Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences - Département de Physique

Cours et exercices corrigés

Vibrations et Ondes

Cheballah Yamina

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié s'adresse aux étudiants de la deuxième année des filières techniques, plus particulièrement Licence de Physique, Electrotechnique, Electronique et Automatique, ainsi que les classes préparatoires des grandes écoles.

Dans ce polycopié, j'ai proposé le cours que j'ai présenté aux étudiants de deuxième année Licence en Electrotechnique ainsi que des solutions aux séries d'exercices.

Je tiens à remercier mes collègues : Madame Mezeghrane Lamia, enseignante à l'Université de Tizi-Ouzou et Madame Mayout Saliha, enseignante à l'Ecole Supérieure des Sciences Appliquées d'Alger, pour leurs aides et précieuses remarques dont elles m'ont fait part lors de la rédaction de ce polycopié. Je remercie également Madame Hamoum Karima, enseignante à l'Université de Tizi-Ouzou, pour m'avoir fait part de ses remarques lors de la lecture du manuscrit initial.

L'apprentissage ne peut être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entrainer. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite. Evidemment, pour tirer le meilleur profit de ce polycopié, le lecteur ne devra consulter le corrigé qu'après recherche personnelle approfondie.

Cheballah Yamina
Tizi-Ouzou (Algérie), Novembre 2022

Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange

1. 1. Formalisme de Lagrange

Afin d'étudier le mouvement des systèmes nous utilisons le formalisme de Lagrange. Ce formalise est construit autour du concept d'énergie. Il permet de contourner les difficultés du formalisme newtonien en relation avec les notions de forces et de vecteurs. Avant d'aborder ce formalisme, il est utile de passer en revue quelques notions de base nécessaires.

1. 1. 1. Coordonnées généralisées

La position d'un point matériel m, dans l'espace, par rapport à une origine O, est déterminée, à l'instant t, par la connaissance du rayon vecteur : $\overrightarrow{Om} = \vec{r}$, ou de trois coordonnées : x, y, z dans un repère cartésien, r, θ, z en coordonnées cylindriques, r, θ, φ en coordonnées sphériques.

Pour avoir sa position à l'instant $t + \Delta t$, il faut connaître, en plus, sa vitesse : $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dOm}}{dt}$ c'est-à-dire : $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ que l'on peut noter : $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Le mouvement de ce point matériel peut être caractérisé par une fonction des variables : $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Un système de N points matériels est repéré, dans l'espace, par $3N$ coordonnées : $x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_N, z_1, z_2, \dots, z_N$.

Il est plus commode, pour étudier son mouvement, d'utiliser les coordonnées généralisées : $q_1, q_2, \dots, q_i, q_n$ avec $n = 3N$ et leurs dérivées : $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_n$ (les $3N$ coordonnées sont indépendantes).

Ce système à ' n degrés de liberté' sera caractérisé par une fonction $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ appelée 'fonction de Lagrange' ou 'lagrangien'.

1. 1. 2. Liaisons et degrés de liberté

On appelle liaison, des contraintes imposées aux mouvements dans l'espace de N points matériels, qui constituent le système (les $3N$ coordonnées ne sont pas indépendantes).

Le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre minimal de coordonnées indépendantes qui détermine complètement la position de ce système. Il est donné par : $n = N_c \times M - L$.

où n est le nombre de degré de liberté, N_c le nombre de coordonnées, M le nombre de points matériels et L le nombre de liaisons.

1. 1. 3. Exemples

Donner les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées généralisées adéquates des systèmes (a), (b) et (c).

a/ Pendule simple de longueur l :

$n = N_c \times M - L$

n : nombre de degré de liberté.

N_c : nombre de coordonnées. Nous avons 2 coordonnées x, y.

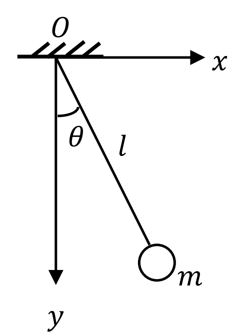
M : nombre de points matériels. Nous avons une masse m.

L : nombre de liaisons, c'est 1 :

$x^2 + y^2 = l^2$ (la longueur du pendule est constante).

donc : $n = 2 \times 1 - 1 = 1$ ddl (un degrés de liberté).

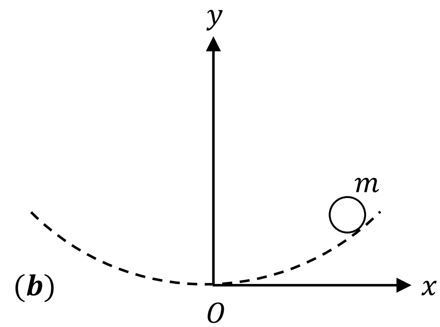
$(\boldsymbol{a})$



La coordonnée généralisée :

$q = \theta$.

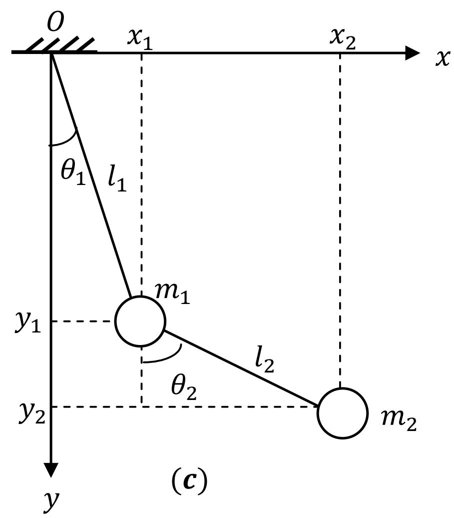
b/ Particule oscille dans le creux d'une glissoire parabolique :



$n = N_c \times M - L$
$N_c = 2$: nous avons 2 coordonnées x, y.
$M = 1$: nous avons une masse m.
$L = 1$: nombre de liaisons, c'est 1 :
$y = a\, x^2$ (la masse se déplace le long d'une parabole).
donc : $n = 2 \times 1 - 1 = 1$ ddl.

La coordonnée généralisée :
$q = x$.

c/ Un pendule doublé, constitué de deux masses m_1 et m_2, suspendues respectivement aux fils sans masse inextensibles de longueur l_1 et l_2 :



$n = N_c \times M - L$
$N_c = 2$: nous avons 2 coordonnées x et y.
$M = 2$: nous avons 2 masses m_1 et m_2.
$L = 2$: nombre de liaisons, c'est 2 :
$l_1^2 = x_1^2 + y_1^2$
$l_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
donc : $n = 2 \times 2 - 2 = 2$ ddl

Les coordonnées généralisées :
$q_1 = \theta_1$ et $q_2 = \theta_2$.

Le nombre de degrés de liberté d'un système correspond au nombre n de mouvements indépendants de ce système.

1. 2. Equation de Lagrange pour une particule
1. 2. 1. Equation de Lagrange

Considérons une particule de masse m astreinte à se déplacer. Soit $\vec{F}$ la résultante des forces agissant sur la particule. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse du système.
Soit $\delta\omega$ le travail fourni par la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal δr :

$$\delta\omega = \vec{F}.\delta\vec{r}$$

Le déplacement infinitésimal $\delta\vec{r}$ peut s'écrire en fonction de la variation δq de la coordonnée généralisée q :

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

Dans ce cas, le travail $\delta\omega$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta\omega = \vec{F}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

On appelle force généralisée conjuguée de q, la quantité F_q définie par :

$$F_q = \frac{\delta\omega}{\delta q} = \vec{F}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}$$

Par conséquent $\delta\omega$ s'écrit :

$$\delta\omega = F_q.\delta q$$

En tenant compte de la relation fondamentale de la dynamique, cette expression peut également s'écrire :

$$\delta\omega = m\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\delta q$$

d'autre part :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} + \vec{v}.\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right)$$

or on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} + \vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}\right) - \vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$, peut aussi s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}.\dot{q}$$

d'où :

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q}$$

donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}\right) - \vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}\vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}.2\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}\right) = \vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}}$$

et que :

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}\vec{v}\right)=\frac{1}{2}.2\left(\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}\right)=\vec{v}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial q}$$

on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

L'expression du travail $\delta\omega$ peut alors s'écrire :

$$\delta\omega=m\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right\}\delta q$$

Si on note $T=\frac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique de la masse m, on obtient :

$$\delta\omega=\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\right\}\delta q$$

on obtient les deux expressions équivalentes du travail $\delta\omega$:

$$\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}\right\}\delta q=F_q.\delta q$$

On obtient l'équation de d'Alembert pour un système à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=F_q$$

1. 2. 2. Cas des systèmes conservatifs

Dans le cas des systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et s'écrit :

$$F_q=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial T}{\partial q}=-\frac{\partial U}{\partial q}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial(T-U)}{\partial q}=0$$

Généralement, l'énergie potentielle U ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire que $\frac{\partial U}{\partial\dot{q}}=0$.

L'équation de Lagrange peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}}\right]-\frac{\partial(T-U)}{\partial q}=0$$

On introduit la fonction de Lagrange (ou lagrangien du système), qui est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$L=T-U$

D'où la forme de l'équation de Lagrange dans le cas d'un système conservatif :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$$

1. 2. 3. Cas des forces de frottements dépendant de la vitesse

Considérons une situation dans laquelle le système est soumis à des forces de frottement de viscosité dont la résultante $\vec{f}$ est de la forme : $\vec{f}=-\alpha\vec{v}$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

1. 2. 4. Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Considérons le cas plus général d'une force extérieure dépendant du temps, agissant sur un système qui est le siège de forces de frottement qui dérivent d'une fonction de dissipation D. Soit $F_{e,q}$ la force extérieure. Dans ce cas, l'équation de Lagrange peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}+F_{e,q}=-\beta\dot{q}+F_{e,q}$$

1. 3. Système à plusieurs degrés de liberté

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équation de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède N degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir N coordonnées généralisées $q_i(i=1,2,3,\dots,N)$; nous aurons ainsi N équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+F_{e,q_i}\ \ (i=1,2,3,\dots,N)$$

où F_{e,q_i} est une force extérieure.

1. 4. Rappels

1. 4. 1. Energie potentielle

1. 4. 1. 1. Energie potentielle gravitationnelle (de pesanteur)

Méthode rapide pour le calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle :

- Faire correspondre l'origine de l'énergie potentielle ($U_g=0$) avec l'origine des coordonnées.
- Trouver l'expression de l'ordonnée z du point matériel, dans le repère choisi.

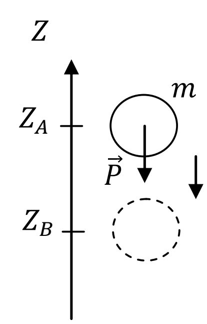
$U_g=\pm mgZ$

$U_g>0$ si la masse est au dessus de $U_g=0$ et $U_g<0$ dans le cas contraire.

Démonstration

On suppose qu'un objet de masse m passe d'une altitude Z_A à Z_B.

Le poids $\vec{P}$ est une force conservative, donc elle dérive d'un potentiel :

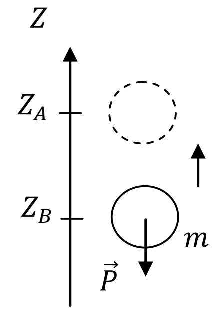


$$\vec{P}=-\overrightarrow{grad}\,U_g \Rightarrow U_g=-\int\vec{P}.\vec{d}_Z$$

$$\vec{P}=\begin{cases}0\\mg\end{cases}$$

$$\vec{d}_Z=\begin{cases}0\\dZ\end{cases}$$

$$U_g = -\int_{Z_A}^{Z_B} mg\, dZ = -mg[dZ]_{Z_A}^{Z_B} = -mg(Z_B - Z_A)$$



On pose : $Z = Z_A - Z_B$

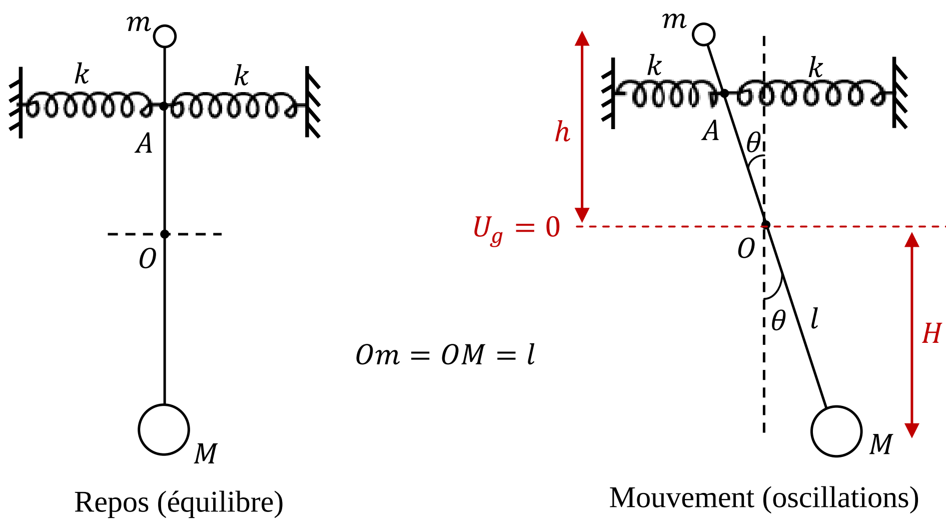
donc $U_g = mgZ$

On suppose maintenant que l'objet de masse m passe de l'altitude Z_B à Z_A :

$$U_g = -\int_{Z_B}^{Z_A} mg\, dZ = -mg[dZ]_{Z_B}^{Z_A} = -mg(Z_A - Z_B) = -mgZ$$

donc $U_g = \pm mgZ$

Exemple 1 : Calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle



$$U_g = U_{gm} + U_{gM} = mgh - MgH$$

On a :

$$\cos\theta = \frac{H}{l} = \frac{h}{l} \Rightarrow H = h = l\cos\theta$$

$$U_g = (m - M)gl\cos\theta$$

On a :

$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ (Développement de Taylor).

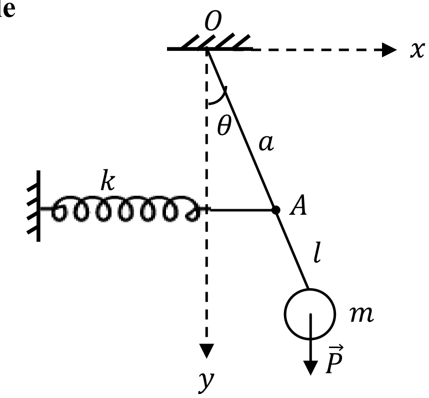
d'où :

$$U_g = (m - M)gl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow U_g = \frac{1}{2}(M - m)gl\theta^2 + mgl - Mgl$$

$$\Rightarrow U_g = \frac{1}{2}(M - m)gl\theta^2 + C^{st}$$

Exemple 2 : Calcul de l'énergie potentielle gravitationnelle

Méthode 1



$$U_g = -\int \vec{P}.d\overrightarrow{Om}$$

$$\vec{P}\begin{cases}0\\ mg\end{cases}$$

$$\overrightarrow{Om}\begin{cases}x_m = l\ \sin\theta\\ y_m = l\ \cos\theta\end{cases}$$

$$\frac{d\overrightarrow{Om}}{dt}\begin{cases}\dot{x}_m = l\,\dot{\theta}\cos\theta\\ \dot{y}_m = -l\ \dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

$$U_g = -\int -mgl\ \sin\theta\, d\theta = mgl\int_0^{\theta}\sin\theta\, d\theta = mgl\,[-\cos\theta]_0^{\theta}$$

$$= mgl\,[-\cos\theta + \cos 0 = mgl\,[1-\cos\theta]]$$

On a :

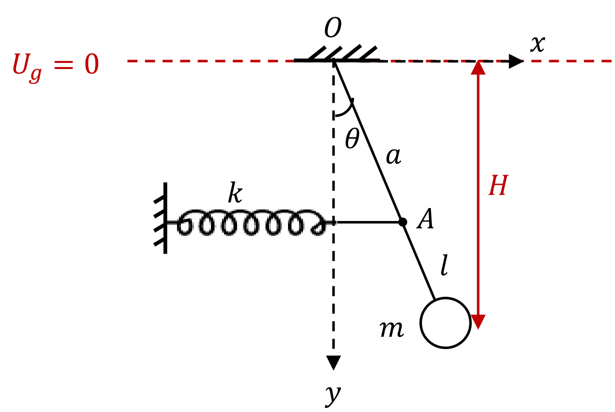
$$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

donc :

$$U_g = mgl\left[1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right] = \frac{1}{2}mgl\,\theta^2$$

Méthode 2

On choisit $U_g = 0$ à l'origine du repère



$U_g = -mgH$

On a :

$$\cos\theta = \frac{H}{l} \Rightarrow H = l\cos\theta$$

donc :

$U_g = -mgl\cos\theta$

On a :

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

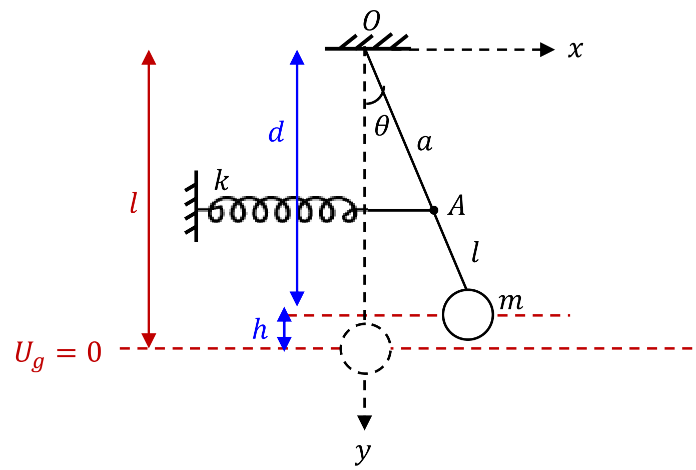
d'où :

$$U_g = -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + C^{st}$$

Méthode 3
On choisit $U_g = 0$ à la position d'équilibre

$U_g = mgh$

On a :
$l = d + h \Rightarrow h = l - d$
et
$\cos\theta = \frac{d}{l} \Rightarrow d = l\cos\theta$
donc :
$h = l - l\cos = l(1-\cos\theta)$
d'où
$U_g = mgl\,(1-\cos\theta)$



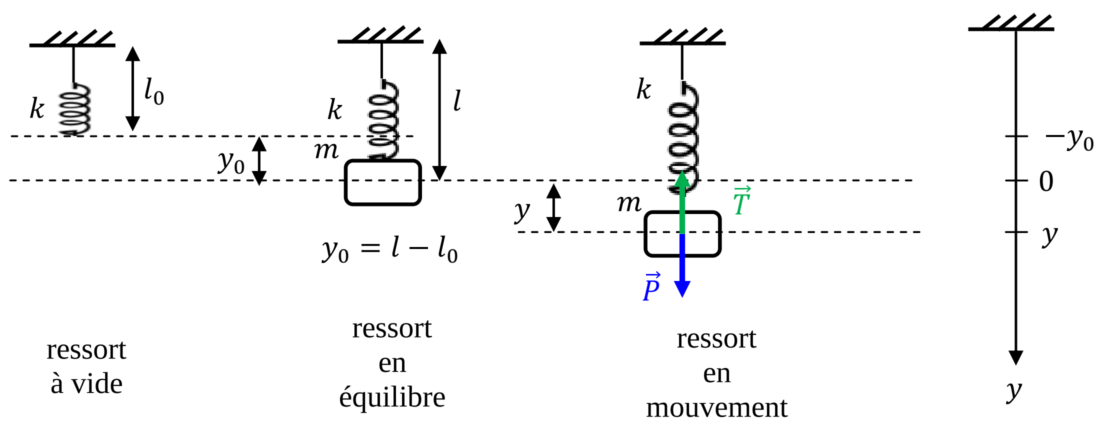
On a :

$\theta \ll 1 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

d'où :
$U_g = mgl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mgl\theta^2$

1. 4. 1. 2. Energie potentielle élastique
$U_e = \frac{1}{2}kx^2$
tel que k est la constante de raideur du ressort.
x est l'allongement ou le raccourcissement du ressort par rapport à la longueur à vide de celui-ci.

Exemples
a/ Ressort vertical
On considère une masse accrochée à un ressort de constante de raideur k. On l'écarte verticalement de sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale.
La tension $\vec{T}$ est une force conservative, donc elle dérive d'un potentiel :



l_0 : longueur à vide.
y_0 : allongement du ressort à l'équilibre.

$\vec{T} = -\overrightarrow{grad}\, U_e \Rightarrow U_e = -\int \vec{T}.\overrightarrow{dy}$

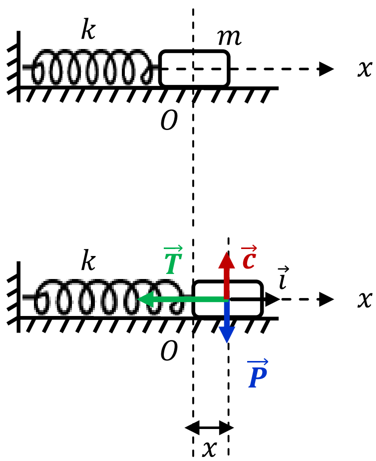
$\vec{T} = \begin{cases} 0 \\ -k(y + y_0) \end{cases}$ Loi de Hooke

$\overrightarrow{dy} = \begin{cases} 0 \\ dy \end{cases}$

$$U_e = -\int_{-y_0}^{y} -k(y + y_0)\, dy = k\int_{-y_0}^{y} (y + y_0)\, dy = \frac{1}{2}k[(y + y_0)^2]_{-y_0}^{y}$$
$$= \frac{1}{2}k[(y + y_0)^2 - (y - y_0)^2] = \frac{1}{2}k(y + y_0)^2$$

Tel que $(y + y_0)$ est l'allongement du ressort par rapport à la longueur à vide de celui-ci.

b/ Ressort horizontal



Equilibre

Mouvement

$\vec{T} = -\overrightarrow{grad}\, U_e \Rightarrow U_e = -\int \vec{T}.\overrightarrow{dx}$

$\vec{T} = -kx\,\vec{i}$

$\overrightarrow{dx} = dx\,\vec{i}$

$U_e = -\int_0^x -kx\, dx = k\int_0^x x\, dx = \frac{k}{2}[x]_0^x = \frac{1}{2}kx^2$

Tel que x est l'allongement du ressort par rapport à la longueur à vide de celui-ci.

1. 4. 2. Energie cinétique

Energie cinétique de translation

$T = \frac{1}{2}mv^2$

NB : Pour un système de N points $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$

Energie cinétique de rotation

$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$

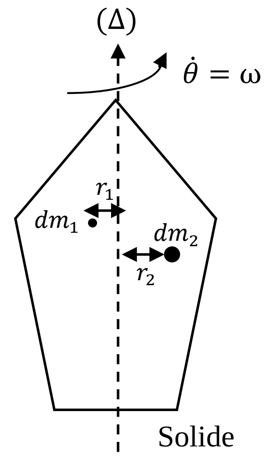
Tel que $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire et J est le moment d'inerte du corps par rapport à un axe de rotation passant par le centre de gravité.

1. 4. 3. Moment d'inertie

Moment d'inertie d'un point matériel

Le moment d'inertie J_Δ, par rapport à un axe fixe Δ, d'un point matériel de masse m, situé à une distance r de cet axe, est donné par :

$J_\Delta = mr^2$

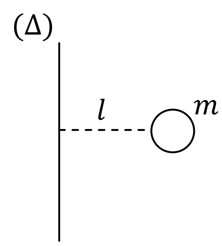


Moment d'inerte d'un solide

Le moment d'inertie J_Δ, par rapport à un axe fixe Δ, d'un solide (s) de masse totale m, est égale à la somme (intégrale) des moments d'inertie par rapport à l'axe Δ des masses élémentaires dm le constituant :

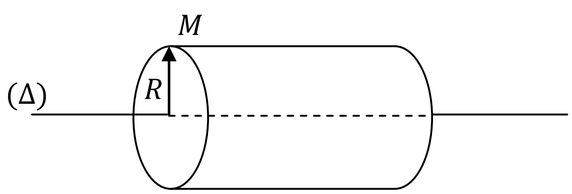
$$J_\Delta = \int_{(s)} r^2 dm$$

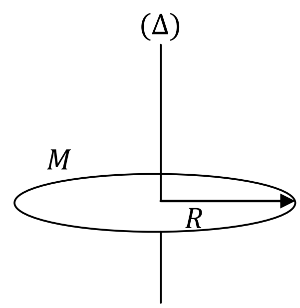
- Moment d'inertie d'une masse ponctuelle m qui tourne autour d'un axe fixe (Δ), situé à une distance l de m : $J = m\,l^2$



- Cylindre de masse M et de rayon R, ou disque plein de masse M et de rayon R :

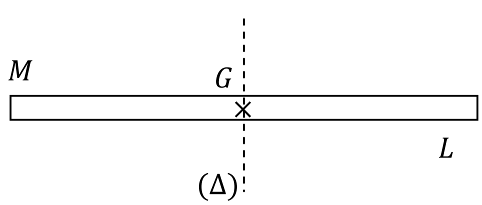
$J = \frac{1}{2} M R^2$



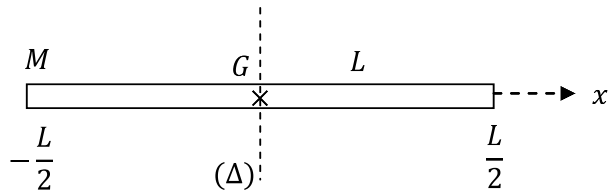


- Barre par rapport à un axe perpendiculaire passant par le centre de gravité G:

$J = \frac{1}{12} M L^2$



Exemple : Calcul de moment d'inertie



$\lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow dM = \lambda\, dL$ (λ : densité linéique)

NB : dans ce cas $dL = dx$ et $r = x$

$$J = J_\Delta = \int r^2 dM = \int x^2 dM = \int x^2\, \lambda\, dx = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = 2\lambda \int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

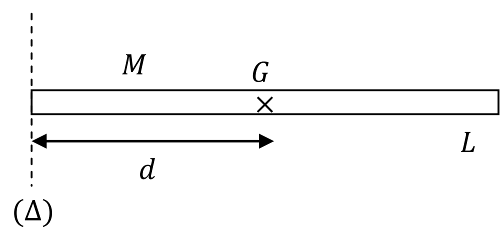
(car x^2 est paire)

$$J = \frac{2\lambda}{3} [x^3]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} M\, L^2$$

- Barre par rapport à un axe perpendiculaire passant par son extrémité, située à une distance d du centre de gravité :

$$J = \frac{1}{12} ML^2 + Md^2$$

C'est le théorème de Huygens-Steiner.



1. 4. 4. Condition d'équilibre

$$\frac{\partial U}{\partial q}\Big|_{q=q_0} = 0$$

Tel que : $U = U_g + U_e$ c'est l'énergie potentielle du système, q la coordonnée généralisée et q_0 la coordonnée généralisée à l'équilibre.

1. 4. 4. 1. Condition d'équilibre stable

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} > 0$$

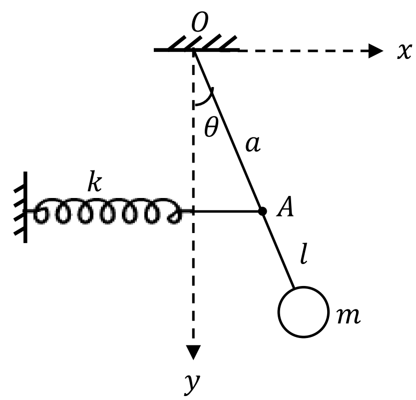
C'est aussi une condition d'oscillation.

1. 4. 4. 2. Condition d'équilibre instable

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} < 0$$

Exemple : Condition d'oscillation d'un système
La condition d'oscillation est :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$$



L'énergie potentielle du système ci-contre est donnée par :

$$U = \frac{1}{2}(ka^2 + mgl)\theta^2$$

On a :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (ka^2 + mgl)\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (ka^2 + mgl) > 0$$

NB : cette condition est toujours vérifiée.

Chapitre 2. Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

2. 1. Oscillations libres des systèmes non amorties

Un oscillateur, en régime libre non amorti, est un objet ou une quantité physique qui montre une variation périodique autour d'une position d'équilibre (un système physique est en équilibre, si ses caractéristiques physiques (position, vitesse, charge électrique,.. sont constantes dans le temps).

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté q est un système physique dont l'évolution au cours du temps, en l'absence d'amortissement et de force d'entraînement extérieure, est régie par l'équation différentielle linéaire :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

où ω_0 (rad/s) est la pulsation propre, c'est le nombre d'oscillations effectuées durant un temps 2π.

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Tel que T_0 est la période propre (s), c'est la durée au bout de laquelle les oscillations se reproduisent identiques à elles-mêmes.

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ est la fréquence propre $(s^{-1} \equiv Hertz)$, c'est le nombre d'oscillations effectuées par unité de temps.

Si un système, abandonné à lui-même, évolue de part et d'autre de la position d'équilibre, on parle alors d'oscillations libres. L'énergie totale du système se conserve au cours du temps.

Pour un système libre, à un degré de liberté, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

NB : Le lagrangien est donné par $L = T(\dot{q}_i) - U(q_i)$, où $T(\dot{q}_i)$ et $U(q_i)$ sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.

2. 1. 1. Exemples d'oscillateur harmonique

2. 1. 1. 1. Système masse-ressort

Le système masse-ressort se comporte comme un oscillateur harmonique dans la limite des petites oscillations, c'est-à-dire la force de rappel est proportionnelle à son élongation.

Soit une masse m attachée à un ressort de constante de raideur k. On déplace la masse m le long de l'axe x, puis on la lâche sans vitesse initiale. Elle oscille autour de sa position d'équilibre O.

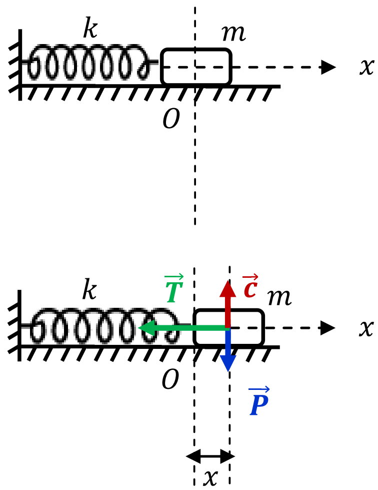
Equation du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$U = \frac{1}{2}kx^2$



A l'équilibre

En mouvement

d'où :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}2\,m\,\dot{x} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}\,2\,k\,x = \,-k\,x$$

donc :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \;\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω_0 est la pulsation propre du système ou fréquence angulaire.

d'où :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

On cherche des solutions de la forme : $x(t) = e^{rt} \Rightarrow \dot{x}(t) = re^{rt} = r\,x$
et $\ddot{x}(t) = r^2 e^{rt} = r^2\,x$

L'équation différentielle s'écrit alors : $r^2\,x + \omega_0^2\,x = 0 \Rightarrow r^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = \pm j\omega_0$

La solution est alors de la forme : $x(t) = A_1\,e^{j\omega_0 t} + B_1 e^{-j\omega_0 t}$

NB : A_1 et B_1 sont des complexes conjugués
$A_1 = Ce^{j\varphi}$ et $B_1 = Ce^{-j\varphi}$

d'où :

$$x(t) = C\,e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + C\,e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$x(t) = 2C\,\left(\frac{e^{j(\omega_0 t+\varphi)} +\; e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}}{2}\right)$$

$$x(t) = 2C\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

On pose $2C = A$

d'où :

$$x(t) = A\;\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

C'est une forme simplifiée de la solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

Tel que :
A : amplitude des oscillations, donnée en (m).
φ : phase initiale à $t = 0\ s$, donnée en (rad).
$(\omega_0 t + \varphi)$: phase à l'instant t.

