

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mouloud MAMMARI de Tizi-Ouzou

Faculté de Génie de la Construction

Département de Travaux Publics

Polycopié de Cours

Méthode des Eléments Finis

Auteur : Dr HELLAL Ourida ép SFAKSI

Destiné aux : Etudiants du Master I

Département : Travaux Publics

Spécialité : Voies et Ouvrages d'Art

Année : 2024-2025

Table des matières

Préambule	1
 Chapitre I : Introduction à la Méthode des Eléments Finis 	
I.1. Généralités	2
I.2. Définition de la Méthode des éléments finis	3
I.3. Bref historique de la méthode des éléments finis	3
I.4. Résolution d'un système par la méthode des éléments finis	3
I.5. Concept d'élément fini : Passage d'un milieu continu à un milieu discret.....	4
I.6. Types et forme des éléments finis	4
I.7. Conclusion	6
 Chapitre II : Rappels sur le calcul matriciel 	
II.1. Définition d'une matrice	7
II.2. Matrice ligne et colonne	7
II.3. Opérations matricielles	7
II.3.1. Egalité des matrices	7
II.3.2. Addition et soustraction de deux matrices	7
II.3.3. Produit d'une matrice par un scalaire	8
II.3.4. Produit de deux matrices	9
II.4. Transposée d'une matrice	9
II.5. Matrice spéciales	10
II.5.1. Matrice carrée	10
II.5.2. Matrice nulle	10
II.5.3. Matrice diagonale	10
II.5.4. Matrice identité	10
II.5.5. Matrice scalaire	11
II.5.6. Matrice triangulaire	11
II.6. Trace d'une matrice	11
II.7. Matrice Inverse	12

II.7.1. Matrice inverse et déterminant.....	12
II.8. Ecriture matricielle d'un système linéaire d'équations	13

Chapitre III : Méthode de rigidité directe

III.1. Introduction	14
III.2. Système à un ressort linéaire.....	14
III.3. Système à plusieurs ressorts linéaires	15
III.4. Assemblage des éléments dans le système de coordonnées globales.....	16
III.5. Application	17

Chapitre IV : Eléments finis barres

IV.1. Introduction.....	23
IV.2. Equation gouvernante.....	23
IV.3. Formulation de l'élément barre	24
IV.3.1. Discrétisation du système et détermination des déplacements	24
IV.3.2. Détermination des déformations	26
IV.3.3. Détermination de forces nodales	27
IV.4. Applications	28
IV.5. Structure plane à treillis	34
IV.5.1. Matrice de rigidité de l'élément en treillis.....	34
IV.5.2. Forces axiales	36
IV.5.3. Allongement dû aux forces axiales	37
IV.6. Applications	37

Chapitre V : Éléments finis poutres de Bernoulli-Euler

V.1. Introduction	52
V.2. Poutre de Bernoulli –Euler	52
V.2.1. Formulation des caractéristiques élémentaires	52
V.2.1. Formulation variationnelle.....	55
V.3. Etude d'un élément finis poutre	55
V.3.1. Approximation du champ de déplacement	55
V.4. Cisaillement et les Condition de frontière pour les poutres	58
V.5. Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre	59

V.6. Calcul des forces internes	60
V.7. Vecteur force dû à une charge répartie q	61
V.8. Élément fini poutre-barre	62
V.8.1. Transformation des coordonnées	62
V.9. Application	64

Chapitre VI : Formulation variationnelle du problème d'élasticité

VI.1. Introduction	78
VI.2. Formulation variationnelle	78
VI.2.1. Forme intégrale	79
VI.3. Méthode des résidus pondérés	80
VI.3.1.1. Résidus	80
VI.4. Discrétisation des formes intégrales	81
VI.4.1. Méthode de collocation par points	81
VI.4.2. Méthode de collocation par sous domaines	82
VI.4.3. Méthode Galerkin	83
VI.4.4. Méthodes des moindres carrés	84
VI.5. Forme intégrale faible	85
VI.6. Généralités sur les principes énergétiques	87
VI.6.1. Enoncé du principe énergétique	87
VI.6.2. Energie potentielle totale	88
VI.7. Dérivation de la matrice de rigidité par le principe de l'énergie potentielle minimale ...	89
VI.8. Notions de fonctions d'interpolation	90
VI.9. Transformation de charges réparties en charges nodales	91

Chapitre VII : Approximation ou fonctions d'interpolation

VII.1. Introduction	92
VII.2. Interpolation unidimensionnelle de type Lagrange	92
VII.3. Interpolation polynômiale	95
VII.3.1. Construction de la fonction de forme	95
VII.3.2. Fonction d'interpolation et élément de référence	96

VII.4. Polynôme de Lagrange (C^0).....	97
VII.5. Polynôme d'Hermite C^1	100
VII.6. Triangle de pascal	102
Bibliographie	106

Préambule

Le contenu de ce polycopie de cours de la méthode des éléments finis, est destiné aux étudiants de première année master en travaux publics spécialité : Voies et Ouvrages d'Art.

Le but de ce polycopie de cours est d'initier les étudiants au calcul des structures par la méthode des éléments finis. Pour l'assimilation du contenu de ce polycopie, l'étudiant doit avoir des connaissances de base qui sont les mathématiques, la résistance des matériaux et la mécanique des milieux continus. Ce dernier est composé de sept chapitres conformément au canevas de la formation.

Le premier chapitre porte sur l'introduction à la méthode des éléments finis, définition, domaine d'utilisation et les grands axes de la méthode des éléments finis.

Le deuxième chapitre est un rappel d'un ensemble de notions de calcul matriciel nécessaire et important pour l'étudiant avant d'aborder en calcul par éléments finis.

Le troisième chapitre présente la méthode de rigidité directe. Système à un ressort linéaire, système à plusieurs ressorts linéaires, assemblage, conditions aux limites et notion de degrés de liberté. On présente le concept de matrice de rigidité par élément finis associé au déplacement. La formulation de l'éléments ressort est prolongée à l'élément barre sollicité en traction ou en compression.

Le quatrième chapitre présente l'application de la méthode des éléments finis aux éléments barres. Formulation des caractéristiques élémentaires, matrice de rigidité, assemblage et résolution des systèmes. La transformation des coordonnées du repère local aux coordonnées du repère global est illustrée par des systèmes bidimensionnels.

Le cinquième chapitre porte sur l'étude des éléments finis poutre de Bernoulli-Euler. Formulation des caractéristiques élémentaires, matrice de rigidité, assemblage et résolution, calcul des efforts internes, en torsion, élément poutre-barre, prise en compte du cisaillement dans la poutre.

Le sixième chapitre présente la formulation variationnelle du problème d'élasticité, généralités sur les principes énergétiques, théorèmes variationnels, principe de l'énergie potentielle, dérivation de la matrice de rigidité par le principe de l'énergie potentielle minimale, notions de fonctions d'interpolation et transformation de charges réparties en charges nodales.

Le septième chapitre expose l'approximation ou fonctions d'interpolation tout en introduisant l'interpolation unidimensionnelle de type Lagrange, interpolation polynômiale : fonctions de formes, polynôme de Lagrange, polynôme d'Hermite, triangle de Pascal ainsi que les conditions de conformité.

Dans ce polycopié, on trouve dans chaque chapitre le cours détaillé avec des exercices corrigés.

Chapitre I

*INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES
ÉLÉMENTS FINIS*

Chapitre I

Introduction à la Méthode des Eléments Finis

I.1. Généralités

En mécanique de l'ingénieur, il existe trois domaines :

- *La mécanique expérimentale* : c'est l'observation directe en laboratoire des phénomènes physiques réels.
- *La mécanique appliquée* : elle consiste créer des modèles mathématiques pour représenter ces phénomènes : c'est la modélisation, elle opère le transfert des notions fondamentales de la mécanique théorique au mode d'ingénieurs.
- *La mécanique numérique* : étudie les méthodes qui permettent de résoudre les équations de la mécanique appliquée par voie numérique.

Pour la résolution de tous les problèmes physiques rencontrés dans la réalisation des projets divers (projets spatiaux, aéronautiques et nucléaire, des projets liés à notre environnement tels que la pollution thermique, acoustique ou chimique, gestion des nappes souterraine, prévisions météorologiques) (Gallagher, 1976 ; Dhatt et al., 2007), l'ingénieur a besoin d'un modèle pour simuler leur comportement. On appelle simulation ou la modélisation et la résolution d'un problème physique.

Pour certains systèmes, on dispose de théories de la formulation de l'élasticité et de théories qui en sont dérivées (théories des poutres et théorie des plaques et coques...), il n'en n'est pas de même de tous les systèmes physiques existant (Cazenave, 2010 ; Chateaufeuf, 2010).

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de ces systèmes physiques. Grâce à un modèle mathématique, il est possible de décrire la relation entre les variables connues qui peuvent être des propriétés physiques, dimensions d'un système, sollicitations, conditions aux limites, etc... et des variables inconnues qui peuvent être des déplacements, des vitesses, des températures, des contraintes, etc...). Ces variables caractérisent le système et peuvent dépendre des coordonnées d'espace \mathbf{X} (x , y , z) et de temps (Khennane, 1997 ; Chateaufeuf, 2010).

Cette relation constitue un système d'équations que nous nous proposons de résoudre. Ces d'équations rendent compte du comportement du système qui dépend du système lui-même soit discret ou continu.

Un système est *discret* s'il possède un nombre de *degrés de liberté fini*. Un système est *continu* s'il possède un nombre de *degré de liberté infini*.

Le nombre de degré de liberté du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir un mouvement à un instant t donné.

Le comportement d'un système discret est représenté par *un système d'équations algébriques*. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par *un système d'équations aux dérivées partielles ou intégrales – différentielles* associé à des conditions aux limites en espace et en temps (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007)

Les équations algébriques peuvent être résolues par les méthodes numériques, par contre le systèmes d'équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolues directement par des méthodes analytiques classiques. Il est nécessaire de *discrétiser* ces équations, c-à-dire de les remplacer par des équations algébriques (Reddy, 2005 ; Dhatt et al., 2007).

La méthode des éléments finis est une approche numérique qui peut être utilisée pour faire cette discrétisation.

I.2. Définition de la Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est l'une des techniques numériques les plus puissantes. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : phénomènes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définie dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes rencontrés (Dhatt et al., 2007).

Cette méthode consiste à diviser le domaine physique en plusieurs sous domaines appelés éléments finis de dimensions connues. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

I.3. Bref historique de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (MEF) prend ses origines dans le besoin de résoudre des problèmes complexes d'élasticité et d'analyse de structures en ingénierie civile et aéronautique. Son développement remonte aux travaux d'Alexander Hrennikoff (1941) et de Richard Courant (1942). En utilisant des approches différentes, ces deux pionniers partagent la même caractéristique essentielle à savoir la discrétisation par maillage du domaine continu en sous-domaines discrets, que l'on appelle éléments. C'est Olgierd Zienkiewicz de l'Imperial Collège qui synthétisa ces deux méthodes en ce que l'on peut appeler la méthode des éléments finis et qui fit la première formalisation mathématique de la méthode. (Manet, 2015)

Le développement de la méthode des éléments finis a véritablement commencé au milieu de années 1950 pour l'analyse structurale et aéronautique, et prit de l'ampleur à l'Université de Stuttgart grâce au travail de John Argyris et à Berkeley grâce au travail de Ray W. Clough.

L'ingénieur américain Ray William Clough semble-t-il le premier a utilisé le terme de méthode des éléments finis dans un article en 1960 intitulé « The Finite Element Method in Plane Stress Analysis ». Le mot rigidité (Stiffness) apparaissait dans le titre de son article « Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures » apparu en 1956 (et coécrit avec M. Turner, H. C. Martin et L. J. Topp).

I.4. Résolution d'un système par la méthode des éléments finis

Cette partie résume les étapes d'application de la méthode des éléments finis et les outils nécessaires pour sa mise en œuvre.

La résolution d'un problème physique par éléments finis suit les étapes suivantes (Dhatt et al., 2007 ; Craveur, 2008 ; Chateauneuf, 2010) :

Étape 1 : Discrétisation du domaine en sous domaine

La méthode des éléments finis consiste à diviser la structure en éléments. Par conséquent, la structure doit être modélisée avec des éléments finis appropriés. Le nombre, le type, la taille et la disposition des éléments doivent être définis.

Étape 2 : Sélectionnez un modèle d'interpolation ou de déplacement approprié.

Étant donné que la solution de déplacement d'une structure complexe dans des conditions de charge spécifiées ne peut pas être prédite avec précision, nous supposons une solution appropriée dans un élément pour approximer la solution inconnue. La solution supposée doit être simple d'un point de vue informatique, mais elle doit satisfaire à certaines exigences de convergence. En général, la solution ou le modèle d'interpolation est pris sous la forme d'un polynôme.

Étape 3 : Détermination de la matrice de rigidité des éléments et les vecteurs de charge.

Étape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.

Comme la structure est composée de plusieurs éléments finis, les matrices de rigidité des éléments individuels et les vecteurs de charge doivent être assemblés de manière appropriée et l'équation d'équilibre globale est formulée comme suit :

$$\{F\} = [K]_G \cdot \{U\} \quad (I-1)$$

Étape 5 : Résolution du système global

Résoudre l'équation du système globale (I-1) et définir le vecteur des déplacements nodaux inconnus

Étape 6 : Calculez les déformations et les contraintes des éléments.

A partir des déplacements nodaux connus trouvés, les déformations et contraintes des éléments peuvent être calculées en utilisant les équations nécessaires de la mécanique des solides.

Étape 7 : Interprétation des résultats : la détermination des zones dans la structure où se produisent de grandes déformations et de grandes contraintes est généralement importante pour prendre des décisions de conception. Les programmes informatiques du post processeur aident l'utilisateur à interpréter les résultats en les affichant sous forme graphique.

I.5. Concept d'élément fini : Passage d'un milieu continu à un milieu discret

Le passage d'un milieu continu à un milieu discret se fait par la discrétisation d'un domaine continu. Cette étape consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines (Éléments finis). Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. Chaque sous domaine est défini géométriquement par un nombre de nœuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets. (Figure I.1).

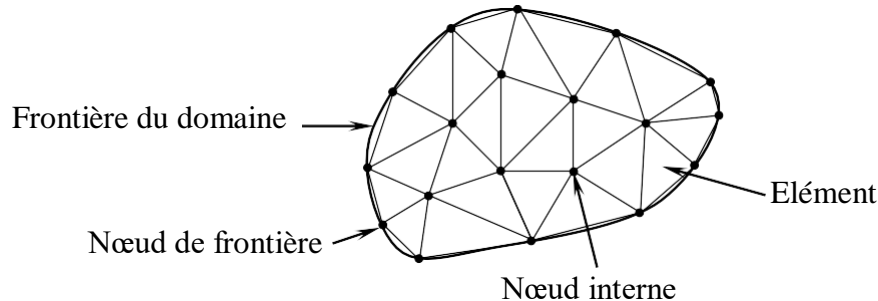


Figure. I.1. Discrétisation du domaine – éléments triangulaires

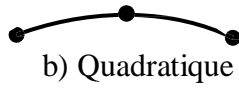
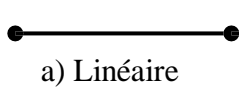
L'ensemble des éléments finis doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné

Le procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des nœuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les nœuds et les éléments d'une façon à assurer la continuité.

I.6. Types et forme des éléments finis

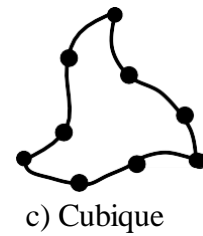
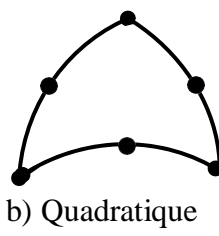
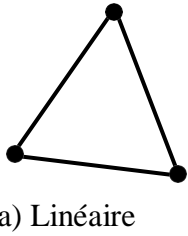
En fonction du problème physique traité, on peut être amené à utiliser plusieurs types et forme pour le résoudre. Dans le calcul et la modélisation par éléments finis, on utilise des éléments de dimensions 1D, 2D et 3D. chaque élément est identifié par : sa forme géométrique, ses nœuds et sa frontière : point, courbe ou surface, (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007 ; Chateaneuf , 2010). Les types et formes d'éléments finis utilisés en modélisation numérique sont représentés dans la figure I.2.

1- Les éléments unidimensionnels -1D :

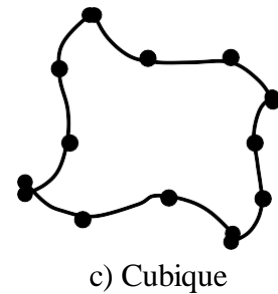
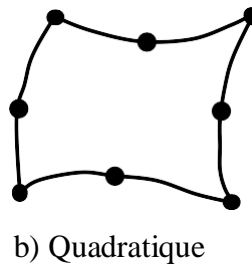
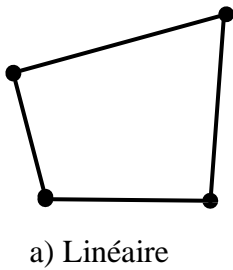


2- Les éléments bidimensionnels -2D :

➤ Eléments triangulaires :

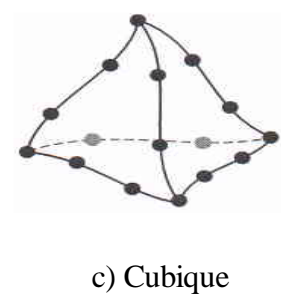
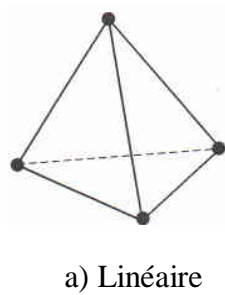


➤ Eléments quadrilatéraux :

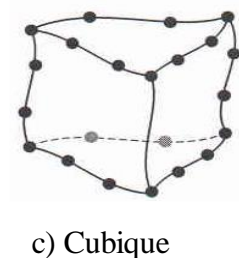
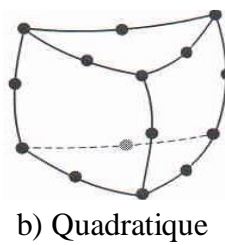
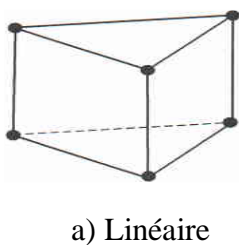


3- Les éléments tridimensionnels -3D

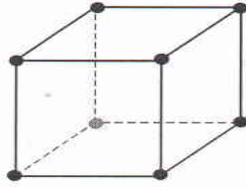
A-Tétraèdre



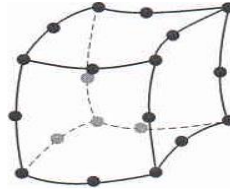
B-Prisme droit



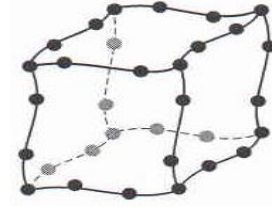
C-Hexaèdre



a) Linéaire



b) Quadratique



c) Cubique

Figure I.2. Quelques éléments finis classiques les plus utilisés en modélisation numérique.

Nota :

Le type d'élément dépend :

- De la forme (1-D, 2-D, 3-D, triangulaire, quadrilatère, tétraèdre, etc....),
- Du nombre de nœuds (3-nœuds, 4-nœuds et plus),
- Du type des variables nodales (degrés de liberté),
- Du type de fonctions d'interpolation,

On notera aussi que le degré de liberté pour chaque nœud peut varier selon le problème.

I.7. Conclusion

La méthode des éléments finis consiste en une approximation simple des variations inconnues pour transformer des équations algébriques. Elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles (mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité)
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires et des problèmes aux valeurs propres.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur ordinateur.

La méthode des éléments finis est un outil incontournable pour la modélisation des systèmes réels. Sa simplicité d'utilisation et ses très grandes possibilités rendent les outils pratiques et efficaces pour l'analyse des systèmes complexes. Elles se basent sur deux principes : découper pour mieux comprendre et approcher ce que l'on ne connaît pas.

Chapitre II

RAPPELS SUR LE CALCUL MATRICIEL

Chapitre II

Rappels sur le calcul matriciel

II.1. Définition d'une matrice

Une matrice d'éléments de R est un tableau à deux dimensions composé de n nombre de lignes et de m nombre de colonnes noté A_{nm} où chaque élément a_{ij} appartient à R . (Khennane, 1997 ; Cazenave, 2010 ; Morère, 2011).

$$[A]_{nm} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (\text{II-1})$$

Avec :

- n nombre de lignes
- m nombre de colonnes

II.2. Matrice ligne et colonne

Lorsque $m=1$ → la matrice est dite matrice colonne, elle est constituée d'une seule colonne.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad (\text{II-2})$$

Lorsque $n=1$ → la matrice est dite matrice ligne, elle est constituée d'une seule ligne.

$$[A] = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1m}]. \quad (\text{II-3})$$

Lorsque $n = m$ → la matrice est dite carrée ($n \times n$).

II.3. Opérations matricielles

II.3.1. Egalité des matrices

Deux matrices sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux.

$$A = B \Leftrightarrow \forall (i, j) \quad a_{ij} = b_{ij} \quad (\text{II-4})$$

II.3.2. Addition et soustraction de deux matrices

L'addition et la soustraction de deux matrices peuvent être calculées seulement sur des matrices du même ordre c.-à-d. même nombre de lignes et de colonnes.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II-5})$$

Propriétés :

- L'addition et la soustraction des matrices sont *commutatives* :

$$[A] - [B] = -[B] + [A] \quad (\text{II-6})$$

- L'addition et la soustraction des matrices sont *associatives* :

$$\{[A] + [B]\} - [C] = [A] + \{[B] - [C]\} \quad (\text{II-7})$$

Exemple

Soit les deux matrices suivantes :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$[A] + [B] = \begin{bmatrix} 2+0 & 5+3 & 4+4 \\ -1+2 & -3+5 & 0-2 \\ 0-1 & 1+0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriétés :

- Le produit de d'un nombre par une matrice :

1. $0 x [A] = 0$
2. $\alpha x (\beta x [A]) = (\alpha x \beta) [A]$
3. $(\alpha + \beta)[A] = \alpha x [A] + \beta x [A]$
4. $\alpha x ([A] + [B]) = \alpha x [A] + \alpha x [B]$

(II-8)

Remarque

- Si $[A]$ est une matrice carrée d'ordre n :
 $\det(\alpha[A]) = \alpha^n \cdot \det[A]$
- La matrice opposé : $-[A] = (-1) [A]$

II.3.3. Produit d'une matrice par un scalaire

Le produit d'une matrice par $[A]$ par un scalaire λ est une matrice (Cazenave, 2010 ; Ouinas, 2012).

$$[A] \cdot \lambda = \lambda \cdot [A] = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \lambda a_{n3} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix} \quad (\text{II-9})$$

Exemple

Soit les deux matrices $[A]$ et $[B]$: $[A] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ et $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Calcul de : $2[A] + 3[B]$

$$2[A] = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 3[B] = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2[A] + 3[B] = \begin{bmatrix} 17 & 10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

II.3.4. Produit de deux matrices

Soit la matrice $[A]$ d'ordre $(n \times p)$ et la matrice $[B]$ d'ordre $(p \times m)$. La matrice $[C]$ est le produit des matrices $[A] \times [B]$. La matrice $[C]$ est de l'ordre $(n \times m)$.

Donc : pour que la multiplication soit possible, il faut que le nombre de colonnes de $[A]$ soit égale au nombre de lignes de la matrice $[B]$.

$$[A] \times [B] = [C] \quad (\text{II-10})$$

Exemple

Soit les deux matrices $[A]$ et $[B]$:

$$(1) * \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 2 \times 2 + 1 \times 3) & (1 \times 0 + 2 \times (-3) + 1 \times 4) & (1 \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times 2) \\ (3 \times 3 + 2 \times 2 + 4 \times 3) & (3 \times 0 + 2 \times (-3) + 4 \times 4) & (3 \times 1 + 2 \times 1 + 4 \times 2) \\ (1 \times 3 + 1 \times 2 + 0 \times 3) & (1 \times 0 + 1 \times (-3) + 0 \times 4) & (1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 2) \end{bmatrix}$$

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 5 \\ 25 & 10 & 13 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[B] \times [A] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 6 & -1 & -10 \\ 17 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow [A] \times [B] \neq [B] \times [A] \Rightarrow$ Le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

$$(2) * \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1) [A] \times [B] = \begin{bmatrix} 19 & 13 & 7 \\ 46 & 31 & 19 \end{bmatrix}$$

2) $[B] \times [A]$ n'existe pas.

II.4. Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice est obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice noté : $[A]^T$ (Morère, 2011 ; Ouinas, 2012)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

Propriétés

- 1) $([A]^T)^T = [A]$
- 2) $[A]^T + [B]^T = ([A] + [B])^T$
- 3) $([A] \times [B])^T \neq [A]^T \times [B]^T$ (II-12)

$$4) ([A] \times [B])^T = [B]^T \times [A]^T$$

Exemple

Soit les deux matrices $[A]$ et $[B]$, $[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $[B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Trouver la matrice : $[C] = [A] \times [B]$ et $[C]^T$?

1^{ère} solution

$$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = [C]$$

$$[C]^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2^{ème} solution

$$[C]^T = [B]^T \times [A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Si la matrice $[A]$ est carrée : $\det[A]^T = \det[A]$

II.5. Matrice spéciales**II.5.1. Matrice carrée**

Si $n = m$ pour la matrice $[A] \Rightarrow$ la matrice $[A]$ est une matrice carrée.

- Pour une matrice symétrique $a_{ij} = a_{ji}$ et $[A]^T = [A]$. Les matrices de rigidité sont des matrices symétriques.
- Pour les matrices antisymétriques $a_{ij} \neq a_{ji}$ pour $i \neq j$.

II.5.2. Matrice nulle

Si tous les éléments dans la matrice $[A]$ sont nuls $\Rightarrow [A]$ est une matrice nulle.

II.5.3. Matrice diagonale

Pour les matrices carrées appartenant à A_{nn} , on définit la matrice diagonale, la matrice telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ij} \neq 0$ pour $i = j$.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{II-13})$$

Matrice diagonale $[A]$ d'ordre (4×4) .

II.5.4. Matrice identité (matrice d'unité)

On définit la matrice identité, la matrice telle que :

$$[I] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

$$[I] \text{ d'ordre } 3 \times 3 \Rightarrow [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si les matrices $[A]$ et $[I]$ sont de même ordre :

$$[A] \cdot [I] = [I] \cdot [A] = [A] \quad (\text{II-15})$$

II.5.5. Matrice scalaire

Une matrice scalaire est une forme spéciale de matrice diagonale où tous les éléments diagonaux sont égaux à une grandeur scalaire.

Exemple :

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3[I]$$

II.5.6. Matrice triangulaire

- Si la matrice $[A]$ est carrée et tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ pour $i < j$), la matrice $[A]$ est dite : *matrice triangulaire inférieure*.

