



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques

# Mémoire de Master

En Mathématiques

*Spécialité : Recherche Opérationnelle*

## Thème

---

L'ordonnancement dans une chaîne de production

---

*Membres du jury :*

Présidente : Mme Oubakouk Lynda

Examinatrice : Mme Kheffache Rezika

Promotrice : Mme Fahem Karima

*Réalisé par :*

Mlle Ladjici Kamelia

2023/2024

# Remerciements

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Dieu, le Tout-Puissant, pour avoir éclairé mon chemin vers le savoir, m'avoir accordé la santé et la patience, et pour avoir facilité la gestion des difficultés, me permettant ainsi de mener ce mémoire à terme.*

*Je souhaite ensuite exprimer mes sincères remerciements à ma promotrice, Mme Fahem, pour ses précieux conseils, son soutien constant et son engagement sans faille. Sa disponibilité, sa patience et ses encouragements ont été déterminants dans la réussite de ce travail.*

*Je tiens également à exprimer ma profonde reconnaissance à M. Hadid, qui m'a aidée et fourni tout le nécessaire pour l'avancement de mon mémoire. Je remercie aussi toute l'équipe de l'ENIEM pour leur soutien précieux.*

*Je souhaite également adresser mes sincères remerciements à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques qui m'ont formée et guidée tout au long de mon cursus universitaire.*

*Enfin, j'adresse mes remerciements à Mme la Présidente et aux membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'évaluer ce travail.*

# Dédicace

*Je tiens à dédier ce travail à tous ceux qui comptent dans ma vie et qui m'ont accompagné jusqu'ici.*

*À mon père et ma mère que j'aime énormément, pour leur soutien indéfectible et leurs conseils avisés tout au long de mon parcours.*

*À la mémoire de ma grand-mère Bahdja, dont la sagesse et la bonté continuent de m'inspirer.*

*À mes deux sœurs Cylia et Khaoula, pour leur patience et leur compréhension constante pendant mes moments de travail intense.*

*À mes amis et ma famille, pour leur soutien moral et leur encouragement constant, sans lesquels cette réussite n'aurait pas été possible.*

*Et à toute personne qui m'aime et qui connaît **Kamelia** de près ou de loin.*

# Table des matières

|   |          |
|---|----------|
| <b>Table des matières</b>                                   | <b>3</b> |
| <b>1 Présentation de l'organisme d'accueil (ENIEM)</b>      | <b>9</b> |
| 1.1 Présentation de l'entreprise ENIEM . . . . .            | 9        |
| 1.1.1 La stratégie de l'ENIEM . . . . .                     | 10       |
| 1.1.2 Capital social . . . . .                              | 11       |
| 1.1.3 Objectif qualité . . . . .                            | 11       |
| 1.1.4 Les parts de marché de l'entreprise . . . . .         | 11       |
| 1.2 La constitution de l'entreprise . . . . .               | 11       |
| 1.2.1 La direction générale . . . . .                       | 12       |
| 1.2.2 Unité cuisson . . . . .                               | 12       |
| 1.2.3 Unité froid . . . . .                                 | 12       |
| 1.2.4 Unité climatisation . . . . .                         | 12       |
| 1.2.5 Unité sanitaire . . . . .                             | 13       |
| 1.2.6 Filiale . . . . .                                     | 13       |
| 1.2.7 Unité commerciale . . . . .                           | 13       |
| 1.2.8 Unité de présentation technique . . . . .             | 13       |
| 1.3 Les technologies utilisées par l'ENIEM . . . . .        | 13       |
| 1.4 Présentation du domaine d'étude (Unité Froid) . . . . . | 14       |
| 1.5 Organisation du département production . . . . .        | 16       |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.6      | Organisation du service d'ordonnancement . . . . .          | 17        |
| 1.6.1    | Présentation du service ordonnancement (unité froid)        | 17        |
| 1.6.2    | Les objectifs de l'ordonnancement . . . . .                 | 17        |
| 1.6.3    | Les activités du service d'ordonnancement . . . . .         | 18        |
| 1.6.4    | Les tâches du chef de service d'ordonnancement . .          | 18        |
| 1.6.5    | Les tâches des chargés d'étude . . . . .                    | 19        |
| 1.7      | Conclusion . . . . .  | 20        |
| <b>2</b> | <b>Généralités sur la théorie des graphes</b>               | <b>21</b> |
| 2.1      | Graphe non-orienté . . . . .                                | 22        |
| 2.2      | Graphes orientés . . . . .                                  | 22        |
| 2.3      | Successes/ Prédécesseurs . . . . .                          | 23        |
| 2.4      | Cheminement dans un graphe . . . . .                        | 25        |
| 2.4.1    | Chaîne de longueur $q > 0$ . . . . .                        | 25        |
| 2.4.2    | Le chemin . . . . .   | 25        |
| 2.4.3    | Le cycle . . . . .  | 26        |
| 2.4.4    | Le circuit . . . . .  | 27        |
| 2.5      | Connexité simple et forte ; Composantes connexes . . . . .  | 27        |
| 2.6      | Arbre . . . . .   | 28        |
| 2.7      | forêt . . . . .   | 28        |
| 2.8      | Arborescence . . . . .                                      | 28        |
| 2.9      | Réseau (Graphe valué) . . . . .                             | 28        |
| 2.10     | La mise en ordre d'un graphe (l'ordonnancement d'un graphe) | 28        |
| 2.11     | Recherche du plus court (long) chemin dans un graphe . .    | 29        |
| <b>3</b> | <b>Problème d'ordonnancement</b>                            | <b>32</b> |
| 3.1      | Ordonnancement . . . . .                                    | 33        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.1.1    | Généralités et notations . . . . .  | 33        |
| 3.1.2    | Définition . . . . .  | 33        |
| 3.1.3    | Tâches/ Jobs . . . . .  | 34        |
| 3.1.4    | Les ressources . . . . .  | 34        |
| 3.1.5    | Les ateliers . . . . .  | 35        |
| 3.1.6    | Les contraintes . . . . .   | 36        |
| 3.1.7    | Le problème central de l'ordonnancement . . . . .   | 37        |
| 3.1.8    | Critères d'optimisation . . . . .   | 37        |
| 3.2      | Méthodes de résolution des problèmes d'ordonnancement .   | 39        |
| 3.2.1    | La programmation mathématique . . . . .   | 39        |
| 3.2.2    | Les principales méthodes de représentation graphique<br>et d'ordonnancement de projet . . . . . | 39        |
| 3.2.3    | Comparaison des méthodes graphiques PERT (CPM)<br>et MPM . . . . .                              | 40        |
| 3.3      | La Méthode des potentiels Metra (MPM) . . . . .   | 41        |
| 3.3.1    | Historique . . . . .  | 41        |
| 3.3.2    | Principe . . . . .  | 42        |
| 3.4      | Analyse des coûts . . . . .   | 49        |
| 3.5      | Conclusion . . . . .  | 51        |
| <b>4</b> | <b>Problématique et résolution</b>  | <b>52</b> |
| 4.1      | Problématique . . . . .   | 53        |
| 4.1.1    | Position du problème . . . . .  | 53        |
| 4.1.2    | Objectif . . . . .  | 53        |
| 4.2      | Résolution . . . . .  | 54        |
| 4.2.1    | La modélisation mathématique . . . . .  | 54        |
| 4.2.2    | La mise en pratique . . . . .   | 59        |

|                          |           |
|--------------------------|-----------|
| 4.3 Conclusion . . . . . | 82        |
| <b>Bibliographie</b>     | <b>84</b> |

# Introduction générale

La recherche opérationnelle est une discipline fondamentale qui se consacre à l'optimisation des processus et des ressources dans divers domaines. Elle repose sur des méthodes mathématiques et algorithmiques pour résoudre des problèmes complexes en maximisant ou en minimisant des critères spécifiques. Cette approche analytique permet de modéliser et d'optimiser des systèmes industriels, logistiques, et économiques, offrant ainsi des solutions efficaces.

Ce mémoire se concentre sur l'application des méthodes de la recherche opérationnelle pour optimiser l'ordonnancement des tâches dans le cadre de la production au sein de l'ENIEM. Nous avons choisi de mettre en avant les techniques de modélisation mathématique, telles que la programmation linéaire, ainsi que les méthodes graphiques comme la méthode des potentiels Métra (MPM), pour résoudre des problèmes concrets rencontrés par l'entreprise.

L'objectif de cette étude est d'appliquer les connaissances acquises au cours de notre cursus de cinq ans et de démontrer comment une approche rigoureuse de l'ordonnancement peut conduire à des améliorations significatives de la performance industrielle. En prenant pour exemple l'optimisation de la durée totale d'assemblage d'un modèle de réfrigérateur spécifique, nous avons pu identifier des goulots d'étranglement et proposer des solutions pour augmenter la cadence de production tout en respectant les contraintes rencontrées .

Le mémoire est structuré en trois points essentiels :

- **Cadre Théorique** : présentation des concepts fondamentaux de l'ordonnancement et des techniques de recherche opérationnelle.
- **Méthodologie et Outils** : développement des modèles mathématiques utilisés, avec un accent particulier sur la programmation linéaire et la méthode des potentiels Métra.
- **Application Pratique** : étude de cas dans un contexte industriel, démontrant l'effi-

cacité des méthodes proposées pour résoudre des problèmes réels d'ordonnancement.

Le premier chapitre de ce mémoire présente une vue d'ensemble de l'organisme d'accueil. Le deuxième chapitre rappelle les notions fondamentales de la théorie des graphes, le troisième chapitre aborde les concepts théoriques liés à l'ordonnancement, en introduisant les méthodes classiques de la recherche opérationnelle. Enfin, le quatrième chapitre présente une étude de cas pratique appliquée à l'ENIEM, illustrant l'utilisation de ces méthodes pour résoudre un problème spécifique d'ordonnancement. Le travail se termine par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Présentation de l'organisme d'accueil (ENIEM)

### 1.1 Présentation de l'entreprise ENIEM



FIGURE 1.1 –

L'entreprise nationale des industries de l'électroménager (ENIEM) est une EPE/SPA (EPE : Entreprise Publique Économique, SPA : Société par Actions) créée le 2 janvier 1983 par décret n°83-19 de 1983 après la restructuration de la Société Nationale de Fabrication et de Montage de Matériel Électrique et Électronique (SONELEC), qui existe depuis 1974.

L'ENIEM occupe une place importante dans la fabrication d'électroménagers en Al-

gérie, où elle est reconnue comme le leader du secteur. Elle dispose de grandes capacités de production et d'une longue expérience dans la fabrication et le développement des différentes branches de l'électroménager, notamment :

- Les appareils ménagers domestiques,
- Les appareils de collectivités,
- Les lampes d'éclairage,
- Les produits sanitaires.

L'entreprise est située à la zone industrielle AISSAT IDIR de Oued Aissi à 7Km du chef-lieu de wilaya de Tizi-Ouzou, sa direction générale se trouve à la sortie sud -ouest de la ville de Tizi-Ouzou et à part le complexe qui se trouve à Tizi-Ouzou se situe une unité à Mohammedia, qui a entré en production en février 1979, et une unité à Miliana en 2000.

### **1.1.1 La stratégie de l'ENIEM**

Comme toutes les entreprises créées par l'état dans le but de répondre à une demande sociale importante, l'ENIEM avait pour objectif de satisfaire les besoins de la population en matière de produits électroménagers. Pour ce faire elle s'était engagée dans une gamme assez variée de produits pour répondre à la variété de la demande. Sachant que cette dernière était supérieure à l'offre et que l'entreprise était presque la seule sur le marché. Dans ce contexte, l'entreprise n'avait pas besoin de stratégie. Les dernières transformations qu'elle a connues l'économie algérienne font que le marché des entreprises devienne de plus en plus concurrentiel. Face à cette nouvelle donnée l'ENIEM se trouve dans l'obligation de tracer une stratégie qui lui permet de faire face à la concurrence et assurer sa pérennité. Alors l'entreprise affiche une stratégie fondée sur son métier de base, composée des produits suivants :

- Réfrigérateurs petit et grand modèles
- Congélateur vertical
- Cuisinière 4 et 5 feux
- Climatiseur type fenêtre et SPLIT-SYSTEM

Ces produits sont destinés en totalité au grand public par le biais des distributeurs qui sont des agents agréés. ENIEM compte au total 200 agents agréés dont 109 font de la distribution en gros/détail et 91 agents de réparation assure le service après-vente. Ce nombre important lui permet d'avoir un réseau de distribution couvrant tout le territoire

national. L'entreprise souhaite réduire ses coûts de l'ordre de 10% et pour ce faire, elle mise sur les actions suivantes :

- **Utilisation optimale des capacités de production existantes** afin de réaliser une couverture de 80% du marché national.
- **Concrétisation des actions de partenariat** notamment avec les étrangers.
- **Pénétration des marchés étrangers.**

### 1.1.2 Capital social

L'entreprise ENIEM a été transformée juridiquement en société par actions le 8 octobre 1989. Son capital social est de 10.279.800.000 DA détenu en totalité par le SGP.INELEC.

### 1.1.3 Objectif qualité

- Accroître la satisfaction des clients.
- Améliorer les compétences du personnel.
- Réduire les rebuts.
- Améliorer le chiffre d'affaires.

### 1.1.4 Les parts de marché de l'entreprise

Voici les parts de marché pour l'entreprise ENIEM sur les différents produits :

- 35% → Réfrigérateurs.
- 40% → à 48% Cuisinières.
- 65% → Climatiseurs.
- 53% → Congélateurs et conservateurs.
- 29% → Chauffe-bains et machines à laver.

## 1.2 La constitution de l'entreprise

Actuellement l'entreprise l'ENIEM se constituer de :

### **1.2.1 La direction générale**

La direction générale est responsable de la stratégie de développement de l'entreprise, elle exerce son autorité hiérarchique et fonctionnelle sur l'ensemble des directions et des Unités.

### **1.2.2 Unité cuisson**

L'émission de cette unité est de produire et développer la cuisson et tous les produits similaires, ses activités sont :

- Transformation de la tôle
- Traitement et revêtement de surface (émaillage, chromage)
- Assemblage

### **1.2.3 Unité froid**

Son rôle est de produire et développer les produits froids domestiques ; ses activités sont :

- Transformation des tôles
- Traitement et revêtement de surface (peinture, plastification)
- Injection plastique et poly plastique
- Fabrication de pièce métallique (condenseur, évaporateur)
- Isolation
- Thermoformage
- Assemblage

### **1.2.4 Unité climatisation**

La mission globale de cette unité est de développer les produits de climatisation, ses activités sont :

- Transformation
- Traitement et revêtement de surface (peinture)
- Assemblage

### 1.2.5 Unité sanitaire

La mission de cette unité est de produire et développer les produits sanitaires (baignoires, lavabos).

### 1.2.6 Filiale

L'unité lampes de Mohammedia pour la fabrication des lampes d'éclairage domestique ainsi que les lampes de réfrigérateurs est devenue filiale à 100% ENIEM le 01.01.1997 ; cette filiale est dénommée « FILAMP ».

### 1.2.7 Unité commerciale

Le rôle de cette unité est de faire écouler le produit dans le marché, Son travail est d'étudier la fluctuation du marché à travers un sondage sur l'offre et la demande.

### 1.2.8 Unité de présentation technique

Le rôle de cette unité est de faire une étude technique de produit et de l'examiner d'une façon qu'il pourra réaliser avec les moyens existant au sien de l'entreprise.

## 1.3 Les technologies utilisées par l'ENIEM

Depuis la création de l'ENIEM ses technologies répondent aux normes internationales dont ils sont importés dans le cadre de l'exploitation des licences et des copies de fabricant et fournisseurs de grandes marques étrangères. Le tableau ci-dessous présente la technologie utilisée par l'ENIEM dans chaque activité, ainsi que le pays d'origine :

| <b>Produit de l'ENIEM</b>  | <b>Technologies</b> | <b>Pays d'origine</b> |
|--|---------------------|-----------------------|
| Réfrigérateurs 200 et 240 litres                                 | Bosch               | Allemagne             |
| Congélateur bahut 350 et 480 litres et réfrigérateurs 520 litres | LMATIC              | Liban                 |
| Reste des réfrigérateurs   | Toshiba             | Japon                 |
| Cuisinières  | TECHNOGAZ           | Italie                |
| Climatiseurs   | AIR WELL            | France                |

TABLE 1.1 – Technologies importées par l'ENIEM

## 1.4 Présentation du domaine d'étude (Unité Froid)

L'unité froid comme son nom l'indique a pour mission de produire les produits de froid domestiques elle est scindée de sept départements et chaque département est répartie en plusieurs services.

- **Les départements et les services :**
  - Le département des ressources humaines.
  - Service gestion du personnel.
  - Service moyen commercial.
  
- **Le département technique :** qui est composé de :
  - Service d'étude et développement.
  - Service méthodes de fabrication.
  - Service laboratoire centrale.
  
- **Le département maintenance :** qui est composé de :
  - Service bureau technique.
  - Service équipement de fabrication.
  - Service équipement matières premières.
  
- **Le département qualité :** qui est composé de :
  - Service inspection matières.
  - Service inspection produits.
  - Service méthode et qualité.
  
- **Le département commercial :** qui est composé de :
  - Service achats.
  - Service gestion des stocks.
  - Service relation client.
  - Service transit et douane.
  
- **Le département finance et comptabilité :** qui est composé de :
  - Service comptabilité générale.

Service finances.

Service comptabilité analytique et budget.

- **Le département de production :**

C'est le département où se trouve notre champ d'étude il est composé du service ordonnancement et de 11 ateliers qui sont :

1. **Ateliers presse et soudure** : Son rôle est découpage, poinçonnage, pliage et soudage des différentes positions du produit.
2. **Ateliers de traitement et de revêtement de surface peinture** (chaîne principale) : C'est là où on applique une couche de peinture après plusieurs traitements de surface.
3. **Ateliers d'assemblage pièces** (chaîne préfabrication) : C'est là où se passent la fabrication des joints des portes, l'assemblage de thermostat plus coffrets, montage de la cuve et la contre porte et aussi soudage des tubes d'aspiration avec l'évaporateur.
4. **Ateliers d'injection plastique** (chaîne préfabrication) : Fabrication des pièces en plastique et en styropor.
5. **Ateliers de fabrication de pièces métalliques** (chaîne préfabrication) : C'est là où sont fabriquées les pièces en aluminium et en cuivre (plaque évaporateur, panier, condenseur...).
6. **Atelier moussage** (chaîne principale) : Injection d'une mousse fabriquée à base de polyol et isocyanate entre la cuve intérieure et la cuve extérieure aussi entre la porte et la contre porte pour assurer la rigidité et l'isolation thermique du produit.
7. **Ateliers montage final grand modèle GM** (chaîne principale) : C'est la chaîne principale, par ce que toutes les pièces fabriquées dans les ateliers précédents seront acheminées vers cet atelier, pour qu'elles prennent place dans le produit qui sort de l'atelier comme produit fini vers le magasin de l'unité commerciale.
8. **Ateliers refendage** (chaîne de préfabrication) : C'est une chaîne de préfabrication ; son rôle consiste à refondre et à découper les bobines de tôle.
9. **Atelier montage final petit modèle PM** : chaîne principale.

10. **Atelier styropors** : chaîne de préfabrication.

11. **Atelier montage final bahut** (congélateur horizontal) : chaîne principale.