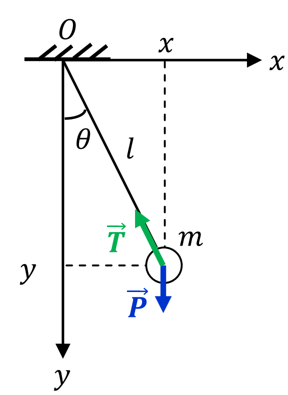
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Détermination de A et φ :
On suppose les conditions initiales suivantes :

à $t = 0\ s,\ x = x_0\, m$ et $\dot{x} = 0\ m/s$.
$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -A\ \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$
$x(0) = A\cos\varphi = x_0 \Rightarrow A = \dfrac{x_0}{\cos\varphi}$
$\dot{x}(0) = -A\ \ \omega_0 \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0\ \ \Rightarrow \varphi = 0, \pi$
Si $\varphi = 0$:
$A = \dfrac{x_0}{1} = x_0 > 0$
(Possible car A est positive donc $\varphi = 0$)
Si $\varphi = \pi$:
$A = \dfrac{x_0}{-1} = -x_0 < 0$
(Impossible car A est positive donc $\varphi \neq \ \pi$)
d'où :
$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

2. 1. 1. 2. Pendule simple

Un pendule est constitué d'une masse m attachée au bout d'une tige (ou corde) de longueur l.
La position d'équilibre correspond à $\theta(t) = 0$.
On écarte la masse d'un angle θ et on la lâche sans vitesse initiale.



Equation du mouvement :
Energie cinétique :
$T = \dfrac{1}{2} m v^2$

$$\overrightarrow{Om}\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt}\begin{cases} \dot{x} = l\cos\theta\ d\theta = l\dot{\theta}\ \cos\theta \\ \dot{y} = -l\sin\theta\ d\theta = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$
$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{l^2\,\dot{\theta}^2\ \cos^2\theta + l^2\,\dot{\theta}^2\sin^2\theta} = \sqrt{l^2\,\dot{\theta}^2\,(\cos^2\ \theta + \sin^2\theta\ )} = l\dot{\theta}$$
d'où :
$$T = \frac{1}{2}\ m\ l^2\dot{\theta}^2$$

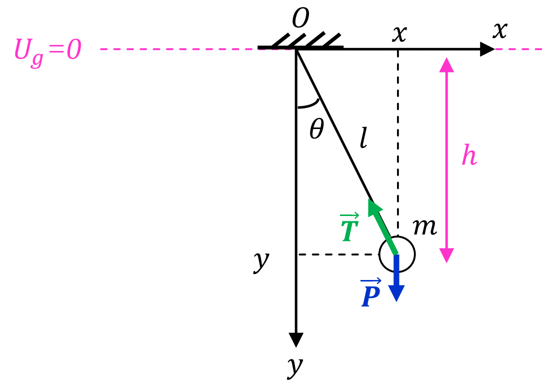
Ou bien :

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$J = m\, l^2$$

d'où :

$$T = \frac{1}{2} m\, l^2 \dot{\theta}^2$$



Energie potentiel gravitationnelle :

On choisit $U_g = 0$ à l'origine du repère.

$$U_g = -mgh$$

$$h = l \cos\theta$$

d'où :

$$U_g = -mgl \cos\theta$$

Ou bien :

$\vec{P}$ est une force conservatrice, elle dérive donc d'un potentiel :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{grad} U_g \Rightarrow \vec{P} = -\frac{dU_g}{dx} \Rightarrow U_g = -\int \vec{P}\,.\overrightarrow{dx}$$

On a alors :

$$U_g = -\int \vec{P}\,.\overrightarrow{dOm}$$

$$\vec{P} \begin{cases} 0 \\ mg \end{cases}$$

$$\frac{\overrightarrow{dOm}}{dt} \begin{cases} l\dot{\theta}\cos\theta \\ -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{P}.\overrightarrow{dOm} = -mgld\theta \sin\theta$$

$$U_g = -\int_{3\pi/2}^{\theta} -mgl \sin\theta\, d\theta = mgl \int_{3\pi/2}^{\theta} \sin\theta\, d\theta = mgl\, [-\cos\theta]_{3\pi/2}^{\theta} = mgl\,(-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow U_g = -mgl\ \cos\theta$$

Lagrangien du système :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - mgl$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

d'où :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgl}{ml^2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

L'équation du pendule simple est non linéaire. Si on limite le mouvement aux petites oscillations ($\theta \ll 1$), on peut utiliser un développement de la fonction sinus en série de Taylor :

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

Dans la limite des petites oscillations, on a :
$\sin\theta \simeq \theta$
Dans ce cas, une solution analytique peut être trouvée.

d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On pose :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

'ω_0' c'est la pulsation propre des oscillations.

d'où :
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$, c'est une équation différentielle linéaire de second ordre.
La solution d'une telle équation est de la forme :
$\theta(t) = \theta_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$, c'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique.
θ_m et φ sont définis par les conditions initiales.

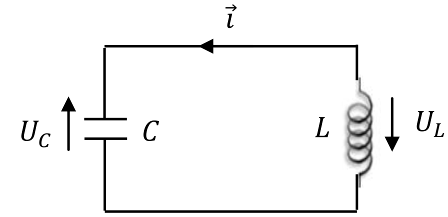
NB :
Dans la limite de petites oscillations ($\theta \ll 1$), on a :

$$\begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2} \end{cases}$$

2. 1. 1. 3. Oscillateur électrique - Circuit LC

C'est un système dont l'évolution est décrite par la variation périodique (ou pseudopériodique) d'une grandeur électrique.

Considérons un circuit LC constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable et un condensateur de capacité C, préalablement chargé.



Lorsqu'il se décharge, le condensateur produit un courant électrique qui renforce le champ magnétique dans la bobine. Ce dernier, induit un courant électrique dans les enroulements de cette bobine pour charger le condensateur. Ce processus est répété continuellement de façon comparable au processus de balancement d'un pendule simple. Au cours des oscillations libres d'un circuit LC, il y a transformation de l'énergie potentiel électrique $\left(E_C = \frac{1}{2}\frac{}{C}q^2\right)$ emmagasinée par le condensateur, en énergie magnétique $\left(E_L = \frac{1}{2}\,L\,i^2\right)$ emmagasinée par la bobine et réciproquement. Nous parlons donc d'oscillations électriques.

Equation différentielle :
Loi des mailles :
$U_L + U_C = 0$
On a :
$$U_L = L\frac{di}{dt}$$
et
$$U_C = \frac{q}{C}$$

d'où :
$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

On a :
$$i = \frac{dq}{dt}$$

alors :
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

On pose :
$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, c'est la pulsation propre des oscillations libres du circuit LC.
$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$, c'est la période propre.
On a alors : $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

La solution d'une telle équation est de la forme :
$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
où $q_m > 0$ est la charge maximale de l'armature positive du condensateur.
q_m et φ sont déterminées par les conditions initiales (valeur de U_C à l'instant $t = 0\ (s)$).

Analogie entre oscillateurs mécanique et électrique
Le tableau suivant montre les analogies entre les systèmes mécaniques et électriques.

Système Mécanique	Système Electrique
Masse m	Self L
Constante de rappel k	Capacité C
Déplacement x	Charge q
Vitesse $v = \dot{x}$	Intensité $i = \dot{q}$
Pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	Période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
Energie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie magnétique $E_L = \frac{1}{2}\ L\ i^2$
Energie potentielle (élastique) $U = \frac{1}{2}kx^2$	Energie électrique $E_C = \frac{1}{2\ C}q^2$

Comment expliquer l'influence de la valeur de la résistance sur le régime de fonctionnement d'un circuit LC ?

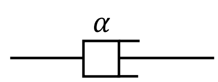
Soit r la résistance interne de la bobine.

Si $r = 0\ \Omega$:
A $t = 0\ s$, le condensateur est complétement chargé et la totalité de l'énergie du circuit est emmagasinée dans le condensateur. Le condensateur envoie son énergie vers la bobine. Cette dernière transfert l'énergie vers le condensateur qui recommence.

Si $r \neq 0\ \Omega$:
Lorsque la résistance est non nulle, cette dernière consomme une partie de l'énergie totale échangée à chaque période. Cette consommation diminue progressivement l'énergie totale du circuit ce qui conduit à la diminution de l'amplitude de U_C.
Au bout de l'expérience, l'énergie du circuit est complètement consommée dans la résistance sous forme d'énergie thermique (chaleur) par effet Joule.

2. 2. Oscillations libres des systèmes amortis

En pratique, plusieurs forces s'exercent sur un oscillateur harmonique, et tendent à réduire ses oscillations. On appelle ce genre de forces, les forces d'amortissement. Un modèle utile est celui des forces de frottement qui sont à l'origine de la perte d'énergie mécanique du système sous forme de chaleur. Nous allons nous limiter, dans notre étude, au cas simple où les pertes d'énergie sont dues à des frottements visqueux (le système est en mouvement dans un fluide : liquide ou gaz) pour lesquels les forces de frottement qui s'opposent au mouvement sont proportionnelle à la vitesse v : $F = -\alpha v$.
α est le coefficient de frottement visqueux $(N.s.m^{-1})$



Le frottement visqueux est schématisé par un amortisseur

Un amortisseur est associé à une fonction appelée fonction de dissipation, donnée par : $D = \frac{1}{2}\alpha v^2$.

2. 2. 1. Equation de Lagrange des systèmes non conservatifs (dissipatifs)

L'équation de Lagrange associée à de tels systèmes est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

d'où :
$\ddot{q} + \omega_0^2\, q = -\beta \dot{q} \Leftrightarrow \ddot{q} + \beta \dot{q} + \omega_0^2\, q = 0$

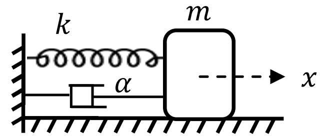
C'est une équation différentielle du second ordre qui peut se mettre sous la forme :
$\ddot{q} + 2\delta\, \dot{q} + \omega_0^2\, q = 0$

où δ est le coefficient d'amortissement.

2. 2. 2. Exemple : Pendule élastique horizontal

On considère une masse attachée à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable et de constante de raideur k. La masse est soumise à une force proportionnelle à sa vitesse : $F = -\alpha\, \dot{x}$.

La fonction de dissipation est donnée par :



$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant, qui peut se mettre sous la forme : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

où $2\,\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2\,m}$: facteur ou coefficient d'amortissement (s^{-1}).

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation propre (rad/s).

2. 2. 2. 1. Résolution de l'équation différentielle

On cherche des solutions sous la forme $x(t) = e^{rt} \Rightarrow \dot{x}(t) = re^{rt} = r\,x$

et $\ddot{x}(t) = r^2e^{rt} = r^2\,x$

L'équation différentielle s'écrit alors : $r^2\,x + 2\,\delta\,r\,x + \omega_0^2\,x = 0 \Rightarrow r^2 + 2\,\delta\,r + \omega_0^2 = 0$

On obtient une équation de second degré en r dite équation caractéristique.

Les solutions de l'équation différentielle dépendent du type des racines de l'équation caractéristique.

- Calculons le discriminant réduit

Rappel

$a\,r^2 + 2\,b\,r + c = 0$

$\acute{\Delta} = b^2 - ac$

On a : $r^2 + 2\,\delta\,r + \omega_0^2 = 0$, c'est l'équation caractéristique.

$\acute{\Delta} = \delta^2 - \omega_0^2$

D'après le signe du discriminant, nous aurons trois types de solutions :

2. 2. 2. 2. Régime sur amorti ou apériodique ou régime fortement amorti

$\acute{\Delta} > 0 \Rightarrow \delta > \omega_0$

L'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$$

donc

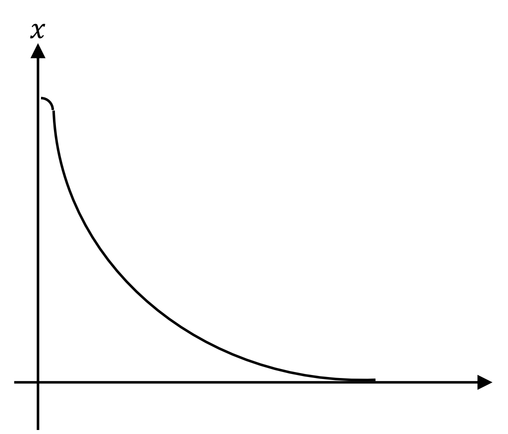
$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$x(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}$

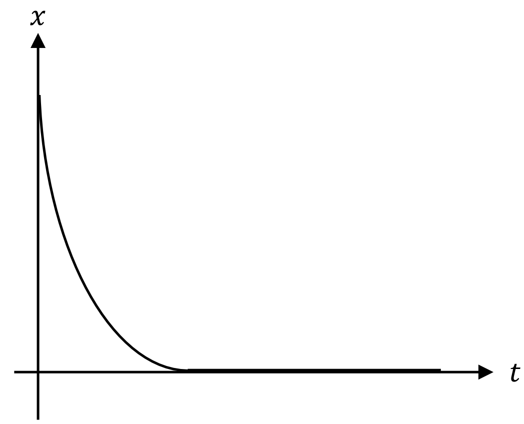
donc

$$x(t) = A\,e^{\left(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t} + B\,e^{\left(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}\right)t}$$



$$\Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}\left(A\, e^{\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}.t} + B\, e^{-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}.t}\right)$$

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.
NB : La masse revient lentement à sa position d'équilibre.



2. 2. 2. 3. Régime critique

$\acute{\Delta} = 0 \Rightarrow \delta = \omega_0$
L'équation admet une racine double :

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{a} = -\delta$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :
$x(t) = A\, e^{r_1 t} + B\, e^{r_2 t}$

donc
$x(t) = e^{-\delta t}(A\, t + B)$

A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

NB : La masse revient plus vite à sa position d'équilibre comparativement au mouvement apériodique.

Démonstration
On a une racine double : $r_1 = r_2 = -\delta$
La solution est donc de la forme : $x(t) = A\, e^{-\delta t} + B\, e^{-\delta t} = (A+B).e^{-\delta t} = C.e^{-\delta t}$

Méthode de la variation de la constante :
$x(t) = C(t).e^{-\delta t}$
$\dot{x}(t) = \dot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.C(t).e^{-\delta t}$
$\ddot{x}(t) = \ddot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} - \left[\delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta^2.C(t).e^{-\delta t}\right]$
$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \ddot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} + \delta^2.C(t).e^{-\delta t}$
On a : $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

d'où :

$$\ddot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} - \delta.\dot{C}(t).e^{-\delta t} + \delta^2.C(t).e^{-\delta t} + 2\delta\dot{C}(t).e^{-\delta t} - 2\delta^2 C(t).e^{-\delta t} + \omega_0^2 C(t).e^{-\delta t} = 0 \Rightarrow \ddot{C}(t) - \delta^2.C(t) + \omega_0^2 C(t) = 0$$

On a : $\delta = \omega_0$ donc $-\delta^2.C(t) + \omega_0^2 C(t) = 0$

d'où :
$\ddot{C}(t) = 0 \Rightarrow \dot{C}(t) = A$ et $C(t) = A\, t + B$

donc $x(t) = (A\, t + B).e^{-\delta t}$

2. 2. 2. 4. Régime sous amorti ou pseudopériodique ou faiblement amorti

$\acute{\Delta} < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$$

donc

$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

La solution de l'équation différentielle est de la forme :

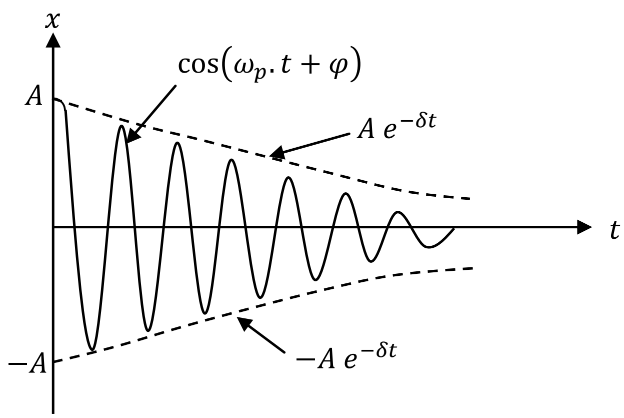
$x(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t}$

donc

$x(t) = A\, e^{-\delta t} \cos(\omega_p . t + \varphi)$

Tel que $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$: pseudo pulsation ou pulsation de l'oscillateur amorti.

A et φ sont déterminées par les conditions initiales.



C'est une sinusoïde amortie comprise entre deux enveloppes $\pm A\, e^{-\delta t}$

Démonstration

L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$x(t) = A_1\, e^{r_1 t} + A_2\, e^{r_2 t}$

$x(t) = A_1\, e^{\left(-\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t} + A_2\, e^{\left(-\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)t}$

On a : $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$: pseudo pulsation de l'oscillateur amorti.

d'où :

$x(t) = A_1\, e^{(-\delta + j\omega_p)t} + A_2\, e^{(-\delta - j\omega_p)t}$

A_1 et A_2 sont des complexes conjugués :

$A_1 = Be^{j\varphi}$ et $A_2 = Be^{-j\varphi}$

d'où :

$x(t) = B\, e^{-\delta t}\, e^{j(\omega_p t + \varphi)} + B\, e^{-\delta t}\, e^{-j(\omega_p t + \varphi)}$

$x(t) = 2B\, e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j(\omega_p t + \varphi)} + e^{-j(\omega_p t + \varphi)}}{2}\right)$

$x(t) = 2B\, e^{-\delta t} \cos(\omega_p t + \varphi)$

On pose $2B = A$

d'où :
$x(t) = A\,e^{-\delta t}\cos(\omega_p t + \varphi)$

NB : Les trois solutions tendent asymptotiquement vers 0, elles correspondent toutes à un régime transitoire.

2. 2. 3. Grandeurs caractéristiques

a/ Pseudo période

Intervalle de temps séparant deux maximums ou minimums successifs de $x(t)$.

$$T_p = \frac{2\,\pi}{\omega_p} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\,\pi/\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}}$$

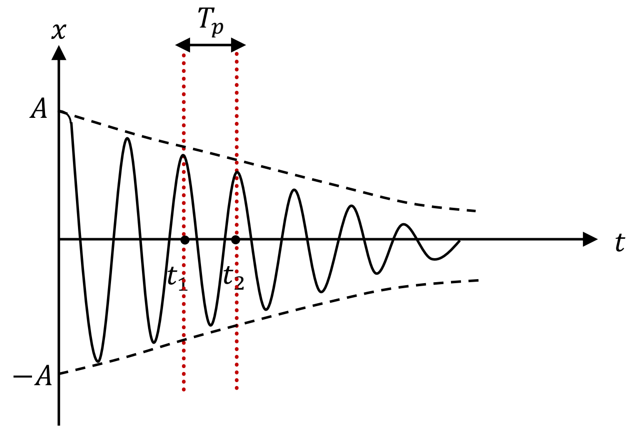
NB : T_0 : période propre du système non-amorti.
On a : $T_p < T_0$.

b/ Pseudo fréquence

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\,\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\,\pi}$$

c/ Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique 'D' caractérise la décroissance d'amplitude. C'est le logarithme népérien 'ln' du rapport de deux extremums consécutifs de même signe de $x(t)$.



$x(t) = A\,e^{-\delta t}\cos(\omega_p t + \varphi)$
Tel que : $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$D = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + T_p)} = \ln\left[\frac{A\,e^{-\delta t_1}\cos(\omega_p t_1 + \varphi)}{A\,e^{-\delta(t_1+T_p)}\cos(\omega_p(t_1 + T_p) + \varphi)}\right] = \ln\left[\frac{1}{e^{-\delta T_p}}\right]$$
$$= \ln e^{\delta T_p} = \delta\,T_p$$

NB : Pour plusieurs périodes : $T = n\,T_p$

$$D' = n\,\delta\,T_p \Rightarrow D = \frac{D'}{n}$$

Remarque

La pseudo période et le décrément logarithmique n'ont de sens que si le régime est pseudo périodique.

d/ Constante de temps et temps de relaxation

Le coefficient d'amortissement $\delta = \frac{1}{\tau}$ tel que τ est une constante de temps. C'est le temps nécessaire pour que l'amplitude passe de A_0 à $t = 0$ à $\frac{A_0}{e} = 0.37. A_0$ à $t = \tau$.

En fait, on utilise la quantité τ_r appelée temps de relaxation définit par :

$$\tau_r = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2\delta}$$

e/ Facteur de Qualité

Le facteur de qualité est une grandeur qui traduit l'aptitude du système considéré à garder son énergie tout en oscillant. On définit le facteur de qualité Q par les expressions :

$Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta}$ ou $Q = \omega_0 \tau_r$

Il existe également deux autres définitions de Q liées :

- **L'une à l'énergie : $\boldsymbol{Q = -2\pi\ \frac{E}{\Delta E}}$**

  Ou $E = E(t)$ est l'énergie totale du système à l'instant t et $\Delta E = E\left(t + T_p\right) - E(t)$ est l'énergie dissipée pendant la pseudo-période.

Démonstration

Dans le cas d'un régime pseudo périodique $(\delta < \omega_0)$:

$x(t) = A\, e^{-\delta t} \cos\left(\omega_p t + \varphi\right) \approx A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Car $e^{-\delta t} \approx 1$ et $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$

En considérant l'exemple du pendule élastique horizontal (§ 2.2.2), l'énergie totale du système est donnée par :

$$E = T + U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow x^2 = A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x} = -A\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}^2 = A^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

d'où :

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

On a :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\,\omega_0^2$$

d'où :

$$E = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2 [\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2$$

L'énergie dissipée pendant une pseudo-période correspond au travail de la force de frottement donnée par :

$$f(t) = -\alpha\, \dot{x}(t)$$

tel que α est le coefficient de frottement.

d'où :

$$\Delta E = \int_t^{t+T_p} f(t)\, dx = \int_t^{t+T_p} -\alpha\, \dot{x}(t)\, dx$$

On a :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \dot{x}\, dt$$

d'où :

$$\Delta E = -\alpha \int_t^{t+T_p} \dot{x}^2\, dt = -\alpha \int_t^{t+T_p} A^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt = -\alpha\, A^2\omega_0^2 \int_t^{t+T_p} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)\, dt$$

On a :

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\Delta E &= -\alpha\, A^2\omega_0^2 \int_t^{t+T_p} \left[\frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2}\right] dt = -\alpha\, A^2\omega_0^2 \int_t^{t+T_p} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \varphi)\right] dt \\ &= -\alpha\, A^2\omega_0^2 \left\{\left[\frac{t}{2}\right]_t^{t+T_p} - \frac{1}{4\omega_0}[\sin 2(\omega_0 t + \varphi)]_t^{t+T_p}\right\} \\ &= -\alpha\, A^2\omega_0^2 \left\{\frac{1}{2}[t + T_P - t] - \frac{1}{4\omega_0}[\sin 2(\omega_0(t + T_P) + \varphi) - \sin 2(\omega_0 t + \varphi)]\right\}\end{aligned}$$

On a :

$$\sin 2(\omega_0(t + T_P) + \varphi) = \sin 2(\omega_0 t + \varphi)$$

et on a :

$$T_P \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

donc :

$$\Delta E = -\alpha\, A^2\omega_0^2 \frac{T_0}{2} = -\alpha\, A^2\omega_0^2 \frac{2\pi}{2\omega_0} = -\alpha\, A^2\omega_0\pi$$

Le facteur de qualité Q est donné par :

$$Q = -2\pi\, \frac{E}{\Delta E} = -2\pi \frac{\frac{1}{2} m A^2\omega_0^2}{(-\alpha\, A^2\omega_0\pi)} = \frac{m\omega_0}{\alpha}$$

Le coefficient d'amortissement δ est donné par :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \alpha = 2m\delta$$

donc :

$$Q = \frac{m\omega_0}{2m\delta} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

- **L'autre à la bande passante $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{f_r}{\Delta f}}$**

où $\Delta\omega$ et Δf sont des quantités définies dans le cas des oscillations forcées :
$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $(\omega_2 > \omega_1)$
ω_1 et ω_2 correspondent aux amplitudes $A(\omega_1)$ et $A(\omega_2)$, tel que :

$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

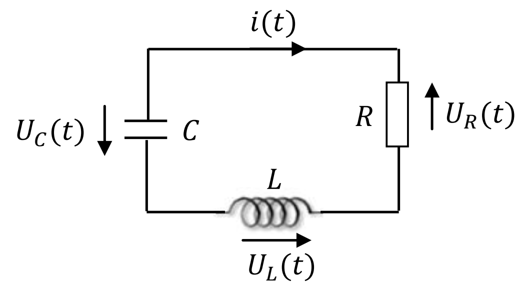
ω_r et f_r désignent respectivement la pulsation et la fréquence de la résonance.

Dans le cas de l'amortissement très faible ($\delta \ll \omega_0$), on montre d'une part que $-2\pi\,\frac{E}{\Delta E} \approx \frac{\omega_0}{2\,\delta}$ et d'autre part que $\Delta\Omega \approx 2\delta$ et $\Omega_r \approx \omega_0$. Il en résulte que les deux dernières définitions du facteur de qualité sont dans ce cas équivalentes à la définition donnée en premier : $Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta}$.
Notons qu'un grand nombre d'oscillateurs, principalement électriques, sont caractérisés par un amortissement très faible et la dernière définition de Q est utilisée.

Remarque
Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est meilleure. Plus le facteur de qualité est grand, moins le système dissipe de l'énergie.

2. 2. 4. Oscillateur électrique

Soit un circuit électrique constitué d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L, en série.



On a :

$$U_R + U_C + U_L = 0$$

$$R\,i + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

donc

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où :

$$L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Qui s'écrit sous la forme : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$
C'est l'équation d'un oscillateur harmonique amortie, tel que :
$\delta = \frac{R}{2\,L}$: facteur ou coefficient d'amortissement.
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre du système.

2. 3. Enoncés des exercices

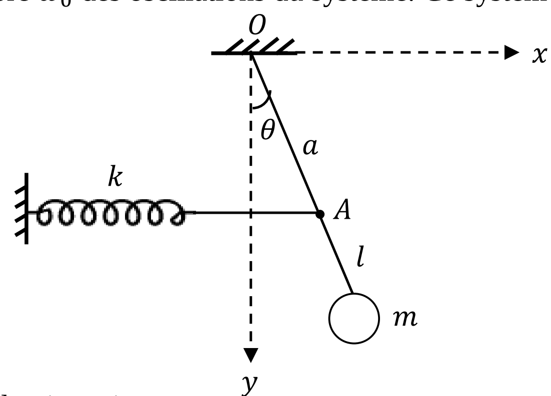
Partie I : Oscillations non amorties

Exercice 1

Une tige de longueur l et de masse négligeable est suspendue à un support horizontal fixe en O. Elle porte à son extrémité une masse m. A une distance $OA = a$ du support, on la fixe à un autre support vertical par l'intermédiaire d'un ressort. La masse est écartée légèrement de sa position d'équilibre (verticale) puis relâchée. On étudie les oscillations de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système puis l'équation différentielle du mouvement.

2- Quelle est la pulsation propre ω_0 des oscillations du système. Ce système peut-il ne pas osciller ?



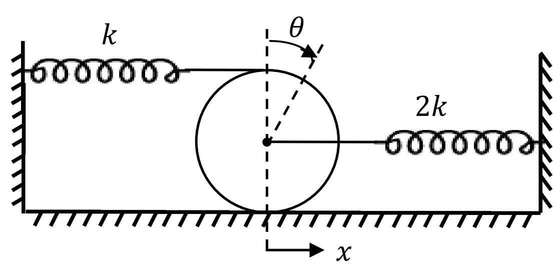
Exercice 2

On considère le système oscillatoire suivant :

Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ, son centre de gravité se déplace de x. Le moment d'inertie du cylindre est $J = \frac{1}{2}MR^2$.

1- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. En déduire le lagrangien.

2- Trouver l'équation du mouvement. En déduire la période propre des oscillations.



Exercice 3

Un circuit électrique est constitué d'une self d'inductance L de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C. On lui fournit une charge initiale q_0 et on l'abandonne à lui même.

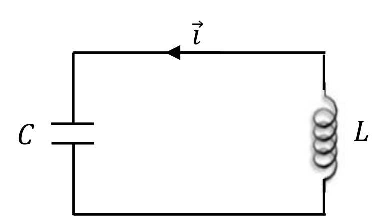
1- Ecrire l'équation qui régit la charge $q(t)$ du condensateur.

2- Résoudre cette équation et déterminer la période propre de cet oscillateur. Faire l'application numérique pour $L = 0.5\ H$, $C = 0.5\ \mu F$.

3- Calculer l'énergie du condensateur ainsi que celle de la self et l'énergie totale du circuit. Que remarque-t-on ?

4- Faire l'analogie avec le système mécanique constitué d'une masse m attachée à un ressort.

5- Faire l'analogie avec un pendule simple.



Partie II : Oscillations amorties

Exercice 4

On considère un pendule simple dans lequel un point matériel de masse m est relié par l'intermédiaire d'un fil de masse négligeable et de longueur l constante. On suppose que le pendule est soumis à une force de frottement fluide exercée par l'air de la forme $f = -\alpha v$, où α est une constante positive et v la vitesse.

1- Ecrire l'équation différentielle décrivant le mouvement du pendule.

2- Dans l'approximation des petites oscillations, montrer que l'équation précédente peut se mettre sous la forme : $\ddot{\theta} + \beta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$, où β et ω_0 sont des coefficients à déterminer en fonction des paramètres du système.

3- A quelles conditions sur β le pendule est-il en régime apériodique, critique et pseudopériodique ?

4- Nous supposerons que la dernière condition est réalisée (régime pseudopériodique). Calculer le temps t_1 au bout duquel l'amplitude des oscillations du pendule a diminué de moitié.

Exercice 5

Soit un circuit électrique constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R.

1- Ecrire l'équation différentielle que vérifie $q(t)$ la charge du condensateur C.

2- Déduire l'équation différentielle que vérifie la tension U_L aux bornes de L.

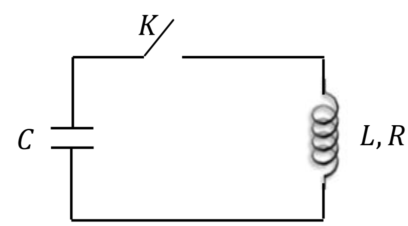
3- Sachant que $L = 3\,H$ et $C = 40\,nF$, trouver la valeur maximale que la résistance R ne doit pas atteindre pour que le circuit oscille.

4- Avec une résistance $R = 600\,\Omega$, le circuit oscille mais l'amplitude U_L diminue au cours du temps. Trouver le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue à $1/6$ de sa valeur.

5- Calculer le facteur de qualité de cet oscillateur.

Exercice 6

Un condensateur de capacité C portant la charge q_0 est relié aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance interne R (voir figure).



A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1- Etablir les équations différentielles vérifiées par $i(t)$ et $q(t)$ dans le circuit. En déduire que le circuit étudié est un oscillateur harmonique amorti.

2- A quelles conditions doit satisfaire R pour que le régime d'évolution soit apériodique, critique et pseudopériodique.

3- Déterminer l'expression de $q(t)$ dans le cas du régime pseudopériodique.

4- Donner le facteur de qualité du circuit.

2. 4. Solutions des exercices

Partie I : Oscillations non amorties

Exercice 1

1- Energies cinétique et potentielle du système :

- Energie cinétique :

$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, J = ml^2$

- Energie potentielle :

$U = U_g + U_e$

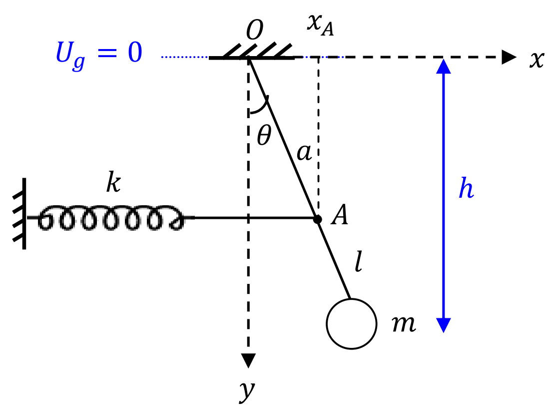
$U_g = -mgh$

On a :

$$\cos\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\cos\theta$$

d'où :
$U_g = -mgl\cos\theta$
Dans la limite des petites oscillations, on a : $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$
donc :
$$U_g = -mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow U_g = \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl = \frac{1}{2}mgl\theta^2 - C^{st}$$

$$U_e = \frac{1}{2}k(x_A)^2$$



On a :
$\sin\theta = \frac{x_A}{a} \Rightarrow x_A = a\sin\theta$
On étudie des oscillations de faibles amplitudes autours de la position d'équilibre, donc :
$\sin\theta \simeq \theta$
et
$x_A \simeq a\theta$

d'où :
$$U_e = \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$
donc :
$$U = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}ka^2\theta^2 - C^{st} = \frac{1}{2}(mgl + ka^2)\theta^2 - C^{st}$$

- Equation différentielle du mouvement :
Equation de Lagrange
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$
$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}(mgl + ka^2)\theta^2 + C^{st}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = ml^2\dot\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = ml^2\ddot\theta$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(mgl + ka^2)\theta$$

d'où :
$$ml^2\ddot\theta + (mgl + ka^2)\theta = 0$$
$$\Rightarrow \ddot\theta + \left(\frac{mgl + ka^2}{m\,l^2}\right)\theta = 0$$
$$\Rightarrow \ddot\theta + \left(\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{m\,l^2}\right)\theta = 0$$

2- Pulsation propre ω_0 des oscillations du système :
On pose
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} + \frac{ka^2}{m\,l^2}$$

On aura :
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

d'où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{ka^2}{m\,l^2}}$$

- Condition d'oscillation du système

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$$

On a :
$$U = \frac{1}{2}(mgl + ka^2)\theta^2 - C^{st}$$
$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = (mgl + ka^2)\theta$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (mgl + ka^2) > 0$$

Nous avons $(mgl + ka^2) > 0 \Rightarrow$ Le système oscille toujours.

