Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département des Sciences de Gestion

Cours de :

Fondements de Recherche Opérationnelle

Préparé par :

Khaznadji Mohammed

Maitre de Conférence Classe B

2023/2024

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année de la filière des sciences de gestion (semestre 4). Le contenu de cette matière est déterminé conformément aux recommandations de la CPND de l'année 2022.

Fiche de Cours :

Filière : Sciences de Gestion

Semestre : 4

Unité d'enseignement : Méthodologie

Matière : Fondements de Recherche Opérationnelle

Crédits : 4

Coefficient : 2

Mode d'enseignement : Présentiel

Objectifs de l'enseignement :

- Fournir à l'étudiant certaines techniques directrices utilisées par la recherche opérationnelle (programmation linéaire) pour résoudre des problèmes dans l'entreprise.
- Être capable d'atteindre les objectifs de l'entreprise en utilisant différents modèles de programmation linéaire.

Connaissances préalables : Maîtrise des mathématiques, en particulier l'algèbre linéaire et les matrices.

Contenu de la matière :

Chapitre 1 : Présentation de la Programmation linéaire
Chapitre 2 : Interprétation géométrique d'un Programme Linéaire (n=2)
Chapitre 3 : Méthode du simplexe
Chapitre 4 : Dualité et analyse de sensibilité
Chapitre 5 : Problèmes de transport

Méthode d'évaluation : Évaluation continue + Examen final et la moyenne de la matière est calculée en tenant compte du poids des leçons (60%) et des travaux dirigés (40%).

Bibiographie :

Dodge, Y., Gonano-Weber, S., & Renfer, J. P. (2005). Programmation linéaire. *Optimisation appliquée*, 89-109.

Fouilhoux, P. (2015). Optimisation combinatoire : Programmation linéaire et algorithmes. *Université Pierre et Marie Curie.*

Guéret, C., Prins, C., & Sevaux, M. (2000). *Programmation linéaire* (p. 365).

Eyrolles. Minoux, M. (2008). *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes*.

Lavoisier. Mtetwa, D. K. (2011). Programmation Linéaire.

CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE (PL)

La programmation linéaire a été formulée par G-B. DANTZING en 1947 et a connu un développement rapide par la suite. Les facteurs explicatifs de son essor sont essentiellement : le développement des moyens de calcul, de l'économie appliquée et des techniques modernes de gestion (Statistique, Econométrie, Comptabilité nationale, etc.)

1- **Définition** : la PL s'intéresse aux problèmes **d'optimisation** qui consistent à maximiser ou à minimiser une **fonction économique** linéaire soumise à ***m*** **contraintes** linéaires et ***n*** **variables**.

   Il s'agit, tout en respectant des contraintes, d'optimiser une certaine mesure de rentabilité (bénéfice, prix de revient, la quantité fabriquée…)

   - La programmation linéaire s'intéresse aux problèmes comminatoires ;
   - La fonction économique Z à optimiser retrace l'objectif recherché par le problème formalisé sous forme d'un modèle mathématique. Exemple : le chiffre d'affaires, le bénéfice, le cout, etc.
   - Optimiser une fonction consiste à déterminer sa valeur la plus élevée quand lorsqu'il s'agit de la maximisation ou bien sa valeur la plus petite lorsqu'il s'agit de la minimisation ;

- La fonction-objectif à optimiser contient des variables explicatives appelées variables de décision et une variable à expliquer Z.
- **Les contraintes structurelles** en nombre de **m** sont souvent formulées sous forme **d'inéquations linéaires**. Elles peuvent être d'origines multiples : le marché, la réglementation, les conditions de production, la disponibilité de facteurs de production, la limitation du volume du stock disponible, etc. Les contraintes s'énoncent généralement dans les termes suivants : « **pas plus que** », « **pas moins que** », « **au moins** », « **au plus** ».
- **Les contraintes de borne** nous renseignent sur l'intervalle de variation de chaque variable de décision. Elles se résument généralement aux contraintes de positivité de variables.
- Toutes les solutions du système des contraintes linéaires sont appelées : **Solution admissibles** (ou réalisables) du PL ;
- La solution admissible maximale (ou minimale) est appelée : **Solution optimale.**

2- Exemple de PL : Soit une entreprise qui fabrique 02 produits différents (A et B) à l'aide de 02 facteurs de production (Matières premières et Main d'œuvre). Il se trouve que la disponibilité des ces facteurs est limitée.

Les quantités ces facteurs nécessaires pour la fabrication de chaque produit sont données par le tableau suivant :

Facteurs de production	Produit A	Produit B	Disponibilité des facteurs
MP (*Tonne*)	**2**	**3**	**6**
MO (*Nbre d'ouvriers*)	**5**	**2**	**10**
Prix de Vente	**5**	**3**	*UM=10.000DA*

Question : *Combien faut-il fabriquer de chaque produit A et B de façon à maximiser le revenu de l'entreprise ?*

Le choix de variables :

On pose X_1 : le nombre d'unités du produit A à fabriquer ?

On pose X_2 : le nombre d'unités du produit B à fabriquer ?

On pose Z : le Revenu total de l'entreprise ?

La fonction-Objectif (économique)

$$(Max)Z = 5X_1 + 3X_2$$

Contraintes structurelles :

$$\begin{array}{llll} \text{MP :} & 2X_1 & +3X_2 & \leq & 6 \\ \text{MO :} & 5X_1 & +2X_2 & \leq & 10 \end{array}$$

Contraintes de borne :

On pose $X_1 \geq 0$; $X_1 \geq 0$

Le Programme Linéaire :

$$\begin{array}{l}
(Max)Z = 5X_1 + 3X_2 \\
\quad 2X_1 \quad +3X_2 \quad \leq \quad 6 \\
\quad 5X_1 \quad +2X_2 \quad \leq \quad 10 \\
\quad \text{avec : } X_1 \geq 0 \text{ ; } X_2 \geq 0
\end{array}$$

3- Ecriture mathématique d'un PL :

La forme générale

$$(Max)Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_j X_j + \ldots C_n X_n$$

$$\text{S/C} \left|\begin{array}{cccccccc}
a_{11} X_1 & +a_{12} X_2 & \ldots & +a_{1j} X_j + & \ldots & +a_{1n} X_1 & \leq & b_1 \\
a_{21} X_1 & +a_{22} X_2 & \ldots & +a_{2j} X_j + & \ldots & +a_{2n} X_1 & \leq & b_1 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
 & & & . & \ldots & & & \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
. & . & \ldots & & & . & . & . \\
a_{i1} X_1 & +a_{i2} X_2 & \ldots & +a_{ij} X_j + & \ldots & +a_{in} X_1 & \leq & b_1 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
 & & & . & \ldots & & & \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
. & . & \ldots & & & . & . & . \\
a_{m1} X_1 & +a_{m2} X_2 & \ldots & +a_{mj} X_j + & \ldots & +a_{mn} X_1 & \leq & b_1
\end{array}\right.$$

$$\text{avec : } X_1 \geq 0 \text{ ; } X_2 \geq 0 \ \ldots \ X_j \geq 0 \ \ldots X_n \geq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
(Max)Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj \\
S/C \sum_{j=1}^{n} aij\ Xj \leq bi \ (¥i=1,m) \\
\text{avec } Xj \geq 0 \ (j=1,n)
\end{array}}$$

La forme matricielle :

$$\textit{(Max)}Z = C^t X$$
$$S/C\ A.X \leq b$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4- Les hypothèses de la PL:

H_1 : la relation est linéaire

H_2 : $X_j \geq 0$ (j=1 ; n)

H_3 : $b_i > 0$ (i=1 ; m)

5- Formes d'un PL

Forme	**Définition**	**Ecriture mathématique**
Forme Canonique de type **Max**	- **(Max)Z** - Toutes les contraintes : inéquations de type « ≤ »	$(Max)Z= C^tX$ $S/C\ \ A.X \leq b$
Forme Canonique de type **Min**	- **(Min)Z** - Toutes les contraintes : inéquations de type « ≥ »	$(Min)Z= C^tX$ $S/C\ \ A.X \geq b$
Forme **Standard**	- **(Min)Z ou (Min)Z** - Toutes les contraintes : **équations « = »**	$(Max)Z$ ou $(Min)Z= C^tX$ $S/C\ \ A.X=b$
Forme **Mixte**	- **(Min)Z ou (Min)Z** - Les contraintes ne sont pas homogènes (Equations et Inéquations)	

6- Equivalence des transformations canoniques et standard

Théorème 1 : Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout programme linéaire peut être transformé en un PL sous forme canonique équivalent.

Théorème 2 : Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout programme linéaire peut être transformé en un PL sous forme standard équivalent.

