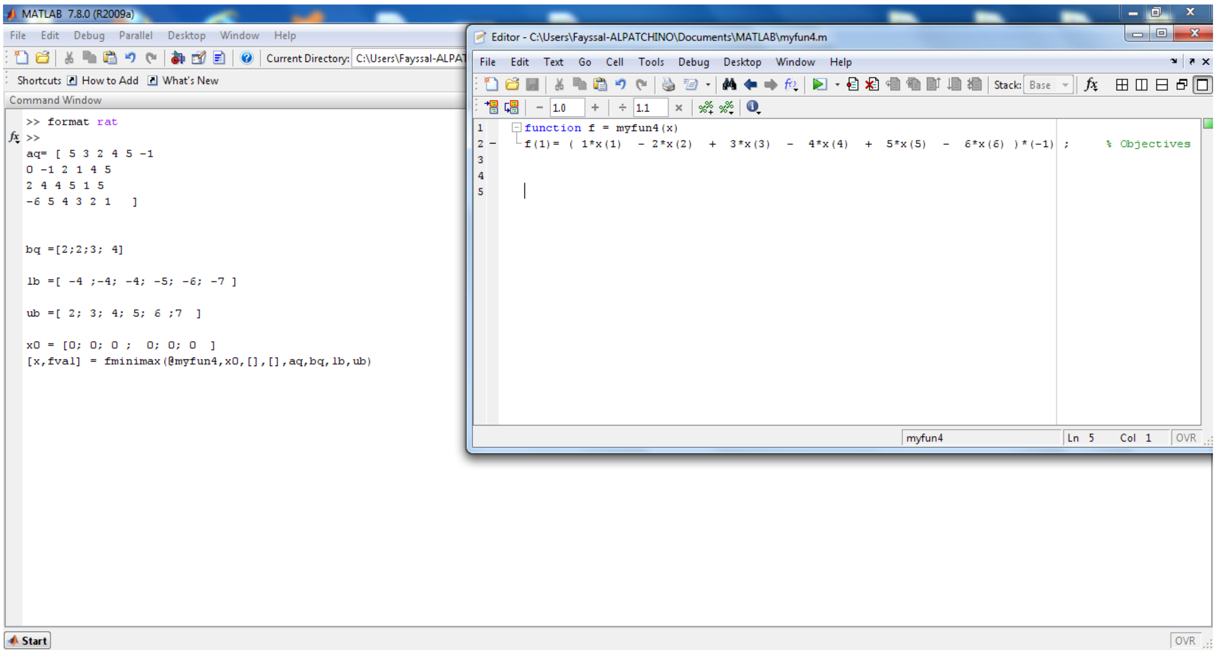


FIG 4.1 : problème I résolu sous MATLAB.

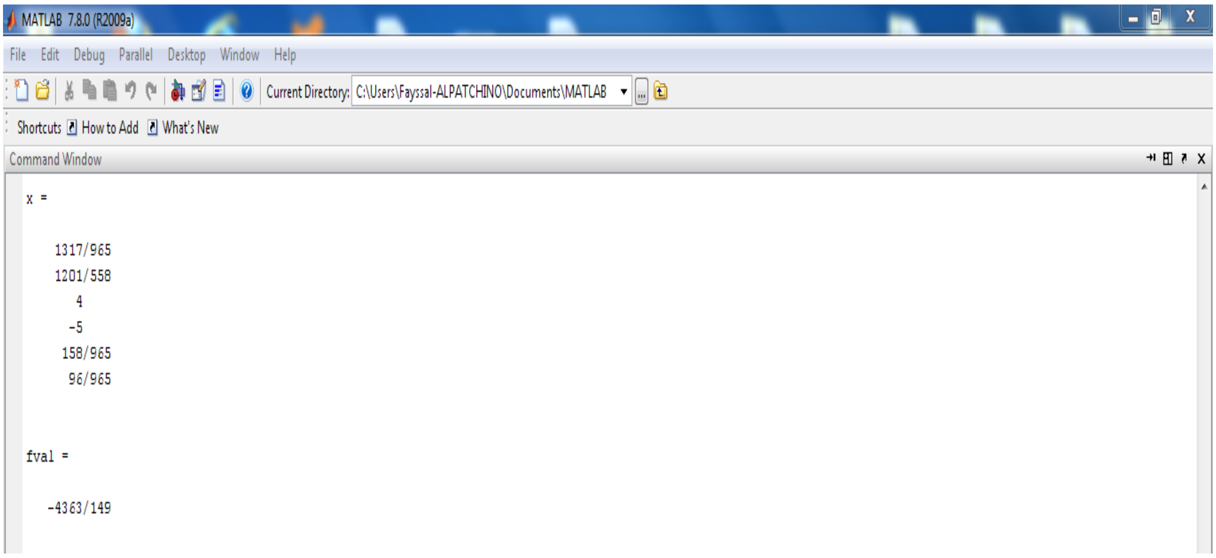


FIG 4.2 : problème I résolu sous MATLAB.