<u>Exercice 2</u>
1- Energies cinétique et potentielle du système :
- Energies cinétique :
$T = T_{Translation} + T_{Rotation}$
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M\,R^2\,\dot{\theta}^2$$

On a :
$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$$
d'où :
$$T = \frac{2}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}M\dot{x}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$
- Energies potentielle :
$U = U_e = U_k + U_{2k}$

$U_k = \frac{1}{2}k(2x)^2$ Rotation de θ et translation de x, $x = R\theta$, donc le ressort de raideur k s'allonge de $x + R\theta = 2x = 2R\theta$

$U_{2k} = \frac{1}{2}2k(x)^2$ Le ressort de raideur $2k$ se comprime de $x = R\theta$

d'où :
$U = 2kx^2 + kx^2 = 3kx^2$

Lagrangien
$$L = T - U = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - 3kx^2$$

2 - Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{3}{2}M\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{3}{2}M\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=-6kx$$

d'où :

$$\frac{3}{2}M\ddot{x}+6kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{4k}{M}x=0$$

- Période propre des oscillations :

L'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$, tel que :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{4k}{M}}$$

On a :

$$\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0=\frac{2\,\pi}{\omega_0}$$

d'où :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{M}{4k}}$$

Exercice 3

1- Equation qui régit la charge $q(t)$ du condensateur :

Loi de la maille :

$$U_L+U_C=0$$

On a :

$$U_L=L\,\frac{di}{dt}$$
$$U_C=\frac{q}{C}$$

d'où :

$$L\,\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

On a :

$$i=\frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}=\ddot{q}$$

d'où :

$$L\,\ddot{q}+\frac{q}{C}=0 \Rightarrow \ddot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

On pose :

$\omega_0^2=\frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre des oscillations libres du circuit LC.

d'où :
$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

2- Résolution de l'équation et détermination de l période propre de cet oscillateur :
La solution est de la forme : $q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, tel que q_m et φ sont déterminées par les conditions initiales.

- Détermination de q_m et φ :
Conditions initiales :
à $t = 0$, $q(0) = q_0$, $i(0) = \dot{q}(0) = 0$.

$$q(t) = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{q}(t) = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$q(0) = q_0 \Rightarrow q_m \cos\varphi = q_0 \Rightarrow q_m = \frac{q_0}{\cos\varphi}$$
$$\dot{q}(0) = 0 \Rightarrow -q_m \omega_0 \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi$$
Si $\varphi = 0$:
$$q_m = \frac{q_0}{\cos 0} = q_0$$
Si $\varphi = \pi$:
$$q_m = \frac{q_0}{\cos\pi} = -q_0$$

NB : q_m est la charge maximale de l'armature positive du condensateur, donc :
$$q_m = \frac{q_0}{\cos 0} = q_0$$
d'où :
$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t)$$

- Période propre de cet oscillateur :
$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}$$
d'où :
$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC}$$
AN : $L = 0.5\ H$, $C = 0.5\ \mu F = 0.5 \times 10^{-6}\ F$.
$T_0 = 2\pi\sqrt{0.5 \times 0.5 \times 10^{-6}} = \pi \times 10^{-3}\ s$.

3- Energie du condensateur 'E_C' ainsi que celle de la self 'E_L' et l'énergie totale 'E' du circuit :
$$E_C = \frac{1}{2C} q^2$$

On a :
$q = q_0 \cos(\omega_0 t)$
d'où :
$$E_C = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$$
$$E_L = \frac{1}{2}\, L\, i^2 = \frac{1}{2}\, L\, \dot{q}^2$$

car

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

On a :

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{q} = -q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

d'où :

$$\dot{q}^2 = q_0^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

donc :

$$E_L = \frac{1}{2} L q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E = E_C + E_L = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} L q_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

On a :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

d'où :

$$E = \frac{1}{2C} q_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} L q_0^2 \frac{1}{LC} \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E = \frac{1}{2C} q_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2C} q_0^2 = C^{st}$$

Remarque

$$E = \frac{1}{2C} q_0^2$$

'E' c'est l'énergie totale initiale du condensateur. Elle est conservée dans le temps.

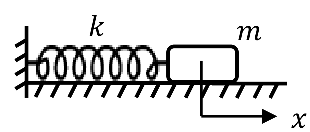
Au cours des oscillations libres d'un circuit LC, il y a transformation de l'énergie potentiel électrique 'E_C' emmagasinée par le condensateur, en énergie magnétique 'E_L' emmagasinée par la bobine et réciproquement.

Dans un oscillateur mécanique, l'énergie cinétique de la masse se transforme en énergie potentielle du ressort et vis-versa. L'énergie totale reste constante.

4- Analogie avec le système mécanique constitué d'une masse m attachée à un ressort :

Il y a analogie entre l'oscillateur mécanique (m, k) et l'oscillateur électrique (L, C) :

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \leftrightarrow E_L = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$$

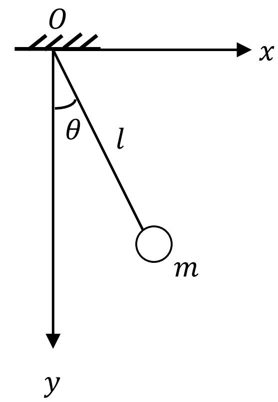


$$U = \frac{1}{2} kx^2 \leftrightarrow E_C = \frac{1}{2C} q^2$$

Ainsi :

Système mécanique	Système électrique
Masse m Constante de rappel k Déplacement x	Self L Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$ Charge q

5- Analogie avec un pendule simple



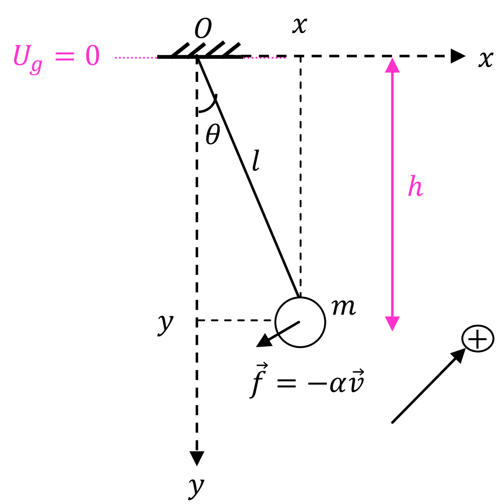
$$T = \frac{1}{2} J\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\,l^2\dot{\theta}^2 \leftrightarrow E_L = \frac{1}{2} L\dot{q}^2$$
$$U = \frac{1}{2}\,mgl\,\theta^2 \leftrightarrow E_C = \frac{1}{2C} q^2$$

Système mécanique	Système électrique
$J = m\,l^2$	L
$m\,g\,l$	$\frac{1}{C}$
θ	q

Partie II : Oscillations amorties

Exercice 4

1- Equation différentielle décrivant Le mouvement du pendule :



$$T = \frac{1}{2} J\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m\,l^2\dot{\theta}^2$$

$$J = m\,l^2$$

$$U_g = -mgh$$

On a :

$$\cos\theta = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l\cos\theta$$

d'où :

$$U_g = -mgl\cos\theta$$

Lagrangien

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\,l^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha v^2$$
$$v^2 = l^2\dot{\theta}^2$$

On a :

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = l\,\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -l\,\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = l^2\dot{\theta}^2$$

donc :

$$D = \frac{1}{2}\,\alpha\, l^2\,\dot{\theta}^2$$

On a :

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\,l^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = m\,l^2\,\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -m\,g\,l\sin\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha\,l^2\,\dot{\theta}$$

d'où :

$$m\,l^2\,\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = -\alpha\,l^2\dot{\theta} \Rightarrow m\,l^2\,\ddot{\theta} + \alpha\,l^2\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha\,l^2}{m\,l^2}\,\dot{\theta} + \frac{mgl}{m\,l^2}\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \;\ldots(1)$$

2- Montrons, dans l'approximation des petites oscillations, que l'équation précédente peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \beta\omega_0\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \;\ldots(2)$$

Pour les faibles oscillations : $\sin\theta \simeq \theta$

L'équation (1) s'écrit alors sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \;\ldots(3)$$

Par identification entre (2) et (3), on aura :

$$\frac{\alpha}{m} = \beta\omega_0 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{m\omega_0}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3- Conditions sur β pour que le pendule soit en régime apériodique, critique ou pseudo périodique :

On a : $\ddot{\theta} + \beta\omega_0\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

On se propose une solution de la forme : $\theta(t) = e^{rt} \Rightarrow \dot{\theta}(t) = re^{rt} \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = r^2e^{rt}$.

d'où :

$$(r^2 + \beta\omega_0 r + \omega_0^2)\,e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + \beta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

C'est l'équation caractéristique.

$$\Delta = (\beta\omega_0)^2 - 4(1)(\omega_0^2) = (\beta^2 - 4)\omega_0^2$$

Régime apériodique : $\Delta > 0 \Rightarrow (\beta^2 - 4)\omega_0^2 > 0 \Rightarrow (\beta^2 - 4) > 0 \Rightarrow \beta^2 > 4 \Rightarrow \beta > 2$

Régime critique : $\Delta = 0 \Rightarrow \beta = 2$
Régime pseudo périodique : $\Delta < 0 \Rightarrow \beta < 2$

4- Nous supposons que la dernière condition est réalisée (régime pseudo périodique) :
- Temps t_1 au bout duquel l'amplitude des oscillations a diminué de moitié :
Régime pseudo périodique $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (\beta^2 - 4)\omega_0^2 < 0$
$\Delta = (\beta^2 - 4)\omega_0^2 = -(4-\beta^2)\omega_0^2 = j^2\,(4-\beta^2)\omega_0^2$

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées :

$$r_{1,2} = \frac{-\beta\omega_0 \pm \sqrt{j^2(4-\beta^2)\omega_0^2}}{2} = \frac{-\beta\omega_0}{2} \pm j\frac{\sqrt{(4-\beta^2)\omega_0^2}}{2}$$

$$r_{1,2} = \frac{-\beta\omega_0}{2} \pm j\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4-\beta^2}$$

donc la solution de l'équation du mouvement est de la forme :

$$\theta(t) = A\,e^{\frac{-\beta\omega_0}{2}t}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\sqrt{(4-\beta^2)}.t + \varphi\right)$$

Tel que : $\frac{\omega_0}{2}\sqrt{(4-\beta^2)} = \omega_p$: c'est la pseudo pulsation.

Autre méthode :
L'équation $\ddot{\theta} + \beta\omega_0\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + 2\,\delta\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$
Tel que $\beta\omega_0 = 2\delta \Rightarrow \delta = \frac{\beta\omega_0}{2}$
La solution en régime pseudo périodique est sous la forme :

$$\theta(t) = A\,e^{-\delta.t}\cos(\omega_p.t + \varphi)$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2\omega_0^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\omega_0^2 - \beta^2\omega_0^2}{4}} = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{(4-\beta^2)}$$

d'où :

$$\theta(t) = A\,e^{\frac{-\beta\omega_0}{2}t}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\sqrt{(4-\beta^2)}.t + \varphi\right)$$

- Temps t_1 au bout duquel l'amplitude des oscillations du pendule a diminué de moitié :
L'amplitude maximale A est donnée à $t = 0$, l'amplitude $\frac{A}{2}$ est donnée à l'instant t_1 :

$$\frac{A}{2} = Ae^{-\delta.t_1}$$

On a : $\delta = \frac{\beta\omega_0}{2}$

donc :

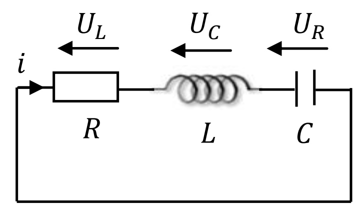
$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{\beta\omega_0}{2}.t_1} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\frac{\beta\omega_0}{2}.t_1}\right) \Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\frac{\beta\omega_0}{2}.t_1 \Rightarrow \frac{\beta\omega_0}{2}.t_1 = \ln 2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{2\,\ln 2}{\beta\omega_0}$$

Exercice 5

1- Equation différentielle que vérifie $q(t)$ la charge du condensateur C :
Bilan des tensions :

$$U_R + U_L + U_C = 0 \Rightarrow R\,i + L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où :

$$L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \dots (1)$$

2- Equation différentielle que vérifie la tension U_L aux bornes de L :

On dérive (1) par rapport au temps :

$$\frac{d\ddot{q}}{dt} + \frac{R}{L}\frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{1}{LC}\frac{dq}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\ddot{q}}{dt} + \frac{R}{L}\ddot{q} + \frac{1}{LC}\dot{q} = 0$$

On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) + \frac{R}{L}\left(\frac{di}{dt}\right) + \frac{1}{LC}i = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0 \dots (2)$$

C'est l'équation que vérifie $i(t)$

On dérive (2) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2i}{dt^2}\right) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}\left(\frac{di}{dt}\right) + \frac{1}{LC}\frac{di}{dt} = 0$$

On a :

$$U_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{U_L}{L} \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{\dot{U}_L}{L}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{U}_L}{L}\right) + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}\left(\frac{U_L}{L}\right) + \frac{1}{LC}\frac{U_L}{L} = 0 \Rightarrow \ddot{U}_L + \frac{R}{L}\dot{U}_L + \frac{1}{LC}U_L = 0 \dots (3)$$

C'est l'équation que vérifie $U_L(t)$.

3- $L = 3\,H$, $C = 40\,nF = 40 \times 10^{-9}\,F$.

Valeur maximale que la résistance R ne doit pas atteindre pour que le circuit oscille :

Pour que le système oscille, il faut qu'il soit en régime pseudo périodique.

L'équation (3) s'écrit sous la forme :

$$\ddot{U}_L + 2\delta\dot{U}_L + \omega_0^2 U_L = 0$$

avec :

$\delta = \frac{R}{2\,L}$: facteur ou coefficient d'amortissement.

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$: pulsation propre du système.

Régime pseudo périodique :

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2\,L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN : $R < 2\sqrt{\frac{3}{40\times10^{-9}}} \Rightarrow R < 17321\,\Omega$

4- $R = 600\ \Omega$

Le temps τ nécessaire pour que l'amplitude diminue de $\frac{1}{6}$ de sa valeur :

Le circuit oscille sous un régime pseudo périodique :

$$U_L(t) = Ce^{-\delta t}\cos(\omega_p t + \varphi)$$

Tel que : $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$Ce^{-\delta\tau} = \frac{C}{6} \Rightarrow \ln(e^{-\delta\tau}) = \ln 1 - \ln 6 \Rightarrow -\delta\tau = -\ln 6 \Rightarrow \tau = \frac{\ln 6}{\delta}$$

On a :

$$\delta = \frac{R}{2\,L}$$

d'où :

$$\tau = \frac{2\,\mathrm{L}\ln 6}{R}$$

AN :

$$\tau = \frac{2 \times 3 \times \ln 6}{600} = 0.018\ s$$

5- Facteur de qualité de cet oscillateur :

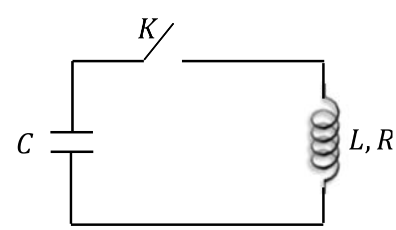
$$Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.\frac{2\,L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN :

$$Q = \frac{1}{600}\sqrt{\frac{3}{40 \times 10^{-9}}} = 14.43$$

Exercice 6

1- Equation différentielle vérifiées par $i(t)$ et $q(t)$ dans le circuit :



Bilan des tensions :

$$U_L + U_C = 0 \Rightarrow R\,i + L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i + \frac{q}{LC} = 0 \;...\;(1)$$

- Equation différentielle en $i(t)$:

En dérivant (1) par rapport au temps :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\frac{dq}{dt} = 0$$

On a :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

d'où :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

- Equation différentielle en $q(t)$:
On a :
$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i+\frac{q}{LC}=0$$
Et on a :
$$i=\frac{dq}{dt}=\dot{q}$$
et
$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}=\ddot{q}$$

d'où :
$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$$

- Déduire que le circuit étudié est un oscillateur harmonique amorti :
Les équations différentielles vérifiées par $i(t)$ et $q(t)$ sont des équations du second ordre, sans second membre, de la forme $\ddot{q}+2\delta\dot{q}+\omega_0^2q=0$, qui représente l'équation d'un oscillateur harmonique amortie, tel que :
$$\delta=\frac{R}{2L}$$
et
$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$
2- Conditions sur R pour que le régime d'évolution soit : apériodique, critique et pseudo périodique :
La solution de l'équation différentielle est sous la forme :
$q(t)=e^{rt}\Rightarrow\dot{q}(t)=re^{rt}\Rightarrow\ddot{q}(t)=r^2e^{rt}$
d'où : $r^2+2\delta r+\omega_0^2=0$
$$\Delta'=\delta^2-\omega_0^2=\frac{R^2}{4\,L^2}-\omega_0^2$$
- Le régime est apériodique (amortissement fort) si
$$\Delta'>0\Rightarrow\frac{R^2}{4\,L^2}-\omega_0^2>0\Rightarrow\frac{R^2}{4\,L^2}>\omega_0^2\Rightarrow R^2>4\,L^2\omega_0^2\Rightarrow R>2\,L\,\omega_0$$
- Le régime est critique si
$$\Delta'=0\Rightarrow\delta^2-\omega_0^2=0\Rightarrow\delta=\omega_0\Rightarrow\frac{R}{2\,L}=\omega_0\Rightarrow R=2\,L\,\omega_0$$
- Le régime est pseudo périodique (amortissement faible) si
$$\Delta'<0\Rightarrow\frac{R^2}{4\,L^2}-\omega_0^2<0\Rightarrow R<2\,L\,\omega_0$$
3- Expression de $q(t)$ dans le cas du régime pseudo périodique :
$$q(t)=q_me^{-\delta t}\cos(\omega_pt+\varphi)$$

avec :
$$\omega_p=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$
- Détermination de q_m et φ à partir des conditions initiales :
Conditions initiales :
à l'instant $t=0$: $q(t=0)=q_0$, $\dot{q}(t=0)=0$.
$$q(0)=q_0\Rightarrow q_m\cos\varphi=q_0\Rightarrow q_m=\frac{q_0}{\cos\varphi}$$

$\dot{q}(0) = 0$

On a :

$q(t) = q_m e^{-\delta t}\cos(\omega_p t + \varphi)$

$\dot{q}(t) = -\delta\, q_m\, e^{-\delta t}\cos(\omega_p t + \varphi) - q_m\omega_p\, e^{-\delta t}\sin(\omega_p t + \varphi)$

$$\dot{q}(0) = -\delta\, q_m\cos(\varphi) - q_m\omega_p\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow -\delta\cos(\varphi) = \omega_p\sin(\varphi) \Rightarrow \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-\delta}{\omega_p}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{-\delta}{\omega_p} = \frac{-\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\right)$$

Calcul de $\frac{1}{\cos\varphi}$:

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2\varphi = 1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{\omega_0^2 - \delta^2 + \delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \delta^2}$$

donc :

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

d’où :

$$q_m = \frac{q_0}{\cos\varphi} = \frac{q_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

donc :

$$q(t) = \frac{q_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.\, t + \arctan\left(\frac{-\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\right)\right)$$

4- Facteur de qualité du circuit :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.\frac{2\,L}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Chapitre 3. Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

3. 1. Equation différentielle

Jusqu'à présent, nous avons considéré les oscillations libres, qui ne sont soumises à aucune force d'excitation. Nous avons vu l'effet de la force de frottement visqueux qui dépend linéairement de la vitesse. Dans ce qui suit, nous allons voir l'effet des excitations harmoniques sur le système oscillatoire. De telles oscillations donnent lieu au phénomène de résonance, lorsque la fréquence de la force d'entrainement est proche de la fréquence propre d'oscillation du système. La sélection des ondes radio et télévision, qui sont reçues par des antennes, se fait grâce au phénomène de la résonance électrique.

L'amortissement des oscillations est dû à une diminution de l'énergie mécanique sous forme de chaleur dissipée. Afin de compenser ces pertes d'énergie et conserver les oscillations, il faut une source d'énergie à travers une force extérieure, dite excitatrice ($F_{ext} = A\cos\omega t$).

L'équation de Lagrange d'un système à un degré de liberté amorti, soumis à une force extérieure :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}+F_{ext}$$

Cas particuliers

Translation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+F_{ext}$$

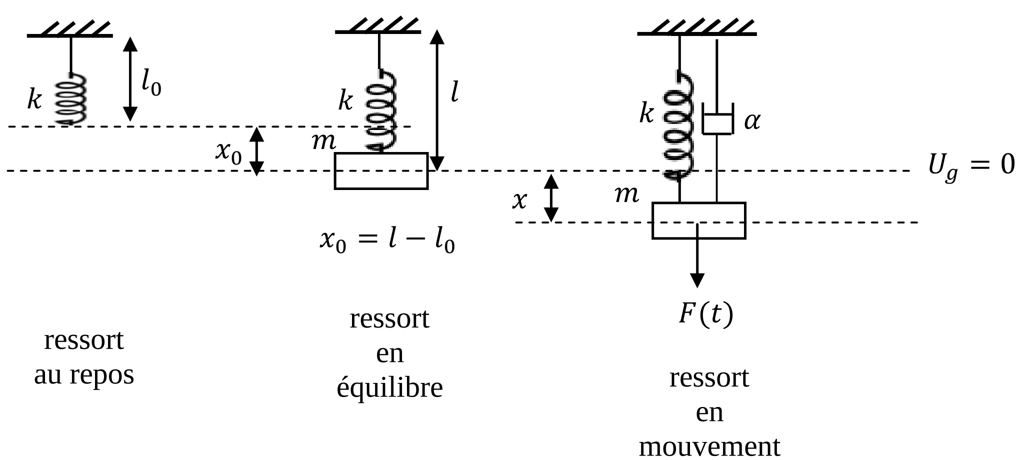
Rotation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}+M(F(t))$$

où M est le moment de la force F_{ext}.

3. 2. Excitation harmonique (sinusoïdale)

Le système masse-ressort-amortisseur est soumis à une force extérieure sinusoïdale : $F(t) = F_0 \cos\ \omega t$.



$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$
$$U = U_g + U_e$$
$$U_g = -mg(x + x_0) = -mgx - mgx_0$$
$$U_e = \frac{1}{2} k(x + x_0)^2$$

d'où :
$$U = \frac{1}{2} k(x^2 + 2xx_0 + x_0^2) - mgx + mgx_0$$
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} kx^2 + (kx_0 - mg)x + \frac{1}{2} kx_0^2 + mgx_0 = \frac{1}{2} kx^2 + (kx_0 - mg)x + C^{st}$$

Condition d'équilibre
$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow kx_0 - mg = 0 \Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$
donc :
$$U = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} kx_0^2$$
Lagrangien du système :
$$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2$$
Fonction de dissipation :
$$D = \frac{1}{2} \alpha v^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$
Equation de Lagrange :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\,\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k\,x$$
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\,\dot{x}$$

d'où :
$$m\,\ddot{x} + k\,x = -\alpha\,\dot{x} + F(t) \Rightarrow m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$
Cette équation s'écrit sous la forme :
$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$
C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant avec second membre, tel que :
$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2\,m}$$
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. 3. Solution de l'équation différentielle

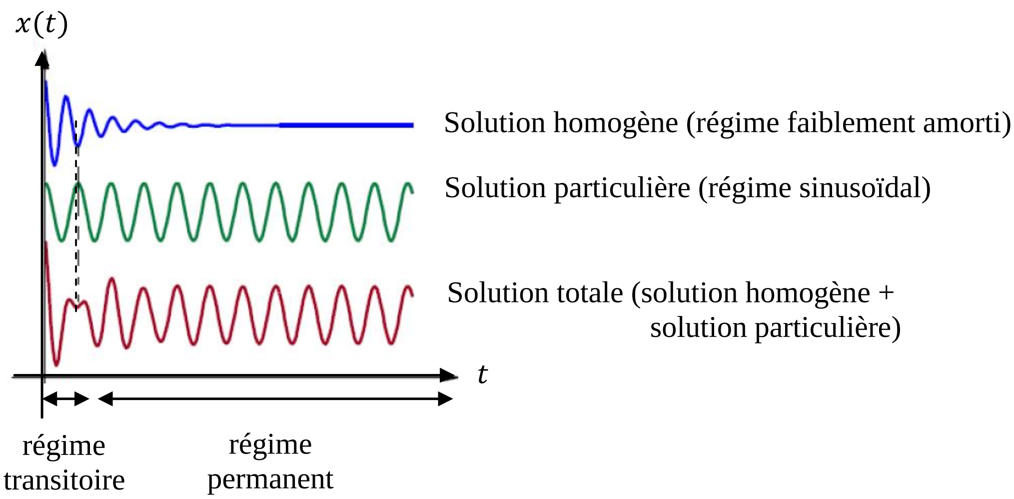
La solution de l'équation différentielle de second ordre avec second membre, est la somme de la solution sans second membre (ou solution homogène) $x_h(t)$ et d'une solution particulière de l'équation avec second membre $x_p(t)$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Nous avons déjà résolu l'équation différentielle sans second membre. Nous savons que $x_h(t)$ contient dans tous les cas le terme $e^{-\delta t}$. Après un intervalle de temps t très petit, la solution homogène est pratiquement nulle. Il ne subsistera que la solution particulière de l'équation avec second membre. L'intervalle de temps pour lequel $x_h(t)$ est non négligeable est appelé régime transitoire. A la fin de ce régime transitoire commence l'intervalle de temps pour lequel $x_h(t) \simeq 0$ et $x(t) \simeq x_p(t)$, c'est le régime permanent ou stationnaire.

On cherche la solution en régime permanent sous la forme sinusoïdale suivante :

$x(t) = x_p(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



3. 3. 1. Notation complexe

Détermination de A et φ en utilisant la notation complexe

$x(t) = A\cos\ (\omega t + \varphi)$

$\underline{x}(t) = A\, e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{A}\, e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A} = A\, e^{j\varphi}$ ($\underline{A}$: Amplitude complexe)

$\underline{\dot{x}}(t) = j\ \omega\ \underline{A}\ e^{j\omega t}$

$\underline{\ddot{x}}(t) = -\ \omega^2\ \underline{A}\ e^{j\omega t}$

On a :

$\ddot{x} +\ 2\delta\ \dot{x} + \omega_0^2\ x = \dfrac{F_0}{m}\cos\omega t$

d'où

$\underline{\ddot{x}} +\ 2\delta\ \underline{\dot{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \dfrac{F_0}{m}e^{j\omega t} \Rightarrow -\omega^2\underline{A}\ e^{j\omega t} + 2\delta j\ \omega\ \underline{A}\ e^{j\omega t} + \omega_0^2\underline{A}\ e^{j\omega t} = \dfrac{F_0}{m}e^{j\omega t}$

$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega]\ \underline{A} = \dfrac{F_0}{m} \Rightarrow \underline{A} = \dfrac{F_0/m}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\delta\omega]}$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\left(F_0/_m\right)[(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\delta\omega]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\left(F_0/_m\right)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2} - j\,\frac{\left(F_0/_m\right)(2\,\delta\,\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2}$$

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{Re^2(\underline{A}) + Im^2(\underline{A})} \Rightarrow \sqrt{\frac{\left(F_0/_m\right)^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2]^2} + \frac{\left(F_0/_m\right)^2(2\,\delta\,\omega)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2]^2}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\left(F_0/_m\right)^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2]^2}} \Rightarrow A = \frac{\left(F_0/_m\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{Im(\underline{A})}{Re(\underline{A})} = \frac{-\left(F_0/_m\right)(2\,\delta\,\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2}\,\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\,\delta\,\omega)^2}{\left(F_0/_m\right)(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{-2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Si $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$, on aura :

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Rappel

$$z = a + jb = A\,e^{j\theta}$$

$$A = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$tg\,\theta = \frac{b}{a}\begin{cases} \theta = Arctg\left(\frac{b}{a}\right) \; si\ a > 0 \\ \theta = Arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \;\; si\ a < 0 \end{cases}$$

donc

$$x(t) = \frac{\left(F_0/_m\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{2\,\delta\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right)$$

C'est la solution en régime permanent.

Cette expression montre que l'amplitude et le déphasage sont des fonctions de la pulsation de l'excitation.

3. 3. 2. Etude de la fonction $A(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{\left({F_0}/{m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$$

$A(\omega)$ est positive, elle est définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

- **Extremums (maximums ou minimums) de $A(\omega)$**

$$\frac{d\,A(\omega)}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[\frac{\left({F_0}/{m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{d}{d\omega}\left[\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}\right]\left({F_0}/{m}\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}$$

$$= 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2\right]}{2\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2\right] \Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[\omega_0^4 - 2\,\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + 4\delta^2\omega^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow -4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 8\delta^2\omega = 0 \Rightarrow (4\omega)(\omega^2-\omega_0^2+2\delta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases}$$

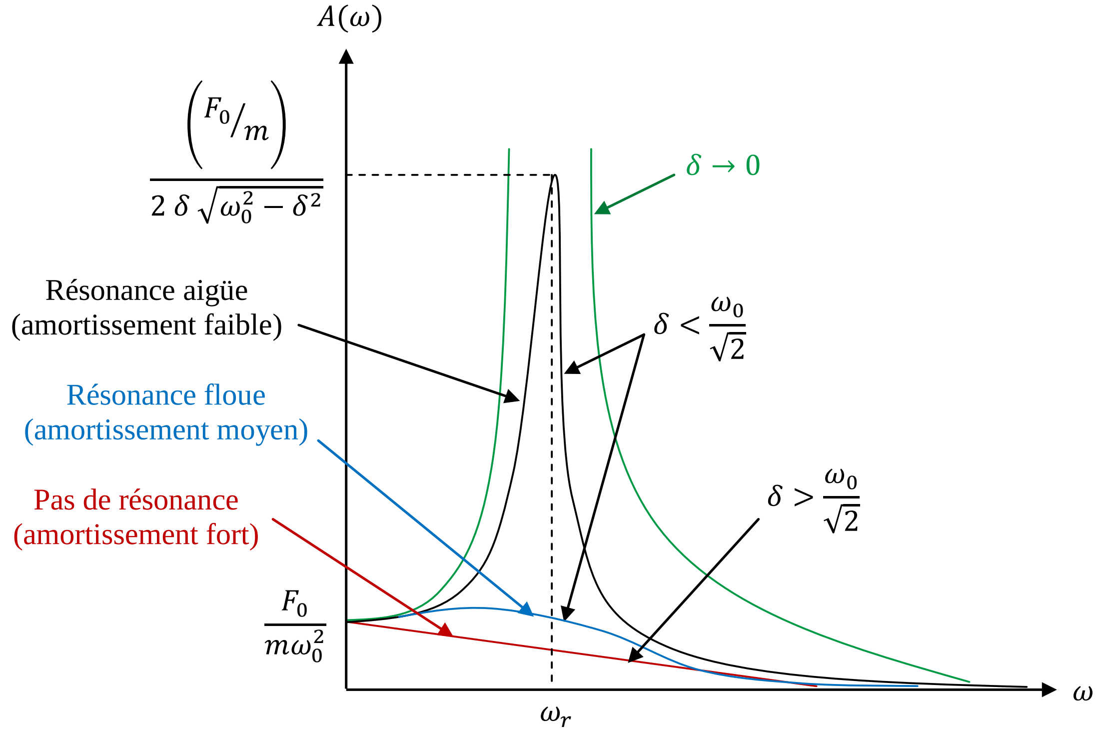
Donc la fonction $A(\omega)$ présente deux extremums.

