

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI, TIZI-OUZOU.



FACULTE DES SCIENCES  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

## MEMOIRE MASTER

Spécialité : RECHERCHE OPERATIONNELLE

Option : METHODES ET MODELES DE DECISION

Présenté par  
**M<sup>lle</sup> HASSANI Soraya Manel**

Sous la direction de  
**M<sup>me</sup> RABIA Fatima**

Sujet :

### **Approche Floue du Problème de Risque Minimal Multi-Objectifs**

Devant le jury d'examen composé de :

M <sup>r</sup> KASDI Kamal	Maître assistant A	UMMTO	Président
M <sup>me</sup> RABIA Fatima	Maître de conférences A	UMMTO	Rapporteur
M <sup>elle</sup> KHEFFACHE Rezika	Maître assistante A	UMMTO	Examinatrice
M <sup>r</sup> AOUANE Mohouhand	Maître assistant A	UMMTO	Examineur

Soutenu le :11 /09 /2013

# REMERCIEMENTS

Je tiens, avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Mme. RABIA, Maître de conférences A à l'Université Mouloud Mammeri de TIZI OUZOU, qui a assuré la direction de ce mémoire. Qu'elle veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance pour son dévouement, sa patience, sa disponibilité, ses conseils et l'aide constante qu'elle m'a apportée tout au long de ce travail.

Je remercie également les membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à tous les enseignants de la Faculté des Sciences qui, par leurs enseignements et leurs encouragements ont contribué à ma formation et ma réussite durant toutes mes études universitaires.

Mes remerciements vont aussi à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# Dédicaces

Je dédie ce travail à la mémoire de mon père, à ma mère pour ses encouragements tout au long de mes études.

Je le dédie aussi à mes frères et mes soeurs. Je les remercie pour leurs encouragements et leur soutien.

A tous mes amis sans citer les noms.

**Soraya Manel**

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>6</b>
<b>1 Concepts de base</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Eléments de la théorie des probabilités . . . . .	9
1.2.1 Expérience aléatoire . . . . .	9
1.2.2 Ensemble fondamental . . . . .	9
1.2.3 Evénement . . . . .	9
1.2.4 Tribu ou $\sigma$ -algèbre . . . . .	10
1.2.5 Espace probabilisable . . . . .	10
1.2.6 Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable . . . . .	10
1.2.7 Variable aléatoire . . . . .	10
1.2.8 Variable aléatoire continue . . . . .	11
1.2.9 Variable aléatoire discrète . . . . .	11
1.2.10 Loi d'une variable aléatoire . . . . .	11
1.2.11 Fonction de répartition . . . . .	11
1.2.12 Fonction de masse . . . . .	12
1.2.13 Densité de probabilité . . . . .	12
1.2.14 Moments . . . . .	12
1.2.15 Lois de probabilité usuelles . . . . .	13
1.2.16 Théorème centrale limite (T.C.L) . . . . .	15
1.3 Ensemble flou et fonction d'appartenance . . . . .	15
1.3.1 exemple . . . . .	15
<b>2 Programmation linéaire mono-objectif stochastique et floue</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.2 Programmation linéaire stochastique . . . . .	17
2.2.1 Approche passive ou "Wait and See" . . . . .	18
2.2.2 Approche active ou "Here and Now" . . . . .	19
2.3 Programmation linéaire floue . . . . .	30
2.3.1 Programmation linéaire flexible . . . . .	30

2.4	Conclusion . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Etat de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Dominance et efficacité . . . . .	32
3.3	Autres définitions utiles . . . . .	33
3.3.1	Point idéal . . . . .	33
3.3.2	Matrice des gains . . . . .	34
3.3.3	Point nadir ou anti-idéal . . . . .	34
3.3.4	Les poids . . . . .	34
3.3.5	Point de référence . . . . .	34
3.3.6	Taux de substitution marginal . . . . .	34
3.4	Méthodes de résolution . . . . .	34
3.4.1	Méthodes scalaires . . . . .	35
3.4.2	Méthodes non scalaires . . . . .	36
3.4.3	Méthodes heuristiques . . . . .	38
3.4.4	Méthodes interactives . . . . .	38
3.5	Conclusion . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Etat de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs stochastique</b>	<b>42</b>
4.1	Introduction . . . . .	42
4.2	Approche multicritère . . . . .	43
4.3	Approche stochastique . . . . .	46
4.3.1	Somme pondérée . . . . .	46
4.4	Comparaison des deux approches . . . . .	46
4.4.1	Critère espérance . . . . .	47
4.4.2	Critère variance . . . . .	47
4.4.3	Critère de risque minimum . . . . .	47
4.4.4	Critère de type Kataoka . . . . .	48
4.5	Méthodes de résolution . . . . .	50
4.5.1	Méthodes interactives . . . . .	50
4.5.2	Exemple numérique . . . . .	56
4.6	Conclusion . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Approche floue du problème de risque minimal multi-objectifs</b>	<b>58</b>
5.1	Transformation du problème . . . . .	58
5.2	Construction d'une approximation du problème . . . . .	60
5.3	Résolution du problème (5.7) . . . . .	61
5.3.1	Algorithme . . . . .	61
5.3.2	Exécution . . . . .	62

Conclusion générale	62
Bibliographie	63

# Introduction générale

Les connaissances dont nous disposons sur une situation quelconque sont dans la majorité des cas imparfaites soit parce que nous avons un doute sur leur validité, elles sont alors incertaines, soit parce que nous éprouvons une difficulté à les exprimer clairement, elles sont alors imprécises. Ces deux types d'imperfection dans les connaissances n'ont cependant pas eu la même importance dans les préoccupations des scientifiques.

En ce qui concerne l'incertain, il a été abordé par la notion de probabilité. Depuis 1955, différents auteurs dont Dantzig [14, 15], Charnes et Cooper [11,12] et Beal [2] ont cherché à étendre les méthodes de la programmation linéaire au cas aléatoire. Dans ce cas, le vecteur coût, le vecteur des ressources ainsi que les coefficients de la matrice technologique sont considérés comme des variables aléatoires de distributions connues. Ce qui a donné naissance à la programmation linéaire stochastique.

Alors que la programmation linéaire stochastique constitue le meilleur outil pour traiter des études de prise de décision dans un environnement incertain, la programmation linéaire floue, quant à elle, s'applique à un environnement imprécis. Les connaissances imprécises n'ont été prises en considération qu'à partir de 1965, lorsque Zadeh, professeur à l'université de Californie à Berkeley, a introduit la notion de sous-ensemble flou [47]. La théorie des probabilités et la théorie des ensembles flous, si elles sont distinctes, peuvent par contre être associées.

D'autre part, l'environnement et l'économie sont les champs d'application les plus riches en problèmes complexes auxquels les méthodes classiques d'optimisation n'apportent pas de réponses satisfaisantes. Ces problèmes doivent tenir compte simultanément des critères de décision de plus en plus nombreux et diversifiés. Nous sommes donc amenés à faire face à des problèmes décisionnels de nature multicritère appelés problèmes multi-objectifs.

Dans ce mémoire, nous ferons d'abord une synthèse des travaux existants en programmation linéaire stochastique mono-objectif et multi-objectifs puis nous nous

intéresserons particulièrement à la résolution du problème de risque minimal multi-objectifs par une approche floue.

L Ce mémoire est organisé en cinq chapitres :

Quelques notions de base de la théorie des probabilités et d'ensembles flous sont données dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre traite les diverses techniques utilisées en programmation linéaire stochastique et en programmation linéaire floue. Les deux approches "Wait and See" et "Here and Now" y sont exposées. Ce chapitre est fondamental pour la compréhension des divers sujets de la programmation stochastique multi-objectifs.

Un état de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs est donné au troisième chapitre. Nous y avons exposé les principales méthodes de résolution des problèmes linéaires multi-objectifs.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse de deux conceptions de la programmation linéaire stochastique multi-objectifs qualifiées d'approche multicritère et d'approche stochastique (voir Ben Abdelaziz [4,6]). Ces deux approches consistent en la généralisation des formulations classiques des problèmes multi-objectifs au cas stochastique et réciproquement. Les méthodes de résolution employées sont empruntées à la fois aux méthodes multi-objectifs et stochastiques.

Enfin, le dernier chapitre comporte notre modeste contribution concernant l'adaptation de la méthode décrite dans [22] à la résolution du problème de risque minimal multi-objectifs. Notons, par ailleurs, que cette méthode est initialement développée pour résoudre un problème de portefeuille avec des scénarios multiples. Ce dernier problème est un cas particulier du problème de risque minimal étudié dans ce mémoire dans le sens où il contient une seule contrainte et que les variables sont bornées.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et les principales références bibliographiques.

# Chapitre 1

## Concepts de base

### 1.1 Introduction

Ce chapitre introductif sera consacré aux rappels de quelques notions de probabilités et d'ensembles flous qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire. Ces notions sont tirées respectivement de Leujeune [33] et Hogg [23].

### 1.2 Eléments de la théorie des probabilités

#### 1.2.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une épreuve dont l'issue dépend du hasard. En principe, on admet que cette expérience peut être répétée indéfiniment dans des conditions identiques. Son résultat peut donc varier d'une réalisation à l'autre, de plus, il est impossible de le prévoir à l'avance.

#### 1.2.2 Ensemble fondamental

L'ensemble fondamental noté  $\Omega$  est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Il peut être :

- fini, infini dénombrable (pour le cas discret).
- infini non dénombrable (cas continu).

#### 1.2.3 Evénement

On appelle événement, un résultat possible d'une expérience aléatoire. C'est un sous-ensemble de  $\Omega$  qu'on notera par une lettre majuscule  $A, B, \dots$

### 1.2.4 Tribu ou $\sigma$ -algèbre

On appelle tribu ou  $\sigma$ -algèbre d'événements sur  $\Omega$ , toute famille que l'on notera par  $\mathcal{A}$  telle que

- $\Omega \in \mathcal{A}$ .
- si  $A \in \mathcal{A}$  alors  $\bar{A} \in \mathcal{A}$  ( $\bar{A}$  est le complémentaire de  $A$ )
- $A_i \in \mathcal{A}$  alors  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

### 1.2.5 Espace probabilisable

C'est le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  où  $\Omega$  est l'ensemble fondamental et  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$ -algèbre d'événements sur  $\Omega$ .

### 1.2.6 Définition d'une probabilité sur un espace probabilisable

Définir une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , c'est associer à chaque événement  $A$  un poids  $P(A)$  représentant la chance qu'il a de se réaliser.

On appelle probabilité sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{A})$ , toute application  $P$  définie de  $(\Omega, \mathcal{A})$  dans  $[0,1]$  telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- Quelle que soit la suite  $(A_i)$  d'événements deux à deux disjoints

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

**Remarque 1.1.** : Si  $\Omega$  est fini de cardinal  $n$  alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

L'espace  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

### 1.2.7 Variable aléatoire

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé et  $(\Omega', \mathcal{A}')$  un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire une application mesurable  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  à valeur dans  $(\Omega', \mathcal{A}')$  telle que :

$$\forall A' \in \mathcal{A}', \quad X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

$$\text{où } X^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A'\}$$

On distingue deux types de variables aléatoires : variable aléatoire continue et variable aléatoire discrète.

### 1.2.8 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire  $X$  est continue si  $X(\Omega)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

### 1.2.9 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire  $X$  est dite discrète si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini ou infini dénombrable.

### 1.2.10 Loi d'une variable aléatoire

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  un espace probabilisable et  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  à valeur dans  $(\Omega', \mathcal{A}')$ .

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$ , la probabilité image de  $P$  par  $X$  notée  $P_X$

$$\forall A' \in \mathcal{A}', P_X(A') = P(X^{-1}(A'))$$

- Si  $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ , (respectivement  $(\mathbb{R}^p, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^p})$ ), alors  $X$  est une variable aléatoire réelle (respectivement vecteur aléatoire réel de dimension  $p$ ).
- De même si  $X$  prend ses valeurs dans  $(\mathbb{Z}, P(\mathbb{Z}))$ ,  $X$  est une variable aléatoire discrète.

### 1.2.11 Fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire continue. On appelle fonction de répartition de  $X$ , la fonction  $F_X$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(] - \infty, x]) = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$$

On la note par :

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

**Propriétés 1.1.** *La fonction  $F_X$  est une fonction croissante et continue.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x.$$

### 1.2.12 Fonction de masse

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de masse, la probabilité  $P(X = x)$

### 1.2.13 Densité de probabilité

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .  $f$  est dite densité de probabilité (fonction de densité) si elle vérifie les propriétés suivantes :

1.  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,
2.  $f$  est intégrable,
3.  $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ .

### 1.2.14 Moments

#### • Moment non centré d'ordre $k$

Le moment non centré d'ordre  $k$  d'une variable aléatoire réelle est la quantité :

$$m_k = \int_{\Omega} X^k dP_X$$

Pour  $k=1$ ,  $m_1$  est l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$ . On la note par  $E(X)$ .

– Si  $X$  admet une densité de probabilité alors :

$$m_k = \int_{\Omega} X^k f(x)dx$$

**Exemple 1.1.** Soit  $X$  une variable continue de densité  $f$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^3 x f(x) dx + \int_3^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^3 x \frac{x^2}{9} dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9} \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 x^3 = \frac{1}{36} x^4 \Big|_0^3 = \frac{(3)^4}{36} = 2.25. \end{aligned}$$

– Si  $X$  est une variable aléatoire discrète alors :

$$m_k = \sum_{x \in \Omega} x^k P_X$$

( $P_X$  étant la loi de probabilité de  $X$ )

**Exemple 1.2.** Soit  $X$  une variable discrète telle que

$x$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

• **Moment centré d'ordre  $k$**

Le moment centré d'ordre  $k$  de la variable aléatoire réelle  $X$  est la quantité :

$$U_k = \int_{\Omega} [X - E(X)]^k dP_X = \int_{\Omega} [X - m_1]^k dP_X$$

Pour  $k=2$ , le moment  $U_2$  s'appelle variance de la variable aléatoire  $X$ .  
On la note par  $V(X)$  et on a :

$$V(X) = E(X - E(X))^2$$

### 1.2.15 Lois de probabilité usuelles

• **Cas discret**

• **Loi de Bernoulli**

La loi de Bernoulli est la loi du résultat d'une expérience ne pouvant aboutir qu'à deux résultats possibles. Par exemple, si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\{0,1\}$  alors,  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ . On note  $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ .

La fonction de masse est donnée par la formule suivante :

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

Ses moments sont :  $E(X) = p$  et  $V(X) = pq = p(1 - p)$

- **Loi Binomial**

Est une bernoulli répétée  $n$  fois. La loi de  $X$  est appelée loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On note  $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$ .

Sa fonction de masse est :

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{1-x}$$

Ses moments sont :  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p)$

- **Cas continue**

- **Loi uniforme**

On dit qu'une variable aléatoire  $X$  est uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$  si sa fonction de densité  $f(x)$  s'écrit comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Loi normale unidimensionnelle**

On dit que  $X$  suit la loi normale de paramètres  $m$  et  $\sigma$  ( $\sigma > 0$ ),  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ , si sa densité de probabilité s'écrit :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - m)^2} ; x \in \mathbb{R}$$

Ses moments d'ordre 1 et 2 sont :  $E(X) = m$ ,  $V(X) = \sigma^2$

- **Loi normale centrée réduite**

Soit  $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ , la variable aléatoire  $U = \frac{X - m}{\sigma}$  suit une loi normale centrée et réduite (de moyenne nulle et de variance égale à 1). Sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} ; x \in \mathbb{R}$$

### 1.2.16 Théorème centrale limite (T.C.L)

Le T.C.L concerne le comportement asymptotique d'une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes et de même loi.