Il existe deux chaînes au niveau de la fabrication (les 11 ateliers) qui sont : la chaîne de préfabrication et la chaîne principale.

Pour mettre en évidence cette organisation, nous représentons dans ce qui suit l'organigramme de l'unité froid :

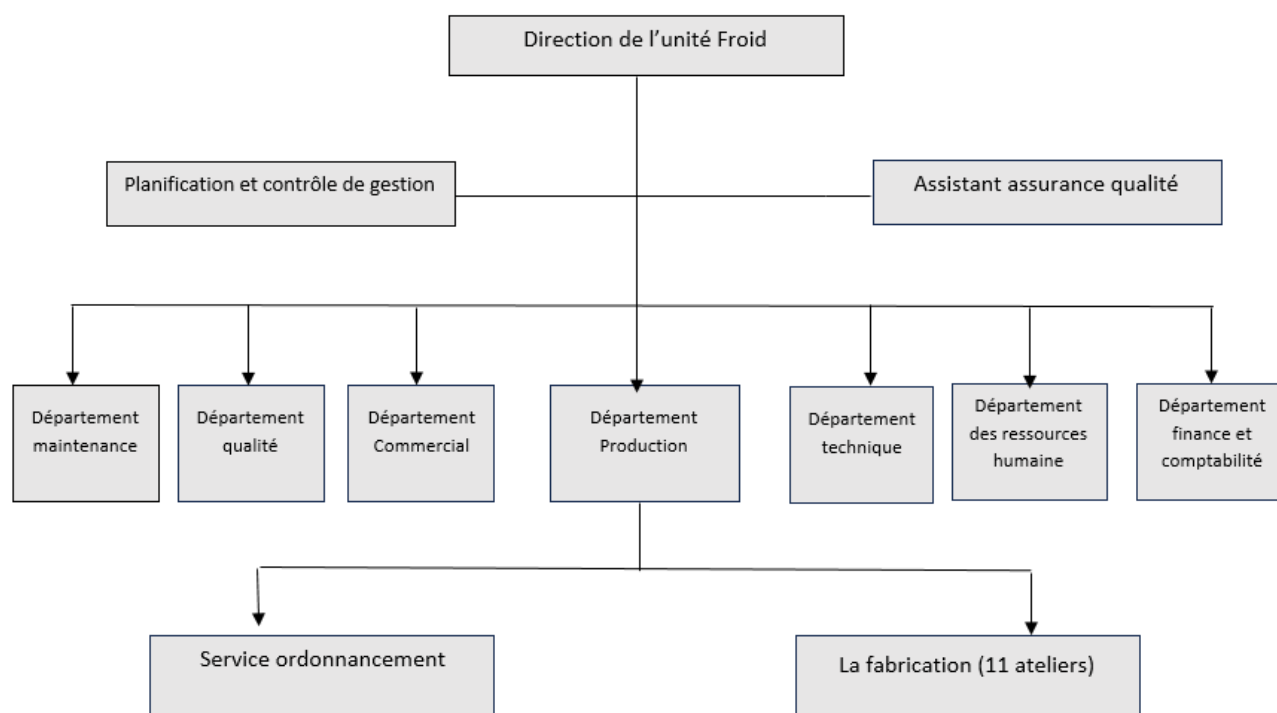


FIGURE 1.2 – l'organigramme de l'unité froid

## 1.5 Organisation du département production

Organisation du département production le département de production est constitué d'un chef de département, d'un secrétariat, d'un service d'ordonnancement et de 11 ateliers. Chaque atelier a un responsable qui communique avec le service d'ordonnancement et le chef de département de production pour signaler des anomalies comme (les pannes, les arrêts, les ruptures de stock ...), à travers des réunions de coordination faites chaque jour à 10h du matin. Le département de production a pour responsabilités :

- De veiller à la réalisation des objectifs arrêtés par la direction.
- De veiller à la qualité des produits fabriqués.

- De susciter l'amélioration des méthodes et moyens de production.
- De proposer un programme d'amélioration de qualité et de quantité des produits fabriqués.
- De veiller au bon fonctionnement des équipements.

## 1.6 Organisation du service d'ordonnancement

### 1.6.1 Présentation du service ordonnancement (unité froid)

L'ordonnancement est la fonction qui vise à organiser la production afin d'obtenir un produit de qualité constante dans les délais impartis et au moindre coût.

Pour cela, il participe au choix des programmes et enclenche les opérations entre les différents services (structures), jusqu'à la réalisation du produit fini.

De manière générale, l'ordonnancement conduit les événements, enclenche et coordonne les tâches à court et moyen terme, et optimise leur réalisation par l'étude des besoins quantitatifs.

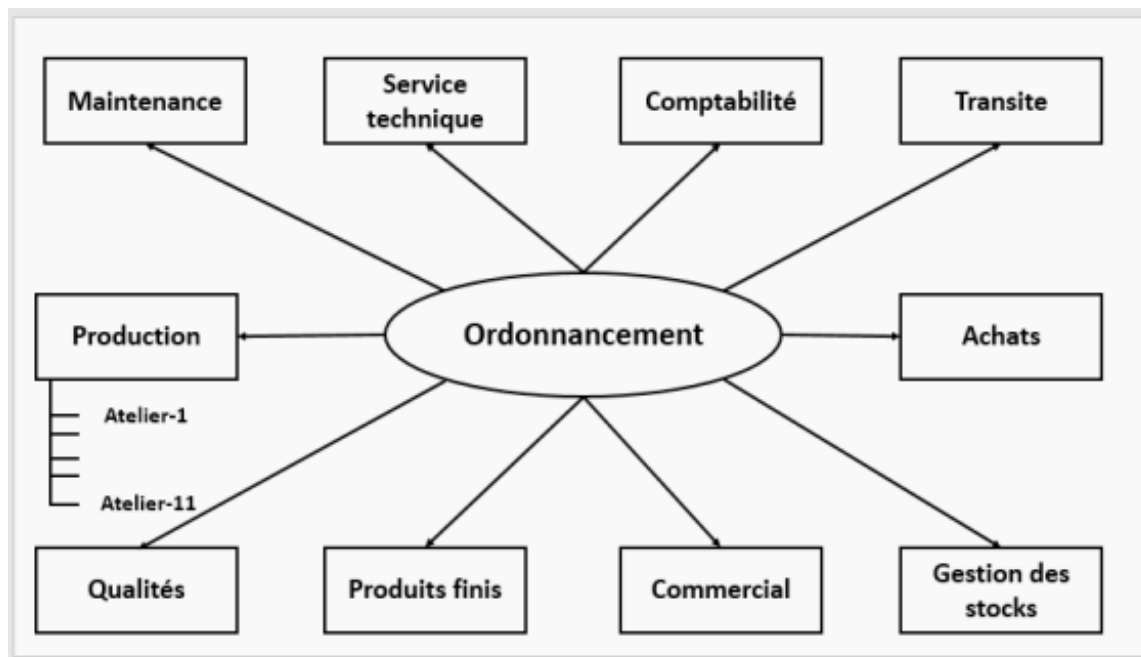


FIGURE 1.3 – Les relations du service d'ordonnancement

### 1.6.2 Les objectifs de l'ordonnancement

L'ordonnancement consiste à transformer les décisions de production définies par le programme du directeur de la production en exécution afin de piloter et contrôler les ateliers. La fonction de l'ordonnancement est partagée en trois :

- **Élaboration des O-F** : elle consiste à transformer les décisions de production en ordre de fabrication.
- **Élaboration du planning atelier** : le planning est élaboré en fonction des ordres de fabrication et la disponibilité des ressources (matière, personnel, machine).
- **Lancement et suivi** : consiste à mettre à la disposition des ateliers les documents nécessaires et lancer la production.

### 1.6.3 Les activités du service d'ordonnancement

Les activités du service d'ordonnancement sont :

- Choix et conception de la méthode de régulation du travail dans les différents secteurs de l'unité en fonction de la politique adoptée par la direction générale.
- Suit la production afin de pouvoir réduire les objectifs d'activités de l'entreprise en fonction des objectifs de vente de la commerciale.
- Assurer la disponibilité de la matière première dans l'atelier pour éviter les arrêts de travail.
- Décision de lancement, de fabrication dans le temps, des quantités nécessaires à l'élaboration du produit en fonction du programme de fabrication et des cycles de fabrication définis par le service des méthodes.
- Rédiger et classer les documents déclenchant l'exécution du travail.
- Le contrôle de l'avancement des réalisations avec surveillance des rebuts.

### 1.6.4 Les tâches du chef de service d'ordonnancement

Cette personne est à la tête du service d'ordonnancement et supervise l'ensemble des opérations de planification et d'organisation de la production. Elle :

- Détermine les besoins en matières premières.
- Assure la disponibilité des matières premières pour la production.
- Contrôle la consommation des matières premières.
- Supervise la réalisation du programme de production en collaboration avec le service de fabrication.
- Établit des rapports de réalisation des matières premières.

- Établit des statistiques concernant les réalisations et la consommation.
- Contrôle et analyse les écarts de production.
- Organise et supervise le travail de ses subordonnés et les assiste dans leurs activités.
- Veille au respect des normes et procédures de gestion et assure de bonnes relations avec les autres services.
- Veille au respect des règles d'hygiène et de sécurité.

### 1.6.5 Les tâches des chargés d'étude

**Le chargé d'étude d'ordonnancement** est responsable de :

- Approuver les approvisionnements du magasin pour les besoins en matières premières de la production.
- Décider et procéder aux lancements de production.
- Superviser l'exécution du travail dans les différentes structures.
- Surveiller l'état du stock et les rebuts.
- Veiller au respect des délais.
- Mentionner les problèmes dans le rapport d'activités hebdomadaires et proposer des solutions.
- Analyser les écarts entre les prévisions et les réalisations et en tenir compte pour éliminer les causes à l'avenir.

**Le chargé d'étude principal** a des responsabilités similaires mais plus étendues, incluant :

- Coordonner les activités de plusieurs chargés d'étude d'ordonnancement.
- Superviser les projets de plus grande envergure ou de complexité accrue.
- Assurer une communication efficace entre les différents services impliqués dans la production.
- Mettre en place des stratégies pour optimiser les processus de production.
- Veiller à l'alignement des objectifs de production avec les objectifs stratégiques de l'entreprise.

## 1.7 Conclusion

Notre stage à l'ENIEM nous a permis de connaître leurs différentes méthodes de gestion de la production ainsi que les procédures nécessaires à leur bon déroulement. L'ENIEM a pour objectif de répondre aux besoins de la demande en quantité et en qualité. Cette étude est basée sur un cas réel qui nous a permis de mettre en pratique les connaissances acquises au cours de notre formation dans le domaine de la recherche opérationnelle et de nous confronter à un problème réel de gestion de la production. Elle nous a également permis de nous introduire dans la vie active au sein d'une entreprise de production.

## Chapitre 2

# Généralités sur la théorie des graphes

### Introduction

Les graphes constituent un outil des mathématiques discrètes tout à fait naturel pour définir, représenter et modéliser bon nombre de problèmes de recherche opérationnelle. Ils permettent de plus d'avoir souvent une vision pratique de ces problèmes.

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg. (Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, ect.

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de

l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

## 2.1 Graphe non-orienté

Un graphe non-orienté est un couple  $(X, E)$  où  $X$  est un ensemble de sommets et Les éléments de  $E$  sont appelés arêtes.

Parfois, on autorise les boucles (arêtes de mêmes extrémités) ou les arêtes multiples. L'arête  $\{x, y\}$  est souvent notée  $xy$ .

- Notons que dans un graphe non-orienté  $(x, y)$  est équivalent à  $(y, x)$ . [8]

### Exemple

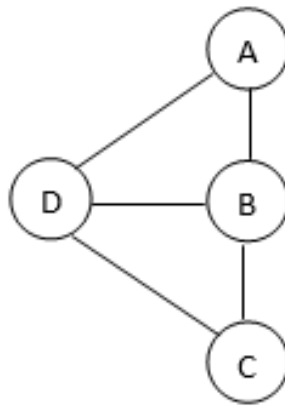


FIGURE 2.1 – Graphe non orienté

$G = (X, E)$  est un graphe non orienté où :

$X = \{ A, B, C, D \}$  : sont les sommets de  $G$ ,

$E = \{ AB, BC, BD, AD, DC \}$  : sont les arêtes de  $G$ .

## 2.2 Graphes orientés

On appelle graphe orienté ou digraphe  $G = (X, U)$  la donnée d'un ensemble  $X$  dont les éléments sont appelés sommets et d'une partie  $U$  de  $X \times X$  dont les éléments sont appelés arcs. [4]

En présence d'un arc  $u = (x, y)$  qui peut être noté simplement  $xy$ , on dit que  $x$  est l'origine (ou extrémité initiale) et  $y$  l'extrémité (terminale) de  $u$ , tel que  $u$  est sortant en  $x$  et incident en  $y$ , et que  $y$  est un successeur de  $x$  tandis que  $x$  est un prédécesseur de  $y$ . On dit aussi que  $x$  et  $y$  sont adjacents.

## Exemple

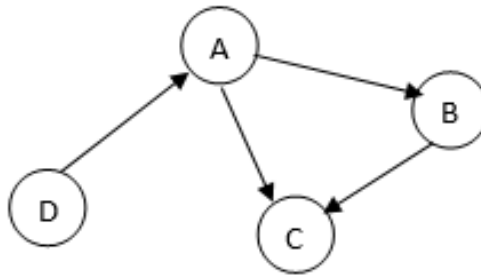


FIGURE 2.2 – Graphe orienté

$G = (X, U)$  est un graphe orienté,  
 $X = \{ A, B, C, D \}$  : l'ensemble des sommets,  
 $U = \{ AB, AC, BC, DA \}$  : ensemble des arcs de  $G$ .

## 2.3 Successeurs/ Prédécesseurs

L'ensemble des successeurs d'un sommet  $x \in X$  est noté  $\Gamma^+(x)$ . L'application  $\Gamma^+$  qui, à tout élément de  $X$ , fait correspondre une partie de  $X$  (un élément de  $\mathcal{P}(X)$ ) est appelée une *application multivoque*. L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet  $x \in X$  peut alors être noté  $\Gamma^-(x)$  où  $\Gamma^-$  est l'application multivoque réciproque de  $\Gamma^+$ .

## Exemple

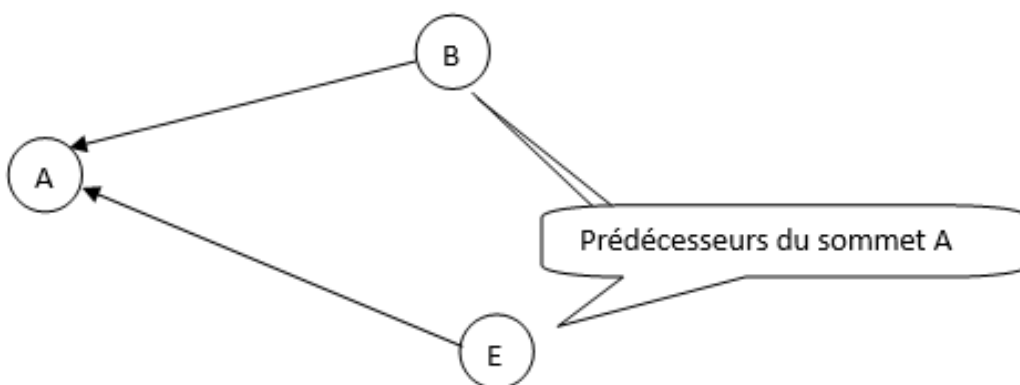


FIGURE 2.3 – Prédécesseurs du sommet A

Partant des sommets  $B$  et  $E$ , on peut atteindre le sommet  $A$  par deux arcs  $BA$  et  $EA$ . Les sommets  $B$  et  $E$  forment ainsi l'ensemble des prédécesseurs de  $A$ , qu'on note  $\Gamma^-(A)$ .

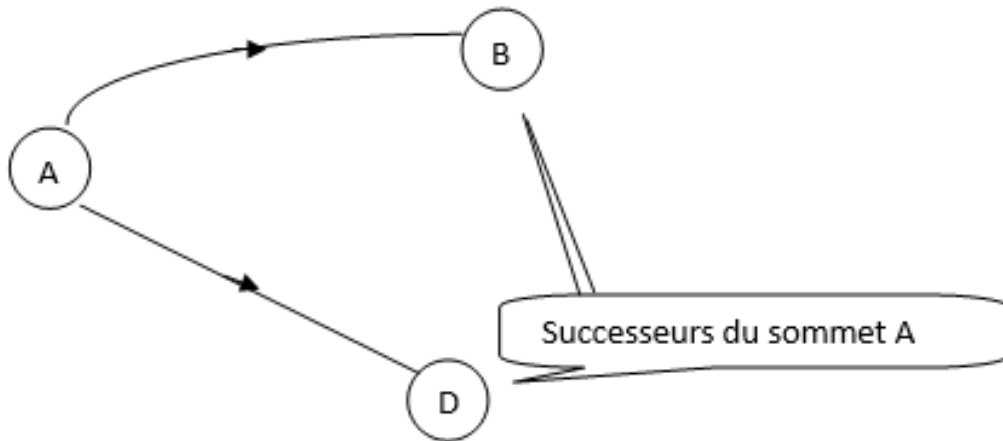


FIGURE 2.4 – Successeurs du sommet A

Partant du sommet  $A$ , on peut atteindre directement les sommets  $B$  et  $D$ , respectivement par les arcs  $AB$  et  $AD$ . Les sommets  $B$  et  $D$  forment ainsi l'ensemble des successeurs de  $A$ , qu'on note  $\Gamma^+(A)$ .

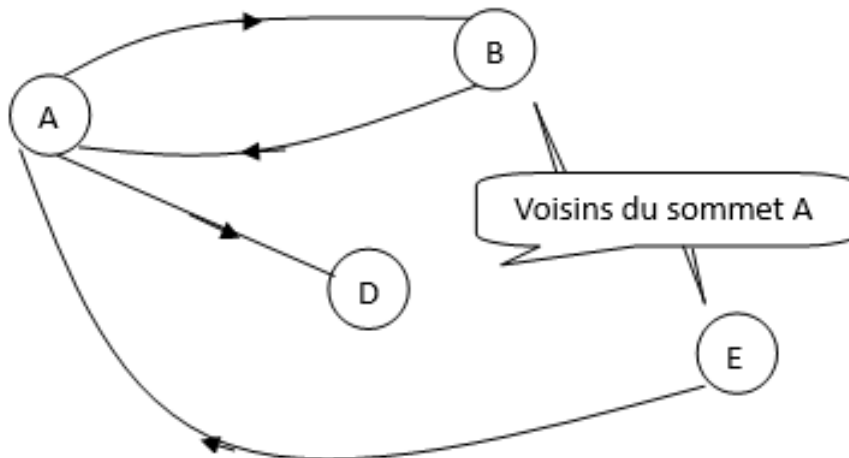


FIGURE 2.5 – Voisins du sommet A

L'ensemble des voisins du sommet  $A$  est égal à la réunion de l'ensemble de ses prédécesseurs et de ses successeurs  $\Gamma^+ \cup \Gamma^-$ . On le note  $\Gamma(A)$  ou  $v(A)$  [8]

## 2.4 Cheminement dans un graphe

### 2.4.1 Chaîne de longueur $q > 0$

Une chaîne est une séquence  $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  d'arcs de  $G$  telle que chaque arc de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arc précédent, et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant. Le nombre d'arcs de la séquence est la longueur de la chaîne  $\mu$ .