Pour $\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2} = \omega_r$, la réponse du système est maximale (la fonction $A(\omega)$ présente un pic). Ce phénomène est appelé résonance et ω_r est appelée pulsation de résonance.
NB : Pour qu'il y ait résonance, il faut que $\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow \omega_0^2 > 2\delta^2 \Rightarrow \delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. On a : $\omega_r \simeq \omega_0$.

- **Tableau de variation de $A(\omega)$**

	$\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$	$\delta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$
ω	$0 \quad \omega_r \quad +\infty$	$0 \quad +\infty$
$\frac{d\,A(\omega)}{d\omega}$	$+ \quad 0 \quad -$	$-$
$A(\omega)$	$A(0) \nearrow A(\omega_r) \searrow 0$	$A(0) \searrow 0$

- **Représentation de $A(\omega)$**



$$A\,(\omega_r) = \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_0^2+2\,\delta^2)^2+4\,\delta^2(\omega_0^2-2\,\delta^2)}} = \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{4\,\delta^4+4\,\delta^2\,\omega_0^2-8\,\delta^4}}$$

$$= \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{4\,\delta^2\,\omega_0^2-4\,\delta^4}} = \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{4\,\delta^2\,(\omega_0^2-\delta^2)}} = \frac{\left(F_0/m\right)}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

$$A\,(0) = \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} A(\omega) = \frac{\left(F_0/m\right)}{+\infty} = 0$$

- Lorsque $\delta \to 0$:

$$A(\omega) = \frac{\left(F_0/m\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2}} = \frac{\left(F_0/m\right)}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$\lim_{\omega \to \omega_r} A(\omega) \to \infty$ (car $\omega_r \simeq \omega_0$) : amplitude infinie.

Un exemple célèbre d'amplitude infinie, est celui du pont de Tacoma (7/11/1940), qui s'est effondré aux Etats-Unis, sous l'action du vent qui a engendré des tourbillons à une fréquence identique à la fréquence de torsion du pont.

- **Facteur de résonance**

$$FR = \frac{A(\omega_r)}{A(0)}$$

$$A(\omega_r) = \frac{\left(F_0 / m \right)}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$A(0) = \frac{\left(F_0 / m \right)}{\omega_0^2}$$

d'où

$$FR = \frac{\left(F_0 / m \right)}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \frac{\omega_0^2}{\left(F_0 / m \right)} \Rightarrow FR = \frac{\omega_0^2}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

On a : $Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta}$: facteur de qualité

$$FR = \frac{\omega_0^2}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{\frac{\omega_0}{2\,\delta}}{\frac{1}{\omega_0}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{Q}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{\frac{4\,\omega_0^2}{4\,\delta^2}}}} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4\,Q^2}}}$$

Le facteur de résonance est d'autant plus marqué que le facteur de qualité est grand.

- **Bande passante**

Afin de caractériser l'acuité (l'intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit la bande passante B par l'intervalle $\Delta\omega$:

$$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \; (\omega_2 > \omega_1)$$

ω_1 et ω_2 correspondent aux amplitudes $A(\omega_1)$ et $A(\omega_2)$, tel que :

$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

- **Facteur de qualité**

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

3. 4. Excitation périodique

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la réponse d'un système vibratoire à une excitation sinusoïdales, dite excitation harmonique. En pratique, les excitations mécaniques ne sont pas toujours parfaitement sinusoïdales ; elles sont souvent périodiques. En considérant le cas d'excitation périodiques, nous procéderons à une généralisation du cas harmonique.

Soit une excitation périodique $A(t)$, de période T, son développement en série de Fourier s'écrit :

$$A(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t) + \sum_n b_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T A(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T A(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

NB :

- Une des méthodes les plus utiles dans l'analyse des signaux est la série de Fourier, permettant la transformation de n'importe quel signal périodique (plusieurs sources électroniques produisent des signaux périodiques) en une somme de sinusoïdes.
- Si $A(t)$ est une fonction impaire $\big(A(-t) = -A(t)\big)$, $a_n = 0$.
- Si $A(t)$ est une fonction paire $\big(A(-t) = A(t)\big)$, $b_n = 0$.

La réponse $x(t)$, en régime permanent, est la somme des réponses calculées pour chaque harmonique par la méthode exposée au paragraphe précédent :

$$x(t) = X_c + \sum_n X_{M,n}\cos(n\omega t - \varphi_n) + \sum_n X'_{M,n}\sin(n\omega t - \varphi_n)$$

Le terme X_c représente la réponse à l'excitation constante :

$$X_c = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

$$X_{M,n} = \frac{a_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\,\delta^2 n^2\omega^2}}$$

$$X_{M,n}{}' = \frac{b_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\,\delta^2 n^2\omega^2}}$$

$$tg\,\varphi_n = \frac{-2\,\delta\, n\, \omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}$$

La réponse $x(t)$ a la même période que l'excitation $A(t)$, mais elle n'a pas la même forme.

Exemple

L'oscillateur mécanique, représenté ci-contre, est soumis à une fonction en dents de scie :

$F(t) = \frac{F}{T}t$ de 0 à T

Le développent en série de Fourier de $F(t)$ donne :

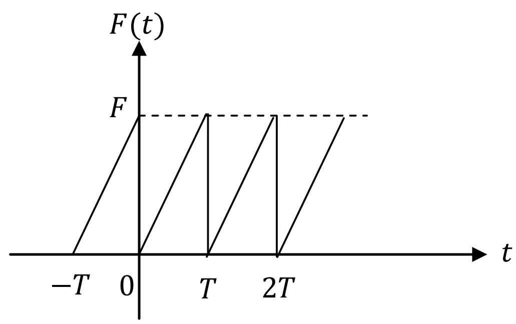
$$F(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t) + \sum_n b_n \sin(n\omega t)$$

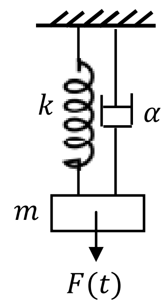
avec :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)\; dt$$





Calcul de a_0

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F}{T} t\, dt = \frac{F}{T^2}\int_0^T t\, dt = \frac{F}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{F}{T^2}\frac{T^2}{2} = \frac{F}{2}$$

Calcul de a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos(n\omega t)\, dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{F}{T} t\cos(n\omega t)\, dt = \frac{2F}{T^2}\int_0^T t\cos(n\omega t)\, dt$$

Intégration par partie :
On a : $\int f'g = fg - \int g'f$

On pose :

$$f' = \cos(n\omega t)\, dt \Rightarrow f = \int \cos(n\omega t)\; dt = \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}$$

$$g = t \;\Rightarrow g' = dt$$

$$\int t\;\cos(n\omega t)\; dt = t\;\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} - \int \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\; dt = t\;\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} - \frac{1}{n\omega}\int \sin(n\omega t)\; dt$$

$$= t\;\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} - \frac{1}{n\omega}\left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right] = \frac{1}{n\omega}\left[t\;\sin(n\omega t) + \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]$$

donc :

$$a_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{1}{n\omega}\left(t\;\sin(n\omega t) + \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right)\right]_0^T$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{1}{n\omega}\left(T\ \sin(n\omega T) + \frac{\cos(n\omega T)}{n\omega}\right)\right] - \left[\frac{1}{n\omega}\left(0\ \sin(0) + \frac{\cos(0)}{n\omega}\right)\right]$$

$$= \frac{2F}{T^2}\left[\frac{1}{n\omega}\left(T\ \sin\left(n\frac{2\pi}{T}T\right) + \frac{\cos\left(n\frac{2\pi}{T}T\right)}{n\omega}\right)\right] - \left[\frac{1}{n\omega^2}\right]$$

$$= \frac{2F}{T^2}\left[\frac{\cos(2n\pi)}{n\omega^2} - \frac{1}{n\omega^2}\right]$$

$$= \frac{2F}{T^2 n\omega^2}[\cos(2n\pi) - 1] = 0$$

Calcul de b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin(n\omega t)\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{F}{T}\ t\sin(n\omega t)\ dt = \frac{2F}{T^2}\int_0^T t\sin(n\omega t)\ dt$$

Intégration par partie :

On a : $\int f'g = fg - \int g'f$

On pose :

$$f' = \sin(n\omega t)\ dt \Rightarrow f = \int \sin(n\omega t)\,dt = -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}$$

$$g = t\ \Rightarrow g' = dt$$

$$\int t\ \sin(n\omega t)\ dt = -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} - \int -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\ dt = -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \int \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\ dt$$

$$= -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{1}{(n\omega)^2}\ \sin(n\omega t)$$

donc :

$$b_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{1}{(n\omega)^2}\ \sin(n\omega t) - t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^T$$

$$b_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{\sin(n\omega T)}{(n\omega)^2}\ - T\ \frac{\cos(n\omega T)}{n\omega}\right] - \left[\frac{\sin(0)}{(n\omega)^2}\ - 0\ \frac{\cos(0)}{n\omega}\right]$$

$$b_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{\sin\left(n\frac{2\pi}{T}T\right)}{(n\omega)^2}\ - T\ \frac{\cos\left(n\frac{2\pi}{T}T\right)}{n\omega}\right] \Rightarrow b_n = \frac{2F}{T^2}\left[\frac{\sin(2n\pi)}{(n\omega)^2}\ - T\ \frac{\cos(2n\pi)}{n\omega}\right]$$

$$b_n = \frac{2F}{T^2}\left(-\frac{T}{n\omega}\right) = -\frac{2F}{n\omega T} = -\frac{2FT}{n\,2\,\pi\,T} = -\frac{F}{n\,\pi}$$

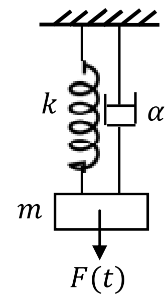
d'où :

$$F(t) = \frac{F}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-F}{n\pi}\right)\sin(n\omega t)$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{F}{2} - \frac{F}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega t)$$

$$\Rightarrow F(t) = \frac{F}{2} - \frac{F}{\pi}\sin(\omega t) - \frac{F}{2\pi}\sin(2\omega t) - \cdots - \frac{F}{n\pi}\sin(n\omega t)$$

L'équation du mouvement du système :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+F(t)$$
$$L=T-U$$
$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$U=U_g+U_e=-mg(x+x_0)+\frac{1}{2}k(x+x_0)^2$$

Condition d'équilibre : $k\,x_0-mg=0$

donc :
$$U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx_0^2-mgx_0=\frac{1}{2}kx^2+C^{st}$$

La fonction de dissipation
$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

Equation de Lagrange :
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=-kx$$

d'où

$$m\,\ddot{x}+kx=-\alpha\,\dot{x}+F(t)\Rightarrow m\,\ddot{x}+\alpha\,\dot{x}+kx=F(t)$$
$$\Rightarrow \ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\,\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F}{2m}-\frac{F}{\pi m}\sin(\omega t)-\frac{F}{2\pi m}\sin(2\omega t)-\cdots-\frac{F}{n\pi m}\sin(n\omega t)$$

qui s'écrit sous la forme :
$$\ddot{x}+2\delta\,\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F}{2m}-\frac{F}{\pi m}\sin(\omega t)-\frac{F}{2\pi m}\sin(2\omega t)-\cdots-\frac{F}{n\pi m}\sin(n\omega t)$$

tel que :
$$2\delta=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha}{2\,m}$$
$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La réponse à l'excitation constante $F/_2$ est $X_c={a_0}/{\omega_0^2}$ où $a_0={F}/{2m}$ et $\omega_0^2={k}/{m}$

d'où
$$X_c=\frac{F}{2m}\frac{m}{k}=\frac{F}{2k}$$

La réponse à chaque harmonique de $F(t)$ a pour amplitude $X_{M,n}$ et pour phase φ_n telles que :

$$X_{M,n}=\frac{{b_n}/{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-n^2\omega^2)^2+4\,\delta^2n^2\omega^2}}$$

$$tg\ \varphi_n = \frac{-2\,\delta\, n\,\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}$$

donc :

$$X_{M,n} = \frac{-F/_{n\,\pi\, m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\,\delta^2 n^2\omega^2}} = -\frac{1}{n}\frac{F/_{\pi\, m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\,\delta^2 n^2\omega^2}}$$

et :

$$x(t) = \frac{F}{2k} - \frac{F}{\pi m}\left[\frac{\sin(\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\omega^2}} + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\sin(n\omega t - \varphi_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\,\delta^2 n^2\omega^2}}\right]$$

3. 5. Impédance mécanique

Définition

Considérons un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\omega t)$. En régime permanent, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $v(t) = v_0\cos(\omega t + \varphi)$. On appelle impédance mécanique d'entrée du système, le rapport des amplitudes complexes de la force et de la vitesse :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}}$$

3. 5. 1. Impédance mécanique d'un amortisseur

Dans le cas d'un amortisseur, la force appliquée est reliée à la vitesse par : $F(t) = \alpha\, v(t) \Rightarrow \underline{F}(t) = \alpha\,\underline{v}(t)$ d'où :

$$Z_\alpha = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)} = \alpha$$

NB :

$$Z_\alpha = |Z_\alpha| e^{j\theta}$$

$$\begin{cases} |Z_\alpha| = \alpha \\ \theta = 0 \end{cases}$$

3. 5. 2. Impédance mécanique d'une masse

Dans le cas d'une masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$F(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d\dot{x}(t)}{dt}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{x}(t) = A\ e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\underline{\dot{x}}(t) = j\omega A\ e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{x}(t)$$

$$\frac{d\underline{\dot{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(j\omega\underline{x}(t)\big) = j\omega\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega\ \dot{x}(t)$$

$$\underline{F}(t) = m\frac{d\underline{\dot{x}}(t)}{dt} \Rightarrow \underline{F}(t) = mj\omega\ \dot{x}(t)$$

On a :

$$Z_m = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{\dot{x}}(t)} = jm\omega$$

et on a :

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

d'où :

$$Z_m = m\omega\ e^{j\frac{\pi}{2}}$$

NB :

$Z_m = |Z_m| e^{j\theta}$

$$\begin{cases} |Z_m| = m\omega \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. 5. 3. Impédance mécanique d'un ressort

Dans le cas d'un ressort de raideur k, la force appliquée $F(t)$ s'exprime en fonction de l'allongement par : $F(t) = k\,x(t)$

On a : $x(t) = \int \dot{x}(t)\,dt$

d'où : $F(t) = k \int \dot{x}(t)\,dt \Rightarrow \underline{F}(t) = k \int \underline{\dot{x}}(t)\,dt$

On a :

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{x}(t) = A\,e^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow \underline{\dot{x}}(t) = j\omega A\,e^{j(\omega t+\varphi)}$

d'où :

$$\underline{F}(t) = k \int j\omega A\,e^{j(\omega t+\varphi)}\,dt = kj\omega A \int e^{j(\omega t+\varphi)}\,dt$$

$$\Rightarrow \underline{F}(t) = kj\omega A \frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{k}{j\omega}\underline{\dot{x}}(t)$$

On a :

$$Z_k = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{\dot{x}}(t)} = \frac{k}{j\omega} = -j\,\frac{k}{\omega}$$

et on a :

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$$

d'où :

$$Z_k = \frac{k}{\omega}\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

NB :

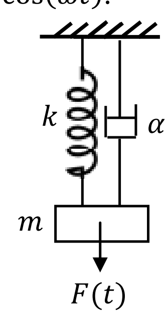
$Z_k = |Z_k| e^{j\theta}$

$$\begin{cases} |Z_k| = \dfrac{k}{\omega} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. 5. 4. Application

Soit un système mécanique constitué d'un ressort de raideur k, d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α et d'une masse m, soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\omega t)$.

Trouvons l'impédance d'entrée de ce système :



On a :

$Z_\alpha = \alpha,\ Z_m = jm\omega,\ Z_k = -\frac{jk}{\omega}$

d'où : $\underline{Z} = \alpha + jm\omega - j\frac{k}{\omega} = \alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$

Ou bien :

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F(t) \Rightarrow m\frac{d\dot{x}(t)}{dt} + \alpha\,\dot{x}(t) + k\int \dot{x}(t) = F(t)$$

On a :

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{x}(t) = A\,e^{j(\omega t+\varphi)} \Rightarrow \underline{\dot{x}}(t) = j\omega A\,e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\underline{x}(t)$

$$\frac{d\underline{\dot{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(j\omega\, \underline{x}(t)\right) = j\omega\, \frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega\, \underline{\dot{x}}(t)$$

d'où :

$$m\frac{d\underline{\dot{x}}(t)}{dt} + \alpha\, \underline{\dot{x}}(t) + k\int \underline{\dot{x}}(t) = \underline{F}(t) \Rightarrow mj\omega\, \underline{\dot{x}}(t) + \alpha\, \underline{\dot{x}}(t) + \frac{k}{j\omega}\, \underline{\dot{x}}(t) = \underline{F}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{x}}(t)\left[\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right] = \underline{F}(t)$$

$$\underline{\dot{x}}(t) = \frac{\underline{F}(t)}{\left[\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right]} = \underline{V}\, e^{j\omega t}$$

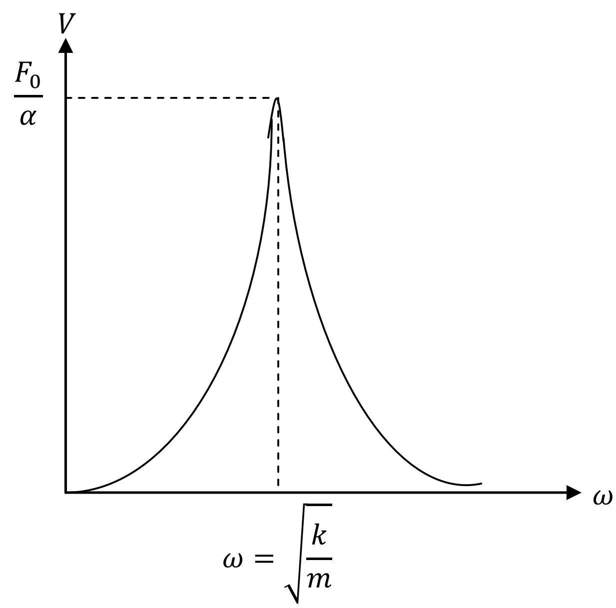
Tel que $\underline{V}$ est l'amplitude complexe de la vitesse.

$$\underline{V} = \frac{F_0}{\left[\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right]} = \frac{F_0\left[\alpha - j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)\right]}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} = \frac{\alpha F_0 - jF_0\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$$

$$V = \left|\underline{V}\right| = \sqrt{\left(\frac{\alpha F_0}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{F_0\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{F_0^2\left[\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2\right]}{\left[\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2\right]^2}}$$

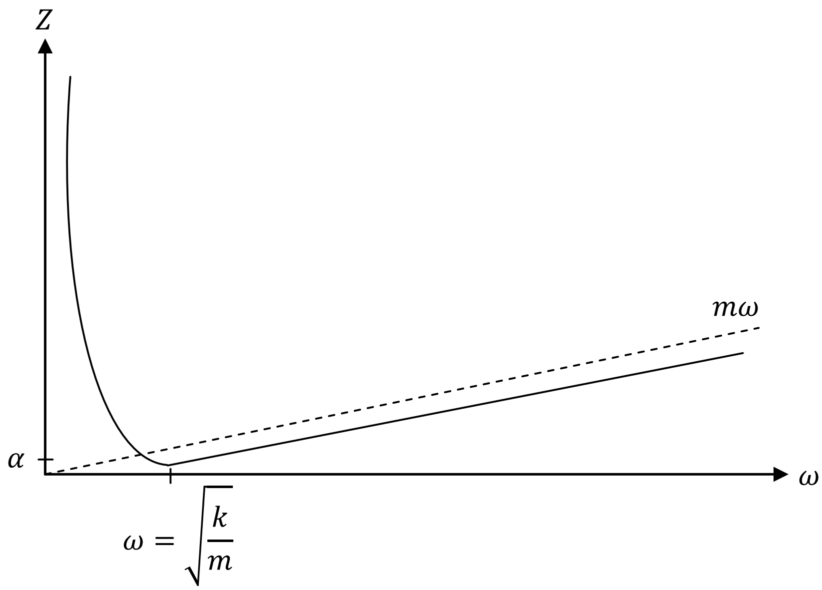
$$\Longrightarrow V = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}}$$

$$arg\left(\underline{V}\right) = -arctan\left(\frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{\alpha}\right)$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{\dot{x}}(t)} = \alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$$

$$\begin{cases} Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2} \\ \arg(\underline{Z}) = arctan\left(\dfrac{m\omega - \dfrac{k}{\omega}}{\alpha}\right) \end{cases}$$



Lorsque $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Z = \alpha$ et Vest maximale → $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ représente la pulsation de résonance.

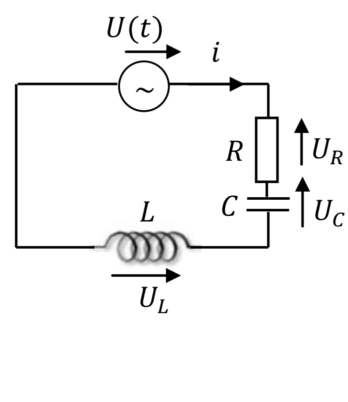
3. 6. Oscillateur électrique

On considère le circuit oscillant RLC alimenté par une source de tension sinusoïdale $U(t)$, tel que : $U(t) = U\, e^{j\omega t}$.

Le bilan des tensions :

$U_L + U_C + U_R = U(t)$

$L\,\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q}{C} + Ri = U(t)$



On a :

$i = \dfrac{dq}{dt} = \dot{q}$

et

$\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$

d'où

$L\,\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{q}{C} = U(t) \Rightarrow \ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{q}{LC} = \dfrac{U(t)}{L}$

3. 6. 1. Analogie électromécanique

Les oscillateurs mécaniques et électriques sont régis par le même type d'équations différentielles. Ce sont des équations différentielles du second ordre, linéaires, à coefficients constants et avec second membre :

$A\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + C\,x = D(\omega t)$

La solution de cette équation en régime permanent, quand l'excitation $D(\omega t)$ est harmonique s'écrit : $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$. Elle décrit aussi bien la réponse de l'oscillateur mécanique (déplacement) que celle de l'oscillateur électrique (charge). Le comportement de ces deux systèmes étant décrit par la même fonction.

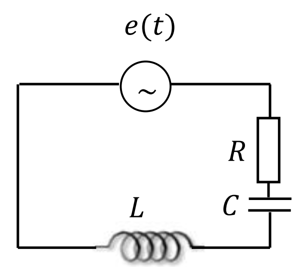
Il est parfois utile de se référer à un système électrique pour comprendre le comportement du système mécanique équivalent.

- **Analogie force-tension**

Considérant un circuit RLC alimenté par un générateur de tension $e(t)$.

La loi des mailles donne :

$$U_L + U_R + U_C = e(t) \Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e(t)$$



On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où

$$L\,\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e(t)$$

Cette équation s'écrit sous la même forme que l'équation d'un oscillateur mécanique à un degré de liberté amorti forcé : $m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F(t)$.

Ces deux équations sont identiques si l'on fait la correspondance suivante :

x (déplacement linéaire) $\leftrightarrow$ q (charge électrique)
$\dot{x}$(vitesse linéaire) $\leftrightarrow$ i (courant électrique)
m(masse) $\leftrightarrow$ L (self)
α(coefficient de frottement) $\leftrightarrow$ R(résistance)
k(constante de rappel) $\leftrightarrow$ $\frac{1}{C}$ (inverse de la capacité)
$F(t)$(force d'excitation) $\leftrightarrow$ $e(t)$ (générateur de tension)

La dernière correspondance est à l'origine de l'appellation analogie force-tension.

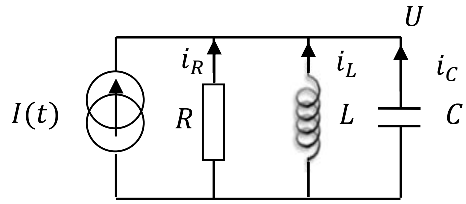
NB : Dans le cas d'un mouvement vibratoire angulaire, la masse m est remplacée par le moment d'inertie J. Parfois aussi la constante de rappel k est remplacée par mgl (voir chapitre 1, oscillations non amorties, exercice 3).

- **Analogie force-courant**

Nous pouvons aussi faire correspondre à la loi de Newton $\sum \vec{F}_i = m\vec{g}$, la loi de Kirchhoff (loi des nœuds) $I = \sum i_j$.

Considérant le circuit RLC parallèle alimenté par un générateur de courant $I(t)$.

La loi de Kirchhoff donne :
$I = i_L + i_R + i_C$



RLC étant en parallèle, elles sont soumises à la même tension U.

$$i_R = \frac{U}{R}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int U\,dt$$
$$i_C = C\frac{dU}{dt}$$

L'équation devient :
$$\frac{1}{L}\int U\,dt + \frac{U}{R} + C\frac{dU}{dt} = I$$

Nous pouvons aussi écrire l'équation de l'oscillateur mécanique en terme de $\dot{x}$:
$$m\,\frac{d\dot{x}}{dt} + \alpha\dot{x} + k\int \dot{x}dt = F(t)$$

Les deux équations sont analogues. On passe du système mécanique au système électrique (parallèle) en faisant la correspondance suivante :

$\dot{x}$(vitesse linéaire) $\leftrightarrow$ U (tension)
m(messe) $\leftrightarrow$ C (capacité)
α(coefficient de frottement) $\leftrightarrow$ $\frac{1}{R}$(inverse de la résistance)
k(constante de rappel) $\leftrightarrow$ $\frac{1}{L}$ (inverse de la self)
$F(t)$(force d'excitation) $\leftrightarrow$ $I(t)$ (générateur de courant)

La dernière correspondance est à l'origine de l'appellation analogie force-courant.

3. 6. 2. Impédance complexe
3. 6. 2. 1. Condensateur
$$Z_C = \frac{U_C}{i_C}$$
Soit $U_C = Ee^{j\omega t}$ (on considère que la phase $\varphi = 0$).
On a : $Q = C\,U_C \Rightarrow dq = C\,dU_C$
On a aussi : $dq = i_c dt$

d'où :
$$C\,dU_C = i_C dt \Rightarrow i_C = C\frac{dU_C}{dt} = C\,E\,\frac{d\left(e^{j\omega t}\right)}{dt} = C\,E\,j\,\omega\,e^{j\omega t}$$
alors
$$Z_C = \frac{E\,e^{j\omega t}}{C\,E\,j\,\omega\,e^{j\omega t}} = \frac{1}{jC\,\omega}$$

3. 6. 2. 2. Self

$$Z_L = \frac{U_L}{i_L}$$

Soit $i_L = I\, e^{j\omega t}$ (on considère que la phase $\varphi = 0$).

On a

$$U_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow U_L = L\, I\, j\omega\, e^{j\omega t}$$

d'où

$$Z_L = \frac{L\, I\, j\, \omega\, e^{j\omega t}}{I\, e^{j\omega t}} = j\, \omega\, L$$

3. 6. 2. 3. Résistance

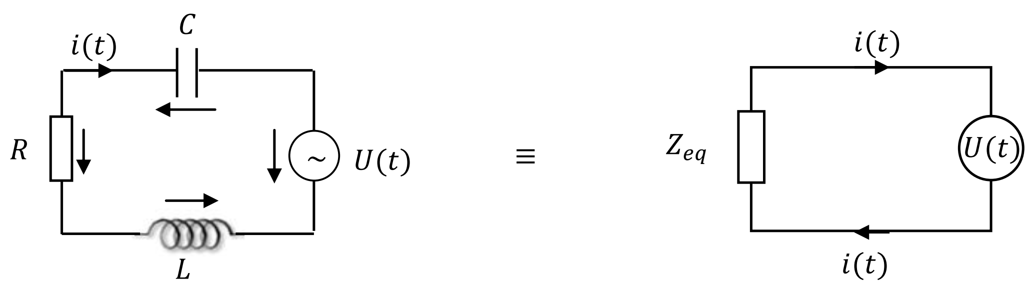
$$Z_R = \frac{U_R}{i_R}$$

On a : $U_R = R\, i_R$ donc $Z_R = R$

3. 6. 3. Application

On considère un système de réception radio modélisé par un circuit RLC en série et alimenté par une source de tension sinusoïdale d'intensité $U(t) = U_0 \cos \omega t$

Le circuit est en série, on peut le schématiser comme suit :



L'impédance équivalente est donnée par :

$$\underline{Z}_{eq} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$\underline{Z}_{eq} = Z_{eq}\, e^{-j\varphi}$$

$$\begin{cases} Z_{eq} = \left|\underline{Z}_{eq}\right| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} \\ tg\ \varphi = \left(\dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}\right) \end{cases}$$

Le courant s'écrit

$$I(\omega) = \frac{|U(t)|}{\left|\underline{Z}_{eq}\right|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Le courant est maximum pour la valeur $I_0 = \frac{U_0}{R} \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$.

On obtient alors la valeur de la pulsation correspondante

$$L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r} \Rightarrow LC\omega_r^2 = 1 \Rightarrow \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

ω_r est appelé la pulsation de résonance, qui ne dépend que de l'inductance et de la capacité.
La bande passante est définit par

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

ω_1 et ω_2 sont déterminées en résolvant l'équation paramétrique suivante

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Le facteur de qualité s'écrit

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Remarques

- On constate que la fréquence de résonance ne dépend pas de la résistance R, par contre la bande passante et le facteur de qualité varient en fonction de la résistance.
- Pour une bonne application technique du système, c'est-à-dire avoir une très bonne réception du signal, il faut que la résistance du circuit soit faible.
- Montrons que :

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

On a :

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \dots (1)$$

Tel que :

$$I_0 = \frac{U_0}{R}$$

On a :

$$I(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U_0}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}} = \frac{\frac{U_0}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}}$$

$$= \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}} \dots (2)$$

Par identification entre (1) et (2), on aura :

$$1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \dots (3) \\ L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \dots (4) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow LC\,\omega^2 - R\,C\,\omega - 1 = 0$

$\Delta = R^2C^2 + 4LC > 0$

$$\omega_1 = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}$$

$$\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}$$

On a $\sqrt{\Delta}= \sqrt{R^2C^2+4LC} > \sqrt{(RC)^2} = RC$ donc $\omega_1 < 0$, ce qui est impossible.

d'où :

$$\omega_1 = \frac{RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2\,L\,C} = \frac{R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L}$$

(4) $\Rightarrow\ LC\,\omega^2 + R\,C\,\omega - 1 = 0$

$\Delta= R^2C^2+4LC > 0$

$$\omega_1' = \frac{-RC-\sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}$$

$$\omega_2' = \frac{-RC+\sqrt{\Delta}}{2\,L\,C}$$

On a :

$-RC-\sqrt{\Delta}< 0$ donc $\omega_1' < 0$, ce qui est impossible.

d'où :

$$\omega_2 = \frac{-RC+\sqrt{R^2C^2+4LC}}{2\,L\,C} = \frac{-R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L}$$

On a : $\omega_2 > \omega_1$

donc :

$$\omega_1 = \frac{-R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L}$$

et

$$\omega_2 = \frac{R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L}$$

$$\Delta\omega = \omega_2-\omega_1 = \frac{R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L} - \left(\frac{-R+\sqrt{R^2+\frac{4L}{C}}}{2\,L}\right) = \frac{2R}{2L} = \frac{R}{L}$$

3. 7. Enoncés des exercices

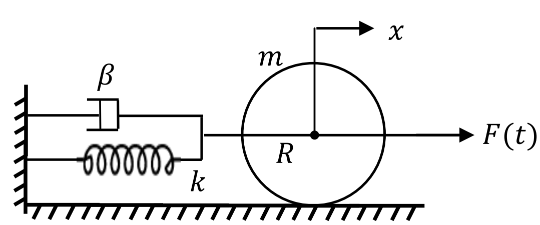
Exercice 1

Un disque de masse m, de rayon R et de moment d'inertie J ($J_{Disque} = \frac{1}{2}mR^2$) peut rouler sans glissement sur un plan horizontal. Le disque est relié en son centre à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante β. Une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ est appliquée sur le disque en son centre.

1- Déterminer l'équation du mouvement.

2- En utilisant la représentation complexe, déterminer l'amplitude et la phase de la solution permanente de l'équation du mouvement.