Exemple :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

- Si dans la matrice carrée $[A]$, tous les éléments au-dessous de la diagonale principale sont nuls ($a_{ij} = 0$ pour $i > j$), la matrice $[A]$ est dite : *matrice triangulaire supérieure*.

Exemple :

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

II.6. Trace d'une matrice

$$\text{Trace } [A] = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_{ii} \quad (\text{II-16})$$

Propriétés :

- $\text{Trace } (\alpha[A] + \beta[B]) = \alpha \text{Trace}[A] + \beta \text{Trace}[B]$ (II-17)
- $\text{Trace } [A]^T = \text{Trace } [A]$

II.7. Matrice Inverse

Rappel : l'inverse d'un nombre réel non nul α est le nombre $\frac{1}{\alpha}$, il est défini par la r $\alpha * \frac{1}{\alpha} = 1$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication (Ouinis, 2012 ; Morère, 2015).

Définition :

Soit $[A]$ une matrice carrée d'ordre n . La matrice inverse de $[A]$ notée $[A]^{-1}$, est définie, quand elle existe, par $[A] x [A]^{-1} = [I]_n$. Si une telle matrice existe, on dit alors $[A]$ est *inversible*.

Propriété :

On démontre que :

$$[A] x [A]^{-1} = [A]^{-1} x [A] = [I]_n \quad (\text{II-18})$$

II.7.1. Matrice inverse et déterminant

Définition :

Soit la matrice $[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. On appelle déterminant de la matrice, noté $\det(A)$, le réel $(a_{11} x a_{22} - a_{21} x a_{12})$.

Exemple :

Calculer le déterminant de la matrice :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det[A] = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad (\text{II-19})$$

$$\det[A] = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \quad (\text{II-20})$$

Théorème :

Soit une matrice $[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, si $\det[A] \neq 0$, alors $[A]$ admet une matrice inverse unique $[A]^{-1}$ définie par :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det[A]} x \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II-21})$$

Nota :

1. Pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée $[A]$ d'ordre n , on cherche une matrice $[B]$ dont les coefficients sont des inconnus, telle que $[A]x[B] = [I]_n$, ce qui revient à résoudre un système à n inconnues.

Si ce système n'admet pas de solution, $[A]$ est *inversible*.

2. Une matrice non inversible est appelée *matrice singulière*.

- Si $[A]$ est inversible :

$$[A]x[B] = [C] \Leftrightarrow [A]^{-1} x [A] x [B] = [A]^{-1} x [C] \Leftrightarrow [I]_n x [B] = [A]^{-1} x [C]$$

$$\Leftrightarrow [B] = [A]^{-1} x [C] \quad (\text{II-22})$$

II.8. Ecriture matricielle d'un système linéaire d'équations

Tout système de « n » équations à « n » inconnues peut s'écrire sous la forme d'une égalité entre matrices. (Morère, 2010 ; Ouinas, 2012)

$$\text{Soit le système } (S) = \begin{cases} 2x + y - 5z = 7 \\ -x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } [A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & +2 & +3 \\ 2 & -2 & +3 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, [C] = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Le système (S) peut d'écrire : $[A]x[B] = [C]$

Exemple :

$$\text{Résoudre le système } (S) = \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(S) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$(S) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En posant :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \det[A] = (2 * -1) - (1 * 1) = -3 \neq 0 \text{ donc } [A] \text{ est inversible.}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc : } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Le couple $\left\{\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$ est l'unique solution su système (S).

Chapitre III

MÉTHODE DE RIGIDITÉ DIRECTE

Chapitre III

Méthode de rigidité directe

III.1. Introduction

Ce chapitre développe les caractéristiques des éléments finis relativement simples, des éléments structuraux unidimensionnels, d'un ressort linéairement élastique et d'un membre élastique de tension – compression (Ouinass, 2012 ; Amirat, 2021).

III.2. Système à un ressort linéaire

Un ressort élastique linéaire est un dispositif mécanique capable de soutenir l'effort axial. L'élongation ou la contraction du ressort est directement proportionnelle à la charge axiale appliquée. La constance de proportionnalité entre la déformation et la charge désignée sous le nom de la rigidité de ressort, notée K . son unité est la force par unité de longueur (N/m) (Ouinass, 2012 ; Liu, 2015).

La figure III.1, représente la formulation du ressort linéaire comme élément fini.

Un ressort élastique soutient l'effort axial seulement.

Nous choisissons un repère des coordonnées dont l'axe des abscisses est orienté le long de l'élongation.

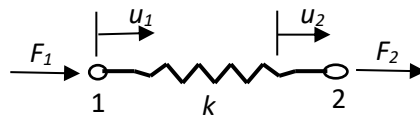


Figure III.1. Caractéristiques de l'élément ressort

- Les extrémités 1 et 2 du ressort, sont des nœuds.
- U_1 et U_2 sont les déplacements nodaux, ils sont montrés dans le sens positif.
- F_1 et F_2 sont des forces appliquées au nœud 1 et au nœud 2 respectivement. Elles sont montrées dans le sens positif.

Si les deux déplacements nodaux sont nuls, le ressort est non déformé.

- La déformation du ressort est donnée par :

$$\delta = u_2 - u_1 \quad (\text{III-1})$$

- La force axiale résultante dans le ressort est :

$$F = K \cdot \delta = K(u_2 - u_1) \quad (\text{III-2})$$

- En équilibre :

$$F_1 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = -F_2$$

Nous pouvons réécrire l'équation (III-2) en termes de forces appliquées aux nœuds :

$$F_1 = -K (u_2 - u_1) \quad (\text{III-3a})$$

$$F_2 = K(u_2 - u_1) \quad (\text{III-3b})$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-4})$$

Sous la forme réduite :

$$\{F\} = [K_e] \{U\} \quad (\text{III-5})$$

Il apparait que la matrice de raideur de l'élément :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \quad (\text{III-6})$$

$[K_e]$: est définie comme une matrice de rigidité élémentaire dans le système des coordonnées de l'élément (ou du système).

$\{u\}$: est un vecteur colonne des déplacements nodaux.

$\{F\}$: est le vecteur des forces nodales de l'élément.

Pour résoudre le système des équations représentées par (III-4), en général, les forces nodales sont données et l'objectif est de déterminer les déplacements nodaux inconnus.

La solution est :

$$\{U\} = [K_e]^{-1} \{F\} \quad (\text{III-7})$$

$[K_e]^{-1}$: est la matrice de rigidité inverse de l'élément. Cependant, cette matrice inverse n'existe pas, puisque son déterminant est nul \Rightarrow la matrice de rigidité est singulière.

III.3. Système à plusieurs ressorts linéaires

La dérivation de la matrice de rigidité pour un élément ressort est basée sur les conditions d'équilibre. Le même procédé peut être appliqué à un système à plusieurs ressorts reliés en écrivant l'équilibre pour chaque nœud (Ouinias, 2012 ; Liu, 2015).

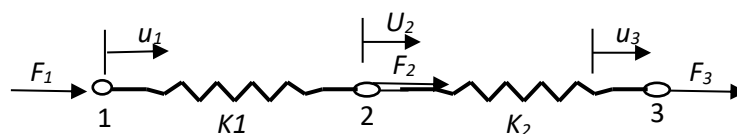


Figure III.2. Système à deux éléments ressorts

Les équations nodales d'équilibre peuvent être obtenues plus efficacement en considérant l'effet de chaque élément séparément en ajoutant la contribution de force d'élément à chaque équation nodale (Figure III.3).

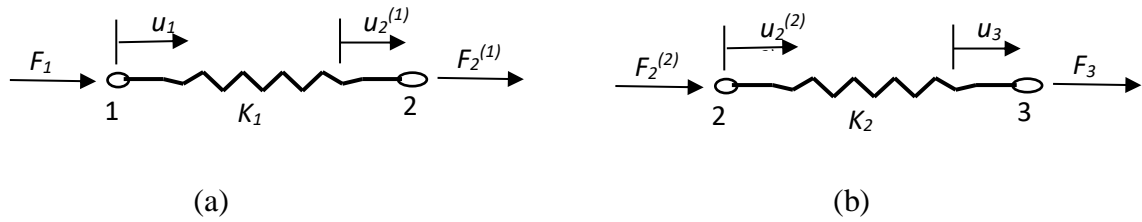


Figure III.3. Représentation des forces et des déplacements.

Exprimons les conditions d'équilibre pour chaque ressort, en utilisant l'équation (III-4), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-8a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-8b})$$

III.4. Assemblage des éléments dans le système de coordonnées globales

Pour assembler les équations d'équilibre décrivant le comportement du système de deux ressorts, *les conditions de compatibilité de déplacement*, qui relie des déplacements des éléments aux déplacements du système, sont écrites (Ouinias, 2012 ; Liu, 2015) :

$$u_1 = U_1 \quad , \quad u_2^{(1)} = U_2 \quad , \quad u_2^{(2)} = U_2 \quad , \quad u_3 = U_3 \quad (\text{III-9})$$

En substituant les équations (III-9) dans les équations (III-8), nous obtenons les équations d'équilibre pour chaque élément de ressort exprimé en termes de déplacements globaux.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-10a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-10b})$$

Sous cette forme, les équations (III-10) montrent que les éléments sont physiquement reliés au nœud 2 et ont le même déplacement U_2 à ce nœud.

Nous augmentons le nombre d'équations des deux matrices à 3x3 comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-11a})$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-11b})$$

En additionnant les équations (III-11a) et (III-11b), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-12})$$

Avec : $F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)}$

Sous la forme matricielle réduite :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (\text{III-13})$$

La matrice de rigidité du système $[K]$:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{III-14})$$

III.5. Application

Exercice N°1 :

Soit le système de la figure III.4 suivante, composé de trois éléments ressorts connectés par des masses M identiques. Les rigidités des ressorts K_1 , K_2 , et K_3 sont respectivement $3k$, $2k$, et k . Le nœud (1) est suspendu par un encastrement.

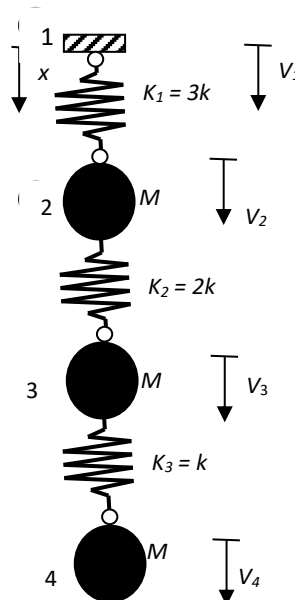
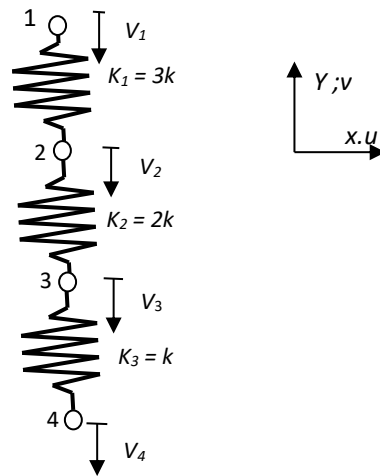


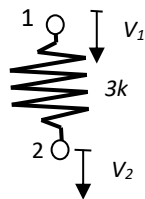
Figure III.4. Système à ressorts assemblés

- 1- Trouver la matrice de rigidité globale du système ?
- 2- En appliquant les conditions aux limites, calculer les déplacements nodaux du système ?
- 3- Calculer les réactions d'appuis ?

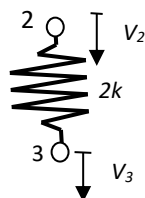
Solution :1. Matrice de rigidité globale du système :**Figure III.5.** Modélisation du système trois ressorts verticaux

Le système est composé de quatre nœud et chaque nœud à un degré de liberté, donc la matrice globale sera de 4x4.

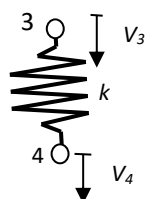
Discrétisation du système global :

Elément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K \\ -3K & 3K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad ; \quad [K_{1-2}] = \begin{bmatrix} 3K & -3K \\ -3K & 3K \end{bmatrix}$$

Elément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{Bmatrix} \quad ; \quad [K_{2-3}] = \begin{bmatrix} 2K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix}$$

Elément 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3^{(3)} \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad ; \quad [K_{3-4}] = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$$

On remarque que les déplacements aux nœuds 2 et 3 sont les mêmes, donc on obtient :

$$v_1 = V_1 \quad ; \quad v_2^{(1)} = v_2^{(2)} = V_2 \quad ; \quad v_3^{(2)} = v_3^{(3)} = V_3 \quad ; \quad v_4 = V_4$$

En augmentant la taille de chaque matrice à 4x4, on obtient

Elément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 3K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 2K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

Elément 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(3)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix}$$

Assemblage des éléments :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3 = F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & (3K + 2K) & -2K & 0 \\ 0 & -2K & (2K + K) & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

La matrice de rigidité globale est :

$$[K] = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 5K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 3K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix}$$

2. Déplacements nodaux du système :

Conditions aux limites :

- Les nœuds 2, 3 et 4 sont sollicités par des charges extérieures tel que :
 $F_2 = -mg = -P$,
 $F_3 = -mg = -P$ et $F_4 = -mg = -P$.
- Au niveau de l'encastrement, les déplacements sont nuls, $V_1=0$.

$$F_1 = -3KV_2$$

On applique les conditions aux limites, l'équation (*) devient :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ -P \\ -P \\ -P \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3K & -3K & 0 & 0 \\ -3K & 5K & -2K & 0 \\ 0 & -2K & 3K & -K \\ 0 & 0 & -K & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = -3KV_2$$

$$-P = 5KV_2 - 2KV_3$$

$$-P = -2KV_2 + 3KV_3 - KV_4$$

$$-P = -KV_3 + KV_4$$

Après résolution du système à trois équations et trois inconnues, on aura :

$$-P = 5KV_2 - 2KV_3$$

$$-P = -2KV_2 + 3KV_3 - KV_4$$

$$-P = -KV_3 + KV_4$$

$$V_2 = \frac{-P}{K} \quad ; \quad V_3 = \frac{-2P}{K} \quad ; \quad V_4 = \frac{-3P}{K}$$

Le signe moins (-) indique que les déplacements sont négatifs, dans le sens opposé de l'axe des ordonnées.

3. Réactions d'appuis :

On a une seule composante selon la direction verticale au niveau de l'encastrement.

$$F_1 = -3KV_2 = -3K \left(\frac{-P}{K} \right) = 3P \quad \Rightarrow \quad F_1 = -3P$$

Exercice N°2 :

Soit le système de ressorts à quatre nœuds représenté sur la figure III.6. Le nœud (1) est fixé par un encastrement. Sur les nœuds 2 et 4 on applique des forces $F_2 = F$, $F_4 = 2F$ respectivement. Sur le nœud 3, un déplacement δ est imposé.

On demande de :

- Déterminer les déplacements nodaux et la force à appliquer au nœud (3) pour qu'on puisse avoir un déplacement imposé δ ?
- Calculer les réactions d'appuis ?

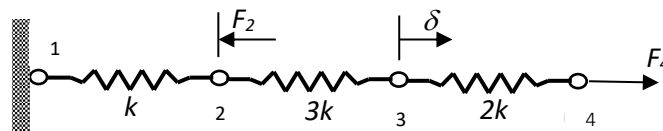


Figure III.6. Système à trois ressorts.

Solution :

- 1- Déplacements nodaux et la force à appliquer au nœud (3) pour qu'on puisse avoir un déplacement imposé δ :

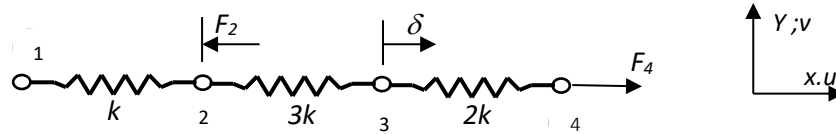


Figure. III.7. Modélisation du système 3 ressorts horizontaux

Elément 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 & 0 \\ -K & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3K & -3K & 0 \\ 0 & -3K & 3K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Elément 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3^{(3)} \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2K & -2K \\ 0 & 0 & -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Assemblage des éléments ressorts :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 & 0 \\ -K & 4K & -3K & 0 \\ 0 & -3K & 5K & -2K \\ 0 & 0 & -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

Conditions aux limites :

- Les déplacements à l'encastrement au nœud (1) sont nuls, c-à-d $U_1=0$.
- Au nœud (3) le déplacement $U_3=\delta$.
- Les charges aux nœuds (2) et (4) sont respectivement $F_2=-F$ et $F_4=2F$.

En substituant les conditions aux limites dans le système d'équations, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ -F \\ F_3 \\ 2F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 & 0 \\ -K & 4K & -3K & 0 \\ 0 & -3K & 5K & -2K \\ 0 & 0 & -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ \delta \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -F = 4KU_2 - 3K\delta \\ 2F = -2K\delta + 2KU_4 \\ F_3 = -3KU_2 + 5K\delta - 2KU_4 \end{cases}$$

Après le développement du système d'équations linéaires, on aura :

$$\Rightarrow \begin{cases} U_2 = -\frac{F}{4K} + \frac{3\delta}{4} \\ U_4 = \frac{F}{K} + \delta \end{cases}$$

$$\text{On trouve : } F_3 = -\frac{5}{4}F + \frac{3}{4}K\delta$$

2- Réactions d'appuis :

Il existe une seule réaction au niveau de l'encastrement.

$$F_1 = -KU_2 = \frac{F}{4} - \frac{3}{4}K\delta$$

Chapitre IV

ÉLÉMENTS FINIS BARRES

Chapitre IV

Eléments finis barres

IV.1. Introduction

L'élément barre est l'un des éléments de structure les plus simples et les plus utilisés dans les structures en treillis. Il est conçu pour ne prendre que des forces axiales, il ne se déforme que dans sa direction axiale et travaille en traction ou en compression.

La section transversale de la barre peut être arbitraire, mais ces dimensions doivent être beaucoup plus petites que celles dans la direction axiale.

On les trouve souvent en charpente métallique dans les systèmes à treillis. Elle est utile en analyse des systèmes bidimensionnels et tridimensionnels (Reddy, 2005 ; Ouinass, 2012 ; Richo et al., 2015).

La formulation des caractéristiques des éléments finis d'un élément barre est fondée sur les hypothèses suivantes :

- La barre est géométriquement droite.
- Le matériau obéit à la loi de HOOKE.
- Les forces sont appliquées aux extrémités de la barre.
- La barre soutient l'effort axial seulement ; la flexion, la torsion et le cisaillement ne sont pas transmis à l'élément par l'intermédiaire de la nature de ses liaisons à d'autres éléments.

IV.2. Equation gouvernante

Pour formuler l'équation de l'élément barre, on considère une barre de section « A » et de longueur « L » soumise à une traction « P(x) » variant de « P₀ à P_L ».

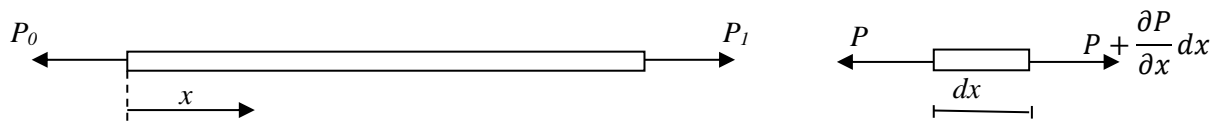


Figure IV.1. Equilibre élémentaire

Soit une portion infinitésimale de longueur « dx » située à la coordonnée « x » le long de la barre est en équilibre dynamique sous le système de forces suivant :

$$\sum F = m \gamma \quad (IV-1)$$

$$\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) - P = (\rho \cdot A \cdot dx) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (IV-2)$$

Avec :

- u : Déplacement longitudinal
- x : Coordonnée
- t : Temps

Si on considère E module d'élasticité du matériau de la barre.

La loi de Hooke donne la continuité axiale en fonction de la déformation longitudinale.

$$\frac{P}{A} = \sigma_x = E \varepsilon_x \Rightarrow P = A E \varepsilon_x \quad (IV-3)$$

La déformation est liée au déplacement par la dérivée par rapport à x :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV-4})$$

En substituant (IV-4) dans (IV-3), on obtient :

$$P = E A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV-5})$$

D'où l'équation différentielle de l'équilibre de l'élément « dx », qui s'obtient en remplaçant (IV-5) dans (IV-2).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{IV-6})$$

Les conditions aux limites de cette équation dépendent de l'encastrement ou des déplacements imposés à « u » et du chargement aux nœuds pour les dérivées de « u » (IV-5).

IV.3. Formulation de l'élément barre

Soit une barre élastique de longueur « L » dans le système global de coordonnées « x ».

On note la fonction « $u(x)$ » le déplacement axial à n'importe quelle position (x) sur la longueur de la barre (Craveur, 2008 ; Chateaufneuf, 2010 ; Recho et al., 2015).

Les nœuds « i » et « j » se trouvent aux extrémités de la barre élastique, comme montré à la figure (IV.2).

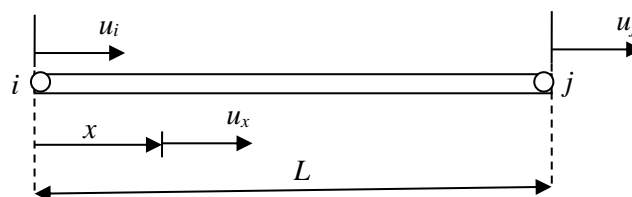


Figure IV.2. Géométrie de l'élément barre.

IV.3.1. Discrétisation du système et détermination des déplacements

Nous avons le champ continu « $u(x)$ » variable, qui doit être exprimé en termes de deux variables nodales (u_i et u_j).

Soit $N_i(x)$ et $N_j(x)$ des fonctions d'interpolation ou fonction de forme tels que :

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j \quad (\text{IV-7})$$

Les fonctions de formes assurent le passage du problème continu au problème discret. La connaissance de déplacement en quelques nœuds discrets permet de reconstruire l'intégralité du champ de déplacement indiqué par la relation suivante :

$$u = [N(x)]\{\delta\} = [N_i(x), N_j(x), \dots \dots \dots N_n(x)]\{\delta\} \quad (\text{IV-8})$$

$\{\delta\}$: Représente l'ensemble des déplacements nodaux (degrés de liberté du maillage) pour l'élément.

$[N(x)]$: Matrice des fonctions d'interpolation ou fonctions de forme de l'élément.

Les fonctions de formes doivent être choisies de telle sorte que nous obtenions les bons déplacements nodaux.

L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à représenter son champ de déplacement interne par des développements polynomiaux. Dans le cas unidirectionnel,

pour l'élément barre, dit du premier degré figure (IV.2), l'approximation du déplacement sur l'élément est linéaire et s'écrit : $u(x) = ax + b$

Pour déterminer les fonctions d'interpolation, les valeurs $u(x)$ sont satisfaites aux conditions suivantes :

Lorsque :

$$x = 0 \Rightarrow u(0) = u_i \quad (\text{IV-9a})$$

$$x = L \Rightarrow u(L) = u_j \quad (\text{IV-9b})$$

Les équations (IV-7) et (IV-9) mènent aux conditions de frontière suivantes :

$$N_i(0) = 1 \quad N_j(0) = 0 \quad (\text{IV-10a})$$

$$N_i(L) = 0 \quad N_j(L) = 1 \quad (\text{IV-10b})$$

Les fonctions d'interpolations sous formes polynomiales sont :

$$N_i(x) = a_1x + a_0 \quad (\text{IV-11a})$$

$$N_j(x) = b_1x + b_0 \quad (\text{IV-11b})$$

En utilisant les conditions de frontières des équations (IV.10a) et (IV.10b) on obtient :

$$(\text{IV.10a}) \Rightarrow a_0 = 1 \quad , \quad b_0 = 0$$

$$(\text{IV.10b}) \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{L} \quad , \quad b_1 = \frac{x}{L}$$

Par conséquent, les fonctions d'interpolation sont :

$$N_i(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (\text{IV-12a})$$

$$N_j(x) = \frac{x}{L} \quad (\text{IV-12b})$$

Tandis que la fonction continue de déplacement est représentée par la discrétisation suivante :

$$u(x) = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_i + \frac{x}{L}u_j \quad (\text{IV-13})$$

Sous la forme matricielle l'équation (IV-13) peut être exprimée par :

$$u(x) = [N_i(x) \quad N_j(x)] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N]\{u\} \quad (\text{IV-14})$$

Où :

$[N(x)]$: est la matrice ligne des fonctions d'interpolation.

$\{u\}$: est la matrice colonne des déplacements nodaux.

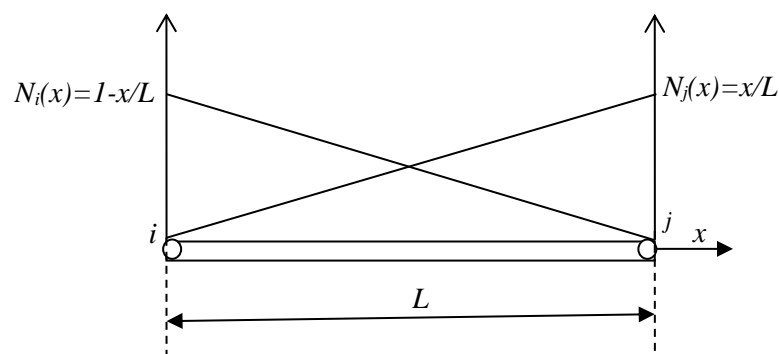


Figure IV.3. Fonction de forme d'un élément barre à deux nœuds.

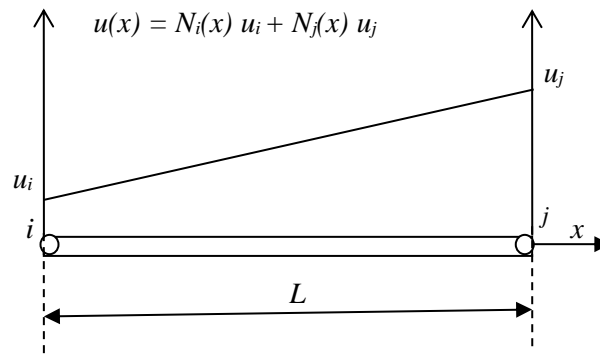


Figure IV.4. Déplacement dans un élément barre à deux nœuds

IV.3.2. Détermination des déformations

Une fois que les déplacements connus en tout point intérieur de l'élément, on peut calculer des déformations en chaque point. Celles-ci sont obtenues par l'utilisation d'une équation qui s'écrit sous la forme matricielle suivante (Chateaneuf, 2010 ; Cazenave, 2010) :

$$\varepsilon = S u \quad (\text{IV-15})$$

S : est un opérateur linéaire.