- **Chaîne simple** : une chaîne est dite simple si elle n'utilise pas deux fois le même arc.
- **Chaîne élémentaire** : une chaîne est dite élémentaire si elle ne rencontre pas deux fois le même sommet.
- **Chaîne eulérienne** : est la chaîne qui passe par tous ses arcs une et une seule fois.
- **Chaîne hamiltonienne** : est la chaîne qui passe une et une seule fois par tous les sommets.

#### Exemple

Dans un graphe  $G$ , la suite de sommets suivante  $(A, B, C, D)$  est une chaîne joignant  $A$  à  $D$ .

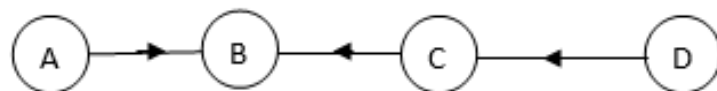


FIGURE 2.6 – chaîne

### 2.4.2 Le chemin

Le chemin est une chaîne de  $G$  dont tous ses arcs sont orientés dans le même sens de parcours.

- **Chemin simple** : est un chemin qui passe une et une seule fois par tous ses arcs.
- **Chemin élémentaire** : est un chemin tel qu'en le parcourant on ne rencontre pas deux fois le même sommet.
- **Chemin eulérien** : est un chemin simple qui passe une et une seule fois par tous les arcs du graphe.

- **Chemin hamiltonien** : est un chemin qui passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe.

### Exemple

Dans un graphe  $G$ , la suite de sommets suivante  $(A, B, C, E)$  est un chemin joignant  $A$  à  $E$ .

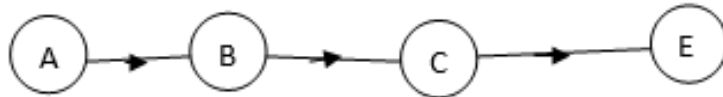


FIGURE 2.7 – chemin

### 2.4.3 Le cycle

C'est une chaîne  $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  telle que :

1. Le même arc ne figure pas deux fois dans la séquence.
  2. Les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.
- **Cycle élémentaire** : est un cycle qui passe une et une seule fois par ses sommets.
  - **Cycle eulérien** : est un cycle qui utilise tous les arcs du graphe une et une seule fois.
  - **Cycle hamiltonien** : est un cycle qui passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe.

### Exemple

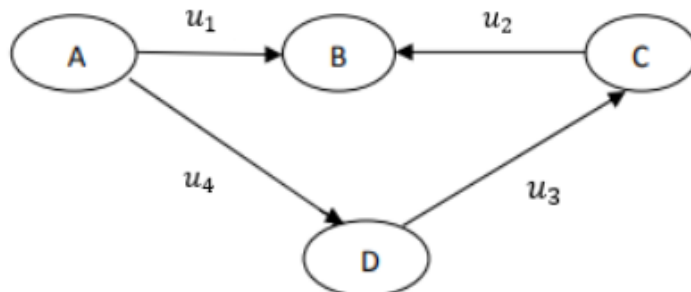


FIGURE 2.8 – cycle

La suite des arcs  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est un cycle.

#### 2.4.4 Le circuit

C'est un cycle  $\mu = (u_1, u_2, \dots, u_q)$  tel que pour  $i < q$ , l'extrémité terminale de  $u_i$  coïncide avec l'extrémité initiale de  $u_{i+1}$ .

- **Circuit élémentaire** : est un circuit qui passe une et une seule fois par tous ses sommets.
- **Circuit eulérien** : est un circuit qui utilise tous les arcs du graphe une et une seule fois.
- **Circuit hamiltonien** : est un circuit qui passe une et une seule fois par tous les sommets du graphe.

#### Exemple

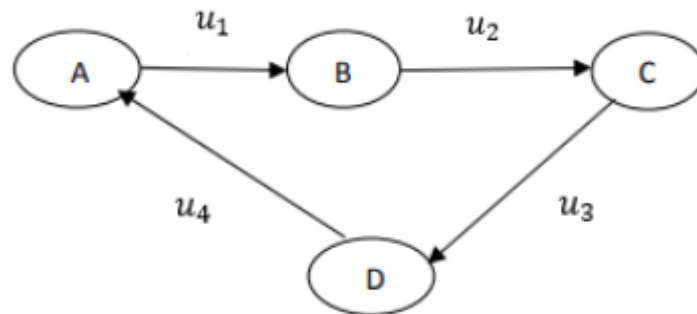


FIGURE 2.9 – circuit

La suite des arcs  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est un circuit.

## 2.5 Connexité simple et forte ; Composantes connexes

- Un graphe est connexe si pour tout couple  $i, j$  de sommets, soit  $i = j$ , soit il existe une chaîne joignant  $i$  et  $j$ .
- Un graphe est fortement connexe si pour tout couple  $i, j$  de sommets, soit  $i = j$ , soit il existe deux chemins, l'un allant de  $i$  à  $j$  et l'autre de  $j$  à  $i$ .

La notion de connexité simple ne tient donc pas compte de l'orientation des arcs, contrairement à celle de connexité forte.

Considérons les deux relations suivantes,  $C$  et  $C_f$ , entre deux sommets  $i$  et  $j$  : Connexité simple :  $iCj$  si et seulement si soit  $i = j$ , soit il existe une chaîne joignant  $i$  et  $j$

Connexité forte :  $iC_fj$  si et seulement si soit  $i = j$ , soit il existe deux chemins l'un allant de  $i$  à  $j$ , l'autre de  $j$  à  $i$ .

Ces deux relations sont des relations d'équivalence (réflexive, transitive et symétrique). Les classes d'équivalence qui en résultent sont appelées respectivement composantes connexes pour  $C$  et composantes fortement connexes pour  $C_f$ . Le nombre de connexité (forte) est par définition le nombre de composantes (fortement) connexes. Si le nombre de connexité (forte) vaut 1, autrement dit la relation  $C(C_f)$  est vérifiée pour toute paire  $i$  et  $j$ , le graphe est donc (fortement) connexe. [15]

## 2.6 Arbre

Un graphe  $G = (X, E)$  est un arbre s'il est connexe et sans cycle.

## 2.7 forêt

Une forêt est un graphe  $G = (X, E)$  dont chaque composante connexe est un arbre.

## 2.8 Arborescence

Un graphe  $G$  est une **arborescence** s'il existe un sommet  $R$ , appelé *racine* de  $G$ , tel que, pour tout sommet  $S$  de  $G$ , il existe un chemin et un seul de  $R$  vers  $S$  avec  $S \neq R$ .

## 2.9 Réseau (Graphe valué)

Un réseau est un graphe  $G = (X, U)$  muni d'une application  $d : U \rightarrow \mathbb{R}$  qui à chaque arc  $u$  fait correspondre  $d(u) \in \mathbb{R}$ . On note un tel réseau par  $R = (X, U, d)$ . En pratique,  $d(u)$  peut matérialiser un coût, une distance, une durée, etc. [2]

## 2.10 La mise en ordre d'un graphe (l'ordonnement d'un graphe)

Ordonner un graphe revient à disposer dans un certain ordre ses sommets tels que les arcs soient dans le même sens. On définit ainsi les différents niveaux des sommets.

On appelle niveau d'un sommet  $x_i$  la longueur maximale au sens des arcs allant de l'origine vers ce sommet.

**Procédure de détermination des niveaux :**

— L'ensemble du niveau 0 est donné par :

$$N_0 = \{x \in X \mid \Gamma^-(x) = \emptyset\}$$

— D'un niveau à un autre immédiatement supérieur, on a :

$$N_i = \{x \in X \setminus N_{i-1} \mid \Gamma^-(x) = \emptyset\}$$

— On s'arrête lorsque :

$$\bigcup_i N_i = X$$

. (Autrement dit, les niveaux de tous les sommets du graphe sont déterminés.)

**Remarque :** Si à une quelconque étape  $k \geq 0$ , on trouve que  $N_k = \emptyset$ , cela signifie que le graphe contient au moins un circuit.

## 2.11 Recherche du plus court (long) chemin dans un graphe

Soit un graphe  $G = (X, U)$  orienté, valué, sans circuit, avec  $|X| = n$ ; la valuation des arcs sont supposées positives ou nulle. soient deux sommets que nous noterons  $x_0$  et  $x_{n-1}$ , tels qu'il existe au moins un chemin de  $x_0$  à  $x_{n-1}$ . [10]

**Définition :** on appelle *valeur* d'un chemin la somme des valuations des arcs empruntés par ce chemin.

**Problème :** on se propose de trouver "un chemin de valeur minimale (ou maximale) entre  $x_0$  et  $x_{n-1}$ ."

### Le problème du plus court chemin

On appelle le problème du plus court chemin le problème suivant : étant donné un graphe  $G$ , associons à chaque arc  $u$  un nombre  $d(u) \geq 0$  que nous appellerons la "longueur" de l'arc  $u$ . Trouver un chemin élémentaire  $\mu$ , allant d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$ , et tel que la longueur totale :

$$d(\mu) = \sum_{u \in \mu} d(u)$$

soit aussi petite que possible.

Un chemin  $\mu$  joignant un sommet  $i$  à un sommet  $k$  est dit de longueur minimale ou maximale s'il minimise ou maximise cette longueur  $d(\mu)$  dans l'ensemble de tous les chemins joignant  $i$  à  $k$ .

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre les problèmes de recherche des plus courts chemins de longueur minimale (ou maximale).

Il sera intéressant d'introduire une matrice  $M$ , dite matrice de longueurs, dont l'élément  $M_{ij}$  se définit comme suit :

$$M_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } (i, j) \in U \\ \infty & \text{si } (i, j) \notin U \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

- $M_{ij} = d_{ij}$  si l'arc  $(i, j)$  existe dans l'ensemble  $U$ . Cela signifie que l'élément  $M_{ij}$  est égal à la longueur, au coût, à la distance, ou à la durée associée à l'arc  $(i, j)$ .
- $M_{ij} = \infty$  si l'arc  $(i, j)$  n'existe pas dans l'ensemble  $U$ . Cela signifie qu'il n'y a pas de connexion directe entre les sommets  $i$  et  $j$ , et l'on considère que la "distance" entre eux est infinie.
- $M_{ij} = 0$  si  $i = j$ , cela indique que la distance ou le coût pour aller d'un sommet à lui-même est nul.

### Algorithmes de résolution

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre les problèmes de cheminement dans un réseau. Nous nous concentrerons ici sur l'algorithme de Bellman.

**Algorithme de Bellman** : on applique cet algorithme pour la recherche d'une arborescence de plus court chemin dans un réseau  $R = (X, U, d)$  sans circuit.

**Le principe** : l'idée de l'algorithme de Bellman, est de calculer de proche en proche l'arborescence de plus courtes distances, issue du sommet  $s$  à un sommet donné  $p$ .

On ne calcule la plus courte distance du sommet  $s$  à  $y$  que si on a déjà calculé les plus courtes distances du sommet  $s$  à tous les prédécesseurs du sommet  $y$ .

### Énoncé :

- **Données** : un réseau  $R = (X, U, d)$  sans circuit avec  $d(u) \in \mathbb{R}$ .
- **Résultat** : arborescence de plus courtes distances  $A$ .

**(0) Initialisation** : soit  $s$  un sommet de  $X$ , on pose  $S = s$  et  $\pi(s) = 0$ ;  $A = \emptyset$ .

(1) Chercher un sommet  $x$  hors de  $S$  dont tous les prédécesseurs sont dans  $S$ .

— Si un tel sommet n'existe pas ;

terminer Dans ce cas soit  $S = X$ , ou le sommet  $s$  n'est pas une racine dans  $R$ .

— Si un tel sommet existe, aller en (2).

(2) On pose :  $\pi(x) = \min(\pi(I(u)) + d(u))$  pour  $u \in U$ ,  $T(u) = x$

où  $I(u)$  est l'extrémité initiale de  $u$

$T(u)$  l'extrémité terminale.

Soit  $u'$  l'arc pour lequel  $\pi(x) = \pi(I(u')) + d(u')$ .

$A := A \cup \{u'\}$ ;  $S := S \cup \{x\}$  aller à (1).

### Remarque

L'algorithme de Bellman s'applique aussi pour la recherche du plus long chemin. En effet, il suffit de changer le min dans l'itération (2) en max.

*Une théorie des graphes, unifiée et abstraite, n'a pu prendre sa forme actuelle que grâce aux efforts de certains spécialistes de la recherche opérationnelle et sous l'impulsion de préoccupations pratiques. « Claude Berge ». [3]*

## Chapitre 3

# Problème d'ordonnancement

### Introduction

L'ordonnancement des projets ou de production représente une composante cruciale de la gestion de projet, visant à organiser et à optimiser l'utilisation des ressources disponibles afin de respecter les délais impartis. La complexité croissante des projets industriels et la nécessité d'assurer une coordination efficace entre les différentes tâches exigent des méthodes rigoureuses et des outils analytiques sophistiqués. Parmi ces outils, les méthodes basées sur la théorie des graphes, telles que la Méthode des Potentiels Métra (MPM) et la méthode PERT, occupent une place prépondérante.

Les travaux de **Meredith et Mantel (2012)** [13] sur la gestion de projet mettent en lumière l'importance d'une planification minutieuse pour minimiser les risques et les retards dans les projets complexes. Ces auteurs soulignent que l'usage des diagrammes de Gantt, des réseaux PERT et des graphes MPM permet non seulement de visualiser les interdépendances entre les tâches, mais également de déterminer le chemin critique, essentiel pour le respect des délais.

Par ailleurs, **Hillier et Lieberman (2010)** [11], dans leur ouvrage de référence sur la recherche opérationnelle, décrivent les techniques d'ordonnancement comme étant des applications directes de l'optimisation sous contraintes, où chaque tâche est associée à des ressources et à des délais spécifiques. Ces techniques sont indispensables pour résoudre des problèmes complexes comme ceux rencontrés dans les environnements de production en parallèle ou dans les ateliers où les séquences de production doivent être soigneusement orchestrées pour éviter les goulots d'étranglement.

En s'appuyant sur ces fondements théoriques, ce chapitre se propose d'explorer les différentes méthodes d'ordonnancement, avec un focus particulier sur la méthode MPM, qui

a été choisie pour l'étude pratique exposée dans ce travail. Après une brève introduction à la théorie des graphes, nous examinerons en détail la MPM, suivie d'une comparaison avec d'autres approches comme la méthode PERT et les diagrammes de Gantt. Nous aborderons également les défis posés par l'ordonnancement sous contraintes et les spécificités de l'ordonnancement en atelier et en production parallèle.

Cette exploration vise à fournir un cadre théorique solide pour comprendre les choix méthodologiques effectués dans la partie pratique de ce travail, tout en offrant une vision d'ensemble des approches existantes en matière d'ordonnancement de projets.

## 3.1 Ordonnancement

### 3.1.1 Généralités et notations

*“Ordonnancer, c'est programmer l'exécution d'une réalisation en attribuant des ressources aux tâches et en fixant leurs dates d'exécution. Enfin, il faut programmer les tâches de façon à optimiser un certain objectif.”*

— J. Carlier et P. Chrétienne. [6]

### Mais d'abord, qu'est ce qu'un ordonnancement ?

Étant donné un objectif qu'on se propose d'atteindre, et dont la réalisation suppose l'exécution préalable de multiples tâches, soumises à de nombreuses contraintes et en leur allouant les ressources requises, établir un ordonnancement, c'est déterminer l'ordre et le calendrier d'exécution des diverses tâches, la théorie de l'ordonnancement est née en mathématiques où on traite des modèles théoriques, mais elle traite également des modèles du monde réel qui sont fort complexes. [10]

Autrement, Un problème d'ordonnancement consiste à exécuter un ensemble de  $n$  tâches noté  $T = \{1, \dots, n\}$ . À chaque tâche  $i \in T$  est associée sa durée d'exécution  $p_i$  que, sauf mention du contraire, nous supposerons entière et positive; la date de début d'exécution d'une tâche  $i$  est noté  $s_i$  et sa date de fin d'exécution  $C_i$ . Nous supposerons que pour toute tâche  $i$  nous avons  $s_i \geq 0$ . [10]

### 3.1.2 Définition

Un ordonnancement optimal est une solution optimale, c'est un calendrier d'exécution qui conduit à la durée totale la plus courte.

Les paragraphes suivants précisent ces notions de tâche, ressource, objectif, ect et introduisent quelques notations.

### 3.1.3 Tâches/ Jobs

Une tâche  $i$  est un travail (job), opération ou ensemble d'opérations concrètement identifiable, concerné par la réalisation, et dont l'exécution se trouve complètement décrite par les caractéristiques suivantes : [14]

— Caractéristiques d'époques : une tâche doit avoir des limites chronologiques bien définies.

$s_i$  époque de début de la tâche

$C_i$  époque de fin de la tâche

— Caractéristique de durée :

$p_i = C_i - s_i$  durée du travail

Nous considérons deux modes d'exécution des tâches, le mode préemptif et le mode non préemptif. Dans un ordonnancement non préemptif, chaque tâche  $i$  s'exécute sans interruption, ainsi  $s_i + p_i = C_i$ ,  $\forall i \in T$ . Dans le mode préemptif, l'exécution d'une tâche  $i$  peut être interrompue et la somme des longueurs des intervalles de temps pendant lesquels  $i$  est exécutée est égale à  $p_i$ , et on a alors  $s_i + p_i \leq C_i$ , pour toute tâche  $i \in T$ .

### 3.1.4 Les ressources

Pour l'exécution des tâches, ces dernières requièrent certaines ressources telles que des machines, la main d'œuvre, les moyens financiers, etc.

Une ressource  $k$  est donc, un moyen humain ou technique qui est utilisé dans la réalisation d'une tâche. Elle est disponible en quantité limitée.

La disponibilité est généralement exprimée par une capacité propre à chaque ressource  $k$  notée  $Q_k (Q_k \geq 1)$ .

On distingue deux types de ressources : les ressources renouvelables et les ressources consommables.

Une ressource est consommable si, après avoir été allouée à une tâche, elle n'est plus disponible pour les tâches suivantes. Le cas pour l'argent, la matière première, etc.