Par PL équivalent, on entend :

- toute solution admissible (optimale) du problème équivalent correspond à une solution admissible (optimale) du PL initial ;

- toute solution admissible (optimale) du problème initial correspond au moins à une solution admissible (optimale) du problème équivalent ;

Règles de transformation :

N°	Variable	Changement de Variable
Règle 1	*(Max) Z= CX*	*-(Max)Z=-CX = (Min)Z=-CX*
Règle 2	$Xj\leq 0$	On pose $Xj=-X'j$ avec $X'j\geq 0$
Règle 3	$Xj\geq b$ avec $b<0$	On pose $Xj=X'j+b$ avec $X'j\geq 0$
Règle 4	$Xj \in R$	On pose $Xj=(Xj'-X''j)$ avec $X'j\geq 0$ et $X''j\geq 0$
Règle 5	$U\leq Xj\leq I$ avec $I<0$ et $U>0$	On pose $Xj=(Xj'-X''j)$ avec $X'j\geq 0$ et $X''j\geq 0$ Et ajouter au PL 02 contrauntes structurelles : $\begin{cases} Xj'-X''j\leq I \\ -Xj'+X''j\leq -U \end{cases}$
Règle 6	$aX\leq b$	$aX+S=b$ avec S : variable d'écart
Règle 7	$aX\geq b$	$aX-S=b$ avec S : variable d'écart
Règle 8	$aX=b$	$\begin{cases} aX\leq b \\ aX\geq b \end{cases}$

7- TRAVAIL A FAIRE :

EXERCICE : 01

Une entreprise fabrique 02 produits P1 et P2 en utilisant 03 facteurs de production (Equipement, Main d'œuvre et Matière première) disponibles en quantités limitées :

	P 1	P 2	Disponibilité
Equipement	3	9	81
Main d'œuvre	4	5	55
Matière première	2	1	20

P1 et P2 rapportent à la vente respectivement 600 DA et 400 DA par unité.
TAF : Ecrire le problème sous forme d'un Programme Linéaire

EXERCICE : 02

Une entreprise fabrique deux produits qu'elle désir vendre à l'étranger. Le produit A rapporte 400 euros par Kg et le produit B rapporte 600 euros par Kg. Ayant des moyens financiers limités, lasociété ne peut affréter qu'un seul avion. Celui-ci ne peut transposter que 50000 kg et un volumede 2000 m3. Le produit A a un volume de 0.032 m3 par Kg et la produit B a un volume de 0.1 m3 par Kg.
TAF : Le responsable vous demande de l'aide à modéliser le problème.

EXERCICE : 03

Pour l'alimentation de bétail d'une exploitation de 1000 têtes, il faut chaque jour les éléments nutritifs suivants (par animal) : **X= 100g, Y=140g, Z=150g, T=240g**. Ces éléments sont présents dans deux aliments A et B avec les compositions suivantes :

Aliments	X	Y	Z	T
A	10 %	20 %	30 %	40 %
B	35 %	20 %	15 %	30 %

A et B sont achetés sur le marché avec les prix suivants : A à 5000 DA le quintal et B à 8000 DAle quintal.

TAF : modéliser le problème sous forme d'un PL

EXERCICE : 04

Une entreprise vend 04 produits liquides dénotés **L1, L2, L3 et L4**, dont le profit est, respectivement,de : **0.75€, 0.80€, 0.80€ et 1,50€** par M^3. Pour remplir son camion-citerne dont la capacité est de **320** M^3, l'entreprise utilise 04 vieilles machines à pression, chacune affectée à l'un des produits. L'inconvénient des ces machines est que le nombre de M^3 propulsés à chaque jet diffère d'une machine à une autre. Ainsi, la machine affectée au liquide **L1** et **L4** propulse chacune **1** M^3 de celiquide par jet. Par contre, la machine affectée au liquide **L2** propulse **2** M^3 par jet et celle affectée au liquide **L3** propulse **3** M^3 par jet. L'un des clients de l'entreprise exige qu'elle lui livre toutes les semaines un camion d'un liquide composé la même quantité **L3** et de **L4** ; et d'au moins **20** M^3 de plus de **L1** que de **L2**.

L'entreprise désire connaitre le nombre de jets que devra faire chaque machine lors duremplissage du camion pour que chaque livraison à ce client lui rapporte un profit maximum.

TAF : Ecrire ce problème sous forme d'un programme linéaire.

EXERCICE : 05

Un atelier peut fabriquer 03 types d'article :

- L'article A à la cadence de 35 objets à l'heure.
- L'article B à la cadence de 45 objets à l'heure.
- L'article C à la cadence de 20 objets à l'heure.

Cette fabrication utilise une machine-outil unique disponible 200 heures

par mois.Le bénéfice unitaire est de : 60 DA pour A, 40 DA pour B et

80 DA pou C.

Ces articles sont vendus en totalité à un grossiste, on a constaté qu'on ne pouvait écouler, par mois,plus de 4900 objets de A, ni plus de 5400 objets de B, ni plus

2000 objets de C.

D'autres part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation, une équipe de 03 techniciens est chargée de cette mission ; chaque de technicien travail 170 heures par mois ; la vérification d'un objet de type A prends 4 minutes, 3 minutes pour le type B et 2 minutes pour letype C

TAF : Ecrire le problème sous forme d'un PL dans les deux cas suivants :

- Les techniciens travaillent en série
- Les techniciens travaillent en parallèle

EXERCICE : 06

Un pays en développement souhaite mettre en valeur une zone de 900 hectares où deux culturessont à priori possibles : DATTES et BLE.

Les données relatives à ces deux cultures sont les suivantes :

	Dattes	**Blé**
Rendement en Quintaux à l'hectare	75	25
Prix de Vente du Quintal en DA	60	60
Frais d'exploitation (salaires non compris)	3500	300
MO nécessaire (Nombre d'ouvriers)	1	2
Eau nécessaire pour l'irrigation (m3/an)	$14*10^3$	$6*10^3$

Les salaires annuels sont dans les deux cas de 500 UM par an et par ouvrier. Les disponibilités desautres facteurs de production sont :

- MO : 1200 ouvriers
- Eau : $14*10^6$/an

TAF : Formuler le PL dans le cas où l'exploitation de la zone est confiée à une entreprise privée.

EXERCICE : 07

Donner la forme matricielle des PL suivants :

- PL canonique de type max
- PL canonique de type max standardisé
- PL canonique de type min
- PL canonique de type min standardisé

EXERCICE : 08

Donner la forme standard des programmes linéaires suivants :

$$\textbf{A/}\quad (\max)\ Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$x_1 - 8x_2 - x_3 \leq -4$$

$$x_2 + 4x_3 = 2$$

$$3x_1 - x_2 - 5x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

B/ $(\min)\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 6x_3$

$$- x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

EXERCICE : 09

Considérons les PL(P) suivants :

A/ $(\min)\ Z = 20x_1 + 15x_2 + 17x_3$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}.$$

B/ $(\max)\ Z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 15$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 15$$

$$x_1 \geq -2,\ x_2 \geq 0,\ -1 \leq x_3 \leq 6.$$

TAF : Donner les PL (P') équivalents.

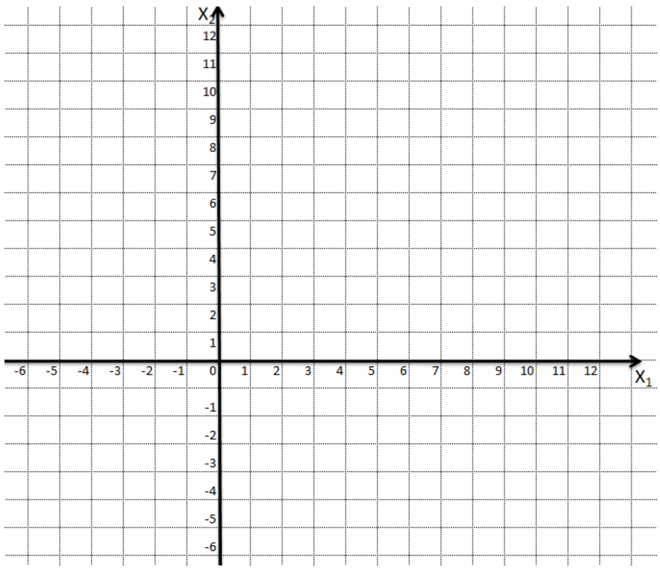
CHAPITRE 2 : INTERPRETATION GEOMETRIQUE D'UN PROGRAMMATION LINEAIRE (PL)

Après la présentation de la PL et de ses différentes formes, l'étape qui suivra sera celle de la résolution de ce modèle mathématique. La méthode graphique (géométrique) est l'une de premières méthodes utilisées à ce sujet.

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous limitions aux PL à deux variables de décision ***(n=2).***

1- Le système d'axes (Plan) :

Soit un plan muni de deux axes perpendiculaires et gradués *(X_1 et X_2).*



Chaque point considéré dans ce plan correspond à une valeur de X_1 et à une valeur de X_2. Ces deux valeurs sont appelées **les coordonnées d'un point** noté *(X_1 ; X_2).*

Etant donnée les contraintes de non négativité de variables de décision *($X_j \geq 0$)*. Souvent, nous nous intéressons uniquement au cadran positif *(X_1 ; 0 ; X_2)*.

2- Représentation d'une contrainte dans le plan :

Soit l'inéquation : $\mathbf{aX_1+bX_2 \leq c}$ *avec* **a** *et* **b** *ne sont pas simultanément nuls.*

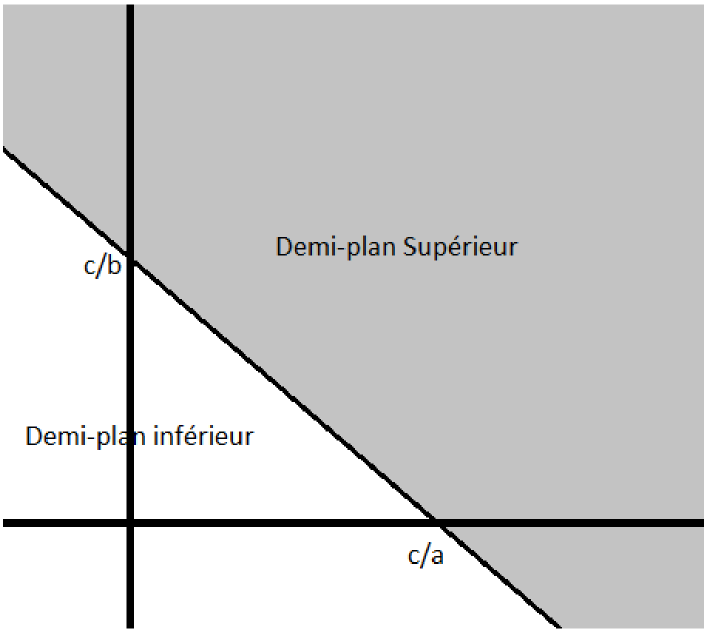
Pour représenter cette contrainte dans le plan :

- Il faut d'abord s'intéresser à l'équation $\mathbf{aX_1+bX_2 = c}$ qui peut être représentée sous forme d'une droite dans le plan.