3- Ecrire la condition de résonance d'amplitude et la pulsation de résonance Ω_r.



Exercice 2

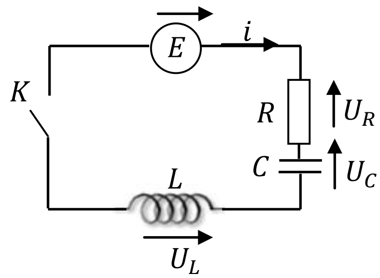
Considérons le circuit ci-contre constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C, d'une résistance R et d'une source de tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos(\Omega t)$. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1- Ecrire l'équation différentielle que vérifie la charge $q(t)$ du condensateur.

2- Déterminer à l'aide de la représentation complexe la solution en régime permanent (donner son amplitude et sa phase).

3- Donner la pulsation de résonance Ω_r. A quelle condition doit satisfaire L pour qu'il y ait résonance ?

4- Déterminer le facteur de qualité et le facteur de résonance du circuit, pour $R = 100\ \Omega$, $C = 1\ \mu F$ et $L = 4\ H$.



Exercice 3

L'équation différentielle que vérifie la charge $q(t)$ aux borne d'un condensateur de capacité C, monté en série avec une bobine d'inductance L, une résistance R et une source de tension sinusoïdale $e(t)$, est donnée par : $0.2\,\ddot{q}(t) + 1.2\,\dot{q}(t) + 5\,q(t) = 4\,\cos(2t)$.

1- Déterminer dans ce cas, le coefficient d'amortissement δ, la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la pulsation de la tension sinusoïdale Ω.

2- Donner la solution $q_1(t)$ du régime transitoire et montrer que le circuit étudié est un oscillateur harmonique amorti. En déduire la pseudo-pulsation ω_p. Déterminer ce régime en tenant compte des conditions initiales suivantes : $q_1(t=0) = 4$ et $\dot{q}_1(t=0) = 0$.

3- Trouver à l'aide de la représentation complexe la solution en régime permanent $q_2(t)$ (donner son amplitude A et sa phase φ).

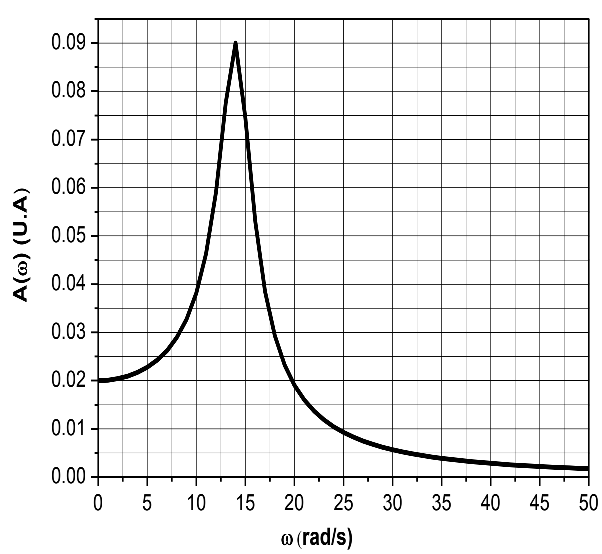
4- Déterminer le facteur de qualité du circuit.

Exercice 4

1- Que représente la courbe ci-contre.

2- Déterminer les caractéristiques suivantes : pulsation de résonance ω_r, fréquence de résonance f_r , facteur de résonance FR et bande passante $\Delta\omega$.

3- Trouver le facteur de qualité.

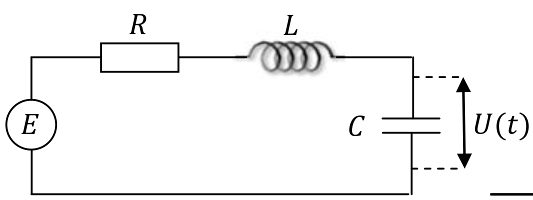


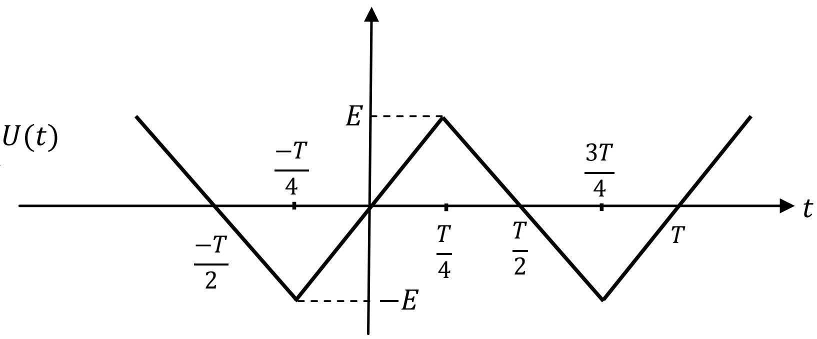
Exercice 5

Un circuit RLC série est alimenté par un générateur délivrant une force électromotrice périodique $E(t)$, telle que :

$E(t) = 4E/T.t$ pour $-T/4 < t < T/4$

et $E(t) = {}^{-4E}/_{T}\,.\,t + 2E$ pour $T/4 < t < {}^{3T}/_{4}$





Déterminer la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur.
AN : $E = 10\ V$, $f = 1.6\ kHz$, $L = 100\ mH$, $C = 0.1\ \mu F$, $R = 200\ \Omega$.

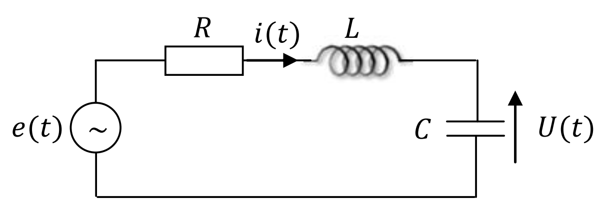
Exercice 6

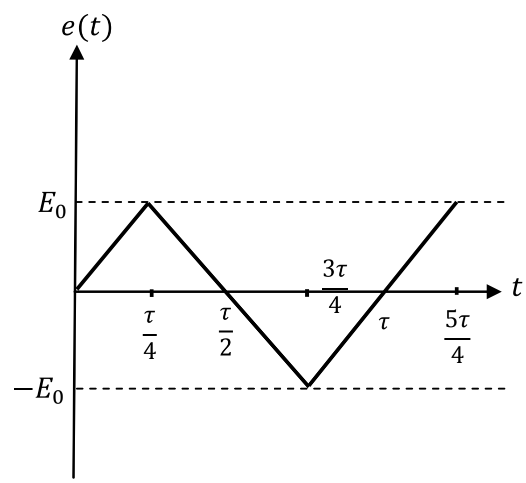
Le circuit RLC ci-contre est alimenté par un générateur délivrant une force électromotrice périodique $e(t)$ telle que représenté sur le schéma.

1- Donner le développement en série de Fourier de $e(t)$.

2- Déterminer la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur en régime permanent.

3- Faire l'application numérique pour : $E_0 = 10\ V$, $f = {}^{1}/_{\tau} = 1600\ Hz$, $L = 100\ mH$, $C = 0.1\ \mu F$, $R = 200\ \Omega$. Que remarque-t-on ? Ce résultat est-il valable pour d'autres valeurs de la fréquence du générateur ?

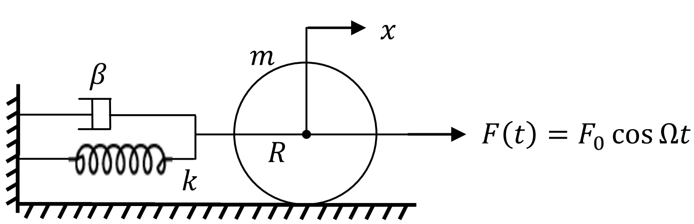




3. 8. Solutions des exercices

Exercice 1

1- Equation du mouvement :



Le disque roule sans glisser, c'est-à-dire que lorsqu'il tourne de θ son centre de masse (de gravité) se déplace de x.

- Energies cinétique :

$T = T_{Translation} + T_{Rotation}$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\,R^2\,\dot{\theta}^2$$

On a :

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R}$$

d'où :

$$T = \frac{2}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

- Energies potentielle :

$$U = U_e = \frac{1}{2}kx^2$$

- Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}^2$$

- Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

- Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \beta\dot{x}$$

d'où :

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = -\beta\dot{x} + F_0\cos\Omega t \Rightarrow \frac{3}{2}m\,\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\,\beta}{3\,m}\dot{x} + \frac{2\,k}{3\,m}x = \frac{2\,F_0}{3\,m}\cos\Omega t$$

Cette équation s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{2\,F_0}{3\,m}\cos\Omega t$$

avec :

$$2\,\delta = \frac{2\,\beta}{3\,m} \Rightarrow \delta = \frac{\beta}{3\,m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2\,k}{3\,m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2\,k}{3\,m}}$$

2- Détermination de l'amplitude et la phase de la solution en régime permanent de l'équation du mouvement, en utilisant la représentation complexe :

La solution en régime permanent : $x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

$\underline{x}(t) = A\,e^{j(\Omega t+\varphi)} = A\,e^{j\varphi}e^{j\Omega t} = \underline{A}\,e^{j\Omega t}$, où $\underline{A} = A\,e^{j\varphi}$

$\underline{\dot{x}}(t) = j\,\Omega\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\mathrm{t}}$

$\underline{\ddot{x}}(t) = -\,\Omega^2\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\mathrm{t}}$

On a :

$$\underline{\ddot{x}} + 2\,\delta\,\underline{\dot{x}} + \omega_0^2\,\underline{x} = \frac{2\,F_0}{3\,m}\;e^{j\Omega t}$$

d'où :

$$-\,\Omega^2\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\mathrm{t}} + 2\,\delta j\,\Omega\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\mathrm{t}} + \omega_0^2\underline{A}\;e^{j\Omega t} = \frac{2\,F_0}{3\,m}\;e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{A}}\,(\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\delta\Omega) = \frac{2\,F_0}{3\,m} \Rightarrow \underline{\mathrm{A}} = \frac{\frac{2\,F_0}{3\,m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\delta\Omega} = \frac{\frac{2\,F_0}{3\,m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega\right]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

$$\underline{A} = \frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} - j\,\frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)(2\delta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

$$A = \left|\underline{A}\right| = \sqrt{Re^2(\underline{A}) + Im^2(\underline{A})} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]^2} + \frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)^2(2\delta\Omega)^2}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]^2}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)^2\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2\right]^2}} \Rightarrow A = \frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$\tan\,\varphi = \frac{Im(\underline{A})}{Re(\underline{A})} = \frac{\dfrac{-\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)(2\delta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}{\dfrac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

d'où :

$$x(t) = \frac{\left(\frac{2\,F_0}{3\,m}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t + \arctan\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

3- Condition de résonance d'amplitude et la pulsation de résonance Ω_r :

Condition de résonance d'amplitude :

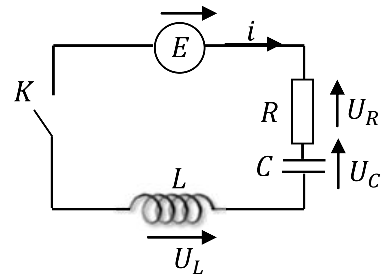
$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0$$

Pulsation de résonance :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\,\delta^2} = \sqrt{\frac{2\,k}{3\,m} - 2\,\frac{\beta^2}{9\,m^2}} = \sqrt{\frac{2}{3\,m}\left(k - \frac{\beta^2}{3\,m}\right)}$$

Exercice 2

1- Equation différentielle que vérifie la charge $q(t)$ du condensateur :



Le bilan des tensions :

$$U_L + U_C + U_R = E(t)$$

$$L\,\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = E_0 \cos \Omega t$$

On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où :

$$L\,\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \Omega t \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{E_0}{L}\cos \Omega t$$

qui s'écrit sous la forme :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}\cos \Omega t$$

avec :

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

2- Solution en régime permanent à l'aide de la représentation complexe :

$$q(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\underline{q}(t) = A\,e^{j(\Omega t+\varphi)} = A\,e^{j\varphi}e^{j\Omega t} = \underline{A}\,e^{j\Omega t}\text{ , où }\underline{A} = A\,e^{j\varphi}$$

$$\underline{\dot{q}}(t) = j\,\Omega\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega \mathrm{t}}$$

$$\underline{\ddot{q}}(t) = -\,\Omega^2\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega \mathrm{t}}$$

On a :

$$\underline{\ddot{q}} + 2\,\delta\,\underline{\dot{q}} + \omega_0^2\,\underline{q} = \frac{E_0}{L}\,e^{j\Omega t}$$

d'où :

$$-\,\Omega^2\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega \mathrm{t}} + 2\,\delta j\,\Omega\,\underline{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega \mathrm{t}} + \omega_0^2\underline{A}\,e^{j\Omega t} = \frac{E_0}{L}\,e^{j\Omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathrm{A}}\,(\omega_0^2 - \Omega^2 + j2\delta\Omega) = \frac{E_0}{L} \Rightarrow \underline{\mathrm{A}} = \frac{\frac{E_0}{L}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\delta\Omega} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)[(\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\delta\Omega]}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

$$\underline{A} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)(\omega_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} - j\,\frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)(2\delta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}$$

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{Re^2(\underline{A}) + Im^2(\underline{A})} = \sqrt{\frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)^2 (\omega_0^2 - \Omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2]^2} + \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)^2 (2\delta\Omega)^2}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2]^2}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)^2 [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2]^2}} \Rightarrow A = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{Im(\underline{A})}{Re(\underline{A})} = \frac{-\left(\frac{E_0}{L}\right)(2\delta\Omega)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}{\left(\frac{E_0}{L}\right)(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

d'où :

$$q(t) = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctan\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

3- Détermination de la pulsation de résonance Ω_r :

$$A(\Omega) = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$\frac{d\,A(\Omega)}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{-\frac{d}{d\Omega}\left[\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}\right]\left(\frac{E_0}{L}\right)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2]}{2\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2] \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[\omega_0^4 - 2\,\omega_0^2\Omega^2 + \Omega^4 + 4\delta^2\Omega^2] = 0$$

$$\Rightarrow -4\omega_0^2\Omega + 4\Omega^3 + 8\delta^2\Omega = 0 \Rightarrow (4\Omega)(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega = 0 \\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \Omega_r \end{cases}$$

$A(\Omega)$ présente un pic à Ω_r, c'est la pulsation de résonance.

- La condition que doit satisfaire L pour qu'il y ait résonance :

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

La condition de résonance est :

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow \omega_0^2 > 2\delta^2 \Rightarrow \frac{1}{LC} > \frac{2\,R^2}{4\,L^2} \Rightarrow \frac{1}{C} > \frac{R^2}{2\,L} \Rightarrow 2\,L > R^2\,C \Rightarrow L > \frac{C\,R^2}{2}$$

4- Facteur de qualité du circuit :
$R = 100\ \Omega, C = 1\ \mu F, L = 4\ H.$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\,\delta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{2\,L}{2\,R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L^2}{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

AN :

$$Q = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{4}{10^{-6}}} = 20$$

- Facteur de résonance du circuit :

$$FR = \frac{A(\Omega_r)}{A(0)}$$

$$A(\Omega) = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$$

$$A\,(\Omega_r) = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\,\delta^2)^2 + 4\,\delta^2(\omega_0^2 - 2\,\delta^2)}} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{4\,\delta^4 + 4\,\delta^2\,\omega_0^2 - 8\,\delta^4}}$$

$$= \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{4\,\delta^2\,\omega_0^2 - 4\,\delta^4}} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{4\,\delta^2\,(\omega_0^2 - \delta^2)}} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$A\,(0) = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\sqrt{\omega_0^4}} = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{\omega_0^2}$$

d'où :

$$FR = \frac{\left(\frac{E_0}{L}\right)}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}\frac{\omega_0^2}{\left(\frac{E_0}{L}\right)} \Rightarrow FR = \frac{\omega_0^2}{2\,\delta\,\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

AN :
$\omega_0 = 500\ rad/s$
$\delta = 12.5\ (s^{-1})$

$$FR = \frac{(500)^2}{2\ \times 12.5\ \times\ \sqrt{(500)^2 - (12.5)^2}} = 20$$

Remarque
L'acuité de la résonance (ou facteur de résonance) d'un oscillateur très faiblement amorti, est égale au facteur de qualité.

Exercice 3
$0.2\,\ddot{q} + 1.2\,\dot{q} + 5\,q = 4\cos\,(2t) \Rightarrow\ \ddot{q} + 6\,\dot{q} + 25\,q = 20\cos\,(2t)$
qui s'écrit sous la forme

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{e(t)}{0.2}$$

1-
- Coefficient d'amortissement :

$$2\,\delta = 6\ \Rightarrow\ \delta = \frac{6}{2} = 3\ s^{-1}$$

- Pulsation propre :
$\omega_0^2 = 25 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{25} = 5\, rad/s$
- Période propre :
$\omega_0 = 2\,\pi\, f_0 = \frac{2\,\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0} = \frac{2\,\pi}{5} = 1.256\, s$
- Pulsation de la tension sinusoïdale :
$\Omega = 2\, rad/s.$

2- Solution du régime transitoire :
Soit $q_1(t)$ la solution de l'équation différentielle sans second membre (solution transitoire).

On a :
$\ddot{q} + 6\,\dot{q} + 25\,q = 0$ qui s'écrit sous la forme $\ddot{q} + 2\delta\,\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$
$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 = (3)^2 - (5)^2 = 9 - 25 = -16 < 0$
$\Delta' < 0 \Rightarrow$ C'est le régime pseudo périodique (mouvement oscillatoire amorti).
$q_1(t) = q_m\, e^{-\delta t} \cos(\omega_p . t + \psi)$
La pseudo pulsation : $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\, rad/s.$
d'où :
$q_1(t) = q_m\, e^{-3t} \cos(4.t + \psi)$

Détermination de q_m et ψ, à partir des conditions initiales :
$q_1(0) = 4 \Rightarrow q_m \cos\psi = 4 \Rightarrow q_m = \frac{4}{\cos\psi}$
$\dot{q}_1(0) = 0 \Rightarrow -3\, q_m \cos\psi = 4\, q_m \sin\psi \Rightarrow \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \tan\psi = \frac{-3}{4} = -0.75$
$\Rightarrow \psi = \arctan(-0.75) = -0.64\, rad$
d'où :
$q_m = \frac{4}{\cos(0.64)} = 5\, C$
donc
$q_1(t) = 5\, e^{-3t} \cos(4.t - 0.64)$

3- Solution en régime permanent :
On a : $\ddot{q} + 6\,\dot{q} + 25q = 20 \cos\,(2t)$
Soit $q_2(t)$ la solution de l'équation différentielle avec second membre (solution permanente).
$q_2(t) = A \cos(2.t + \varphi)$
Détermination de A et φ en utilisant la notation complexe :
$\underline{q}_2 = A\, e^{j(2t+\varphi)} = A\, e^{j\varphi} e^{j2t} = \underline{A}\, e^{j2t}$, où $\underline{A} = A\, e^{j\varphi}$
$\underline{\dot{q}}_2 = j\, 2\, \underline{A}\, e^{j2t}$
$\underline{\ddot{q}}_2 = -\, 4\, \underline{A}\, e^{j2t}$

On a :
$\underline{\ddot{q}} + 6\,\underline{\dot{q}} + 25\,\underline{q} = 20\, e^{j2t}$
d'où :
$-\,4\, \underline{A}\, e^{j2t} + 6.2.j\, \underline{A}\, e^{j2t} + 25\, \underline{A}\, e^{j2t} = 20\, e^{j2t}$
$\Rightarrow \underline{A} = [-4 + 12j + 25] = 20 \Rightarrow \underline{A} = [21 + j12] = 20 \Rightarrow \underline{A} = \frac{20}{21 + j12} = \frac{20(21 - j12)}{(21)^2 + (12)^2}$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{20 \times 21 - j\,20 \times 12}{(21)^2 + (12)^2} = \frac{420 - j\,240}{441 + 144} = \frac{420 - j\,240}{585} = \frac{420}{585} - j\frac{240}{585}$$

d'où :

$\underline{A} = 0.72 - j\,0.41$

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{Re^2(\underline{A}) + Im^2(\underline{A})} = \sqrt{(0.72)^2 + (0.41)^2} = 0.83$$

$$\tan\varphi = \frac{Im(\underline{A})}{Re(\underline{A})} = \frac{-0.41}{0.72} = -0.57 \Rightarrow \varphi = -\arctan(0.57) = -0.52\,rad$$

d'où :

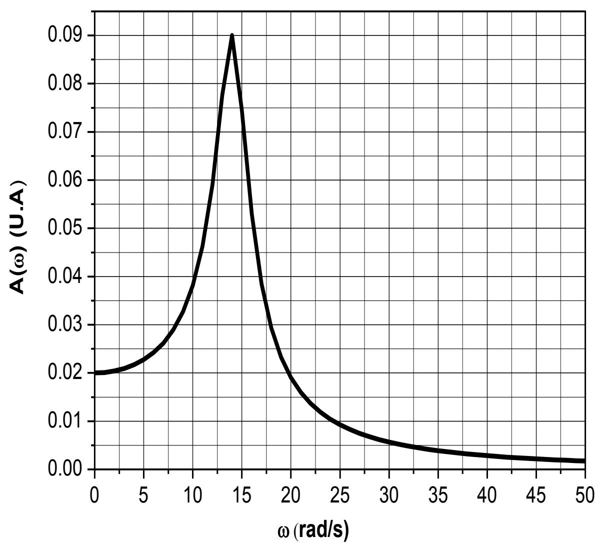
$q_2(t) = 0.83\cos(2t - 0.52)$

4- Facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{5}{2 \times 3} = 0.83$$

Exercice 4

1- La courbe présente le phénomène de résonance.



2-

- Pulsation de résonance :

$\omega_r = 13\,rad/s$

- Fréquence de résonance :

$\omega_r = 2\,\pi\,f_r$

$$\Rightarrow f_r = \frac{\omega_r}{2\,\pi} = \frac{13}{2\,\pi} = 2.07\,Hz$$

- Facteur de résonance :

$$FR = \frac{A(\omega_r)}{A(0)} = \frac{0.09}{0.02} = 4.5$$

- Bande passante :

$B = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

où : ω_1 et ω_2 vérifient

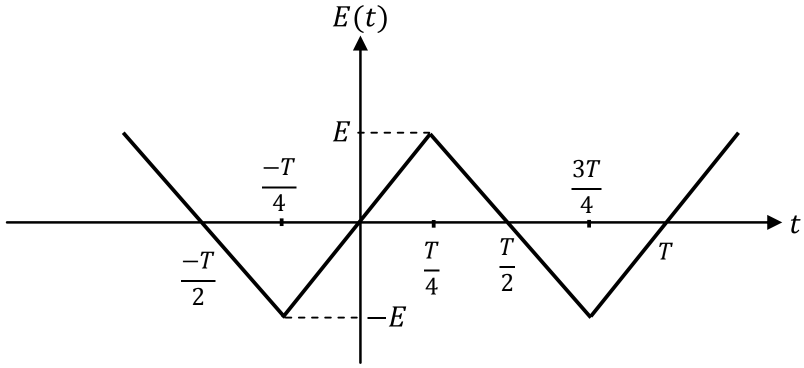
$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A(\omega_r)}{\sqrt{2}} = \frac{0.09}{\sqrt{2}} = 0.064\,U.A$$

d'où : $B = 16 - 12 = 4\,rad/s$

3- Facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{13}{4} = 3.25$$

Exercice 5



Le développement en série de Fourier de $E(t)$ donne :

$$E(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t) + \sum_n b_n \sin(n\omega t)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T E(t)\,\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T E(t)\,\sin(n\omega t)\,dt$$

NB : $E(t)$ est une fonction impaire, donc : $a_0 = a_n = 0$, $b_n \neq 0$.

Calcul de b_n :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T E(t)\,\sin(n\omega t)\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4E}{T} t \sin(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} -\frac{4E}{T} t \sin(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} 2E \sin(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{4E}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} t \sin(n\omega t)\,dt - \frac{4E}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} t \sin(n\omega t)\,dt + 2E\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \sin(n\omega t)\,dt\right]$$

Calcul de $\int t \sin(n\omega t)\,dt$

Intégration par partie :
On a : $\int f'g = fg - \int g'f$
On pose :

$$f' = \sin(n\omega t)\,dt \Rightarrow f = \int \sin(n\omega t)\,dt = -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}$$

$g = t \Rightarrow g' = dt$

$$\int t \, \sin(n\omega t)\, dt = -t \, \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} - \int -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\, dt = -t \, \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \int \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\, dt$$

$$= -t \, \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{1}{(n\omega)^2} \, \sin(n\omega t)$$

donc :

$$b_n = \frac{2}{T}\left\{\frac{4E}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} - t\,\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{4E}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} - t\,\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} + 2E\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\right\}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\left[\frac{12\,E}{T}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\omega)^2} - \frac{4E}{T}\frac{\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)}{(n\omega)^2}\right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{8\,E}{T^2(n\omega)^2}\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right]$$

On a :

$$\sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

donc :

$$b_n = \frac{8\,E}{T^2(n\omega)^2}\,4\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

On a :

$$\omega^2 = \frac{4\,\pi^2}{T^2}$$

donc :

$$b_n = \frac{8\,E}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour n pair : $n = 2p$

$$b_{2p} = \frac{8\,E}{4p^2\pi^2}\sin\left(\frac{2p\pi}{2}\right) = \frac{8\,E}{4p^2\pi^2}\sin(p\pi) = 0$$

Pour n impair : $n = 2p + 1$

$$b_{2p+1} = \frac{8\,E}{(2p+1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)$$

On a :

$$\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = (-1)^p$$

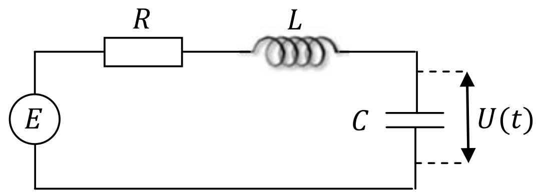
donc :

$$b_{2p+1} = \frac{8E(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}$$

d'où :

$$E(t) = \frac{8E(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)$$

$$E(t) = \frac{8E}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$



Le bilan des tensions :

$$U_R + U_L + U_C = E(t)$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

On a :

$$U_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \dot{U}_C = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i \Rightarrow i = C\,\dot{U}_C \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\,\ddot{U}_C$$

d'où :

$$RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C + U_C = E(t) \Rightarrow LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = E(t) \Rightarrow \ddot{U}_C + \frac{R}{L}\dot{U}_C + \frac{1}{LC}U_C = \frac{E(t)}{LC}$$

On a :

$$U_C = U(t)$$

donc :

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = \frac{E(t)}{LC}$$

La réponse à l'excitation $E(t)$ sera calculée à partir de l'équation suivante :

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{8E}{LC\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$

Tel que :

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

d'où :

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{8E\omega_0^2}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$

La solution en régime permanent :

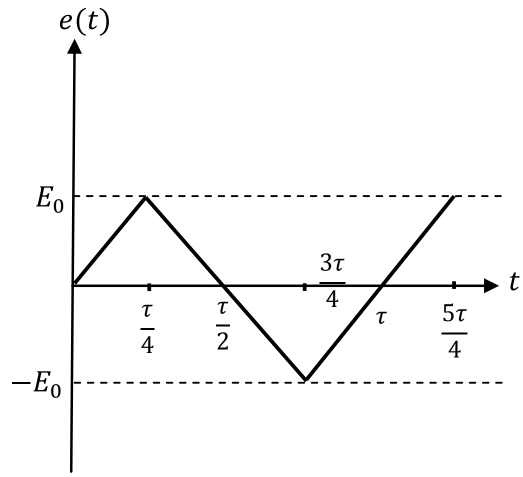
$$U(t) = \frac{8E\omega_0^2}{\pi^2}\left[\frac{\sin(\omega t - \varphi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} - \frac{1}{3^2}\frac{\sin(3\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\,\delta^2\omega^2}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\frac{\sin\big((2k+1)\omega t - \varphi_k\big)}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2k+1)^2\omega^2)^2 + 4\,(2k+1)^2\,\delta^2\omega^2}}\right]$$

AN :

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2\times 100\times 10^{-3}} = 10^3\,s^{-1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 0.1 \times 10^{-6}}} = 10^4 \, rad.s^{-1}$$

Exercice 6



1/ Développement en série de Fourier de $e(t)$:

$$e(t) = a_0 + \sum_n a_n \cos(n\omega t) + \sum_n b_n \sin(n\omega t)$$

NB : $e(t)$ étant une fonction impaire, : $a_n = 0$.

d'où :

$$e(t) = \sum_n b_n \sin(n\omega t)$$

Tel que :

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int e(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

L'intégrale peut être calculée sur n'importe quel intervalle τ ; On prendra l'intervalle $\left[\frac{\tau}{4}, \frac{5\tau}{4}\right]$.

$\frac{\tau}{4} \leq t \leq \frac{3\tau}{4}$:

$$e(t) = \frac{\Delta e(t)}{\Delta t} . t + b$$

$$\frac{\Delta e(t)}{\Delta t} = \frac{e(t)_f - e(t)_i}{t_f - t_i} = \frac{-E_0 - E_0}{\frac{3\tau}{4} - \frac{\tau}{4}} = -\frac{4E_0}{\tau}$$

donc :

$$e(t) = -\frac{4E_0}{\tau} . t + b$$

A $t = \frac{\tau}{4}$, $e(t) = E_0$

d'où :

$$E_0 = -\frac{4E_0}{\tau}\frac{\tau}{4} + b \Rightarrow b = 2E_0$$

donc :

$$e(t) = -\frac{4E_0}{\tau} . t + 2E_0$$

$\frac{3\tau}{4} \leq t \leq \frac{5\tau}{4}$:

$e(t) = \frac{\Delta e(t)}{\Delta t} . t + b$

$\frac{\Delta e(t)}{\Delta t} = \frac{e(t)_f - e(t)_i}{t_f - t_i} = \frac{E_0 + E_0}{\frac{5\tau}{4} - \frac{3\tau}{4}} = \frac{4E_0}{\tau}$

donc :

$e(t) = \frac{4E_0}{\tau} . t + b$

A $t = \frac{3\tau}{4}$, $e(t) = -E_0$

d'où :

$-E_0 = \frac{4E_0}{\tau}\frac{3\tau}{4} + b \Rightarrow b = -4E_0$

donc :

$e(t) = \frac{4E_0}{\tau} . t - 4E_0$

Calcul de b_n :

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} e(t)\ \sin(n\omega t)\, dt$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\tau}\left[-\frac{4E_0}{\tau}\int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} t \sin(n\omega t)\, dt + 2E_0 \int_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} \sin(n\omega t)\, dt + \frac{4E_0}{\tau}\int_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} t \sin(n\omega t)\, dt - 4E_0 \int_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} \sin(n\omega t)\, dt \right]$$

Calcul de $\int t \sin(n\omega t)\, dt$

Intégration par partie :

On a : $\int f'g = fg - \int g'f$

On pose :

$f' = \sin(n\omega t)\ dt \Rightarrow f = \int \sin(n\omega t)\, dt = -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}$

$g = t \ \Rightarrow g' = dt$

$$\int t\ \sin(n\omega t)\ dt = -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} - \int -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\ dt = -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \int \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\ dt$$

$$= -t\ \frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}$$

donc :

$$b_n = \frac{2}{\tau}\left\{-\frac{4E_0}{\tau}\left[-t\,\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}} + 2E_0\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{3\tau}{4}}\right.$$

$$\left. + \frac{4E_0}{\tau}\left[-t\,\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}} - 4E_0\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{\frac{3\tau}{4}}^{\frac{5\tau}{4}}\right\}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{16E_0}{\tau(n\omega)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{16E_0}{\tau n^2\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{8E_0}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour n pair : $n = 2p$

$$\Rightarrow b_{2p} = \frac{8E_0}{4p^2\pi^2}\sin\left(\frac{2p\pi}{2}\right) = \frac{8E_0}{4p^2\pi^2}\sin(p\pi) = 0$$

Pour n impair : $n = 2p + 1$

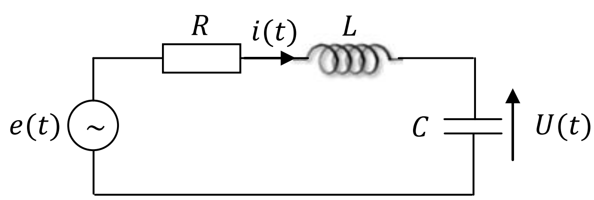
$$\Rightarrow b_{2p+1} = \frac{8E_0}{(2p+1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = \frac{8E_0(-1)^p}{(2p+1)^2\pi^2}$$

Ainsi :

$$e(t) = \frac{8\,E_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2p+1)^2}\sin\big((2n+1)\omega t\big)$$

donc :

$$e(t) = \frac{8\,E_0}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$



2/ Tension $U(t)$ aux bornes du condensateur, en régime permanent :

Le bilan des tensions :

$$U_R + U_L + U_C = e(t)$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = e(t)$$

On a :

$$U_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \dot{U}_C = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i \Rightarrow i = C\,\dot{U}_C \Rightarrow \frac{di}{dt} = C\,\ddot{U}_C$$

d'où :

$$RC\dot{U}_C + LC\ddot{U}_C + U_C = e(t) \Rightarrow LC\ddot{U}_C + RC\dot{U}_C + U_C = e(t) \Rightarrow \ddot{U}_C + \frac{R}{L}\dot{U}_C + \frac{1}{LC}U_C = \frac{e(t)}{LC}$$

On a :

$$U_C = U(t)$$

donc :

$$\ddot{U} + \frac{R}{L}\dot{U} + \frac{1}{LC}U = \frac{e(t)}{LC}$$

La réponse à l'excitation $e(t)$ sera calculée à partir de l'équation suivante :

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{8E_0}{LC\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$

Tel que :

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

d'où :

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{8E_0\omega_0^2}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2p+1)\omega t\big)\right]$$

La solution en régime permanent :

$$U(t) = \frac{8E_0\omega_0^2}{\pi^2}\left[\frac{\sin(\omega t - \varphi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} - \frac{1}{3^2}\frac{\sin(3\omega t - \varphi_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\,\delta^2\omega^2}} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\frac{\sin\big((2k+1)\omega t - \varphi_k\big)}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2k+1)^2\omega^2)^2 + 4\,(2k+1)^2\,\delta^2\omega^2}}\right]$$

3/ AN :

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{200}{2\times 100\times 10^{-3}} = 10^3\ s^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100\times 10^{-3}\times 0.1\times 10^{-6}}} = 10^4\ rad.s^{-1}$$

Nous savons que la fréquence de résonance est donnée par :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0\sqrt{1 - 2\epsilon^2}$$

Tel que : $\epsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{10^3}{10^4} = 0.1$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2(0.1)^2} = 0.99\ \omega_0$$

Nous remarquons, d'autre part, que la fréquence de la première harmonique ω (pour $n = 0$) est très voisine de ω_0. C'est la fréquence la plus proche de la fréquence de résonance ω_r. Concernant les autres harmoniques, leurs fréquences sont très éloignées de la fréquence de résonance ω_r ; leur contribution à la solution générale est négligeable.