Une ressource est renouvelable si, après avoir été allouée à une tâche, elle redevient disponible après la fin de cette tâche pour les tâches suivantes. C'est le cas pour les machines, les processeurs, les fichiers, le personnel, etc. [14]

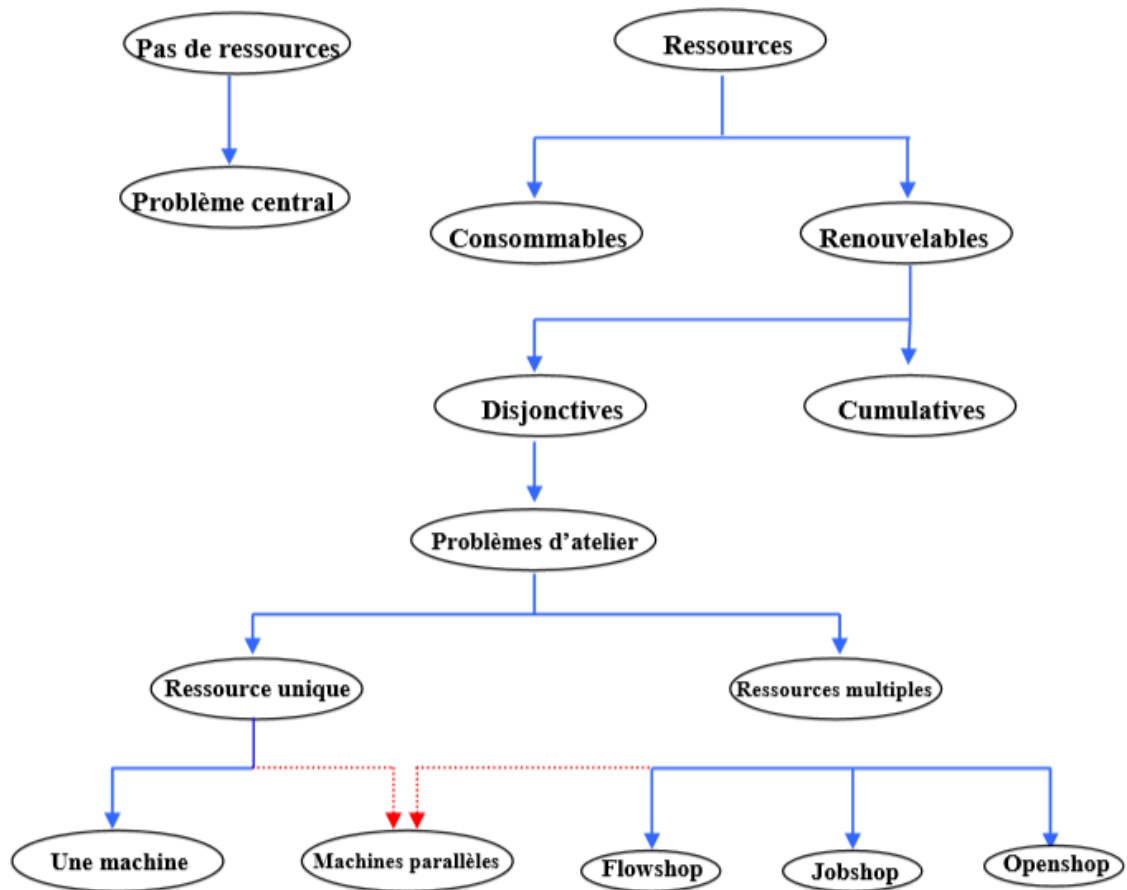


FIGURE 3.1 – Typologie des problèmes d’ordonnancement par les ressources

### 3.1.5 Les ateliers

Une classification des problèmes d’ordonnancement dans un atelier peut s’opérer selon le nombre de machines et leur ordre d’utilisation pour fabriquer un produit, qui dépend de la nature de l’atelier considéré. Un atelier est caractérisé par le nombre de machines qu’il contient et par son type. Comme le montre la figure 3.1, on distingue les trois types d’ateliers suivants : flow-shop, job-shop et open-shop, avec des extensions possibles pour chacun d’eux.

#### Les ateliers de type flow-shop

Appelés également ateliers à cheminement unique, ce sont des ateliers où une ligne de fabrication est constituée de plusieurs machines en série ; toutes les opérations de toutes les tâches passent par les machines dans le même ordre. Dans les ateliers de type flow-shop hybride, une machine peut exister en plusieurs exemplaires identiques fonctionnant en parallèle.

### Les ateliers de type job-shop

Appelés également ateliers à cheminement multiple, ce sont des ateliers où les opérations sont réalisées selon un ordre bien déterminé, variant selon la tâche à exécuter ; le job-shop flexible est une extension du modèle job-shop classique ; sa particularité réside dans le fait que plusieurs machines sont potentiellement capables de réaliser un sous-ensemble d'opérations.

### Les ateliers de type open-shop

Ce type d'atelier est moins contraint que celui de type flow-shop ou de type job-shop. Ainsi, l'ordre des opérations n'est pas fixé a priori ; le problème d'ordonnement consiste, d'une part, à déterminer le cheminement de chaque produit et, d'autre part, à ordonner les produits en tenant compte des gammes trouvées, ces deux problèmes pouvant être résolus simultanément. Comparé aux autres modèles d'ateliers, l'open-shop n'est pas couramment utilisé dans les entreprises. [5]

#### 3.1.6 Les contraintes

Une contrainte est une restriction sur les valeurs que peuvent prendre une ou plusieurs variables de décision sur le temps (variable d'ordonnement) ou bien sur les ressources (variables d'affectation). Les contraintes auxquelles sont soumises les diverses tâches qui concourent à la réalisation du projet sont de divers types, on distingue :

##### 1. Les contraintes potentielles

- Contraintes de *localisation temporelle*, la tâche  $i$  doit être achevée à telle date, ou son exécution ne doit pas commencer avant telle date ;
- Contraintes de *succession*, l'exécution de la tâche  $j$  ne peut être commencée que lorsque la tâche  $i$  est achevée, ou bien lorsqu'elle se trouve à un certain degré d'exécution. [10]

Ce qui impose :  $s_i + p_i \leq s_j$ .

##### 2. Les contraintes disjonctives

Elles imposent la réalisation non simultanée d'une paire de tâches  $i$  et  $j$ . De façon plus rigoureuse, si  $s_i, s_j$  désignent les dates de début et  $p_i, p_j$  la durée de l'exécution, respectivement, des tâches  $i$  et  $j$ , on a :  $[s_i, s_i + p_i] \cap [s_j, s_j + p_j] = \emptyset$ . [9]

### 3. Les contraintes de ressources

plusieurs types de contraintes peuvent être induites par la nature des ressources. À titre d'exemple, la capacité limitée d'une ressource implique un certain nombre à ne pas dépasser de tâches à exécuter sur cette ressource. Les contraintes relatives aux ressources peuvent être disjonctives, induisant une contrainte de réalisation des tâches sur des intervalles temporels disjoints pour une même ressource, ou cumulatives impliquant la limitation du nombre de tâches à réaliser en parallèle.

#### 3.1.7 Le problème central de l'ordonnancement

Pour le problème central de l'ordonnancement, il s'agit d'ordonner en une durée minimale un ensemble  $T = \{1, \dots, n\}$  de tâches soumises à des contraintes temporelles de type inégalité de potentiel. Donc, dans le problème central de l'ordonnancement, on ne tient compte que des contraintes de potentiels qui sont d'antériorité et de durée. Les contraintes disjonctives et cumulatives sont ignorées. Les ressources sont supposées à quantité illimitée. [14]

L'ensemble des contraintes de précedence est représenté par un graphe de précedence noté  $G = (T, <)$  où les sommets sont identifiés aux tâches et les arcs  $(i, j)$  correspondent aux relations de précedence  $i < j$ , avec  $G$  sans circuit. [10]

#### 3.1.8 Critères d'optimisation

Généralement, l'objectif d'un problème d'ordonnancement consiste à optimiser un ou plusieurs critère(s) (minimisation de la durée totale, des pénalités, ect ) ou à trouver une solution admissible qui respecte les contraintes du problème.

Les variables intervenant le plus souvent dans l'expression de la fonction objectif sont : la date  $C_i$  de fin d'exécution de la tâche  $i$  (la date d'achèvement), les retards  $L_i = C_i - d_i$ , avec  $d_i$  la date d'exécution au plus tard de la tâche  $i$  " due date ", etc.

Nous présentons, ci-dessous, une sélection des différents critères d'optimisation, tous à minimiser. [1]

- **Completion time**

$$\bar{C} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$$

Temps moyen d'utilisation des machines.

Sa minimisation vise à utiliser le moins longtemps possible l'ensemble des machines.

- **Maximal completion time**

$$C_{max} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i$$

$C_{max}$  appelé aussi "makespan" représente la durée totale de l'ordonnancement, et égale à la date de fin de la tâche la plus tardive.

Minimiser la durée totale de l'ordonnancement c'est-à-dire minimiser  $C_{max}$ .

Sa minimisation vise à terminer le plus rapidement possible l'ensemble des tâches à effectuer, ce qui inclut l'utilisation optimale des machines ou des ressources disponibles garantissant ainsi une efficacité maximale.

- **Les retards**

Dans certains secteurs d'activité, la minimisation des retards est un critère important dans les problèmes d'ordonnancement. Deux types de retard sont considérés ;

— Lateness  $L_i$

$$L_i = C_i - d_i$$

C'est le retard algébrique ( positif ou négatif) de la tâche  $i$  : différence entre sa date de fin d'exécution et sa date de fin souhaitée. [16]

— Tardiness  $T_i$

$$T_i = \max(0, L_i)$$

Le "tardiness" ( positif ou nul) d'une tâche est le montant de temps par lequel l'achèvement de la tâche dépasse sa "due date" (date d'échéance). Si une tâche est terminée avant ou exactement à la date d'échéance, son "tardiness" est de 0.

Dans la littérature, plusieurs critères ont été étudiés tels que la minimisation de :

—  $T_{\max} = \max\{T_i\}$  (le retard maximum),

—  $\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$  (le retard moyen),

— Ou le retard algébrique maximum  $L_{\max} = \max\{L_j\}$ . Parfois, on s'intéresse au nombre de retards et non aux durées des retards (exemple une commande de client est satisfaite ou non).

- **Autres critères**

Dans la littérature , plusieurs autres critères d'optimisation peuvent être étudiés. Citons par exemple des critères d'optimisation sous forme d'une fonction coût. [1]

## 3.2 Méthodes de résolution des problèmes d'ordonnement

Une fois que le processus de décomposition en tâches élémentaires a été achevé, il faut évidemment trouver un ordre d'exécution de ces tâches compatible avec les contraintes. Déterminer un tel ordre, c'est obtenir une solution du problème d'ordonnement.

Mais parmi les nombreuses solutions qui peuvent se présenter, certaines permettent d'effectuer le travail en moins de temps que d'autres, ou à moindre coût. Il s'agit donc de choisir, relativement à un critère précisé à l'avance, la solution la meilleure ou encore une très bonne solution.

Les méthodes principales prennent comme critère : "minimiser la durée totale d'exécution du projet", chacune offrant des outils spécifiques pour optimiser la gestion des tâches et des ressources. Parmi celles-ci, nous détaillerons dans ce qui suit la programmation linéaire et la méthode graphique MPM.

### 3.2.1 La programmation mathématique

D'autres ont fondé des espoirs sur la programmation mathématique, en fait sur la programmation linéaire. [10]

La programmation linéaire est l'une des techniques classiques de la recherche opérationnelle. Elle permet de modéliser des problèmes concrets en termes de critères (dans un cas linéaire monocritère ou multicritère) et de contraintes à respecter, ces paramètres étant représentés par des fonctions linéaires des variables du problème. Une fois le modèle établi, il est résolu à l'aide de techniques d'optimisation telles que l'algorithme du simplexe, le branch and bound, ou en utilisant des logiciels spécialisés.

Cette approche est particulièrement efficace dans l'ordonnement des tâches, permettant d'optimiser les ressources et de minimiser les délais tout en respectant les contraintes du projet.

### 3.2.2 Les principales méthodes de représentation graphique et d'ordonnement de projet

Trois méthodes principales peuvent alors être appliquées pour ordonner les tâches et réaliser une représentation graphique du projet à réaliser. Elles sont appelées "**méthodes de chemin critique**".

- a) **Le diagramme de Gantt** (méthode la plus ancienne et la plus simple) : il présente l'enchaînement des tâches sous forme de planning.

b) **La méthode PERT** (Program Evaluation and Review Technic, 1957 ou CPM) : la représentation se fait ici sous forme de graphe.

c) **La méthode MPM** (Méthode des potentiels Métra, 1958) : la représentation se fait également sous forme de graphe.

Cette dernière méthode est d'ailleurs celle qui est utilisée pour la représentation de graphes par divers logiciels de gestion de projet, comme Microsoft Project par exemple (ou GanttProject en version libre). [7]

### 3.2.3 Comparaison des méthodes graphiques PERT (CPM) et MPM

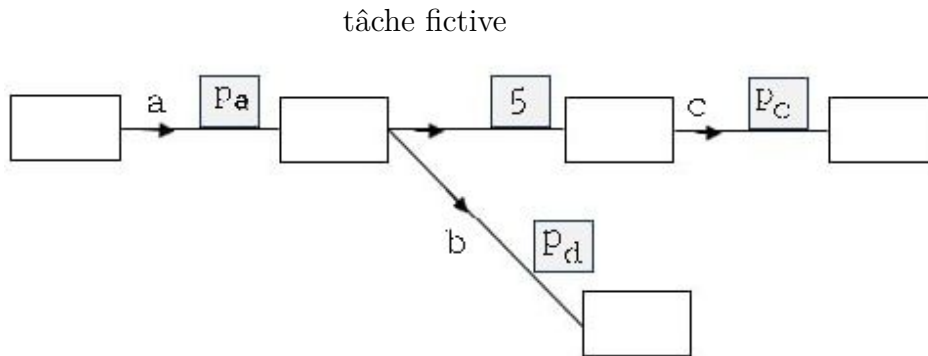
Bien que les deux méthodes soient basées sur la théorie des graphes, il y a une différence remarquable entre elles.

- Un inconvénient de la méthode PERT par rapport à la méthode des potentiels est de doubler initialement les sommets du graphe puisqu'on associe à chaque tâche une étape « début de tâche » et une étape « fin de tâche ».
- Dans un graphe MPM (Méthode des Potentiels Métra), chaque tâche est directement représentée par un sommet (rectangle), et les arcs ne servent qu'à montrer les relations de dépendance entre les tâches.
- Le graphe-tâches MPM permet sans difficulté la considération de contraintes potentielles ce qui n'est pas le cas du graphe-événement CPM ; pour traiter de telles contraintes, ce dernier nécessite l'introduction de tâches fictives qui alourdissent la présentation.

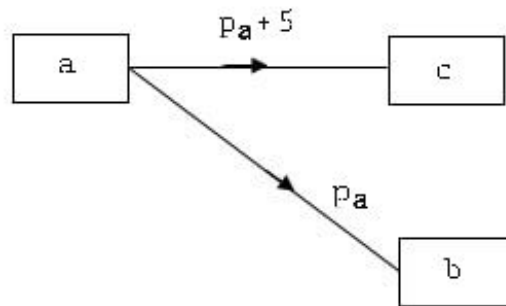
Donnons un exemple simple, a,b et c trois tâches tel que :

$$\begin{cases} s_b \geq s_a + p_a \\ s_c \geq s_a + p_a + 5 \end{cases} \quad (3.1)$$

Se formule en graphe CPM de la manière suivante :



Alors qu'en graphe MPM, cela se présente ainsi :



— Une autre difficulté apparaît dans un graphe PERT, il est souvent nécessaire d'introduire de nombreuses tâches fictives. [16] [14]

Cette comparaison justifie notre choix de la méthode des potentiels métra.

### 3.3 La Méthode des potentiels Metra (MPM)

#### 3.3.1 Historique

Jusqu'en 1957 et depuis 1926 environ, on n'avait guère disposé, pour aborder les problèmes de délai et de répartition des tâches, que du diagramme de Gantt . La complexité de gestion de ce type de tableau amena les chercheurs en recherche opérationnelle (R.O) à appliquer au planning la théorie des graphes.

Puis, pour répondre à la complexité croissante des projets, à peu près, simultanément en France et aux États-Unis, sont nées deux méthodes "**MPM**" et "**CMP** ou **PERT**",

qui ont fourni d'excellentes solutions des problèmes d'ordonnement à contraintes potentielles.

En France, avec *Bernard Roy* et son équipe, la méthode des potentiels a pris dès 1958, un bon départ ; comme son nom l'indique, elle utilise le calcul des tensions dans un graphe. Elle a été mise en oeuvre pour la construction paquebot "France" et diffusée dans la revue "Métra".

De par la notoriété des USA, ce fut d'abord la méthode américaine qui s'imposa en gestion de projet :

- Projet militaire (fusée Polaris),
- Projet aéronautique (NASA),
- Projet de travaux publics (autoroutes),

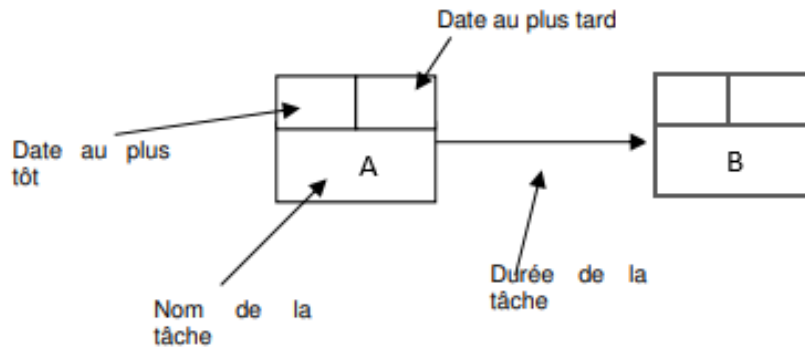
Mais la méthode française s'est révélée plus souple, notamment lors de l'informatisation de l'outil. Depuis 1980, l'informatique aidant, l'outil "MP" connaît un succès grandissant. Actuellement, il est même utilisé pour des projets de quelques minutes, une phase d'usinage par exemple.

Cet outil est particulièrement performant lorsque le nombre de tâches est élevé et que les contraintes risquent d'évoluer. [7] [10]

**Potentiel (ou Tension)** : Chaque tâche dans un projet a une date au plus tôt et une date au plus tard. Le potentiel d'une tâche est la date au plus tôt à laquelle elle peut être commencée, compte tenu des tâches précédentes. La "tension" est en quelque sorte la contrainte temporelle entre les tâches.

### 3.3.2 Principe

- Les tâches sont représentées par des sommets et les contraintes de succession par des arcs.
- Chaque tâche est renseignée par sa date de début au plus tôt et sa date de fin au plus tard.
- À chaque arc est associé une valeur numérique, qui représente une durée d'opération.
- Parfois, pour faciliter la représentation, on créera une tâche Début (de durée nulle) et/ou une tâche Fin (de durée nulle aussi).



**Date au plus tôt, Date au plus tard :**

La date au plus tôt et au plus tard se calcule ainsi :

— **La date au plus tôt** ("*Earliest Starting date*") :

$$ES(\text{DEB}) = 0$$

$$ES(i) = \max_{l \in \Gamma^-(i)} (ES(l) + p_l)$$

C'est la date la plus proche à laquelle il est possible de commencer la tâche  $i$ , notée  $ES(i)$  et correspond à la longueur du chemin le plus long pour aller du sommet initial "Début" au sommet  $i$ , on initialise le sommet début avec une date au plus Tôt = 0.

— **La date au plus tard** ("*Latest Starting date*") :

$$LS(\text{FIN}) = ES(\text{FIN})$$

$$LS(i) = \min_{j \in \Gamma^+(i)} (LS(j) - p_i)$$

C'est la date la plus éloignée, notée  $LS(i)$  à laquelle la tâche  $i$  doit commencer sous peine d'allonger la durée d'exécution minimale du projet, elle est obtenue en cumulant la durée des tâches qui suivent sur la séquence la plus courte. On initialise à l'étape terminale, le dernier sommet "FIN" a la date au plus tard = date au plus tôt.

Comme les sommets du graphe-tâches sont les tâches elles-mêmes, les dates de début au plus tôt et de début au plus tard des tâches sont déterminées immédiatement.