**Théorème 1.1 (33).** Soient  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec  $E(X_i)=m$  et  $V(X_i) = \sigma_i^2$ ,  $\bar{x}$  est la moyenne donnée

par  $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  alors,  $\sqrt{n} \frac{(\bar{x} - m)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

## 1.3 Ensemble flou et fonction d'appartenance

Soit un ensemble de référence  $X$ , on définit un ensemble flou  $A$  dans  $X$  par la donnée d'une application  $\mu_A$  de  $X$  dans l'intervalle  $[0,1]$  qui à tout élément  $x \in X$  associe une valeur  $\mu_A(x)$ . Cette fonction est appelée "fonction d'appartenance" de l'ensemble flou, généralisant ainsi le concept d'appartenance et donc la notion de fonction caractéristique (voir Dubois et Prade [16] et Zimmermann [48]).

L'ensemble flou est noté par  $\tilde{A}$  et est défini par :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

Par exemple, si

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

alors on peut définir un ensemble flou  $\tilde{A}$  par

$$\tilde{A} = \{(x_1, 0.3), (x_2, 1), (x_3, 0.9), (x_4, 0), (x_5, 0.5)\}$$

A tout élément  $x$  de  $X$ , la valeur  $\mu_A(x)$  associée n'est pas nécessairement égale à 0 ou à 1 ; elle est a priori quelconque et désigne le degré d'appartenance de  $x$  à l'ensemble  $X$ .

### 1.3.1 exemple

Si  $X$  désigne une communauté donnée et que le sous-ensemble  $A$  est défini par la caractéristique d'être vieux, on a trois possibilités selon le critère de sélection appliqué à l'univers  $X$  :

- $\mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$  ; c'est-à-dire que l'élément  $x$  ne satisfait pas du tout la propriété vague sous-entendue par  $A$  : la communauté ne compte aucun vieux parmi ses membres ( $A = \emptyset$ ).

- $\mu_A(x) = 1 \quad \forall x \in X$  ; c'est-à-dire que  $x$  satisfait pleinement la propriété vague définie par  $A$  : tous les membres de la communauté sont vieux ( $A = X$ ).
- $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$  ; le degré d'appartenance  $\mu_A(x)$  est une valeur intermédiaire entre 0 et 1. Dans ce cas  $\mu_A(x) = 1$  si  $x$  est vieux et  $\mu_A(x) = 0$  si  $x$  est jeune (vieux et jeune sont deux attributs mutuellement exclusifs, définissant les deux sous-ensembles complémentaires  $A$  et  $\bar{A}$ ).

Dans le prochain chapitre, nous allons voir comment ces deux notions d'incertitude sont intégrées en programmation linéaire.

# Chapitre 2

## Programmation linéaire mono-objectif stochastique et floue

### 2.1 Introduction

La Programmation linéaire stochastique et la Programmation linéaire floue sont deux disciplines qui se caractérisent par le souci d'une meilleure appréhension des problèmes réels. Leur objectif est de prendre en compte les phénomènes aléatoires et imprécis intervenant en pratique, exclus par les méthodes déterministes. d'autre part, un programme linéaire stochastique ou flou ne peut être résolu directement. Il est nécessaire de le transformer en un programme déterministe.

Dans ce chapitre nous ne donnerons qu'une synthèse des différentes transformations existantes. Le lecteur intéressé par plus d'informations sur ces deux domaines peut consulter Kall [27], Kall et Wallace [28] pour la programmation linéaire stochastique ainsi que Dubois et Prade [16], Kaufmann [30], Massoud [34] et Zimmermann [48] pour la programmation linéaire floue.

### 2.2 Programmation linéaire stochastique

Le modèle général de programmation linéaire stochastique est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{"optimiser"} \quad Z(x, \omega) = C'(\omega)x \\ \text{sous les contraintes} \\ x \in S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n / A(\omega)x \leq b(\omega), x \geq 0\} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur de décision.  $A(\omega)$  est une matrice ( $m \times n$ ).  $C(\omega)$  et  $b(\omega)$  sont des vecteurs aléatoires.

Les termes de  $A(\omega)$  ainsi que les composantes de  $C(\omega)$  et  $b(\omega)$  sont des variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  donné et de distributions connues.

Il existe deux approches de la programmation linéaire stochastique

- l'approche passive ou "Wait and See" ;
- l'approche active ou "Here and Now".

### 2.2.1 Approche passive ou "Wait and See"

Considérons le problème stochastique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z(x, \omega) = C^t(\omega)x \\ s.c \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

L'approche du "Wait and see" [21,37] désigne la situation dans laquelle le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires pour prendre une décision. Dans ce cas, on peut s'intéresser à la fonction de répartition de la valeur optimale

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(\omega) = C^t(\omega)x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

Pour  $\omega \in \Omega$  fixé.

Dans cette approche  $C(\omega)$  est de la forme :

$$C(\omega) = (\alpha_1\omega_1 + \beta_1, \alpha_2\omega_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n\omega_n + \beta_n)$$

$\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont des réels.

Cependant puisqu'il n'est pas possible de trouver un vecteur  $x^0$  dans l'ensemble de décision  $S = \{x \in R^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$  qui soit optimal pour tout  $\omega \in \Omega$ , Tinter [44] a proposé de remplacer la notion d'optimalité utilisée en programmation déterministe par le concept "d'efficacité avec probabilité 1" donné par la définition suivante :

**Définition 2.1.** Un point  $x^0 \in S$  est efficace avec probabilité 1 s'il n'existe aucun autre point  $x \in S$  tel que :

$$P\{\omega | C^t x \leq C^t x^0\} = 1 \text{ et } P\{\omega | C^t x < C^t x^0\} > 0.$$

Autrement dit, un point  $x^0$  est efficace avec probabilité 1, s'il n'existe aucun autre

point  $x \in S$  presque sûrement aussi bon que  $x^0$ , et qui soit meilleur que  $x^0$  avec une probabilité positive.

Dans ce cas, si l'on désigne par  $G = \{A_B^l, 1 \leq l \leq q\}$ , l'ensemble des sous matrices carrées de  $A$  de rang  $m$ , régulières, associées aux solutions de base réalisables  $x_l, 1 \leq l \leq q$  de  $S$ , la définition 2.1 permet de caractériser les régions de décision

$$\begin{aligned}\Omega_\ell &= \{\omega | \gamma(\omega) = C^t(\omega)x, x \in S\} \\ &= \{\omega | (C_B^l)^t(\omega)(A_B^l)^{-1}A_N^l - C_N^l(\omega) \leq 0\}\end{aligned}$$

où  $C_B^l(\omega)$  et  $C_N^l(\omega)$  sont respectivement les composantes de base et hors base du vecteur  $C(\omega)$ .  $A_B^l, A_N^l$  sont les matrices de base et hors base associées à  $x_\ell$  respectivement.

Si  $f(\omega)$  est la fonction de densité de  $\omega$ , on définit alors

$$P_l = P(\Omega_l) = \int_{\Omega} f(\omega) d\omega$$

La fonction de répartition de la valeur optimale  $\gamma(\omega)$  de  $Z(x, \omega)$  est donnée par

$$F_{\gamma(\omega)} = \sum_{i=1}^q \int_{\Omega_{iZ}} f(\omega) d\omega$$

avec  $\Omega_{iZ} = \{\omega / \gamma_i(\omega) \leq Z\}$ .

En conclusion, même si cette définition est intéressante du point de vue théorique par le problème de répartition qu'elle permet de poser, elle l'est moins du point de vue pratique, car son application nécessite la détermination de toutes les bases et solutions de base réalisables de l'ensemble de décision, ce qui est fastidieux et irréaliste pour les problèmes de grande taille.

Pour faire face à ces difficultés, les scientifiques ont introduit l'approche active dite approche **"here and now"**.

### 2.2.2 Approche active ou "Here and Now"

C'est une approche basée sur le principe de prise de décision et le choix d'une stratégie  $x$  sans connaître au préalable la réalisation des variables aléatoires. Elle a été développée pour palier à la difficulté du calcul de la fonction de répartition de l'approche passive.

L'idée de base de cette approche est la transformation des problèmes stochastiques en programmes déterministes équivalents.

Dans le cas de cette approche, la question posée est selon quel critère choisir une stratégie  $x$  dans  $S$ , ou encore, comment devons nous interpréter l'objectif  $Z(x, \omega)$  et les contraintes  $A(\omega)x \leq b(\omega)$  pour obtenir le programme déterministe équivalent ?

### A-Cas des objectifs aléatoires

Soit le problème suivant :

$$\min_{x \in S} Z(x, \omega) \quad (2.3)$$

où  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$

Plusieurs critères d'optimisation sont utilisés dans la littérature pour transformer le problème stochastique en problème déterministe équivalent. On distingue :

- **Le critère de Bayes (E-modèle)**

Ce critère est introduit par Charnes et Cooper [13]. Il consiste à minimiser l'espérance mathématique de la fonction objectif :

$$\min_{x \in S} \bar{Z}(x) = E[C^t(\omega)x] = \bar{C}^t x \quad (2.4)$$

Cette méthode n'est efficace que dans le cas où les variances des variables aléatoires sont très petites, c'est-à-dire, que les données sont peu dispersées. Ceci peut être justifié par le théorème (l'inégalité) de Tchebycheff qui suit :

#### **Théorème 2.1 (33). (Inégalité de Tchébycheff)**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  ( $E(X) = \mu$ ) et de variance ( $\sigma^2$ ) finies alors, pour tout réel  $k > 0$  on a :

$$P[|X - E[X]| \leq k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

- **Le critère de la variance (V-modèle)**

Une autre interprétation classique du programme (2.3) est de minimiser la variance de l'objectif  $Z(x, \omega)$  :

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = x^t \mathbf{V} x \quad (2.5)$$

Où  $\mathbf{V}$  est la matrice de variance-covariance du vecteur  $C(\omega)$ .

- **Le critère espérance variance (E-V modèle)**

Ce modèle consiste à minimiser la variance de  $Z(x, \omega)$  tout en réalisant un niveau de rendement minimum  $Z_0$  fixé préalablement par le décideur.

Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} \sigma^2(x) \\ \text{s.c. } \bar{C}^t x \geq Z_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Les trois critères cités ci-dessus conviennent à de nombreuses applications. En effet, ils nécessitent une information minimale sur la variable aléatoire qui est facilement estimée à partir des données acquises.

- **Le critère de l'espérance mathématique de la fonction d'utilité**

Dans cette interprétation, nous prenons en considération la notion de risque et pour ce faire, nous construisons une fonction  $U$  qui à chaque niveau de gain associe un nombre appelé " utilité ", représentant l'importance qui lui est accordée. Lorsque nous connaissons  $U$  l'interprétation de (2.1) est :

$$\min_{x \in S} E[U(C^t(\omega)x)] \quad (2.7)$$

Les inconvénients de cette approche sont :

- La construction de  $U$ ,
- La difficulté de résolution du programme déterministe (2.7).

**Exemple 2.1.** Evaluons, en utilisant le critère (2.7), la fonction objectif dans le cas où  $C(\omega)$  suit une loi normale et la fonction d'utilité est exponentielle :

$$U(r) = 1 - e^{-ar}$$

où  $r$  est la valeur de l'objectif et  $a \geq 0$  est le coefficient de risque encouru ( $a$  grand correspond à une attitude prudente).

Si  $r \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors :

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-ar}) \frac{e^{-(r-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{dr}{\sigma} = 1 - e^{-\frac{\sigma^2 a^2}{2}} - \mu a$$

Minimiser  $E(U)$  revient à minimiser  $\mu - \frac{\sigma^2 a}{2}$ .

Dans notre cas  $\mu = \bar{C}^t x$  et  $\sigma^2 = x^t \mathbf{V} x$  où  $\mathbf{V}$  est la matrice de variance-covariance

du vecteur  $C(\omega)$ .

Ainsi le problème (2.7) devient un problème quadratique de la forme

$$\min_{x \in S} (\bar{C}^t x - \frac{a}{2} x^t \mathbf{V} x)$$

- **le critère du risque minimum (P-modèle)**

Le modèle est donné par Bareanu en 1964 (voir [8])

$$\max_{x \in S} P(C^t(\omega)x \leq u) \quad (2.8)$$

Où  $u$  est un seuil fixé par le décideur.

Ce problème peut être interprété comme suit :

Un décideur doit choisir un vecteur d'activité  $x$  de l'ensemble de décision  $S$ . Si le décideur réalise une efficacité inférieure ou égale à  $u$ , il reçoit une récompense. Cependant, il sera pénalisé s'il réalise le contraire.

S'il ne connaît pas au préalable la distribution de  $C(\omega)$ , il doit choisir  $x$  de façon à maximiser la chance de recevoir la récompense, autrement dit, il doit minimiser le risque de ne pas recevoir cette dernière, d'où le nom "Risque minimal". Ce problème rencontre la difficulté du calcul de la fonction de répartition.

Dans le cas, par exemple, où  $C(\omega)$  suit une loi normale de moyenne  $\bar{C}$  et de matrice de covariance  $\mathbf{V}$ , la probabilité  $P(C^t(\omega)x \leq u)$  s'écrira :

$$P[C^t(\omega)x \leq u] = P\left(\frac{C^t(\omega)x - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}} \leq \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}}\right) = \Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}}\right), \text{ pour } x \neq 0$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Maximiser  $P[C^t(\omega)x \leq u]$  revient à maximiser  $\Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}}\right)$ .

Sachant que  $\Phi$  est une fonction croissante, ceci revient à maximiser

$$f(x) = \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}} \text{ ou à minimiser } g(x) = -f(x).$$

Le problème (2.8) se ramène donc à un problème fractionnaire :

$$\min_{x \in S} g(x) = \frac{\bar{C}^t x - u}{\sqrt{x^t \mathbf{V} x}}$$

• **Le critère de type K (KATAOKA) [29]**

Nous obtenons le programme (2.9) qui revient à minimiser l'objectif  $Z(x, \omega)$  avec une probabilité égale à  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

$$\begin{cases} \min u \\ s.c \ P(C^t(\omega)x \leq u) = \alpha \\ x \in S \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans le cas où  $C(\omega)$  suit, par exemple, une loi normale de moyenne  $\bar{C}$  et de variance  $\sigma^2 = x^t V x$ , la contrainte  $P[C^t(\omega)x \leq u] = \alpha$  s'écrira :

$$\begin{aligned} P(C^t(\omega)x \leq u) = \alpha &\Leftrightarrow P\left(\frac{C^t(\omega)x - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} \leq \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}}\right) = \alpha \\ &\Leftrightarrow \frac{u - \bar{C}^t x}{\sqrt{x^t V x}} = \Phi^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$u(x) = \bar{C}^t x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$$

Le programme équivalent à (2.9) s'écrira donc :

$$\min_{x \in S} u(x) = \bar{C}^t x + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$$

La fonction obtenue  $u(x)$  n'est convexe que si  $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$  et  $\bar{C}^t x$  sont convexes. En effet,  $\bar{C}^t x$  est linéaire donc convexe.  $V$  est une matrice semi-définie positive donc  $\sqrt{x^t V x}$  est convexe. Par conséquent,  $\Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^t V x}$  est convexe si et seulement si  $\Phi^{-1}(\alpha) \geq 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ , (Voir [26]).