La solution générale peut donc s'écrire :

$$U(t) = \frac{8E_0\omega_0^2}{\pi^2}\frac{\sin(\omega t - \varphi_0)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

Tel que :

$$tg\ \varphi_0 = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

NB : Ce résultat n'est pas valable pour d'autres fréquences du générateur puisque d'une manière générale, pour une fréquence donnée, il ne faut retenir que l'harmonique n dont la fréquence est voisine de la fréquence de résonance ω_r.

Chapitre 4 : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

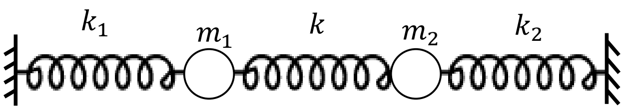
4. 1. Introduction

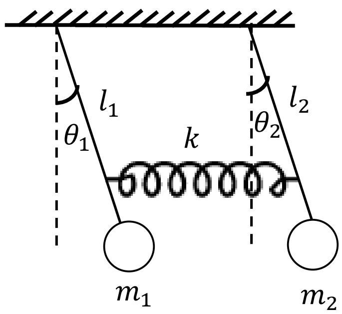
Un système est dit à deux degrés de libertés s'il nécessite deux coordonnées indépendantes pour spécifier sa position. Ce système peut être composé de deux sous-systèmes, à un degré de liberté, dont l'évolution au cours du temps de l'un dépend de l'autre. Ils sont dits couplés.

4. 1. 1. Différents modes de couplage

Il existe trois modes de couplages : par élasticité, par amortisseur et par inertie.

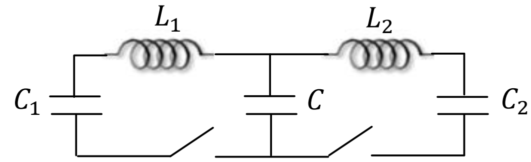
Couplage par élasticité





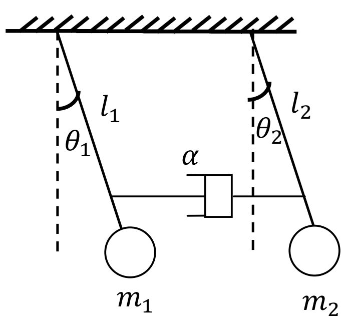
Deux pendules couplés par un ressort

Couplage par capacité

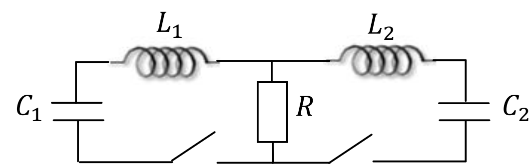


Le circuit électrique équivalent

Couplage par amortisseur

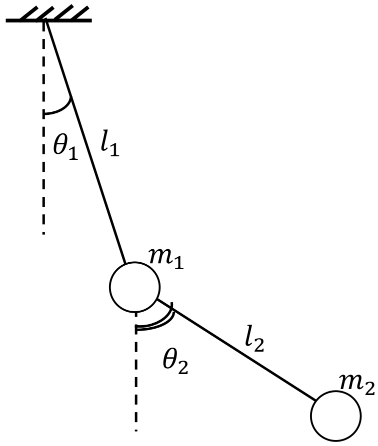


Couplage par résistance

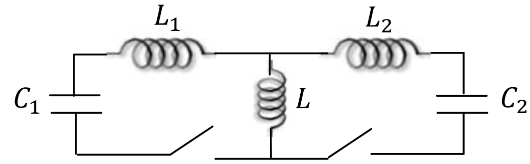


Le couplage par amortisseur en mécanique, et par résistance en électricité entraine une dissipation d'énergie. L'énergie totale du système n'est plus conservée.

Couplage par inertie



Couplage magnétique



Le pendule doublé est un exemple du couplage par inertie, il lui correspond en électricité, le couplage magnétique par self induction ou par mutuelle induction.

4. 2. Oscillations libres non amorties

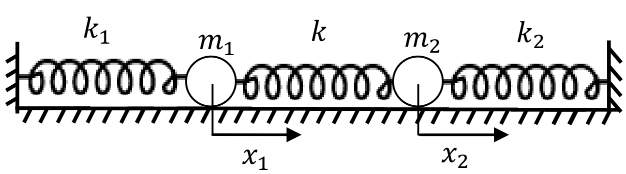
Pour étudier des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement.

Equations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

4. 2. 1. Système Masses-Ressorts



Soit un système constitué de deux oscillateurs (m_1, k_1) et (m_2, k_2), couplé par un ressort de constante de raideur k.

Equations différentielles du mouvement

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 - kx_1x_2$$

Le lagrangien

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 - \frac{1}{2}(k_2 + k)x_2^2 + kx_1x_2$$

Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1 + k)x_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k_2 + k)x_2 + kx_1$$

Le système d'équations différentielles du mouvement

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \ldots (1)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \ldots (2)$$

Les termes $-kx_2$ et $-kx_1$ sont appelés termes de couplage, et les deux équations différentielles sont dites couplées.

Résolution du système d'équations différentielles

Les solutions particulières sont de la forme :

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

où A_1, A_2, $\varphi_1$et φ_2 sont des constantes et ω est l'une des pulsations propres du système.

En notation complexe :

$\underline{x}_1(t) = A_1\, e^{j(\omega t+\varphi_1)} = \underline{A}_1\, e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A}_1 = A_1\, e^{j\varphi_1}$

$\underline{x}_2(t) = A_2\, e^{j(\omega t+\varphi_2)} = \underline{A}_2\, e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A}_2 = A_2\, e^{j\varphi_2}$

Substituant $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ dans le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} m_1\ddot{\underline{x}}_1 + (k_1 + k)\underline{x}_1 - k\underline{x}_2 = 0 \\ m_2\ddot{\underline{x}}_2 + (k_2 + k)\underline{x}_2 - k\underline{x}_1 = 0 \end{cases}$$

On a :

$\underline{x}_1 = \underline{A}_1\, e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{x}}_1 = j\omega\underline{A}_1\, e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{\underline{x}}_1 = -\omega^2\, \underline{A}_1\, e^{j\omega t}$

$\underline{x}_2 = \underline{A}_2\, e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{x}}_2 = j\omega\underline{A}_2\, e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{\underline{x}}_2 = -\omega^2\, \underline{A}_2\, e^{j\omega t}$

d'où :

$$\begin{cases} -m_1\omega^2\underline{A}_1\, e^{j\omega t} + (k_1 + k)\underline{A}_1\, e^{j\omega t} - k\underline{A}_2\, e^{j\omega t} = 0 \\ -m_2\omega^2\underline{A}_2\, e^{j\omega t} + (k_2 + k)\underline{A}_2\, e^{j\omega t} - k\underline{A}_1\, e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [-m_1\omega^2 + (k_1 + k)]\underline{A}_1 - k\underline{A}_2 = 0 \\ [-m_2\omega^2 + (k_2 + k)]\underline{A}_2 - k\underline{A}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k_1 + k - m_1\omega^2)\underline{A}_1 - k\underline{A}_2 = 0 \\ -k\underline{A}_1 + (k_2 + k - m_2\omega^2)\underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations linéaires homogènes, dont les inconnues sont $\underline{A}_1$ et $\underline{A}_2$, qui s'écrit sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} k_1+k-m_1\omega^2 & -k \\ -k & k_2+k-m_2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A}_1 \\ \underline{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles, si le déterminant $\Delta(\omega)$ de la matrice est nul.
$\Delta(\omega)$ est dit déterminant caractéristique.
$\Delta(\omega) = 0$ est dite équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle est donnée par :

$$(k_1 + k - m_1\omega^2)(k_2 + k - m_2\omega^2) - k^2 = 0$$

C'est une équation quadratique en ω, admet deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2, appelées pulsations propres du système. Chacune des coordonnées x_1 et x_2 possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 :

$x_1 = A_1 \cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos\,(\omega_2 t + \varphi_2)$

$x_2 = A_2 \cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos\,(\omega_2 t + \varphi_2)$

Où A_1, A_2, B_1, B_2, φ_1 et $\varphi_2$sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.
La pulsation ω_1 est appelée le **fondamental**, tandis que ω_2 est dite **harmonique**.

Cas d'un système symétrique

$m_1 = m_2 = m$

et

$k_1 = k_2 = m$

Le déterminant devient :

$(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 0 \Leftrightarrow (2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$

$\Leftrightarrow (2k - m\omega^2 - k)(2k - m\omega^2 + k) = 0 \Leftrightarrow (k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) = 0$

d'où

$$\begin{cases} k - m\omega^2 = 0 \\ 3k - m\omega^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_1 \\ \omega = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} = \omega_2 \end{cases}$$

Ce sont les pulsations propres du système. Les deux masses ne peuvent vibrer que selon ces deux pulsations.

4. 2. 2. Modes propres de vibrations

Ce sont les différentes façons de vibration des deux masses, l'une par rapport à l'autre.

Mode 1 (Mode fondamental) $\boldsymbol{\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Pour trouver le mode de vibration correspondant à ω_1, on remplace ω par $\sqrt{\frac{k}{m}}$ dans le système d'équation précédent :

On a :

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)\underline{A}_1 - k\underline{A}_2 = 0 \\ -k\underline{A}_1 + (2k - m\omega^2)\underline{A}_2 = 0 \end{cases}$$

On aura :

$$\begin{cases} \left(2k - m\dfrac{k}{m}\right)\underline{A}_1^1 - k\underline{A}_2^1 = 0 \\ -k\underline{A}_1^1 + \left(2k - m\dfrac{k}{m}\right)\underline{A}_2^1 = 0 \end{cases}$$

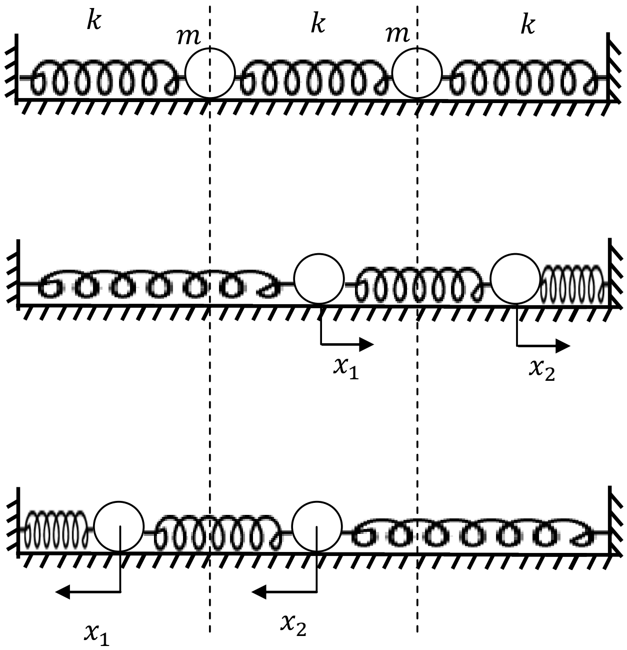
$$\Rightarrow \begin{cases} k\underline{A}_1^1 - k\underline{A}_2^1 = 0 \\ -k\underline{A}_1^1 + k\underline{A}_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A}_1^1 = \underline{A}_2^1$$

Les abscisses x_1 et x_2 sont de mêmes amplitudes et les deux masses oscillent en phase, donc :

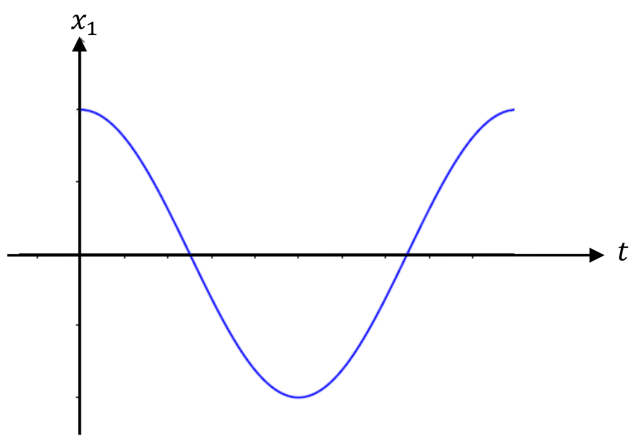
$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1^1 \\ \underline{A}_2^1 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

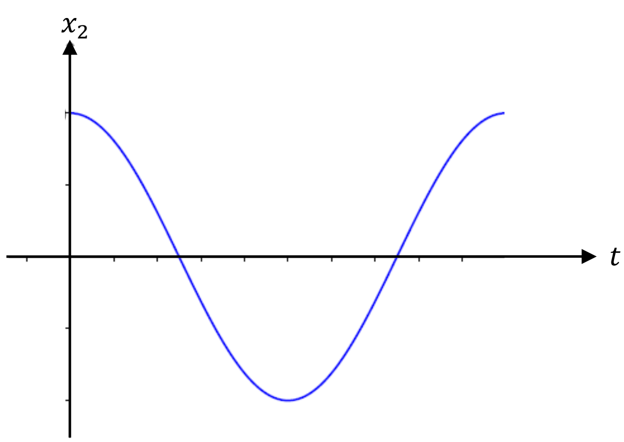
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 1.



Equilibre

Mode 1 : Les deux masses sont vers la droite ensuite vers la gauche.





Les mouvements sont identiques. On dit que le système oscille dans le mode fondamental.

NB : Il n'y a pas d'effet du couplage dû au ressort central.

Mode 2 (Mode harmonique) $\boldsymbol{\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}}$

Afin de trouver le mode de vibration correspondant à ω_2, on remplace ω par $\sqrt{\frac{3k}{m}}$ dans le système d'équations. On aura :

$$\begin{cases} \left(2k - m\dfrac{3k}{m}\right)\underline{A}_1^2 - k\underline{A}_2^2 = 0 \\ -k\underline{A}_1^2 + \left(2k - m\dfrac{3k}{m}\right)\underline{A}_2^2 = 0 \end{cases}$$

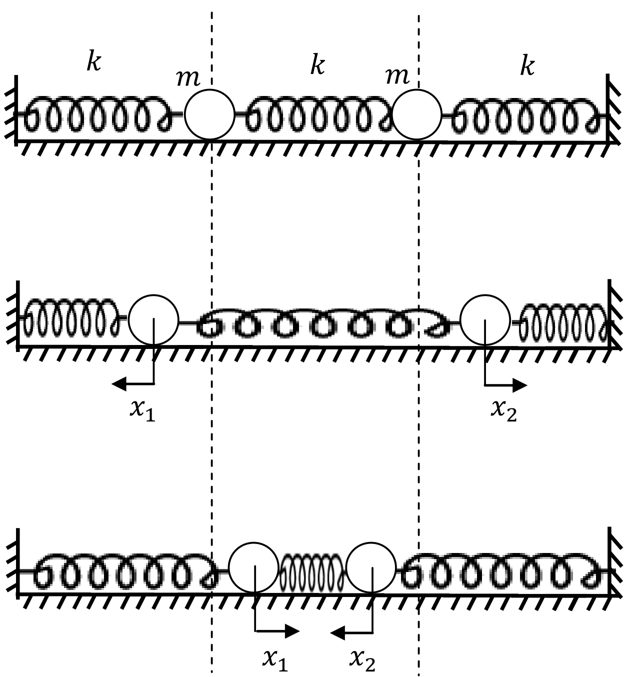
$$\Rightarrow \begin{cases} -k\underline{A}_1^2 - k\underline{A}_2^2 = 0 \\ -k\underline{A}_1^2 - k\underline{A}_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A}_1^2 = -\underline{A}_2^2$$

Les abscisses x_1 et x_2 sont de mêmes amplitudes et les deux masses oscillent en opposition de phase, donc :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1^2 \\ \underline{A}_2^2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 2.

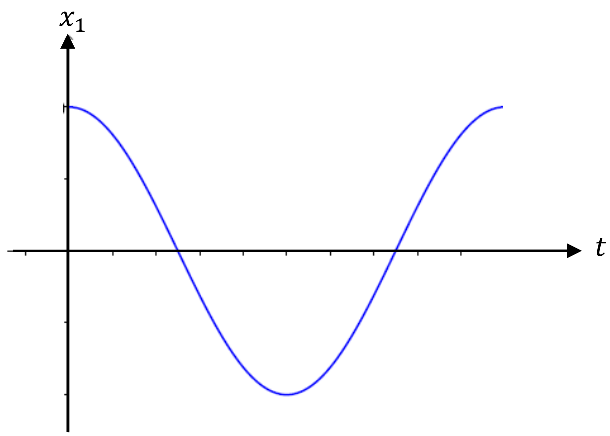


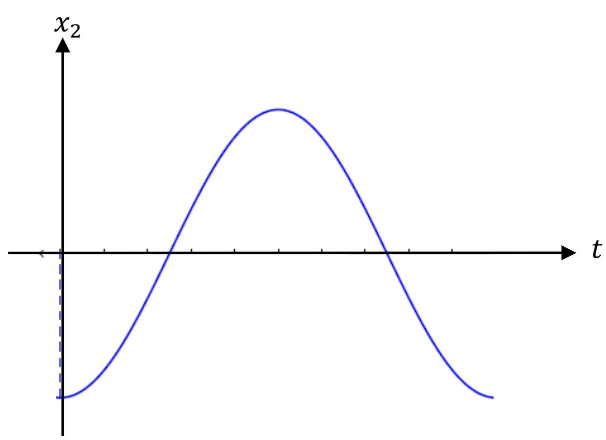
Equilibre

Mode 2 : Lorsqu'une masse se déplace vers la droite l'autre se déplace vers la gauche et vice versa.

Mouvement des masses en sens contraires. On dit que le système oscille dans le mode harmonique.

NB : Le ressort central exerce une force de rappel sur les deux masses.





Solutions particulières

Mode 1 $\begin{cases} \underline{x}_1(t) = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \\ \underline{x}_2(t) = \underline{A}_2^1 \, e^{j\omega_1 t} = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \end{cases}$

Mode 2 $\begin{cases} \underline{x}_1(t) = \underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \\ \underline{x}_2(t) = \underline{A}_2^2 \, e^{j\omega_2 t} = -\underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \end{cases}$

La solution générale est une combinaison linéaire de deux solutions particulières.

Solution générale

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j\omega_1 t} + \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j\omega_2 t}$$

avec $\underline{A}_1^1 = \alpha \, e^{j\phi_1}$ et $\underline{A}_1^2 = \beta \, e^{j\phi_2}$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \phi_2)}$$

En notation réelle

$$x_1(t) = \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = \alpha \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \beta \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Calcul des constantes α, β, ϕ_1 et ϕ_2

Utilisons les conditions initiales

Cas 1 : $\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = x_0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

On a :

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

d'où :

$$x_1(0) = x_2(0) = x_0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos\phi_1 + \beta \cos\phi_2 = x_0 \;\ldots (1) \\ \alpha \cos\phi_1 - \beta \cos\phi_2 = x_0 \;\ldots (2) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\, \omega_1 \sin\phi_1 - \beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \;\ldots (3) \\ -\alpha\, \omega_1 \sin\phi_1 + \beta\, \omega_2 \sin\phi_2 = 0 \;\ldots (4) \end{cases}$$

$$(3) + (4) \Rightarrow -2\alpha\omega_1 \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$$
$$(3) - (4) \Rightarrow -2\beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$$

En remplaçant ϕ_1 et ϕ_2 dans (1) et (2), on aura :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha - \beta = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x_0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Les solutions seront donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) = x_0 \cos(\omega_1 t) \end{cases}$$

Les solutions sont purement sinusoïdales.
Les deux masses oscillent en phase avec la même pulsation ω_1.

Cas 2 : $\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = -x_0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

d'où :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = -x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos\phi_1 + \beta \cos\phi_2 = x_0 \;\ldots (1) \\ \alpha \cos\phi_1 - \beta \cos\phi_2 = -x_0 \;\ldots (2) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\, \omega_1 \sin\phi_1 - \beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \;\ldots (3) \\ -\alpha\, \omega_1 \sin\phi_1 + \beta\, \omega_2 \sin\phi_2 = 0 \;\ldots (4) \end{cases}$$

$(3) + (4) \Rightarrow -2\alpha\omega_1 \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$
$(3) - (4) \Rightarrow -2\beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$

En remplaçant $\phi_1$et ϕ_2 dans (1) et (2), on aura :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha - \beta = -x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = x_0 \end{cases}$$

Les solutions seront donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_2 t) \\ x_2(t) = -x_0 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Les solutions sont purement sinusoïdales.
Les deux masses oscillent en opposition de phase avec la même pulsation ω_2.

Cas 3 : $\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$

d'où :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\cos\phi_1 + \beta\cos\phi_2 = x_0 \ldots (1) \\ \alpha\cos\phi_1 - \beta\cos\phi_2 = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 - \beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \ldots (3) \\ -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 + \beta\,\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \ldots (4) \end{cases}$$

$(3) + (4) \Rightarrow -2\alpha\omega_1 \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$
$(3) - (4) \Rightarrow -2\beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$

En remplaçant $\phi_1$et ϕ_2 dans (1) et (2), on aura :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x_0}{2} \\ \beta = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}$$

Les solutions seront donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_0}{2}[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) = \dfrac{x_0}{2}[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

On a :

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2\cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

$$\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) = -2\sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

d'où :

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{x_0}{2} 2\cos\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \\ x_2(t) = \dfrac{x_0}{2}(-2)\sin\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \end{cases}$$

On a :

$$\cos\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right)=\cos\left(\frac{-(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)=\cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right)=\sin\left(\frac{-(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)=-\sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)$$

d'où :

$$\begin{cases} x_1(t)=x_0\cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \\ x_2(t)=x_0\sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \end{cases}$$

Les solutions sont le produit de deux fonctions sinusoïdales.

4. 2. 3. Phénomène de battement

Lorsque le couplage est faible et les fréquences propres des oscillateurs sont voisines, il se produit un phénomène de battement.

Considérant l'exemple de l'oscillateur symétrique et on considère les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(0)=x_0 \\ x_2(0)=0 \\ \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0 \end{cases}$$

On avait trouvé :

$$\begin{cases} x_1(t)=x_0\cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \\ x_2(t)=x_0\sin\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right) \end{cases}$$

On obtient un phénomène de battement. Les amplitudes sont modulées. Ces battements sont en quadrature : l'amplitude d'un oscillateur est nulle lorsque celle de l'autre est maximale. L'énergie est ainsi alternativement transférée d'un oscillateur à l'autre, alors que dans un mode normal, chaque oscillateur conserve son énergie.

On définit les paramètres suivants :

Pulsation moyenne :

$$\omega_{moy}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

Période moyenne :

$$T_{moy}=\frac{2\pi}{\omega_{moy}}=\frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

Pulsation de modulation :

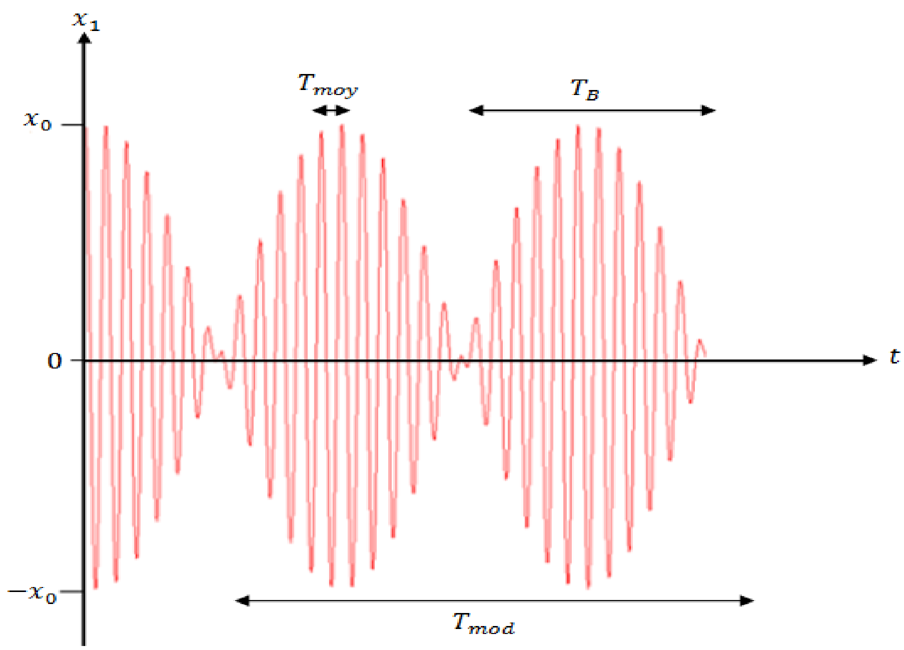
$$\omega_{mod}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2}$$

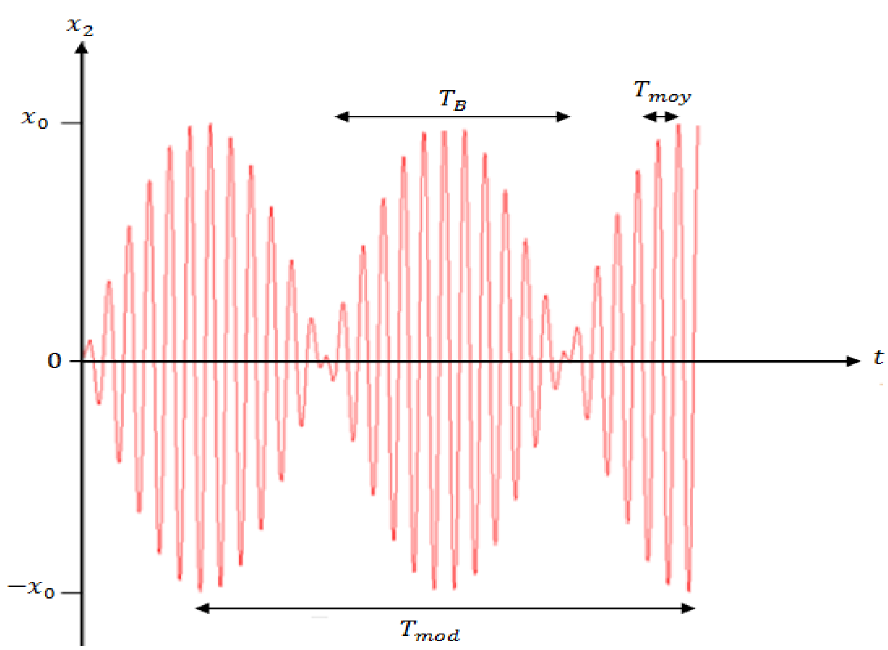
Période de modulation :

$$T_{mod} = \frac{2\pi}{\omega_{mod}} = \frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

d'où :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 \cos(\omega_{mod}.t)\cos(\omega_{moy}.t) \\ x_2(t) = x_0 \sin(\omega_{mod}.t)\sin(\omega_{moy}.t) \end{cases}$$





On définit la période de battement comme la demi-période de la période de modulation :

$$T_B = \frac{1}{2}\ T_{mod} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{\omega_2 - \omega_1}\right) = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

4. 2. 4. Coefficient de couplage

Pour caractériser le couplage entre deux oscillateurs, on définit un coefficient χ appelé coefficient de couplage dont la valeur peut varier entre 0 et 1. Celui-ci est déterminé à partir des coefficients constants des équations différentielles obtenues.

Si les équations s'écrivent :

$$\ddot{q}_1 + a_1 q_1 = b_1 q_2$$

et

$$\ddot{q}_2 + a_2 q_1 = b_2 q_2$$

alors :

$$\chi = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}}$$

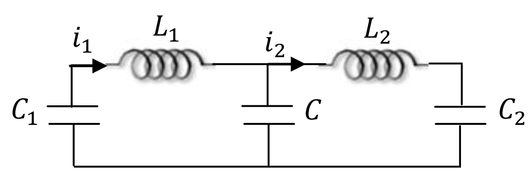
Lorsque $\chi = 0$, le couplage est nul, les oscillateurs sont indépendants.
Si $\chi = 1$, on parle d'un couplage serré.
Si $\chi \ll 1$, on dit que le couplage est lâche.

NB : Lorsque le couplage est lâche, χ est très voisin de 0, donc il s'agit du cas où ω_1 est très voisine de ω_2, nous observons alors un phénomène de battements.

4. 3. Enoncés des exercices

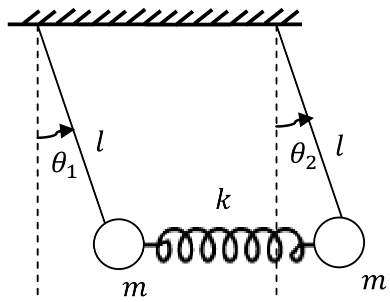
Exercice 1

Soit le système électrique de la figure ci-dessous : circuits LC couplés par une capacité.
1- Etablir les équations différentielles en q_1 et q_2, puis en i_1 et i_2.
2- Déterminer les pulsations propres du système pour : $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$, sachant qu'à $t = 0\ s$, C_1 possède une charge q.
3- Donner le système mécanique équivalent en précisant le type de couplage.



Exercice 2

Soient deux pendules simples identiques couplés par un ressort de raideur k et qui effectuent des oscillations de faible amplitude, repérées par les angles θ_1 et θ_2.
1- Trouver le système linéaire des deux équations différentielles couplées, reliant les fonctions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
2- Chercher les modes normaux du système.
3- Lorsque $t = 0$ la première tige se trouve écartée de la verticale de l'angle θ_0, l'autre tige étant alors verticale et les deux abandonnées sans vitesse initiale. Déterminer dans ce cas la solution du régime libre.
4- Exprimez le coefficient de couplage C.