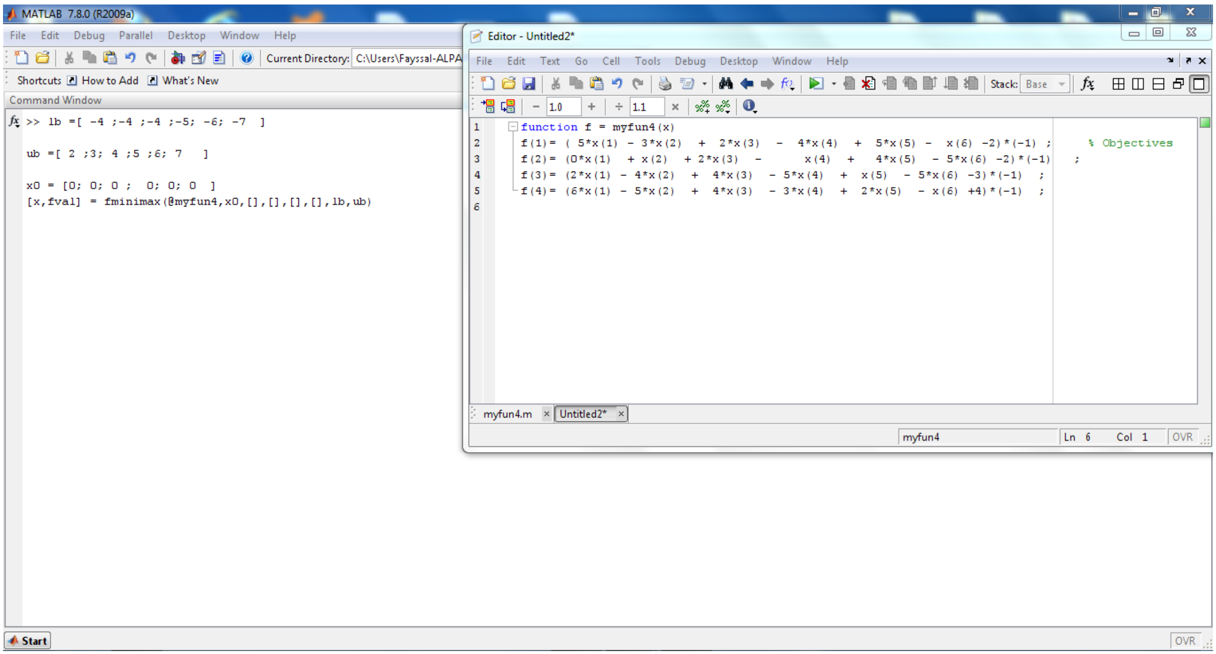


FIG 5.1 : problème II résolu sous MATLAB.