En utilisant l'équation (IV-8), l'équation (IV-15) s'écrit :

$$\varepsilon = [B]\{\delta\} \quad (\text{IV-16})$$

Avec :

$$[B] = S[N] = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \dots \dots \frac{\partial N_j}{\partial x} \dots \dots \dots \frac{\partial N_n}{\partial x} \right] \quad (\text{IV-17})$$

Dans le cas de contraintes planes, les déformations à considérer sont celles qui se produisent dans le plan. Elles sont déterminées en fonction des déplacements.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \{u\} \quad (\text{IV-18})$$

Dans le chargement uniaxial, comme dans l'élément barre nous considérons seulement la composante normale de la déformation :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i + \left(\frac{x}{L}\right) u_j \right] \quad (\text{IV-19})$$

$$\varepsilon_x = \frac{u_j - u_i}{L} \quad (\text{IV-20})$$

Ce qui montre que la déformation dans l'élément barre est constante.

IV.3.3. Détermination de forces nodales

Si on considère « E » le module d'élasticité du matériau avec lequel est faite la barre. La loi de Hooke donne la contrainte axiale en fonction de la déformation longitudinale :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left(\frac{u_j - u_i}{L} \right) \quad (\text{IV-21})$$

La force axiale associée est :

$$P = \sigma_x A = \frac{EA}{L} (u_j - u_i) \quad (\text{IV-22})$$

La force nodale F_i doit être égale et opposée pour l'équilibre de la barre, donc :

$$\begin{cases} F_i = -\frac{EA}{L} (u_j - u_i) \\ F_j = \frac{EA}{L} (u_j - u_i) \end{cases} \quad (\text{IV-23})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-24})$$

Par la comparaison de l'équation (IV-24) et l'équation (III-5), on déduit la matrice de rigidité pour l'élément barre :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV-25})$$

$[K]$: Est la matrice de rigidité de l'élément barre.

IV.4. Applications

Exercice N°1 :

Considérons une barre de section uniforme de longueur « $2L$ », représentée sur la figure IV.5. La barre est fixée à l'une des extrémités et soumise à une charge horizontale « P » à l'extrémité libre. Soit E le module d'élasticité du matériau constituant de la barre.

- Calculer les déplacements nodaux de la barre.
- Déterminer la fonction du déplacement.
- Déterminer la contrainte normale.

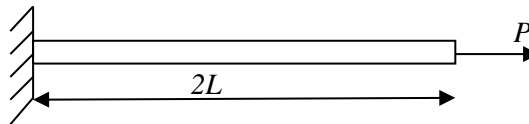


Figure IV.5. Élément barre soumis à une charge.

Solution :

- Les déplacements nodaux de la barre :

La modélisation de l'élément barre est représenté par la figure IV.6.

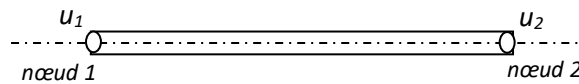


Figure IV.6. Modélisation de l'élément barre

La matrice raideur des barres est :

$$\begin{Bmatrix} F_1 = ? \\ F_2 = P \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où il vient : } \begin{cases} F_1 = -\frac{EA}{2L} u_2 = -\frac{EA}{2L} \cdot \frac{2LP}{EA} = -P \\ P = \frac{EA}{2L} u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{2PL}{EA} \end{cases}$$

- La fonction du déplacement :

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left[1 - \frac{x}{2L} \quad \frac{x}{2L} \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2PL}{EA} \end{Bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{P}{EA} x$$

- La contrainte normale :

$$\sigma_x = E \left(\frac{u_2 - u_1}{2L} \right) = \frac{E}{2L} \cdot \frac{2PL}{EA} = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

Exercice N°2 :

Soit le système de la figure IV.7, composé de deux éléments barre et un élément ressort. Soit les modules d'élasticité E_a , E_c et les sections A_a et A_c des barres de l'acier et du cuivre respectivement. La longueur L des barres est identique. Le système est encastré aux nœuds 1 et 3. Et une force concentrée P est appliquée au nœud 2.

On demande de :

- Calculer les déplacements nodaux du système.
- Calculer les réactions d'appuis.
- Calculer les forces axiales dans l'élément ressort et les barres.
- Calculer la déformation axiale dans les barres.

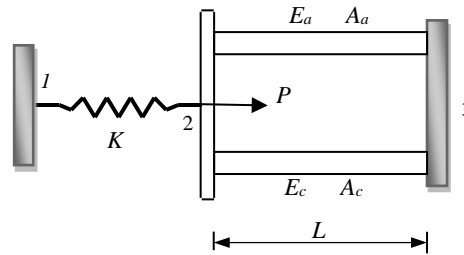


Figure IV.7. Système à trois éléments : ressort et deux barres

Solution :

- Les déplacements nodaux du système :

$$\text{Ressort } \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad \text{Barre } \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

Les équations du vecteur déplacement et la matrice de rigidité s'écrivent :

$$\text{Élément ressort 1-2 : } \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Élément barre en acier 2-3 : } \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_a A_a}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Élément barre en cuivre 2-3 : } \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_c A_c}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

En augmentant la taille de chaque matrice à 3x3, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_a A_a}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_c A_c}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblage des éléments

$$\{F\} = [K]\{\delta\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} & \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale est la suivante :

$$[K] = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} & \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites :

- Au niveau de l'encastrement les déplacements sont nuls : $u_1 = u_3 = 0$.
- $F_1 = 0$ et $F_3 = 0$, comme charge externe $F_2 = P$.

$$\begin{Bmatrix} F_1 = 0 \\ F_2 = P \\ F_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} & \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \\ u_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice réduite sera de la forme suivante :

$$\{P\} = \left[K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \right] \{u_2\}$$

Le déplacement obtenu est :

$$u_2 = \frac{P}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}}$$

- Les réactions d'appuis :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K & 0 \\ -K & K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 & -\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} & \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{P}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \frac{-PK}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} - P = -P \left(\frac{K}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} + 1 \right)$$

$$R_3 = \frac{P \left(-\frac{E_a A_a}{L} - \frac{E_c A_c}{L} \right)}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} - P = \frac{-P(E_a A_a + E_c A_c)}{KL + E_a A_a + E_c A_c} - P = -P \left(\frac{(E_a A_a + E_c A_c)}{KL + E_a A_a + E_c A_c} + 1 \right)$$

- Détermination des forces dans le ressort et les barres

1. La force dans le ressort est :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F_{\text{ressort}} = \frac{-PK}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}}$$

La force axiale dans la barre en acier :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_a A_a}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F_a = \frac{E_a A_a}{L} \cdot \left(\frac{P}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} \right) = -\frac{P E_a A_a}{K L + E_a A_a + E_c A_c}$$

La force axiale dans la barre en cuivre :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_c A_c}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F_c = -\frac{E_c A_c}{L} \cdot \left(\frac{P}{K + \frac{E_a A_a}{L} + \frac{E_c A_c}{L}} \right) = -\frac{P E_c A_c}{K L + E_a A_a + E_c A_c}$$

Autrement :

$$F = \frac{EA}{L} (u_j - u_i) = EA \varepsilon$$

La déformation axiale dans les barres est :

$$\varepsilon = \frac{(u_j - u_i)}{L} = \frac{(u_3 - u_2)}{L} = -\frac{P}{K L + E_a A_a + E_c A_c}$$

$$F_a = E_a A_a \varepsilon = -\frac{P E_a A_a}{K L + E_a A_a + E_c A_c}$$

$$F_c = E_c A_c \varepsilon = -\frac{P E_c A_c}{K L + E_a A_a + E_c A_c}$$

Exercice N°3 :

Soit le système de poutres à section variable de la figure IV.8. E_1 , E_2 et E_3 sont les modules d'élasticité des matériaux constituant la poutre. A_1 , A_2 et A_3 les sections droites de chaque tronçon. La poutre est encastree au nœud 1 et libre au nœud 4. Aux nœud 2 et 4 sont appliquées des charges concentrées P et $2P$ respectivement.

On donne : $E_1 = 2 E_2$, $E_1 = 3 E_3$, $A_1 = 2 A_2$, $A_1 = 3 A_3$, $L_1 = L_2 = L_3$

- Calculer les déplacements nodaux ?

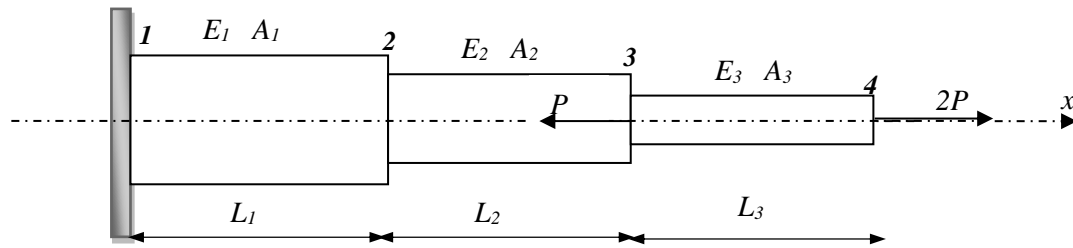


Figure IV.8. Poutre à sections variables

Solution :

- Les déplacements nodaux :

Le système est composé de trois éléments et de quatre nœuds à un degré de liberté, donc la taille de la matrice globale est d'ordre (4x4).

$$\text{Elément 1-2 : } \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Elément 2-3 : } \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Elément 3-4 : } \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Assemblage des éléments :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Application de conditions aux limites ;

Au niveau des encastremets les déplacements sont nuls, donc $u_1=0$.

Les forces externes sont : $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = -P$ et $F_4 = 2P$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 2P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Sous forme réduite :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 2P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & 0 \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} & -\frac{E_3 A_3}{L_3} \\ 0 & -\frac{E_3 A_3}{L_3} & \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Nous remplaçant les valeurs de $E_1 = 2 E_2$, $E_1 = 3 E_3$, $A_1 = 2 A_2$, $A_1 = 3 A_3$, $L_1 = L_2 = L_3$, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 2P \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} (1 + \frac{1}{4}) & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & (\frac{1}{4} + \frac{1}{9}) & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

La solution du système nous permet de déterminer les déplacements suivants :

$$\begin{cases} u_2 = \frac{PL_1}{E_1 A_1} \\ u_3 = \frac{5PL_1}{E_1 A_1} \\ u_4 = \frac{23PL_1}{E_1 A_1} \end{cases}$$

IV.5. Structure plane à treillis

Les structures à treillis sont constituées par des assemblages de barres liées par des joints de telle sorte que le chargement extérieur soit repris uniquement par des forces axiales dans les barres (Cazanave, 2010 ; Seghir, 2014)

La figure IV.9 montre un exemple de système à treillis composé d'un assemblage de 13 barres et soumis à un chargement de 2 forces.

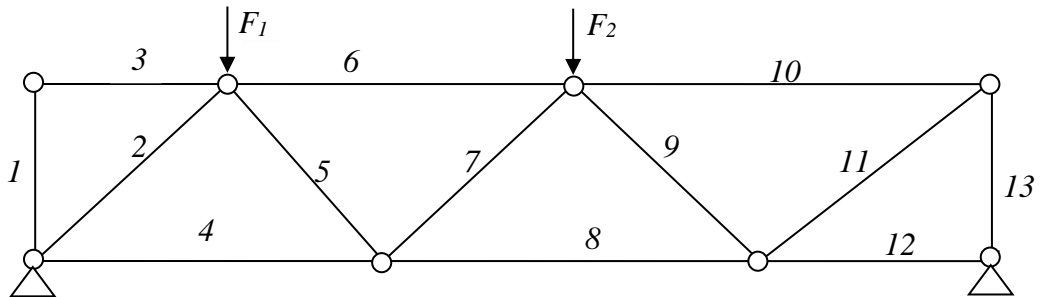


Figure IV.9. Treillis composé de plusieurs éléments

IV.5.1. Matrice de rigidité de l'élément en treillis

Les barres composant le système à treillis subissent deux déplacements à leurs extrémités ; une composante horizontale et une autre verticale. Cependant, seul le déplacement axial à la barre donne naissance à la force axiale. Ainsi, la matrice élémentaire d'une barre bidimensionnelle (figure IV.10) devient une matrice 4x4 puisque le vecteur des déplacements élémentaires devient (Cazanave, 2010 ; Ouinas, 2012 ; Seghir, 2014 ; Reddy, 2015) :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (IV-26)$$

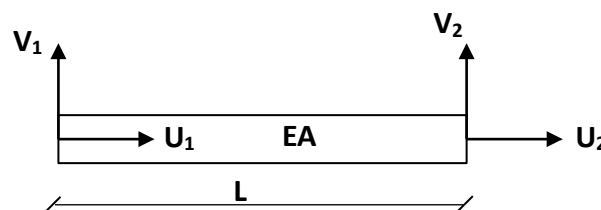


Figure IV.10. Élément barre horizontale bidimensionnelle

Les composantes de la matrice de rigidité de l'élément barre horizontale bidimensionnelle associé au déplacement « v » sont nulles.

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV-27)$$

Dans le cas pratique, la barre peut être inclinée par rapport aux axes de référence. Il convient alors de faire une rotation d'axes pour revenir aux axes de la barre.

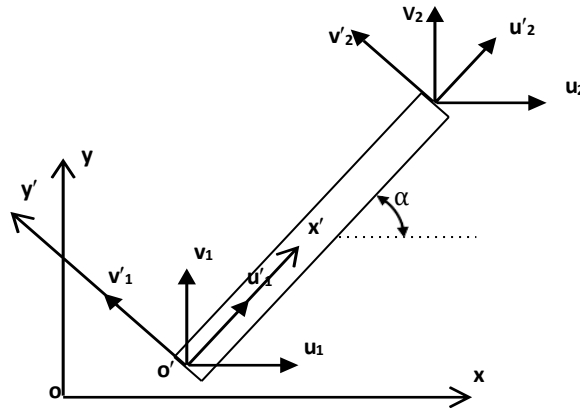


Figure IV.11. Élément barre incliné

La figure IV.11 montre une barre inclinée d'un angle α par rapport à l'axe horizontal du repère (oxy) . On note (u, v) les composantes du déplacement dans ce système et (u', v') celles du déplacement dans le repère $(o'x'y')$ lié à la barre.

On note R la matrice de transformation qui permet le passage du système (oxy) au nouveau système $(o'x'y')$.

Pour transformer les déplacements nodaux de l'élément barre du repère local vers le système des coordonnées globales :

$$\begin{cases} u'_i = u_i \cos \alpha + v_i \sin \alpha \\ v'_i = -u_i \sin \alpha + v_i \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{IV-28})$$

$$\begin{cases} u'_j = u_j \cos \alpha + v_j \sin \alpha \\ v'_j = -u_j \sin \alpha + v_j \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{IV-29})$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-30})$$

$$\begin{Bmatrix} u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-31})$$

On pose: $C = \cos \alpha$; $S = \sin \alpha$

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-32})$$

$$\begin{Bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ u'_j \\ v'_j \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-33})$$

Soit avec la totalité des vecteurs des déplacements élémentaires U_e et U'_e :

$$U'_e = R U_e \quad (\text{IV-34})$$

Il reste maintenant de lier le chargement aux déplacements dans le repère (oxy) , on a la relation dans le repère lié à la barre :

$$F'_e = K'_e U'_e \quad (IV-35)$$

La relation entre les deux vecteurs forces dans les deux repères est :

$$F'_e = R F_e ; \text{ ou bien } F_e = R^T F'_e \text{ avec } F_e = \langle F_{xi} \ F_{yi} \ F_{xj} \ F_{yj} \rangle \quad (IV-36)$$

$$\begin{Bmatrix} F'_{xi} \\ F'_{yi} \\ F'_{xj} \\ F'_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} \quad (IV-37)$$

D'où il résulte :

$$F_e = R^T K'_e U'_e = R^T K'_e R U_e = K_e U_e \quad (IV-38)$$

La relation entre les expressions de la matrice de rigidité dans les deux repères est :

$$K_e = R^T K'_e R \quad (IV-39)$$

Soit :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

$$[K_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (IV-40)$$

On écrit la matrice de rigidité en présence des vecteurs de force et des déplacements :

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (IV-41)$$

On remarque que l'équation (IV-38) montre que la matrice de rigidité de l'élément est symétrique.

IV.5.2. Forces axiales

Les forces axiales de l'élément barre peuvent être obtenues directement à partir de l'équation (IV-39). Pour un élément de nœuds (i, j) , l'effort normal correspond à la force nodale à l'extrémité (j) de la barre, il devient (Ern, 2005 ; Craveur, 2008 ; Liu, 20155) :

$$\begin{cases} F_{xj} = \frac{EA}{L} [C^2(u_j - u_i) + CS(v_j - v_i)] \\ F_{yj} = \frac{EA}{L} [CS(u_j - u_i) + S^2(v_j - v_i)] \end{cases} \quad (IV-42)$$

A partir de l'équation (IV-35'), l'effort normal peut être écrit :

$$N = CF_{xj} + SF_{yj}$$

$$N = \frac{EA}{L} (C^2 + S^2) [C(u_j - u_i) + S(v_j - v_i)]$$

$$N = \frac{EA}{L} [C(u_j - u_i) + S(v_j - v_i)] \text{ avec } (C^2 + S^2) = 1$$

Sous la forme matricielle :

$$N = \frac{EA}{L} [C \quad S] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (\text{IV-43})$$

IV.5.3. Allongement dû aux forces axiales

De même l'équation (IV-32) permet d'obtenir l'allongement ΔL de la barre :

$$\Delta L = (u'_j - u'_i) = [C(u_j - u_i) + S(v_j - v_i)] \quad (\text{IV-44})$$

IV.4. Applications

Exercice N°1 :

Soit les systèmes d'élément barre à 2 nœuds des deux structures des figures IV.12. (a) et (b). On demande de calculer :

- Les déplacements sous la charge F
- Les réactions aux appuis.

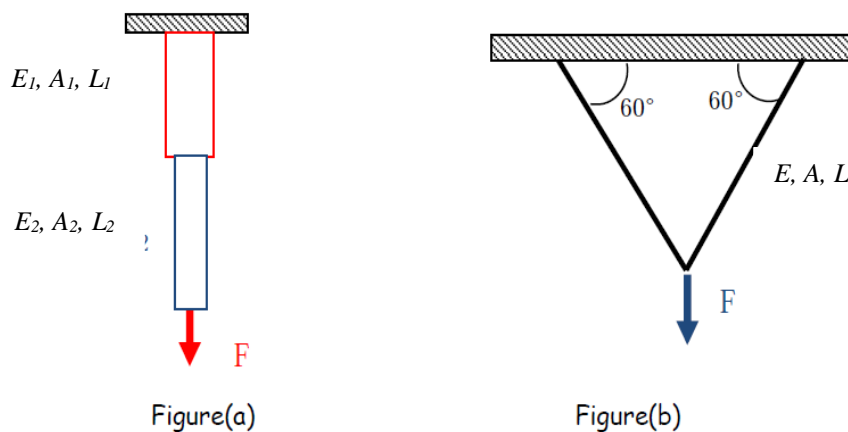


Figure IV.12. Système de barres (a) et (b)

Solution :

- 1) Les déplacements sous charge F

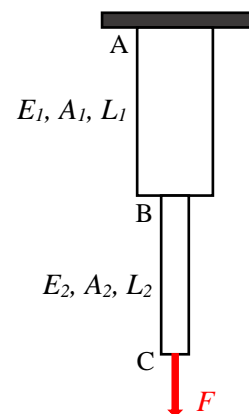
Cas a) :

Le système est composé de deux éléments (A -B) et (B- C).

L'élément barre (A - B) :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix}$$

On augmente la taille de la matrice (3x3) :



$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

L'élément barre (B - C) :

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

On augmente la taille de la matrice (3x3) :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

Assemblage des matrices :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{-E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{-E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{F L_1}{E_1 A_1} \quad ; \quad u_C = \frac{L_1}{E_1 A_1} + \frac{L_2}{E_2 A_2}$$

Cas b) :

Le système est composé de deux éléments,

l'élément (1 - 2) et l'élément (2 - 3).

Pour faciliter la résolution de ce système, nous traçons un tableau contenant les règles et les cosinus directeurs des deux barres constituant le système.

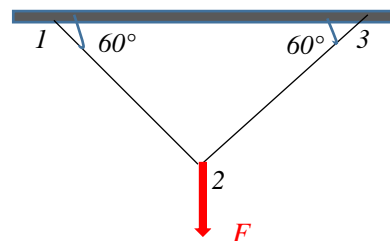


Tableau 1. Caractéristiques géométrique des éléments du système.

Elément	Longueur	Angle θ	$C = \cos \theta$	$S = \sin \theta$	C^2	S^2	CS
I: (1 - 2)	L	60°	0,5	-0,866	0,25	0,75	-0,433
II: (2 - 3)	L	60°	-0,5	-0,866	0,25	0,75	0,433

La matrice de rigidité de l'élément barre de nœuds « i et j » est :

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Elément I : (1 - 2)

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,25 & -0,433 & -0,25 & 0,433 \\ -0,433 & 0,75 & 0,433 & -0,75 \\ -0,25 & 0,433 & 0,25 & -0,433 \\ 0,433 & -0,75 & -0,433 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Elément II : (2 - 3)

$$\begin{Bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,25 & 0,433 & -0,25 & -0,433 \\ 0,433 & 0,75 & -0,433 & -0,75 \\ -0,25 & -0,433 & 0,25 & 0,433 \\ -0,433 & -0,75 & 0,433 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

L'assemblage des matrices élémentaires nous donne la matrice de rigidité globale :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,25 & -0,433 & -0,25 & 0,433 & 0 & 0 \\ -0,433 & 0,75 & 0,433 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0,433 & 0,50 & 0 & -0,25 & -0,433 \\ 0,433 & -0,25 & 0 & 1,50 & -0,433 & -0,75 \\ 0 & 0 & -0,25 & -0,433 & 0,25 & 0,433 \\ 0 & 0 & -0,433 & -0,75 & 0,433 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Conditions aux limites :

Les déplacements aux nœuds 1 et 3 sont nuls. $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$.

Les forces extérieures données se réduisent à la force F appliquée au nœud 2.

Le système se réduit :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Après résolution du système, on aura la solution suivante :

$$\Rightarrow \begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = -\frac{F}{1,5} \cdot \frac{L}{EA} \end{cases}$$

2) Calcul des réactions d'appuis :

Dans les directions bloquées, il y a création des réactions qui s'écrivent :

$$R_i = \sum K_{ij} \cdot u_j - F_i$$

Cas a) :

F_A : réaction en A (IDDL bloqué \Rightarrow 1 seule réaction).

$$R_A = \frac{E_1 A_1}{L_1} u_A - \frac{E_1 A_1}{L_1} u_B \quad \Rightarrow \quad R_A = -\frac{E_1 A_1}{L_1} \cdot \frac{F L_1}{E_1 A_1} \quad \Rightarrow \quad R_A = -F$$

Cas b) :

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -0,25 & 0,433 \\ 0,433 & -0,75 \\ -0,25 & -0,433 \\ -0,433 & -0,75 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} R_{1x} = 0,433 \frac{EA}{L} v_2 = \frac{-0,433 F}{1,5} = 0,288 F \\ R_{1y} = -0,75 \frac{EA}{L} v_2 = \frac{0,75}{1,5} F = 0,5F \\ R_{3x} = -0,433 \frac{EA}{L} v_2 = \frac{0,433}{1,5} F = 0,288 F \\ R_{3y} = -0,75 \frac{EA}{L} v_2 = \frac{0,75}{1,5} F = 0,5F \end{cases}$$

Exercice N°2 :

Soit la structure de la figure IV.13 où les deux ressorts sont identiques de rigidité K , et les barres sont identiques de caractéristiques L_b, A_b, E_b .

1. En utilisant un calcul EF par élément barre, écrire la relation de rigidité de la structure en fonction de K, L_b, A_b, E_b et F .
2. En prenant les valeurs suivantes : $K = 1000 \text{ N/m}$, $E_b = 1000 \text{ N/m}$, $A_b = 0,01 \text{ cm}^2$, $L_b = 1 \text{ m}$
Calculer sous l'action de la force $F = 1 \text{ N}$
 - a. Les déplacements sous l'action de la force F .
 - b. Les réactions aux appuis.

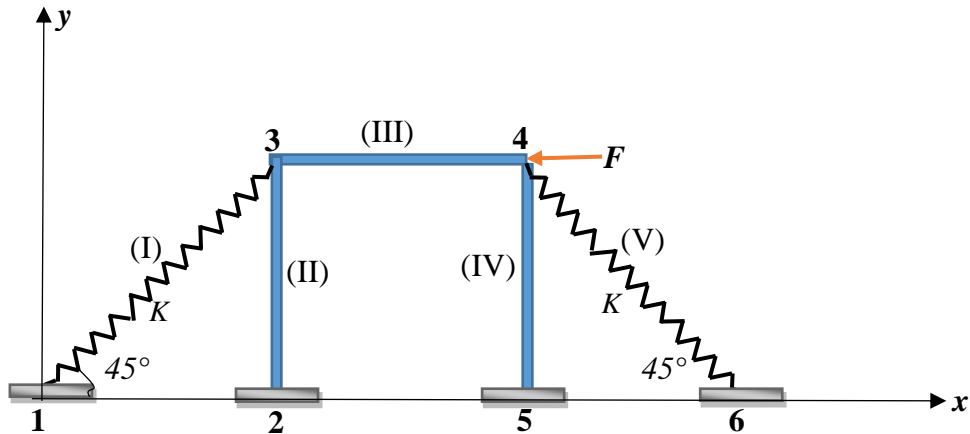


Figure IV.13. Système à trois barres et deux ressorts

Solution :

1. La relation de rigidité de la structure en fonction de K , L_b , A_b , E_b et F .

Les barres sont identiques (même rigidité).

Les ressorts sont identiques (même rigidité)

- Modélisation par éléments finis

Le tableau 1 regroupe les caractéristiques géométriques du système :

Tableau 1. Caractéristique géométrique des éléments du système

Elément	Angle ϕ	C	S	C^2	S^2	CS
I : 1 - 3	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
II : 2 - 3	90°	0	1	0	1	0
III : 3 - 4	0°	1	0	1	0	0
IV : 5 - 4	90°	0	1	0	1	0
V : 4 - 6	-45°	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$

L'élément de barre « i » a pour matrice de rigidité dans le repère local :

$$[K_i]_l = K_b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad K_b = \frac{E_b A_b}{L}$$

Après transformation dans le repère global (x,y) :

$$[K_i]_{x,y} = K_b \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C = \cos\phi \quad ; \quad S = \sin\phi$$

Elément ressort se compte exactement comme une barre.

$$[K_r]_l = K \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_r]_{x,y} = K \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$

- Différentes matrices des éléments selon la modélisation

Elément I : (1 - 3)

$$[K_I]_{x,y} = \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément II : (2 - 3) et l'élément IV : (5 - 4)

$$[K_{II}]_{x,y} = [K_{IV}]_{x,y} = K_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément III : (3 - 4)

$$[K_{III}]_{x,y} = K_b \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément IV : (4 - 6)

$$[K_{IV}]_{x,y} = \frac{K}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assemblage des matrices

La semblée est de la taille (nombre de nœuds x nombre de DDL)

(Nombre de noeuds = 6) → (la taille de la matrice de rigidité globale est de 12x12)
(Nombre de DDL = 2)

$$[K_G]_{x,y} = \begin{bmatrix} K/2 & K/2 & 0 & 0 & -K/2 & -K/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K/2 & K/2 & 0 & 0 & -K/2 & -K/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_b & 0 & -K_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K/2 & -K/2 & 0 & 0 & K/2 + K_b & K/2 & -K_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K/2 & -K/2 & 0 & -K_b & K/2 & K/2 + K_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_b & 0 & K/2 + K_b & -K/2 & 0 & 0 & -K/2 & K/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K/2 & K/2 + K_b & 0 & -K_b & K/2 & -K/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_b & 0 & K_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K/2 & K/2 & 0 & 0 & K/2 & -K/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K/2 & -K/2 & 0 & 0 & -K/2 & K/2 \end{bmatrix}$$

a. Les déplacements sous l'action de la force F .

$$\{F\} = [K].\{u\}$$

La matrice de rigidité de la structure s'écrit en notant par $\{F\}$ le vecteur force extérieur et $\{u\}$ le vecteur des déplacements nodaux.

$$\{F\}_{x,y} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -F \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}.$$

$$\{u\}_{x,y} = \{\mu_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6\}.$$

Les nœuds 1, 2, 5 et 6 sont bloqué sont des encastrement $\Rightarrow \mu_1 = v_1 = u_2 = v_2 = u_5 = v_5 = u_6 = v_6 = 0$.