**B-Cas des contraintes aléatoires**

Dans ce paragraphe, nous considérons que l'objectif est déterministe (soit il l'est à l'origine, soit il a été rendu déterministe en utilisant l'un des critères précédents). Le modèle se présente comme suit :

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ s.c \ A(\omega)x \leq b(\omega) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Il existe deux modèles déterministes équivalents à (2.10)

**B1) Le modèle avec seuil de probabilité sur les contraintes**

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ \text{s.c } P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Le seuil  $\alpha$  est fixé par le décideur ( $0 < \alpha < 1$ ) et  $P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha$  reflète l'exigence que la contrainte  $A(\omega)x \leq b(\omega)$  soit satisfaite dans les  $\alpha$  pourcent des cas.

Un autre problème équivalent à (2.11) consiste à fixer un seuil  $\alpha_i$  pour chacune des contraintes. Le modèle obtenu est :

$$\begin{cases} \min Z(x) = C^t x \\ \text{s.c } P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ce modèle, la question qui se pose est de savoir si les ensembles :

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \{x \in \mathbb{R}^n, P(A(\omega)x \leq b(\omega)) \geq \alpha\} \\ S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n, P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

qui dépendent des distributions de A et de b ainsi des seuils  $\alpha$  et  $\alpha_i$  sont convexes ou non.

**Théorème 2.1.** (Kall[27]) :  $S(0)$  et  $S(1)$  sont convexes quelque soient les distributions de A et de b.

Citons , à titre d'exemple, quelques conditions de convexité de  $S(\alpha_i)$  ou  $S(\alpha)$ .

• **Cas où A déterministe et b aléatoire**

Pour ce cas spécial, la réponse à la question posée est très simple. Si  $F_i$  est la fonction de répartition de  $b_i$ , alors

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P(A_i x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | P(b_i(\omega) \leq A_i x) \leq 1 - \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | A_i x \leq F_i^{-1}(1 - \alpha_i)\} \end{aligned}$$

$S(\alpha_i)$  est un ensemble de contraintes linéaires en  $x$ , donc il est convexe, d'où le théorème suivant :

**Théorème 2.2.** (Kall[27]) : Si  $A$  est déterministe et  $b$  est aléatoire alors, le domaine  $S(\alpha_i)$  est convexe pour toute distribution de  $b_i(\omega)$ .

- **Cas où  $A$  et  $b$  sont des variables aléatoires normales**

**Cas 1 :  $A$  et  $b$  non indépendantes**

Pour ce cas général, on suppose que  $(A_i, b_i)$  est un vecteur normalement distribué de moyenne  $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  et de matrice des covariances  $V_i$ . En vertu de la théorie des probabilités, la variable aléatoire  $t_i(x) = A_i x - b_i$  a une distribution normale de moyenne  $m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - \mu_{i,n+1}$  et de variance  $\sigma_i^2(x) = Z^t V_i Z$  avec  $Z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$  et  $\sigma_i(x) > 0, \forall x$  car  $x_{n+1} = -1$ .

$$\begin{aligned} S(\alpha_i) &= \{x \in \mathbb{R}^n | P(t_i(x) \leq 0) \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | P\left(\frac{t_i(x) - m_i(x)}{\sigma_i(x)} \leq \frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi\left(\frac{-m_i(x)}{\sigma_i(x)}\right) \geq \alpha_i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

$S(\alpha_i)$  est convexe si et seulement si  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

**Cas 2 :  $A$  et  $b$  indépendantes**

$$a_{ij} \sim \mathcal{N}(\mu_{ij}, v_{ij}^2), \quad b_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$$

alors la variable  $A_i x - b_i$  a pour distribution :

$$\mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i, \sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_j^2 - \sigma_i^2\right)$$

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_j - m_i + \Phi^{-1}(\alpha_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n v_{ij}^2 x_j^2 - \sigma_i^2} \leq 0\}$$

Dans ce cas aussi,  $S(\alpha_i)$  est convexe si et seulement si  $\alpha \geq \frac{1}{2}$ .

## B2) Modèle avec recours

L'idée est de choisir des stratégies (ou des décisions) en tenant compte des conséquences qui pourraient se produire après la réalisation des variables aléatoires.

Le mot "recours" révèle la possibilité dont on dispose pour remédier à une décision initiale éventuellement trop optimiste, en mettant en œuvre des actions correctives représentées par le vecteur  $y(k+1)$  et une fonction de pénalité  $q^t(\omega)y$  pour compenser la violation des contraintes. Ici  $q^t(\omega)$  désigne le vecteur coût de violation des contraintes et  $y$  le vecteur des pénalités.

La minimisation de la fonction de pénalité conduit au problème suivant :

$$\begin{cases} Q(x, \omega) = \min_y q^t(\omega)y \\ \text{s.c. } W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Où  $W(m \times k)$  est la matrice de recours.

Le problème consiste à minimiser sur les variables  $x \in S$  tout en veillant à ce que les coûts au second niveau soient minimaux en moyenne.

Le modèle correspondant est alors :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} E[C^t x + \min_y q^t(\omega)y] \\ \text{s.c. } A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega) \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Ce qui est aussi équivalent à :

$$\min_{x \in S} C^t x + E(Q(x, \omega)) \quad (2.15)$$

où  $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall \omega \in \Omega, \exists y \geq 0 / A(\omega)x + W(\omega)y = b(\omega), x \geq 0\}$

Dans le problème (2.15), le choix des décisions  $x$  ne peut se faire n'importe comment. Les décisions sont prises de telle sorte que  $S$  soit non vide, c'est à dire que la variable  $x$  est telle que le problème (2.13) soit fini pour tout  $\omega$ , ( $Q(x, \omega) < \infty$ ,  $\forall \omega \in \Omega$ ).

Wets [45] a montré que  $S$  est un ensemble convexe et que la fonction  $Q(x, \omega)$  est convexe aussi.

**Remarque 2.1.** Il existe différents types de recours :

– **Le recours fixe :** Un recours est fixe si les coefficients de la matrice de recours  $W(w)$  sont fixes, c'est-à-dire  $W(w) = W$ .

– **Le recours fixe complet :** Un recours fixe est dit complet si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists y \geq 0 \text{ tel que } Q(x, \omega) \leq \infty, \forall \omega \in \Omega.$$

– **Le recours relativement complet :** Le recours est relativement complet si :

$$\forall x \in S \subseteq \mathbb{R}^n, \exists y \geq 0 \text{ tel que } Q(x, \omega) \leq \infty, \forall \omega \in \Omega.$$

La différence entre le recours complet et le recours relativement complet porte sur l'ensemble des  $x$  pour lesquels il existe une solution de second niveau. Si cet ensemble est le domaine de définition de  $x$  à la première étape, le recours est relativement complet, mais si  $x$  est dans  $\mathbb{R}^n$  alors le recours est complet.

– **Le recours simple :** Un recours fixe est simple si la matrice de recours est de la forme  $W=(I,-I)$  où  $I$  est la matrice identité d'ordre  $m$ .

Dans ce cas, le vecteur  $y$  est décomposé en deux parties :

1.  $y^+(m \times 1)$  : variable d'écart par excès.

2.  $y^-(m \times 1)$  : variable d'écart par défaut.

Ainsi le vecteur de pénalisation  $q(\omega)$  peut se décomposer comme suit :

$$\begin{aligned} q^+(\omega) &= b(\omega) - A(\omega)x \quad \text{si } b(\omega) - A(\omega)x \geq 0 \\ q^-(\omega) &= A(\omega)x - b(\omega) \quad \text{si } b(\omega) - A(\omega)x \leq 0 \end{aligned}$$

Avec cette décomposition, le problème (2.13) s'écrit :

$$\begin{cases} Q(x, \omega) = \min_{x \in S} [q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-] \\ y^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ y^+ \geq 0, \quad y^- \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Par conséquent le problème (2.15) est équivalent à :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} [C^t x + E(\min_y (q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^-))] \\ y^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ y^+ \geq 0, \quad y^- \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

**Théorème 2.3.** (Kall[29])

$Q(x, \omega)$  est fini si et seulement si :  $q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^- \geq 0$  avec probabilité 1.

Dans ce qui suit, nous étudions en détails le modèle avec seuil de probabilité et le modèle avec recours sur un exemple.

**Exemple 2.2.** : Considérons le problème suivant extrait de [14] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ s.c \ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \quad (P)$$

Où  $b$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[1.2, 1.6]$ .

Ce problème correspond à la recherche du coût minimal pour une opération de fusion de deux types de minerai. La demande est aléatoire uniforme et un problème de capacité limite l'opération à 4 unités.

- Remplaçons en premier lieu la demande par son espérance  $E(b(\omega)) = 1.4$   
Le problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ s.c \ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

a pour solution optimale  $x_1^* = 1$ ,  $x_2^* = 3$  et pour valeur optimale  $Z^* = 5$ .

La probabilité pour que cette solution soit admissible est :

$$P(b|1 + 3 \leq 4; 0.5 \times 1 + 0.3 \times 3 \geq b(\omega)) = P[1.4 \geq b(\omega)] = 1/2$$

- Pour l'interprétation avec seuil sur les contraintes, choisissons  $\alpha = 0.9$ .  
Cette interprétation peut être utilisée par la firme si elle n'a pas de capacité de stockage et souhaite maintenir le nombre de clients satisfaits. Elle doit être en mesure d'assurer les livraisons à 90 pourcent. Dans ce cas, la contrainte devient :

$$P(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9$$

Soit  $F$  la fonction de répartition de  $b(\omega)$ , alors :

$$P(0.5x_1 + 0.3x_2 \geq b(\omega)) \geq 0.9 \Leftrightarrow 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq F^{-1}(0.9)$$

$$\text{Or } F^{-1}(0.9) = 1.56$$

Le problème avec seuil de probabilités sur les contraintes stochastiques s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x) = 2x_1 + x_2 \\ s.c \ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 0.5x_1 + 0.3x_2 \geq 1.56 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

La solution est :  $x_1^* = 1.8$ ,  $x_2^* = 2.2$  et pour valeur optimale  $Z^* = 5.8$

- Considérons maintenant un problème avec recours.

Supposons que la firme ait un contrat stipulant que la demande doit être satisfaite, et qu'elle doit commander le minerai à l'avance. Si elle produit trop, elle peut écouler l'excédent chez d'autres clients à 2 unités monétaires au dessous du taux fixé. Si elle produit trop peu, elle peut acheter sur le marché le complément à 4 unités monétaires au dessus du taux fixé. Les coûts supplémentaires sont :

$$\begin{cases} 2(0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega)) & \text{si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \geq 0 \\ 4(b(\omega) - 0.5x_1 - 0.3x_2) & \text{si } 0.5x_1 + 0.3x_2 - b(\omega) \leq 0 \end{cases}$$

Soit  $Q(x_1, x_2, \omega)$  ces coûts supplémentaires, c'est aussi la pénalité que l'on doit ajouter à la fonction économique d'origine. Le problème avec recours revient à résoudre :

$$\begin{cases} \min[2x_1 + x_2 + E(Q(x_1, x_2, \omega))] \\ \text{s.c } x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit

$$E[Q(x_1, x_2, w)] = \frac{1}{0.4} \int_{1.2}^{0.5x_1+0.3x_2} 2(0.5x_1 + 0.3x_2 - t)dt + \frac{1}{0.4} \int_{1.2}^{0.5x_1+0.3x_2} 4(t - 0.5x_1 - 0.3x_2)dt$$

$$E[Q(x_1, x_2, w)] = \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 22(0.5x_1 + 0.3x_2) + \frac{82}{5}$$

(P) devient un problème quadratique :

$$\begin{cases} \min \frac{15}{2}(0.5x_1 + 0.3x_2)^2 - 9x_1 - 5.6x_2 + \frac{82}{5} \\ \text{s.c } x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution optimale est :  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 4$  et la valeur optimale de l'objectif est  $Z^* = 4.8$ .

## 2.3 Programmation linéaire floue

Un programme linéaire flou est un programme linéaire dont toutes les données ou certaines d'entre elles sont imprécises. On distingue deux cas :

- Le cas où les inégalités ou égalités sont relaxées. On parlera alors de programmation flexible
- Le cas où les coefficients de la matrice technologique et(ou) les composantes du vecteur des ressources sont représentés par des ensembles flous. Il s'agira alors de programmation robuste ou de programmation possibiliste.

Dans le cadre de ce mémoire, nous n'exposerons que le premier cas.

### 2.3.1 Programmation linéaire flexible

Considérons le programme suivant :

$$\begin{cases} \min Z(x) \cong C(x) \\ \text{s.c. } A_i x \lesssim b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\lesssim$  et  $\cong$  sont les versions flexibles de  $\leq$  et  $=$  respectivement.

Zimmermann [48] interprète ce programme de la manière suivante :

Trouver  $x$  tel que :

$$\begin{cases} C(x) \lesssim Z_0 \\ A_i x \lesssim b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

où  $Z_0$  est un seuil fixé par le décideur.

Dans ce cas

- L'objectif flou sera représenté par un ensemble flou  $\tilde{A}_0$  de fonction d'appartenance  $\mu_0(x)$
- Les contraintes floues seront représentées par des ensembles flous  $\tilde{A}_i$  de fonctions d'appartenance  $\mu_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

La décision est celle qui satisfait l'objectif et les contraintes. Elle est définie comme un ensemble flou  $\tilde{D} = \bigcap_{i=0}^m \tilde{A}_i$  de fonction d'appartenance  $\mu_D(x) = \min_{i=0, \dots, m} \mu_i(x)$

La meilleure décision est donnée par la résolution du problème

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} \min_{i=0, \dots, m} \mu_i(x) \quad (2.20)$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \max h \\ \text{s.c } h \leq \mu_i(x), \quad i = 0, \dots, m \\ 0 \leq h \leq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

**Théorème 2.2.** *Un point  $x \in \mathbb{R}_+^n$  est optimal pour le problème (2.18) si et seulement si  $(x, h)$  est optimal pour (2.21).*

Les fonctions d'appartenance  $\mu_i(x)$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont construites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \text{si } A_i x \leq b_i \\ 1 - \frac{A_i x - b_i}{d_i} \quad \text{si } b_i \leq A_i x \leq b_i + d_i \\ 0 \quad \text{si } A_i x \geq b_i + d_i \end{array} \right. \quad (2.22)$$

où  $d_i > 0$  est l'écart de tolérance.

La fonction d'appartenance  $\mu_0(x)$  est construite de la même manière en remplaçant  $A_i x$  par  $Cx$  et  $b_i$  par  $Z_0$ .

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une vue panoramique des différents critères permettant de transformer les problèmes stochastiques en problèmes déterministes. Nous remarquons que cette transformation dépend de l'information que nous avons sur les variables aléatoires. Nous avons aussi montré comment transformer un programme linéaire flou en un programme linéaire déterministe en utilisant les fonctions d'appartenance.

# Chapitre 3

## Etat de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons des problèmes de décision caractérisés par des objectifs linéaires, multiples et conflictuels qui doivent être optimisés sous certaines contraintes linéaires qui délimitent l'ensemble de décision. De tels problèmes ont beaucoup d'applications dans divers domaines comme l'économie, la gestion de la production, le transport, ...