- Ensuite, déterminer au moins deux points par lesquels la droite passera *(un point sur l'axe des X_1 et autre sur l'axe des X_2)*
    - Premier point : on pose $X_2 = 0 \rightarrow X_1 = \frac{c}{a}$ $\left(\frac{c}{a} ; 0\right)$

- Deuxième point : on pose $X_1 = 0 \rightarrow X_2 = c/b$ $\left(0 ; \frac{c}{b}\right)$

- Après, tracer la droite $\mathbf{aX_1+bX_2 = c}$ qui partage le plan en deux demi-plans : un demi-plan supérieur et un demi-plan inférieur, tels représentés dans le graphe ci-après (avec l'hypothèse **c**>**0**)



Soit **S :** le domaine de définition de la contrainte $\mathbf{aX_1+bX_2 \leq c}$. En d'autres termes, l'espace dans le plan réalisant cette contrainte. Il est constitué par l'ensemble des points situés sur la droite $\mathbf{aX_1+bX_2 = c}$ ainsi que tous les points situés dans le demi-plan inférieur. Chaque point considéré dans cet espace réalise cette inéquation. Par contre, aucun point du demi-plan supérieur ne réalise la cette contrainte.

3- Région des Solutions possibles (admissibles) :

Etant donné qu'un PL est composé de m contraintes structurelles et n contraintes de bornes, la Région des Solutions Possibles (notés $\boldsymbol{\chi}$) est un espace dans le plan où toutes les contraintes sont satisfaites, y compris les contraintes de bornes. En dehors de cet espace, il y a au moins une contrainte non satisfaite, donc c'est des solutions non réalisables.

$$\boxed{\boldsymbol{\chi} = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m}$$

Exemple :

Reprenons l'exemple du Chapitre 01 :

$$(Max)Z = 5X_1 + 3X_2$$
$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\leq 6 \\ 5X_1 + 2X_2 &\leq 10 \\ \text{avec : } X_1 \geq 0 \,&;\, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Contrainte 01 : $2X_1 + 3X_2 \leq 6$

Pour $2X_1 + 3X_2 = 6$

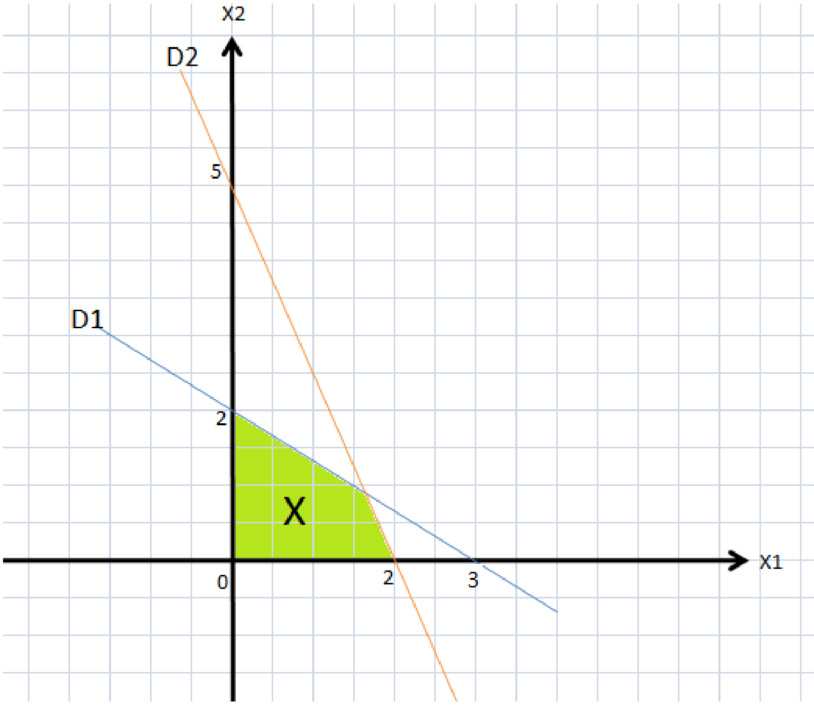
- *On pose* $X_2=0 \rightarrow X_1=3$ $(3 ; 0)$
- *On pose* $X_1=0 \rightarrow X_2=2$ $(0 ; 2)$

Contrainte 02 : $5X_1 + 2X_2 \leq 10$

Pour $5X_1 + 2X_2 \leq 10$

- *On pose* $X_2=0 \rightarrow X_1=2$ $(2 ; 0)$
- *On pose* $X_1=0 \rightarrow X_2=5$ $(0 ; 5)$

Le graphe :



La Région des Solutions Possibles ***(X)*** est représentée par l'espace coloré dans le plan. Tous les points situés à l'intérieur de cet espace ou sur ses limites constituent des solutions réalisables ou admissibles. Cet espace n'est rien d'autre que $S_1 \cap S_2$ en tenant compte des contraintes de bornes $(X_1 \geq 0 \; ; X_2 \geq 0)$

4- Solution optimale :

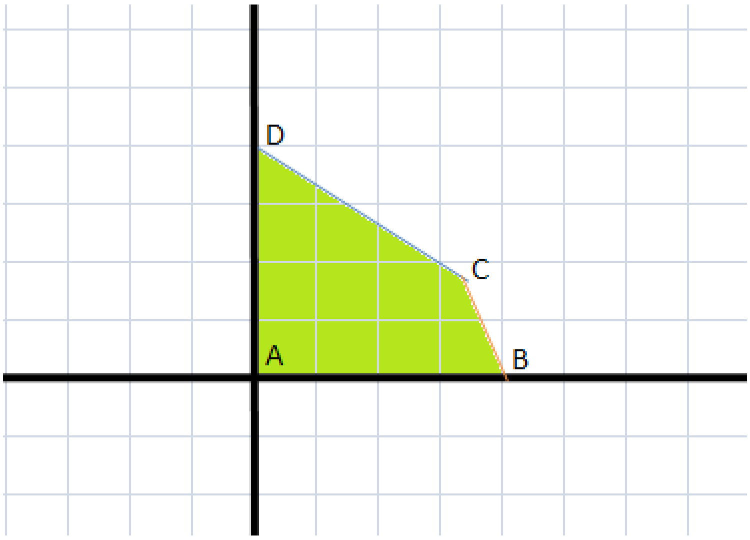
La ou les solution(s) optimale(s) fait ou font partie de la Région des solutions possibles.

Théorème : Parmi les différentes solutions possibles, la solution optimale (ou les solutions optimales) se situe sur l'un ou plusieurs **sommets** de la Région des Solutions possibles.

Un sommet (ou point extrimal) est point dans le plan formé par l'intersection d'au moins deux droites. Dans notre exemple, nous avons 04 sommets (A ; B ; C ; D)

Donc, pour déterminer la solution optimale, il suffit de calculer la valeur de **Z** en chaque sommet et opter par la suite pour :

- le sommet qui donne la valeur la plus élevée de Z, lorsqu'il s'agit d'un cas de maximisation ;
- le sommet qui donne la valeur la plus petite de Z, lorsqu'il s'agit d'un cas de minimisation.



Pour déterminer la valeur de Z en chaque sommet, il faut d'abord déterminer la valeur de X_1 et X_2 en chaque sommet.

Sommet	X_1	X_2	$Z = 5X_1 + 3X_2$
A	0	0	0
B	2	0	10
C	$\frac{18}{11}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{120}{11}$= 10,90
D	0	2	6

Pour le sommet C, il s'agit de résoudre le système d'équations formant ce sommet :

$$\begin{cases} 2X1 + 3X2 = 6 \\ 5X1 + 2X2 = 10 \end{cases}$$

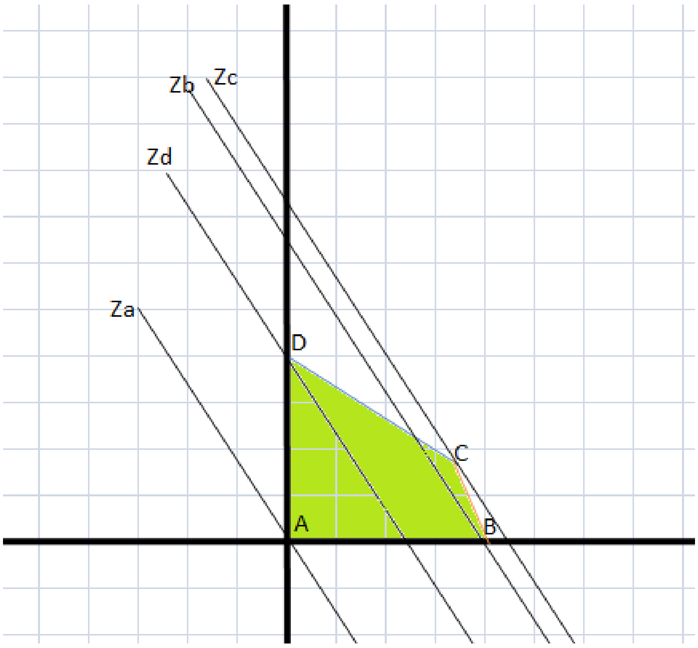
La solution optimale = max (Z_A ; Z_B ; Z_C ; Z_D)=$\mathbf{Z_C}$=$\frac{120}{11}$

avec $\mathbf{X_1=\frac{18}{11}}$ **et** $\mathbf{X_2=\frac{10}{11}}$

Le meilleur plan de production pour l'entreprise, en tenant compte des contraintes liées aux disponibilités des facteurs de production, est de fabriquer : **18/11** unités du produit A et **10/11** unités du produit B. Cette combinaison permettra à l'entreprise de réaliser le meilleur chiffre d'affaire qui est de **120/11**. Aucun autre plan de production ne permettra à l'entreprise ce chiffre d'affaire.