Les seules déplacements inconnus sont : u_3 , v_3 , u_4 , v_4

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K/2 + K_b & K/2 & -K_b & 0 \\ K/2 & K/2 + K_b & 0 & 0 \\ -K_b & 0 & K/2 + K_b & -K/2 \\ 0 & 0 & -K/2 & K/2 + K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

- Application numérique

$$K = 1000 \text{ N/m} \quad ; \quad K_b = 10 \text{ N/m} \quad ; \quad F = 1 \text{ N.}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 510 & 500 & -10 & 0 \\ 500 & 510 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 510 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 510 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

- Après résolution, on trouve les résultats suivants :

$$\begin{cases} u_3 = -0,034 \text{ m} \\ v_3 = 0,033 \text{ m} \\ u_4 = -0,067 \text{ m} \\ v_4 = -0,066 \text{ m} \end{cases}$$

b. Les réactions aux appuis

Dans les directions bloquées, il y a création des réactions qui s'écrivent :

$$R_i = \sum K_{ij} \cdot u_i - F_i$$

Avec : K_{ij} = matrice de rigidité avant l'application des conditions aux limites.

u_i = vecteur déplacement résultant.

$$\begin{aligned} u_1 = 0; & \quad i = 1 & , & \quad u_5 = 0; & \quad i = 9 \\ v_1 = 0; & \quad i = 2 & , & \quad v_5 = 0; & \quad i = 10 \\ u_3 = 0; & \quad i = 3 & , & \quad u_6 = 0; & \quad i = 11 \\ v_3 = 0; & \quad i = 4 & , & \quad v_6 = 0; & \quad i = 12 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\text{Noeud 1} \begin{cases} R_1 = \frac{-K}{2} u_3 - \frac{K}{2} v_3 - 0 = 0,335 \text{ N} \\ R_2 = \frac{-K}{2} u_3 - \frac{K}{2} v_3 - 0 = 0,335 \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Noeud 2} \begin{cases} R_3 = 0 - 0 = 0 \\ R_4 = 0 \cdot u_3 - K_b v_3 - 0 = -0,335 \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Noeud 3} \begin{cases} R_9 = 0 - 0 = 0 \\ R_{10} = 0 \cdot u_4 - K_b v_4 - 0 = 0,664 \text{ N} \end{cases}$$

$$\text{Noeud 4} \begin{cases} R_{11} = \frac{-K}{2} u_4 + \frac{K}{2} v_4 - 0 = 0,664 \text{ N} \\ R_{12} = \frac{K}{2} u_4 - \frac{K}{2} v_4 - 0 = -0,664 \text{ N} \end{cases}$$

Exercice N°3 :

Soit le système treillis symétrique représenté la figure IV.14, composé de sept barres identique de section identique A, longueur L et de module d'élasticité E. Une charge concentrée P est appliquée au nœud 3.

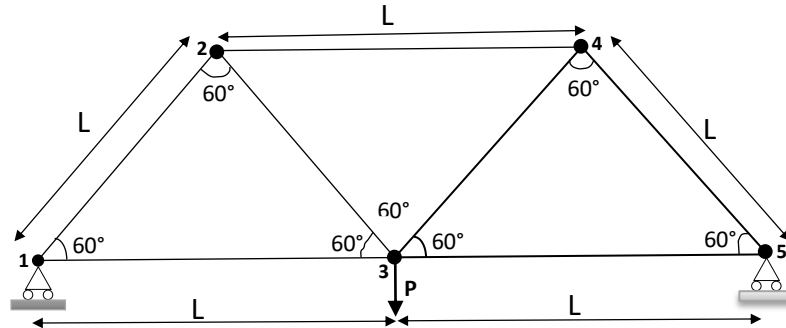


Figure IV.14. Système à sept barres

1. Déterminer la matrice de rigidité du système.
2. Calculer les déplacements nodaux.
3. Calculer les charges axiales dans les barres.

Solution :

Le système est composé de 6 barres et de 5 nœuds.

Les caractéristiques géométriques du système sont données dans le tableau suivant :

Barres	Longueur	Angle θ	C	S	C^2	S^2	CS
1-2	L	$\pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$\sqrt{3}/4$
2-3	L	$-\pi/3$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$-\sqrt{3}/4$
3-4	L	$\pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$\sqrt{3}/4$
4-5	L	$-\pi/3$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$-\sqrt{3}/4$
1-3	L	0	1	0	1	0	0
2-4	L	0	1	0	1	0	0
3-5	L	0	1	0	1	0	0

Détermination des matrices élémentaires du système :

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Elément 1-2

$$\begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Elément2-3

$$\begin{cases} Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{cases}$$

Elément3-4

$$\begin{cases} Fx_3 \\ Fy_3 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases},$$

Elément4-5

$$\begin{cases} Fx_4 \\ Fy_4 \\ Fx_5 \\ Fy_5 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{cases}$$

Elément1-3

$$\begin{cases} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{cases},$$

Elément2-4

$$\begin{cases} Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases},$$

Elément3-5

$$\begin{cases} Fx_3 \\ Fy_3 \\ Fx_5 \\ Fy_5 \end{cases} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ v_5 \end{cases}$$

Assemblage :

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ F_{x5} \\ F_{y5} \end{pmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 10 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 5 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites :

$$v_1 = v_3 = v_5 = 0.$$

$$F_3 = -P$$

Après application des conditions aux limites, la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} F_{x1} = 0 \\ F_{y1} = ? \\ F_{x2} = 0 \\ F_{y2} = 0 \\ F_{x3} = 0 \\ F_{y3} = -P \\ F_{x4} = 0 \\ F_{y4} = 0 \\ F_{x5} = 0 \\ F_{y5} = ? \end{pmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 10 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 5 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 \\ -u_2 \\ v_2 \\ -u_1 \\ v_5 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & \sqrt{3} & -4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -3 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -\sqrt{3} & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_3 \\ -u_2 \\ v_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$$

La matrice réduite est de forme :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -1 & 10 & 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6 & 6 \\ 1 & -10 & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & 6 & -3 \\ -5 & 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

La deuxième forme réduite est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -1 & 10 & 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2\sqrt{3} & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Après la résolution du système d'équations on obtient les déplacements :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3} PL}{6EA} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{PL}{6EA} \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Forces axiales :

Elément 1-2

$$N_{12} = \frac{EA}{L} [\lambda_{12} \quad \mu_{12}] \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}P}{3} \text{ (Compression)}$$

Elément 2-3

$$N_{23} = \frac{EA}{L} [\lambda_{23} \quad \mu_{23}] \begin{pmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}P}{3} \text{ (Tension)}$$

Elément 2-4

$$N_{24} = \frac{EA}{L} [\lambda_{24} \quad \mu_{24}] \begin{pmatrix} u_4 - u_2 \\ v_4 - v_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} [1 \quad 0] \begin{pmatrix} u_4 - u_2 \\ v_4 - v_2 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}P}{3} \text{ (Compression)}$$

Elément 3-4

$$N_{34} = \frac{EA}{L} [\lambda_{34} \quad \mu_{34}] \begin{pmatrix} u_4 - u_3 \\ v_4 - v_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_4 - u_3 \\ v_4 - v_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}P}{3} \text{ (Tension)}$$

Elément 1-3

$$N_{13} = \frac{EA}{L} [\lambda_{13} \quad \mu_{13}] \begin{pmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} [1 \quad 0] \begin{pmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}P}{6} \text{ (Tension)}$$

Elément 4-5

$$N_{45} = \frac{EA}{L} [\lambda_{45} \quad \mu_{45}] \begin{pmatrix} u_5 - u_4 \\ v_5 - v_4 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_5 - u_4 \\ v_5 - v_4 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}P}{3} \text{ (Compression)}$$

Elément 3-5

$$N_{35} = \frac{EA}{L} [\lambda_{35} \quad \mu_{35}] \begin{pmatrix} u_5 - u_3 \\ v_5 - v_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_5 - u_3 \\ v_5 - v_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}P}{6} \text{ (Tension)}$$

Exercice N°4 :

Soit le système composé de quatre éléments barres et de cinq nœuds. Au nœud 1. Une charge vertical F est appliqué au nœud 1. Les appuis des nœuds 2, 3, 4 et 5 sont des appuis doubles et au nœud 1 un appui simple. Toute les barre sont attachées au nœud 1 qui est confiné pour glisser le

longs d'une pente de 45° comme représenté à la figure IV.15. Toutes les barres sont identiques de rigidité axiale EA .

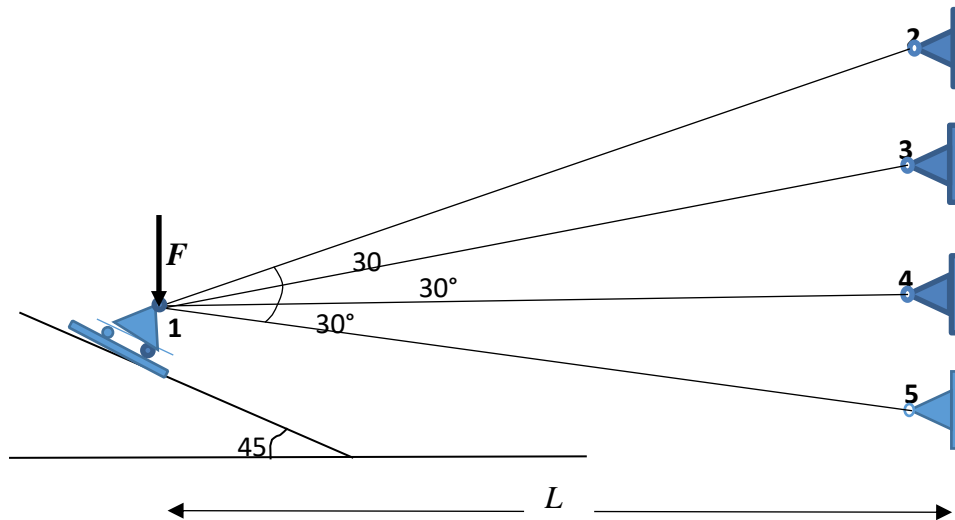


Figure IV.15. Système à quatre barres indéterminé statiquement avec un appui glissant sur une pente

On demande de calculer :

- 1- La matrice de rigidité du système.
- 2- La réaction normale à la pente.
- 3- Les déplacements au nœud 1.
- 4- Les charges axiales dans les barres.

Solution :

Les caractéristiques géométriques du système sont données dans le tableau suivant :

Barre	Longueur	Angle θ	$C = \cos\theta$	$S = \sin\theta$	C^2	S^2	CS
1-2	$2L$	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/4$	$3/4$	$\sqrt{3}/4$
1-3	$2L/\sqrt{3}$	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$3/4$	$1/4$	$\sqrt{3}/4$
1-4	L	0	1	0	1	0	0
1-5	$2L/\sqrt{3}$	$-\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$3/4$	$1/4$	$-\sqrt{3}/4$

La matrice de l'élément barre :

$$\begin{Bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$

Elément 1-2

$$\begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 1-3

$$\begin{pmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Elément 1-4

$$\begin{pmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Elément 1-5

$$\begin{pmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_5 \\ Fy_5 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_5 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

Assemblage des éléments :

$$\begin{pmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \\ Fx_2 \\ Fy_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ Fx_5 \\ Fy_5 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 9+6\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -3 & -1 & 0 & -3\sqrt{3} & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ \sqrt{3} & 3+2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -3 & -3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 3 & -\sqrt{3} \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 3\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 3 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\sqrt{3} & -3 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites :

Les déplacements aux nœuds 2,3,4 et 5 sont nuls :

$$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = u_5 = v_5 = 0$$

$$u_1 = -v_1$$

Les forces extérieures données se réduisent à la force \vec{F} appliquée au nœud 1,

$$\text{donc : } \begin{cases} F_{1x} = R \sin \alpha = R \sin 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} \\ F_{1y} = R \cos \alpha - F = \frac{R}{\sqrt{2}} - F \end{cases}$$

Puisque quatre sur cinq appuis sont fixes, la structure a seulement deux degrés de liberté. En introduisant les conditions aux limites dans la matrice globale on aura :

$$\begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{9+6\sqrt{3}}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ \frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3+2\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 9 + 6\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \frac{R}{\sqrt{2}} - F \end{pmatrix} = \frac{EA}{8L} \begin{bmatrix} 9 + 6\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 + 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

En éliminant la réaction R, on détermine la force F, c'est la réaction :

$$F = (12 + 6\sqrt{3}) \frac{EA}{8L} u_1$$

Le déplacement :

$$u_1 = -v_1 = \frac{4(2 - \sqrt{3}) FL}{3 EA}$$

Détermination de la réaction d'appui R :

$$R = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})}{3} F$$

Forces axiales :

$$\text{On a : } N = \frac{EA}{L} [c \quad s] \begin{Bmatrix} u_j & u_i \\ v_j & v_i \end{Bmatrix}$$

Elément 1-2

$$N_{12} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow N_{12} = \frac{(3\sqrt{3}-5)}{3} F \Rightarrow \text{La barre 1-2 est sollicitée en traction}$$

Elément 1-3

$$N_{13} = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{(5\sqrt{3}-9)}{3} F \Rightarrow \text{La barre 1-3 est sollicitée en compression}$$

Elément 1-4

$$N_{14} = \frac{EA}{L} [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_4 - u_1 \\ v_4 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{4(\sqrt{3}-2)}{3} F \Rightarrow \text{La barre 1-4 est sollicitée en compression}$$

Elément 1-5

$$N_{15} = \frac{\sqrt{3}EA}{2L} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 - u_1 \\ v_5 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{(\sqrt{3}-3)}{3} F \Rightarrow \text{La barre 1-5 est sollicitée en compression}$$

Chapitre V

*ÉLÉMENTS FINIS POUTRES DE
BERNOULLI-EULER*

Chapitre V

Éléments finis poutres de Bernoulli-Euler

V.1. Introduction

Les poutres sont des éléments élancés, dont une dimension (longueur) est très grande par rapport aux deux autres. On les retrouve dans beaucoup d'ouvrages de génie civil. Elles constituent les portiques de bâtiments d'habitation, de ponts ... etc. Elles sont utilisées pour reprendre, en plus de l'effort axial comme l'élément barre, un chargement perpendiculaire à son axe.

Ces éléments peuvent faire l'objet d'analyses bi ou tri dimensionnelles mais la grande différence entre les dimensions peut provoquer des défaillances numériques. C'est ainsi qu'une théorie spécifique a été développée pour ces éléments (théorie des poutres). Parmi ces théories, on trouve la théorie de Bernoulli –Euler (Ouinias, 2012 ; Seghir, 2014 ; Liu, 2015)

V.2. Poutre de Bernoulli –Euler

V.2.1. Formulation des caractéristiques élémentaires

La théorie de Bernoulli- Euler est probablement l'une des plus anciennes théories de poutres connues (Dhatt et al., 2007 ; Seghir, 2014 ; Ferradi, 2016). Elle est basée sur les trois hypothèses suivantes :

- Les sections droites restent perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation.
- Les sections planes restent planes après déformation.
- Les sections sont indéformables dans leurs plans.

Les hypothèses ci-dessus permettront de définir la cinématique de la poutre, qui définit la forme générale du déplacement de la poutre, quel que soit le chargement auquel elle sera soumise.

Le mouvement d'une poutre dans le plan (x, y) est décrit par le déplacement axial et vertical \mathbf{u} , \mathbf{v} et la rotation de la section droite déformée est égale à la tangente de la ligne moyenne courbée (Figure V.1).

Selon l'hypothèse de Bernoulli, on a :

$$u(x, y) = -y.\theta(x) \rightarrow \text{déplacement axial}$$

$$\theta = dv/dx \rightarrow \text{rotation de la section droite}$$

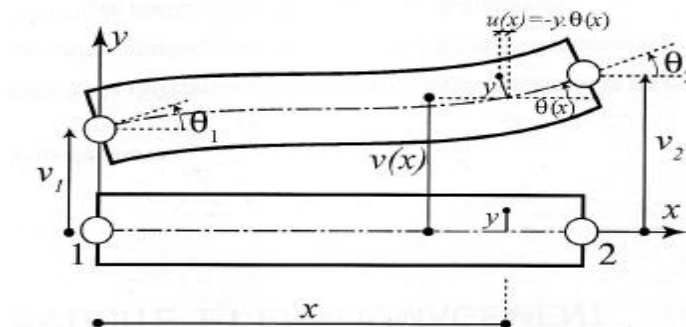


Figure V.1. Cinématique d'une poutre fléchie de Bernoulli-Euler

On considère un élément de la poutre « dx » délimité par deux sections voisines, l'une droite et l'autre inclinée.

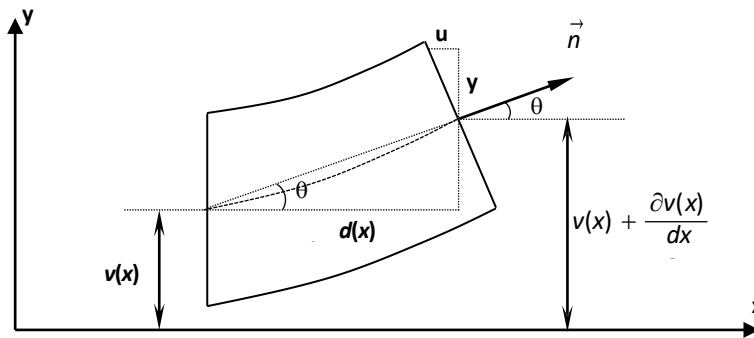


Figure V.2. Déformation d'une section de poutre

La rotation de la section déformée est tangente de la ligne moyenne courbée.

Le mouvement de la poutre dans le plan (x,y) est décrit par le déplacement axial et vertical « u et v ».

$$\text{Déplacement : } u = -\theta y = -y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{V-1})$$

$$\text{Déformation : } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{V-2})$$

$$\text{Contrainte : } \sigma = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -Ey \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{V-3})$$

$$\text{Moment de flexion : } M = -\int_A y \sigma_x dA = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{V-4})$$

Avec : $I = \int_A y^2 dA$ moment d'inertie.

Considérant l'équilibre statique de l'élément « dx » :

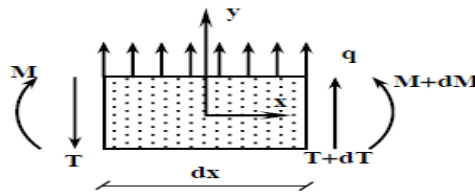


Figure V.3. Equilibre statique de l'élément

La somme des moments par rapport au centre de gravité :

$$-M + T \frac{dx}{2} + (T + dT) \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0. \quad (\text{V-5})$$

$$T dx + dT \frac{dx}{2} + dM = 0 \quad (\text{V-6})$$

On néglige les terme du second ordre, on obtient la relation de l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$T = -\frac{dM}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{V-7})$$

L'équilibre des forces verticales pour un chargement positif dans le sens de l'axe y (figure V.3) donne la relation entre le chargement « q » et l'effort tranchant « T » et relie le chargement au déplacement v :

$$T + dT + qdx - T = 0 \quad (\text{V-8})$$

$$q = -\frac{dT}{dx} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{V-9})$$

Cette équation traduit l'équilibre statique de la poutre. Dans le cas d'un mouvement, il faut ajouter dans l'équation (V.8) un terme traduisant les forces d'inertie :

$$F_i = m\delta = \rho A dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (\text{V-10})$$

Avec ρ est la masse volumique du matériau, A la section de la poutre et t représente le temps. Les équations (V-10) et (V-11) deviennent :

$$T + dT + qdx - T = F_i \quad (\text{V-11})$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x) \quad (\text{V-12})$$

L'équation (V-12) est l'équation d'Euler-Bernoulli pour la flexion des poutres. Le déplacement v est fonction de la coordonnée x le long de l'axe de la poutre et du temps t .

Dans le cas particulier d'une poutre mince (hypothèse de Bernoulli, la relation d'équilibre s'écrit (Dhatt et al., 2007 ; Liu, 2015) :

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - q = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad \forall t > 0. \quad (\text{V-13})$$

Avec :

- La loi de comportement : $M = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, I : moment d'inertie. (V-14)
- Les conditions aux limites : $u(x = 0, t) = u_s$, et $\frac{\partial u}{\partial x}(x = 0, t) = 0$.
 $M(x = L, t) = M$, et $\frac{\partial M}{\partial x}(x = L, t) = T$.
- Les conditions initiales : $u(x, t = 0) = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v_0$.

Où : $u(x, t) = v(x, t)$: Déplacement transversal (m).

M : Moment (N.m).

T : Effort tranchant (N).

ρ : Masse volumique (kg/m³).

q : Sollicitation linéaire (N/m).

V.2.2. Formulation variationnelle

Considérant une poutre de Bernoulli, de longueur L , fléchie sous une charge répartie q (Khennane, 1997 ; Cazenave, 2010 ; Liu, 2015).

$$- \text{ L'énergie interne est : } U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma \varepsilon dA = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx \quad (\text{V-15})$$

$$- \text{ Le travail extérieur est : } W = \int_0^L q v dx \quad (\text{V-16})$$

$$- \text{ L'énergie potentielle est : } \Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L (v'')^2 dx - \int_0^L q v dx \quad (\text{V-17})$$

V.3. Etude d'un élément finis poutre

V.3.1. Approximation du champ de déplacement

Soit l'élément poutre à deux nœuds, représenté par la figure V-4.

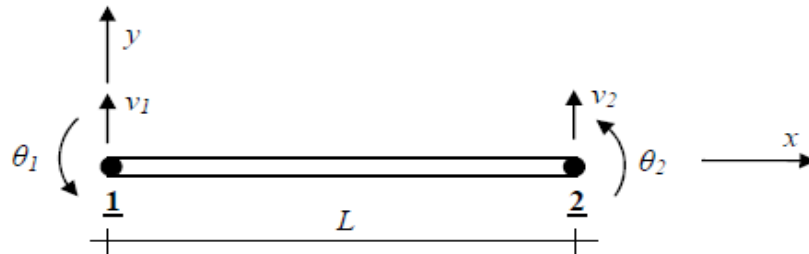


Figure V.4. Élément fini de poutre continue (signes positifs des DDL)

Le nombre de degrés de liberté (DDL) de l'élément poutre est égal au produit du nombre de nœuds par le nombre de degrés de liberté correspond à chaque nœud. Dans ce cas nous avons deux nœuds et deux degrés de liberté pour chacun, d'où quatre degrés au total (Figure V.4) (Reddy, 2005 ; Cazenave, 2010 ; Liu, 2015 ; Cuillier, 2016).

Les nœuds 1 et 2 de l'élément poutre sont situés aux extrémités, et les variables nodales sont les déplacements transversaux V_1 et V_2 ainsi que les rotations θ_1 et θ_2 .

La fonction déplacement $V(x)$ peut être discrétisée tels que :

$$V(x) = f(V_1, V_2, \theta_1, \theta_2) \quad (\text{V-18})$$

Sous les conditions aux limites :

$$\text{Déplacement au nœud 1 : } V(x=0) = V_1 \quad , \text{ et la rotation : } \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1$$

$$\text{Déplacement au nœud 2 : } V(x=L) = V_2 \quad , \text{ et la rotation : } \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2$$

D'après les conditions de frontière et la nature unidimensionnelle de l'élément en termes de variable indépendante, la fonction de déplacement satisfaisante prend la forme suivante :

$$V(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (\text{V-19})$$

Sous forme de produit matriciel, on a :

$$V(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-20})$$

L'application des conditions de frontières, nous donne :

$$\text{Nœud 1 : } \quad V(x=0) = a_0$$

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = a_1 = \theta_1$$

$$\text{Nœud 2 : } \quad V(x=L) = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3$$

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=L} = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2 = \theta_2$$

Sous forme matricielle, on écrit :

$$V_1 = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-21})$$

$$\theta_1 = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-22})$$

$$V_2 = \{1 \quad L \quad L^2 \quad L^3\} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-23})$$

$$\theta_2 = \{0 \quad 1 \quad 2L \quad 3L^2\} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-24})$$

La combinaison de ces équations nous permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\delta\} = [A]\{a\} \quad (\text{V-25})$$

La matrice étant connue, le vecteur des coefficients $\{a\}$ peut être obtenu en inversant l'équation précédente :

$$\{a\} = [A]^{-1}\{\delta\} \quad (\text{V-26})$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-27})$$

D'où :

$$V(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-28})$$

$$V(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) V_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) V_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \theta_2 \quad (\text{V-29})$$

Sous la forme réduite, le déplacement $V(x)$ s'écrit :

$$V(x) = N_1(x)V_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)V_2 + N_4(x)\theta_2 \quad (\text{V-30})$$

Sous forme matricielle :

$$V(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = N(x)\{\delta\} \quad (\text{V-31})$$

Les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$N(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & -\frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (\text{V-32})$$

➤ **Contrainte**

La variation de la contrainte normale située à une position x de la poutre :

$$\sigma(x, y) = -yE \frac{d^2 v}{dx^2} = -yE \frac{d^2 [N]}{dx^2} \{\delta\} \quad (\text{V-33})$$

Les valeurs maximum et minimum dans n'importe quelle section de l'élément se trouvent à une distance y maximale (positive ou négative) de la surface neutre.

$$\sigma(x) = -yE \frac{d^2 [N]}{dx^2} \{\delta\} \quad (\text{V-34})$$

Remplaçant les fonctions d'interpolation et effectuons les différentiations, nous obtenons :

$$\sigma(x) = yE \frac{d^2}{dx^2} \left[\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) V_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) V_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \theta_2 \right] \quad (\text{V-35})$$

$$\sigma(x) = yE \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) V_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) \theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) V_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \theta_2 \right] \quad (\text{V-36})$$

Sous la forme de produit des vecteurs, on écrit :

$$\sigma(x) = yE \left[\left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}\right) \quad \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{4}{L}\right) \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{6x}{L^2} + \frac{2}{L}\right) \right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-37})$$

➤ Déformation

La matrice qui regroupe la déformation et le déplacement est :

$$[B] = -y \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right] \quad (\text{V-38})$$

Les propriétés élastiques de l'élément nous permettent de voir la relation entre les contraintes et les déformations par la loi suivante :

$$\sigma(x) = D\varepsilon(x) - yE \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-39})$$

Où D est la matrice de déformation élastique de l'élément, dans ce cas $D = E$. par comparaison on déduit que :

$$\varepsilon(x) = -y \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [B]\{\delta\} \quad (\text{V-40})$$

V.4. Cisaillement et les Condition de frontière pour les poutres

Les conditions de frontière fréquemment rencontrées en pratiques sont représentées dans la figure V.5. En chaque appui, trois conditions sont données de nature cinématique ou mécanique : le déplacement, la rotation et le moment. La première dérivée du déplacement donne à la rotation, la deuxième dérivée donne le moment fléchissant et la troisième dérivée donne la force de cisaillement (Batoz et al., 1990 ; Ouinas, 2012 ; Reddy, 2005).