Dès lors, il vient également les dates de fin au plus tôt  $EF(i)$  ("*Earliest Final date*") et au plus tard  $LF$  ("*Latest Final date*").

$$EF(i) = ES(i) + p_i$$

$$LF(i) = LS(i) + p_i$$

### **La marge totale**

La marge totale sur une tâche  $i$  est le retard maximal que l'on peut prendre dans la réalisation de cette tâche sans retarder l'ensemble du projet, notée  $MT(i)$ .

$$MT(i) = LS(i) - ES(i) = LF(i) - EF(i)$$

### **La marge libre**

la marge libre sur une tâche est le retard que l'on peut prendre dans la réalisation d'une tâche sans retarder les dates des tâches qui suivent.

$$ML(i) = \min_{j \in \Gamma^+(i)} (ES(j)) - (ES(i) + p_i)$$

Marge Libre d'une tâche = date au plus tôt de la tâche qui succède - date au plus tôt de la tâche - durée de la tâche.

### **Tâche critique et chemin critique**

On peut déterminer le chemin critique comme une succession de tâches sur le chemin le plus long au sens des durées, la détermination du chemin critique peut se faire en employant un des algorithmes de recherche de chemin de valeur maximale.

Pour toutes les tâches du chemin critique, les dates au plus tôt et au plus tard coïncident, *i.e* marge totale nulle.

## Exemple

| Tâches | Durée | Tâches Antérieurs |
|--------|-------|-------------------|
| A      | 4     | -                 |
| B      | 2     | -                 |
| C      | 1     | A                 |
| D      | 1     | A, B              |
| E      | 2     | A                 |
| F      | 2     | C                 |
| G      | 2     | D,F               |
| H      | 10    | E                 |
| I      | 4     | G                 |
| J      | 1     | H,I               |

TABLE 3.1 –

Pour appliquer la méthode MPM, nous commençons par définir et structurer les tâches du projet. Cela inclut l'identification des tâches, l'estimation de leur durée et l'établissement des relations de dépendance comme illustre le tableau précédent. Nous classons ensuite les tâches par niveaux en fonction de l'ordre de réalisation de chaque tâche, c'est-à-dire le nombre de tâches antérieures nécessaires à son démarrage, en les plaçons de niveau 0 au niveau n commençons de gauche à droite, Cela permet de structurer les tâches de manière hiérarchique, facilitant ainsi la gestion du projet.

### Les niveaux

Pour déterminer le niveau de chacune des tâches, nous commençons par identifier toutes les tâches qui n'ont pas de tâches antérieures. Ces tâches sont au niveau 0 (ou  $N_0$ ),  $N_0 = \{x \in X \mid \Gamma^-(x) = \emptyset\}$  comme le cas des 2 tâches : "A" et "B".

Si une tâche a une tâche antérieure, son niveau sera le niveau de sa tâche antérieure plus 1. Par exemple, la tâche "c" dépend de la tâche "A" qui est au niveau 0 ( $N_0$ ), alors la tâche "c" sera au niveau 1 ( $N_1$ ).

Si une tâche a plusieurs tâches antérieures, nous prenons le niveau le plus élevé de ces tâches antérieures et ajoutons 1, par exemple la tâche "G" sera placée au niveau 3 ( $N_3$ ), car nous prenons le niveau le plus élevé de ses tâches antérieures, celui de "F" à ( $N_2$ ) et ajoutons 1.

## Les dates au plus tôt

La date au plus tôt des tâches ayant le niveau 0 est égale à 0, dans le graphe de la figure 3.2 les tâches "A" et "B" sont les concernées.

Pour les autres niveaux elle est calculée en partant du début du projet et en avançant tâche par tâche, en additionnant les durées des tâches précédentes. Pour les tâches ayant plusieurs prédécesseurs, la date au plus tôt est déterminée par le prédécesseur ayant la date de fin au plus tôt la plus élevée, voyant dans le graphe de la figure 3.2 par exemple le choix de la tâche "A" pour déterminer la date au plus tôt de la tâche "D", en d'autres termes, une tâche ne peut commencer qu'après la fin de toutes ses tâches prédécesseurs, donc nous devons choisir la date de fin au plus tôt la plus tardive parmi les prédécesseurs.

## Les dates au plus tard

Nous commençons par la fin du projet. La date au plus tard de la tâche "fin de projet" est fixée à sa date au plus tôt, car nous ne voulons pas retarder la fin du projet. Ensuite, nous soustrayons la durée de chaque tâche pour déterminer sa date au plus tard.

Pour les tâches ayant plusieurs successeurs, la date au plus tard est déterminée par le successeur ayant la date de début au plus tard la plus basse (voir la figure 3.2) exemple de calcul de la date au plus tard de la tâche "A" et le choix de date de début au plus tard de la tâche "E". Cela garantit que toutes les tâches prédécesseurs se terminent à temps pour permettre à toutes les tâches suivantes de commencer à leurs dates de début au plus tard respectives.

## Marge totale et Marge libre

Pour la tâche B par exemple

$$\text{— Marge totale sur B} = (7 - 0) = 7$$

$$\text{— Marge libre sur B} = 4 - 0 - 2 = 2$$

## Le chemin critique

Dans notre exemple le chemin critique est la succession des tâches suivantes : "Début, A, E, H, J, Fin", représenté en rouge dans le graphe MPM correspondant 3.2.

Dessignons par la suite le graphe MPM, en représentant les tâches sous forme de rectangles et la succession entre les tâches par un arc. Comme il est illustré dans le graphe

suivant, complétant le graphe ensuite par calculer et remplir les dates au plus tôt et au plus tard dans les cases correspondantes.

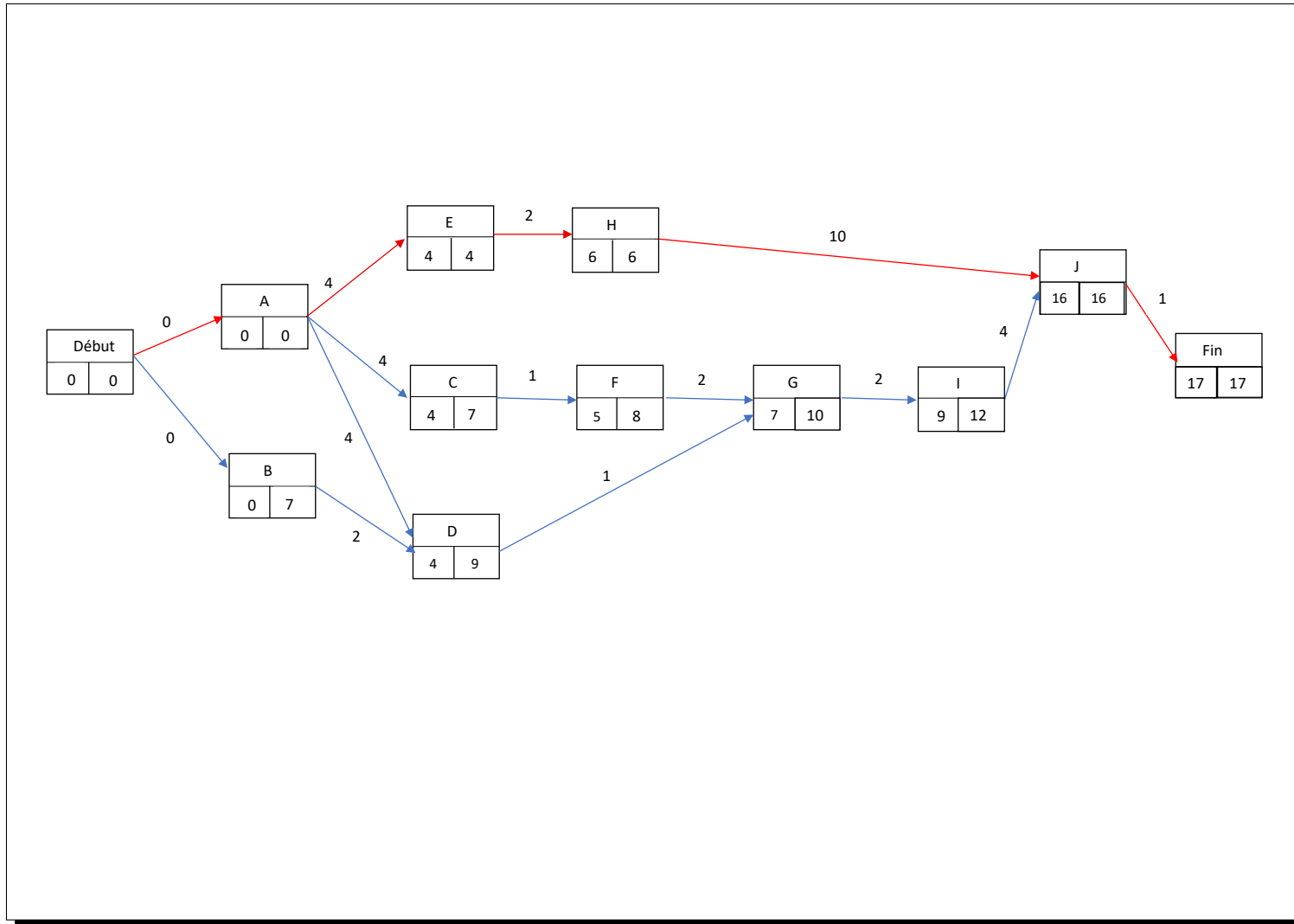


FIGURE 3.2 – Graphe MPM

### Notes :

- La durée minimale de réalisation d'un projet (programme) est donnée par la longueur du chemin le plus long (le chemin critique).
- Le chemin critique dans un graphe n'est pas nécessairement unique.
- Le chemin critique comporte les tâches qui, si elle subissaient un retard, retarderaient d'autant la date attendue de l'achèvement du projet, ces tâches sont appelées tâches critiques et correspondent à celles dont la marge totale est nulle.
- La tâche "Début" et la tâche "Fin" marquent évidemment le début et la fin du chemin critique.
- Le graphe doit être sans circuit. Cette caractéristique est importante car il serait, sinon, impossible de déterminer une durée de réalisation de l'ensemble des tâches puisqu'il serait possible en présence d'un circuit de « tourner » indéfiniment sur la succession d'arcs représentant le circuit.
- En l'absence de circuits il est possible de définir des niveaux dans le graphe.

## 3.4 Analyse des coûts

Une autre manière de tenir compte des moyens à mettre en oeuvre pour réaliser une tâche est d'associer un coût de réalisation à chaque tâche, car plus de moyens mis en oeuvre correspond à un coût plus élevé mais à une durée d'exécution plus courte.

Ainsi à la réalisation d'une tâche  $i$  correspond un coût  $c_i$  qui est une fonction décroissante généralement convexe de sa durée  $p_i$  [16]

$$c_i = f(p_i) \quad \underline{p}_i \leq p_i \leq \bar{p}_i$$

$\underline{p}_i$  est la durée la plus courte que la tâche  $i$  peut prendre, c'est la durée minimale d'exécution de la tâche.

$\bar{p}_i$  est la durée la plus longue que la tâche  $i$  peut prendre. C'est la durée maximale d'exécution de la tâche.

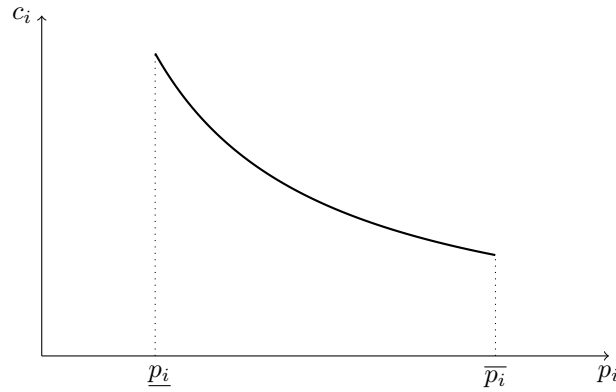


FIGURE 3.3 – Coût d’une tâche en fonction de sa durée

### Accélération d’un ordonnancement au moindre coût

Étant donné un ordonnancement initial, il convient d’établir un autre ordonnancement de durée inférieure (par exemple d’une unité) en augmentant le moins possible le coût total du projet.

Il est possible de déterminer pour chaque tâche  $i$  :

- Un **coût normal** : c’est le coût le plus faible pour l’entreprise pour mener à bien la tâche avec le minimum moyens.
- Un **temps normal** de réalisation : c’est le temps qui correspond au coût normal, c’est-à-dire effectué avec le minimum de moyens.
- Un **temps accéléré** de réalisation : c’est le temps minimum concevable pour réaliser la tâche, en lui accordant les moyens suffisants.
- Un **coût accéléré** : c’est le coût qui correspond au temps minimum de réalisation l’évolution du coût en fonction de la durée peut suivre différentes lois. Toutefois pour simplifier la présentation on admettra que le coût est proportionnel au temps. On peut alors définir un coût marginal d’accélération pour chaque tâche :

$$c_i = \frac{\text{Coût accéléré} - \text{Coût normal}}{\text{Durée normale} - \text{Durée accélérée}} \quad (3.2)$$

Ce coût marginal d’accélération permet de déterminer le coût supplémentaire associé à la réduction d’une unité de temps de réalisation d’une tâche.

Cette approche nous permet de déterminer le coût de diminution de la durée d’un projet. [12]

### **Remarque**

Il est peut-être intéressant de diminuer la durée d'une tâche critique, mais il est inutile de dépenser de l'argent supplémentaire pour une autre tâche.

## **3.5 Conclusion**

Cependant, bien que la programmation linéaire excelle dans la modélisation et la résolution mathématique des problèmes d'ordonnancement, elle gagne en efficacité lorsqu'elle est utilisée en complément de méthodes plus visuelles et structurées comme la méthode MPM (Méthode des Potentiels Métra). Ces deux approches se révèlent particulièrement puissantes lorsqu'elles sont combinées, le PL offrant une base analytique solide, tandis que MPM apporte une représentation graphique qui clarifie les interdépendances et les séquences de tâches.

## Chapitre 4

# Problématique et résolution

### Introduction

Le programme de production annuel des produits ENIEM est décidé par la direction de la gestion industrielle selon la demande du marché. Les unités de production respectent la cadence de travail fixée en suivant le programme de production et le calendrier industriel tracé par les cadres d’ordonnancement. Ces derniers déterminent les modèles à fabriquer et les échéances, planifient les délais, créent des ordres de fabrication et préparent des fiches de production. Notre étude porte sur le département d’ordonnancement.

Ce chapitre se concentre sur une problématique spécifique d’ordonnancement rencontrée à l’ENIEM. Pour aborder cette problématique, nous explorons l’utilisation de la modélisation mathématique, en particulier la programmation linéaire. Cette approche offre un cadre rigoureux pour formuler et résoudre des problèmes d’optimisation.

En complément à la programmation linéaire, nous explorerons également l’application de la Méthode des Potentiels Métra (MPM) comme outil graphique pour la résolution de ce problème. La MPM permet une visualisation intuitive des dépendances entre les tâches et facilite la recherche de solutions optimales. Cette méthode offre non seulement des résultats précis, mais aussi une compréhension approfondie de la structure et des interactions au sein du projet. De plus, nous utiliserons le logiciel **LINGO** pour résoudre notre programme linéaire, ce qui permettra d’illustrer l’application pratique des concepts étudiés.

À travers des études de cas concrets, nous illustrons les étapes de modélisation, de formulation des contraintes et d’optimisation, mettant en lumière l’applicabilité pratique de ces techniques dans la gestion moderne des projets industriels.

## 4.1 Problématique

L'ordonnancement des projets est crucial dans la gestion opérationnelle des secteurs industriels où une planification efficace des tâches est essentielle. L'objectif principal de l'ordonnancement est de maximiser l'utilisation des ressources disponibles tout en respectant les délais et en minimisant les coûts. Cette optimisation garantit non seulement la ponctualité des livraisons mais aussi une productivité accrue et une réduction des inefficacités.

### 4.1.1 Position du problème

L'atelier montage final BAHUT de l'entreprise ENIEM rencontre un problème de cadence, nous avons été confrontés à un défi d'optimisation de la durée d'assemblage du réfrigérateur modèle NO-FROST TN2000BK. Actuellement, la chaîne de fabrication produit 70 réfrigérateurs par jour, avec une cadence d'un réfrigérateur toutes les 6 minutes. L'entreprise souhaite améliorer cette performance pour répondre à une demande croissante et optimiser ses ressources tout en respectant les délais de réalisation.

|                              |              |
|------------------------------|--------------|
| • Volume brut                | 540 L        |
| • Compartiment réfrigération | 314 L        |
| • Compartiment congélation   | 133 L        |
| • Thermostat réglable        |              |
| • Dégivrage automatique      |              |
| • Refroidissement No Frost   |              |
| • Classe énergétique A       |              |
| • Classe climatique ST       |              |
| • Type de réfrigérant        | R-600A       |
| • Couleur noire effet miroir |              |
| • Dimensions H x P x L (mm)  | 1800x750x720 |
| • Poids net                  | 83 Kg        |

FIGURE 4.1 – Fiche technique du réfrigérateur TN2000 BK

### 4.1.2 Objectif

Notre mission consiste à analyser en profondeur le processus d'assemblage existant du réfrigérateur **NO-FROST TN2000BK**, à identifier les goulots d'étranglement et

les inefficacités, puis à proposer un nouvel ordonnancement qui permettra d'augmenter la cadence de production. Nous nous intéressons particulièrement à la problématique de l'ordonnancement des tâches. L'objectif principal est de minimiser la durée totale du projet.

Cette optimisation doit prendre en compte les contraintes liées aux ressources disponibles, tout en maintenant la qualité du produit final qui fait la réputation d'ENIEM.

L'enjeu est de concevoir une solution d'ordonnancement qui réduira la durée liée au projet ainsi que le temps de cycle actuel de 6 minutes par réfrigérateur, augmentera le nombre d'unités produites quotidiennement, et améliorera l'efficacité globale de la ligne de production. Cette optimisation vise non seulement à accroître la productivité, mais aussi à renforcer la compétitivité d'ENIEM sur le marché. De plus, elle a pour objectif d'augmenter la production, d'optimiser l'exécution des tâches dans la chaîne de production et d'éviter les goulots d'étranglement.

## 4.2 Résolution

### 4.2.1 La modélisation mathématique

La première étape consiste à formuler un modèle mathématique précis du problème. Cela implique de définir les variables, les contraintes et les objectifs en termes mathématiques clairs. Le modèle linéaire cherche seulement à calculer la durée minimale du projet qu'on note  $D_1$ , en l'absence de toute accélération le modèle comprend les variables de décision suivantes :

Soit  $i$  et  $j$  deux tâches qui se succèdent avec :  $i, j \in T$ , l'existence d'une contrainte de précédence pour le couple de tâche  $(i, j)$  notée  $i < j$ , signifie que le début de l'exécution de la tâche  $j$  doit s'effectuer après la fin de l'exécution de la tâche  $i$ ,  $j \in \Gamma(i)$ .

- $s_i$  : date de début d'exécution de la tâche  $i$ .
- $s_j$  : date de début d'exécution de la tâche  $j$ .
- $p_i$  : durée d'exécution de la tâche  $i$ .
- $C_i$  : date de fin d'exécution de la tâche  $i$ , où  $C_i = s_i + p_i$ .
- $C_{max}$  : Makespan, la durée du projet ou d'ordonnancement.