Mathématiquement, le problème linéaire multi-objectifs (PLMO) se formule comme suit :

$$\begin{cases} \text{'' min '' } Z(x) = (Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_p(x)) \\ \text{s.c } x \in S \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $Z_k(x) = C_k^t x$ ,  $\forall k = 1, \dots, p$ ,  $C_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

L'ensemble  $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$  où  $A$  est une matrice  $(m \times n)$  et  $b \in \mathbb{R}^m$  est supposé non vide.

Le symbole " " signifie que (3.1) est mathématiquement mal posé c'est-à-dire qu'il n'existe aucune solution qui satisfait simultanément tous les objectifs car ceux-ci sont souvent conflictuels. Dans ce cas, la notion d'optimalité sera remplacée par la notion d'efficacité ou de dominance.

### 3.2 Dominance et efficacité

Comme nous l'avons déjà mentionné, il existe souvent des conflits entre les fonctions objectifs du (PLMO). C'est pour cela, qu'au *XIX<sup>ième</sup>* siècle Vilfredo

Pareto, un économiste italien, a défini un équilibre tel que l'on ne peut améliorer la valeur d'un objectif sans détériorer la valeur d'au moins un des autres objectifs. Cet équilibre s'appelle solution Pareto optimale ou solution efficace ou encore solution non dominée. Par conséquent, une solution Pareto optimale est définie comme suit :

**Définition 3.1.** Un point  $x \in S$  est dit Pareto optimal ou efficace s'il n'existe aucun  $x' \in S$  tel que

$$\begin{aligned} Z_k(x') &\leq Z_k(x), \quad \forall k \\ \text{et } Z_k(x') &< Z_k(x), \quad \text{pour au moins un } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{aligned}$$

**Définition 3.2.** Un point  $Z(x) \in Z(S)$  est dit non dominé s'il n'existe aucun autre point  $Z(x) \in Z(S)$  tel que

$$\begin{aligned} Z_k(x') &\leq Z_k(x), \quad \forall k \\ \text{et } Z_k(x') &< Z_k(x), \quad \text{pour au moins un } k \in \{1, 2, \dots, p\} \end{aligned}$$

**Définition 3.3.** Un point  $x \in S$  est faiblement efficace s'il n'existe aucun autre point  $x' \in S$  tel que  $Z_k(x') < Z_k(x)$ ,  $\forall k$

**Définition 3.4.** Un point  $Z(x) \in Z(S)$  est faiblement non dominé s'il n'existe aucun autre point  $Z(x') \in Z(S)$  tel que  $Z_k(x') < Z_k(x)$ ,  $\forall k$

### 3.3 Autres définitions utiles

Dans ce paragraphe, nous allons définir brièvement quelques éléments auxquels nous ferons référence dans la suite de ce document. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à [24].

#### 3.3.1 Point idéal

C'est le vecteur  $M = (M_1, \dots, M_p)$  dont les coordonnées  $M_k; k = 1, \dots, p$  sont données par

$$M_k = \min_{x \in S} Z_k(x)$$

### 3.3.2 Matrice des gains

Soit  $\bar{x}^{(l)}$  la solution optimale associée à  $Z_l(x)$ . La matrice carrée d'ordre  $p$  formée par les éléments  $Z_k(\bar{x}^{(l)})$  est appelée matrice des gains et on a :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} M_1 & Z_1(\bar{x}^{(2)}) & \dots & Z_1(\bar{x}^{(k)}) & \dots & Z_1(\bar{x}^{(p)}) \\ Z_2(\bar{x}^{(1)}) & M_2 & \dots & \dots & \dots & Z_2(\bar{x}^{(p)}) \\ \dots & \dots & \dots & M_k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_p(\bar{x}^{(1)}) & Z_p(\bar{x}^{(2)}) & \dots & Z_p(\bar{x}^{(k)}) & \dots & M_p \end{pmatrix}$$

### 3.3.3 Point nadir ou anti-ideal

C'est le vecteur  $m = (m_1, \dots, m_k, \dots, m_p)$  dont les coordonnées  $m_k$   $k = 1, \dots, p$  sont données par

$$m_k = \max_{x \in S} Z_k(x)$$

### 3.3.4 Les poids

Ce sont des nombres  $\lambda_k, k = 1, \dots, p$  associés aux objectifs  $Z_k$  et qui désignent l'importance accordée à ces objectifs. Ils sont en général normés, c'est-à-dire que,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0$$

### 3.3.5 Point de référence

C'est un vecteur  $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_p)$  dont les coordonnées sont les valeurs souhaitables que l'on doit atteindre.

### 3.3.6 Taux de substitution marginal

C'est la quantité dont la valeur d'un objectif est diminuée pour compenser un gain sur un autre objectif alors que les valeurs de tous les autres objectifs restent inchangées.

## 3.4 Méthodes de résolution

Confronté à un problème de programmation linéaire multi-objectifs, l'objectif du décideur est de choisir parmi toutes les solutions efficaces celle qu'il estime

être (la plus) satisfaisante. Dans ce qui suit, nous allons décrire les méthodes les plus utilisées pour la détermination d'un tel "meilleur compromis".

### 3.4.1 Méthodes scalaires

#### a) Utilisation d'une fonction d'utilité

Le décideur minimise une fonction  $U = U(Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_p(x))$  qui combine tous les objectifs dite fonction d'utilité. Deux modèles sont généralement utilisés :

##### – Modèle additif

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p U_k(Z_k(x)) \quad (3.2)$$

##### – Modèle multiplicatif

$$\min_{x \in S} \prod_{k=1}^p U_k(Z_k(x)) \quad (3.3)$$

Cette méthode exige que les objectifs soient compatibles.

#### b) Somme pondérée

Le décideur affecte un poids  $\lambda_k$  à chaque objectif  $Z_k(x)$  puis minimise la somme pondérée des objectifs

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ \text{s.c.} \quad & x \in S \\ & \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0\}$  est l'ensemble des poids.

Cette méthode est très simple à utiliser mais présente des problèmes de comparabilité et de compensation.

Pour éviter le problème de compensation, on impose des seuils  $\alpha_k \geq 0$  aux objec-

tifs. Dans ce cas, le problème (3.4) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k(x) \\ Z_k(x) \leq \alpha_k, \quad k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \\ \alpha_k \geq 0; \quad \lambda_k \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

**Théorème 3.1. Théorème de Geoffrion [18]**

1. Si  $x \in S$  est optimal pour (3.4) ou (3.5) alors,  $x$  est efficace pour le problème (3.1).
2. Si  $x \in S$  est efficace pour (3.1) et  $S$  convexe alors, il existe un vecteur  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$  de  $\Lambda$  tel que  $x$  est optimal pour (3.4) ou (3.5).

**c) Goal programming**

Le décideur fixe un but  $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_p)$  (ou un point de référence) puis cherche la solution la plus proche de  $\bar{Z}$ .

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \quad (3.6)$$

ou

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \quad (3.7)$$

Différentes versions et applications de cette technique sont proposées dans Ignizio [25] et le théorème de Geoffrion reste valable pour ce problème.

### 3.4.2 Méthodes non scalaires

**a) Méthode lexicographique**

Elle consiste à ordonner les objectifs selon leur importance et ensuite optimiser le plus important, puis le second ainsi de suite...

Supposons que

$$Z_1(x) >_{\text{important}}^{plus} Z_2(x) > \dots > Z_p(x)$$

On résout le problème suivant :

$$\min_{x \in S} Z_1(x)$$

Soit  $x_1^*$  sa solution optimale avec  $Z_1(x_1^*) = Z_1^*$   
 puis on résout :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \end{cases}$$

Par la suite :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \\ Z_2(x) = Z_2^* \end{cases}$$

À la  $k^{ième}$  itération on résout :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} Z_2(x) \\ Z_1(x) = Z_1^* \\ Z_2(x) = Z_2^* \\ \vdots \\ Z_{k-1}(x) = Z_{k-1}^* \end{cases} \quad (3.8)$$

La solution optimale du dernier problème (3.8) est efficace pour le problème (3.1).

### b) Méthode min-max

Elle utilise la norme de Tchebycheff (norme infinie) qui consiste à maximiser le plus grand écart entre  $Z(x)$  et un point de référence  $\bar{Z}$

$$\|Z(x) - \bar{Z}\|_\infty = \max_{k=1, \dots, p} \|Z_k(x) - \bar{Z}_k\|$$

Ainsi le problème (3.1) s'écrit sous la forme :

$$\min_{x \in S} \max_{k=1, p} |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \min \alpha \\ s.c \\ |Z_k(x) - \bar{Z}_k| \leq \alpha \\ x \in S, \quad \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

### **Théorème 3.2. Théorème de Bowman [9]**

1. Toute solution optimale de (3.9) est efficace pour (3.1).
2. Toute solution efficace pour (3.1) est optimale pour (3.9).

Plusieurs versions de la norme de Tchébycheff peuvent être considérées.

- **La norme de Tchebycheff pondérée**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1, \dots, p} \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

- **La norme augmentée de Tchebycheff**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1, \dots, p} |Z_k(x) - \bar{Z}_k| + \rho \sum_{k=1}^p |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

- **La norme augmentée et pondérée de Tchebycheff**

$$\min_{x \in S} \max_{k=1, \dots, p} \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k| + \rho \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z_k(x) - \bar{Z}_k|$$

$\rho > 0$  et très petit,  $\lambda_k > 0$ .

### **3.4.3 Méthodes heuristiques**

Pour certains problèmes multi-objectifs, l'ensemble des solutions Pareto optimales peut être très grand. C'est pour cela que les chercheurs recourent aux méthodes heuristiques pour donner une estimation de l'ensemble efficace. Nous ne parlerons pas de ces méthodes dans le cadre de ce mémoire. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Evans [17] et Teghem [42].

### **3.4.4 Méthodes interactives**

Une méthode interactive consiste en une série d'étapes de calcul et de dialogue avec le décideur. L'étape de calcul fournit une première solution. Celle-ci est présentée au décideur qui réagit en apportant des informations supplémentaires sur ses préférences (étape de dialogue). Cette information, une fois injectée dans le modèle utilisé, permet de construire une nouvelle solution.

Dans cette classe de méthodes, le décideur intervient dans chaque étape de résolution du problème donné. Les processus de calcul et de dialogue sont alternés.

Dans ce qui suit, nous donnerons les grandes lignes des méthodes interactives qui seront exploitées dans le prochain chapitre, à savoir, la méthode STEM de Benayoun [7,43], la méthode de Geoffrion-Deyer-Feinbergue [19] et la méthode de Nakayama [36].

### 1) Méthode STEM de Benayoun

Il s'agit d'une des premières méthodes de programmation linéaire multi-objectifs (proposée en 1971). Etant donné le problème (3.1), cette méthode repose sur les éléments suivants :

- Le point idéal  $M = (M_1, \dots, M_p)$
- La matrice des gains d'éléments  $z_{kj}$ ,  $k = 1, \dots, p$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
- Le point nadir  $m = (m_1, \dots, m_p)$ .
- L'estimation de l'intervalle de variation de  $Z_k$  sur l'ensemble des solutions efficaces  $[M_k, m_k]$
- Les coefficients de variation normalisés ou poids techniques.

$$\pi_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^p \alpha_k}$$

avec

$$\alpha_k = \frac{m_k - M_k}{|m_k|}$$

L'utilisation de la norme pondérée et augmentée de Tchebycheff permet de transformer le problème (3.1) au problème déterministe suivant :

$$\min_{x \in S} [\max_{k=1, \dots, p} (\pi_k(C_k x - \bar{Z}_k) + \rho \sum_{k=1}^p \pi_k(C_k x - \bar{Z}_k))]$$

En vertu de la technique "big M" [15], ce dernier problème s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \min M\delta - \sum_{k=1}^p \xi_k \\ \pi_k(C_k x - \bar{Z}_k) \leq \delta - \xi_k \\ x \in S \\ \delta \geq 0, \quad \xi_k \geq 0 \end{cases}$$

Une description complète et détaillée de cette méthode est donnée dans [43].

## 2) Méthode de Geoffrion, Deyer et Feinberg(GDF)

Cette méthode est basée sur la minimisation d'une fonction d'utilité définie de manière implicite par le décideur (voir [19]).

A chaque itération, une approximation linéaire de la fonction d'utilité est générée et minimisée. La minimisation se fait par la méthode du gradient. Le problème à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \min U(x) = U(Z_1(x), \dots, Z_k(x)) \\ s.c \ x \in S \end{cases} \quad (3.10)$$

L'idée principale de cette méthode est la suivante :

Soit  $x^h \in S$  un point réalisable, alors au lieu de la fonction d'utilité  $U$  nous optimisons son approximation au point  $x^h$ , si la solution est  $y^h$ , alors  $d^h = y^h - x^h$  est une bonne direction dans laquelle on cherche une amélioration de la fonction objectif  $U$ .

En tout point réalisable  $x^h$ , l'approximation linéaire est :  
 $y \rightarrow U(y)$  et  $U(x^h) + \nabla_x U(x^h)^t (y - x^h)$

Après la minimisation de l'approximation linéaire, le problème (3.10) devient :

$$\min \sum_{k=1}^p -l_k^h \nabla_x Z_k(x^h)^t y \quad (3.11)$$

Avec

$$l_k = (dU(Z(x^k))/dZ_k)/(dU(Z(x^k))/dZ_p)$$

où  $l_k$  est le taux de substitution marginal de  $Z_k$  et  $Z_p$ .

## 3) Méthode de Nakayama [36]

Cette méthode utilise la norme infinie et un niveau d'aspiration  $r$  donné par le décideur à chaque itération.

Le problème à résoudre est le suivant :

$$\min_{x \in S} \max_{1 \leq k \leq p} \lambda_k |r_k - Z_k(x)| \quad (3.12)$$

Où  $\lambda_k = \frac{1}{r - M_k}$  est le poids affecté au k-ième objectif,  $M$  est le point idéal et  $S$  est la région réalisable.

Après avoir obtenu la solution du problème (3.12), nous la présentons au décideur. Ce dernier classe les fonctions objectifs en trois classes :

- (1) la classe des objectifs qu'il désire améliorer.
- (2) la classe des objectifs qu'il accepte de relaxer.
- (3) la classe des objectifs qu'il ne souhaite pas changer.

Le nouveau niveau d'aspiration pour les fonctions objectifs de la classe 1 et 2 sera donné par le décideur. Pour la classe 3, nous gardons le niveau d'aspiration précédent.

### **3.5 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons donné une vue panoramique des principales méthodes de résolution des problèmes linéaires multi-objectifs. Certaines d'entre elles, peuvent être utilisées ou combinées avec d'autres méthodes pour résoudre des problèmes non linéaires multi-objectifs.

# Chapitre 4

## Etat de l'art de la programmation linéaire multi-objectifs stochastique

### 4.1 Introduction

Un problème linéaire multi-objectifs stochastique se définit comme suit :

$$\min_{x \in S(\omega)} (Z_1(x, \omega), Z_2(x, \omega), \dots, Z_p(x, \omega)) \quad (4.1)$$

Où  $S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n / A(\omega)x \leq b(\omega), x \geq 0\}$  et  $Z_k(x, \omega) = C_k^t(\omega)x$   
 $A(\omega) = (a_{ij}(\omega)), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  est une matrice aléatoire.  
 $b(\omega) = (b_i(\omega)), 1 \leq i \leq m$  et  $C_k(\omega), 1 \leq k \leq p$  sont des vecteurs aléatoires.  
Les variables aléatoires sont définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$   
et leurs distributions sont supposées connues.