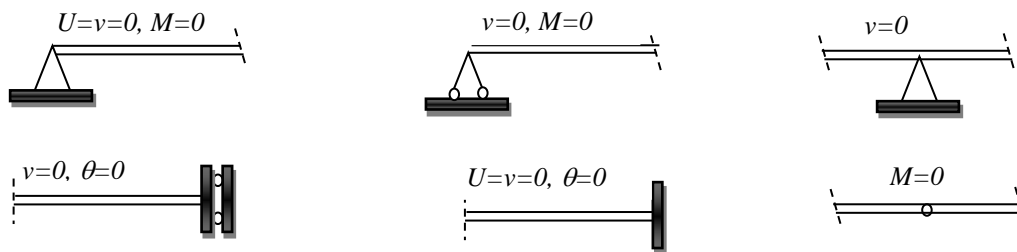


Figure V.5. Conditions de frontières typiques de poutre

Les conditions de frontières à un point x_0 le long d'une poutre sont suivant les indications du tableau ci-dessous (Ouinas, 2012) :

Conditions	A gauche de x_0	A droite de x_0
Déplacement	$v(x_0) = v_{x_0}$	$v(x_0) = v_{x_0}$
Rotation	$\theta(x_0) = \frac{\partial v(x_0)}{\partial x} = \theta_{x_0}$	$\theta(x_0) = \frac{\partial v(x_0)}{\partial x} = \theta_{x_0}$
Moment	$-EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = M_{x_0}$	$EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = M_{x_0}$

Cisaillement	$EI \frac{\partial^3 v(x_0)}{\partial x^3} = F_{x_0}$	$-EI \frac{\partial^3 v(x_0)}{\partial x^3} = F_{x_0}$
---------------------	---	--

Des états de frontière plus compliqués sont possibles quand des poutres sont soutenues par d'autres membres élastiques. De tels appuis sont typiquement représentés par des ressorts linéaires ou spirales. La force en ressorts linéaires de constante de rigidité K située à x_0 , est :

$$F(x_0) = kv(x_0) \quad (V-41)$$

Cette force doit être équilibrée par le cisaillement à l'appui. En utilisant la figure V.6 des poutres libres et la convention de signe pour le cisaillement à la fin du segment, l'état de frontière approprié est :

$$\text{A droite} \quad EI \frac{\partial^3 v(x_0)}{\partial x^3} - k\theta = 0 \quad \text{et à gauche} \quad EI \frac{\partial^3 v(x_0)}{\partial x^3} + k\theta = 0 \quad (V-42)$$

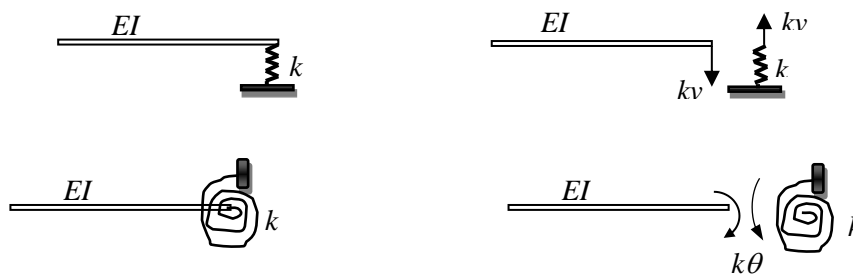


Figure V.6. Condition de frontière des ressorts

Un ressort de rotation (spiral) produit un moment égal à $k\theta$. La condition de frontière à l'extrémité droite et gauche de la poutre soutenue par un ressort de rotation est :

$$\text{A droite} \quad EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} + k\theta = 0 \quad \text{et à gauche} \quad EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} - k\theta = 0 \quad (V-43)$$

V.5. Matrice de rigidité élémentaire d'une poutre

La matrice de rigidité est calculée à partir de l'équation générale suivante (Reddy, 2005 ; Liu, 2015 ; Cuillier, 2016) :

$$[Ke] = \int_v [B]^T E [B] dv \quad (V-44)$$

$$[Ke] = E \int_A y^2 dA \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \right] dx \quad (V-45)$$

En effectuant le produit de deux matrices, on obtient :

$$[Ke] = EI \int_0^L \begin{pmatrix} \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)^2 & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \\ \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)^2 & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \\ \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)^2 & \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \\ \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)\left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)\left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) & \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right)^2 \end{pmatrix} dx \quad (V-46)$$

Après l'intégration, on trouve la matrice de rigidité d'un élément poutre $[Ke]$:

$$[Ke] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (V-47)$$

V.6. Calcul des forces internes

Les efforts internes (les moments fléchissant $M(x)$ et les efforts tranchants $T(x)$) peuvent être écrits en fonction des déplacements $V(x)$.

Tenant en compte l'équation du déplacement $V(x)$, ces efforts internes peuvent être écrits :

$$T(x) = EI \frac{\partial^3 V(x)}{\partial x^3} \quad (V-48)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \quad (V-49)$$

En tenant compte de l'équation du déplacement $V(x)$, ces efforts internes sont :

$$T(x) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (V-50)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (V-51)$$

En dérivant les fonctions de formes :

$$T(x) = \frac{EI}{L^3} [12 \quad 6L \quad -12 \quad 6L] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (V-52)$$

$$M(x) = \frac{EI}{L^3} [12x + 6L \quad 6Lx - 4L^2 \quad -12x + 6L \quad 6Lx - 2L^2] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (V-53)$$

On applique les conditions aux limites élémentaires (figure V.4) suivantes :

- $T(0) = T_1$
- $M(0) = M_1$
- $T(L) = T_2$
- $M(L) = M_2$

On aura :

$$T_1 = \frac{EI}{L^3} [12 \quad 6L \quad -12 \quad 6L] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-54})$$

$$M_1 = \frac{EI}{L^3} [6L \quad -4L^2 \quad +6L \quad -2L^2] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-55})$$

$$-T_2 = \frac{EI}{L^3} [12 \quad 6L \quad -12 \quad 6L] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-56})$$

$$-M_2 = \frac{EI}{L^3} [6L \quad 2L^2 \quad -6L \quad 4L^2] \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-57})$$

En assemblant les équations précédentes sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-58})$$

V.7. Vecteur force dû à une charge répartie q

Pour l'élément de barre à 2 nœuds, la charge répartie doit être transformée en charges nodales qui produisent un travail équivalent (Reddy, 2005 ; Ouinas, 2012 ; Seghir, 2014).

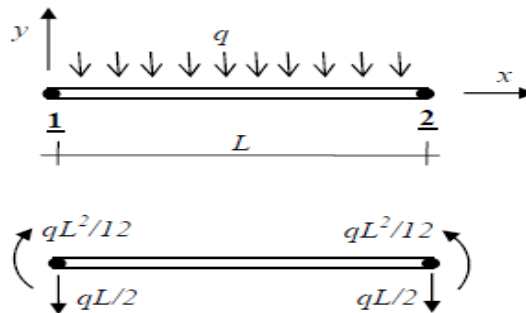


Figure V.7 Vecteur force du a une charge répartie

$$\{f\} = \int_L -qN^T dx \quad (\text{V-59})$$

Après calculs, on trouve le vecteur de force f :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ +qL^2/12 \end{Bmatrix} \quad (\text{V-60})$$

Les charges nodales équivalentes doivent être ajoutées aux extrémités de chaque élément en tant que charges externes. La figure V.7 résume les charges nodales équivalentes pour les cas courants de charges réparties. Compte tenu des valeurs T_1 , M_1 , T_2 , M_2 des forces nodales ainsi que les charges nodales équivalentes f_1 , m_1 , f_2 , m_2 , l'équation (V-32) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} -f_1 \\ -m_1 \\ -f_2 \\ +m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{V-61})$$

V.8. Élément fini poutre-barre

La superposition de l'élément barre à 2 nœuds et l'élément poutre continue de Bernoulli, nous donne l'élément de poutre 2-D, avec 3 DDL par nœud : deux déplacements et une rotation. (Reddy, 2005 ; Liu, 2015 ; Cuillier, 2016).

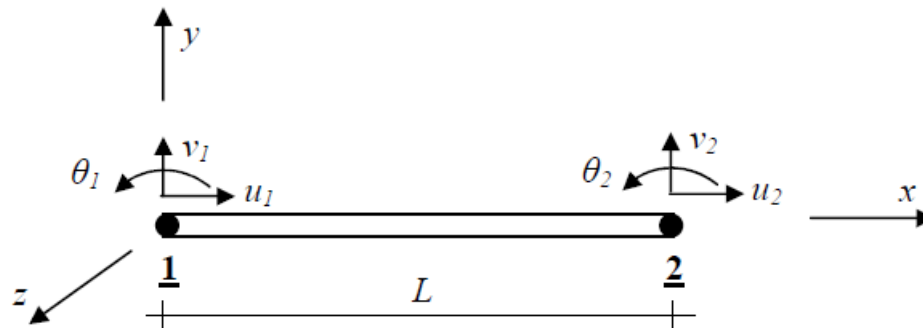


Figure V.8. Élément fini de poutre 2-D (portique plan)

Le nombre des DDL par élément est donc 6 :

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2\} \quad (\text{V-62})$$

La matrice de rigidité élémentaire K_e s'obtient en combinant :

- Matrice de la barre \rightarrow l'état axial (N, u)
- Matrice de la poutre continue \rightarrow l'état flexionnel (M, v)

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{V-63})$$

V.8.1. Transformation des coordonnées

Quand l'élément est orienté dans le plan bidimensionnel avec un angle θ par rapport à l'axe des abscisses x , la matrice de rigidité subit une transformation dans le système globale. La taille de la matrice de rotation de l'élément poutre 2-D est de 6×6 . La rotation s'effectue autour des axes z

local et Z global (même direction), cela implique que $\theta_l = \theta_g$. (Reddy, 2005 ; Liu, 2015 ; Cuillier, 2016).

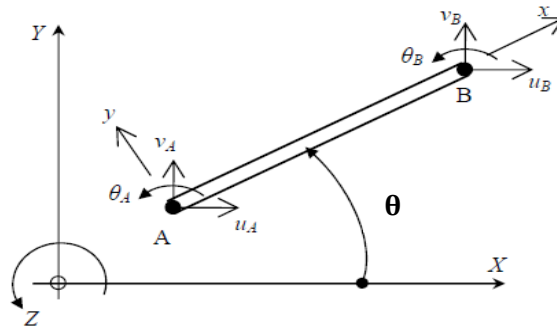


Figure V.9. Transformation des systèmes

En se basant sur la figure V.9, on déduit les relations des déplacements comme suit :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = u_i \cos\theta + v_i \sin\theta \\ \bar{v}_i = -u_i \sin\theta + v_i \cos\theta \\ \bar{M}_i = M_i \end{cases} \quad (\text{V-64})$$

$$\begin{cases} \bar{u}_j = u_j \cos\theta + v_j \sin\theta \\ \bar{v}_j = -u_j \sin\theta + v_j \cos\theta \\ \bar{M}_j = M_j \end{cases} \quad (\text{V-65})$$

Sous la forme matricielle on écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{V-66})$$

On pose : $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$

La matrice de transformation du repère local vers le repère global est :

$$\{T\} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V-67})$$

La matrice de rigidité élémentaire dans le repère global sera :

$$[K_g] = [T^T][K_L][T] \quad (\text{V-68})$$

C'est une matrice de rigidité plane (6×6) ; dans l'espace 3-D, elle serait (12×12).

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_i \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} (R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2) & (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & -\frac{6}{L}\mu & -(R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2) & (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & -\frac{6}{L}\mu \\ (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2 & \frac{6}{L}\lambda & (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & -(R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2) & \frac{6}{L}\lambda \\ -\frac{6}{L}\mu & \frac{6}{L}\lambda & 4 & \frac{6}{L}\mu & -\frac{6}{L}\lambda & 2 \\ -(R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2) & (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & \frac{6}{L}\mu & R\lambda^2 + \frac{12}{L^2}\mu^2 & (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & \frac{6}{L}\mu \\ (-R + \frac{12}{L^2})\lambda\mu & -(R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2) & -\frac{6}{L}\lambda & (R - \frac{12}{L^2})\lambda\mu & (R\mu^2 + \frac{12}{L^2}\lambda^2) & -\frac{6}{L}\lambda \\ -\frac{6}{L}\mu & \frac{6}{L}\lambda & 2 & \frac{6}{L}\mu & -\frac{6}{L}\lambda & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (V-69)$$

Où R est défini par le rapport de la section de l'élément et le moment d'inertie $R = (A/I)$.

V.9. Application

Exercice 1 :

Soit la poutre de la figure V.10, sollicitée par une charge concentrée P située à une distance L par rapport à l'appui A :

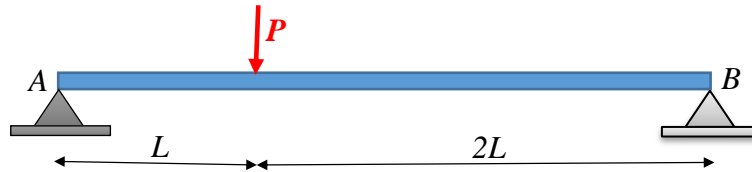


Figure V.10. Poutre sollicitée par une charge concentrée

On demande de :

- 1- Déterminer la matrice de rigidité globale.
- 2- Déterminer les déplacements nodaux et les rotations nodales.
- 3- Calculer les réactions au niveau des appuis.

Solution :

La poutre est discrétisée par les éléments suivants :

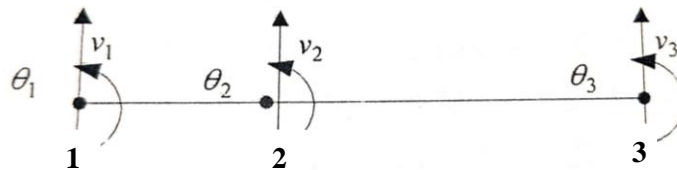


Figure V.11. Discrétisation de la poutre

Détermination des matrices de rigidités élémentaires :

Élément 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} \frac{EI}{8L^3} \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ 12L & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ -12 & -12L & 12 & -12L \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3L/2 & -3/2 & 3L/2 \\ 3L/2 & 2L^2 & -3L/2 & L^2 \\ -3/2 & -3L/2 & 3/2 & -3L/2 \\ 3L/2 & L^2 & -3L/2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Assemblage :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 27/2 & -9L/2 & -3/2 & 3L/2 \\ 6L & 2L^2 & -9L/2 & 6L^2 & -3L/2 & L^2 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3L/2 & 3/2 & -3L/2 \\ 0 & 0 & 3L/2 & L^2 & -3L/2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Conditions aux limites :

Les appuis A et B sont des appuis doubles :

$$v_1 = v_3 = 0.$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0$$

Les réactions d'appuis F_1 et F_3 existent.

$$\begin{pmatrix} F_1 = ? \\ M_1 = 0 \\ F_2 = -P \\ M_2 = 0 \\ F_3 = ? \\ M_3 = 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 12L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 27/2 & -9L/2 & -3/2 & 3L/2 \\ 6L & 2L^2 & -9L/2 & 6L^2 & -3L/2 & L^2 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3L/2 & 3/2 & -3L/2 \\ 0 & 0 & 3L/2 & L^2 & -3L/2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

La matrice réduite est :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 \\ -6L & 27/2 & -9L/2 & 2L/2 \\ 2L^2 & -9L/2 & 6L^2 & L^2 \\ 0 & 3L/2 & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Après calcul le vecteur des déplacements est :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{EI} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9}L \\ \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Calcul des réactions des appuis :

A partir de la matrice globale on détermine les réactions F_1 et F_2 .

$$\begin{cases} F_1 = \frac{EI}{L^3} (6L\theta_1 - 12v_2 + 6L\theta_2) = \frac{EI}{L^3} \left(6L \left(-\frac{5PL^2}{9EI} \right) - 12 \left(-\frac{4PL^2}{9EI} \right) + 6L \left(-\frac{2PL^2}{9EI} \right) \right) \\ F_3 = \frac{EI}{L^3} \left(-\frac{3}{2}v_2 - \frac{3L}{2}\theta_2 - \frac{3L}{2}\theta_3 \right) = \frac{EI}{L^3} \left(-\frac{3}{2} \left(-\frac{4PL^3}{9EI} \right) - \frac{3L}{2} \left(-\frac{2PL^2}{9EI} \right) - \frac{3L}{2} \left(-\frac{4PL^2}{9EI} \right) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1 = \left(-\frac{30P}{9} + \frac{48P}{9} - \frac{12P}{9} \right) = \frac{2}{3}P \\ F_3 = \frac{EI}{L^2} \left(\frac{6P}{9} + \frac{3P}{9} - \frac{6P}{9} \right) = \frac{1}{3}P \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit la poutre encastrée dans ses deux extrémités (1 et 4) sollicitée à des charges concentrées et opposées, distantes de longueur L :

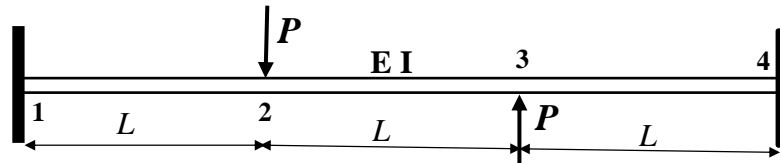


Figure V.13. Poutre encastrée à ces deux extrémités

On demande de :

- 1- Déterminer la matrice de rigidité globale.
- 2- Déterminer les déplacements nodaux et les rotations nodales.
- 3- Déterminer les efforts tranchants, les moments fléchissant.
- 4- Calculer les réactions d'appuis.

Solution :

La discrétisation de la poutre en éléments finis :

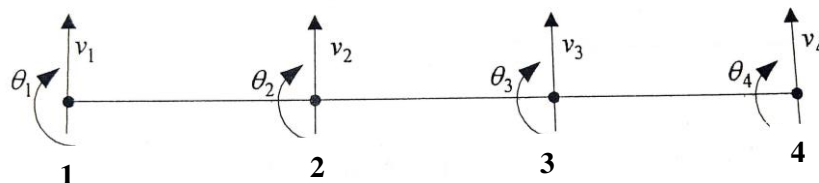


Figure V.14. Discrétisation de la poutre

Détermination des matrices de rigidité élémentaires :

Élément 1-2

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Elément 2-3

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Elément 3-4

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Conditions aux limites :

Aux nœuds 1 et 4 on a des encastresments : $v_1 = v_4 = \theta_1 = \theta_4 = 0$.

Les moments externes aux nœuds 2 et 3 sont nuls, $M_2 = M_3 = 0$.

$$\begin{Bmatrix} F_1 = ? \\ M_1 = ? \\ F_2 = -P \\ M_2 = 0 \\ F_3 = P \\ M_3 = 0 \\ F_4 = ? \\ M_4 = ? \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 = 0 \\ \theta_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice réduite :

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 24 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 24 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = -v_2 \\ \theta_3 = \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Après l'analyse mathématique, on constate que $\theta_3 = \theta_2$ et $v_3 = -v_2$.

En soustrayant la première colonne et la troisième colonne et en additionnant la deuxième colonne et la quatrième colonne, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 36 & 6L \\ 6L & 10L^2 \\ -36 & -6L \\ -6L & 10L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \theta_2 = \theta_3 = \frac{3PL^2}{162EI} \\ v_2 = -v_3 = -\frac{5PL^2}{162EI} \end{cases}$$

Les efforts tranchants et les moments fléchissant :

Elément 1-2

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5PL^2 \\ \frac{3PL^2}{162EI} \end{pmatrix} = \frac{P}{27} \begin{bmatrix} 13 \\ 6L \\ -13 \\ 7L \end{bmatrix}$$

Élément 2-3

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -5PL^2 \\ \frac{162EI}{3PL^2} \\ \frac{162EI}{5PL^2} \\ \frac{162EI}{3PL^2} \\ \frac{162EI}{162EI} \end{pmatrix} = \frac{P}{27} \begin{bmatrix} -14 \\ -7L \\ 14 \\ -7L \end{bmatrix}$$

Élément 3-4

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5PL^2}{162EI} \\ \frac{162EI}{3PL^2} \\ \frac{162EI}{162EI} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{P}{27} \begin{bmatrix} 13 \\ 7L \\ -13 \\ 6L \end{bmatrix}$$

Les réactions aux appuis :

$$F_1 = \frac{EI}{L^3} (-12v_2 + 6L\theta_2) = \frac{13}{27}P \quad ; \quad M_1 = \frac{EI}{L^3} (-6Lv_2 + 2L^2\theta_2) = \frac{6}{27}PL$$

$$F_4 = \frac{EI}{L^3} (-12v_3 - 6L\theta_3) = -\frac{13}{27}P \quad ; \quad M_4 = \frac{EI}{L^3} (6Lv_3 + 2L^2\theta_3) = \frac{-6}{27}P$$

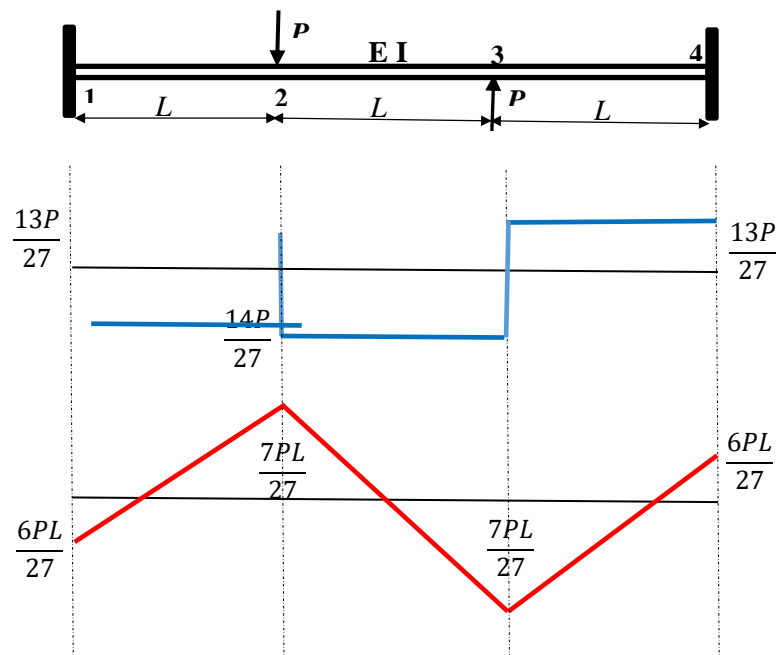


Figure V.15. Effort tranchant et moment fléchissant

Exercice 3 :

Une poutre droite à trois nœuds 1, 2 et 3, de section droite constante, est encastree au nœud 1 et repose sur un appui simple aux nœuds 2 et 3 (figure V.16). Soit E le module d'Young du matériau et EI_z la rigidité linéique de flexion de la poutre.

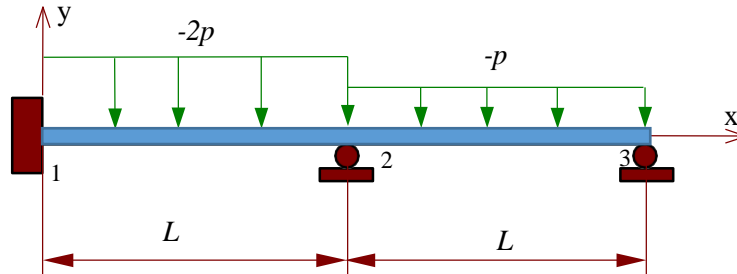


Figure V.16. Système d'une poutre droite à charges réparties

Elle porte sur l'élément (1-2) une charge uniformément répartie d'intensité $-2P$, et sur l'élément (2-3) une charge uniformément répartie d'intensité $-P$. On demande de calculer :

- Déterminer la matrice de rigidité globale.
- Déterminer les déplacements nodaux et les rotations nodales.
- Calculer les réactions au niveau des appuis.
- Calculer les forces élémentaires
- Tracer les diagrammes de la déformée, de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Solution :

- Détermination de la matrice de rigidité globale

Les éléments (1-2) et (2-3) sont identiques et leur matrice de rigidité est égale à :

$$[Ke] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs élémentaires équivalents aux forces réparties sont :

$$\text{Élément (1-2) : } \{f_{eq}\} = \begin{pmatrix} PL \\ PL^2/6 \\ PL \\ -PL^2/6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Élément (2-3) : } \{f_{eq}\} = \begin{pmatrix} PL/2 \\ PL^2/12 \\ PL/2 \\ -PL^2/12 \end{pmatrix}$$

Élément (1-2)

$$\begin{pmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PL \\ PL^2/6 \\ PL \\ -PL^2/6 \end{pmatrix}$$

Elément (2-3)

$$\begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 12L & -12 & 12L \\ 6L & 16L^2 & -12L & 8L^2 \\ -12 & -12L & 12 & -12L \\ 12L & 8L^2 & -12L & 16L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL/2 \\ PL^2/12 \\ PL/2 \\ -PL^2/12 \end{Bmatrix}$$

Assemblage des éléments :

La relation efforts – déplacement globale s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL \\ PL^2/6 \\ 3PL/2 \\ -PL^2/12 \\ PL/2 \\ -PL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

- Détermination des déplacements nodaux et les rotations nodales

Conditions aux limites :

Au niveau des encastremets, les déplacements et les rotations sont nuls,

$$v_1 = v_2 = v_3 = \theta_{z1} = 0.$$

Les moments externes aux nœuds 2 et 3 sont nuls, $M_{z2} = M_{z3} = 0$.