## Fonction objectif

L'objectif consiste ici à minimiser le temps total de réalisation du projet, souvent représenté par  $C_{max}$ , le temps de fin de la dernière tâche (la durée du projet).

$$Min Z = C_{max}$$

## Contraintes

- Contrainte de précédence : si la tâche  $i$  doit précéder la tâche  $j$ , alors :

$$s_j \geq C_i \Leftrightarrow s_j \geq s_i + p_i \quad (4.1)$$

- Contrainte de Complétion du Projet : si  $i$  n'admet pas de successeurs, alors :

$$C_{max} \geq C_i \Leftrightarrow C_{max} \geq s_i + p_i \quad \forall i \quad (4.2)$$

- Contraintes de non négativité :

$$s_i \geq 0, \quad s_j \geq 0, \quad C_{max} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (4.3)$$

Le modèle linéaire correspondant en l'absence de toute accélération est :

$$Min Z = C_{max} \quad (4.4)$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} s_j - s_i \geq p_i \\ C_{max} - s_i \geq p_i \quad \forall i \\ s_i \geq 0, s_j \geq 0, C_{max} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \end{cases} \quad (4.5)$$

Il est simple d'adapter le modèle linéaire précédent pour déterminer quelles tâches doivent être accélérées et de combien de périodes chacune, notons  $D_2$  la durée minimale du projet après l'accélération de certaines tâches, avec  $D_1 > D_2$ .

Si une tâche  $i$  peut être accélérée, on remplace dans les inéquations 4.1 et 4.2, la durée normale  $p_i$  de la tâche  $i$ , par sa durée accélérée  $p_i^{min}$  avec

$$p_i^{min} = p_i - y_i$$

où :

- $y_i$  est la période d'accélération de la tâche  $i$  (quantité de temps pour laquelle la tâche  $i$  est accélérée),  $y_i \geq 0$  où  $i$  est une tâche qui peut être accélérée,
- $p_i^{min}$  est la nouvelle durée de la tâche  $i$  après accélération.

En ajoutant ainsi une contrainte sur les bornes des périodes d'accélération.

### Contrainte sur les bornes des périodes d'accélération :

La réduction de la durée  $y_i$  ne doit pas dépasser la différence entre la durée normale  $p_i$  et la durée minimale  $p_i^{min}$

$$0 \leq y_i \leq p_i - p_i^{min} \quad \forall i \quad (4.6)$$

Le modèle linéaire correspondant à l'accélération est donc :

$$\text{Min } Z = C_{\max} \quad (4.7)$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} s_j \geq s_i + (p_i - y_i) & \forall (i, j) \\ C_{\max} \geq s_i + (p_i - y_i) & \forall i \\ 0 \leq y_i \leq p_i - p_i^{min} & \forall i \\ s_i \geq 0, s_j \geq 0, C_{\max} \geq 0, c_i \geq 0, y_i \geq 0 & \forall i \end{cases} \quad (4.8)$$

Si  $i$  est une tâche qui ne subit pas d'accélération alors,  $y_i = 0$ .

Lors de l'accélération des périodes de ces tâches, une augmentation des coûts est inévitable en raison des ressources supplémentaires nécessaires pour accomplir le travail dans un délai plus court. Cela peut inclure des heures supplémentaires, l'achat de matériaux plus coûteux, ou l'embauche de personnel supplémentaire.

À l'aide d'un modèle de programmation mathématique, il est possible de résoudre le problème suivant :

" déterminer l'ordonnancement de coût minimal dont la durée est inférieure ou égal à  $\lambda$  "

où  $\lambda$ , est la durée maximale d'exécution souhaitée pour l'achèvement du projet, déterminant la nouvelle variable

- $c_i$  qui est le coût d'accélération par unité de réduction pour la tâche  $i$ .

## Fonction objectif

On fixe comme nouvel objectif la minimisation du coût total dû à cette accélération, et qui se calcule en sommant les coûts unitaires d'accélération  $c_i$ , multipliés par les réductions en unité du temps  $y_i$  pour chaque tâche accélérée  $i$ .

Le coût total d'accélération est  $\sum_i c_i y_i$ .

La fonction objectif est donc :

$$\text{Min}Z = \sum_i c_i y_i$$

## Contraintes

- Contrainte de précédence : si  $i$  est prédécesseur immédiat de  $j$ , alors

$$s_j \geq s_i + (p_i - y_i) \quad (4.9)$$

- Contrainte de Complétion du projet : si  $i$  n'admet pas de successeurs, alors

$$C_{\max} \geq s_i + (p_i - y_i) \quad \forall i \quad (4.10)$$

- Contrainte sur les bornes des périodes d'accélération La réduction de la durée  $y_i$  ne doit pas dépasser la différence entre la durée normale  $p_i$  et la durée minimale  $p_i^{\min}$

$$0 \leq y_i \leq p_i - p_i^{\min} \quad \forall i \quad (4.11)$$

- Contrainte sur la borne supérieure de la durée totale du projet  $C_{\max}$  : les valeurs possible pour  $\lambda$  sont celles comprises entre la durée minimale du projet quand  $p_i = \underline{p}_i \quad \forall i$ , et cette même durée quand  $p_i = \overline{p}_i \quad \forall i$  où  
 $\underline{p}_i$  : Durée la plus courte que la tâche  $i$  peut prendre, c'est la durée minimale d'exécution de la tâche.

$\overline{p}_i$  : Durée la plus longue que la tâche  $i$  peut prendre. C'est la durée maximale d'exécution de la tâche.

On a que  $C_{\max}$  est la durée totale du projet, c'est-à-dire le temps nécessaire pour compléter toutes les tâches du projet, en tenant compte des contraintes de planification.

### Durée minimale du projet avec durées minimales

Cette durée est calculée en utilisant les durées minimales  $\underline{p}_i$  pour chaque tâche. La durée minimale du projet  $C_{\max_{\min}}$  est la somme de toutes les durées minimales des tâches.

$$C_{\max_{\min}} = \sum_{i=1}^n s_i + \underline{p}_i$$

### Durée maximale du projet avec durées maximales

Cette durée est calculée en utilisant les durées maximales  $\overline{p}_i$  pour chaque tâche. La durée maximale du projet  $C_{\max_{\max}}$  est la somme de toutes les durées maximales des tâches.

$$C_{\max_{\max}} = \sum_{i=1}^n s_i + \overline{p}_i$$

$\lambda$  la durée maximale d'exécution souhaitée pour le projet doit être comprise entre ces deux durées extrêmes.

$$C_{\max_{\min}} \leq D_2 \leq \lambda \leq D_1 \leq C_{\max_{\max}}$$

en d'autres termes

- $\lambda \geq C_{\max_{\min}}$  : La durée maximale d'exécution souhaitée  $\lambda$ , doit être au moins égale à la durée minimale du projet lorsque toutes les tâches sont effectuées avec leurs durées minimales.
- $\lambda \leq C_{\max_{\max}}$  : La durée maximale d'exécution souhaitée  $\lambda$ , doit être inférieure ou égale à la durée maximale du projet lorsque toutes les tâches sont effectuées avec leurs durées maximales, ce qu'on prend comme contrainte

$$C_{\max} \leq \lambda \tag{4.12}$$

- Contraintes de non négativité

$$s_i \geq 0, \quad s_j \geq 0, \quad y_i \geq 0, \quad c_i \geq 0, \quad C_{\max} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \tag{4.13}$$

Le programme linéaire est donc

$$\text{Min } Z = \sum_i c_i y_i \quad (4.14)$$

$$\text{s.c. } \begin{cases} s_j \geq s_i + (p_i - y_i) & \forall (i, j) \\ C_{\max} \geq s_i + (p_i - y_i) & \forall i \\ C_{\max} \leq \lambda \\ 0 \leq y_i \leq p_i - p_i^{\min} & \forall i \\ s_i \geq 0, s_j \geq 0, C_{\max} \geq 0, c_i \geq 0, y_i \geq 0 & \forall i \end{cases} \quad (4.15)$$

#### 4.2.2 La mise en pratique

Dans le but de minimiser la durée totale de notre projet et après avoir modélisé le problème mathématiquement et établi un tableau qui résume les étapes d'assemblage du réfrigérateur, les antériorités entre les tâches, ainsi que la durée de chacune, nous allons passer dans ce qui suit à l'application pratique, nous optons pour cela à utiliser la méthode des potentiels métra ainsi que la programmation linéaire.

Les tâches d'assemblage de produit sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Supposons dans tout ce qui suit que les ressources sont disponibles en quantités suffisantes et la condition d'absence de circuits dans les graphes est respectée.

| Tâches         | Désignation                                 | Tâche antérieures $\Gamma^{-1}(i)$ | D(t)(Seconde) |
|----------------|---|------------------------------------|---------------|
| 1              |   |                                    | 1635          |
| A              | Déballer Armoire, stockage carton           | /                                  | 187           |
| B              | Positionner la palette                      | A                                  | 29            |
| C              | Déballer porte supérieur et porte inférieur | /                                  | 72            |
| D              | Montage et fixation porte supérieure        | A,C                                | 148           |
| E              | Montage ensemble compresseur                | D,T                                | 45            |
| F              | Connexion fiche dans le boîtier             | E                                  | 65            |
| G              | Connexion des fils électriques              | F                                  | 43            |
| H              | Enlèvement des bouchons                     | G                                  | 119           |
| I              | Soudage des tubes (refoulement)             | H                                  | 108           |
| J              | Fixation boîtier compresseur                | I                                  | 30            |
| K              | Contrôle d'étanchéité                       | J                                  | 108           |
| L              | Branchement à la mise à vide                | K                                  | 360           |
| M              | Chargement gaz R600a                        | L                                  | 20            |
| N              | Pincement à ultrason                        | M                                  | 20            |
| O              | Contrôle Froid                              | N                                  | 108           |
| P              | Nettoyage et transfère Armoire              | O                                  | 65            |
| Q              | Salle d'essai et branchement                | P                                  | 108           |
| 2              |   |                                    | 47            |
| R              | Préparation accessoires compresseur         | /                                  | 15            |
| S              | Mise en place silent bloc                   | R                                  | 17            |
| T              | Stockage compresseur                        | S                                  | 15            |
| 3              |   |                                    | 245           |
| U              | Mettre peinture noir                        | Q                                  | 40            |
| V              | Mettre en place les clayettes               | U                                  | 40            |
| W              | Mettre en place les étagères de porte       | V,D                                | 40            |
| X              | Mettre en place bac à légumes               | W                                  | 40            |
| Y              | Enlèvement de papier de protection          | X                                  | 45            |
| Z              | Mettre en place les étiquettes              | Y                                  | 40            |
| 4              |   |                                    | 265           |
| Aa             | Mettre en place les rembourrages            | Z                                  | 30            |
| Ab             | Coller les étiquettes de désignation        | Aa                                 | 30            |
| Ac             | Mettre l'appareil sur palette               | Ab,B                               | 25            |
| Ad             | Habillage appareil avec film                | Ac                                 | 30            |
| Ae             | Mettre le carton d'emballage                | Ad                                 | 30            |
| Af             | Mettre en place les rembourrages            | Ae                                 | 30            |
| Ag             | Coller les étiquettes de N° de série        | Af                                 | 30            |
| Ah             | Cerclage de l'appareil                      | Ag                                 | 30            |
| Ai             | Inspection et stockage                      | Ah                                 | 30            |
| La Durée Total |   |                                    | <b>2192</b>   |

TABLE 4.1 – Table des tâches

## La Méthode Des Potentiels Métra (MPM)

Pour optimiser la planification des tâches du projet, nous utilisons la méthode des Potentiels Métra (MPM). Cette méthode permet de représenter les tâches sous forme de graphe qui facilite la visualisation des relations de dépendance et des contraintes temporelles. En appliquant la méthode MPM, nous pourrions identifier le chemin critique et optimiser la durée totale du projet.

Les niveaux des tâches sont bien représentées dans le tableau ci- dessus.

TABLE 4.2: Tableau des Tâches et Niveaux

| Tâche | Tâche antérieures $\Gamma^{-1}(i)$ | Niveau   |
|-------|------------------------------------|----------|
| A     | -                                  | $N_0$    |
| B     | A                                  | $N_1$    |
| C     | -                                  | $N_0$    |
| D     | A,C                                | $N_1$    |
| E     | D,T                                | $N_3$    |
| F     | E                                  | $N_4$    |
| G     | F                                  | $N_8$    |
| H     | G                                  | $N_6$    |
| I     | H                                  | $N_7$    |
| J     | I                                  | $N_5$    |
| K     | J                                  | $N_9$    |
| L     | K                                  | $N_{10}$ |
| M     | L                                  | $N_{11}$ |
| N     | M                                  | $N_{12}$ |
| O     | N                                  | $N_{13}$ |
| P     | O                                  | $N_{14}$ |
| Q     | P                                  | $N_{15}$ |
| R     | -                                  | $N_0$    |
| S     | R                                  | $N_1$    |
| T     | S                                  | $N_2$    |
| U     | Q                                  | $N_{16}$ |
| V     | U                                  | $N_{17}$ |
| W     | V,D                                | $N_{18}$ |
| X     | W                                  | $N_{19}$ |
| Y     | X                                  | $N_{20}$ |
| Z     | Y                                  | $N_{21}$ |
| Aa    | Z                                  | $N_{22}$ |
| Ab    | Aa                                 | $N_{23}$ |

| <b>Tâche</b> | <b>Tâche antérieures <math>\Gamma^{-1}(i)</math></b> | <b>Niveau</b> |
|--------------|--|---------------|
| Ac           | Ab,B   | $N_{24}$      |
| Ad           | Ac   | $N_{25}$      |
| Ae           | Ad   | $N_{26}$      |
| Af           | Ae   | $N_{27}$      |
| Ag           | Af   | $N_{28}$      |
| Ah           | Ag   | $N_{29}$      |
| Ai           | Ah   | $N_{30}$      |

Après avoir calculer les dates au plus tôt et au plus tard pour chaque tâche, et les avoir remplies dans les cases correspondantes du graphe en ajoutant les liens de dépendance entre les tâches ainsi que la durée de chacune. L'application de la méthode MPM fournit la figure 4.2 suivante.

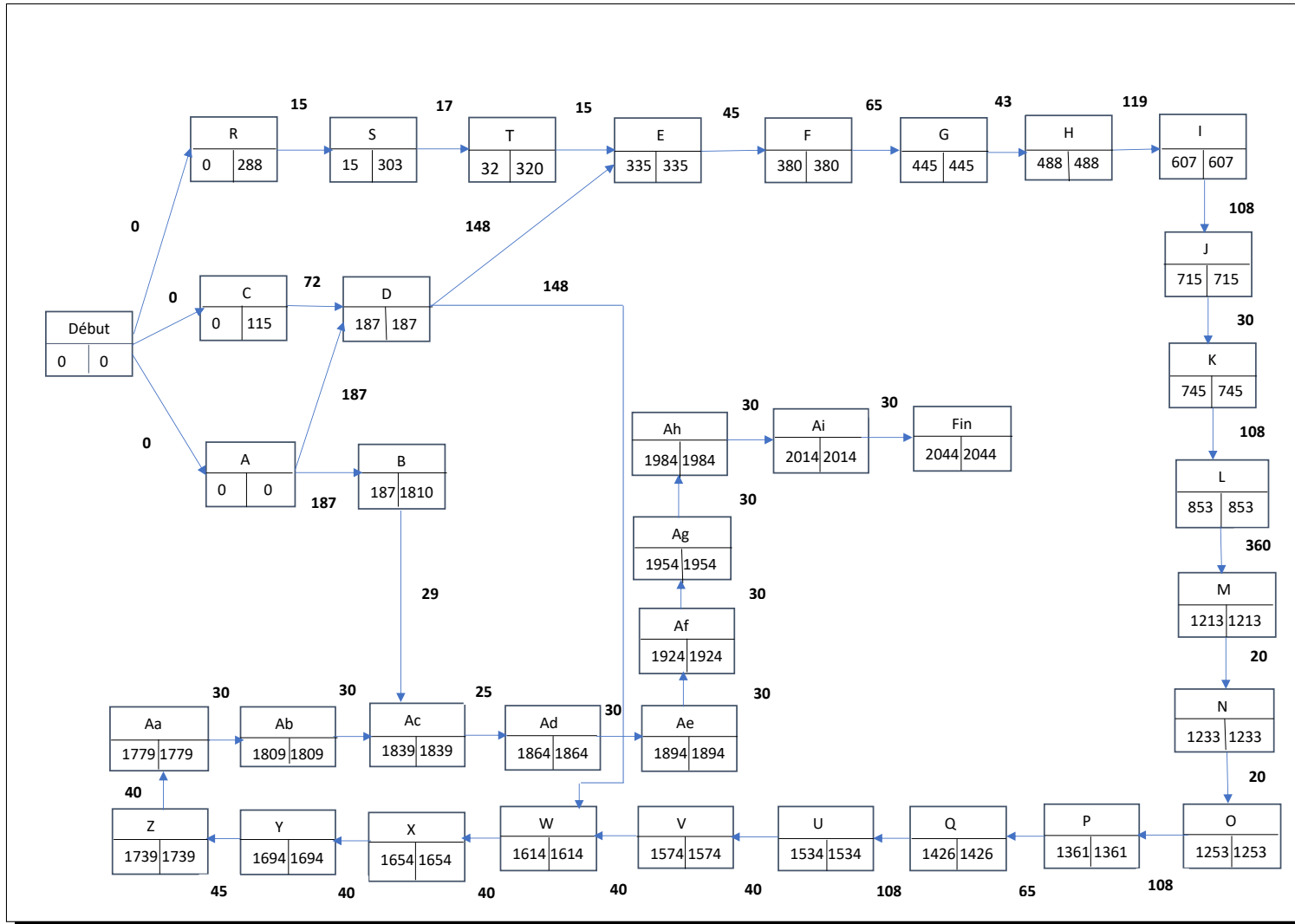


FIGURE 4.2 – Graphe MPM

**La solution** du problème en utilisant le graphe MPM donne une durée minimale de **2044** secondes.

Dans un graphe MPM, la détermination du chemin critique est essentielle. Nous avons utilisé la notation des marges totales nulles pour le définir.

Le chemin critique trouvé est représenté en rouge comme le montre la figure 4.3. Le chemin critique du projet est constitué des tâches suivantes :

(Début, A, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, U, V, W, X, Y, Z, Aa, Ab, Ac, Ad, Ae, Af, Ag, Ah, Ai, Fin)

Où chacune de ces tâches est appelée tâche critique.



## Le programme linéaire

Nous avons fixé comme objectif de minimiser la durée total du projet. Premièrement, nous calculons la durée normale sans compression. La complexité du programme linéaire correspondant à notre problème dépasse largement ce qui est raisonnable à résoudre manuellement.



FIGURE 4.4 – LINGO 20.0

LINGO est un logiciel de modélisation et d'optimisation qui permet de formuler, analyser et résoudre des problèmes mathématiques complexes de manière efficace. Il intègre des algorithmes avancés pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire (LP), non linéaire (NLP), mixte (MIP), quadratique (QP) et bien d'autres. LINGO utilise un langage de modélisation simple et intuitif, facilitant la création de modèles mathématiques complexes sans nécessiter de connaissances approfondies en programmation. Il gère une large variété de contraintes et de types de variables, offrant une grande flexibilité dans la modélisation des problèmes réels. Il est conçu pour les utilisateurs ayant besoin d'outils puissants pour l'optimisation et la prise de décision dans divers domaines, tels que la recherche opérationnelle, la logistique, la finance, la production, et bien d'autres.