Une grande partie des travaux réalisés dans ce domaine est consacrée à l'étude des différents concepts d'efficacité. D'après Stancu-Minasian [39], les méthodes de résolution des problèmes multi-objectifs stochastiques passent par deux transformations qui ne peuvent être considérées simultanément. La première, transforme le problème multi-objectifs stochastique en un problème multi-objectifs déterministe. La deuxième ramène le problème multi-objectifs stochastique à un problème stochastique à un seul objectif.

Ben Abdelaziz [4] et Ben Abdelaziz et al. [5, 6] qualifient ces deux transformations d'approche multicritère et d'approche stochastique. Ces deux approches sont résumées dans les figures 4.1 et 4.2.

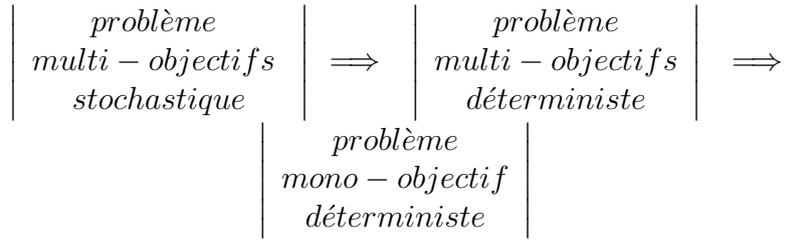


Fig. 4.1. Obtention des solutions efficaces dans l'approche multicritère.

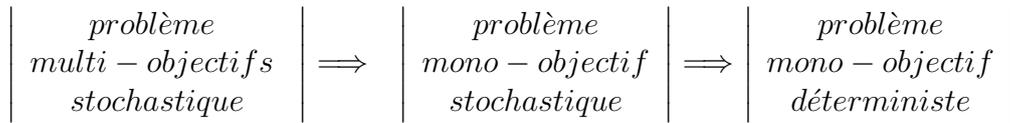


Fig. 4.2. Obtention des solutions efficaces dans l'approche stochastique.

Dans les paragraphes qui suivent, nous analysons et nous comparons ces deux approches dans le cas où les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires continues. Pour ce faire, nous considérons que l'ensemble  $S$  est déterministe ou qu'il a été transformé en équivalent déterministe en utilisant le modèle avec seuils de probabilité sur les contraintes ou le modèle avec recours vu dans chapitre 2.

## 4.2 Approche multicritère

Dans cette approche, les objectifs stochastiques sont transformés en leurs équivalents déterministes en utilisant l'un des critères de la programmation linéaire stochastique mono-objectif (E-modèle, V-modèle, E.V-modèle, K-modèle et le P-modèle). A partir de là, un concept d'efficacité est défini pour chaque critère.

**Définition 4.1.** (efficacité au sens de l'espérance mathématique, White [46])  $x \in S$  est une solution efficace au sens de l'espérance mathématique pour (4.1) si elle est Pareto efficace pour le problème multi-objectifs

$$\min_{x \in S} (\bar{C}_1^t x, \bar{C}_2^t x, \dots, \bar{C}_p^t x) \tag{4.2}$$

Où  $\bar{C}_k$  est l'espérance mathématique du vecteur aléatoire  $\bar{C}_k(\omega)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

L'utilisation de la variance donne lieu au concept suivant :

**Définition 4.2.** (efficacité au sens de la variance, White [46])

$x \in S$  est une solution efficace de variance minimale pour (4.1) si elle est Pareto efficace pour le problème multi-objectifs

$$\min_{x \in S} (\sigma_1^2(x), \sigma_2^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)) \quad (4.3)$$

Où  $\sigma_k^2(x)$  est la variance du k-ième objectif,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

**Définition 4.3.** (efficacité au sens de l'espérance-variance)

$x \in S$  est une solution espérance-variance efficace pour (4.1) si elle est Pareto efficace pour le problème multiobjectif

$$\begin{cases} \min_{x \in S} (\bar{C}_1^t x, \bar{C}_2^t x, \dots, \bar{C}_p^t x) \\ \min_{x \in S} (\sigma_1^2(x), \sigma_2^2(x), \dots, \sigma_p^2(x)) \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans le cas où les  $C_k(\omega)$  sont des variables aléatoires normales, les problèmes (4.3) et (4.4) sont des problèmes multi-objectifs quadratiques.

Pour appliquer le critère de risque minimum au problème (4.1), le décideur doit fixer un niveau d'aspiration  $u_k$  pour chaque objectif stochastique et trouver le vecteur de décision  $x$  pour lequel la probabilité que le k-ième objectif ne dépasse pas le seuil  $u_k$  soit maximum. Dans ce cas, nous définissons le concept d'efficacité suivant :

**Définition 4.4.** (Risque minimum-efficacité, Stancu-Minasian et Tigan [38])

$x \in S$  est une solution efficace de risque minimum et de seuils  $u_1, \dots, u_p$  pour (3.1) si elle est Pareto efficace pour le problème

$$\max_{x \in S} (P(C_1^t(\omega)x \leq u_1), \dots, P(C_p^t(\omega)x \leq u_p)) \quad (4.5)$$

Pour résoudre ce problème, Stancu Minasian [39] propose une méthode séquentielle sous les hypothèses suivantes :

- $\bar{C}_k^t x < \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$
- $u_k > T_k = \min_{x \in S} \bar{C}_k^t x$
- $0$  n'appartient pas à  $S$

Le décideur ordonne les objectifs par ordre d'importance croissante et résout le problème

$$\max_{x \in S_0} P(C_1^t(\omega)x \leq u_1)$$

Avec  $S_0 = S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$ .

En tenant compte de sa valeur optimale  $p_1$ , il résout

$$\max_{x \in S_1} P(C_2^t(\omega)x \leq u_2)$$

Avec  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | P(C_1^t(\omega)x \leq u_1) \geq p_1 - \varepsilon_1\}$ ,  $\varepsilon_1 > 0$

Soit  $p_2$  sa valeur optimale.

La solution finale est donnée par le problème :

$$\max_{x \in S_{p-1}} P(C_p^t(\omega)x \leq u_p)$$

avec  $S_{p-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \in S_{p-2}, P(C_{p-1}^t(\omega)x \leq u_{p-1}) \geq p_{p-1} - \varepsilon_{p-1}\}$  et  $\varepsilon_{p-1} > 0$

Enfin, le dernier critère que nous pouvons appliquer au problème (4.1) est celui de Kataoka.

**Définition 4.5.** (solution efficace avec probabilités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ )

$x \in S$  est une solution efficace avec probabilités  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  ou  $\alpha$ -efficace pour le problème (4.1) s'il existe  $u \in \mathbb{R}^p$  tel que  $(x, u)$  soit Pareto efficace pour le problème

$$\begin{cases} \min_{x, u} (u_1, u_2, \dots, u_p) \\ s.c. P(C_k^t(\omega)x \leq u_k) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, p \\ x \in S \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans tous les cas, il faut remarquer que toutes ces définitions sont associées au même problème multi-objectifs stochastique - soit le problème (4.1). Une des principales préoccupations des chercheurs est d'établir des relations entre les différents concepts d'efficacité. Certaines de ces relations sont présentées par Caballero et al. dans [10]. Elles se rapportent spécialement au concept d'efficacité au sens du risque minimum et à l'efficacité avec seuils de probabilités comme le montrent le théorème et le corollaire suivant :

**Théorème 4.1.** (Caballero et al. [10]) *Si la fonction de distribution de la variable aléatoire  $C_k(\omega)$  est continue et strictement croissante alors,  $x \in S$  est une solution efficace pour le problème (4.5) si et seulement si  $(x, u)$  est une solution efficace du problème (4.6) avec  $u$  et  $\alpha$  tels que*

$$P(C_k^t(\omega)x \leq u_k) = \alpha_k, \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

**Corollaire 4.1.** (Caballero et al. [10]) Soit  $E_{MR}(u)$  respectivement  $E_K(\alpha)$  l'ensemble des solutions efficaces du problème (4.5) respectivement (4.6) alors,

$$\bigcup_{u \in \mathbb{R}^p} E_{MR}(u) = \bigcup_{\alpha \in B} E_K(\alpha)$$

avec  $B = \{\alpha \in \mathbb{R}^p \mid \alpha_k \in (0, 1), k = 1, \dots, p\}$

## 4.3 Approche stochastique

Cette approche consiste à appliquer l'une des techniques d'obtention des solutions efficaces de la programmation linéaire multi-objectifs déterministe qui conduisent généralement à la résolution d'un programme mono-objectif. La technique la plus utilisée est la somme pondérée.

### 4.3.1 Somme pondérée

Le problème stochastique associé au problème (4.1) par cette technique est :

$$\min_{x \in S} Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega) x \quad (4.7)$$

où les  $\lambda_k$  sont des poids affectés aux objectifs tels que :  
 $\lambda_k \geq 0$  et  $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$ .

L'application des critères (Espérance, Variance, Espérance-Variance, Risque minimum et Kataoka) conduit à de différents programmes déterministes dont les solutions optimales sont efficaces pour (4.1).

Il s'agit, maintenant, de répondre à la question suivante : est-ce qu'une solution efficace pour l'une des deux approches est efficace pour l'autre approche ? Nous répondrons à cette question dans le paragraphe qui suit.

## 4.4 Comparaison des deux approches

Pour répondre à la question posée, nous résolvons le problème (4.7) avec les critères cités ci-dessus. Dans chaque cas, nous comparons les solutions efficaces obtenues par l'approche stochastique avec celles obtenues par l'approche multicritère.

### 4.4.1 Critère espérance

L'application du critère espérance au problème (4.7) nous donne

$$\min_{x \in S} \bar{Z}(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t x \quad (4.8)$$

La relation qui existe entre (4.8) et (4.2) est la même que celle qui existe entre n'importe quel problème multi-objectifs avec son problème associé (avec des poids)(voir théorème de Geoffrion au chapitre 3).

### 4.4.2 Critère variance

Etant donné que la variable aléatoire  $Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x$  est une combinaison linéaire des variables aléatoires  $Z_k(x, \omega)$  pour  $k=1, \dots, p$ , sa variance dépend des variances des variables  $Z_k(x, \omega)$  ainsi que de leurs covariances (voir par exemple, Hogg et Graig [23]). Dans ce cas,

$$\sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \sigma_k^2(x) + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s \sigma_{ks}(x)$$

Où  $\sigma_{ks}(x)$  est la covariance des variables  $Z_k(x, \omega)$  et  $Z_s(x, \omega)$ . L'application du critère de la variance conduit donc au problème

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \sigma_k^2(x) + 2 \sum_{k,s=1, k < s}^p \lambda_k \lambda_s \sigma_{ks}(x) \quad (4.9)$$

Si les covariances des fonctions objectifs sont nulles, autrement dit si  $\sigma_{ks}(x) = 0, \forall k, s \in \{1, \dots, p\}, k \neq s$  et  $\forall x \in S$  alors

$$\min_{x \in S} \sigma^2(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \sigma_k^2(x)$$

### 4.4.3 Critère de risque minimum

Le problème déterministe généré par le critère de risque minimum appliqué au problème (4.7) est

$$\max_{x \in S} P\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x \leq u\right)$$

Le niveau d'aspiration  $u$  est fixé pour la fonction  $\sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x$  qui n'est pas un objectif du problème d'origine. Pour que le critère de risque minimum soit correctement appliqué à la somme pondérée, il faut que  $u$  soit une combinaison linéaire des niveaux d'aspiration fixés pour les objectifs  $Z_k(x, \omega)$ , autrement dit,

$$u = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

Ainsi, nous obtenons le problème suivant :

$$\max_{x \in S} P\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k\right) \quad (4.10)$$

#### 4.4.4 Critère de type Kataoka

De même que pour le problème de risque minimum, l'application du critère de Kataoka à la somme pondérée n'est possible que si la probabilité  $\alpha \in (0, 1)$  pour laquelle la fonction  $Z(x, \omega) = \sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x$  ne dépasse pas le seuil

$u$  est donné par  $\alpha = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k$ , où les  $\alpha_k$  sont les probabilités fixées pour les objectifs  $Z_k(x, \omega)$ . (Les poids  $\lambda_k$  doivent être normalisés). Il en résulte le problème déterministe suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in S} u \\ s.c. P\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t(\omega)x \leq u\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \alpha_k \end{cases} \quad (4.11)$$

Pour ces deux derniers critères, il est impossible d'établir une quelconque relation entre les solutions obtenues par les deux approches sans tenir compte de la nature des variables aléatoires  $C_k(x, \omega)$ .

Nous allons focaliser sur le cas où  $C_k(x, \omega)$  dépend linéairement d'une variable aléatoire  $t(\omega)$  :  $C_k(x, \omega) = C_k^t + t(\omega)d_t^k$  et le cas où  $C_k(x, \omega)$  suit une loi normale.

- **Cas où**  $C_k(x, \omega) = C_k^t + t(\omega)d_t^k$

Supposons que  $t(\omega)$  est une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle  $[\delta_1, \delta_2]$ ,  $\delta_i < \infty$ , de moyenne  $\bar{t}$ , de variance  $V_t^2$  et de distribution  $F_t$  strictement croissante. Supposons aussi que  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$  et

$\forall x \in D, d_k^t > 0.$

Si ces conditions sont satisfaites, les solutions efficaces dans le cas de l'approche multicritère et du critère de type kataoka sont données par :

$$\min_{x \in S} (C_1^t x + F_t^{-1}(\beta_1) d_1^t x, \dots, C_p^t x + F_t^{-1}(\beta_p) d_p^t x) \quad (4.12)$$

Ce critère appliqué à la somme pondérée (approche stochastique) nous donne

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k C_k^t x + \sum_{k=1}^p \lambda_k F_t^{-1}(\beta_k) d_k^t x \quad (4.13)$$

Nous remarquons que si nous pondérons les objectifs du problème (4.12) nous obtenons le problème (4.13). Nous concluons donc que la relation entre les solutions des problèmes (4.12) et (4.13) est donnée par le théorème de Geoffrion du chapitre 3.

#### • Cas des variables aléatoires normales

Si  $C(\omega) = (C_1(\omega), C_2(\omega), \dots, C_p(\omega))$  est un vecteur aléatoire multinormal d'espérance  $\bar{C} = (\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_p)$  et de matrice de covariance

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 & V_{12} & \dots & V_{1s} & \dots & V_{1p} \\ V_{21} & V_2 & \dots & V_{2s} & \dots & V_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{k1} & V_{k2} & \dots & V_{ks} & \dots & V_{kp} \\ V_{p1} & V_{p2} & \dots & V_{ps} & \dots & V_p \end{pmatrix}$$

Le critère de Kataoka donne le problème suivant :

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k^t x + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{k,s=1}^p \lambda_k \lambda_s x^t V_{ks} x}$$

Ou bien

$$\min_{x \in S} \sum_{k=1}^p \lambda_k \bar{C}_k(x) + \beta \sigma(x) \quad (4.14)$$

avec  $\beta = \Phi^{-1}(\alpha)$  et

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^p \lambda_k^2 x^t V_k x + 2 \sum_{k,s=1}^p \lambda_k \lambda_s x^t V_{ks} x}$$

**Remarque 4.1.** Pour avoir une relation entre les solutions du problème de la somme pondérée et les solutions des problèmes données par les critères de variance minimum et KATAOKA, il est nécessaire que les covariances des objectifs soient nulles, c'est à dire que les variables aléatoires soient indépendantes. Nous concluons donc, que dans le cas où existe une dépendance entre les objectifs, ce qui est souvent le cas dans les problèmes pratiques, l'approche stochastique est plus appropriée que l'approche multicritère pour la résolution des problèmes multi-objectifs stochastiques.