La relation globale se réduit :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ 0 \\ F_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ 8L^2 & 2L^2 \\ -6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL \\ PL^2/6 \\ 3PL/2 \\ -PL^2/12 \\ PL/2 \\ -PL^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -PL^2/12 \\ -PL^2/12 \end{Bmatrix}$$

On déduit :

$$\theta_{z2} = \frac{PL^3}{168EI} = 0,0059 \frac{PL^3}{EI}$$

$$\theta_{z3} = \frac{PL^3}{56EI} = 0,0178 \frac{PL^3}{EI}$$

- Calcul des réactions aux appuis

Les réactions aux appuis sont égales :

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6L & 0 \\ 2L^2 & 0 \\ 0 & 6L \\ -6L & -6L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} PL \\ PL^2/6 \\ 3PL/2 \\ PL/2 \end{Bmatrix}$$

Après résolution du système on trouve :

$$F_{y1} = \frac{29PL}{28} = 1,036PL \quad ; \quad M_{z1} = \frac{5Pl^2}{28} = 0,179PL^2$$

$$F_{y2} = \frac{45PL}{28} = 1,607PL \quad ; \quad F_{y3} = \frac{5PL}{14} = 0,357PL$$

Vérification :

$$F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} - 2Pl - Pl = 0$$

$$M_{z1} + M_{z2} + M_{z3} + LF_{y2} + 2LF_{y3} - PL^2 - 1,5PL^2 = 0$$

L'équilibre de la structure est vérifié.

- Calcul des forces élémentaires :

Les forces élémentaires sont calculer en utilisant la relation suivante :

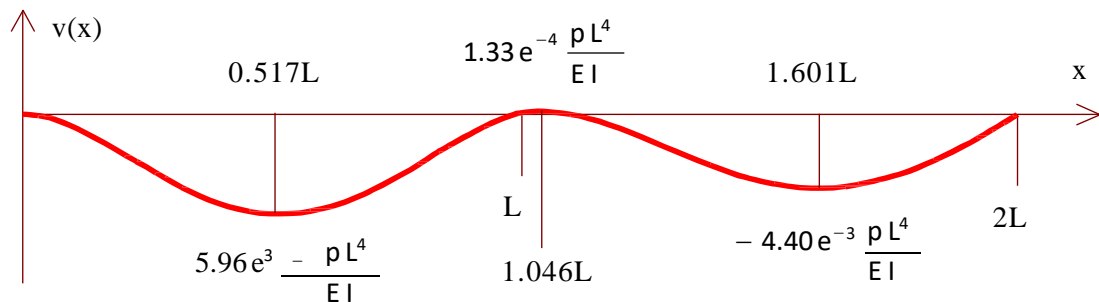
$$\{F\} = [K]\{\delta\} + \{f_{eq}\}$$

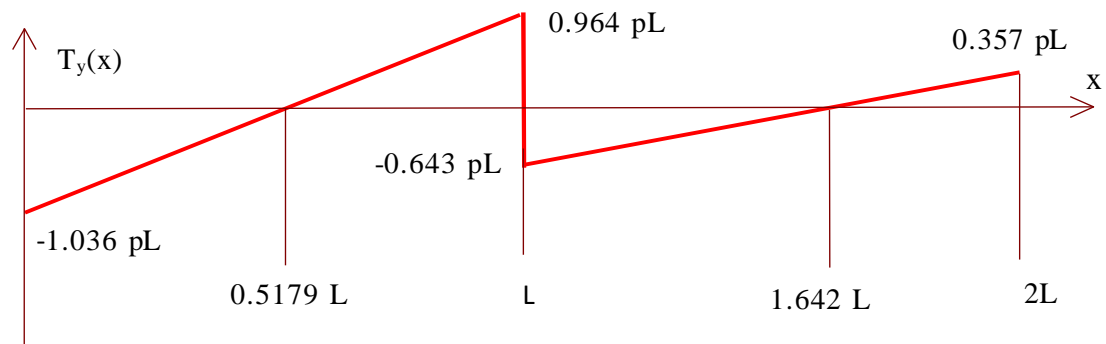
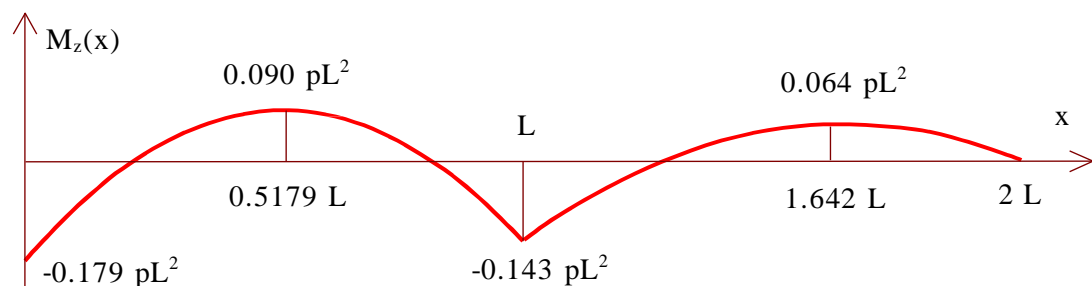
$$\text{Elément (1-2)} : \{F\} = \begin{Bmatrix} 29PL/28 \\ 5PL^2/28 \\ 27PL/28 \\ -PL^2/7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,036PL \\ 0,179PL^2 \\ 0,964PL \\ -0,143PL^2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Elément (2-3)} : \{F\} = \begin{Bmatrix} 9PL/14 \\ PL^2/7 \\ 5PL/14 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,643PL \\ 0,143PL^2 \\ 0,357PL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Diagrammes de la déformée, de l'effort tranchant et du moment fléchissant :

Déformée :



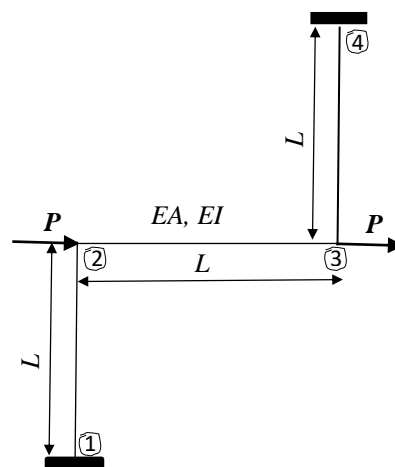
Effort tranchant :**Moment fléchissant :****Figure V.17.** Diagramme de la déformée, de l'effort tranchant et du moment fléchissant.**Exercice 4 :**

Soit le système de la figure V.18, composé de trois barres et deux charges concentrées P aux nœuds 2 et 3.

Les longueurs des barres sont identiques (L) et leurs rigidités linéiques axiales et de flexions sont respectivement EA et EI .

On demande de :

- Calculer les déplacements nodaux
- Calculer les réactions d'appuis

**Figure V.18.** Système antisymétrique à trois barres

Solution :

La structure est composée de trois éléments barres dont les sinus et cosinus directeurs pour chaque éléments barre sont regroupés dans le tableau suivant :

Barre	Longueur	Angle θ	C=cos θ	S=sin θ	C ²	S ²	CS
1-2	L	$\pi/2$	0	1	0	1	0
2-3	L	2π	1	0	1	0	0
3-4	L	$\pi/2$	0	1	0	1	0

Détermination des matrices élémentaires :

Eléments 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{-6}{L} & \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{-6}{L} \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 \\ \frac{-6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 \\ \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} \\ 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 \\ \frac{-6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Eléments 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & \frac{-12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 4 & 0 & \frac{-6}{L} & 2 \\ -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12}{L^2} & \frac{-6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{-6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 2 & 0 & \frac{-6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Eléments 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{-6}{L} & \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{-6}{L} \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 \\ \frac{-6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 \\ \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & \frac{-12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} \\ 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 \\ \frac{-6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Où R est défini par le rapport de la section de l'élément et le moment d'inertie $R=(A/I)$.

Assemblage des éléments :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & R + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & 8 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_{x1}=? \\ F_{y1}=? \\ M_1=? \\ F_{x2}=? \\ F_{y2}=P \\ M_2=0 \\ F_{x3}=P \\ F_{y3}=0 \\ M_3=0 \\ F_{x4}=? \\ F_{y4}=? \\ M_4=? \end{cases} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{L} & 0 & 4 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & R + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & 8 & \frac{6}{L} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 0 & 2 & \frac{6}{L} & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1=0 \\ v_1=0 \\ \theta_1=0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ u_4=0 \\ v_4=0 \\ \theta_4=0 \end{cases}$$

Conditions aux limites :

Au niveau des encastremets, les déplacements et les rotations sont nuls,

$$u_1 = v_1 = \theta_1 = 0$$

$$u_4 = v_4 = \theta_4 = 0$$

$$F_{2y} = F_{3y} = M_2 = M_3 = 0$$

Après simplification, la matrice globale devient :

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} R + \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} & -R & 0 & 0 \\ 0 & R + \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & \frac{6}{L} & 8 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -R & 0 & 0 & R + \frac{12}{L^2} & 0 & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & R + \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & -\frac{6}{L} & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Le système est antisymétrique, on peut déduire :
$$\begin{cases} u_2 = u_3 \\ v_2 = -v_3 \\ \theta_2 = -\theta_3 \end{cases}$$

On additionne la première colonne et la quatrième, et on soustraie la deuxième colonne de la cinquième, et la troisième de la sixième. On aura :

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} \\ 0 & R + \frac{24}{L^2} & 0 \\ \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 \\ \frac{12}{L^2} & 0 & \frac{6}{L} \\ 0 & -R - \frac{24}{L^2} & 0 \\ -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Après résolution de ce système, on aura les déplacements :

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{6EI} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

- Calcul des réactions d'appuis :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x1} = \frac{EI}{L} \left(-\frac{12}{L^2} u_2 - \frac{6}{L} \theta_2 \right) = -P \\ F_{y1} = 0 \\ M_1 = \frac{EI}{L} \left(\frac{6}{L} u_2 + 2\theta_2 \right) = \frac{2PL}{3} \\ F_{x4} = \frac{EI}{L} \left(-\frac{12}{L^2} u_2 - \frac{6}{L} (-\theta_2) \right) = -P \\ F_{y4} = 0 \\ M_1 = \frac{EI}{L} \left(-\frac{6}{L} u_2 + 2(-\theta_2) \right) = -\frac{2PL}{3} \end{array} \right.$$

Chapitre VI

*FORMULATION VARIATIONNELLE DU
PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ*

Chapitre VI

Formulation variationnelle du problème d'élasticité**VI.1. Introduction**

La formulation variationnelle représente la formulation dans laquelle les équations gouvernantes sont transformées à une forme intégrale pondérée équivalente et qui n'est pas forcément équivalente au principe variationnelle.

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons utilisé des méthodes d'analyse structurelle pour développer les matrices de rigidité des éléments barres et poutres. Ces derniers sont des éléments unidimensionnels dont les solutions exactes des équations différentielles de leurs comportements sont bien connues.

Pour d'autres problèmes structurels en deux et trois dimensions, de telles approches directes sont inexistantes pour la raison qu'il n'est pas possible de trouver des solutions analytiques aux équations différentielles régissant leur comportement, sauf dans le cas de géométries très simples. L'alternative est de remplacer les équations différentielles par des équations algébriques approchées.

VI.2. Formulation variationnelle

Dans cette partie de ce chapitre, nous nous intéressons aux formulations variationnelles (dites intégrales) des équations de comportement d'un système physique que l'on connaît généralement sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis discrétise une formulation intégrale pour conduire un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007).

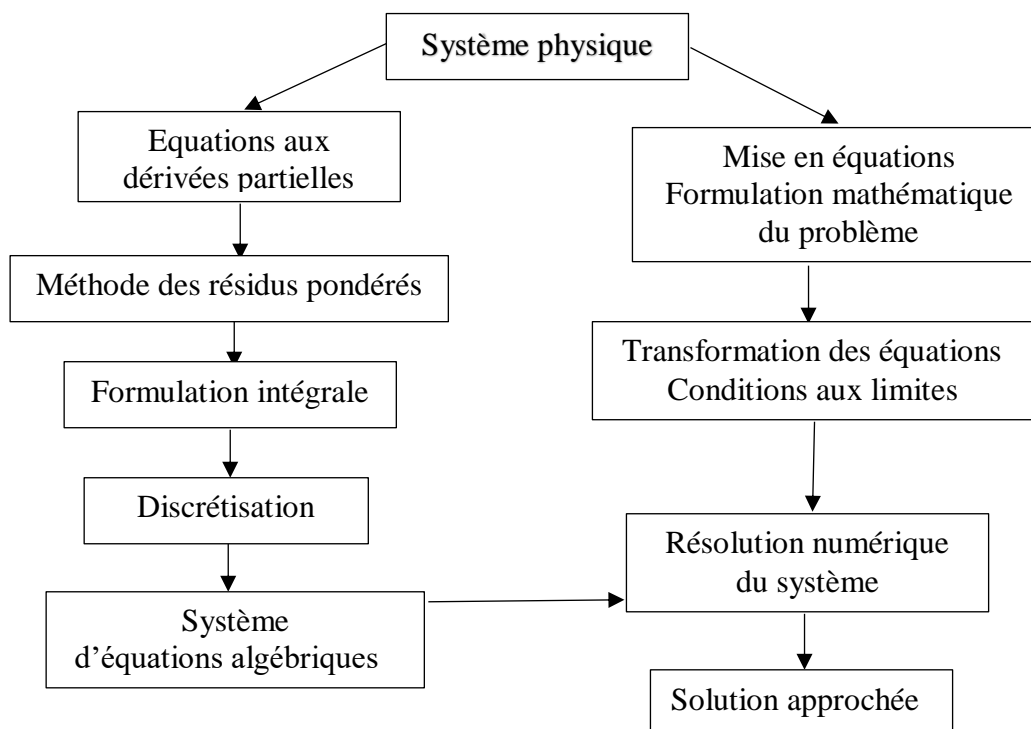


Figure VI.1. Organigramme de résolution d'un système physique

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables u (déplacements, pressions, températures, contraintes, concentrations, etc).

Le modèle mathématique, basé sur des hypothèses simplificatrices, permet d'écrire des relations entre ces variables en utilisant les lois de la physique. Ces équations sont des équations aux dérivées partielles.

L'écriture d'un problème physique sous la forme d'équation aux dérivées partielles est appelée écriture forte ou forme forte.

L'écriture d'un problème physique sous la forme intégrale avec pondération par une fonction test ou par intégration par partie est appelée écriture faible ou forme faible.

VI.2.1. Forme intégrale

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit (Sghir, 2014 ; Manet, 2015 ; Cuillier, 2016).

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$A(u) = 0 \mid \Omega ; B(u) = 0 \mid \Gamma \quad (\text{VI-1})$$

Où $A(u)$ est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour Γ (Figure VI.1). La fonction u peut être un scalaire tel que la température, la pression, ... ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse, ...

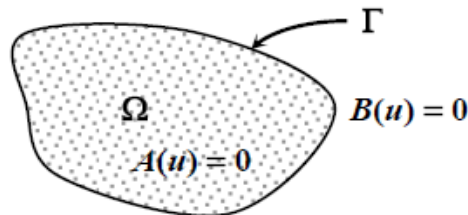


Figure VI.1. Domaine géométrique et contour

Le problème variationnel associé au système (VI-1) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

Trouver $u \in V$ tel que :

$$\forall w \in V: \int_{\Omega} w A(u) d\Omega \quad (\text{VI-2})$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle (ou du système d'équations différentielles). Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. En fait la solution de (VI-2) a encore plus de portée, on peut affirmer que si elle est satisfaite pour toute fonction poids w , alors l'équation différentielle (VI-1) est satisfaite en tout point du domaine Ω .

Exemple 1 :

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$A(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + 1 - x = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{VI-3})$$

Définie dans le domaine unidimensionnel $\Omega = [0, L]$ avec les conditions aux limites :

$$u(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x=1) = 0 \quad (\text{VI-4})$$

Dans ce cas $B(\mathbf{u})$ est l'ensemble des valeurs imposées aux deux bords du domaine. En unidimensionnel, Γ se réduit à deux points. La forme intégrale associée à l'équation $A(\mathbf{u})$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + 1 - x \right) d\Omega = 0 \quad (\text{VI-5})$$

$$\int_0^1 w \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 w(x - 1) dx \quad (\text{VI-6})$$

VI.3. Méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés est une méthode numérique permettant de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles en approximant la solution exacte u_{ex} par une solution approchée u . Elle consiste à rechercher des fonctions u qui annule la forme intégrale (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007).

VI.3.1. Résidus

Considérons un système physique continu stationnaire dont le comportement est représenté par un système d'équation aux dérivées partielles, linéaire ou non linéaire d'ordre m :

$$\mathcal{L}(u_{ex}) + f_v = 0 \quad \text{sur le domaine } \Omega \quad (\text{VI-7})$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$C(u) = f_s \quad \text{sur la frontière } S \quad (\text{VI-8})$$

Les fonctions u constituent une solution du problème d'équilibre si elles satisfont à la fois les relations (VI-7) et (VI-8).

En remplaçant u_{ex} par u dans (VI-7), nous commettons une erreur appelée résidu notée $R(u)$ défini par :

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v \neq 0 \quad (\text{VI-9})$$

Le résidu $R(u)$ est égal à zéro pour la solution exacte u_{ex} en tous point du domaine Ω .

L'aide des fonctions de pondération ψ_i bien choisies, nous imposons l'intégrale du résidu de s'annuler en n point sur le domaine Ω .

$$W_i = \int_{\Omega} (\psi_i) \{R(u)\} d\Omega = \int_{\Omega} (\psi_i) \{\mathcal{L}(u) + f_v\} d\Omega = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{VI-10})$$

La fonction $u(x)$ est appelée fonction solution, $\psi(x)$ est appelée fonction de pondération.

Les fonctions de pondération ψ_i sont indépendantes et leur nombre doit être égal au nombre de paramètre de l'approximation. Le choix de ces fonctions de pondération conduit à plusieurs méthodes :

- Méthode de collocation (par point ou par sous domaine)
- Méthode des moindres carrés
- Méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis est basée sur la formulation de Galerkin avec une construction systématique de l'approximation par sous domaine « éléments finis ».

Exemple 2 :

Soit la forme intégrale de l'équation de poisson :

$$W = \int_{\Omega} \psi(x, y) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) d\Omega = 0$$

Où u est dérivable deux fois et doit satisfaire toutes les conditions aux limites sur S_u et S_f , $\psi(x, y)$ est une fonction quelconque.

VI.4. Discrétisation des formes intégrales

Pour construire une solution approchée u , nous discrétisons (VI-10) en deux étapes :

- Choisissons une approximation à n paramètres des fonctions inconnues u . Cette approximation peut être nodale ou non sur le domaine entier ou sur un sous domaine.

$$u = u(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (\text{VI-11})$$

L'équation VI-10 devient :

$$W_i = \int_{\Omega} (\psi_i) \{ \mathcal{L}u(a_1, a_2, \dots, a_n) + f_v \} d\Omega = 0 \quad (\text{VI-12})$$

- Choisissons un ensemble de n fonctions de pondérations indépendantes $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

Le nombre de fonctions pondérations doit être égale au nombre de paramètres de l'approximation (VI-11).

Le choix du type de fonctions ψ_i conduit à différentes méthodes : collocation, Galerkin, moindres carrés (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007).

La relation VI-12 devient :

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\Omega} \psi_1 \{ \mathcal{L}u(a_1, a_2, \dots, a_n) + f_v \} d\Omega = 0 \\ W_2 &= \int_{\Omega} \psi_2 \{ \mathcal{L}u(a_1, a_2, \dots, a_n) + f_v \} d\Omega = 0 \\ &\dots \\ W_n &= \int_{\Omega} \psi_n \{ \mathcal{L}u(a_1, a_2, \dots, a_n) + f_v \} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI-13})$$

VI.4.1. Méthode de collocation par points

Cette méthode consiste à annuler l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine Ω . Les résultats obtenus sont très moyens et de plus sensibles au choix des points de collocation.

La fonction $\psi_i(x)$ est la distribution de Dirac $\delta(x - x_i)$ au point x_i , dit point de collocation. La forme intégrale (VI-10) s'écrit :

$$W = \int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x, u) d\Omega = R(x_i, u) = 0 \quad (\text{VI-14})$$

l'équation VI-13 devient :

$$W_i(a) = (\mathcal{L}(P) \{a\} + f_v)_{x=x_i} = 0 \quad (\text{VI-15})$$

Exemple 3 :

Soit l'exemple 2 précédent, les points de collocations choisis sont :

$$x_1 = [0 \quad 0] \quad ; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de pondérations sont :

$$\psi_1 = \delta(x_1); \quad \psi_2 = \delta(x_2)$$

$$\text{Soit } u = 0 \quad \text{sur } S \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$u = \langle P_1 \quad P_2 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

$$P_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$P_2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 + y^2) = P_1(x^2 + y^2)$$

L'équation VI-15 s'écrit avec l'approximation de u :

$$W_1 = \langle \mathcal{L}(P_1) \quad \mathcal{L}(P_2) \rangle_{x=x_1} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_1) = 0$$

$$W_2 = \langle \mathcal{L}(P_1) \quad \mathcal{L}(P_2) \rangle_{x=x_2} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + f(x_2) = 0$$

On trouve :

$$\begin{cases} W_1 = -4a_1 + 4a_2 + f = 0 \\ W_2 = -3a_1 - \frac{9}{4}a_2 + f = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 0,297 f \\ a_2 = 0,047 f \end{cases}$$

La valeur de u au centre est :

$$u_c = u(x_1) = \langle P_1 x_1 \quad P_2 x_2 \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = a_1 = 0,297 f$$

VI.4.2. Méthode collocation par sous domaines

La méthode de collocation par sous domaine consiste à annuler l'erreur d'approximation sur des sous domaines Ω_i du domaine Ω . Les résultats obtenus sont très moyens et de plus sensibles au choix des sous domaines.

Choisissons n sous domaines Ω_i et prenons comme fonctions ψ_i :

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à } \Omega_i \\ 0 & \text{si } x \text{ n'appartient à } \Omega_i \end{cases}$$

La relation VI-13 s'écrit sous la forme :

$$W_i(a) = \int_{\Omega_i} (\langle \mathcal{L}(P) \{a\} + f_v \rangle) d\Omega = 0 \quad (\text{VI-16})$$

Exemple 4 :

Résolution de l'équation de Poisson de l'exemple précédent par la méthode de collocation par sous-domaines.

Soit deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 suivants :

L'équation VI-16 s'écrit :

$$W_1 = \int_{\Omega_1} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega_1} f d\Omega = 0$$

$$W_1 = -0.9167a_1 + 0.3875a_2 + 0.25f = 0$$

$$W_2 = \int_{\Omega_2} \langle L(P_1) \quad L(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega_2} f d\Omega = 0$$

$$W_2 = -1.75a_1 - 3.587a_2 + 0.75f = 0$$

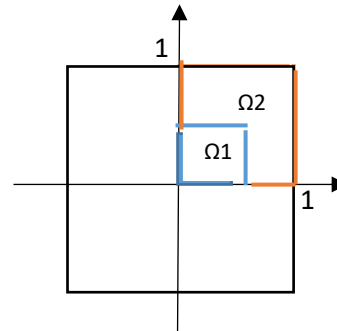
D'où :

$$a_1 = 0.2994f$$

$$a_2 = 0.0630f$$

La valeur de u au centre est :

$$u_c = a_1 = 0.2994f$$

**VI.4.3. Méthode Galerkin**

La méthode de Galerkin utilise comme fonction de pondération l'ensemble des variations δu des fonction u .

$$\psi = \delta u = \langle P \rangle \{ \delta a \} \text{ pour tout } \{ \delta a \} \quad (\text{VI-17})$$

Où $\{ \delta a \}$ sont les variations des paramètres d'approximation $\{ a \}$.

L'équation VI-10 devient :

$$W = \int_{\Omega} \delta a \{ \mathcal{L}(u) + f_v \} d\Omega = 0 \quad (\text{VI-18})$$

$$W = \langle \delta a \rangle \int_{\Omega} \{ P \} \{ \mathcal{L}(\langle P \rangle \{ a \}) + f_v \} d\Omega = 0 \quad (\text{VI-19})$$

Comme W doit s'annuler pour $\{ \delta a \}$, la relation précédente est équivalente aux n équations algébrique :

$$W_1(a) = \int_{\Omega} P_1 \{ \mathcal{L}(\langle P \rangle \{ a \}) + f_v \} d\Omega = 0$$

$$W_2(a) = \int_{\Omega} P_2 \{ \mathcal{L}(\langle P \rangle \{ a \}) + f_v \} d\Omega = 0 \quad (\text{VI-20})$$

⋮
⋮
⋮

$$W_n(a) = \int_{\Omega} P_n \{ \mathcal{L}(\langle P \rangle \{ a \}) + f_v \} d\Omega = 0$$

Ce système est symétrique si l'opérateur \mathcal{L} est auto adjoint.

Exemple 5 :

Soit à résoudre l'équation de poisson par la méthode de Galerkinge, en utilisant les fonction P_1 et P_2 de l'exemple 3.

$$W_1 = \int_{\Omega} \langle P_1 \cdot \mathcal{L}(P_1) \quad P_1 \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} P_1 f d\Omega = 0$$

$$W_2 = \int_{\Omega} \langle P_2 \cdot \mathcal{L}(P_1) \quad P_2 \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} P_2 f d\Omega = 0$$

Le système est symétrique :

$$5.689a_1 + 1.951a_2 = 1.778f$$

$$1.951a_1 + 2.384a_2 = 0.711f$$

$$a_1 = 0.292f$$

$$a_2 = 0.052f$$

La valeur de u au centre est :

$$u_c = 0,313f$$

En utilisant une approximation trois paramètre avec les fonctions P_1, P_2 et $p_3 = p_1 \cdot x^2 \cdot y^2$, nous aurons :

$$a_1 = 0.295f, \quad a_2 = 0.040f, \quad a_3 = 0.123f$$

Avec la valeur de u au centre est :

$$u_c = 0,295f$$

VI.4.5. Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés est peu utilisée car elle impose des conditions plus strictes sur l'approximation de u . elle conduit un système symétrique et défini positif quel que soit l'opérateur \mathcal{L} .

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser l'expression :

$$\pi_m = \int_{\Omega} R \cdot R d\Omega \tag{VI-21}$$

Par rapport aux paramètres a_1, a_2, \dots, a_n , R étant résidu :

$$R = \mathcal{L}(u) + f_v = \{\mathcal{L}(\langle P \rangle \{a\}) + f_v\} \tag{VI-22}$$

Les conditions de stationnarité de VI-21 sont :

$$W = \delta\pi_m(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \tag{VI-23}$$

$$W_1(a) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(P_1)(\langle \mathcal{L}(P) \rangle \{a\} + f_v) d\Omega$$

$$W_2(a) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(P_2)(\langle \mathcal{L}(P) \rangle \{a\} + f_v) d\Omega \tag{VI-24}$$

⋮

$$W_n(a) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(P_n)(\langle \mathcal{L}(P) \rangle \{a\} + f_v) d\Omega$$

Exemple 6 :

Résolution de l'équation de poisson par la méthode des moindres carrés

En utilisant les fonction P_1 et P_2 de l'exemple 3, la relation VI-24 s'écrit :

$$W_1 = \int_{\Omega} \langle \mathcal{L}(P_1) \cdot \mathcal{L}(P_1) \quad \mathcal{L}(P_1) \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} \mathcal{L}(P_1) f d\Omega = 0$$

$$W_2 = \int_{\Omega} \langle \mathcal{L}(P_2) \cdot \mathcal{L}(P_1) \quad \mathcal{L}(P_2) \cdot \mathcal{L}(P_2) \rangle d\Omega \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} \mathcal{L}(P_2) f d\Omega = 0$$

$$31.289a_1 + 25.194a_2 = 11.667f$$

$$25.194a_1 + 87.446a_2 = 12.800f$$

$$a_1 = 0.290f$$

$$a_2 = 0.063f$$

La valeur de u au centre est :

$$u_c = 0.290f$$

En utilisant une approximation trois paramètre avec les fonctions P_1, P_2 et $p_3 = p_1 \cdot x^2 \cdot y^2$, nous aurons :

$$a_1 = 0.295f, \quad a_2 = 0.038f, \quad a_3 = 0.156f$$

Avec la valeur de u au centre est :

$$u_c = 0,295f$$

VI.5. Forme intégrale faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder, soit par le choix de la fonction de pondération (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007).