Interprétation géométrique de la solution optimale :

Comme le montre le graphe ci-après, pour un cas de maximisation, la solution optimale est donnée par le dernier sommet de la Région des Solutions Possibles touché par la droite Z lorsqu'elle se déplace du sommet d'origine vers les valeurs supérieures.



Par contre, pour un cas de minimisation, la solution optimale est donnée par le premier sommet de la Région des Solutions Possibles touché par la droite Z lorsqu'elle se déplace du sommet d'origine vers les valeurs supérieures.

Région des Solutions Possibles et Solution optimale :

- Vide : un PL sans RSP est un problème sans solutions possible et la solution optimale n'existe pas.
- Borné : le PL possède toujours une solution optimale.
- Il y a 02 solutions optimales : automatiquement, il y a plusieurs solution optimales.
- Non borné : dans ce cas, c'est selon la fonction Z choisie :
    - le PL possède une solution optimale
    - le PL n'admet pas de solution optimale finie.

Travail à Faire :

1/ Considérons les Programmes Linéaires suivants :

A/ $(\max)Z = 8x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

B/ $(\min)Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Questions :

- Représenter dans un graphe chacun des programmes linéaires donnés ;
- Déterminer les sommets des régions des solutions admissibles obtenues ;
- Calculer la valeur de la fonction économique en chaque sommet ;
- Tracer les droites des fonctions économiques qui passent par les sommets ;
- Commenter les résultats obtenus.

2/ Pour chacun des PL ci-dessous, donner une interprétation géométrique et déterminer la solution optimale si elle existe.

A/ $(\max)Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

B/ $(\max)Z = -3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

C/ $(\min)Z = 2x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

D/ $(\max)Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

E/ $(\min)Z = 6x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

F/ $(\max)Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq -1 \end{cases}$$

CHAPITRE 3 : METHODE DU SIMPLEXE

1/Définition :

La méthode du SIMPLEXE est une procédure algébrique permettant de résoudre un système d'équations linéaires (*avec* $m<n$) en tenant compte d'une fonction linéaire à optimiser. Elle permet de :

- Déterminer les solutions de base d'un système d'équations linéaires ;
- Satisfaire les contraintes de non négativité de variables ;
- Sélectionner parmi les solutions de bases réalisables celle qui optimise la fonction économique Z

2/Les étapes de la méthode :

Etape 1 : Transformer le PL en une forme standard. Il s'agit de transformer le système de contraintes en un système d'équations en ajoutant des variables d'écart[1] (V_E)

Etape 2 : Déterminer une première Solution de Base (SB) réalisable et non dégénérée du système d'équations (XB_0).

Etape 3 : Tester l'optimalité de cette première solution de base XB_0

[1] Parfois, l'ajout de variables d'écart n'est pas suffisant pour déterminer une première SB, il faut ajouter aussi des **variables artificielles**.

Etape 4 : Améliorer la SB s'il y a lieu. Il s'agit de déterminer une nouvelle solution de base **XB_1** avec **$Z_1 > Z_0$**

Etape 5 : Reprendre à partir de l'étape 3 pour la SB XB_1

3/Détermination d'une première SB réalisable et non dégénérée

A/ Rappel sur les solutions basiques d'un système d'équations linéaires

La méthode du SIMPLEXE s'appui sur celle du pivotage de GAUSS JORDAN utilisé pour résoudre un système d'équations linaires

L'idée est de transformer le système de contraintes en un système d'équations linéaires **A.X=b**, avec $m<n$.

Pour déterminer toutes les solutions basiques ce système, il suffit de choisir **m colonnes** de la matrice A et d'exprimer le système dans cette base.

Soit **B** : une sous matrice inversible formée de m colonnes de A

On obtient :

$$A=(B/N)$$

$$X=\begin{vmatrix} X_B \\ X_N \end{vmatrix}$$

$$B.X_B+N.X_N=b$$

$$B^{-1}\,[B.X_B+N.X_N=b]$$

$$B^{-1}.B.X_B+B^{-1}.N.X_N=B^{-1}.b$$

$$\text{Avec } X_N=0$$

$$\boxed{\mathbf{X_B=B^{-1}.b}}$$

***X_B** : Variables de base (VB)*
***X_N** : Variables hors base (VHB)*

Donc, à chaque fois qu'on choisit **m colonnes de A**, on obtient une solution de base. Parmi toutes les solutions de base d'un système d'équations linéaires, on distingue des solutions de base réalisables et des solutions de base non réalisables.

Une solution de base est dite réalisable **s'il n'existe aucune variable négative** (**$X_j \geq 0$**). Sinon, c'est une solution de base non réalisable.

Une solution de base est dite non dégénérée si **toutes les variables de Base $X_B \neq 0$** ou bien le nombre de variables non nulles égal **(n-m)**. Sinon, c'est une solution de base dégénérée.

B/Solution de Base de Départ (XB_0)

La SB de départ d'un programme linéaire canonique de type max standardisé est celle qui consisté à annuler les variables de décision **($X_D=X_N=0$)** et par conséquent, les variables d'écart égales respectivement aux bi **($X_E=X_B=b$)**

$$AX_D+IX_E=b$$

$$\textbf{Avec } X_D=X_N=0 \quad \text{puisque } B=I=I^{-1}$$

$$\boxed{X_E=b}$$

Comparativement à la méthode graphique, cette première SB correspond au sommet d'origine (0 ; 0).

D'une façon générale, dans la première SB, il faut faire en sorte de choisir la matrice **B=I**. Donc, les variables de base sont déterminées respectivement par les vecteurs colonnes de la matrice **I**.

4/Test d'optimalité d'une solution de base

Le test d'optimalité d'une solution de base consiste à calculer les coefficients marginaux (Kj).

Pour tester l'optimalité d'une SB quelconque, il y lieu de la représenter dans un tableau de la façon suivante :

T_i		C_j	C_1	C_2	.....	C_j	.....	C_n
CB	**XB**	**b**	X_1	X_2	.....	X_j	.....	X_n
CB_1	XB_1	b_1	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1j}	.....	a_{1n}
CB_2	XB_2	b_2	a_{22}	a_2	.....	a_{2j}	.....	a_{2n}
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
CB_i	XB_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	.....	a_{ij}	.....	a_{in}
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
.	.	.	.	.	.....	.	.....	.
CB_m	XB_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	.....	a_{mj}	.....	a_{mn}
Z_i		Z_j	Z_1	Z_2	.....	Z_j	.....	K_n
		K_j	K_1	K_2	.....	K_j	.....	K_n

Les formules :

$\mathbf{Z_i=CB^t.b}$

$\mathbf{Z_j= CB^t.A_j}$ avec **Aj** : vecteurs colonnes de la matrice A

$\mathbf{K_j=C_j- Z_j}$

Interprétation des Coefficients marginaux Kj

S'il existe au mois un **Kj>0**, cela implique que la solution de base est **améliorable**; sinon, c'est une solution de base **optimale.**

5/Amélioration d'une solution de base

Améliorer un SB consiste à passer d'une solution de base réalisable $\mathbf{XB_i}$ à une autre solution de base réalisable $\mathbf{XB_{i+1}}$ avec $\mathbf{Z_{i+1}>Z_i}$

L'amélioration d'une SB se fait par le **changement de base**

Un changement de base est une **permutation entre une variable de base (VB) et une variable hors base (VHB).** Il s'agit de déterminer :

- D'abord, **la variable entrante** (VE) : une VHB qui devient une VB.

$$\mathbf{VE} \longrightarrow \mathbf{max}[K_j \ ; \text{avec } K_j>0\ ] = \mathbf{Ks}$$

s : colonne pivot

- Ensuite, **la variable sortante** (VS) : une VB qui devient une VHB

$$\mathbf{VS} \longrightarrow \mathbf{min}[b_i/a_{is} \ ; \text{avec } a_{is}>0] = \theta$$

*La VS permet de déterminer la ligne pivot **r***

Lors du passage d'une SB à une autre, **la variable de Z** est donnée par la formule suivante :

$$\boxed{\Delta Z = K_s .\ \theta}$$

$$\boxed{Z_{i+1} = Z_i + K_s .\ \theta}$$

Dans chaque nouvelle SB, les $\mathbf{a'_{ij}}$ et les $\mathbf{b'_i}$ sont calculés comme suit :

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{rs}} \qquad b'_i = \frac{b_i}{a_{rs}} \qquad \textit{si : } i=r$$

6/Exemple d'application

Soit le programme linéaire suivant :

$$(\max)Z = X_1 + 2X_2$$
$$\begin{array}{rrcr} X_1 & +3X_2 & \leq & 21 \\ -X_1 & +3X_2 & \leq & 18 \\ X_1 & -X_2 & \leq & 5 \end{array}$$
$$X_1 \geq 0 \ ; \ X_2 \geq 0$$

TAF : En utilisant la méthode du Simplexe, trouver la solution optimale.