## 4.5 Méthodes de résolution

Comme nous pouvons facilement le constater, un problème déterministe qui résulte du problème stochastique (4.1) est soit multi-objectifs linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche multicritère soit mono-objectif linéaire ou non linéaire, s'il s'agit de l'approche stochastique.

Dans les deux cas, toutes les méthodes connues de l'optimisation mono-objectif ou multi-objectifs peuvent être exploitées pour générer l'ensemble complet ou partiel des solutions efficaces du problème (4.1). Il est donc impossible de les décrire toutes ici, mais nous en avons cité quelques unes au chapitre précédent. Cependant, nous exposerons, ci-dessous, quelques méthodes particulières dites interactives qui se caractérisent par une série d'étapes de calcul et de dialogue avec le décideur donc qui répondent mieux à ses préférences.

### 4.5.1 Méthodes interactives

- **Méthode PROTRADE**

La Méthode PROTRADE (Probabilistic Trade-off Development Method) a été établie par Goicoechea Dukstein et Bulfin [20]. Inspirée du modèle STEM de Benayoun [7], elle s'applique aux problèmes ayant des objectifs stochastiques et contraintes non linéaires. Cependant, son utilisation pour la résolution des problèmes pratiques est très difficile, car elle nécessite l'introduction d'une fonction d'utilité. Son champ d'application est donc très limité.

- **Méthode de STRANGE**

La méthode STRANGE (STRategy for Nuclear Generation of Electricity) décrite dans [41] a été développée par Teghem, Dufrane, Thauvoys et Kunsch

dans le but de résoudre des applications concrètes de planification d'investissements soumises par la société Belge d'ingénierie dans le domaine énergétique. Pour plus de détails sur ces applications, le lecteur peut consulter les documents suivants : Teghem et Kunsch [40], Kunsch et Teghem [31], Kunsch [32].

Le problème considéré dans [41] est le suivant :

$$\begin{cases} \min Z_k(x) = C_k x, & k = 1, \dots, p \\ x \in S = \{x | Ax \leq b, x \geq 0\} \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $x$  et  $C_k^t$  sont des vecteurs de  $R^n$ ,  $A$  est une matrice ( $m \times n$ ) et  $b$  est un vecteur de  $R^m$ . De plus  $C_k$  et  $(A, b)$  sont des variables aléatoires discrètes. Chaque objectif  $Z_k$  dépend d'un ensemble de scénarios  $s_k$ ,  $s_k = 1, \dots, S^k$  tels que :

$$P(C_k = C_{ks_k}) = p_{ks_k} ; \quad \sum_{s_k=1}^{S^k} p_{ks_k} = 1$$

de même, soient  $(A_r, b_r)$ ;  $r = 1, \dots, R$  les diverses réalisations envisagées pour les coefficients de  $(A, b)$  et  $q_r$  les probabilités subjectives leur correspondant

$$P(A = A_r, b = b_r) = q_r ; \quad \sum_{r=1}^R q_r = 1$$

### Le problème déterministe associé

Chaque objectif est démultiplié pour chaque scénario de façon à obtenir  $\sum_{k=1}^p S^k$  nouveaux objectifs tels que :

$$Z_{ks_k} = C_{ks_k} x; \quad k = 1, \dots, p, \quad s_k = 1, \dots, S^k$$

Un recours simple est ensuite introduit dans les contraintes de telle sorte que :

$$A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r; \quad r = 1, \dots, R$$

Ainsi, l'incertitude au niveau des contraintes se mesure à l'aide d'une fonction de pénalité représentée par l'objectif supplémentaire

$$Z_{p+1} = \sum_{r=1}^R q_r \beta^{(r)} y^{(r)-}$$

où  $\beta^{(r)}$  est un vecteur  $(1 \times m)$  de pénalités éventuelles, permettant de discriminer différemment les violations des contraintes pour chaque réalisation  $r$ . Ainsi le problème déterministe associé s'écrit :

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) = C_{ks_k}x, & k = 1, \dots, p, \quad s_k = 1, \dots, S^k \\ \text{s.c. } (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^0 \end{cases}$$

où  $S^0$  est défini par

$$S^0 = \{(x, y^{(r)+}, y^{(r)-}), r = 1, \dots, R \mid Ax + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r; \quad x \geq 0, y^{(r)+} \geq 0, y^{(r)-} \geq 0\}$$

### Détermination du premier compromis

Pour chaque objectif  $Z_{ks_k}$ ,  $k = 1, \dots, p + 1$ ,  $s_k = 1, \dots, S^k$  et pour chaque scénario  $r$ ,  $r = 1, \dots, R$ , le problème mono-objectif suivant est résolu :

$$\begin{cases} \min Z_{ks_k}(x) \\ A_r x + y^{(r)+} - y^{(r)-} = b_r \\ x \geq 0, \quad y^{(r)+} \geq 0, \quad y^{(r)-} \geq 0 \end{cases}$$

Soit  $\tilde{x}_{ks_k}$  une solution optimale de ce problème, c'est-à-dire

$$Z_{ks_k}(\tilde{x}_{ks_k}) = \min_{r \in \{1, \dots, R\}} Z_{ks_k}(x_{ks_k}^{(r)})$$

D'une manière similaire à la méthode STEM, nous associons aux objectifs des poids techniques

$$\pi_{ks_k} = \frac{\alpha_{ks_k}}{p+1 \sum_{s_k=1}^{S_k} \alpha_{ks_k}}$$

avec

$$\alpha_{ks_k} = \frac{m_{ks_k} - M_{ks_k}}{|m_{ks_k}|}$$

où  $M_{ks_k}$  et  $m_{ks_k}$  sont les composantes du point idéal et du point nadir respectivement.

Le premier compromis est donné par la résolution du problème mono-objectif

$$\begin{cases} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \xi_k, & k = 1, \dots, p + 1 \\ \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{ks_k} (C_{ks_k}x - M_{ks_k}) \pi_{ks_k} \leq \delta - \xi_k \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^0, \quad \xi_k \geq 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

## Phase interactive

Pour chaque compromis  $\tilde{x}^{(m)}$ , le décideur reçoit trois types d'informations :

1) La principale information est relative à la valeur de chaque objectif  $Z_{ks_k}$  au point  $\tilde{x}^{(m)}$ , c'est-à-dire

$$Z_{ks_k}^{(m)} = Z_{ks_k}(\tilde{x}^{(m)}), \quad k = 1, \dots, p+1, \quad s_k = 1, \dots, S^k$$

2) Ensuite, le décideur peut être intéressé par la "valeur moyenne" pour chaque objectif

$$\bar{Z}_k^{(m)} = \sum_{s_k}^{S_k} p_{ks_k} Z_{ks_k}^{(m)}$$

3) Enfin, afin de fournir une mesure simple de la variation de la fonction objectif, cette information peut éventuellement être complétée par un "niveau de confiance"  $1 - \alpha_k^m$  avec

$$\alpha_k^m = P(C_k x > \bar{Z}_k^{(m)}) = \sum_{s_k | Z_{ks_k}^{(m)} > \bar{Z}_k^{(m)}} p_{ks_k}$$

Cette dernière information n'apparaît toute fois utile que si le nombre de scénarios  $S_k$  est suffisamment grand.

Après avoir reçu ses informations, le décideur doit indiquer s'il juge le compromis satisfaisant ou s'il désire tenter de déterminer un compromis qui l'est d'avantage.

Dans le second cas, il doit désigner un objectif  $Z_{(ks_k)^*}$  pour lequel il accepte une détérioration, donc une augmentation de la valeur  $Z_{(ks_k)^*}^{(m)}$ . Dans la mesure du possible, il lui est également demandé de fixer une borne supérieure  $\Delta_{(ks_k)^*}$  de la valeur  $Z_{(ks_k)^*}^{(m+1)}$  de sorte que cette valeur sera comprise dans l'intervalle  $[Z_{(ks_k)^*}^{(m)}, \Delta_{(ks_k)^*}]$

## Phase de calcul

Celle-ci consiste en une analyse paramétrique qui explore de manière complète la voie indiquée par le décideur.

On pose :

$$\begin{aligned} M_{(ks_k)^*} + \underline{\lambda}(m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) &= Z_{(ks_k)^*}^{(m)} \\ M_{(ks_k)^*} + \bar{\lambda}(m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) &= \Delta_{(ks_k)^*} \end{aligned}$$

les valeurs possibles de  $Z_{(ks_k)^*}^{(m+1)}$  qui correspondent aux valeurs  $\lambda = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  du paramètre  $\lambda$ . D'où le problème linéaire mono-objectif paramétrique qui suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min M\delta - \sum_{k=1}^{p+1} \xi_k, \quad k = 1, \dots, p+1 \\ \sum_{s_k=1}^{S_k} p_{ks_k} (C_{ks_k}x - M_{ks_k})\pi_{ks_k} \leq \delta - \xi_k \\ C_{(ks_k)^*}x = M_{(ks_k)^*} + \lambda(m_{(ks_k)^*} - M_{(ks_k)^*}) \\ \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda} \\ (x, y^{(r)+}, y^{(r)-}) \in S^{(m)}, \quad \xi_k \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

tel que  $S^{(m)} = S^{(m-1)} \cap \{x | Z_{(ks_k)^*}(x) \leq Z_{(ks_k)^*}(\tilde{x}^{(m)})\}$

### • Méthode de Bellahcene

Dans [3] Bellahcene propose d'appliquer la méthode de Nakayama [36] au problème de Kataoka multi-objectifs. Le modèle considéré est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x \in S} (u_1, u_2, \dots, u_p) \\ s.c \ P(C_k^t x \geq u_k) = \beta_k, \quad k = 1, \dots, p \\ P(A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Où  $C_k(\omega)$  est un vecteur aléatoire normal de moyenne  $\bar{C}_k$  et de matrice de covariance  $D_k$ ;  $(A_i, b_i)$  est un vecteur aléatoire multinormal de moyenne  $\mu_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  et de matrice de covariance  $V_i$ .

Compte tenu du chapitre 1, le programme (4.18) peut s'exprimer sous la forme d'un problème multi-objectifs non linéaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \max u_k(x) = \bar{C}_k x - \Phi^{-1}(\beta_k) \sqrt{x^t D_k x}, \quad k = 1, \dots, p \\ s.c \ x \in S(\alpha_i), \quad i = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Où  $S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R}^n | m_i(x) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\sigma_i(x) \leq 0, \quad x \geq 0\}$

avec  $m_i(x) = \sum_{j=1}^n \mu_i x_j - \mu_{i,n+1}$ ,  $\sigma_i(x) = \sqrt{Z^t V_i Z}$  et  $Z = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)$ .

Les fonctions  $u_k(x) = \bar{C}_k x - \Phi^{-1}(\beta_k) \sqrt{x^t D_k x}$  sont concaves lorsque  $\Phi^{-1}(\beta_k) \geq 0$ , autrement dit lorsque  $\beta_k \geq \frac{1}{2}$ .

L'auteur suppose que la meilleure solution de compromis est la solution la plus proche (suivant la norme  $\infty$ ) du point idéal  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*)^t$  où  $u_k^*$  est défini par  $u_k^* = \max\{u_k(x) | x \in S(\alpha_i)\}$ .

D'autre part, un point de référence  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p)^t$  tel que  $\bar{u}_k < u_k^*$  est supposé donné par le décideur. Le problème à résoudre est :

$$\min_{x \in S(\alpha_i)} \max_{1 \leq k \leq p} \lambda_k (u_k^* - u_k(x))$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{cases} \min h \\ \text{s.c. } \lambda_k (u_k^* - u_k(x)) \leq h, \quad k = 1, \dots, p \\ x \in S(\alpha_i) \end{cases} \quad (4.20)$$

Les poids  $\lambda_k$  sont définis par  $\lambda_k = \frac{1}{u_k^* - \bar{u}_k}$ ,  $k = 1, \dots, p$ .

### Algorithme

#### Etape 1

- Demander au décideur de fixer les seuils  $\alpha_i, i = 1, \dots, m$  et  $\beta_k, k = 1, \dots, p$
- Construire les objectifs et les contraintes déterministes à partir des fonctions de distribution des paramètres aléatoires.
- Calculer le point idéal  $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*)^t$  où  $u_k^*$  est donné par

$$u_k^* = \max\{u_k(x) | x \in S(\alpha_i)\}$$

Cette valeur sera fixée tout au long du processus de résolution.

#### Etape 2 $\forall r, r \geq 1$

Demander au décideur de fixer un point de référence  $\bar{u}^{(r)}$  tel que  $\bar{u}_k^{(r)} \leq u_k^*$ .  
Poser  $r=1$

#### Etape 3

Calculer les poids  $\lambda_k^{(r)} = \frac{1}{u_k^* - \bar{u}_k^{(r)}}$ ,  $k = 1, \dots, p$  et résoudre le problème (4.20). Soit  $x^{(r)}$  la solution de compromis obtenue.

#### Etape 4

Compte tenu des valeurs  $u_k(x^{(r)})$ ,  $k = 1, \dots, p$  des fonctions objectifs  $u_k$  au point  $x^{(r)}$ , le décideur détermine trois classes d'objectifs :

- (i) la classe des objectifs qu'il désire améliorer.
- (ii) la classe des objectifs qu'il accepte de relaxer.
- (iii) la classe des objectifs qu'il ne souhaite pas changer.

Ces classes sont représentées par les ensembles  $I_A^{(r)}, I_R^{(r)}, I_C^{(r)}$ , respectivement. Si  $I_A^{(r)} = \emptyset$ , la procédure s'arrête. Sinon, le décideur doit fixer un autre niveau d'aspiration  $\bar{u}^{(r)}$  pour les classes  $I_R^{(r)}$  et  $I_C^{(r)}$ .

Pour  $k \in I_A^{(r)}$ , poser  $\bar{u}_k^{(r)} = u_k(x^{(r)})$  et aller à l'étape 3.