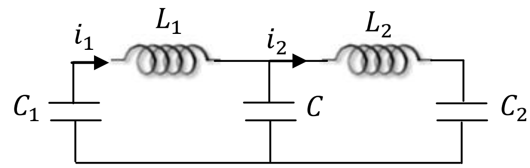


4. 4. Solutions des exercices

Exercice 1

1- Equations différentielles en q_1 et q_2, puis en i_1 et i_2 :

$$\begin{cases} U_{L_1} + U_{C_1} + U_C = 0 \\ U_{L_2} + U_{C_2} - U_C = 0 \end{cases}$$



On a :

$$U_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$U_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$U_{C_1} = \frac{q_1}{C_1}$$

$$U_{C_2} = \frac{q_2}{C_2}$$

d'où :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C} = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C} = 0 \end{cases}$$

On a :

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$$

d'où :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C} = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \\ L_1\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{1}{C} q_1 = 0 \end{cases}$$

On dérive par rapport au temps :

$$\begin{cases} L_1 \frac{d\ddot{q}_1}{dt} + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right)\frac{dq_1}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq_2}{dt} = 0 \\ L_2 \frac{d\ddot{q}_2}{dt} + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right)\frac{dq_2}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq_1}{dt} = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\ddot{q} = \frac{di}{dt}$$

et

$$\dot{q} = i$$

d'où :

$$\begin{cases} L_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{di_1}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right) i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0 \\ L_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{di_2}{dt}\right) + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right) i_2 - \frac{1}{C} i_1 = 0 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right) i_1 - \frac{1}{C} i_2 = 0 \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right) i_2 - \frac{1}{C} i_1 = 0 \end{cases}$$

2- Pulsations propres du système et solution générale :

On a :

$$\begin{cases} L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \\ L_1\ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right) q_2 - \frac{1}{C} q_1 = 0 \end{cases}$$

Résolution du système d'équation :

Les solutions particulières sont sous la forme :

$q_1(t) = A\cos\ (\omega t + \varphi_1)$

$q_2(t) = B\cos\ (\omega t + \varphi_2)$

En notation complexe :

$\underline{q}_1(t) = A\ e^{j(\omega t+\varphi_1)} = \underline{A}\ e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A} = A\ e^{j\varphi_1}$

$\underline{q}_2(t) = B\ e^{j(\omega t+\varphi_2)} = \underline{B}\ e^{j\omega t}$, tel que $\underline{B} = B\ e^{j\varphi_2}$

En substituant $\underline{q}_1$ et $\underline{q}_2$ dans le système d'équations différentielle :

$$\begin{cases} L_1\underline{\ddot{q}}_1 + \left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right)\underline{q}_1 - \frac{1}{C}\underline{q}_2 = 0 \\ L_1\underline{\ddot{q}}_2 + \left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right)\underline{q}_2 - \frac{1}{C}\underline{q}_1 = 0 \end{cases}$$

On a :
$L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$

On aura donc :

$$\begin{cases} L\underline{\ddot{q}}_1 + \frac{2}{C}\underline{q}_1 - \frac{1}{C}\underline{q}_2 = 0 \\ L\underline{\ddot{q}}_2 + \frac{2}{C}\underline{q}_2 - \frac{1}{C}\underline{q}_1 = 0 \end{cases}$$

On a :
$\underline{q}_1 = \underline{A}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{q}}_1 = j\omega\underline{A}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{q}}_1 = -\omega^2\, \underline{A}\, e^{j\omega t}$
$\underline{q}_2 = \underline{B}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{q}}_2 = j\omega\underline{B}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{q}}_2 = -\omega^2\, \underline{B}\, e^{j\omega t}$

d'où :

$$\begin{cases} -\omega^2 L\underline{A}\, e^{j\omega t} + \frac{2}{C}\underline{A}\, e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\underline{B}\, e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2 L\underline{B}\, e^{j\omega t} + \frac{2}{C}\underline{B}\, e^{j\omega t} - \frac{1}{C}\underline{A}\, e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right)\underline{A} - \frac{1}{C}\underline{B} = 0 \\ \frac{1}{C}\underline{A} + \left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right)\underline{B} = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{C} - L\omega^2 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{2}{C} - L\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles, si le déterminant $\Delta(\omega)$ de la matrice est nul.
L'équation caractéristique est donnée par :

$$\left(\frac{2}{C} - L\omega^2\right)^2 - \left(\frac{1}{C}\right)^2 = 0$$

C'est une équation quadratique en ω, admet deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2 :

$q_1 = A_1 \cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos\,(\omega_2 t + \varphi_2)$
$q_2 = A_2 \cos\,(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos\,(\omega_2 t + \varphi_2)$

où $A_1, A_2, B_1, B_2, \varphi_1$ et φ_2 sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

$$\left(\frac{2}{C}-L\omega^2\right)^2-\left(\frac{1}{C}\right)^2=0 \Rightarrow \left(\frac{2}{C}-L\omega^2+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{2}{C}-L\omega^2-\frac{1}{C}\right)=0 \Rightarrow \left(\frac{3}{C}-L\omega^2\right)\left(\frac{1}{C}-L\omega^2\right)=0$$

d'où

$$\begin{cases}\frac{3}{C}-L\omega^2=0\\ \frac{1}{C}-L\omega^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\omega_1\\ \omega=\sqrt{\frac{3}{LC}}=\omega_2\end{cases}$$

Ce sont les pulsations propres du système.

- Mode 1 (Mode fondamental) $\omega=\omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{C}-\frac{L}{LC}\right)\underline{A}_1^1-\frac{1}{C}\underline{A}_2^1=0\\ -\frac{1}{C}\underline{A}_1^1+\left(\frac{2}{C}-\frac{L}{LC}\right)\underline{A}_2^1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{C}\underline{A}_1^1-\frac{1}{C}\underline{A}_2^1=0\\ -\frac{1}{C}\underline{A}_1^1+\frac{1}{C}\underline{A}_2^1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A}_1^1=\underline{A}_2^1$$

q_1 et q_2 sont de mêmes amplitudes et sont en phase, donc :

$$\begin{pmatrix}\underline{A}_1^1\\ \underline{A}_2^1\end{pmatrix}=\underline{A}_1^1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 1.

- Mode 2 (Mode harmonique) $\omega=\omega_2=\sqrt{\frac{3}{LC}}$

$$\begin{cases}\left(\frac{2}{C}-\frac{L}{LC}\right)\underline{A}_1^2-\frac{1}{C}\underline{A}_2^2=0\\ -\frac{1}{C}\underline{A}_1^2+\left(\frac{2}{C}-\frac{L}{LC}\right)\underline{A}_2^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{C}\underline{A}_1^2-\frac{1}{C}\underline{A}_2^2=0\\ -\frac{1}{C}\underline{A}_1^2-\frac{1}{C}\underline{A}_2^2=0\end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{A}_1^2 = -\underline{A}_2^2$

q_1 et q_2 sont de mêmes amplitudes et sont en opposition de phase, donc :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1^2 \\ \underline{A}_2^2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 2.

- Les solutions particulières :

Mode 1 $\begin{cases} \underline{q}_1(t) = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \\ \underline{q}_2(t) = \underline{A}_2^1 \, e^{j\omega_1 t} = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \end{cases}$

Mode 2 $\begin{cases} \underline{q}_1(t) = \underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \\ \underline{q}_2(t) = \underline{A}_2^2 \, e^{j\omega_2 t} = -\underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \end{cases}$

- La solution générale :

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j\omega_1 t} + \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j\omega_2 t}$$

avec $\underline{A}_1^1 = \alpha \, e^{j\phi_1}$ et $\underline{A}_1^2 = \beta \, e^{j\phi_2}$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \phi_2)}$$

En notation réelle

$q_1(t) = \alpha \cos\,(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \cos\,(\omega_2 t + \phi_2)$

$q_2(t) = \alpha \cos\,(\omega_1 t + \phi_1) - \beta \cos\,(\omega_2 t + \phi_2)$

Calcul des constantes α, β, $\phi_1$et ϕ_2 en utilisant les conditions initiales :

à $t = 0\ s$, C_1 possède une charge q :

$q_1(0) = q_2(0) = q$, car $C_1 = C_2$, donc : $q_1 = q_2 = q$.

$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$

On a :

$\dot{q}_1(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

$\dot{q}_2(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

d'où :

$$q_1(0) = q_2(0) = q \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos\phi_1 + \beta \cos\phi_2 = q \ldots (1) \\ \alpha \cos\phi_1 - \beta \cos\phi_2 = q \ldots (2) \end{cases}$$

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 - \beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \dots (3) \\ -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 + \beta\,\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \dots (4) \end{cases}$$

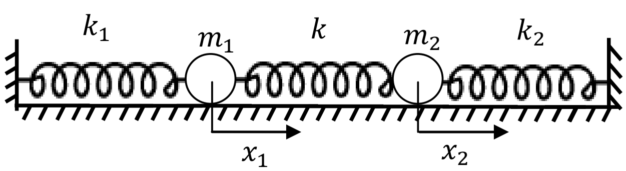
$$(3) + (4) \Rightarrow -2\alpha\omega_1 \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$$
$$(3) - (4) \Rightarrow -2\beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$$

En remplaçant $\phi_1$et ϕ_2 dans (1) et (2), on aura :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = q \\ \alpha - \beta = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = q \\ \beta = 0 \end{cases}$$

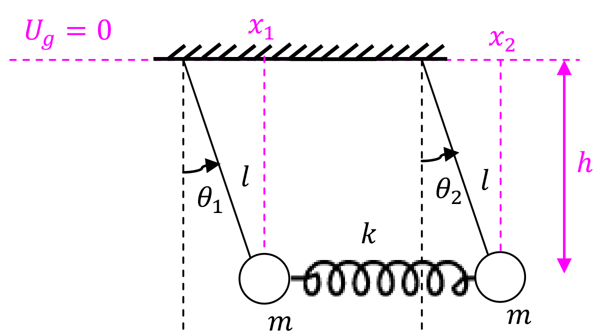
Les solutions seront donc :
$$\begin{cases} q_1(t) = q\cos(\omega_1 t) \\ q_2(t) = q\cos(\omega_1 t) \end{cases}$$

3- Système mécanique équivalent :
$$\begin{cases} L_1\underline{\ddot{q}_1} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C}\right)\underline{q_1} - \frac{1}{C}\underline{q_2} = 0 \\ L_1\underline{\ddot{q}_2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C}\right)\underline{q_2} - \frac{1}{C}\underline{q_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Car : $q \leftrightarrow x$, $\ddot{q} \leftrightarrow \ddot{x}$, $L \leftrightarrow m$, $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$, donc le système équivalent est le suivant :
Couplage par élasticité.



Exercice 2



1- Système linéaire des deux équations différentielles couplées, reliant les fonctions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$:
$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2$$
$$J = ml^2$$

d'où :
$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2$$

$U_e = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$

On a :
$\sin\theta_2 = \frac{x_2}{l} \Rightarrow x_2 = l\sin\theta_2$
$\theta_2 \ll$ donc $\sin\theta_2 \simeq \theta_2$
d'où :
$x_2 = l\theta_2$

de même :
$x_1 = l\theta_1$

donc :
$U_e = \frac{1}{2}k(l\theta_2 - l\theta_1)^2$

On a :
$U_{g_1} = -mgh_1$
$U_{g_2} = -mgh_2$
$\cos\theta_1 = \frac{h_1}{l} \Rightarrow h_1 = l\cos\theta_1$
$\theta_1 \ll$ donc $\cos\theta_1 \simeq 1 - \frac{\theta_1^2}{2}$
d'où :
$h_1 = l\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right)$
de même :
$h_2 = l\left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right)$
donc :
$U_g = U_{g_1} + U_{g_2} = -mgl\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) - mgl\left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right)$
$U = U_e + U_g = \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) - kl^2\theta_1\theta_2 + \frac{1}{2}kl^2\theta_1^2 + \frac{1}{2}kl^2\theta_2^2 - 2mgl$

$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) + kl^2\theta_1\theta_2 - \frac{1}{2}kl^2\theta_1^2 - \frac{1}{2}kl^2\theta_2^2 + 2mgl$

Equations de Lagrange :
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_1} = 0$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta_2} = 0$
$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} = ml^2\dot{\theta}_1$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = ml^2\ddot{\theta}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(mgl + kl^2)\theta_1 + kl^2\theta_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2\ddot{\theta}_2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -(mgl + kl^2)\theta_2 + kl^2\theta_1$$

d'où :

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\theta}_1 + (mgl + kl^2)\theta_1 - kl^2\theta_2 = 0 \\ ml^2\ddot{\theta}_2 + (mgl + kl^2)\theta_2 - kl^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_2 - \frac{k}{m}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

2- Modes normaux :
Résolution du système d'équations différentielles :
Les solutions particulières sont de la forme :
$\theta_1(t) = A\cos\,(\omega t + \varphi_1)$
$\theta_2(t) = B\cos\,(\omega t + \varphi_2)$

Détermination des amplitudes et des phases, en utilisant la notation complexe :
$\underline{\theta}_1(t) = A\,e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{A}\,e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A} = A\,e^{j\varphi_1}$
$\underline{\theta}_2(t) = B\,e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{B}\,e^{j\omega t}$, tel que $\underline{B} = B\,e^{j\varphi_2}$

On a :
$\underline{\theta}_1 = \underline{A}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{\theta}}_1 = j\omega\underline{A}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{\theta}}_1 = -\omega^2\,\underline{A}\,e^{j\omega t}$
$\underline{\theta}_2 = \underline{B}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{\theta}}_2 = j\omega\underline{B}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{\theta}}_2 = -\omega^2\,\underline{B}\,e^{j\omega t}$

Substituant $\underline{\theta}_1$ et $\underline{\theta}_2$ dans le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} -\omega^2\underline{A}\,e^{j\omega t} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\underline{A}\,e^{j\omega t} - \frac{k}{m}\underline{B}\,e^{j\omega t} = 0 \\ -\omega^2\underline{B}\,e^{j\omega t} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\underline{B}\,e^{j\omega t} - \frac{k}{m}\underline{A}\,e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\underline{A} - \frac{k}{m}\underline{B} = 0 \\ -\frac{k}{m}\underline{A} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)\underline{B} = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l}+\frac{k}{m}-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

C'est l'équation caractéristique.

$\theta_1(t)$ et θ_2(t) possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2 :

$$\theta_1(t) = A_1 \cos\ (\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \cos\ (\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$\theta_2(t) = A_2 \cos\ (\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos\ (\omega_2 t + \varphi_2)$$

où $A_1, A_2, B_1, B_2, \varphi_1$ et $\varphi_2$sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{k}{m}\right)\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 - \frac{k}{m}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) = 0$$

d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{g}{l} - \omega^2 = 0 \\ \dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m} - \omega^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \omega_1 \\ \omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}} = \omega_2 \end{cases}$$

Ce sont les pulsations propres du système.

- Mode 1 (Mode fondamental) $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m} - \dfrac{g}{l}\right)\underline{A}_1^1 - \dfrac{k}{m}\underline{A}_2^1 = 0 \\ -\dfrac{k}{m}\underline{A}_1^1 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m} - \dfrac{g}{l}\right)\underline{A}_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{m}\underline{A}_1^1 - \dfrac{k}{m}\underline{A}_2^1 = 0 \\ -\dfrac{k}{m}\underline{A}_1^1 + \dfrac{k}{m}\underline{A}_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A}_1^1 = \underline{A}_2^1$$

θ_1 et θ_2 sont de mêmes amplitudes et sont en phase, donc :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1^1 \\ \underline{A}_2^1 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 1.

- Mode 2 (Mode harmonique) $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$

$$\begin{cases} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \frac{g}{l} - \frac{2k}{m}\right) \underline{A}_1^2 - \frac{k}{m} \underline{A}_2^2 = 0 \\ -\frac{k}{m} \underline{A}_1^2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \frac{g}{l} - \frac{2k}{m}\right) \underline{A}_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{k}{m} \underline{A}_1^2 - \frac{k}{m} \underline{A}_2^2 = 0 \\ -\frac{k}{m} \underline{A}_1^2 - \frac{k}{m} \underline{A}_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A}_1^2 = -\underline{A}_2^2$$

θ_1 et θ_2 sont de mêmes amplitudes et sont en opposition de phase, donc :

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1^2 \\ \underline{A}_2^2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ représente le vecteur propre 2.

- Les solutions particulières :

Mode 1 $\begin{cases} \underline{\theta}_1(t) = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \\ \underline{\theta}_2(t) = \underline{A}_2^1 \, e^{j\omega_1 t} = \underline{A}_1^1 \, e^{j\omega_1 t} \end{cases}$

Mode 2 $\begin{cases} \underline{\theta}_1(t) = \underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \\ \underline{\theta}_2(t) = \underline{A}_2^2 \, e^{j\omega_2 t} = -\underline{A}_1^2 \, e^{j\omega_2 t} \end{cases}$

- La solution générale :

$$\begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{pmatrix} = \underline{A}_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j\omega_1 t} + \underline{A}_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j\omega_2 t}$$

avec $\underline{A}_1^1 = \alpha \, e^{j\phi_1}$ et $\underline{A}_1^2 = \beta \, e^{j\phi_2}$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j(\omega_2 t + \phi_2)}$$

En notation réelle

$\theta_1(t) = \alpha \cos\,(\omega_1 t + \phi_1) + \beta \cos\,(\omega_2 t + \phi_2)$

$\theta_2(t) = \alpha \cos\,(\omega_1 t + \phi_1) - \beta \cos\,(\omega_2 t + \phi_2)$

3- Solution du régime libre :

à $t = 0\, s$, la première tige se trouve écartée de la verticale de l'angle θ_0, l'autre tige étant alors verticale et deux tiges sont abandonnées sans vitesse initiale.

$\theta_1(0) = \theta_0$
$\theta_2(0) = 0$
$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

On a :
$\dot{\theta}_1(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$
$\dot{\theta}_2(t) = -\alpha\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \beta\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

d'où :
$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0 \\ \theta_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cos\phi_1 + \beta \cos\phi_2 = \theta_0 \ldots (1) \\ \alpha \cos\phi_1 - \beta \cos\phi_2 = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 - \beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \ldots (3) \\ -\alpha\,\omega_1 \sin\phi_1 + \beta\,\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \ldots (4) \end{cases}$$

$(3) + (4) \Rightarrow -2\alpha\omega_1 \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \sin\phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0$
$(3) - (4) \Rightarrow -2\beta\omega_2 \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \sin\phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = 0$

En remplaçant $\phi_1$et ϕ_2 dans (1) et (2), on aura :
$$\begin{cases} \alpha + \beta = \theta_0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\theta_0}{2} \\ \beta = \dfrac{\theta_0}{2} \end{cases}$$

Les solutions seront donc :
$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{\theta_0}{2}[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ \theta_2(t) = \dfrac{\theta_0}{2}[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

On a :
$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2\cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$
$$\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) = -2\sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\sin\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right)$$

d'où :
$$\begin{cases} \theta_1(t) = \dfrac{\theta_0}{2} 2\cos\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \\ \theta_2(t) = \dfrac{\theta_0}{2}(-2)\sin\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) \end{cases}$$

On a :
$$\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) = \cos\left(\frac{-(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) = \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right)$$
$$\sin\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}\right) = \sin\left(\frac{-(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) = -\sin\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right)$$

d'où :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos\left(\dfrac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) \cos\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \\ \theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\dfrac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) \sin\left(\dfrac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \end{cases}$$

C'est le phénomène de battements.

4- Coefficient de couplage :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_1 - \dfrac{k}{m}\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_2 - \dfrac{k}{m}\theta_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_1 = \dfrac{k}{m}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\dfrac{g}{l} + \dfrac{k}{m}\right)\theta_2 = \dfrac{k}{m}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + a_1\theta_1 = b_1\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + a_2\theta_2 = b_2\theta_1 \end{cases}$$

Le coefficient de couplage :

$$C = \sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2}{\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)^2}} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}} = \frac{1}{1 + \frac{mg}{kl}}$$

Chapitre 5 : Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

5. 1. Equation de Lagrange

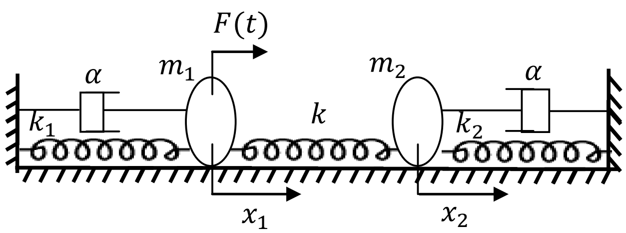
Soit un système à deux degrés de liberté, soumis à des forces de frottement et à des forces extérieures $F_1(t)$ et $F_2(t)$. Les équations de Lagrange s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1}+F_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2}+F_2(t)$$

5. 2. Système masses-ressorts-amortisseurs

La force $F(t)=F_0\cos\omega t$ est appliquée sur la masse m_1.



Equations du mouvement

Energie cinétique

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

Energie potentielle

$$U=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2=\frac{1}{2}(k_1+k)x_1^2+\frac{1}{2}(k_2+k)x_2^2-kx_1x_2$$

Fonction de dissipation

$$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$$

Lagrangien

$$L=T-U=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}(k_1+k)x_1^2-\frac{1}{2}(k_2+k)x_2^2+kx_1x_2$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_1}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1}+F(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_2}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=m_1\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=m_1\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1 + k)x_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha \dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k_2 + k)x_2 + kx_1$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = \alpha \dot{x}_2$$

Le système d'équations différentielles du mouvement

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = -\alpha\dot{x}_1 + F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = -\alpha\dot{x}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Solutions en régime permanent
$x_1(t) = A\cos\,(\omega t + \varphi_1)$
$x_2(t) = B\cos\,(\omega t + \varphi_2)$

Détermination des amplitudes et des phases, en utilisant la notation complexe
$\underline{x}_1(t) = A\,e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{A}\,e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A} = A\,e^{j\varphi_1}$
$\underline{x}_2(t) = B\,e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{B}\,e^{j\omega t}$, tel que $\underline{B} = B\,e^{j\varphi_2}$

On a :
$\underline{x}_1 = \underline{A}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{x}}_1 = j\omega\underline{A}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{x}}_1 = -\omega^2\,\underline{A}\,e^{j\omega t}$
$\underline{x}_2 = \underline{B}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{x}}_2 = j\omega\underline{B}\,e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\ddot{x}}_2 = -\omega^2\,\underline{B}\,e^{j\omega t}$

On aura :

$$\begin{cases} -m_1\omega^2\underline{A}\,e^{j\omega t} + j\alpha\omega\underline{A}\,e^{j\omega t} + (k_1 + k)\underline{A}\,e^{j\omega t} - k\underline{B}\,e^{j\omega t} = F_0\,e^{j\omega t} \\ -m_2\omega^2\underline{B}\,e^{j\omega t} + j\alpha\omega\underline{B}\,e^{j\omega t} + (k_2 + k)\underline{B}\,e^{j\omega t} - k\underline{A}\,e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [-m_1\omega^2 + j\alpha\omega + (k_1 + k)]\underline{A} - k\underline{B} = F_0 \\ -k\underline{A} + [-m_2\omega^2 + j\alpha\omega + (k_2 + k)]\underline{B} = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} k_1 + k + j\alpha\omega - m_1\omega^2 & -k \\ -k & k_2 + k + j\alpha\omega - m_2\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cas d'un système symétrique et d'un amortissement très faible :
$m_1 = m_2 = m$

et
$k_1 = k_2 = k_3$
et
$\alpha = 0$

On aura :
$$\begin{pmatrix} k_3+k-m\omega^2 & -k \\ -k & k_3+k-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ et $\underline{B}$ existent si et seulement si le déterminant de la matrice est non nul :
$\Delta(\omega) = (k_3 + k - m\omega^2)^2 - k^2 = (k_3 + 2k - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2)$

Les amplitudes complexes sont données par la règle de Cramer.

Rappel
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$
$|A| = ad - cb$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & b \\ B_2 & d \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & B_1 \\ c & B_2 \end{vmatrix}}{|A|}$$

donc :
$$\underline{A} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k_3 + k - m\omega^2 \end{vmatrix}}{(k_3 + 2k - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2)} = \frac{F_0(k_3 + k - m\omega^2)}{(k_3 + 2k - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2)} = Ae^{j\varphi_1}$$
et
$$\underline{B} = \frac{\begin{vmatrix} k_3 + k - m\omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{(k_3 + 2k - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2)} = \frac{kF_0}{(k_3 + 2k - m\omega^2)(k_3 - m\omega^2)} = Be^{j\varphi_2}$$

Finalement

$$\begin{cases} A = |\underline{A}| = \dfrac{F_0|k_3 + k - m\omega^2|}{|k_3 + 2k - m\omega^2||k_3 - m\omega^2|} = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{|\omega_A^2 - \omega^2|}{|\omega_2^2 - \omega^2||\omega_1^2 - \omega^2|} \\ \varphi_1 = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} B = |\underline{B}| = \dfrac{kF_0}{|k_3 + 2k - m\omega^2||k_3 - m\omega^2|} = \dfrac{kF_0}{m^2} \dfrac{1}{|\omega_2^2 - \omega^2||\omega_1^2 - \omega^2|} \\ \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

Tel que :

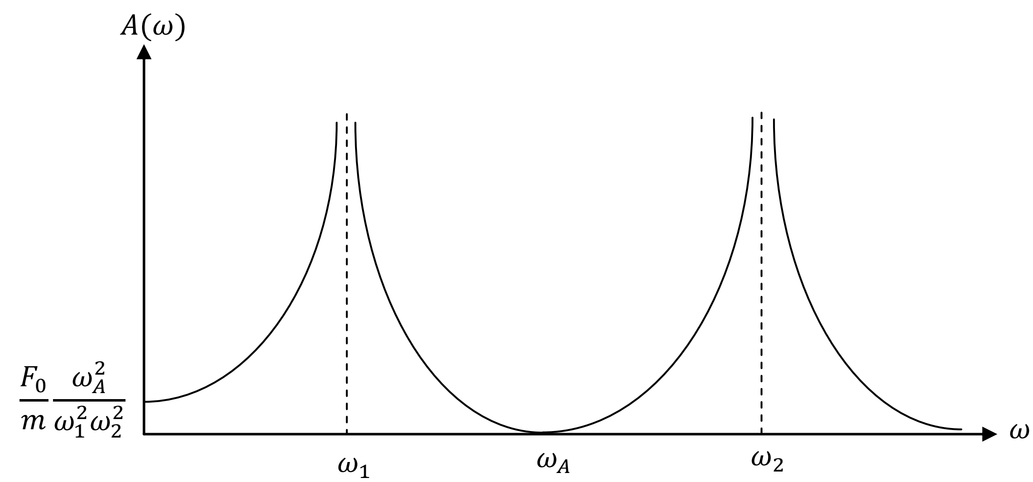
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_3+2k}{m}}$ et $\omega_A = \sqrt{\frac{k_3+k}{m}}$.

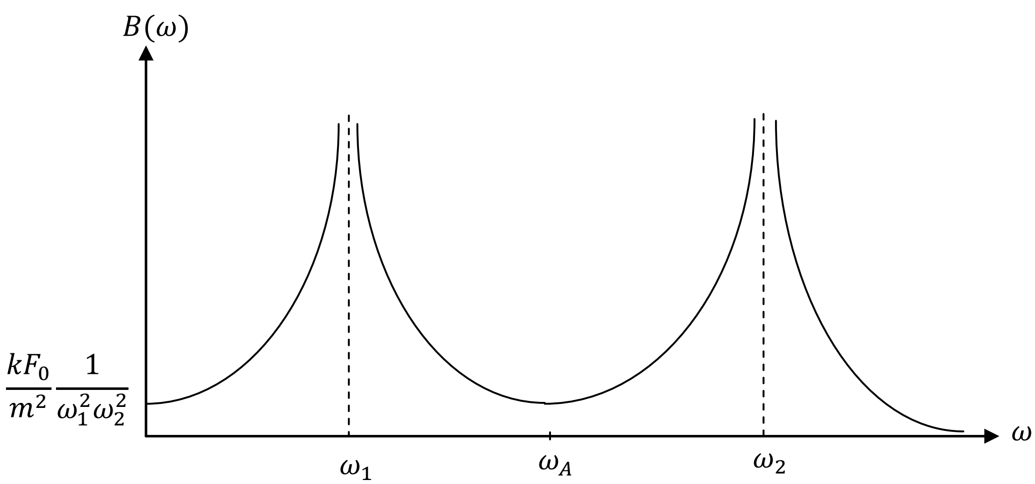
ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres calculées dans le chapitre précédent.

Lorsque $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$, les amplitudes du mouvement sont infiniment grandes → ω_1 et ω_2 sont les pulsations de résonance.

Lorsque $\omega = \omega_A$, la masse m_1 est immobile (l'amplitude de A est nulle) et la réponse de la masse m_2 est faible → ω_A est la pulsation d'antirésonance.

Courbes d'amplitudes en fonction de la pulsation





NB :

Dans le cas d'amortissement non négligeable, les amplitudes à la résonance sont atténuées par l'amortissement. L'amplitude de la masse m_1, à la pulsation d'antirésonance est très faible.

Analogie force-tension :
Trouvons le circuit électrique équivalent au système mécanique étudié :

Equations différentielles du mouvement :
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + k_1x_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + k_2x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Equations intégro-différentielles :
On a :
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{d\dot{x}_1}{dt} \\ x_1 = \displaystyle\int \dot{x}_1 dt \end{cases}$$

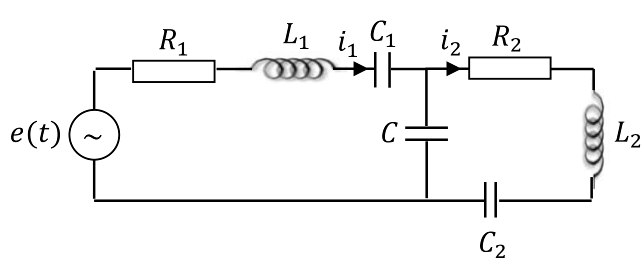
De même :
$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \dfrac{d\dot{x}_2}{dt} \\ x_2 = \displaystyle\int \dot{x}_2 dt \end{cases}$$

Le système d'équation précédent devient :
$$\begin{cases} m_1\dfrac{d\dot{x}_1}{dt} + \alpha\dot{x}_1 + k_1\displaystyle\int \dot{x}_1 dt + k\int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)dt = F(t) \\ m_2\dfrac{d\dot{x}_2}{dt} + \alpha\dot{x}_2 + k_2\displaystyle\int \dot{x}_2 dt + k\int (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)dt = 0 \end{cases}$$

Eléments électriques analogues :
$F(t) \to e(t)$, $\dot{x}_1 \to i_1$, $\dot{x}_2 \to i_2$, $k_1 \to \frac{1}{C_1}$, $k = \frac{1}{C}$, $k_2 \to \frac{1}{C_2}$, $m_1 \to L_1$, $m_2 \to L_2$, $\alpha_1 \to R_1$, $\alpha_2 \to R_2$.

Equations électriques :
$$\begin{cases} L_1\dfrac{di_1}{dt} + R_1i_1 + \dfrac{1}{C_1}\displaystyle\int i_1 dt + \dfrac{1}{C}\int (i_1 - i_2)dt = e(t) \\ L_2\dfrac{di_2}{dt} + R_2i_2 + \dfrac{1}{C_2}\displaystyle\int i_2 dt + \dfrac{1}{C}\int (i_2 - i_1)dt = 0 \end{cases}$$

D'où le circuit électrique équivalent :



5. 3. Les impédances
Voir chapitre 3 (paragraphe 3.5).