Réponse :

a- Standardisation

$$(\text{Max})Z = X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$$
$$\begin{array}{rrrrrcr} X_1 & +3X_2 & +X_3 & & & = & 21 \\ -X_1 & +3X_2 & & +X_4 & & = & 18 \\ X_1 & -X_2 & & & +X_5 & = & 5 \end{array}$$
$$X_1 \geq 0 \ ; X_2 \geq 0 \ ; \ X_3 \geq 0 \ ; \ X_4 \geq 0 \ ; \ X_5 \geq 0$$

Forme matricielle

$$\boxed{\begin{array}{c}(\text{Max})Z = C^t.X \\ A.X = b\end{array}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b- Solution de base de départ XB_0 :

Retenir comme matrice B, formée de 3 colonnes de A, les vecteurs de la matrice I

$$B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Première Solution de Base $XB_0 = \begin{pmatrix} X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix}, \ XN_0 = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} X3 \\ X4 \\ X5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 18 \\ 5 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

c- Test d'optimalité de XB_0

T_0		Cj	1	2	0	0	0
CB_0	XB_0	$b_{(0)}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	**21**	1	3	1	0	0
0	X_4	**18**	-1	**3**	0	1	0
0	X_5	**5**	1	-1	0	0	1
Z_0= 0		Zj	0	0	0	0	0
		Kj	1	2	0	0	0

Il existe des Kj >0; donc, cette solution de base est améliorable.

d- Amélioration de la Solution de Base

T_1		Cj	1	2	0	0	0
CB_1	XB_1	$b_{(1)}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	X_3	**3**	**2**	0	1	-1	0
2	X_2	**6**	-1/3	1	0	1/3	0
0	X_5	**11**	2/3	0	0	1/3	1
Z_1= 12		Zj	-2/3	2	0	2/3	0
		Kj	5/3	0	0	-2/3	0

Il existe un Kj >0; donc, cette solution de base est améliorable

T_2		Cj	1	2	0	0	0
CB_2	XB_2	$b_{(2)}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	X_1	**2/3**	1	0	1/2	-1/2	0
2	X_2	**13/3**	0	1	1/6	1/6	0
0	X_5	**10**	0	0	-1/3	**2/3**	1
Z_2= 29/2		Zj	1	2	5/6	-1/6	0
		Kj	0	0	-5/6	1/6	0

Il existe un Kj >0; donc, cette solution de base est améliorable

T_3		Cj	1	2	0	0	0
CB_3	XB_3	$b_{(3)}$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	X_1	**9**	1	0	1/4	0	3/4
2	X_2	**4**	0	1	1/4	0	-1/4
0	X_4	**15**	0	0	-1/2	1	3/2
Z_3= 17		Zj	1	2	¾	0	¼
		Kj	0	0	-3/4	0	-1/4

Il n'existe aucun Kj >0 ; donc, **cette solution de base est optimale**

e- La solution optimale :

Z= 17 obtenue avec $\mathbf{X_1= 9}$ et $\mathbf{X_2=4}$

Remarque :

Au dernier tableau du Simplexe :

- Si le nombre de **Kj nuls = m → la solution optimale est unique**.
- Si le nombre de **Kj nuls > m → le PL admet au moins une solution optimale équivalente,** ce qui veut dire qu'il y a une multitude de solutions optimales.

S'agissant de notre exemple, c'est une **solution optimale unique** car, **le nombre de Kj nuls = 3= m**

CHAPITRE 4 : DUALITE ET ANALYSE DE SENSIBILITE

1. Dualité

En programmation linéaire, chaque problème (appelé **primal)** possède un problème associé (appelé **dual)**. Ces deux problèmes sont liés par des propriétés mathématiques importantes.

La théorie de la dualité s'inspire de la théorie des jeux qui considère que les problèmes économiques sont « un jeu à somme nulle ». Les opérations économiques se produisent entre deux parties dont les objectifs ne sont pas les mêmes. Le vendeur essaye toujours de maximiser sa fonction de revenu. Par contre, l'acheteur essaye toujours de minimiser sa fonction de dépense. Pourtant, lors de la transaction, les deux parties s'entendent sur un même prix d'équilibre.

1.1. Règles de la dualité :

PL Primal	**PL Dual**
Maximisation ⟷	minimisation
Cj	***bi***
A	$\boldsymbol{A^t}$
Nombre de contraintes =	Nombre de variables
Nombre de variables =	Nombre de contraintes
Z* = W*	
Le Dual du dual = Primal	

En appliquant ces règles, on obtient ce qui suit :

PL Primal	PL Dual
(Max) $Z = C^t.X$ $S/C\ A.X \leq b$ $X \geq 0$	*(Min)* $W = b^t.Y$ $S/C\ A^t.Y \geq C$ $Y \geq 0$
(Min) $Z = C^t.X$ $S/C\ A.X \geq b$ $X \geq 0$	*(Max)* $W = b^t.Y$ $S/C\ A^t.Y \leq C$ $Y \geq 0$

1.2. Règles particulières de la dualité :

Elles s'appliquent pour de PL mixte : les contraintes du primal définissent les variables du dual dans le même sens. Tandis que, les variables du primal définissent les contraintes du dual dans un sens inverse.

PL Primal	PL Dual
$I^{ème}$ contrainte de type $\geq$	$J^{ème}$ variable ≥ 0
$I^{ème}$ contrainte de type $\leq$	$J^{ème}$ variable ≤ 0
$I^{ème}$ contrainte de type =	$J^{ème}$ variable sans signe
$J^{ème}$ variable ≥ 0	$I^{ème}$ contrainte de type $\leq$
$J^{ème}$ variable ≤ 0	$I^{ème}$ contrainte de type $\geq$
$J^{ème}$ variable sans signe	$I^{ème}$ contrainte de type =

1.3. Solution optimal du PL Dual à partir de la solution optimale du PL Primal :

Il est possible d'extraire la solution optimale du PL Dual à partir du PL Primal en s'appuyant sur le tableau optimal du PL Primal :

Kj du PL Primal	Variable de décision			Variables d'écart		
	K_1	K_2	K_2	K_4	K_5	K_6
Valeurs optimales des variables du Dual	Variables d'écart			Variable de décision		
	Y_4*	Y_5*	Y_6*	Y_1*	Y_2*	Y_3*

2. Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est une analyse post-optimale. Après avoir formulé et résolu un problème PL, l'analyse de sensibilité s'intéresse aux conséquences sur la solution optimale suite à la variation des données numériques du problème.

Souvent, les données sont des estimations. Il serait intéressant de savoir quel est la conséquence de la variation des ***Cj***, des ***bi*** ou des ***aij*** sur la solution optimale.

2.1. Analyse de la variation des *Cj*

Résoudre le PL Primal. L'objectif est d'étudier comment les variations des coefficients C1 (pour x1) et C2 (pour x2) affectent la solution optimale.

2.2. Analyse de la variation de bj

Après l'obtention de la solution optimale :

Toute contrainte saturée, c'est-à-dire que la valeur de la variable d'écart correspondante est nulle $\longrightarrow$ toute variation du bj correspondant impacterait la solution optimale. Ceci est lié au fait que la productivité marginale de ce facteur est positive : elle est donnée par le Kj correspondant à la variable d'écart de cette contrainte.

En revanche, toute contrainte non saturée, c'est-à-dire que la valeur de la variable d'écart correspondante est non nulle $\longrightarrow$ toute variation du bj correspondant n'aura pas d'incidence sur la solution optimale. Ceci est lié au fait que la productivité marginale de ce facteur est nulle : elle est donnée par le Kj correspondant à la variable d'écart de cette contrainte.

CHAPITRE 5 : PROBLEMES DE TRANSPORT

Les problèmes de transport sont des problèmes particuliers de la programmation linéaire. Ils portent sur la minimisation des coûts liés au transport d'une marchandise ou d'un bien quelconque depuis plusieurs sources vers plusieurs destinations tout en respectant les contraintes d'offre et de demande.

En d'autres termes, il s'agit d'expédier des quantités de marchandises depuis $\boldsymbol{m}$ origines vers $\boldsymbol{n}$ destinations en tenant compte des couts unitaires de transport de chaque origine vers chaque destination.

C'est un problème d'allocation optimale avec les paramètres suivants :

- **Origines** a_i *(**i** =1, m)* : représentent les points de départ (usines, entrepôts, ports, etc.), chacun avec une capacité d'approvisionnement donnée.
- **Destinations** b_j *(**j** = 1, n)* : représentent les points de destination (clients, magasins, centres de distribution, etc.), chacun formule une demande précise.
- **Coûts unitaires de transport** *(Cij) :* sont les coûts pour transporter une unité d'une source à une destination.

Objectif principal : minimiser le coût total de transport tout en satisfaisant les contraintes d'offre et de demande.