### 4.5.2 Exemple numérique

Soit le problème suivant donné dans  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \max Z_1(x) = C_1(\omega)x \\ \max Z_2(x) = C_2(\omega)x \\ s.c \\ A_i(\omega)x \leq b_i(\omega) ; \quad i = 1, 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où  $C_1(\omega)$  et  $C_2(\omega)$  sont des vecteurs aléatoires normalement distribués de moyennes  $\bar{C}_1 = (8, 4)^t$  et  $\bar{C}_2 = (12, 5)^t$  et de matrices de covariances

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $(A_i, b_i)$ ,  $i = 1, 2$  sont multinormaux de moyennes respectives  $m_1(x) = 2x_2 - 8$  et  $m_2(x) = x_1 - 10$  et de matrices de covariances

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

#### Etape 1

Si les seuils de probabilité fixés par le décideur sont tels que

$$\alpha_1 = 0.933, \quad \alpha_2 = 0.936$$

$$\beta_1 = 0.841, \quad \beta_2 = 0.998.$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_1) = 2.5, \quad \Phi^{-1}(\alpha_2) = 2.7.$$

$$\Phi^{-1}(\beta_1) = 1, \quad \Phi^{-1}(\beta_2) = 2.9.$$

Le problème multi-objectifs déterministe équivalent au problème donné est :

$$\begin{cases} \max u_1(x) = 8x_1 + 4x_2 - \sqrt{0.5x_1^2 + 0.16x_2^2 + 2x_1x_2} \\ \max u_2(x) = 12x_1 + 5x_2 - 2.9\sqrt{3x_1^2 + x_2^2} \\ s.c \\ 2x_2 - 8 + 2.5\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + 1} \leq 0 \\ x_1 - 10 + 2.7\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 3} \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit  $(u_1^*, u_2^*) = (15.268, 12.302)$  le point idéal obtenu.

### Etape 2

Soit  $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)}) = (10.105, 11.216)$  un point de référence fixé par le décideur.

### Etape 3

$$\lambda_1 = 0.193, \lambda_2 = 0.920$$

La résolution du problème min-max avec les poids ci-dessus nous donne la première solution de compromis  $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) = (14.187, 15.984)$

### Etape 4

Supposons que le décideur veuille améliorer la valeur du deuxième objectif ( $I_A^{(1)} = \{2\}$ ). Dans ce cas, il doit donner un nouveau point de référence lui permettant de calculer de nouveaux poids et trouver ainsi une autre solution.

## 4.6 Conclusion

Il est important de noter que la structure du problème déterministe équivalent associé à un problème multi-objectifs stochastique dépend de l'information disponible sur les variables aléatoires. Si le modèle mathématique existe déjà, la littérature fournira des méthodes de résolution. A l'inverse, un problème qui ne semble pas avoir été déjà identifié nécessitera le développement de méthodes spécifiques.

# Chapitre 5

## Approche floue du problème de risque minimal multi-objectifs

Notre but, dans ce chapitre, est de résoudre le problème de risque minimal multi-objectifs par la méthode de bisection décrite dans [22]. Pour ce faire, nous transformerons le problème en question en un problème non linéaire en utilisant une approche floue. Ce dernier sera ensuite approximé par un problème linéaire auquel nous appliquerons la méthode décrite dans [22].

### 5.1 Transformation du problème

Soit le problème de risque minimal multi-objectifs suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max P[C_1(\omega)x \geq f_1] \\ \max P[C_2(\omega)x \geq f_2] \\ \vdots \\ \max P[C_p(\omega)x \geq f_p] \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

où  $A = (a_{ij})$  est une matrice  $m \times n$ ;  $b = (b_i)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ , les  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$  sont des réels positifs et enfin,  $x$  et  $C_k$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

Compte tenu du chapitre 2, les objectifs peuvent s'écrire sous la forme :

$$P[C_k^t x \geq f_k] = P\left[\frac{C_k^t x - \bar{C}_k x}{\sqrt{x^t V_k x}} \geq \frac{f_k - \bar{C}_k x}{\sqrt{x^t V_k x}}\right] = \Phi\left(\frac{\bar{C}_k x - f_k}{\sqrt{x^t V_k x}}\right)$$

Soit  $\mu_k(Z_k)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  la fonction d'appartenance de

$$Z_k = \Phi\left(\frac{\overline{C}_k^t x - f_k}{\sqrt{x^t \mathbf{V}_k x}}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_k(Z_k) &= \begin{cases} 1 & Z_k \geq p_{k1} \\ g_k(Z_k) & p_{k0} \leq Z_k \leq p_{k1}, \\ 0 & Z_k \leq p_{k0} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, p \\ &= \begin{cases} 1 & Z_k \geq p_{k1} \\ \frac{Z_k - p_{k0}}{p_{k1} - p_{k0}} & p_{k0} \leq Z_k \leq p_{k1}, \\ 0 & Z_k \leq p_{k0} \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

où chaque  $g_k$  est une fonction croissante de  $Z_k$  sur l'intervalle  $[p_{k0}, p_{k1}]$ . Les valeurs de  $p_{k0}$  et  $p_{k1}$  sont fixées à l'avance par le décideur.

En utilisant cette fonction d'appartenance, le problème (5.1) se ramène à un problème maxmin :

$$\begin{cases} \max \min \mu_k(Z_k), & k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.c. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Puis se réduit à la forme suivante :

$$\begin{cases} \max h \\ \text{s.c. } \mu_k(Z_k) \geq h, & k = 1, 2, \dots, p \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

on a :

$$\begin{aligned} \mu_k(Z_k) \geq h &\Leftrightarrow g_k(Z_k) \geq h \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\overline{C}_k x - f_k}{\sqrt{x^t \mathbf{V}_k x}}\right) \geq g_k^{-1}(h) \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{C}_k x - f_k}{\sqrt{x^t \mathbf{V}_k x}} \geq \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \\ &\Leftrightarrow \overline{C}_k x - f_k \geq \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sqrt{x^t \mathbf{V}_k x} \\ &\Leftrightarrow f_k - \overline{C}_k x + \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sqrt{x^t \mathbf{V}_k x} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ainsi (5.3) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \max h \\ \text{s.c. } f_k - \overline{C}_k x + \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sqrt{x^t \mathbf{V}_k x} \leq 0 \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Ce problème est convexe donc il admet une solution globale. Cependant, il est non linéaire car les contraintes contiennent une racine carrée. Alors, comme dans la plupart des méthodes de programmation non linéaire (voir [1]), il est nécessaire de le linéariser pour pouvoir le résoudre.

## 5.2 Construction d'une approximation du problème

Le problème (5.5) contient des matrices de variances covariances  $\mathbf{V}_k$ . Sachant que ces matrices sont symétriques définies positives (voir [23]), nous avons choisi de construire une approximation linéaire de (5.5) en utilisant les valeurs propres de ces dernières. Les résultats théoriques suivants tirés de [35] justifient bien notre choix.

**Théorème 5.1.** (35) *Si  $V$  est une matrice symétrique définie positive alors ses valeurs propres sont positives.*

**Proposition 5.1.** (35) *Si  $V$  est une matrice symétrique définie positive,  $\sigma_1$  et  $\sigma_n$  sa petite et sa plus grande valeur propre respectivement alors,*

$$\sigma_1 x^t x \leq x^t \mathbf{V} x \leq \sigma_n x^t x$$

D'autre part, étant donnés deux réels positifs  $a$  et  $b$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

Ainsi :

$$\sqrt{x^t \mathbf{V}_k x} \leq \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j$$

et

$$- \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq \sqrt{x^t \mathbf{V}_k x} \leq \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j$$

En multipliant par le terme positif  $\Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)]$  et en ajoutant le terme linéaire  $f_k - \bar{C}^t x_k$ , le sens des inégalités ne changent pas

$$f_k - \bar{C}^t x_k - \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq f_k - \bar{C}^t x_k + \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sqrt{x^t \mathbf{V}_k x}$$

et en vertu de la relation (5.4), nous déduisons que

$$f_k - \bar{C}_k x_k - \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq 0$$

Enfin, nous obtenons le modèle linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max h \\ s.c \quad f_k - \bar{C}_k x - \Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)] \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j \leq 0 \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

### 5.3 Résolution du problème (5.7)

L'idée est de fixer le paramètre  $h$  ( $0 \leq h \leq 1$ ) dans les contraintes pour pouvoir calculer les valeurs  $\Phi^{-1}[g_k^{-1}(h)]$  puis trouver une solution réalisable dans l'ensemble :

$$S_{\bar{h}} = \left\{ x \left| \begin{array}{l} \bar{C}_k^t x_k + \Phi^{-1}[g_k^{-1}(\bar{h})] \sum_{j=1}^n (\sigma_n^k)^{\frac{1}{2}} x_j \geq f_k \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.8)$$

soit en utilisant un algorithme de programmation linéaire " linprog" soit en résolvant le système (5.8). Dès que la différence entre le  $h$  fixé et le  $h$  calculé est inférieur en valeur absolue à un certain  $\varepsilon$  préalablement fixé, le point  $x$  trouvé sera optimal pour le problème (5.7) et donc efficace pour (5.1).

La valeur initiale de  $h$  peut être fixée de deux manières :

- Soit en la posant égale à zéro et en faisant un balayage de l'intervalle  $[0, 1]$
- Soit en démarrant du milieu de l'intervalle  $[0, 1]$  comme dans la méthode de bisection.

La méthode décrite dans [22] utilise le principe de bisection.

#### 5.3.1 Algorithme

Etape 1 : On pose  $h_l = 0$  ;  $h_u = 1$  ;  $t = 1$ .

Etape 2 : Poser  $h_t = \frac{h_l + h_u}{2}$

Etape 3 : Calculer  $g_k^{-1}(h_t)$

Etape 4 : Résoudre le problème (5.7)

Etape 5 : S'il existe une solution réalisable dans l'étape 4, poser  $h_1 = h_t$  et retourner à l'étape 3 sinon, si la solution réalisable de (5.7) n'existe pas, poser  $h_u = h_t$  et retourner à l'étape 3. S'il existe une solution réalisable dans l'étape 4 et  $|h_{t+1} - h_t| < \epsilon$ ,  $x_{h_t}$  est une solution optimale de (5.7).

### 5.3.2 Exécution

Nous allons exécuter le programme informatique réalisé sur deux exemples, le premier dans  $\mathbb{R}^2$  et le deuxième dans  $\mathbb{R}^3$

#### Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}, f = (f_1, f_2) = (5, 20), \epsilon = 3 \times 10^{-3}$$

$$\text{pi0}=0.7, \text{pi1}=0.9$$

#### Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 10 & -4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 24 \\ 9 \end{pmatrix}, f = (f_1, f_2, f_3) = (15, 9, 6)$$

$$\epsilon = 5 \times 10^{-4}, \text{pi0}=0.8, \text{pi1}=0.98$$

>> stoch\_multio2

Exécution du fichier stoch\_multio2.m

génération de la matrice aléatoire C

C =

0.8057 -0.9898

0.2316 1.3396

0.2895 1.1380

1.4789 -0.6841

l'esperance de C est :

E =

0.5187 0.1749

0.8842 0.2269

la matrice variance-covariance V est :

V =

0.3353 -0.5778

-0.5778 1.4586

les valeurs propres de V sont :

vp =

0.0911

1.7027

la plus grande valeur propre de V est :

$\sigma =$

1.7027

la racine carrée de la plus grande valeur propre est

$\text{rac}\sigma =$

1.3049

la borne inférieure de la variable h est

$h_l =$

0

la borne supérieure de la variable h est

$h_u =$

1

la première valeur de h est

$h_1 =$

0.5000

donner la valeur de  $\pi_0$  : 0.7

$\pi_0 =$

0.7000

donner la valeur de  $\pi_1$  : 0.9

$\pi_1 =$

0.9000

le calcul de  $g_1(h)$

$g_1 =$

-1.0000

le calcul de l'inverse de  $g_1(h)$

$\text{Inv}_1 =$

-1.0000

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_1 =$

0.1587

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_1 =$

-1.0000

la résolution du système pour  $k=2$

le point de référence est

fk =

5 20

la matrice A est

A =

0.7862 1.1300

0.4207 1.0779

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

le vecteur b est

b =

-5

-20

5

12

x =

-3.0997

-0.8466

"test =0 " si x existe ou "test =1" si x n'existe pas

test =

0

diff1=

0.5000

epsilon =

0.0030

h2 =

0.7500

le calcul de  $g_2(h)$

$g_2=$

-1.0000

le calcul de l'inverse de  $g_2(h)$

Inv2=

-1.0000

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_2 =$

0.1587

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_2 =$

-1.0000

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

0.7862 1.1300

0.4207 1.0779

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

-3.0997

-0.8466

test =

0

diff2=

0.2500

h3 =

0.8750

le calcul de  $g_3(h)$

$g_3=$

0.2500

le calcul de l'inverse de  $g_3(h)$

Inv3=

4.0000

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_3=$

1.0000

le calcul de l'inverse de Phi

alpha3=

4.0000

la résolution du système pour  $k=2$

la matrice A est

A =

-5.7382 -5.3944

-6.1037 -5.4464

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

0.4690

1.8410

test =

0

diff3=

0.1250

h4 =

0.9375

le calcul de  $g_4(h)$

$g_4 =$

0.8750

le calcul de l'inverse de  $g_4(h)$

$Inv_4 =$

1.1429

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_4 =$

0.8735

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_4 =$

1.1429

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

-2.0100 -1.6662

-2.3755 -1.7182

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

2.5785

3.3657

test =

0

diff4 =

0.0625

test =

0

h5 =

0.9688

le calcul de  $g_5(h)$

$g_5 =$

1.1875

le calcul de l'inverse de  $g_5(h)$

$Inv_5 =$

0.8421

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_5 =$

0.8001

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_5 =$

0.8421

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

-1.6175 -1.2738

-1.9831 -1.3258

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

3.1122

3.7469

test =

0

diff5 =

0.0313

h6 =

0.9844

le calcul de  $g_6(h)$

$g_6 =$

1.3437

le calcul de l'inverse de  $g_6(h)$

Inv6 =

0.7442

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_6 =$

0.7716

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_6 =$

0.7442

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

-1.4897 -1.1460

-1.8553 -1.1980

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

3.3008

3.8807

test =

0

diff6 =

0.0156

h7 =

0.9922

le calcul de  $g7(h)$

$g7=$

1.4219

le calcul de l'inverse de  $g7(h)$

Inv7=

0.7033

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y7=$

0.7591

le calcul de l'inverse de Phi

alpha7=

0.7033

la résolution du système pour  $k=2$

la matrice A est

A =

-1.4364 -1.0926

-1.8019 -1.1447

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

3.3804

3.9370

test =

0

diff7 =

0.0078

$h_8 =$

0.9961

le calcul de  $g_8(h)$

$g_8 =$

1.4609

le calcul de l'inverse de  $g_8(h)$

$Inv_8 =$

0.6845

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_8 =$

0.7532

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_8 =$

0.6845

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

-1.4119 -1.0681

-1.7774 -1.1201

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

3.4170

3.9629

test =

0

diff8 =

0.0039

h9 =

0.9980

le calcul de  $g_9(h)$

$g_9 =$

1.4805

le calcul de l'inverse de  $g_9(h)$

$Inv_9 =$

0.6755

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_9 =$

0.7503

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_9 =$

0.6755

la résolution du système pour  $k = 2$

la matrice A est

A =

-1.4001 -1.0563

-1.7656 -1.1083

1.0000 2.0000

-6.0000 8.0000

x =

3.4345

3.9752

test =

0

diff9 =

0.0020

ans =

1

x trouvé est la solution optimale>> stoch\_multio3

Exécution du fichier stoch\_multio3.m pour k=3

génération de la matrice aléatoire C

C =

-0.0956 0.2944 0.7143

-0.8323 -1.3362 1.6236

-0.6918 1.2540 -1.4410  
0.8580 -1.5937 0.5711  
-0.3999 0.8156 1.2902  
0.6900 0.7119 0.6686

l'espérance de C est :

E =

-0.4640 -0.5209 1.1689  
0.0831 -0.1699 -0.4349  
0.1451 0.7638 0.9794

la matrice variance-covariance V est :