LINGO propose une interface utilisateur graphique permettant aux utilisateurs de saisir, modifier et résoudre des modèles facilement. Les résultats sont présentés de manière claire et concise.

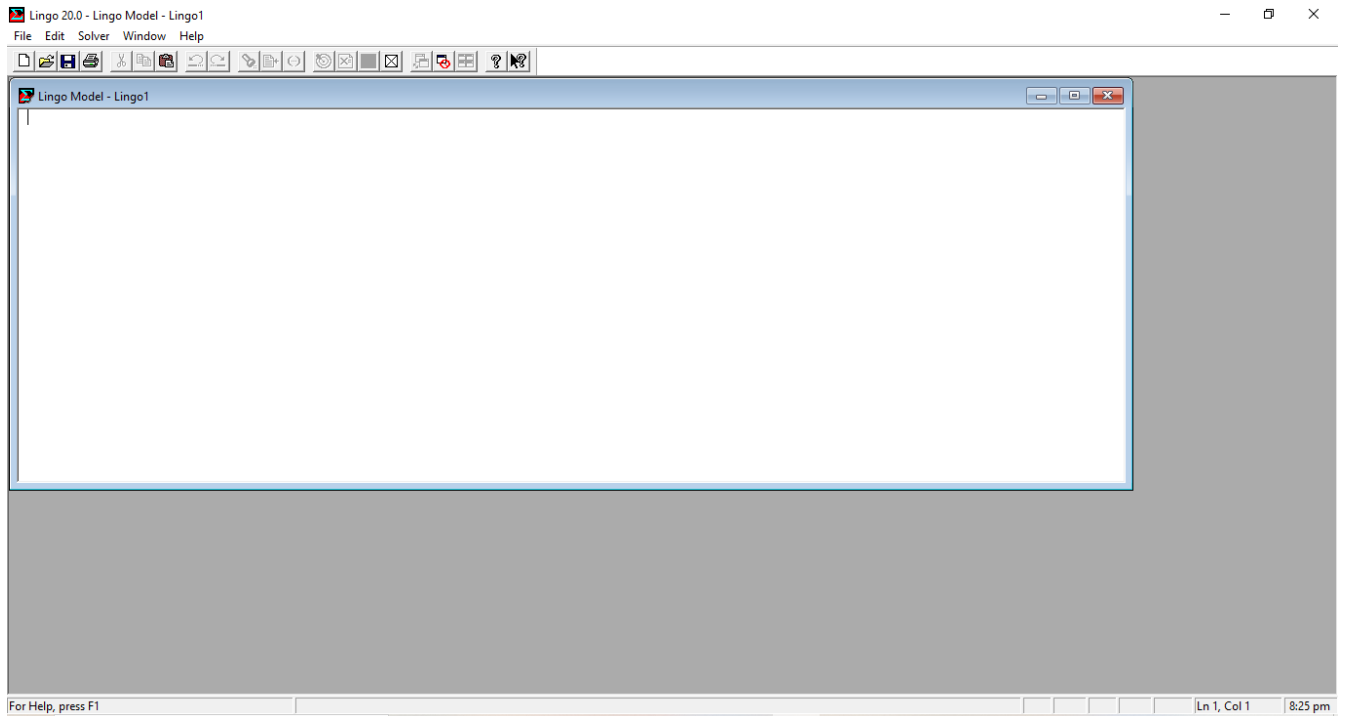


FIGURE 4.5 – Interface graphique LINGO 20.0

Le modèle linéaire correspondant à notre problème en langage LINGO est présenté ci-dessous :

! Objectif : Minimiser la durée du projet ( $C_{max}$ ) ;

$Min = C_{max}$  ;

! Contraintes :

$$sD - sC \geq 72;$$

$$sD - sA \geq 187;$$

$$sE - sD \geq 148;$$

$$sS - sR \geq 15;$$

$$sT - sS \geq 17;$$

$$sE - sT \geq 15;$$

$$sF - sE \geq 45;$$

$$sG - sF \geq 65;$$

$$sH - sG \geq 43;$$

$$sI - sH \geq 119;$$

$$sJ - sI \geq 108;$$

$$sK - sJ \geq 30;$$

$$\begin{aligned}
sL - sK &\geq 108; \\
sM - sL &\geq 360; \\
sN - sM &\geq 20; \\
sO - sN &\geq 20; \\
sP - sO &\geq 108; \\
sQ - sP &\geq 65; \\
sU - sQ &\geq 108; \\
sV - sU &\geq 40; \\
sW - sV &\geq 40; \\
sW - sD &\geq 148; \\
sX - sW &\geq 40; \\
sY - sX &\geq 40; \\
sZ - sY &\geq 45; \\
sAa - sZ &\geq 40; \\
sAb - sAa &\geq 30; \\
sAc - sAb &\geq 30; \\
sB - sA &\geq 187; \\
sAc - sB &\geq 29; \\
sAd - sAc &\geq 25; \\
sAe - sAd &\geq 30; \\
sAf - sAe &\geq 30; \\
sAg - sAf &\geq 30; \\
sAh - sAg &\geq 30; \\
sAi - sAh &\geq 30; \\
C_{max} - sAi &\geq 30;
\end{aligned}$$

! Les variables doivent être non négatives ;

$$\begin{aligned}
sA &\geq 0; \\
sB &\geq 0; \\
sC &\geq 0; \\
sD &\geq 0; \\
sE &\geq 0; \\
sF &\geq 0;
\end{aligned}$$

$sG \geq 0;$   
 $sH \geq 0;$   
 $sI \geq 0;$   
 $sJ \geq 0;$   
 $sK \geq 0;$   
 $sL \geq 0;$   
 $sM \geq 0;$   
 $sN \geq 0;$   
 $sO \geq 0;$   
 $sP \geq 0;$   
 $sQ \geq 0;$   
 $sR \geq 0;$   
 $sS \geq 0;$   
 $sT \geq 0;$   
 $sU \geq 0;$   
 $sV \geq 0;$   
 $sW \geq 0;$   
 $sX \geq 0;$   
 $sY \geq 0;$   
 $sZ \geq 0;$   
 $sAa \geq 0;$   
 $sAb \geq 0;$   
 $sAc \geq 0;$   
 $sAd \geq 0;$   
 $sAe \geq 0;$   
 $sAf \geq 0;$   
 $sAg \geq 0;$   
 $sAh \geq 0;$   
 $sAi \geq 0;$   
 $C_{max} \geq 0;$

END

On obtient les résultats suivants :

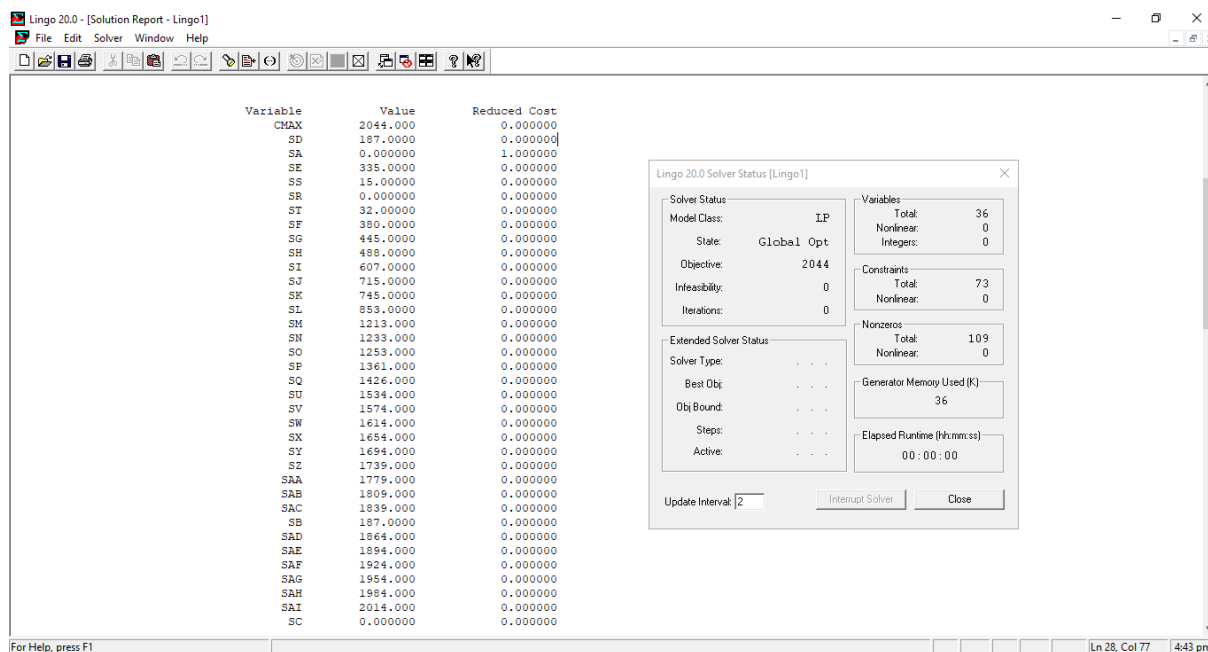


FIGURE 4.6 – Résultats du programme normal

Les résultats issus de l’analyse du graphe MPM combinée aux solutions de programmation linéaire via LINGO indiquent une durée totale de réalisation minimale du projet  $D_1 = 2044$  secondes.

L’objectif étant de minimiser cette durée pour augmenter la cadence de production et mieux satisfaire les besoins des clients, il est important d’identifier les tâches qui, une fois accélérées, permettront d’atteindre cet objectif.

### La durée du projet après l’accélération

L’accélération se concentre au niveau ressources (moyens et équipements). les taches choisies dans ce cas sont :

#### 1. Le contrôle d’étanchéité (la tâche K)

Il est important d’assurer l’étanchéité d’une installation avant sa mise en production. Les tests d’étanchéité sont déterminants pour valider la conformité des soudures et détecter d’éventuelles fuites.

Il est utilisé pour accélérer la tâche une technologie de détection de fuites par gaz d’hélium, plus rapide et précise. Le temps de la tâche de détection sera réduit de 108 secondes à 90 secondes, en réduisant le temps de test, il serait possible d’augmenter

le nombre de réfrigérateurs testés par unité de temps ainsi que la capacité de production tout en maintenant des normes élevées de qualité.

## 2. **Branchement à la mise a vide** (la tâche L)

Sur une installation frigorifique, après la recherche des fuites et avant de charger le système en fluide frigorigène, il est indispensable de procéder à une mise à vide. Cette opération, effectuée à l'aide d'une pompe à vide, permet d'éliminer toutes les impuretés présentes dans le système. Elle assure un bon fonctionnement et une performance optimale du système frigorifique en garantissant une charge en fluide propre et efficace.

Il est constaté que l'opération de mise à vide représente un goulot d'étranglement. Pour réduire le temps de mise à vide, les pompes à vide de 16 m<sup>3</sup>/h ont été remplacées par des modèles de 32 m<sup>3</sup>/h, permettant une évacuation plus rapide de l'air. Il devrait ainsi être possible de réduire efficacement le temps de mise à vide de moitié, passant de 6 minutes à 3 minutes. Il est également veillé à former le personnel sur l'utilisation et la maintenance des nouvelles pompes à vide pour assurer une transition fluide et réussie.

Le tableau 4.2.2 ci-dessous représente le programme normal de fabrication ainsi que le programme de fabrication après accélération des deux tâches et les coûts correspondants.

| Tâches | Programme normal |                | Programme accéléré |                |
|--------|------------------|----------------|--------------------|----------------|
|        | Durée (s)        | Coût           | Durée              | Coût           |
| A      | 187              | 693.00         | 187                | 693.00         |
| B      | 29               | 107.00         | 29                 | 107.00         |
| C      | 72               | 267.00         | 72                 | 267.00         |
| D      | 148              | 548.00         | 148                | 548.00         |
| E      | 45               | 167.00         | 45                 | 167.00         |
| F      | 65               | 241.00         | 65                 | 241.00         |
| G      | 43               | 159.00         | 43                 | 159.00         |
| H      | 119              | 441.00         | 119                | 441.00         |
| I      | 108              | 330.00         | 108                | 330.00         |
| J      | 30               | 111.00         | 30                 | 111.00         |
| K      | <b>108</b>       | <b>400.00</b>  | <b>90</b>          | <b>598.00</b>  |
| L      | <b>360</b>       | <b>1330.00</b> | <b>180</b>         | <b>1600.00</b> |
| M      | 20               | 7.00           | 20                 | 7.00           |
| N      | 20               | 10.00          | 20                 | 10.00          |
| O      | 108              | 500.00         | 108                | 500.00         |
| P      | 65               | 254.00         | 65                 | 254.00         |
| Q      | 108              | 400.00         | 108                | 400.00         |
| R      | 15               | 56.00          | 15                 | 56.00          |
| S      | 17               | 63.00          | 17                 | 63.00          |
| T      | 15               | 60.00          | 15                 | 60.00          |
| U      | 40               | 150.00         | 40                 | 150.00         |
| V      | 40               | 140.00         | 40                 | 140.00         |
| W      | 40               | 148.00         | 40                 | 148.00         |
| X      | 40               | 155.00         | 40                 | 155.00         |
| Y      | 45               | 169.00         | 45                 | 169.00         |
| Z      | 40               | 148.00         | 40                 | 148.00         |
| Aa     | 30               | 100.00         | 30                 | 100.00         |
| Ab     | 30               | 120.00         | 30                 | 120.00         |
| Ac     | 25               | 93.00          | 25                 | 93.00          |
| Ad     | 30               | 111.00         | 30                 | 111.00         |
| Ae     | 30               | 170.00         | 30                 | 170.00         |
| Af     | 30               | 115.00         | 30                 | 115.00         |
| Ag     | 30               | 124.00         | 30                 | 124.00         |
| Ah     | 30               | 80.00          | 30                 | 80.00          |
| Ai     | 30               | 108.00         | 30                 | 108.00         |

TABLE 4.3 – Tableau du programme de fabrication normal et accéléré

La durée minimale du projet après l'accélération des deux tâches, que nous avons noté  $D_2$  est égale à 1846 secondes, trouvée en soustrayons de la durée minimale du projet sans accélération, les périodes d'accélération des deux tâches accélérées  $K$  et  $L$ ,  $y_k$  et  $y_L$  respectivement.

$$D_2 = 2044 - 18 - 180 = 1846 \text{ secondes.}$$

Nous rappelons que la durée minimale du projet avant accélération est  $D_1 = 2044$  secondes, or  $D_2 < D_1$  et donc la valeur maximale d'exécution souhaitée pour le projet  $\lambda$  vérifie la contrainte  $D_2 \leq \lambda \leq D_1$  et donc  $1846 \leq \lambda \leq 2044$ .

Nous avons réussi à réduire la durée du projet de 198 secondes, mais cette accélération a un coût. Il est donc nécessaire de minimiser ce coût afin de déterminer si le gain de temps est réellement avantageux pour l'entreprise.

Avant d'établir le modèle linéaire correspondant à cette minimisation, nous avons besoin de calculer les coûts unitaire d'accélération pour les tâches "K" et "L".

Le coût unitaire d'accélération d'une tâche  $i$  se calcule ainsi : (3.2)

$$c_K = \frac{598 - 400}{108 - 90} = 11DA/s$$

$$c_L = \frac{1600 - 1330}{360 - 180} = 1.5DA/s$$

Résolvons désormais le PL des coûts modélisé avant, de sa fonction objectif :

$$\sum_i c_i y_i$$

avec

$$y_K \in [0, 18]$$

$$y_L \in [0, 180]$$

et

$$1846 \leq \lambda \leq 2044.$$

Par exemple, pour les valeurs respectives de  $\lambda=1846$  et  $\lambda=2000$ , on obtient les résultats suivants :

- Pour  $\lambda=1846$

Le programme linéaire qui minimise le coût dû à l'accélération du projet en LINGO est le suivant :

! Objectif : Minimiser les coûts d'accélération ;

$$\text{Min} = 11 * y_K + 1.5 * y_L;$$

! Contraintes :

$$sD - sC \geq 72;$$

$$sD - sA \geq 187;$$

$sE - sD \geq 148;$   
 $sS - sR \geq 15;$   
 $sT - sS \geq 17;$   
 $sE - sT \geq 15;$   
 $sF - sE \geq 45;$   
 $sG - sF \geq 65;$   
 $sH - sG \geq 43;$   
 $sI - sH \geq 119;$   
 $sJ - sI \geq 108;$   
 $sK - sJ \geq 30;$   
 $sL - sK \geq 108 - yK;$   
 $sM - sL \geq 360 - yL;$   
 $sN - sM \geq 20;$   
 $sO - sN \geq 20;$   
 $sP - sO \geq 108;$   
 $sQ - sP \geq 65;$   
 $sU - sQ \geq 108;$   
 $sV - sU \geq 40;$   
 $sW - sV \geq 40;$   
 $sW - sD \geq 148;$   
 $sX - sW \geq 40;$   
 $sY - sX \geq 40;$   
 $sZ - sY \geq 45;$   
 $sAa - sZ \geq 40;$   
 $sAb - sAa \geq 30;$   
 $sAc - sAb \geq 30;$   
 $sB - sA \geq 187;$   
 $sAc - sB \geq 29;$   
 $sAd - sAc \geq 25;$   
 $sAe - sAd \geq 30;$   
 $sAf - sAe \geq 30;$   
 $sAg - sAf \geq 30;$   
 $sAh - sAg \geq 30;$

$$sAi - sAh \geq 30;$$
$$C_{max} - sAi \geq 30;$$

! Bornes sur les variables d'accélération ;

$$yK \leq 18;$$

$$yL \leq 180;$$

! Bornes supérieures de la durée total du projet ;

$$C_{max} \leq 1846;$$

! Les variables doivent être non négatives ;

$$sA \geq 0;$$

$$sB \geq 0;$$

$$sC \geq 0;$$

$$sD \geq 0;$$

$$sE \geq 0;$$

$$sF \geq 0;$$

$$sG \geq 0;$$

$$sH \geq 0;$$

$$sI \geq 0;$$

$$sJ \geq 0;$$

$$sK \geq 0;$$

$$sL \geq 0;$$

$$sM \geq 0;$$

$$sN \geq 0;$$

$$sO \geq 0;$$

$$sP \geq 0;$$

$$sQ \geq 0;$$

$$sR \geq 0;$$

$$sS \geq 0;$$

$$sT \geq 0;$$

$$sU \geq 0;$$

$$sV \geq 0;$$

$$sW \geq 0;$$

$sX \geq 0;$   
 $sY \geq 0;$   
 $sZ \geq 0;$   
 $sAa \geq 0;$   
 $sAb \geq 0;$   
 $sAc \geq 0;$   
 $sAd \geq 0;$   
 $sAe \geq 0;$   
 $sAf \geq 0;$   
 $sAg \geq 0;$   
 $sAh \geq 0;$   
 $sAi \geq 0;$   
 $C_{max} \geq 0;$   
 $yK \geq 0;$   
 $yL \geq 0;$

END

Les résultats donnés par LINGO pour le modèle mathématique sont dans la figure 4.7 suivante :

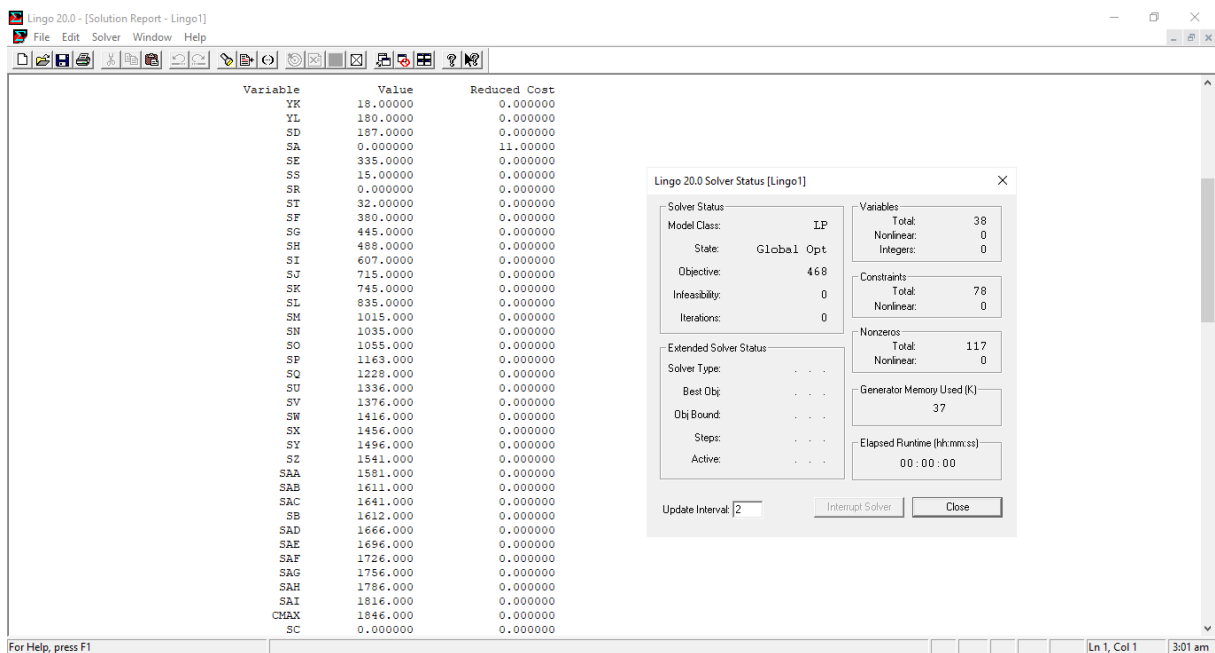


FIGURE 4.7 – Résultats du programme des coûts

Un coût minimal de 468 DA par article est engendré par la réduction maximale des durées des tâches "K" et "L". D'après la solution optimale fournie par LINGO, les valeurs des variables d'accélération sont  $y_K=18$  et  $y_L=180$ .