Ecriture mathématique :

Un problème de transport peut être formuler sous plusieurs façons :

Sous forme d'un programme linéaire

On pose X_{ij} : quantité de marchandise X à transporter de chaque origine ***i*** vers chaque destination ***j***

On pose que : Offre totale = Demande totale

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Fonction-objectif :

$$Min\ CT = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Contraintes d'offre :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Contraintes de la demande

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

avec

$$X_{ij} \geq 0$$

Sous forme d'un tableau :

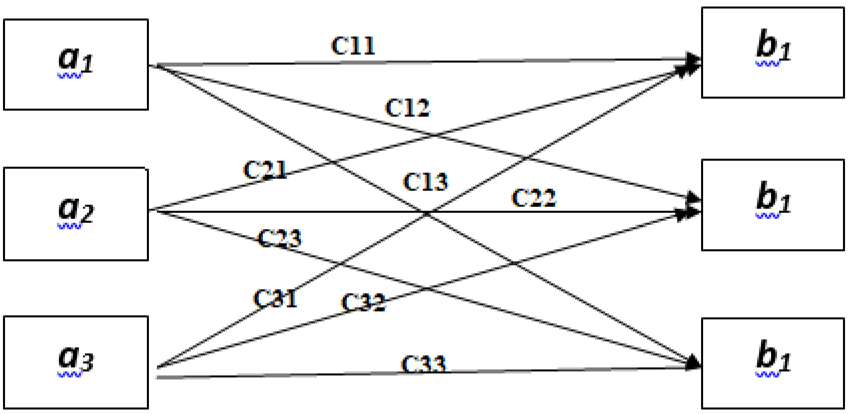
	D1	*D2*	*D3*	Sources
S1	$C_{11}\ (X_{11})$	$C_{12}\ (X_{12})$	$C_{13}\ (X_{13})$	$\boldsymbol{a_1}$
S2	$C_{21}\ (X_{11})$	$C_{22}\ (X_{22})$	$C_{23}\ (X_{23})$	$\boldsymbol{a_2}$
S3	$C_{31}\ (X_{31})$	$C_{32}\ (X_{32})$	$C_{33}\ (X_{33})$	$\boldsymbol{a_3}$
Demandes	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	$\boldsymbol{b_3}$	

Sous forme matricielle :

$$\mathbf{Cij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

avec $\boldsymbol{a_i} = a_1, a_2 \ldots a_m$ $\boldsymbol{b_j} = b_1, b_2 \ldots b_n$

Sous forme schématique :



Etapes de résolution d'un problème de transport :

1. Détermination une d'une première solution de base non dégénérée ;

2. Test d'optimalité de la solution de base

3. Amélioration de la solution de base (s'il y a lieu) jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

Détermination de la première solution de base :

Il existe plusieurs méthodes de détermination de la première solution de base :

- La méthode du coin nord-ouest ;
- La méthode minimum cout ;
- La méthode de la différence maximale.

La méthode du coin nord-ouest

La **méthode du coin Nord-Ouest** est une technique simple pour trouver une solution de base initiale dans un problème de transport. Elle commence par allouer des quantités à partir du coin supérieur gauche (Nord-Ouest) du tableau de transport et se déplace ligne par ligne et/ou colonne, en respectant les contraintes d'offre et de demande.

Exemple :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4 **20**	8	9	**30**
a_2	7	6	5	**50**
a_3	3	4	8	**20**
	20	**40**	**40**	

La case nord-ouest dans ce tableau est **$(a_1 ; b_1)$**

Affecter à cette case le minimum entre a_1 et le b_1 correspondant. min (30 ; 20) = 20.

Suite à cette affectation, il y a une ligne et/ou colonne saturée(s). Dans notre cas, c'est la première colonne qui est saturée. On obtient alors un nouveau tableau réduit d'une ligne et/ou colonne.

	b_2	b_3	
a_1	8 **10**	9	**10**
a_2	6	5	**50**
a_3	4	8	**20**
	40	**40**	

Affecter à la case $(a_1 ; b_2)$ le minimum entre ai et bj correspondant. min (40 ; 10) = 10

	b_2	b_3	
a_2	6 **30**	5	**50**
a_3	4	8	**20**
	30	**40**	

Affecter à la case $(a_2 ; b_2)$ le minimum entre ai et bj correspondant. min (30 ; 50) = 30

Enfin, lorsqu'il reste une seule rangée (ligne ou colonne), on affecte directement les quantités restantes aux cases correspondantes

	b_3	
a_2	5 **20**	**20**
a_3	8 **20**	**20**
	40	

La solution initiale avec la méthode du coin nord-ouest se présente comme suit :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4 **20**	8 **10**	9	**30**
a_2	7	6 **30**	5 **20**	**50**
a_3	3	4	8 **20**	**20**
	20	**40**	**40**	

*Le cout total = (4 *20) + (8*10) + (6*30) + (5*20) + (8*20) =* ***600***

La méthode du CNO est simple, rapide et facile à appliquer. Toutefois, souvent, les résultats obtenus sont sous-optimaux, car elle ne tient pas compte des couts unitaires de transport.

La Méthode MINICO (Coût Minimum) :

La méthode MINICO consiste à allouer en priorité aux cellules ayant le **plus faible coût unitaire** (Cij). Elle tend à produire une solution initiale moins coûteuse que la méthode du coin Nord-Ouest.

Étapes :

1. Identifier la cellule renfermant le **plus petit coût unitaire** (Cij) dans le tableau.
2. Allouer la quantité maximale possible (min (ai, bj) à cette cellule.
3. Mettre à jour les capacités d'offre (ai) et les besoins en demande (bj).
4. Supprimer la ligne ou la colonne si l'offre ou la demande est épuisée.
5. Répéter jusqu'à ce que toutes les cellules soient remplies.

Reprenons le même exemple :

La case qui renferme le cout unitaire le plus bas dans le tableau est (a_3 ; b_3)

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4	8	9	**30**
a_2	7	6	5	**50**
a_3	3 **20**	4	8	**20**
	20	**40**	**40**	

	b_2	b_3	
a_1	8	9	**30**
a_2	6	5 **40**	**50**
	40	**40**	

	b_2	
a_1	8 **30**	**30**
a_2	6 **10**	**10**
	40	

La solution initiale avec la méthode MINICO se présente comme suit :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4	8 **30**	9	**30**
a_2	7	6 **10**	5 **40**	**50**
a_3	3 **20**	4	8	**20**
	20	**40**	**40**	

*Le cout total = (8 *30) + (6*10) + (5*40) + (3*20) =* ***560***

Cette méthode donne une solution initiale plus économique. Cependant, elle peut être complexe lorsqu'il y a plusieurs coûts égaux.

Méthode de la Différence Maximale :

La méthode de la différence maximale est une approche plus sophistiquée qui vise à minimiser le coût total dès la solution initiale. Elle se base sur la **pénalité de coût**, c'est-à-dire la différence entre les deux plus petits coûts d'une ligne ou d'une colonne.

Étapes :

1. Calculer la **pénalité de coût** pour chaque ligne et chaque colonne :

$$\text{Pénalité} = C_{\text{2ème coût le plus bas}} - C_{\text{coût le plus bas}}$$

2. Identifier la ligne ou colonne avec la plus grande pénalité.
3. Allouer la quantité maximale possible min(ai,bj) à la cellule ayant le coût minimum dans cette ligne ou colonne.
4. Mettre à jour les offres $\mathbf{a_i}$ et demandes $\mathbf{b_j}$
5. Répéter en recalculant les pénalités jusqu'à ce que toutes les cellules soient remplies.

Reprenons le même exemple :

	b_1	b_2	b_3		
a_1	4 **20**	8	9	**30**	$\boxed{5}$
a_2	7	6	5	**50**	1
a_3	3	4	8	**20**	1

	20	40	40
	1	2	3

- La pénalité la plus élevée est 5 et correspond à la première ligne
- Dans la première ligne, c'est la case (1, 1) qui renfreme le Cij le plus petit.
- Affecter a cette case min (a_1 ; b_1)
- Reprenons sans la colonne 1

	b_2	b_3		
a_1	8	9	10	1
a_2	6	5	50	1
a_3	4 **20**	8	20	$\boxed{4}$
	40	40		
	2	3		

	b_2	b_3		
a_1	8	9	10	1
a_2	6	5 **40**	50	1
	20	40		
	2	$\boxed{4}$		

	b_2	
a_1	8 **10**	10
a_2	6 **10**	10
	20	

La solution initiale avec la méthode de la différence maximale se présente comme suit :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4 / **20**	8 / **10**	9	**30**
a_2	7	6 / **10**	5 / **40**	**50**
a_3	3	4 / **20**	8	**20**
	20	**40**	**40**	

*Le cout total = (4 *20) + (8*10) + (6*10) + (5*40) + (4*20)* = ***500***

Cette méthode mobilise plus de calculs par rapport aux autres méthodes, mais elle donne souvent des résultats optimaux ou proches de la solution optimale.

Détermination de la solution optimale :

La méthode de STEPPING STONE est utilisée pour améliorer une solution de base initiale d'un problème de transport afin d'obtenir une solution optimale.

Elle vérifie si une solution de base initiale est optimale en calculant les **coûts réduits** pour les cellules vides et détermine si une réallocation des quantités transportées peut réduire le coût total.

Étapes de la Méthode de STEPPING STONE :

1. Partir d'une solution de base initiale :

- La solution de base initiale doit contenir exactement (m+n−1) cellules remplies.
- Pour chaque case vide, on affecte un (+1)

- Suite à cette affectation, les équilibres lignes et colonnes sont remis en cause. Donc, on rétablit l'équilibre avec de (-1) et (+1), tout en touchant uniquement aux case pleines.
- Enfin, il y a lieu de calculer le cout réduit (Δij) pour toutes les cases vides : on fait la sommation des Cij de toutes les case touchées en tenant compte des signes (+1) et (-1).
- Interprétation des résultats :
  - Si tous les $\Delta ij \geq 0$, la solution actuelle est optimale.
  - Si au moins un $\Delta ij < 0$, il existe une possibilité de réduire le coût total.