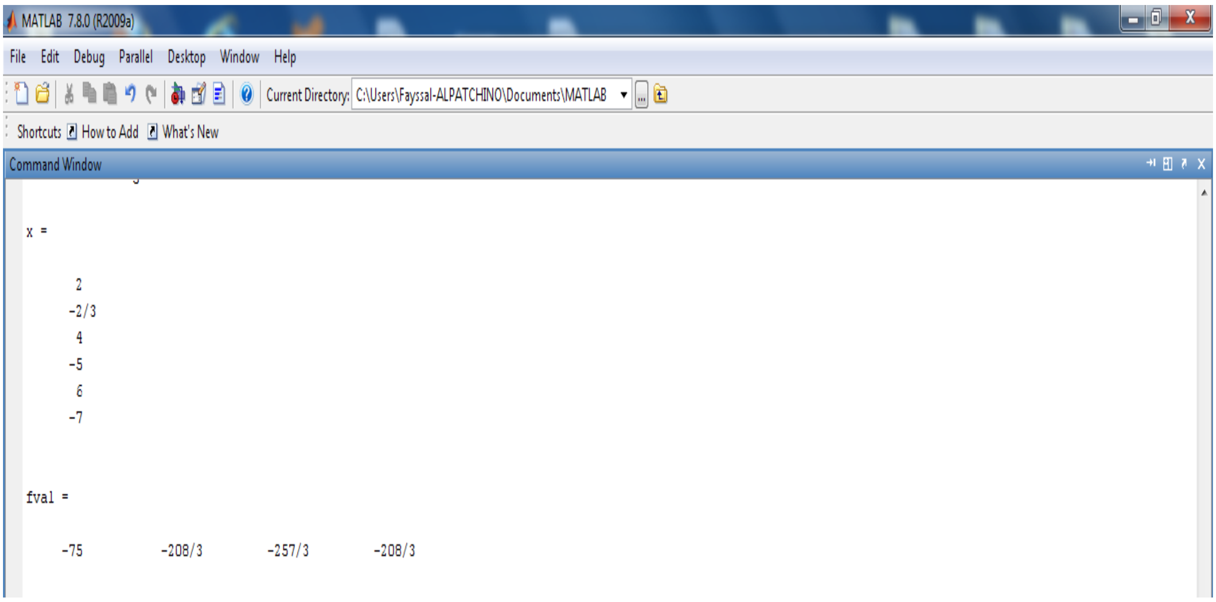


FIG 5.2 : problème II résolu sous MATLAB.

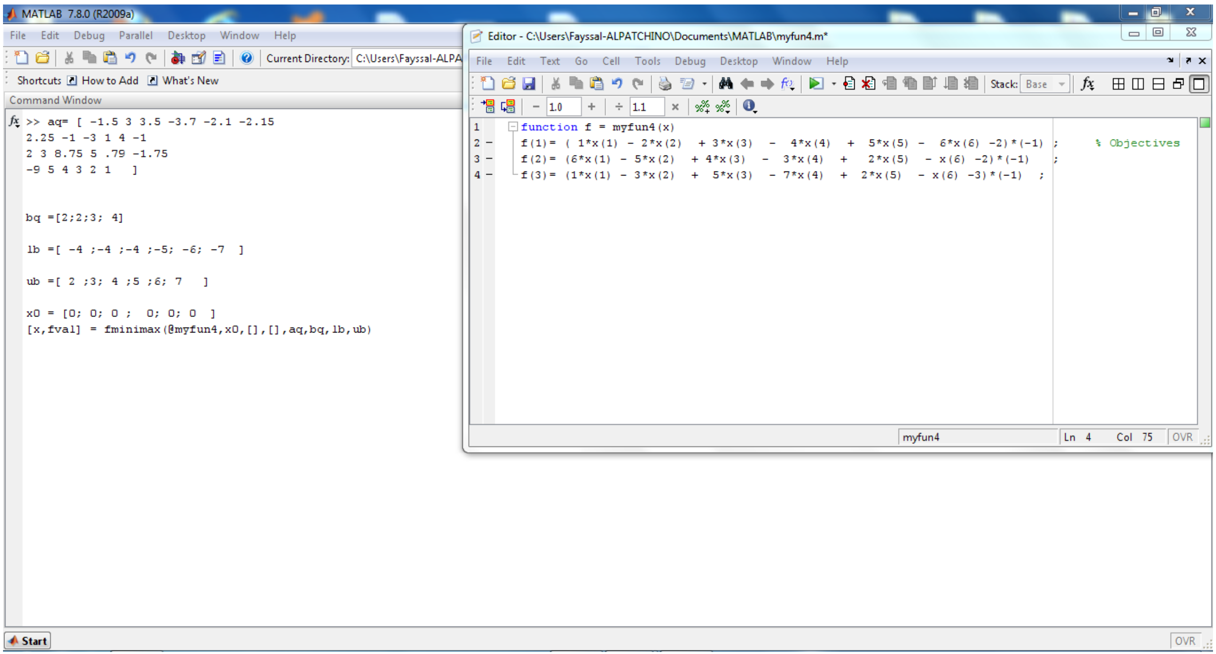


FIG 6.1 : problème III résolu sous MATLAB.