V=

0.5031 -0.1949 0.0564  
-0.1949 1.4306 -0.6463  
0.0564 -0.6463 1.1407

les valeurs propres de V sont :

vp=

0.4457  
0.6567  
1.9719

la plus grande valeur propre de V est :

sigma=

1.9719

la racine carrée de la plus grande valeur propre est

racsig=

1.4043

la borne inférieure de la variable h est

hl =

0

la borne supérieure de la variable h est

hu =

1

la première valeur de h est

h1 =

0.5000

donner la valeur de pi0 : 0.8

pi0=

0.8000

donner la valeur de  $\pi_1$  : 0.98

$\pi_1 =$

0.9800

le calcul de  $g_1(h)$

$g_1 =$

-1.6667

le calcul de l'inverse de  $g_1(h)$

$\text{Inv}_1 =$

-0.6000

le calcul de Phi la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_1 =$

0.2743

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_1 =$

-0.6000

la résolution du système pour  $k=3$

le point de référence est

$f_k =$

15 9 6

la matrice A est

A =

1.3066	1.3634	-0.3264
0.7594	1.0124	1.2775
0.6975	0.0788	-0.1369
1.0000	9.0000	-1.0000
10.0000	-4.0000	3.0000

le vecteur b est

b =

-15  
-9  
-6  
24  
9

x =

1.8288  
1.6041  
-2.0663

"test =0 " si x existe ou "test =1" si x n'existe pas

test =

0

diff1=

0.5000

epsilon =

5.0000e-004

h2 =

0.7500

le calcul de  $g_2(h)$

$g_2=$

-0.2778

le calcul de l'inverse de  $g_2(h)$

Inv2=

-3.6000

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_2 =$

1.5911e-004

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_2 =$

-3.6000

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

5.5193 5.5762 3.8864

4.9722 5.2252 5.4902

4.9103 4.2916 4.0759

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

3.2108

1.1313

-6.9032

test =

0

diff2=

0.2500

h3 =

0.8750

le calcul de  $g_3(h)$

$g_3=$

0.4167

le calcul de l'inverse de  $g_3(h)$

Inv3=

2.4000

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_3=$

0.9918

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_3=$

2.4000

la résolution du système pour  $k=3$

la matrice A est

A =

-2.9062 -2.8493 -4.5392

-3.4533 -3.2004 -2.9353

-3.5153 -4.1340 -4.3496

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.9713

2.1733

-0.8885

test =

0

diff3=

0.1250

$h_4 =$

0.9375

le calcul de  $g_4(h)$

$g_4 =$

0.7639

le calcul de l'inverse de  $g_4(h)$

$Inv_4 =$

1.3091

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_4 =$

0.9047

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_4 =$

1.3091

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

-1.3743 -1.3174 -3.0072  
-1.9214 -1.6684 -1.4034  
-1.9834 -2.6021 -2.8177  
1.0000 9.0000 -1.0000  
10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.5300  
2.4985  
1.1286

test =

0

diff4 =

0.0625

h5 =

0.9688

le calcul de  $g_5(h)$

$g_5 =$

0.9375

le calcul de l'inverse de  $g_5(h)$

$Inv_5 =$

1.0667

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_5 =$

0.8569

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_5 =$

1.0667

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

-1.0339 -0.9770 -2.6668

-1.5810 -1.3280 -1.0630

-1.6429 -2.2616 -2.4773

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.3581

2.6196

1.8994

test =

0

diff5 =

0.0313

h6 =

0.9844

le calcul de  $g_6(h)$

$g_6 =$

1.0243

le calcul de l'inverse de  $g_6(h)$

Inv6=

0.9763

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

y6=

0.8355

le calcul de l'inverse de Phi

alpha6=

0.9763

la résolution du système pour  $k=3$

la matrice A est

A =

-0.9069 -0.8501 -2.5399

-1.4540 -1.2011 -0.9360

-1.5160 -2.1347 -2.3504

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.2824

2.6720

2.2362

test =

0

diff6 =

0.0156

h7 =

0.9922

le calcul de  $g7(h)$

$g7=$

1.0677

le calcul de l'inverse de  $g7(h)$

Inv7=

0.9366

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_7 =$

0.8255

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_7 =$

0.9366

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

-0.8512 -0.7943 -2.4842

-1.3983 -1.1453 -0.8803

-1.4603 -2.0790 -2.2946

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.2468

2.6963

2.3937

test =

0

diff7 =

0.0078

h8 =

0.9961

le calcul de  $g8(h)$

$g8=$

1.0894

le calcul de l'inverse de  $g8(h)$

$Inv8=$

0.9179

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y8=$

0.8207

le calcul de l'inverse de Phi

$alpha8=$

0.9179

la résolution du système pour  $k=3$

la matrice A est

A =

-0.8250	-0.7681	-2.4580
-1.3721	-1.1191	-0.8541
-1.4341	-2.0528	-2.2684
1.0000	9.0000	-1.0000
10.0000	-4.0000	3.0000

x =

1.2296

2.7081

2.4699

test =

0

diff8 =

0.0039

test =

0

h9 =

0.9980

le calcul de  $g_9(h)$

$g_9 =$

1.1003

le calcul de l'inverse de  $g_9(h)$

Inv9 =

0.9089

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_9 =$

0.8183

le calcul de l'inverse de Phi

alpha9 =

0.9089

la résolution du système pour  $k=3$

la matrice A est

A =

-0.8123 -0.7554 -2.4452

-1.3594 -1.1064 -0.8414

-1.4214 -2.0401 -2.2557

1.0000 9.0000 -1.0000

10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.2211

2.7138

2.5074

test =

0

diff9 =

0.0020

$h_{10} =$

0.9990

le calcul de  $g_{10}(h)$

$g_{10} =$

1.1057

le calcul de l'inverse de  $g_{10}(h)$

$Inv_{10} =$

0.9044

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_{10} =$

0.8171

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_{10} =$

0.9044

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

```
-0.8060 -0.7491 -2.4390
-1.3531 -1.1002 -0.8351
-1.4151 -2.0338 -2.2495
 1.0000  9.0000 -1.0000
10.0000 -4.0000  3.0000
```

x =

```
1.2169
2.7167
2.5260
```

test =

```
0
```

diff10 =

```
9.7656e-004
```

h11 =

0.9995

le calcul de  $g_{11}(h)$

$g_{11} =$

1.1084

le calcul de l'inverse de  $g_{11}(h)$

$Inv_{11} =$

0.9022

le calcul de la fonction de distribution de loi normale  $N(0,1)$

$y_{11} =$

0.8165

le calcul de l'inverse de Phi

$\alpha_{11} =$

0.9022

la résolution du système pour  $k = 3$

la matrice A est

A =

-0.8029 -0.7460 -2.4359

-1.3500 -1.0971 -0.8320

-1.4120 -2.0307 -2.2464

1.0000 9.0000 -1.0000  
10.0000 -4.0000 3.0000

x =

1.2148

2.7181

2.5353

test =

0

diff11 =

4.8828e-004

ans =

1

x trouvé est la solution optimale

# Conclusion générale

Nous avons abordé dans ce mémoire des programmes linéaires où les données sont imprécises et les objectifs sont multiples et conflictuels. Nous nous sommes intéressés particulièrement au modèle du risque minimal. Nous avons résolu ce problème par un algorithme dont le principe est semblable à celui de la méthode de bisection. Il utilise les divisions successives de l'intervalle de définition du paramètre  $h$  par deux et passe par la résolution d'un système d'équations linéaires.

Le domaine de la programmation linéaire stochastique multi-objectifs n'est évidemment pas fermé. Bien au contraire, il mérite d'être poursuivi. Peut-être trouvera-t-on de l'intérêt pour l'étude des problèmes multi-objectifs stochastiques en nombres entiers.

# Bibliographie

- [1] Bazaraa M., Sherali, H., and Shetty, C., Theory and algorithms, Second Edition, Wiley, New York, (1993).
- [2] Beal E.M.L., On minimizing a convex function subject to linear inequalities, *J.Roy.stat.Soc.*, 17, (1955).
- [3] Bellahcene F., Using Feasible Directions in an Interactive Reference Point Approach for Multiobjective Stochastic Problems, Quatrième Conférence Internationale en Recherche Opérationnelle : Théorie et Applications, 23–26 mai (2005), Marrakech, Maroc.
- [4] Ben Abdelaziz F., L'efficacité en programmation multiobjectifs stochastique, Ph.D. Thesis, Université de Laval, Québec, (1992).
- [5] Ben Abdelaziz F., Land P., and Nadeau R., Distributional unanimity multiobjective stochastic linear programming, in Climaco J. (Eds), *Multicriteria Analysis : Proceedings of the XIth international conference on MCDM*, Springer Verlag, Berlin, (1997), 225-236.
- [6] Ben Abdelaziz F., Land P., and Nadeau R., Dominance and efficiency in multicriteria decision under uncertainty, *Theory and Decision* 47, (1999), 191-211.
- [7] Benayoun R., de Montgolfier J., Tergny J., and Larichev O., Linear programming with multiple objective functions, Step method (STEM), *Mathematical Programming* 1, (1971), 366-373.
- [8] Bereanu B., Programme de risque minimal en programmation linéaire stochastique. *C.R Acad. SCI. Paris* 259, (1964), 1383-1386.
- [9] Bowman V. J., On the relationship of the Tchebychev norm and the efficient frontier of multicriteria objectives, in Thiriez, H. and Zionts, S. (eds), *Multiple Criteria Decision Making*, Berlin, Springer, (1976), 76-85.
- [10] Caballero R., Cerdá E., Muñoz M.M., and Rey L., Relations among every several efficiency concepts in stochastic multiple objective programming. In : *Research and Practice in Multiple Criteria Decision Making* Haimes, Y.Y., Steuer, R. (Eds.), *Lectures notes in Economics and*

- Mathematical Systems. Springer- Verlag, Berlin, Germany, (2000), 57-68.
- [11] Charnes A., Cooper, W.W.,and Symonds G.H., cost horizons and certainty equivalents : An approach to stochastic programming of heating oil. *Management Science* 4,(1959), 183-195.
  - [12] Charnes A., Cooper W. W., *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, New York : Wiley, (1961).
  - [13] Charnes A., Cooper, W.W., Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints. *Operations Research* 11, (1963), 18–39.
  - [14] Dantzig G.B., Linear programming under uncertainty *Management Science*, (1955), 1 :197-206.
  - [15] Dantzig G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N J, (1963).
  - [16] Dubois D., Prade, H., *Théories des possibilités, Applications à la représentation des connaissances en informatique*, Masson, 2e édition, (1985).
  - [17] Evans G.W., An overview of techniques for solving multiobjective mathematical programs , *Management Science* 30 (11), (1984), 1268-1282.
  - [18] Geoffrion A., Proper efficiency and theory of vector maximisation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 22, (1968), 618-630.
  - [19] Geoffrion A., Dyer J. and Feinberg A., An Interactive Approach for multicriteria optimization with an application to the operation of an academic department, *Management Science* 19, (1972), 357-368.
  - [20] Goicoechea A., Dukstein L., and Bulfin R.L., Multiobjective stochastic Programming the PROTRADE-Method, *Operation Research Society of America*, (1976).
  - [21] Hameg A., Distribution de l'optimum d'un programme linéaire stochastique, Thèse de doctorat d'état en sciences mathématique, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6, (1988).
  - [22] Hasuike T., Ishii H, Probability maximization models for portfolio selection under ambiguity, (2009).
  - [23] Hogg R.V., and Graig A.T., *Introduction to mathematical Statistics*, Mac- Millan Publishing Co., New York, (1989).
  - [24] Hwang C.L., and Masud A.S.M, *Multiple objective decision making methods and applications*, Berlin, Springer-Verlag, (1979).

- [25] Ignizio J.P., Generalized goal programming, *Computers and Operations Research* 10 (4), (1983), 277-289.
- [26] Ishii H., Nishida T., and Nanbu Y., A generalised chance constrained programming problem, *Journal of Operations Research Society of Japan* 21(1), (1978).
- [27] Kall, P., stochastic linear programming, *Econometrics and Operations Research XXI*, Springer Verlag, (1976).
- [28] Kall, P., Wallace, S.W., *Stochastic Programming*, Wiley Intersciences Series in Systems and Optimization, (1994).
- [29] Kataoka S., A stochastic programming model, *Econometrics* 31 (1963), 181-196.
- [30] Kaufmann A., Introduction à la théorie des sous-ensembles flous, à l'usage des Ingénieurs, (Fuzzy Sets Theory), Tome 1, Éléments théoriques de base, Masson, Paris, (1977).
- [31] Kunsch P.L., and Teghem J., Nuclear fuel cycle optimization, *European Journal of Operational Research* 31, (1987), 240-249
- [32] Kunsch P.L., Application of STRANGE to energy studies, in *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, (1990), 117-130.
- [33] Leujeune M., *Statistique, La théorie et ses application*, Springer-Verlag, (2004).
- [34] Massoud A., *Mémoire de maîtrise mathématiques*, école polytechnique de Montreal, Canada, (1999).
- [35] Minc H., and Marcus M., *A survey of matrix Theory and Matrix inequalities*, Allyn and Bacon Inc., Boston, (1964).
- [36] Nakayama H., and Sawaragi Y. Satisficing trade-off method for interactive multiobjective programming methods, In M. Grauer and A. P. Wierzbicki (eds.) *Proceedings of an International Workshop on Interactive Decision Analysis and Interpretative Computer Intelligence*, Springer, (1984), 113-122.
- [37] Prekopa A., On the probability distribution of the optimum of a random linear program, *Siam Journal Control* 1, (1966), 211-222.
- [38] Stancu-Minasian I.M., Asupra problemei de risk minim multiplu I : cazul a două functii obiectiv II : cazul  $r$  ( $r > 2$ ) functii obiectiv, *Stud. Cerc. Mat.* 28(5), (1976), 617-623.
- [39] Stancu-Minasian I.M., *On Stochastic programming with multiple objective functions*, Ed. Academiei, Bucuresti and D., Reidel Publishing Company, Dordrecht/Boston/Lancaster/Tokio, (1984).

- [40] Teghem J., and Kunsch P. L., Multi-objective decision making under uncertainty : an example for power systems, in Haimes Y.Y. and Chankong V., (Eds), Decision Making with Multiple Objective, Springer, (1985), 443-456.
- [41] Teghem J., Dufrane D., Thauvoye M. and Kunsch P. L., STRANGE : Interactive method for multiobjective linear programming under uncertainty, European Journal of Operational Research 26(1), (1986), 65-82.
- [42] Teghem J., Tuyttens D., and Ulungu E.L., An interactive heuristic method for multiobjective combinatorial optimization, Computers and operations Research 27,(2000), 621-634.
- [43] Teghem, J., Programmation linéaire, Université de Bruxelles, Edition (2003).
- [44] Tinter G., A note on stochastic linear programming, Econometrica 28, (1960), 490-495.
- [45] Wets R., Stochastic programming, the state of the art, Springer-Verlag, (1983), 566-603.
- [46] White D.J., Optimality and efficiency, John Wiley and Sons, Chichester, (1982).
- [47] Zadeh L.A., Fuzzy Sets in : Information and Control Vol. 8, (1965), 338-353.
- [48] Zimmermann H.J., Fuzzy Set Theory and its Applications, ICluwer-Nijhoff, Dordrecht, (1985).