Exemple : reprenons la solution de base initiale obtenue avec la méthode du CNO :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4 **20**	8 -1 **10**	9 +1	**30**
a_2	7	6 +1 **30**	5 **-1** **20**	**50**
a_3	3	4	8 **20**	**20**
	20	**40**	**40**	

Δ_{13}= 9-5+6-8 = **2**

Δ_{21}=7-6+8-4 = **5**

Δ_{31}=3-8+5-6+8-4= **-2**

Δ_{32}=4-8+5-6 = **-5**

Cette solution de base n'est pas optimale, car elle renferme des Δ_{ij} négatif. Donc, c'est une solution améliorable.

Amélioration d'une solution de base :

Etape 1 : identifier la cellule vide avec Δij le plus négatif.

Etape 2 : déterminer la plus petite quantité Xij des cases concernées par le calcul du Δij

Etape 3 : faire l'échange circulaire, c'est-à-dire affecter cette quantité Xij à la case vide du Δij le plus négatif et rétablir les équilibres en linges et en colonnes.

Etapes 4 : recalculer les Δij pour chaque cellule vide jusqu'à ce que tous soient positifs ou nuls.

Dans notre cas, Δ_{32} est le plus négatif :

Les cases concernées sont :

	b_2	b_3
a_2	6 -1 **30**	5 +1 **20**
a_3	4 +1	8 -1 **20**

La quantité Xij le plus petite est de 20

On établit maintenant l'échange circulaire :

	b_2	b_3
a_2	6 **10**	5 **40**
a_3	4 **20**	8

Apportons cette modification à la solution de base initiale :

	b_1	b_2	b_3	
a_1	4 **20**	8 **10**	9	**30**
a_2	7	6 **10**	5 **40**	**50**
a_3	3	4 **20**	8	**20**

20 40 40

Cout total =500

Nous sommes passé d'une CT de 600 à un CT de 500.

Testons à nouveau l'optimalité de cette nouvelle solution de base :

Δ_{13}=9-5+6-8=2

Δ_{21}=7-6+8-4=5

Δ_{31}=3-4+8-4=3

Δ_{33}=8-5+6-4=5

Cette solution de base est optimale, car elle ne renferme aucun Δ_{ij} négatif.

EXAMENS ET CORRECTIONS

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET DE GESTION
Département des Sciences de Gestion **09-05-2024**
Filière : Sciences de Gestion
Niveau : L2 (semestre 4) **Durée : 01h30mn**
Matière : Fondements de Recherche opérationnelle

Examen

(Session normale)

EXERCICE N° 01 : *(06 pts)*

Une entreprise de fabrication de châssis envisage la production de 02 nouveaux modèles au moyen des capacités de ses 03 ateliers. Il s'agit respectivement d'un châssis en aluminium et d'un châssis en bois. Le premier modèle nécessite le passage dans le premier atelier pour fabriquer le cadre en aluminium et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le châssis. Tandis que le second modèle nécessite le passage dans le deuxième atelier pour fabriquer le cadre en bois et dans le troisième atelier où le verre est monté sur le châssis. Les marges unitaires sont de 3000 DA pour le premier modèle et 5000 pour le second modèle.

Le premier modèle nécessite 2 heures dans l'atelier 1 et 3 heures dans l'atelier 3. Quant au deuxième modèle, il nécessite 4 heures dans le deuxième atelier et 5 heures dans l'atelier3.

Les disponibles hebdomadaires de chaque atelier sont : 4 heures pour l'atelier 1 ; 12 heures pour l'atelier 2 ; 16 heures pour l'atelier 3.

L'entreprise souhaite établir le meilleur plan de production.

Question : Ecrire le problème sous forme d'un programme linéaire.

EXERCICE N° 02 : *(07 pts)*

Résoudre par **la méthode graphique** le programme linéaire suivant :

$$(Max)Z = 9X_1 + 12X_2$$

$$\begin{array}{rrcr} 3X_1 & +4X_2 & \leq & 42 \\ X_1 & +3X_2 & \leq & 24 \\ X_1 & & \leq & 10 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

EXERCICE N° 03 : *(07 pts)*

Soit le programme linéaire suivant :

$$(Max)Z = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{array}{rrcr} X_1 & +2X_2 & \leq & 6 \\ X_1 & +X_2 & \leq & 4 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

Questions :

1- Résoudre le programme linéaire en utilisant la **méthode du simplexe**
2- Formuler son programme linéaire dual
3- Donner la solution optimale du programme linéaire dual

Correction de l'EMD

Fondements de Recherche Opérationnelle

Exercice 1 :

Données :

	Châssis en Aluminium	Chassais en Bois	Disponibilité hebdomadaire
Atelier 1	2		4
Atelier 2		4	12
Atelier 3	3	5	16
Marges unitaires	3000	5000	

Choix de variables :

X_1 = Nombre de châssis en Aluminium à produire
X_2 = Nombre de châssis en Bois à produire
Z = Bénéfice total de l'entreprise

Le programme linéaire :

$$\textbf{(max)}Z = 3000\, X_1 + 5000\, X_2$$

$$\begin{array}{lllll} 2X_1 & & & \leq & 4 \\ & & 4X_2 & \leq & 12 \\ 3X_1 & & +5X_2 & \leq & 16 \end{array}$$

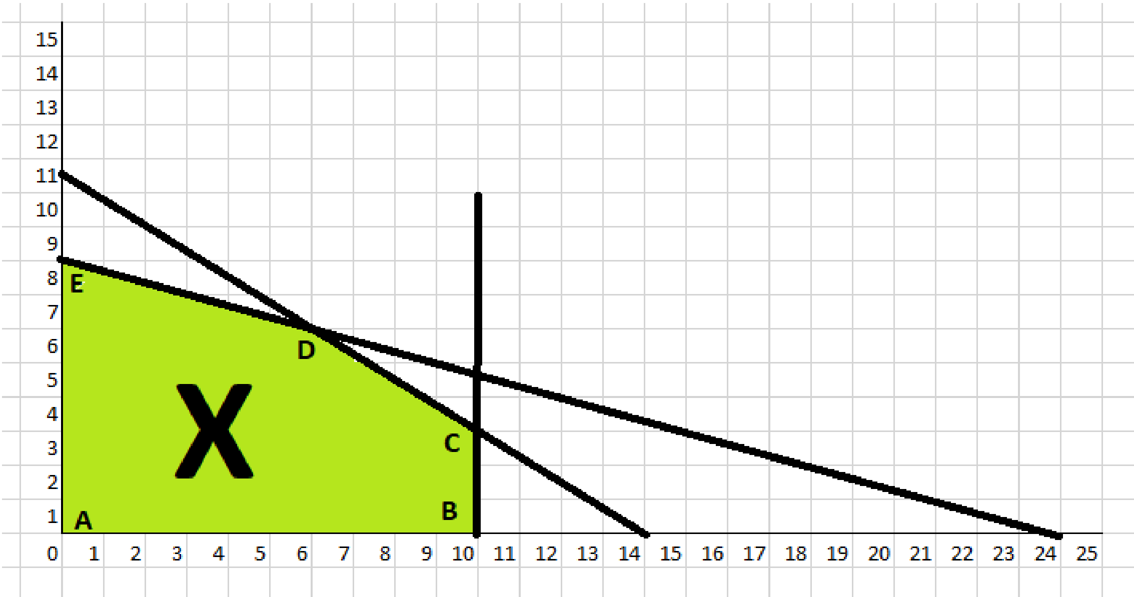
$$X_1 \geq 0\ ;\ X_2 \geq 0$$

Exercice 2 :

Coordonnées des droites :

Droite 1 : (14 ; 0) (0 ; 10,5)
Droite 2 : (24 ; 0) (0 ; 8)
Droite 3 : (10 ; 0) (10 ; 10)

Graphe :



La **X** est un espace borné. Donc, la solution optimale existe. Elle se trouve sur l'un po plusieurs sommets de **X**. Il suffit de calculer Z en chaque sommet et choisir ensuite la valeur la plus élevée.

Sommet	X1	X2	Z = 9X1 + 12X2
A	0	0	0
B	10	0	90
C	10	3	**126**
D	6	6	**126**
E	0	8	96

La solution Optimale :

$$max\ (Z_A\ ;\ Z_B\ ;\ Z_C\ ;\ Z_D\ ;\ D_E) = \boldsymbol{Z_C \text{ et } Z_D}$$

Cela veut dire que **nous avons deux solutions optimales**. Ceci implique, **nous avons plusieurs solutions optimales**. Tous les points situés sur **le segment de droite 1 allant du sommet C jusqu'au sommet D constituent des solutions optimales ;** car la pente de Z et celle de la droite 1 sont les mêmes.