- Pour  $\lambda=2000$

Le programme linéaire qui minimise le coût dû à l'accélération du projet en LINGO est le suivant :

! Objectif : Minimiser les coûts d'accélération ;

$$\text{Min} = 11 * y_K + 1.5 * y_L;$$

! Contraintes :

$$sD - sC \geq 72;$$

$$sD - sA \geq 187;$$

$$sE - sD \geq 148;$$

$$sS - sR \geq 15;$$

$$sT - sS \geq 17;$$

$$sE - sT \geq 15;$$

$$sF - sE \geq 45;$$

$$sG - sF \geq 65;$$

$$sH - sG \geq 43;$$

$$sI - sH \geq 119;$$

$$sJ - sI \geq 108;$$

$$sK - sJ \geq 30;$$

$$sL - sK \geq 108 - y_K;$$

$$sM - sL \geq 360 - y_L;$$

$$sN - sM \geq 20;$$

$$sO - sN \geq 20;$$

$$sP - sO \geq 108;$$

$$sQ - sP \geq 65;$$

$$sU - sQ \geq 108;$$

$$sV - sU \geq 40;$$

$$sW - sV \geq 40;$$

$$sW - sD \geq 148;$$

$$sX - sW \geq 40;$$

$$\begin{aligned}
sY - sX &\geq 40; \\
sZ - sY &\geq 45; \\
sAa - sZ &\geq 40; \\
sAb - sAa &\geq 30; \\
sAc - sAb &\geq 30; \\
sB - sA &\geq 187; \\
sAc - sB &\geq 29; \\
sAd - sAc &\geq 25; \\
sAe - sAd &\geq 30; \\
sAf - sAe &\geq 30; \\
sAg - sAf &\geq 30; \\
sAh - sAg &\geq 30; \\
sAi - sAh &\geq 30; \\
C_{max} - sAi &\geq 30;
\end{aligned}$$

! Bornes sur les variables d'accélération ;

$$yK \leq 18;$$

$$yL \leq 180;$$

! Bornes supérieur de la durée total du projet ;

$$C_{max} \leq 2000;$$

! Les variables doivent être non négatives ;

$$sA \geq 0;$$

$$sB \geq 0;$$

$$sC \geq 0;$$

$$sD \geq 0;$$

$$sE \geq 0;$$

$$sF \geq 0;$$

$$sG \geq 0;$$

$$sH \geq 0;$$

$$sI \geq 0;$$

$$sJ \geq 0;$$

$sK \geq 0;$   
 $sL \geq 0;$   
 $sM \geq 0;$   
 $sN \geq 0$   
 $; sO \geq 0;$   
 $sP \geq 0;$   
 $sQ \geq 0;$   
 $sR \geq 0;$   
 $sS \geq 0;$   
 $sT \geq 0;$   
 $sU \geq 0;$   
 $sV \geq 0;$   
 $sW \geq 0;$   
 $sX \geq 0;$   
 $sY \geq 0;$   
 $sZ \geq 0;$   
 $sAa \geq 0;$   
 $sAb \geq 0;$   
 $sAc \geq 0;$   
 $sAd \geq 0;$   
 $sAe \geq 0;$   
 $sAf \geq 0;$   
 $sAg \geq 0;$   
 $sAh \geq 0;$   
 $sAi \geq 0;$   
 $C_{max} \geq 0;$   
 $yK \geq 0;$   
 $yL \geq 0;$

END

Les résultats donnés par LINGO pour le modèle mathématique sont dans la figure 4.7 suivante :

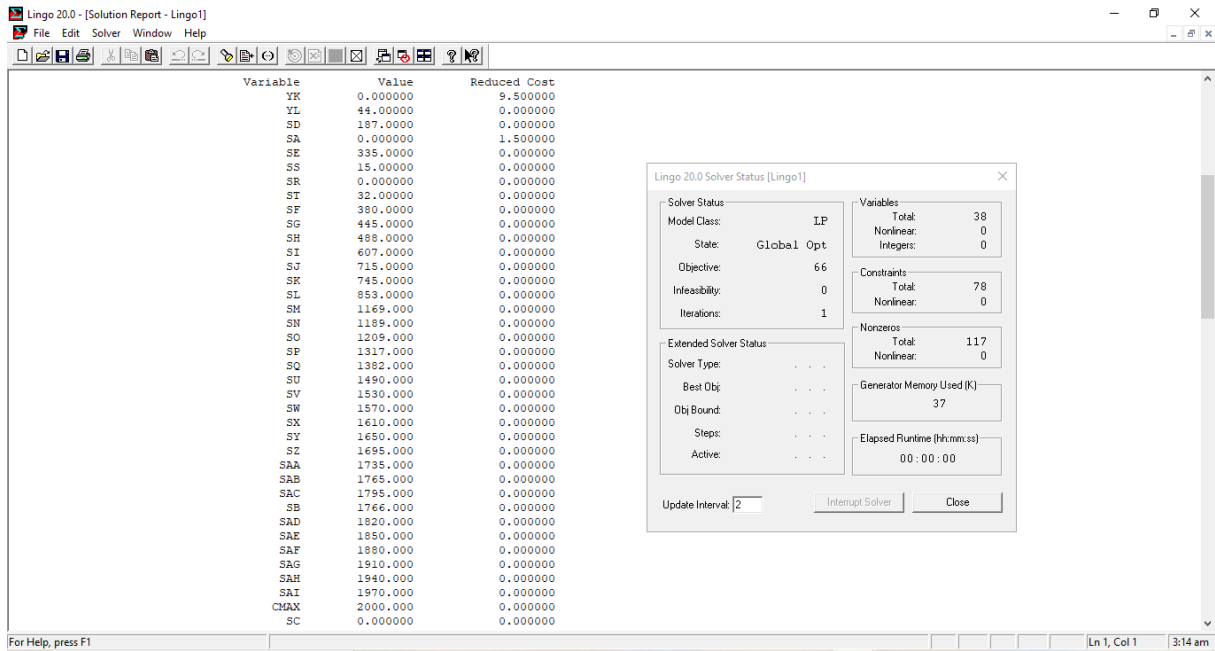


FIGURE 4.8 – Résultats du programme des coûts

Un coût minimal de 66 DA/article est engendré par cette accélération. La solution optimale des variables de durée d'accélération des deux tâches donnée par LINGO est  $y_K=0$  et  $y_L=44$ , cela indique que la réduction optimale du temps de projet se fait exclusivement au niveau de la tâche "L" pour une valeur de  $\lambda = 2000$ .

Nous avons le choix d'une durée minimale pour notre projet, comprise entre 1846 secondes et 2044 secondes, en fonction du coût acceptable pour l'entreprise. Il est important de rappeler que chaque réduction de la durée du projet entraîne une augmentation du coût lié à cette accélération. Nous supposons ici que l'entreprise préfère réduire la durée de projet au maximum et qu'elle est en mesure de supporter ce coût.

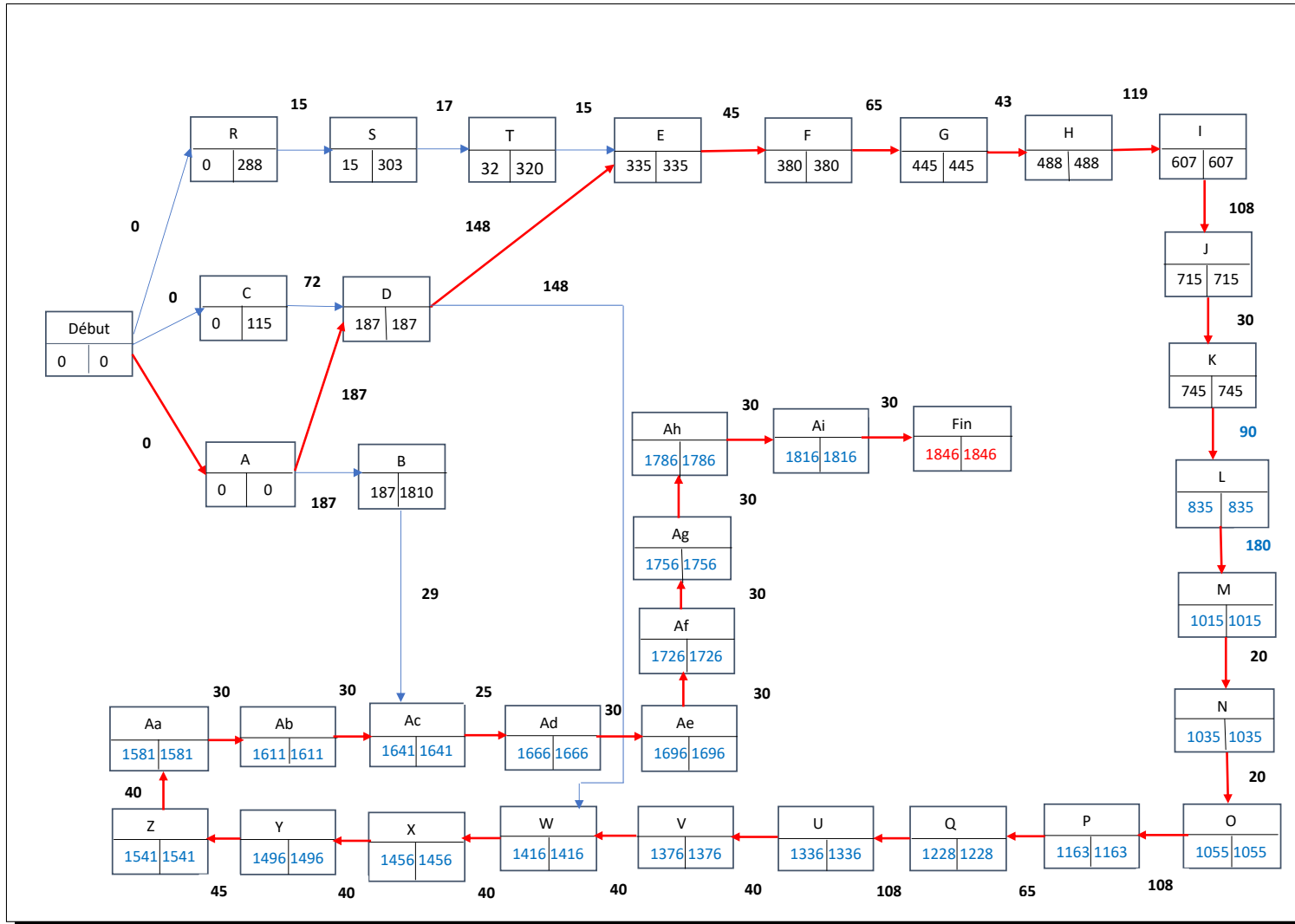


FIGURE 4.9 – Graphe MPM après accélération

La figure 4.9 représente le graphe de la méthode MPM après cette accélération, illustrant l'ensemble des tâches, ainsi que leurs nouvelles dates au plus tôt et au plus tard, depuis la tâche "K" jusqu'à la fin du projet.

### 4.3 Conclusion

Après une analyse approfondie des temps d'assemblage et une intervention visant à accélérer certaines tâches, les résultats de cette étude montrent qu'en réduisant le temps total d'assemblage à 1846 secondes, il est possible de doubler la cadence de la tâche critique de "branchement à la mise à vide", qui représente le goulot d'étranglement en optimisant cette tâche critique, on accélère le goulot d'étranglement, permettant d'augmenter la cadence de la production globale, la ramenant à 1 réfrigérateur toutes les 3 minutes. Cela permettrait d'augmenter la capacité de production à 140 réfrigérateurs par jour.

Toutefois, cette amélioration potentielle engendrerait un coût d'accélération additionnel de 468 DA par article. L'analyse suggère que cet investissement serait justifié, car il permettrait à ENIEM de répondre plus efficacement à la demande croissante, d'optimiser l'utilisation des ressources et de réduire les temps d'attente.

# Conclusion générale

Au terme de cette étude, il apparaît clairement que l'amélioration de l'ordonnancement des tâches au sein de l'unité de production des réfrigérateurs d'ENIEM est non seulement possible, mais aussi nécessaire pour accroître l'efficacité et la compétitivité de l'entreprise. Les solutions proposées, basées sur une modélisation mathématique rigoureuse et l'application des méthodes d'ordonnancement adaptées, permettent de réduire la durée totale du projet, d'optimiser l'utilisation des ressources, et d'accroître la cadence de production avec une minimisation efficace des coûts supplémentaires.

L'application de la méthode des potentiels Metra (MPM) a notamment permis de mettre en évidence les goulots d'étranglement et de proposer des améliorations significatives dans le processus de production. La réduction du temps total d'assemblage à 1846 secondes et l'augmentation potentielle de la capacité de production à 140 réfrigérateurs par jour démontrent l'impact tangible de ces améliorations.

Cependant, ces résultats ne constituent qu'une étape dans l'optimisation continue de la production chez ENIEM. Il est recommandé de poursuivre les efforts de recherche et développement pour affiner les techniques d'ordonnancement, en prenant en compte les évolutions technologiques et les changements du marché. De plus, l'intégration de nouvelles méthodes, telles que l'intelligence artificielle et le machine learning, pourrait ouvrir des perspectives prometteuses pour l'avenir de l'entreprise.

En conclusion, ce mémoire a permis de poser les bases d'une optimisation efficace de l'ordonnancement chez ENIEM, avec des résultats encourageants.

# Bibliographie

- [1] AHMED, G.-A. *Ordonnancement de tâches et de périodes d'indisponibilité de durée variable*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2016.
- [2] BELHARRAT, N., AND COLLECTIF. *La recherche opérationnelle (théorie des graphes)*. Les Pages Bleu, Algérie, 2005.
- [3] BERGE, C. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- [4] BOUCHITTÉ, V., AND GOGLIN, B. *Graphes et algorithmique des graphes*.
- [5] BOUKEF, H. B. B. O. *Sur l'ordonnancement d'ateliers job-shop flexibles et flow-shop en industries pharmaceutiques : optimisation par algorithmes génétiques et essais particuliers*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lille ; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2009.
- [6] CARLIER, J., AND CHRÉTIENNE, P. *Problèmes d'ordonnancement*. Masson, Paris, 1988.
- [7] DE LIGNIÈRES, B. Bts sio sistr, août 2013. Document de formation.
- [8] DIDIER, M. *Éléments de théorie des graphes*, 2003. Version provisoire du 3 mai 2003.
- [9] FAURE, R., LEMAIRE, B., AND PICOULEAU, C. *Précis de recherche opérationnelle : méthodes et exercices d'application*, 7 ed. Sciences Sup : Mathématiques. Dunod, 2014.
- [10] FAURE, R., ROUCAIROL, C., AND TOLLA, P. *Chemins et flots, ordonnancements - Recherche opérationnelle appliquée I*. Collection "Programmation". Gauthier-Villars, 1976.
- [11] HILLIER, F. S., AND LIEBERMAN, G. J. *Introduction to Operations Research*, 9th ed. McGraw-Hill, 2010.
- [12] JAVEL, G., MEBARKI, N., AND CORTIER, I. *Logistique industrielle et organisation - 5e éd. - Cours, exercices et études de cas*, 5e éd. ed. Dunod, 2017.

- [13] MEREDITH, J. R., AND MANTEL, S. J. *Project Management : A Managerial Approach*, 8th ed. Wiley, 2012.
- [14] MOUHOUB, N. E. *Algorithmes de construction de graphes dans les problèmes d'ordonnement de projet*. Thèse de doctorat en sciences, Université FERHAT Abbas - Sétif, 2011.
- [15] TEGHEM, J. *Recherche opérationnelle - Tome 1 : Méthodes d'optimisation*. Ellipses, 2012.
- [16] TEGHEM, J. *Recherche opérationnelle - Tome 2 : Gestion de production, Modèles aléatoires, Aide multicritère*. Ellipses, 2013.

# Résumé

Ce mémoire se concentre sur l'ordonnancement et l'optimisation d'une chaîne de production en appliquant la méthode MPM et la programmation linéaire pour développer un modèle mathématique approprié. Grâce à l'implémentation sur LINGO, il est possible d'évaluer les durées de fin de projet avant et après l'accélération, ainsi que les coûts associés.

## abstract

This work aims to schedule and optimize a production chain using the MPM method, as well as linear programming to develop an appropriate mathematical model. Through implementation in LINGO, we can assess the project completion times before and after acceleration, along with the associated costs.

## ملخص

يهدف هذا العمل إلى جدولة وتحسين خط الإنتاج باستخدام طريقة من طرق الجدولة، بالإضافة إلى البرمجة الخطية لتطوير نموذج رياضي مناسب. بفضل التنفيذ على برنامج لينجو، يمكننا تقييم أوقات إنجاز المشروع قبل وبعد التسريع، بالإضافة إلى التكاليف المرتبطة به.