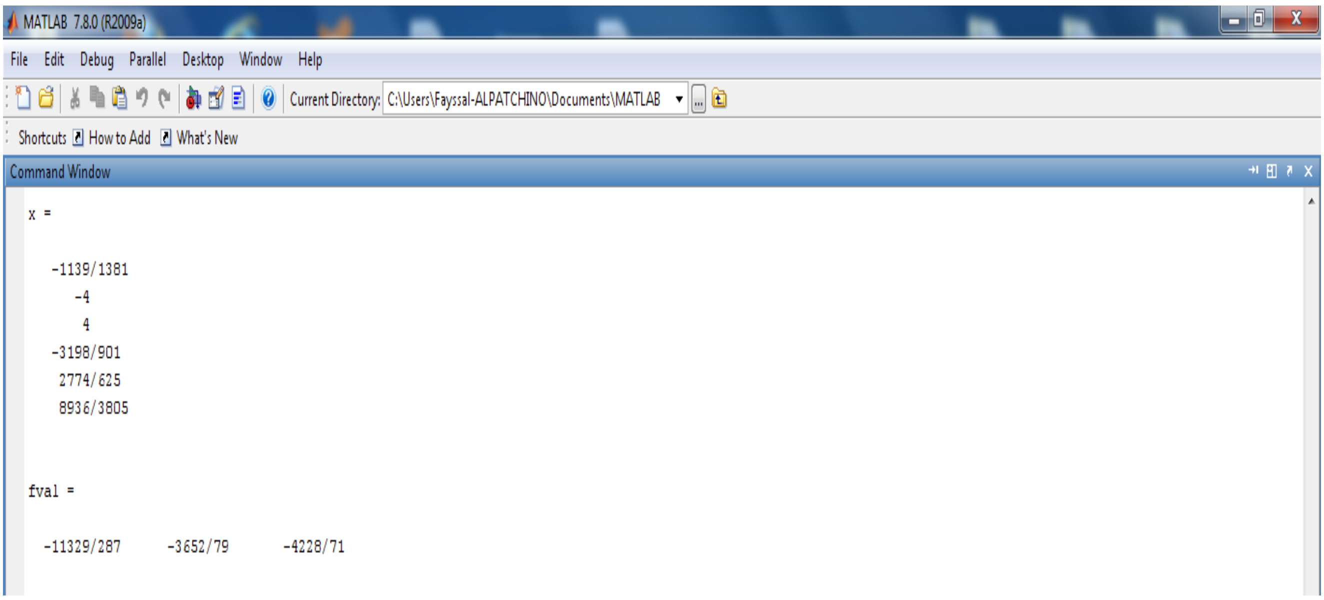


FIG6.2 : problème III résolu sous MATLAB.

COCLUSION GÉNÉRALE

Notre but dans le cadre de ce mémoire était la résolution de problème **min-max** avec la méthode primal en programmation linéaire et étudié la théorie du contrôle optimal.

En premier lieu, nous avons introduit la méthode ADAPTEE pour la résolution d'un problème de programmation linéaire.

Nous nous sommes intéresses ensuite à la résolution du problème **min-max** avec des contraintes simples et généralisées en programmation linéaire avec la méthode ADAPTEE ainsi que des exemples d'applications.

Dans le chapitre 4, nous avons étudié la théorie du contrôle optimal tout en donnant ses différentes notions à savoir la contrôlabilité et le Principe du Maximum de Pontriaguine. En tirant profit de plusieurs recherches déjà effectuées à ce sujet, nous avons clarifié et rappelé certaines définitions, extensions et généralisations ainsi que leurs paramètres fondamentaux et quelques résultats théoriques.

Le dernier chapitre du travail a été consacré à définir le logiciel MATLAB, ainsi que la résolution des problèmes étudies sous MATLAB.

BIBLIOGRAPHIE

[1]-GABASOV.R, Adaptive method of solving linear programming problems, Preprint Seies of University of Karlsruhe, institute for Statistics and Mathematics 1980.

[2]-CHEBBAH MOHAMMED : RESOLUTION ET IMPLEMENTATION D'UN PROBLEME MIN-MAX EN CONTROLE OPTIMALE 2006.

[3]-HAMDOUS SALIHA : METHODE DE RESOLUTION DE PROBLEME MIN-MAX EN PROGRAMMATION LINEAIRE. MEMOIRE DE MAGISTER UMMTO/07/11/2001.

[4]-BELKACEM.RACHID Thèse : Résolution d'un problème min-max en programmation linéaire par la méthode adapté 2016.

[5]-AIDENE MOHAMED, LOUADJ Kahina, Un problème de contrôle optimal avec une entrée libre. Exposé SMAI'2011.

[6]-JEAN-Thierry LAPRESTE, introduction à MATLAB, édition Ellipses,1999.

[7]-Aderian Biran & Mosche Breiner, MATLAB pour l'ingénieur, version 06 et 07 éditions Pearson (2004).

[8]-M.AIDENE et O.OUKACHA Programmation linéaire Recherche Opérationnelle 2005 Édition page bleu.