Exercice 3 :

Standardisation

$$(Max)Z = 2X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$\begin{array}{lllll} X_1 & +2X_2 & +X_3 & & = 6 \\ X_1 & + X_2 & & +X_4 & = 4 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0 \; ; \quad X_2 \geq 0 \; ; X_3 \geq 0 \; ; X_4 \geq 0$$

Solution de base de départ :

$XB_0 = \begin{pmatrix} X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $XN_0 = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Test d'optimalité de XB_0

T_0		**Cj**	2	1	0	0
CB_0	XB_0	**b**	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	**6**	1	2	1	0
0	X_4	**4**	1	1	0	1
Z_0 = 0		**Zj**	0	0	0	0
		Kj	2	1	0	0

XB_0 n'est pas une solution de base optimale, car il y a des Kj positifs

Changement de base :

- VE : max (Kj avec Kj>0) = K_s= K_1. Donc, **VE=X_1**
- VS : min (bi/ais avec ais>0) = ϴ = 4. Donc, **VS=X_4**

T_1		**Cj**	2	1	0	0
CB_1	XB_1	**b**	X_1	X_2	X_3	X_4
0	X_3	**2**	0	1	1	-1
2	X_1	**4**	**1**	1	0	1
Z_1 = 8		**Zj**	2	2	0	2
		Kj	0	-1	0	-2

XB_1 est une solution de base optimale, car tous les Kj ≤ 0

La solution optimale est :

$$Z^* = 8 \quad \left| \begin{array}{l} X_1^* = 4 \\ X_2^* = 0 \end{array} \right.$$

Programme Linéaire Dual	Solution optimale du PL dual
$(Min)W = 6Y_1 + 4Y_2$ $Y_1 + Y_2 \geq 2$ $2Y_1 + Y_2 \geq 1$ $Y_1 \geq 0 \; ; \; Y_2 \geq 0$	$W^* = Z^* =$ **8** $Y_1^* = \lvert K3 \rvert =$ **0** $Y_2^* = \lvert K4 \rvert =$ **2**

FACULTE DES SCIENCES ECONOMIQUES, COMMERCIALES ET DE GESTION
Département des Sciences de Gestion **13-06-2024**
Filière : Sciences de Gestion
Niveau : L2 (semestre 4) **Durée : 01h30mn**
Matière : Fondements de Recherche opérationnelle

Examen de Rattrapage

EXERCICE N° 01 : *(06 pts)*

Une entreprise fabrique deux produits nouveaux S et T. Les marchés de ces produits peuvent entre considérés, pour l'instant, comme illimités.

La fabrication de ces produits nécessite le passage dans trois ateliers. Le tableau suivant donne les renseignements sur le processus de production

	Nombre d'heures nécessaires pour une unité de S	Nombre d'heures nécessaires pour une unité de T	Cout d'une heure (DA)
Atelier 1	**3**	**2**	**40**
Atelier 2	**3**	**7**	**45**
Atelier 3	**8**	**6**	**60**

Les prix de vente unitaires sont de 395 DA pour le produits S et de 920 DA pour le produit T.

Les capacités de production de chaque atelier sont limitées à : 400 heures pour l'atelier 1 ; 1000 heures pour l'atelier 2 et 1100 heures pour l'atelier 3.

Question : Ecrire le programme linéaire qui maximise le bénéfice de l'entreprise.

EXERCICE N° 02 : *(07 pts)*

Résoudre par **la méthode graphique** le programme linéaire suivant :

$$(Max)Z = 115X_1 + 90X_2$$

$$\begin{array}{rrcl} 5X_1 & -4X_2 & \leq & 40 \\ -X_1 & +2X_2 & \leq & 10 \\ & 2X_2 & \leq & 12 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

EXERCICE N° 03 : *(07 pts)*

Soit le programme linéaire suivant :

$$(Max)Z = 4X_1 + 2X_2$$

$$\begin{array}{rrcl} 3X_1 & -1X_2 & \leq & 6 \\ 2X_1 & & \leq & 4 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0$$

Questions :

4- Résoudre le programme linéaire en utilisant la **méthode du simplexe**

5- Formuler son programme linéaire dual

Correction de l'Examen de Rattrapage

Fondements de Recherche Opérationnelle

Exercice 1 :

Données :

	Nombre d'heures nécessaires pour une unité de S	Nombre d'heures nécessaires pour une unité de T	Cout d'une heure (DA)
Atelier 1	**3**	**2**	**40**
Atelier 2	**3**	**7**	**45**
Atelier 3	**8**	**6**	**60**
Cout Unitaire	735	755	
PV Unitaire	395	920	
Bénéfice Unitaire	-340	165	

Choix de variables :

X_1 = Nombre de produits de type S à produire

X_2 = Nombre de produits de type T à produire

Z = Bénéfice total de l'entreprise

Le programme linéaire :

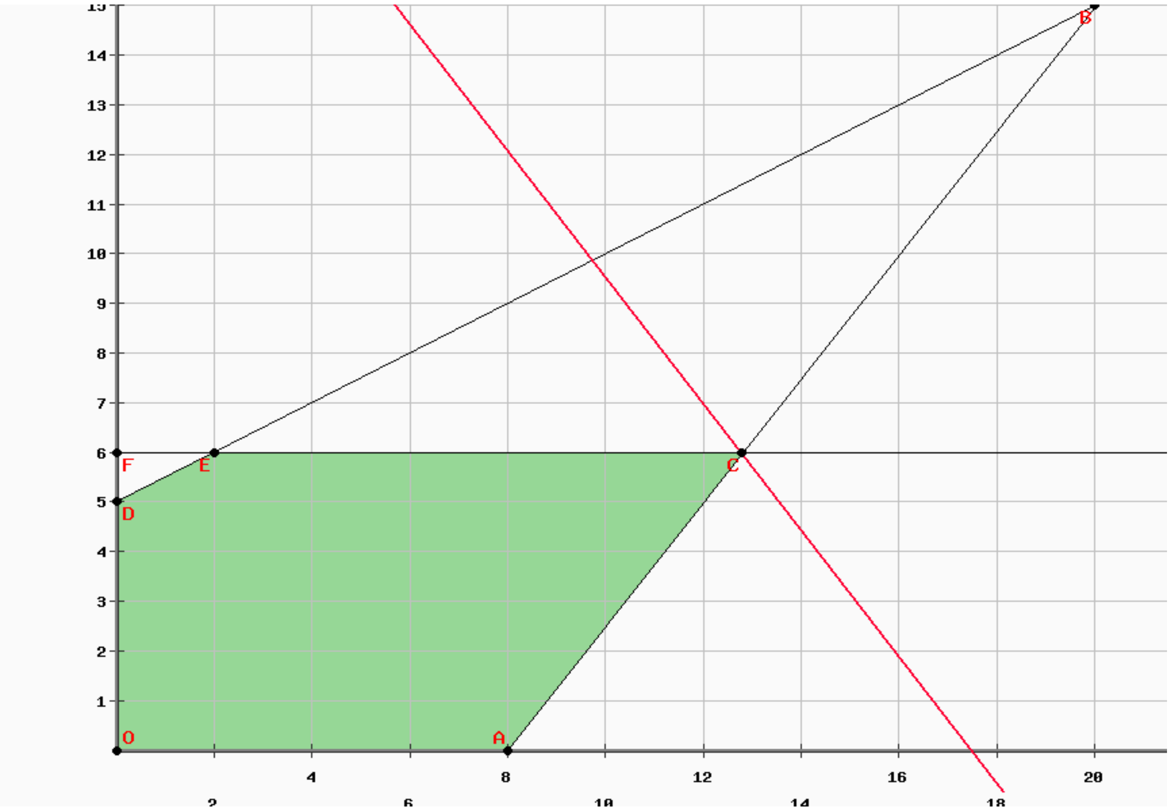
$$(\max)Z = -340\, X_1 + 165\, X_2$$

$$\begin{array}{llll} 3X_1 & +2X_2 & \leq & 40 \\ 3X_1 & +7X_2 & \leq & 45 \\ 8X_1 & +6X_2 & \leq & 60 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0 \; ; \; X_2 \geq 0$$

Exercice 2 :

Graphe :



La **X** est un espace borné. Donc, la solution optimale existe. Elle se trouve sur l'un po plusieurs sommets de **X**. Il suffit de calculer Z en chaque sommet et choisir ensuite la valeur la plus élevée.

Sommet	X1	X2	Z = 9X1 + 12X2
O	0	0	0
A	8	0	920
C	64/5	6	**2012**
E	2	6	770
D	0	5	450

La solution Optimale :

$$max\ (Z_A\ ;\ Z_B\ ;\ Z_C\ ;\ Z_D\ ;\ D_E) = \boldsymbol{Z_C}$$

$Z^* = 2021$ avec $X_1^* = 64/5$ (12,8) et $X_2^* = 6$.

Exercice 3 :

Standardisation

$$(Max)Z = 4X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

$$\begin{array}{llllll} 3X_1 & -X_2 & +X_3 & & = & 6 \\ 2X_1 & & & +X_4 & = & 4 \end{array}$$

$$X_1 \geq 0\ ; \quad X_2 \geq 0\ ; X_3 \geq 0\ ; X_4 \geq 0$$

Solution de base de départ :

$XB_0 = \begin{pmatrix} X3 \\ X4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $XN_0 = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Test d'optimalité de XB_0

T_0		**Cj**	4	**2**	0	0
CB_0	XB_0	**b**	X_1	$\mathbf{X_2}$	X_3	X_4
0	X_3	**6**	3	**-1**	1	0
0	X_4	**4**	2	**0**	0	1
Z_0 = 0		**Zj**	0	**0**	0	0
		Kj	4	**2**	0	0

Le PL n'admet pas de solution optimale finie, car K_2 est positif et l'ensemble des éléments a_{ij} lui correspondants sont inférieurs ou nuls.

Programme Linéaire Dual
$(Min)W = 6Y_1 + 4Y_2$
$\begin{array}{llll} 3Y_1 & +2Y_2 & \geq & 4 \\ -Y_1 & & \geq & 2 \end{array}$
$Y_1 \geq 0\ ; \quad Y_2 \geq 0$

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : Présentation de la programmation linéaire

Chapitre 2 : Interprétation géométrique d'un PL (n=2)

Chapitre 3 : Méthode du Simplexe

Chapitre 4 : Dualité et Analyse de sensibilité

Chapitre 5 : Problémes de transport