Soit à vérifier que :

$$\int_{\Gamma} W B(u) d\Gamma = 0 \quad (\text{VI-25})$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (VI-2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(W)D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(W)F(u) d\Gamma = 0 \quad (\text{VI-26})$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

La forme intégrale faible ou dite intégration par partie présente les avantages suivants :

- Le nombre des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue. Les conditions de dérivabilité de u deviennent moins fortes.

- Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme intégrale faible peuvent être prise dans la formulation intégrale forte.

L'intégration par partie fait apparaître des dérivées de ψ , ce qui donne, les conditions de dérivabilité de ψ augmentent. Aussi, elle fait intervenir non seulement des intégrales sur le domaine Ω mais aussi des intégrales sur la frontière Γ du domaine.

Exemple 7 :

Soit le système aux équations différentielles suivant :

$$\mathcal{L}(U) - P = \frac{d^2u}{dx^2} + u(x) + x = 0 \quad \text{sur } \Omega = [0, 1]$$

Avec les conditions aux limites :

$$U = g \text{ pour } x = 0 \quad \text{essentielle.}$$

$$\frac{dU}{dx}(x = 1) = q \text{ pour } x = 1 \quad \text{naturelles.}$$

La fonction approchée doit satisfaire les conditions aux limites essentielles $U=g$ pour $x=0$.

Nous imposons que ψ soit nulle sur la frontière pour que U doit satisfaire $\psi=0$ pour $x=0$.

Appliquons la méthode des résidus pondérés :

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u(x) + x \right) dx = 0 \quad (\text{VI-27})$$

On fait la même chose avec les conditions aux limites naturelles donnée sous la forme d'une équation différentielle :

$$\left[\left(\frac{du}{dx} - q \right) \psi \right]_{(x=1)} = 0 \quad (\text{VI-28})$$

Les deux équations précédentes sont égales à zéro, nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 \psi \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u(x) + x \right) dx = \left[\left(\frac{du}{dx} - q \right) \psi \right]_{(x=1)} \quad (\text{VI-29})$$

Dans cette équation, la fonction $u(x)$ doit non seulement satisfaire les conditions aux limites essentielle, mais elle doit être dérivable deux fois.

La première dérivée donne :

$$\int_0^1 (u(x) + x)\psi - \left(\frac{du(x)}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) dx + [q\psi]_{x=1} = 0 \quad (\text{VI-30})$$

Les fonctions U et ψ doivent être dérivables qu'une seule fois. nous avons réduit la condition de dérivabilité (continuité) imposée sur U par 1, et augmenté celle imposée à ψ par 1.

Si nous continuons à intégrer par partie, nous obtiendrons :

$$\int_0^1 \left[(u(x) + x)\psi + u(x) \frac{d^2\psi}{dx^2} \right] dx + \left[q\psi - u(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (\text{VI-31})$$

Nous arrivons à une situation, au lieu que ça soit $u(x)$ qui doit être dérivable deux fois maintenant c'est la fonction ψ .

L'expression VI-30 est la plus utilisée appelée forme intégrale faible. De plus quand la méthode Galerkin est utilisée, les fonctions $u(x)$ et ψ ont le même degré de continuité puisque

$$\psi = \delta u(x).$$

VI.6. Généralités sur les principes énergétiques

Les charges externes appliquées à un élément de structure provoquent sa déformation et résultent en un travail qui est stocké dans le matériau sous forme d'énergie élastique, appelée énergie de déformation (Ghallagher, 1976 ; Chateaufneuf, 2010 ; Dhatt et al., 2007).

Exemple :

Soit une barre de section constante A , soumise à une charge axiale P , un ressort linéaire soumis à une charge axiale P et un élément de volume sous l'effet de contrainte normale agissant sur ses facettes représentées par figure VI.2.

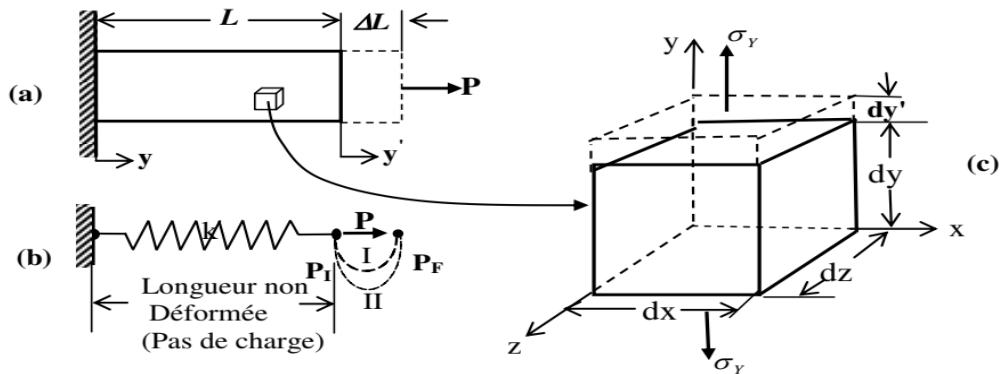


Figure VI.2. Comportement élastique d'une barre sous sollicitation horizontale
(a) Structure barre ; (b) Élément ressort ; (c) Etat de contrainte sur un élément volume

L'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie de déformation (appelée aussi énergie interne) et le potentiel du travail des charges extérieures appliquées. Les forces internes et les forces externes appliquées sur une structure ou un élément de structure sont des forces conservatives.

VI.6.1. Enoncé du principe énergétique

Le système conservatif qui satisfait les équations d'équilibre donne une énergie potentielle stationnaire par rapport à des petites variations de déplacements. Si la condition de l'état stationnaire est minimum, l'équilibre est stable.

Si le ressort représenté dans la figure VI.2b ne dissipe pas d'énergie, le travail des forces interne (énergie de déformation dans le ressort) dépend seulement de l'allongement ΔL non pas de son passage du chemin I ou chemin II. De la même manière, si la charge externe P appliquée a une valeur non nulle et orientée vers une direction bien déterminée, son travail est égal à $P \cdot \Delta L$ indépendamment du chemin choisi pour passer de P_I (configuration initiale) à P_F (configuration finale) (Gallagher, 1976 ; Chateaufneuf, 2010 ; Amirat, 2021).

L'équation VI-10 donne l'effort P :

$$P = \left(\frac{AE}{L}\right) \Delta L = Ky' \quad (\text{VI-32})$$

Et l'énergie emmagasinée $d\Omega_i$ dans le matériau pour une déformation infinitésimale y' :

$$d\Omega_i = \int_0^{y'} P \cdot dy' = \int_0^{y'} Ky' \cdot dy' = \frac{1}{2} Ky'^2 = \left(\frac{1}{2} Ky'\right) y' \quad (\text{VI-33})$$

On peut écrire l'équation (VI-11) en fonction des contraintes et des déformations normales :

$$d\Omega_i = \left(\frac{1}{2}Ky'\right) y' = \frac{1}{2}(\sigma_y dx dy) = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon \cdot dv \quad (\text{VI-34})$$

Avec : (Ky') = $(\sigma_y dx dy)$ \Rightarrow Force élastique

et $y' = \varepsilon \cdot dv$

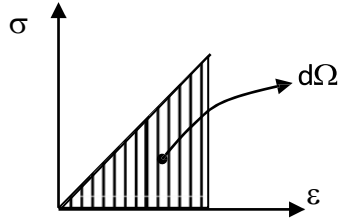


Figure VI.3. Représentation de l'énergie de déformation comme un volume de contrainte

D'où l'énergie de déformation $d\Omega_i$ à partir de la figure VI.13, pour l'élément de structure sous sollicitation axiale, est donnée par l'équation (VI-13):

$$\Omega_i^{(e)} = \int d\Omega_i = \int_v \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} \cdot dV = \int_v \frac{E \cdot \varepsilon^2}{2} dV \quad (\text{VI-35})$$

Avec : V : volume de l'élément

E : module de Young.

VI.6.2. Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale est donnée par la relation (VI-14):

$$\Pi_p = \Omega_i + W_e \quad (\text{VI-36})$$

Avec : $\Omega_i = \left(\frac{1}{2}Ky'^2\right)$ et $W_e = -P \cdot y'$

La charge en se déplaçant sur une distance y' produit un travail et en conséquence perd un potentiel de même valeur, justifiant ainsi l'existence du signe négative dans l'expression.

L'énergie potentielle totale est donnée par l'équation (VI-15) :

$$\Pi_p = \frac{1}{2}Ky'^2 - P \cdot y' \quad (\text{VI-37})$$

L'énergie potentielle est considérée comme étant le travail interne et externe effectué par changement de configuration de l'état de référence $y'=0$ à l'état de déplacement $y' \neq 0$.

Elle est représentée graphiquement pour notre exemple dans la figure VI.4.

La position d'équilibre y'_{eq} obtenue à partir de la valeur stationnaire de Π_p .

$$d\Pi_p = (Ky' - P)dy' = 0 \quad d'o\grave{u} \quad y'_{eq} = \frac{P}{K} \quad (\text{VI-38})$$

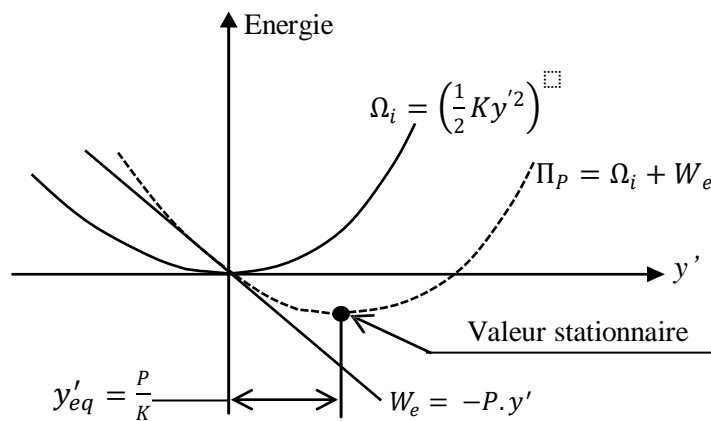


Figure VI.4. Représentation graphique des énergies

VI.7. Dérivation de la matrice de rigidité par le principe de l'énergie potentielle minimale

On fait appel aux fonctions de formes étudiées au chapitre 4 pour l'écriture du déplacement d'un élément fini à deux nœuds i et j .

$$\{u_e\} = \sum N_i \cdot u_i = N_i \cdot u_i + N_j \cdot u_j = [N] \cdot \{u\} \quad (\text{VI-39})$$

Avec fonction de forme : $N_i = 1 - \frac{y}{L}$ et $N_j = \frac{y}{L}$

y : est la référence de coordonnée locale de l'élément ayant pour origine le nœud i .

$$\{N\} = (N_i \ N_j)^T = \left(1 - \frac{y}{L} \quad \frac{y}{L}\right)^T \quad \text{et} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (\text{VI-40})$$

La déformation dans chaque élément peut être calculée selon la relation :

$$\varepsilon = \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}(N \cdot u) = L(N) \cdot u = B \cdot u \quad (\text{VI-41})$$

Avec :

L : opérateur dit de Laplace dans le cas général

Et $B = L(N) = \left(\frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L}\right)^T$: dérivée des fonctions de formes

La contrainte moyenne dans chaque élément s'écrit comme suit :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot B \cdot u \quad (\text{VI-42})$$

Avec : $\varepsilon = B \cdot u$

L'énergie de déformation pour un élément fini barre quelconque, peut être déduit partir de l'équation VI.12 :

$$\Omega_i^{(e)} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V (a^T B^T E) B \cdot a \cdot dV \quad (\text{VI-43})$$

L'énergie potentielle s'écrit comme suit :

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \int_V u^T (B^T E B) \cdot u \cdot dV - u^T \cdot F = \frac{1}{2} u^T \cdot K \cdot u + u^T \cdot F \quad (\text{VI-44})$$

Où F est le vecteur de charge appliquées aux nœuds.

On pose $[K]$ la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K] = \int_v [B]^T E [B] dV \quad (\text{VI-45})$$

La minimisation de l'énergie potentielle par rapport au déplacement u s'écrit :

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial u} = 0 \Rightarrow [K^{(e)}] \cdot \{u^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} \quad (\text{VI-46})$$

La matrice de rigidité élémentaire d'une barre et d'une poutre sont donnée aux chapitres 4 et 5 respectivement.

VI.8. Notions de fonctions d'interpolation

La fonction approchée est exprimée, dans le cas unidimensionnel par (Cazenave, 2010 ; Seghir, 2014 ; Cuiller, 2016):

$$u = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (\text{VI-47})$$

Qu'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$u = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad \dots \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{Bmatrix} \equiv \langle P(x) \rangle \{A\} \quad (\text{VI-48})$$

Cette forme d'approximation est appelée interpolation polynomiale. Si on exprime la fonction sur tous les nœuds on obtient pour chaque nœud i de coordonnée x_i :

$$u_i = \langle P(x_i) \rangle \{A\} \equiv \sum_j P_{ij} a_j \quad (\text{VI-49})$$

Soit pour tous les nœuds :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} \langle P_{1j} \rangle \{a_j\} \\ \langle \dots \dots \rangle \{\dots\} \\ \langle P_{nj} \rangle \{a_j\} \end{bmatrix} = \{U\} = [P_n] \{a_n\} \quad (\text{VI-50})$$

Avec :

- U_n : représente les valeurs aux nœuds de la fonction.
- P_n : valeurs des polynômes aux nœuds de coordonnées x_i .
- a_n : variables généralisées qui sont les facteurs des polynômes.

L'inconvénient de cette interpolation réside dans l'utilisation des paramètres a_i comme variable de base, des calculs supplémentaires sont nécessaires pour calculer la fonction recherchée u . Afin d'éviter ces calculs, on peut mettre les valeurs de la fonction u aux nœuds comme variables de base en procédant comme suit :

A partir de l'équation (VI.28), on peut tirer les uns en fonction des uns et on les remplace dans l'équation (VI.26). Ce qui donne :

$$u = \langle P(x) \rangle P^{-1} U_n = \langle N(x) \rangle U_n \quad (\text{VI-51})$$

C'est la forme la plus utilisée par le fait que ses variables sont les valeurs de la fonction aux nœuds, la résolution donne directement ces valeurs.

Ce type d'approximation est appelée interpolation nodale, les fonctions N_i sont appelées fonction de forme, elles sont fonction du type d'élément utilisé pour la discrétisation géométrique.

VI.9. Transformation de charges réparties en charges nodales

Soit une poutre de longueur L et de section A , supporte une charge uniformément répartie q sur toute sa longueur L (Cazenave, 2010 ; Ouinas, 2012 ; Liu, 2015)

Les nœuds 1 et 2 de l'élément poutre sont situés aux extrémités de gauche et de droite respectivement, et les variables nodales sont les déplacements transversaux V_1 et V_2 ainsi que les rotations θ_{z1} et θ_{z2} (figure VI.5).

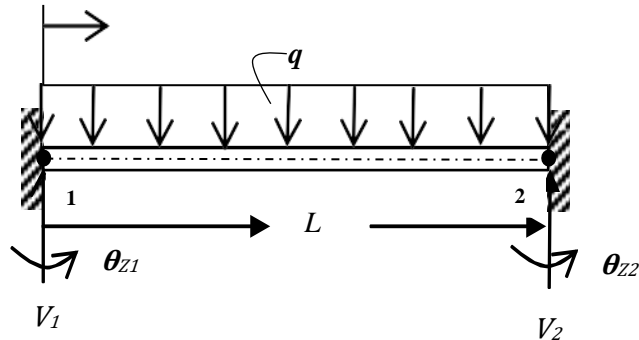


Figure VI.5. Élément poutre chargée uniformément

La fonction de déplacement $v(x)$ peut être discrétisée de la façon suivante : $v(x) = J(V_1, V_2, \theta_1, \theta_2)$

$$\{f\} = \int_0^L -qN^T dx = -q \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^2}{L^2} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \end{Bmatrix} dx \quad (\text{VI-52})$$

Après calcul, on aura le vecteur force :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI-53})$$

La représentation graphique des charges nodales est donnée par la figure VI.6. Pour plus d'informations voir le chapitre IV (cours et application).

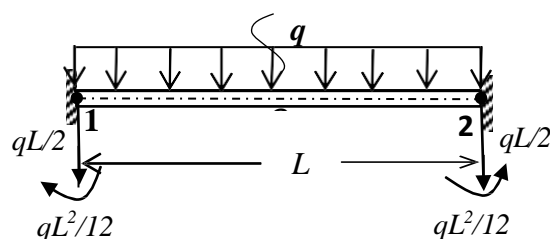


Figure VI.6. Représentation des charges nodales sur la poutre uniformément répartie.

Chapitre VII

*APPROXIMATION OU FONCTIONS
D'INTERPOLATION*

Chapitre VII

Approximation ou fonctions d'interpolation

VII.1. Introduction

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation du champ des variables par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément. L'approximation nodale est basée sur la fonction d'interpolation de l'élément.

L'approximation nodale par sous domaines ne fait intervenir que les variables nodales du domaine élémentaire.

La première étape de résolution d'un problème par la méthode des éléments finis est la discrétisation du milieu, qui consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines « éléments finis » (Ern, 2005 ; Chateaneuf, 2010 ; Amirat, 2021).

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \text{ telle que } \lim_{\text{taille des } e \rightarrow 0} (\cup_e D_e) = D \quad (\text{VII-1})$$

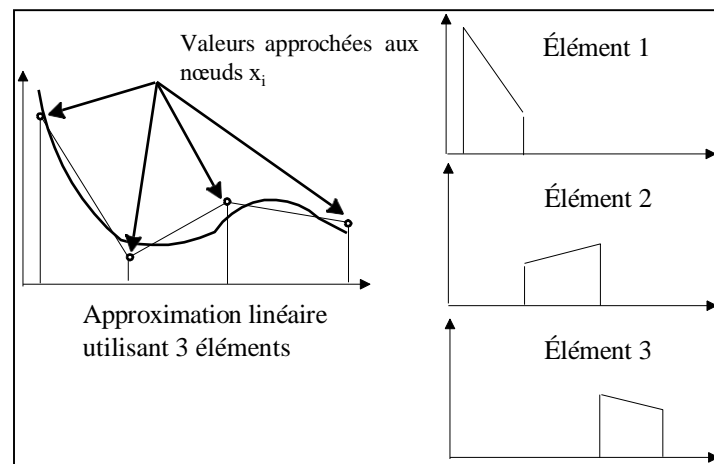


Figure VII.1. Approximation nodale linéaire à une dimension

$$\forall M \in D_e \quad \{u(M)\} = [N(M)]\{U_n\} \quad (\text{VII-2})$$

Avec :

$\{u(M)\}$: valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément.

$[N(M)]$: Matrice des fonctions d'interpolation de l'élément.

$\{U_n\}$: Variable nodale relative aux nœuds d'interpolation de l'élément.

VII.2. Interpolation unidimensionnelle de type Lagrange

Le principe de l'interpolation ou l'approximation nodale consiste à exprimer une grandeur physique (champs de déplacements $U(x)$, de contraintes (σ) ou de déformations (ε)) en fonction des inconnues ou variables nodales inconnue u_i . Les points de coordonnées x_i sont des valeurs connues appelés nœuds d'interpolation. Les variables u_i sont les valeurs de la fonction $U(x)$ en

En remplaçant a dans la relation (VII-4) on obtient l'écriture de la fonction sous la forme suivante :

$$u(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x^{n-1} \rangle [A]^{-1} \cdot \{u_i\} \quad (\text{VII-8})$$

Ou sous l'écriture suivante :

$$u(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad \dots \quad N_n(x) \rangle \{u_i\} \quad (\text{VII-9})$$

$N_i(x)$ Pour $i=1, \dots, n$ sont appelées **fonctions de forme**.

$$u(x) = \langle N \rangle \{u_i\} \quad (\text{VII-10})$$

$$\text{Avec : } \langle N \rangle = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad \dots \quad x^{n-1} \rangle [A]^{-1}$$

Cette forme d'approximation est dite approximation nodale, avec les variables nodales les déplacements u_i , et les fonctions d'interpolations nodales les fonctions de formes $N_i(x)$ qui sont calculer par les polynômes de Lagrange.

➤ Exemple

Le tableau suivant donne les valeurs des déplacement verticaux d'une poutre sollicitée en flexion.

$x_i(m)$	0	0.5	1
$v_i(mm)$	20	25	22

Trouvez les valeurs approchées des déplacements aux points $x=0,25$ et $x=0,75$?

Solution :

Soit l'approximation sous la forme : $V(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$.

Nous avons donc à résoudre le système suivant :

$$V(x=0) = a_1 = 20$$

$$V(x=0.5) = a_1 + a_2 \cdot 0.5 + a_3 \cdot 0.5^2 = 25$$

$$V(x=1) = a_1 + a_2 + a_3 = 22$$

Après calcul on a : $a_1=20$; $a_2 = 18$ et $a_3 = -16$

et : $V(x) = 20 + 18x - 16x^2$.

Ce qui donne : $x=0,25 \Rightarrow V(x=0,25)= 23,5mm$.

$$x=0,75 \Rightarrow V(x=0,75)= 24,5mm.$$

VII.3. Interpolation polynômiale

VII.3.1. Construction de la fonction de forme

La construction d'une fonction de forme se fait avec précaution tout en respectant les conditions suivantes :

- Elle doit avoir le nombre de coefficients inconnus (a_i) égal au nombre total de degrés de liberté de l'élément,
- Elle ne doit privilégier aucun sens ou direction,
- Elle doit permettre un mouvement de corps rigide (sans déformation interne).
- Elle doit être capable de représenter des états de contraintes planes et de déformations planes.
- Elle doit satisfaire la compatibilité des déplacements (continuité) le long des limites d'interconnexions entre les éléments finis.

La construction d'une fonction $U(x)$ pour la totalité d'un domaine continu, conduit à un nombre très élevé de points x_i d'où la solution devient très compliquée surtout si le domaine étudié a une forme géométrique complexe.

Pour contourner ce problème, on construit la fonction $u(x)$ par sous domaine du domaine global étudié tout en respectant les étapes suivantes :

- Discrétisation du domaine D en un nombre fini de sous domaines D_e (éléments finis).
- Définition d'une fonction de déplacement $u_e(x)$ par la méthode d'approximation nodale pour chaque élément.
- L'approximation nodale sur chaque élément D_e ne fait intervenir que les variables nodales liées à cet élément et sa frontière.
- Les fonctions approchées $u_e(x)$ sur chaque élément, sont construites de façon à être continue sur l'élément et doivent satisfaire les conditions de continuité entre les différents éléments.

Une fois toutes les fonctions approchées $u_e(x)$ des sous domaines D_e sont construites, la fonction approchée $U(x)$ du domaine global D est obtenue par l'équation (VII-11).

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u_{ie}(x) \quad (\text{VII} - 11)$$

Exemple :

Soit la fonction de déplacement d'un élément finis a une dimension $U(x)$ (exacte) représenté sur la figure VII.2 et qui est définie sur un domaine $D : [x_1, x_n]$. Cette fonction est déterminée par éléments finis, par le biais d'une fonction approchée $u^e(x)$.

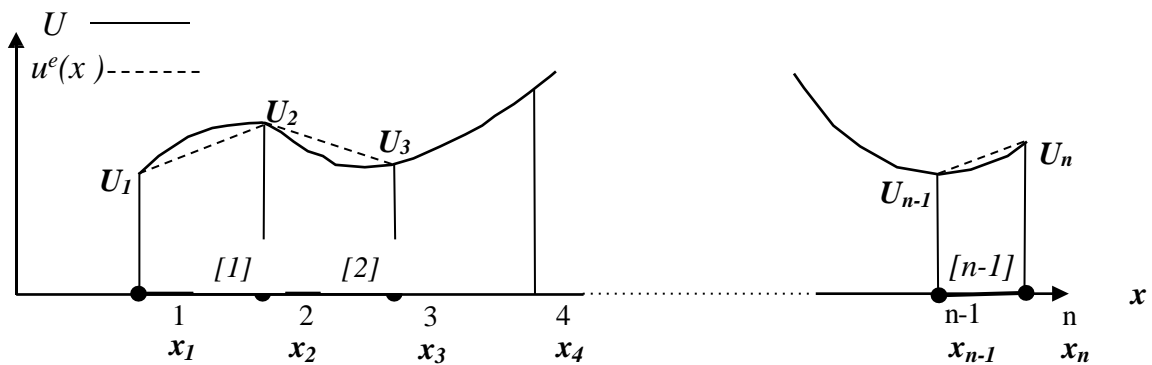


Figure VII.2. Approximation par éléments finis unidimensionnels linéaires

La fonction de déplacement $U(x)$ est construite à l'aide d'une approximation par élément finis, tout en suivant les étapes suivantes :

1. Discrétisation du domaine en éléments finis.
 - Nœuds : 1, 2, 3,, n-1, n.
 - Coordonnées nodales : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$
 - Définition des éléments $D_{e1}[x_1, x_2], D_{e2}[x_2, x_3], \dots, D_{en-1}[x_{n-1}, x_n]$.
2. Construction de la fonction d'interpolation $U(x)$.

En utilisant l'interpolation de Lagrange dans chaque élément, on obtient la fonction approchée $u_e(x)$.

La fonction globale $U(x)$:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n u_e(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_{n-1}(x)$$

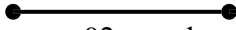
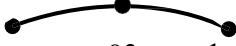
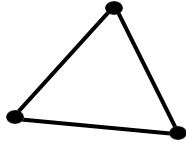
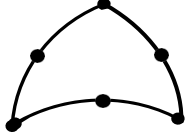
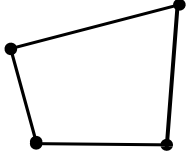
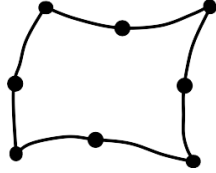
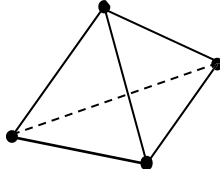
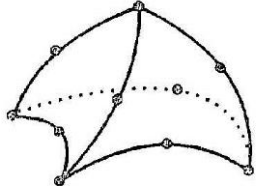
VII.3.2. Fonction d'interpolation et élément de référence

L'application de la méthode des éléments finis au calcul des déplacements dépendent d'une, deux ou trois variable, correspondant à la dimension des éléments utilisés. Le nombre de paramètre introduit est égale au nombre nœuds de chaque élément. La représentation pourra être linéaire, quadratique ou cubique, Tableau VII.1 (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2005 ; Chateaufneuf, 2010).

Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple (frontières rectilignes, bords de longueur unité). Pour la majorité des éléments de référence, l'approximation nodale est construite sur une base polynomiale de degré 1 ou 2. Le nombre de variables nodales à identifier étant égal à la dimension de la base.

1D: linéaire	[1, x]	2 variables	
quadratique	[1, x, x ²]	3 variables	
2D: linéaire	[1, x, y]	3 variables	
quadratique	[1, x, y, x ² , xy, y ²]	6 variables	
3D: linéaire	[1, x, y, z]	4 variables	Tétraèdre d°1
quadratique	[1, x, y, z, x ² , xy, y ² , xz, z ² , yz]	10 variables	Tétraèdre d°2

Tableau VII.1. Fonction d'interpolation de quelques éléments

Dimension		Linéaire	Quadratique
unidimensionnel		 <p>02 nœuds $u(x) = a_1 + a_2x$</p>	 <p>03 nœuds $u(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$</p>
Bidimensionnel	Triangulaire	 <p>03 nœuds $u(x, y) = \begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y \\ v = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases}$</p>	 <p>06 nœuds $u(x, y) = \begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \\ v = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2 \end{cases}$</p>
	Rectangulaire	 <p>04 nœuds $u(x, y) = \begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{cases}$</p>	 <p>08 nœuds $u(x, y) = u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$ Idem pour $v(x, y)$</p>
Tridimensionnel	Tétraédrique	 <p>04 nœuds $u(x, y, z) = \begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8z \\ w = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}z \end{cases}$</p>	 <p>10 nœuds $u(x, y, z) = u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz$ Idem pour $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$</p>

VII.4. Polynôme de Lagrange (C°)

Les éléments de continuité C° sont des éléments dont la dérivée première est continue et la deuxième dérivée est discontinue. Ce sont des éléments qui travaillent en traction – compression et subissent des déformations et contraintes uni-axiales (Khennane, 1997 ; Dhettet al., 2007 ; Chateaufneuf, 2010).

La fonction de forme d'un élément finis à deux nœuds est l'une des fonction d'interpolation dite de Lagrange à n points (nœuds) tel que la fonction de déplacement est :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i \quad \text{avec} \quad N_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq i \\ 1 & \text{lorsque } j = i \end{cases} \quad (\text{VII-12})$$

Et

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (\text{VII - 13})$$

Les fonctions $N_i(x)$ sont des polynômes d'ordre $(n-1)$.

Pour représenter un champ du premier degré le long d'un bord, ce qui suppose donc deux inconnues, il faut deux connecteurs indépendants donc deux nœuds : un à chaque extrémité de l'arête. Pour une barre du premier degré de longueur L et de caractéristiques constantes, on peut écrire directement pour $x_1 = 0$ et $x_2 = L$:

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x-L}{0-L} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x-0}{L-0} = \frac{x}{L} \end{cases} \quad (\text{VII-14})$$

On retrouve les deux fonctions d'interpolation précédemment calculées.

Par application de la formule donnant l'expression des polynômes de Lagrange, on détermine les trois fonctions d'interpolation associées aux trois degrés de liberté de cet élément de barre du second degré :

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x - L/2}{(0 - L/2)(0 - L)} = \frac{(2x - L)(x - L)}{L^2} \\ N_2(x) = \frac{(x - 0)(x - L)}{(L/2 - 0)(0 - L)} = \frac{4x(L - x)}{L^2} \\ N_3(x) = \frac{(x - 0)(x - L/2)}{(L - 0)(L - L/2)} = \frac{x(2x - L)}{L^2} \end{cases} \quad (\text{VII - 15})$$

Exemple :

Considérons les résultats du tableau ci-dessous :

x_i	1	2	3	5
u_i	1	0	-1/3	0

1. Calculer les polynômes $N_i(x)$ de Lagrange.
2. Tracer l'allure de ces polynômes.
3. Construire la fonction approchée $U(x)$.
4. Calculer la valeur de $U(x)$ aux points $x = 1,5$ et $x = 3,5$.

Solution :

1. Les polynômes $N_i(x)$ de Lagrange

$$N_1(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{(x - x_i)}{(x_1 - x_j)} = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} = -\frac{1}{8}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30)$$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{(x - x_i)}{(x_2 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$$

$$N_3(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{(x - x_i)}{(x_3 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} = -\frac{1}{4}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$$

$$N_4(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{(x - x_i)}{(x_4 - x_j)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} = \frac{1}{24}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$$

1. Allure des polynômes $N_i(x)$

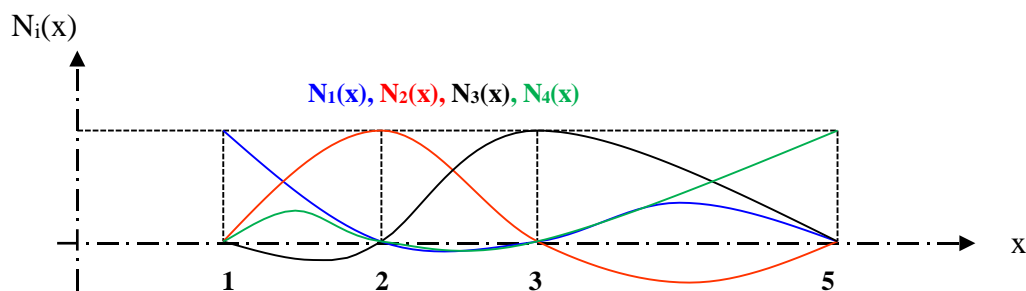


Figure VII.3. Allure des polynômes $N_i(x)$

2. Fonction approchée $U(x)$

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n=4} N_i(x) \cdot u_i = N_1(x) + N_2(x) + N_3(x) + N_4(x)$$

Après calcul : $U(x) = -\frac{1}{24}(x^3 - 14x^2 + 59x - 70)$

3. La valeur de $U(x)$ aux points $x = 1,5$ et $x = 3,5$

On remplace dans la fonction approchée $U(x)$ la valeur de x et on trouve :

Pour : $x=1,5 \Rightarrow U(x=1,5) = 0,401.$

$x=3,5 \Rightarrow U(x=3,5) = -0.328.$

VII.5. Polynôme d'Hermite C^1

Les polynômes d'Hermite imposent des conditions nodales sur le champ et ses dérivées. Ils ont la particularité d'avoir deux fonctions de base associées à chaque nœud. La valeur de la solution présente la première fonction et la deuxième fonction c'est la valeur de la dérivée (Khennane, 1997 ; Dhatt et al., 2007 ; Chateauneuf, 2010).

Les éléments Hermitiens, sont des éléments qui travaillent en flexion. Ils subissent des déformations et des contraintes axiales et tangentielles.

Exemple :

Soit une poutre de longueur L , de moment d'inertie I et de module d'élasticité E donnée par la figure VII.5, dont l'équation gouvernante découle de la théorie d'Euler-Bernoulli (chapitre V).

On considère deux conditions au limite essentielles imposées à chaque nœud i et j (u , θ), d'où l'appellation de classe C^1 , La rotation est la dérivée de la flèche :

$$\frac{du(x)}{dx} = \theta(x) \quad (\text{VII-16})$$

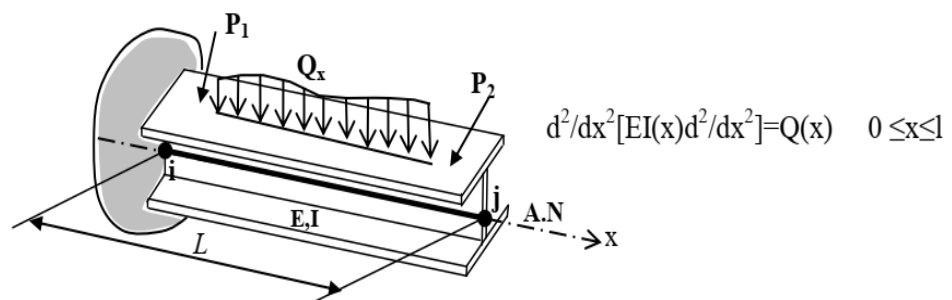


Figure.VII.5. Élément finis Poutre en flexion à deux nœuds i et j

On considère comme fonction de déplacement, un polynôme cubique à quatre paramètres, comme un ordre le plus réduit possible.

L'élément poutre a deux nœuds avec deux degrés de liberté par nœuds, u et θ , on peut écrire l'approximation de u comme suit :

$$u(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

La rotation est la dérivée de $u(x)$, donc elle s'écrit comme suit :

$$\theta(x) = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2$$

Les conditions aux limites de la poutre sont :

$$u(0) = u_1, \quad u(L) = u_2$$

$$\theta(0) = \theta_1, \quad \theta(L) = \theta_2$$

Après résolution de ces équations, les valeurs des coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 seront trouvés :

$$a_0 = u_1$$

$$a_1 = \theta_1$$

$$a_2 = -\frac{2t_1L + 3u_1 + t_2L - 3u_2}{L^2}$$

$$a_3 = \frac{2u_1 + t_1L + t_2L - 2u_2}{L^3}$$

Puis, les fonctions de formes seront trouvées comme suit :

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

Avec :

$$u = N_1u_1 + N_2\theta_1 + N_3u_2 + N_4\theta_2$$

La représentation graphique des fonctions de forme sont représentés dans la figure VII.6.

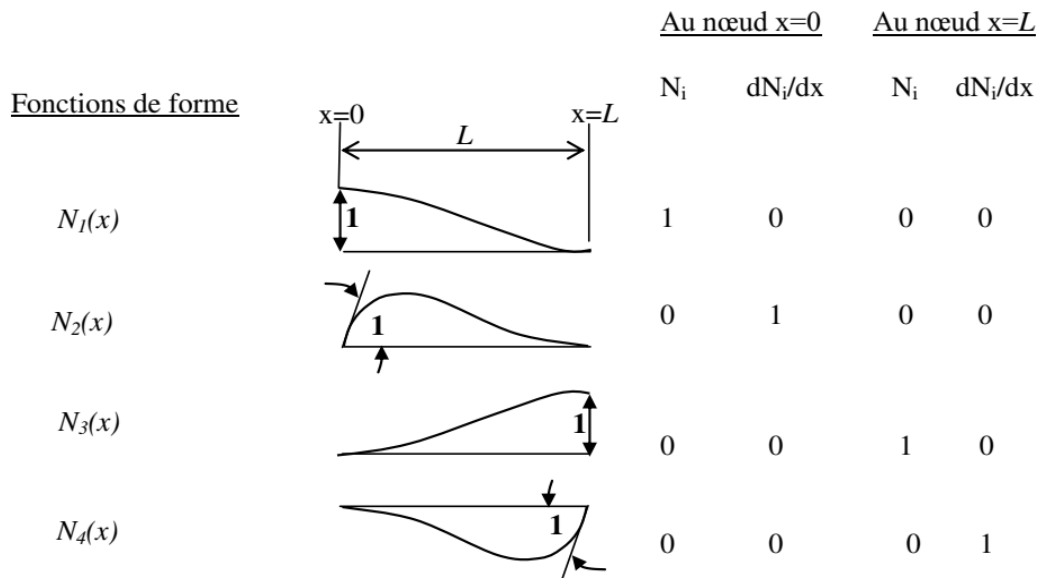


Figure VII.6. Représentation graphique de fonctions de forme à approximation cubique et vérification des propriétés évidentes en $x=0$ et en $x=L$

VII.6. Triangle de pascal

La construction des fonctions de formes est l'étape la plus importante dans la formulation des éléments finis. Il existe plusieurs méthodes pour construire ces fonctions qui dépendent de la nature du comportement, de la géométrie de l'élément et du choix des termes qui les composent.

Le choix des termes qui composent la fonction d'approximation du champ de déplacement, est facilement obtenu par référence au Triangle de Pascal de la figure VII.5.

Le triangle de pascal sert de base de l'interpolation polynomiale des champs de l'élément (Gallagher, 1975 ; Khennane, 1997 ; Chateauneuf, 2010).

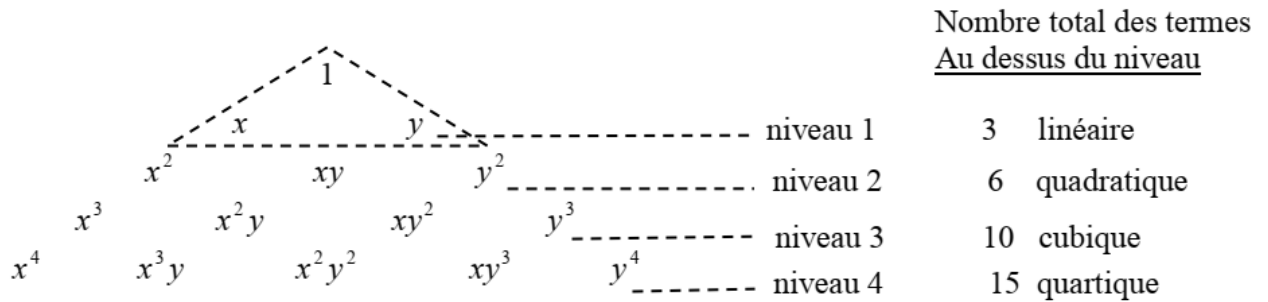


Figure VII.5. Triangle de Pascal

Pour un élément fini linéaire, tous les termes, sur et au-dessus du niveau 1 sont choisis. Pour un élément fini cubique, tous les termes sur et au-dessus du niveau 3 sont nécessaires.

Pour la construction des éléments finis, la distribution des nœuds dans le triangle est dictée par la forme géométrique du Triangle de Pascal.

Exemple 1 :

Soit un élément triangulaire représenté à la figure VII.6. Sur (a) un élément quadratique ayant tous les nœuds sur les trois frontières et sur (b) un élément cubique possédant un nœud intérieur.

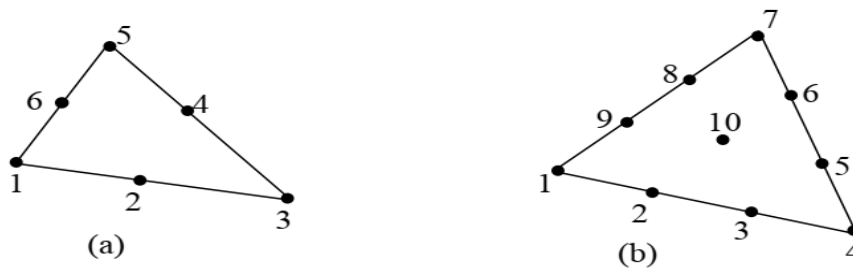


Figure VII.6 : Elément fini triangulaire : (a) quadratique à 6 nœuds
(b) cubique à nœud intérieur

La fonction de déplacement d'un élément triangulaire à trois nœuds est : $u(x,y) = a_1 + a_2.x + a_3.y$.

La fonction de déplacement quadratique de niveau 2 est : $u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$

Exemple 2 :

Soit deux éléments finis triangulaire à trois nœuds ayant une frontière commune figure VII.7.

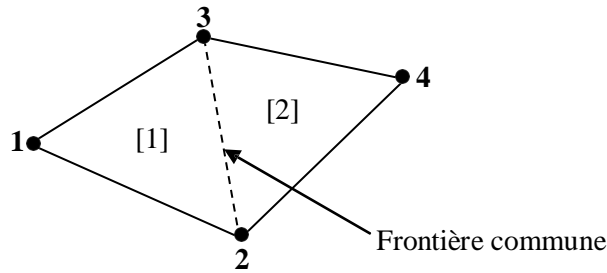


Figure VII.7. Eléments finis triangulaire à une frontière commune.

La fonction de déplacement en se rapprochant de la frontière commune du côté de l'élément (Khennane, 1997 ; Dhatt et al.,2010) est :

$$u^{[1]} = u_1 N_1^{[1]} + u_2 N_2^{[1]} + u_3 N_3^{[1]}$$

$N_1^{[1]} = 0$ Le long de la limite commune. La variation des fonctions de forme est linéaire le long de la limite commune, entre les valeurs u_2 et u_3 , au nœud 2 et 3 respectivement.

Alors la fonction de déplacement est :

$$u^{[1]} = u_2 N_2^{[1]} + u_3 N_3^{[1]}$$

La fonction de déplacement en se rapprochant de la frontière commune du côté de l'élément est :

$$u^{[2]} = u_2 N_2^{[2]} + u_3 N_3^{[2]} + u_4 N_4^{[2]}$$

$N_4^{[2]} = 0$ le long de la frontière commune. La variation des fonctions de forme est linéaire le long de la limite commune, entre les valeurs u_2 et u_3 , au nœud 2 et 3 respectivement.

$$u^{[2]} = u_2 N_2^{[2]} + u_3 N_3^{[2]}$$

On déduit que $u^{[1]} = u^{[2]}$ le long de la frontière commune, confirmant que la fonction de déplacement u est continue à travers les frontières de l'élément.

Le Triangle de Pascal est aussi d'une utilité considérable dans la construction des fonctions de forme pour les éléments finis rectangulaires qui sont de deux principaux types : éléments finis **Lagrangiens** et les éléments finis "**Serendipes**" qui sont représentés dans les figures VII.8 et VII.9 respectivement (Chateauneuf, 2010) .

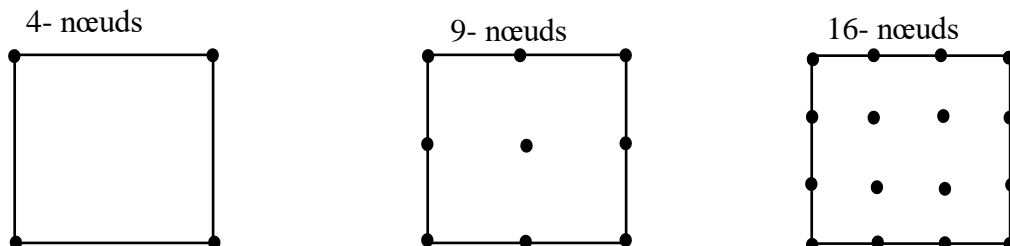


Figure VII.8 Eléments finis Lagrangiens

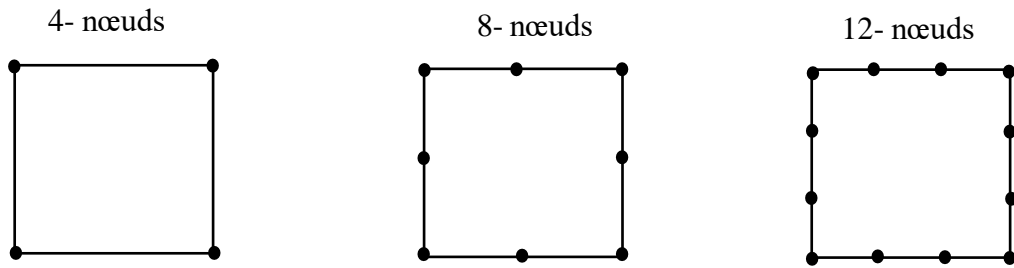


Figure VII.9. Eléments finis ‘Serendipe’

Les termes dans l’approximation de la fonction de déplacement $u(x,y)$ pour chacun de ces éléments sont obtenus à partir du Triangle de Pascal comme le montre la figure VII.10 et figure VII.11.

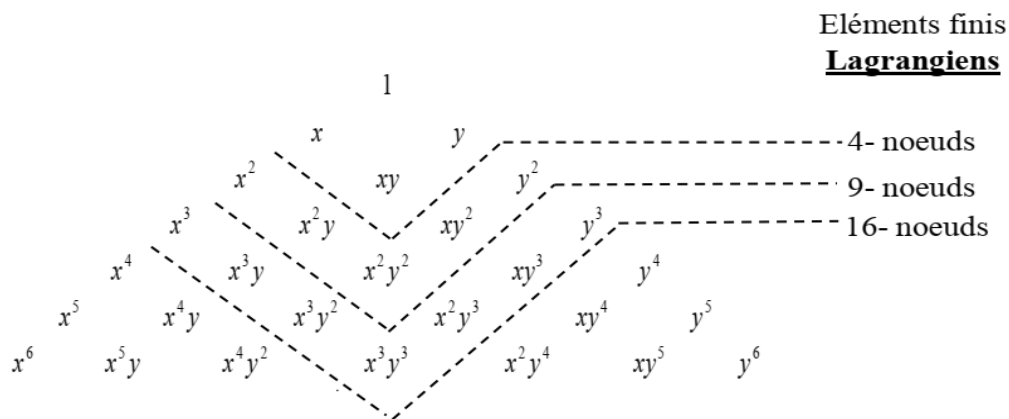


Figure VII.10. Triangle de Pascal-Eléments finis Lagrangiens

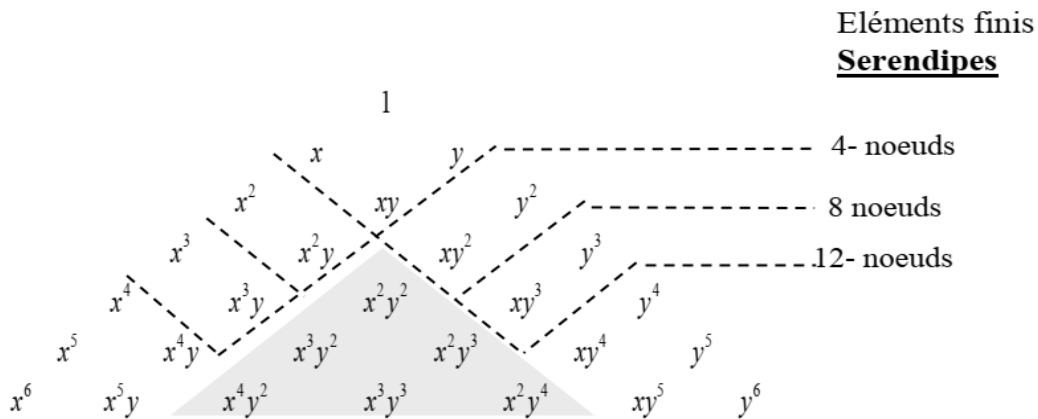


Figure VII.11. Triangle de Pascal - Eléments finis Serendipes

Remarque :

En général, l’utilisation des Eléments Finis "Serendipes" est plus pratique, du fait que ces derniers présentent des niveaux de précision similaires à ceux des éléments finis Lagrangiens avec moins de nœuds par élément.

Les deux types d’éléments produisent une fonction de déplacement $u(x,y)$ qui est continue le long des frontières.

Exemple :

Soit les deux éléments suivants :

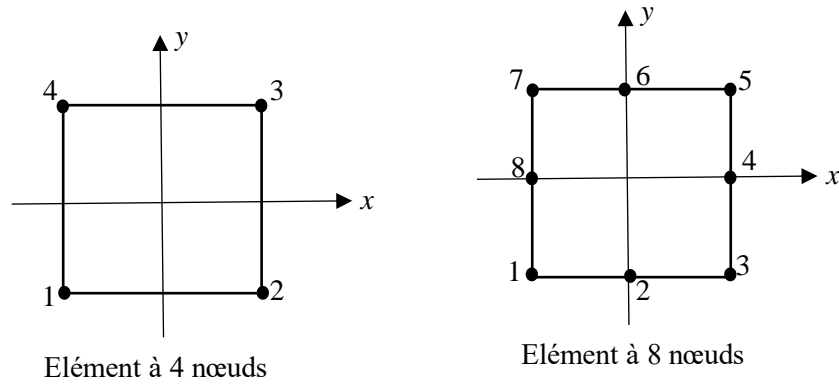


Figure VII.12. Eléments quadrangulaires

Elément à 4 nœuds est un élément de Lagrange, le polynôme utilisé est le suivant :

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

Elément à 8 nœuds est un élément de Serendipes, le polynôme utilisé est le suivant :

$$u(x, y) = u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2$$

$$u(x, y) = u = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}x^2 + a_{13}xy + a_{14}y^2 + a_{15}x^2y + a_{16}xy^2$$

Bibliographie

- [1] Amirat, M., Beloufa M. A (2021), “Cours et applications de la méthode des éléments finis”. Polycopie de cour, Université d’Ain Témouchent.
- [2] Batoz, J.L., Dhatt, G. (1990), « Modélisation des structures par éléments finis » volume 2, Poutres et Plaques. Edition Hermès, Paris.
- [3] Breitkopf, P. (2006), “la méthode des éléments finis”, ISBN 2-7462-1170-X, Edition Lavoisier.
- [4] Cazenave, M. (2010), “Méthode des éléments finis Approche pratique en mécanique des structures”, ISBN 978-2-10-055065-4. Edition Dunod
- [5] Chateauneuf, A (2010), “Comprendre les éléments finis. Principes, formulation et exercices d’application”, ISBN 978-2-7298-5430-0. Edition Ellipses.
- [6] Craveur, J.C. (2008), “Modélisation des éléments finis”, Editions Dunod.
- [7] Cuillier, J. C. (2016), “Introduction à la méthode éléments finis”. Cours et exercices corrigés, 2^{ème} édition Dunod.
- [8] Dhatt, G., Touzot, G., Lefrançois, E. (2007), “Méthode des éléments finis”, Edition Lavoisier.
- [9] Ern, A, (2005), “ aide – mémoire Eléments finis”, ISBN 2 10 007303 6. Edition Dunod, Paris.
- [10] Ferradi, M.K. (2016), “Nouveaux modèles d’éléments finis de poutres enrichis” Thèse de doctorat, université Paris-Est
- [11] Gallagher, R. H. (1976), “Introduction à la méthode des éléments finis”, ISBN 2-86216-000-8. Edition Pluralis.
- [12] Khennane A, (1997), “Méthode des éléments finis Enoncé des principes de base”, OPU Alger.
- [13] LIU, Y. (2015), “Introduction to Finite Element Method”, University of Cincinnati. USA.
- [14] Manet, V. (2015), “Méthode des éléments finis”, Licence Créative Commons 3.0 France.
- [15] Morère, Y. (2011), “Cours de Calcul Matriciel”,
- [16] Ouinas, D. (2012), “Application de la méthode des éléments finis” Cours et exercices corrigés à l’usage des ingénieurs. ISBN 978. 9961.0.1504.9 Office des Publications Universitaires.
- [17] Recho, N., Bares, J., Richard, B. (2015), « Méthode calcul par éléments finis. Principe, matrice élémentaires, assemblage. Cours et exercices », ISBN 9782340-004009, Edition Ellipses.
- [18] Reddy, J. N. (2005), “An Introduction to the Finite Element Method”. ISBN 0-07-051355-4. 3rd Edition McGraw-Hill Education (ISE Editions).
- [19] Seghir, A. (2014), “Cours Méthode des Eléments Finis”, (Polycopié de cours, Université Abderrahmane Mira (Bejaia).