5. 4. Applications
Impédance d'entrée d'un système forcé à deux degrés de liberté

Pour le système symétrique précédent, les équations aux vitesses sont données par :

$$\begin{cases} jm\omega\, \underline{\dot{x}}_1(t) + \left(\dfrac{k+k_3}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_1(t) - \left(\dfrac{k}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_2(t) = \underline{F}(t) \\ jm\omega\, \underline{\dot{x}}_2(t) + \left(\dfrac{k+k_3}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_2(t) - \left(\dfrac{k}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_1(t) = 0 \end{cases}$$

avec :
$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$
$x_1(t) = A \cos\ (\omega t + \varphi_1)$
$x_2(t) = A \cos\ (\omega t + \varphi_2)$

En notation complexe :
$\underline{F}(t) = F_0\ e^{j\omega t}$

$$\underline{x}_1(t) = A\ e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{A}\ e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{x}}_1(t) = j\omega \underline{x}_1(t) \Rightarrow \underline{x}_1(t) = \frac{\underline{\dot{x}}_1(t)}{j\omega}$$

et
$\underline{\ddot{x}}_1(t) = j\omega\underline{\dot{x}}_1(t)$

$$\underline{x}_2(t) = B\ e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{B}\ e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{\dot{x}}_2(t) = j\omega \underline{x}_2(t) \Rightarrow \underline{x}_2(t) = \frac{\underline{\dot{x}}_2(t)}{j\omega}$$

et
$\underline{\ddot{x}}_2(t) = j\omega\underline{\dot{x}}_2(t)$

Le système d'équation précédent devient :

$$\begin{cases} \left[j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)\right]\underline{\dot{x}}_1(t) - \left(\dfrac{k}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_2(t) = \underline{F}(t) \ldots (1) \\ \left[j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)\right]\underline{\dot{x}}_2(t) - \left(\dfrac{k}{j\omega}\right)\underline{\dot{x}}_1(t) = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

De (2), on aura :

$$\underline{\dot{x}}_2(t) = \frac{\dfrac{k}{j\omega}}{j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)}\underline{\dot{x}}_1(t) \ldots (3)$$

(3) dans (1) : $\left[j\left(m\omega - \frac{k+k_3}{\omega}\right) - \frac{\left(\frac{k}{j\omega}\right)^2}{j\left(m\omega - \frac{k+k_3}{\omega}\right)}\right]\underline{\dot{x}}_1(t) = \underline{F}(t)$

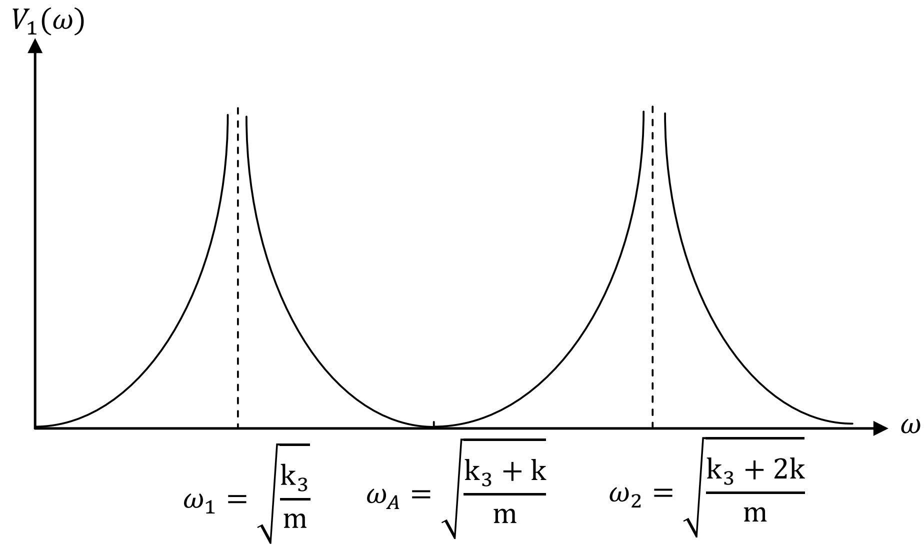
$$\underline{\dot{x}}_1(t) = \frac{\underline{F}(t)}{\left[j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right) - \dfrac{\left(\dfrac{k}{j\omega}\right)^2}{j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)}\right]} = \underline{V}_1\ e^{j\omega t}$$

$\underline{V}_1$ est l'amplitude complexe de la vitesse.

$$\underline{V}_1 = \frac{F_0}{\left[j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right) - \dfrac{\left(\dfrac{k}{j\omega}\right)^2}{j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)}\right]} = \frac{-jF_0\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)}{\left(m\omega - \dfrac{k_3}{\omega}\right)\left(m\omega - \dfrac{2k+k_3}{\omega}\right)}$$

d’où :

$$V_1 = \left|\underline{V}_1\right| = \frac{F_0\left|m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right|}{\left|m\omega - \dfrac{k_3}{\omega}\right|\left|m\omega - \dfrac{2k+k_3}{\omega}\right|}$$



$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{\dot{x}}_1(t)} = j\left(m\omega - \frac{k+k_3}{\omega}\right) - \frac{\left(\dfrac{k}{j\omega}\right)^2}{j\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)} = j\left[\frac{\left(m\omega - \dfrac{k_3}{\omega}\right)\left(m\omega - \dfrac{2k+k_3}{\omega}\right)}{\left(m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right)}\right]$$

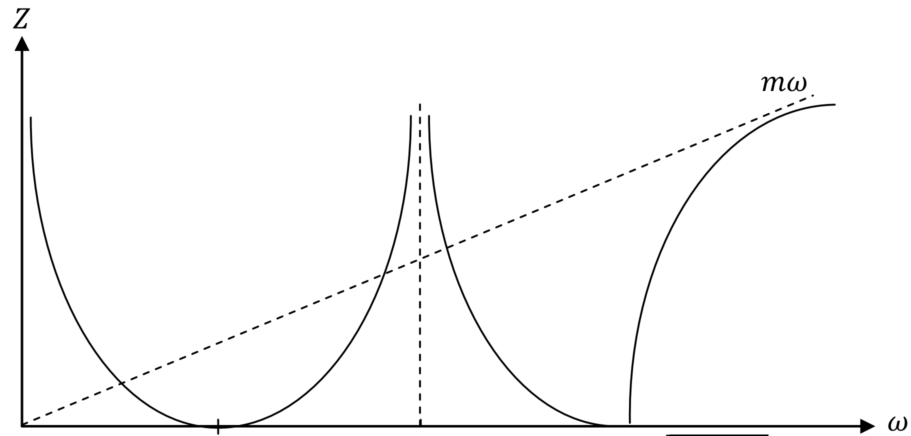
$$Z = \left|\underline{Z}\right| = \frac{\left|m\omega - \dfrac{k_3}{\omega}\right|\left|m\omega - \dfrac{2k+k_3}{\omega}\right|}{\left|m\omega - \dfrac{k+k_3}{\omega}\right|}$$

Lorsque $\left|m\omega - \frac{k+k_3}{\omega}\right| = 0$, $Z \to \infty$ et $V_1 = 0$,

donc : $\omega = \omega_A = \sqrt{\frac{k_3+k}{m}}$ représente la pulsation d’antirésonance.

Lorsque $\left|m\omega - \frac{k_3}{\omega}\right|\left|m\omega - \frac{2k+k_3}{\omega}\right| = 0$, $Z = 0$ et $V_1 \to \infty$

donc : $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$ et $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_3+2k}{m}}$ représentent les pulsations de résonance.



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_3}{m}} \qquad \omega_A = \sqrt{\frac{k_3 + k}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_3 + 2k}{m}}$$

5. 5. Exercice d'application

1- Etablir les équations différentielles du système oscillatoire mécanique de la figure ci-contre.

2- Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, du régime permanent, étant du même type que la force excitatrice $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Donner l'écriture matricielle des équations différentielles en amplitudes complexes.

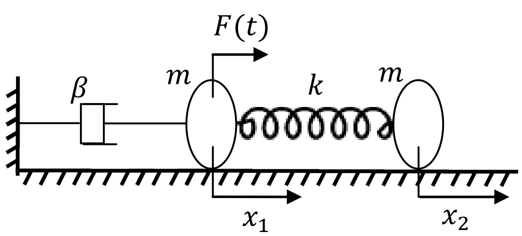
3- En déduire les pulsations de résonance lorsque $\beta = 0$.

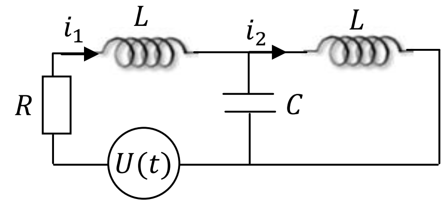
4- Etablir les équations différentielles en courant i_1 et i_2, puis en charges q_1 et q_2, du système oscillatoire électrique de la figure ci-dessous.

5- Y a-t-il une analogie entre les deux systèmes ?

Si oui, donner les correspondances entre les éléments mécaniques et électriques.

6- En déduire la pulsation de résonance lorsque $R = 0$.





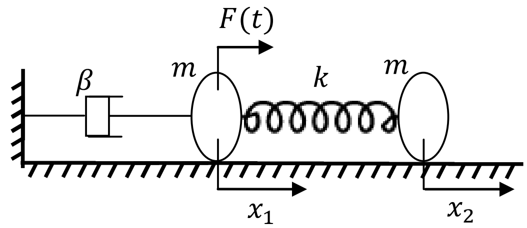
5. 6. Solution de l'exercice d'application

1- Equation différentielle du mouvement :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$$



$$D = \frac{1}{2}\beta\dot{x}_1^2$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \beta\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -kx_2 + kx_1$$

Le système d'équations différentielles du mouvement

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 + \beta\dot{x}_1 = F(t) \\ \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = F(t) \\ \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\beta}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = \frac{F_0 \cos \omega t}{m} \\ \quad \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$

2- Ecriture matricielle des équations différentielles en amplitudes complexes :

$x_1(t) = A\cos\,(\omega t + \varphi_1)$

$x_2(t) = B\cos\,(\omega t + \varphi_2)$

En notation complexe :
$\underline{x}_1(t) = A\, e^{j(\omega t+\varphi_1)} = \underline{A}\, e^{j\omega t}$, tel que $\underline{A} = A\, e^{j\varphi_1}$
$\underline{x}_2(t) = B\, e^{j(\omega t+\varphi_2)} = \underline{B}\, e^{j\omega t}$, tel que $\underline{B} = B\, e^{j\varphi_2}$

On a :
$\underline{x}_1 = \underline{A}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{x}}_1 = j\omega\underline{A}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{\underline{x}}_1 = -\omega^2\, \underline{A}\, e^{j\omega t}$
$\underline{x}_2 = \underline{B}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{x}}_2 = j\omega\underline{B}\, e^{j\omega t} \Rightarrow \ddot{\underline{x}}_2 = -\omega^2\, \underline{B}\, e^{j\omega t}$

En substituant $\underline{x}_1$ et $\underline{x}_2$ dans le système d'équation différentielles :

$$\begin{cases} -\omega^2\underline{A}\, e^{j\omega t} + j\dfrac{\beta}{m}\omega\underline{A}\, e^{j\omega t} + \dfrac{k}{m}\underline{A}\, e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m}\underline{B}\, e^{j\omega t} = \dfrac{F_0}{m}\, e^{j\omega t} \\ -\omega^2\underline{B}\, e^{j\omega t} + \dfrac{k}{m}\underline{B}\, e^{j\omega t} - \dfrac{k}{m}\underline{A}\, e^{j\omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(-\omega^2 + j\dfrac{\beta}{m}\omega + \dfrac{k}{m}\right)\underline{A} - \dfrac{k}{m}\underline{B} = \dfrac{F_0}{m} \\ -\dfrac{k}{m}\underline{A} + \left(-\omega^2 + \dfrac{k}{m}\right)\underline{B} = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m}+j\frac{\beta}{m}\omega-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3- Pulsation de résonance existante lorsque $\beta = 0$:

$$\Delta(\omega) = \left(\frac{k}{m} + j\frac{\beta}{m}\omega - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

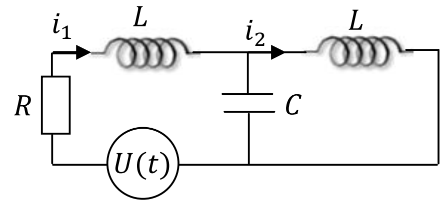
Si $\beta = 0$:

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{m} - \omega^2 + \frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m} - \omega^2 - \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = 0 \\ \omega^2 = \dfrac{2k}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} = \omega_R \end{cases}$$

4- Equations différentielles en courant i_1 et i_2, puis en charges q_1 et q_2 :
D'après la loi des mailles :



$$\begin{cases} U_L + U_R + U_C = U(t) \\ U_L + U_C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_1 + \dfrac{q}{C} = U(t) \\ L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{q}{C} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_1 + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (i_1 - i_2)dt = U(t) \\ L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int (i_2 - i_1)dt = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \dfrac{1}{C}(q_1 - q_2) = U(t) \\ L\ddot{q}_2 + \dfrac{1}{C}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

5- Oui, il y a une analogie entre les deux systèmes :

$x \leftrightarrow q$, $R \leftrightarrow \beta$, $m \leftrightarrow L$, $k \leftrightarrow \frac{1}{C}$, $F(t) \leftrightarrow U(t)$.

6- Déduction de la pulsation de résonance lorsque $R = 0$:

On a, dans le cas du système mécanique :

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

On aura donc, dans le cas du système électrique :

$$\omega_R = \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

Chapitre 6. Phénomènes de propagation à une dimension

6. 1. Généralités et définition de base

Dans les chapitres précédents, nous avons vu le phénomène vibratoire qui était toujours localisé au même endroit dans l'espace. Nous avons eu affaire à des oscillations. Nous verrons, dans ce chapitre les phénomènes de propagation.

De nombreux phénomènes de la vie courante sont de nature ondulatoire : déformation des cordes, déplacement des spires des ressorts, les vagues sur l'eau, le son, la lumière,…etc.

Toute onde provient d'une vibration. Cette vibration peut se propager dans l'espace, on parle alors d'onde ou de mouvement ondulatoire. Il y a dans ce cas transfert d'énergie d'un point à un autre de l'espace sans transfert de matière, par la propagation de cette vibration.

6. 1. 1. Définition d'une onde

Une onde est une perturbation qui se propage. Elle transporte de l'énergie, mais ne transporte pas de la matière.

NB : Les grandeurs physiques qui se propagent, peuvent être de nature vectorielle (champs électrique) ou scalaire (pression sonore).

6. 1. 2. Types d'ondes

Une première classification permet de distinguer deux types :

a/ Onde mécanique

C'est une onde qui nécessite un milieu matériel pour se propager (solide (le sol), liquide (l'eau) ou gaz (l'air)).
Exemples : les vagues, les ondes sismiques, les ondes sur les cordes, les ondes sonores,…etc.

b/ Onde électromagnétique

C'est une onde qui ne nécessite pas de milieu matériel pour ce propager (peut se propager autant dans le vide que dans un milieu matériel).
Exemple : les ondes radio, les rayons infrarouges, les ondes lumineuses, les rayons UV, les rayons X, les rayons gamma, la lumière du soleil, …etc.

6. 1. 3. Caractéristiques d'une onde

Les caractéristiques qui permettent de différencier les ondes sont : l'amplitude, la longueur d'onde, la fréquence, la façon de se propager : transversale, longitudinale, progressive ou stationnaire.

a/ Onde longitudinale

Une onde est longitudinale quand la déformation du milieu se fait dans la même direction que celle de la propagation de l'onde.
Exemples : compression ou décompression d'un ressort, onde produite par le relâchement brutal d'un élastique étiré, propagation d'un son dans un milieu : eau, air, …etc.

b/ Onde transversale

Une onde est transversale quand la déformation du milieu se fait dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
Exemples : les vibrations d'une corde dans une guitare ou un piano, ou les ondes de cisaillement en sismologie font partie de cette catégorie.

c/ Onde progressive

Une onde progressive est la propagation d'une perturbation d'un point vers un autre (dans l'espace), en transportant de l'énergie, mais sans transporter de la matière.

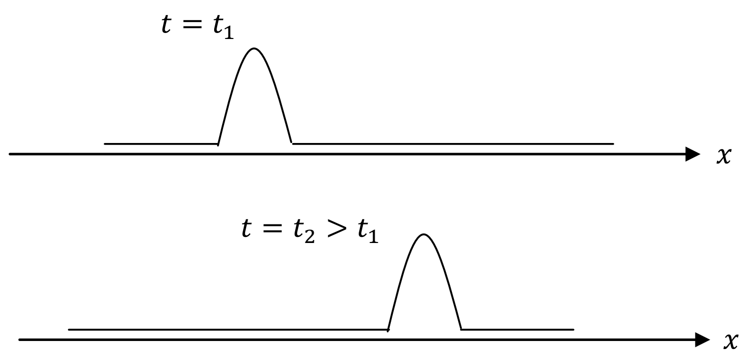
d/ Onde stationnaire

C'est une onde qui oscille sans se déplacer. Elle est produite par la superposition de deux ondes sinusoïdales de même amplitude et de même fréquence, qui se propagent dans des sens opposés.

NB : Le milieu de propagation d'une onde peut être tridimensionnel (onde sonore, lumineuse,…), bidimensionnel (onde à la surface de l'eau), ou unidimensionnel (propagation d'une déformation sur une corde).

6. 2. Equation de propagation - Equation d'onde

Soit une corde tendue que l'on déforme et qu'on lâche. Il y a alors une onde qui se propage le long de la corde.



L'équation qui décrit la variation dans le temps et dans l'espace d'une quantité ondulante S, qui peut être scalaire ou vectorielle, dépend de la position et du temps. C'est l'équation de d'Alembert, qui est une équation aux dérivées partielles du second ordre. A une dimension, cette équation d'onde s'écrit :

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

où v est la vitesse de propagation de l'onde. Parfois, on note c : célérité de l'onde.

Généralement, la fonction d'onde satisfait à l'équation de propagation :

$$\Delta S(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

où :

$$\Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}$$

C'est l'opérateur laplacien scalaire de S.

6. 3. Solution de l'équation d'onde à une dimension

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

peut se décomposer sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right) S(x,t) = 0$$

Cette formulation montre qu'il existe deux vitesses dans le système $+v$ et $-v$, associées à deux sens de propagation opposés.

Pour chercher des solutions à l'équation d'onde, on introduit deux nouvelles variables :

$$\begin{cases} X(x,t) = x - vt \\ Y(x,t) = x + vt \end{cases}$$

Les opérateurs de dérivations partielles de l'équation d'onde doivent être transformés :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X}(-v) + \frac{\partial}{\partial Y}(v) = v\left(\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X}\right)$$

Dans l'équation d'onde, nous avons besoin de l'opérateur de dérivée seconde en x, donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = v^2\left(\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X}\right)^2$$

En remplaçant dans l'équation d'onde :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X} + \frac{\partial S}{\partial Y}\right)^2 - \frac{v^2}{v^2}\left(\frac{\partial S}{\partial Y} - \frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial X \partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial S}{\partial Y}\right] = \frac{\partial}{\partial Y}\left[\frac{\partial S}{\partial X}\right] = 0$$

Une intégration par rapport à X donne :

$$\frac{\partial S}{\partial Y} = f(Y)$$

où : $f(Y)$ est une fonction qui ne dépend que de Y.

Une intégration par rapport à Y donne :

$$\frac{\partial S}{\partial X} = f(X)$$

où : $f(X)$ est une fonction qui ne dépend que de X.

La forme générale de la solution $S(X,Y)$ est donc la somme de deux fonctions indépendantes :

$$S(x,t) = F(X) + G(Y) = F(x - vt) + G(x + vt)$$

ou bien :

$$S(x,t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G(t + \frac{x}{v})$$

Les fonctions F et G sont des fonctions d'ondes arbitraire et ne sont déterminées que par des conditions aux limites et initiales du système.

6. 3. 1. Propriétés des solutions particulières

a/ Propriétés de $F(x - vt)$

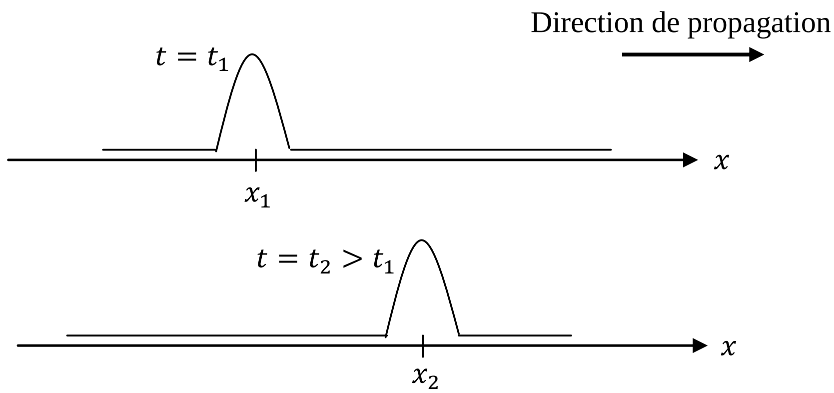
On suppose que $G(x + vt) = 0$

à t_1 et à la position x_1, on a : $S(x_1, t_1)$

à $t_2 > t_1$ et à la position x_2, on a : $S(x_2, t_2)$

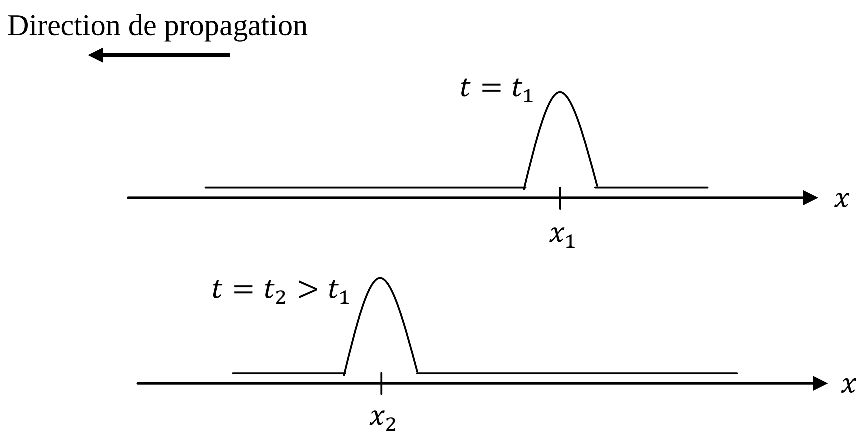
On a les mêmes quantités ondulatoires : $S(x_1, t_1) = S(x_2, t_2) \Rightarrow F(x_1 - vt_1) = F(x_2 - vt_2)$, équation satisfaite si $x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$.

$F(x - vt)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x croissants.
$F(x - vt)$ est appelée onde progressive.



b/ Propriétés de $\boldsymbol{G(x + vt)}$
$G(x_1 + vt_1) = G(x_2 + vt_2)$, équation satisfaite si $x_1 + vt_1 = x_2 + vt_2 \Rightarrow x_1 - x_2 = v(t_2 - t_1)$.

$G(x + vt)$ correspond à une onde se propageant dans le sens des x décroissants.
$G(x + vt)$ est appelée onde régressive.



6. 4. Onde progressive sinusoïdale
Une onde progressive sinusoïdales (ou harmonique) est donnée par :

$$S(x,t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S(x,t) = S_0 \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S(x,t) = S_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)\right]$$

$$\Rightarrow S(x,t) = S_0 \cos\left[2\pi\left(\tfrac{t}{T} - \tfrac{x}{\lambda}\right)\right]$$

C'est une fonction à double périodicité : dans le temps et dans l'espace.

$$\Rightarrow S(x,t) = S_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = S_0 \cos(\omega t - kx)$$

$\lambda = v\,T$: c'est la longueur d'onde qui constitue la période spatiale. C'est la distance parcourue par l'onde pendant une période. C'est une distance séparant deux maximas consécutifs de l'amplitude.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: c'est la période temporelle.

$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$: vecteur d'onde $(rad.m^{-1})$, $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ définit la direction de propagation d'une onde dans l'espace.

NB :
$k = \frac{\omega}{v}$ est appelé relation de dispersion de l'onde.

$v = \frac{\omega}{k} = f\lambda$: vitesse de propagation de l'onde.

Très souvent, on utilise la notation complexe :
$S(x,t) = S_0 e^{j(\omega t - kx)} = S_0 e^{j\omega t} e^{-jkx}$

On pose :
$\underline{S} = S_0 e^{-jkx} \Rightarrow S(x,t) = \underline{S}\, e^{j\omega t}$
$\underline{S}$ représente l'amplitude complexe de l'onde progressive sinusoïdale.

Généralement
$S(\vec{r},t) = S_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \equiv S_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$
Tel que : $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ et $\vec{r}(x, y, z)$
L'onde progressive s'écrit :

$$S(x,y,z,t) = S_0 \cos(\omega t - k_x.x - k_y.y - k_z.z)$$

6. 5. Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Lorsque deux ondes ou plus se chevauchent, on dit qu'elles sont superposées. La fonction d'onde résultante est donnée par le principe de superposition linéaire : la fonction d'onde totale est la somme linéaire des fonctions d'onde individuelles :

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_N = \sum_{i=1}^{N} S_i$$

NB : Selon la nature de l'onde, il peut s'agir d'une somme algébrique ou d'une somme vectorielle.

6. 5. 1. Deux ondes se propageant dans le même sens

Considérons deux ondes de même fréquence et de même direction de propagation, d'amplitudes respectives S_1 et S_2, et de phases respectives φ_1 et φ_2. L'onde résultante sera :

$$S(x,t) = S_1 e^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} + S_2 e^{j(\omega t - kx + \varphi_2)} = S\, e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$$

avec

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

et

$$\varphi = \arctan\left(\frac{S_1 \sin\varphi_1 + S_2 \sin\varphi_2}{S_1 \cos\varphi_1 + S_2 \cos\varphi_2}\right)$$

L'onde résultante est harmonique progressive, de même fréquence, d'amplitude S et de phase φ.

Démonstration

$S_1 e^{j(\omega t-kx+\varphi_1)} + S_2 e^{j(\omega t-kx+\varphi_2)} = S\, e^{j(\omega t-kx+\varphi)}$
$\Rightarrow S_1\, e^{j\varphi_1} + S_2\, e^{j\varphi_2} = S\, e^{j\varphi}$
$\Rightarrow S\, e^{j\varphi} = S_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) + S_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$
$\Rightarrow S\, e^{j\varphi} = S_1\cos\varphi_1 + jS_1\sin\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2 + jS_2\sin\varphi_2$
$\Rightarrow S\, e^{j\varphi} = S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2 + j(S_1\sin\varphi_1 + S_2\sin\varphi_2)$

On a :
$S = \sqrt{Re^2 + Im^2}$

d'où :

$$S = \sqrt{(S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2)^2 + (S_1\sin\varphi_1 + S_2\sin\varphi_2)^2}$$
$$= \sqrt{S_1^2\cos^2\varphi_1 + S_2^2\cos^2\varphi_2 + \ 2\, S_1S_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + S_1^2\sin^2\varphi_1 + S_2^2\sin^2\varphi_2 + 2\, S_1S_2\ \sin\varphi_1\sin\varphi_2}$$
$$= \sqrt{S_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) + S_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) + 2S_1S_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}$$
$$= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

On a :
$$\tan\varphi = \frac{Im}{Re}$$

d'où :
$$\tan\varphi = \frac{S_1\sin\varphi_1 + S_2\sin\varphi_2}{S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{S_1\sin\varphi_1 + S_2\sin\varphi_2}{S_1\cos\varphi_1 + S_2\cos\varphi_2}\right)$$

6. 5. 2. Deux ondes se propageant dans des sens opposés

On superpose deux ondes harmoniques de même fréquence, mais se propageant dans des sens opposés. L'onde résultante sera :

$$S(x,t) = S_1 e^{j(\omega t-kx+\varphi_1)} + S_2 e^{j(\omega t+kx+\varphi_2)}$$

Cas particulier : $S_1 = S_2 = S_0$ (les deux ondes sont d'amplitudes similaires).
$$S(x,t) = 2\, S_0\cos\left(kx + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) e^{j\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$
C'est une onde stationnaire. L'amplitude est modulée par un terme constant dépendant de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
Si $\cos\left(kx + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = 0$, on a des points immobiles → nœuds de vibration.
Si $\cos\left(kx + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = 1$, on a des points d'amplitude maximale → ventre de vibration.

NB : Dans certains cas particuliers, l'onde résultante pourra être d'amplitude nulle (si $\Delta\varphi = \pi$, opposition de phase) ou bien d'amplitude double (si $\Delta\varphi = 0$ en phase). On parle alors d'interférence destructive et constructive, respectivement.

Démonstration

$S = S_1 e^{j(\omega t-kx+\varphi_1)} + S_2 e^{j(\omega t+kx+\varphi_2)}$

Cas particulier : $S_1 = S_2 = S_0$

$S = S_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} + S_0 e^{j(\omega t + kx + \varphi_2)}$

On a : $e^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} = e^{j\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)} = e^{j\left(\omega t - kx + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} e^{j\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)}$

et on : $e^{j(\omega t + kx + \varphi_2)} = e^{j\left(\omega t + kx + \frac{\varphi_1+\varphi_2+\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)} = e^{j\left(\omega t + kx + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} e^{j\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}$

d'où :

$$S = S_0 \left[e^{j\left(\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} e^{-jkx} e^{j\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)} + e^{j\left(\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} e^{jkx} e^{j\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)} \right]$$

$$\Rightarrow S = 2S_0\, e^{j\left(\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)} \left[\frac{e^{-j\left(kx + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)} + e^{j\left(kx + \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)}}{2} \right]$$

$$\Rightarrow S = 2S_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) e^{j\left(\omega t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)}$$

En notation réelle :

$$S = 2S_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

C'est une onde stationnaire.

- **Positions des nœuds**

$$\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow kx = (2n+1)\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

On a : $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$

d'où :

$$x = \left[(2n+1)\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right]\frac{\lambda}{2\pi}$$

$$x = \left[\left(\frac{2n+1}{2}\right) - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\right)\right]\frac{\lambda}{2}$$

$$x = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\right)\right]\frac{\lambda}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- **Positions des ventres**

$$\cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = n\pi$$

$$\Rightarrow kx = n\pi - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

On a :

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

d'où :

$$x = \left[n\pi - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\right]\frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\Rightarrow x = \left[n - \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi}\right)\right]\frac{\lambda}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Les points x_n sont les nœuds de l'onde. Entre chaque paire de nœuds existe un ventre où l'amplitude de vibration est maximale. L'intervalle entre deux nœuds est égal à $\frac{\lambda}{2}$.

6. 6. Vitesse de phase, vitesse de groupe

Pour deux ondes de même amplitude S_0, de vecteurs d'ondes $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ voisins, de pulsations ω_1 et ω_2 voisines et de même phase (nulle) à l'origine, l'onde résultante s'écrit :

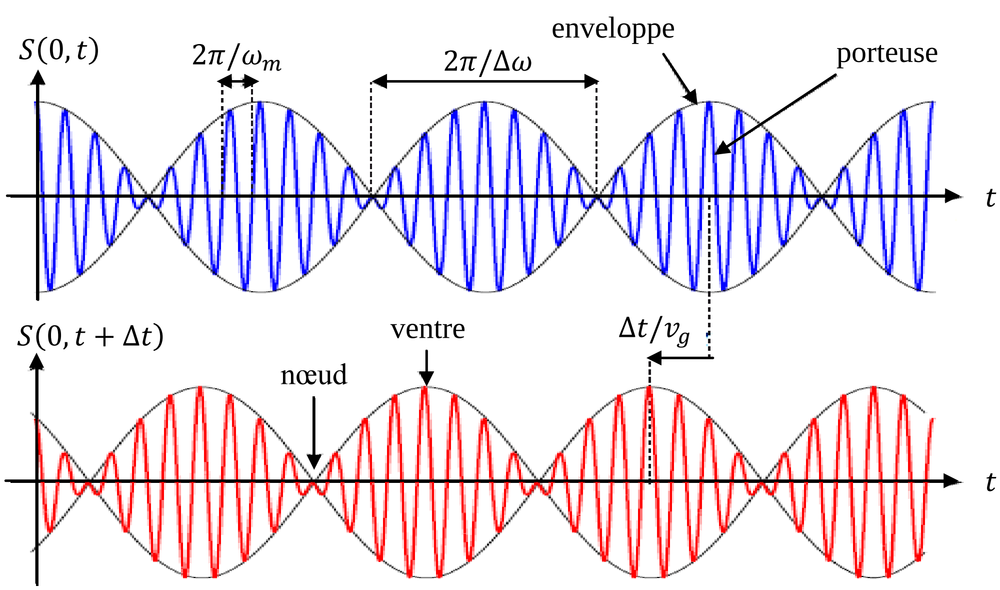
$$S(\vec{r},t) = S_0\cos(\vec{k}_1.\vec{r} - \omega_1 t) + S_0\cos(\vec{k}_2.\vec{r} - \omega_2 t)$$
$$= 2\,S_0 \underbrace{\cos(\Delta\vec{k}.\vec{r} - \Delta\omega t)}_{\text{enveloppe}}.\underbrace{\cos(\vec{k}_m.\vec{r} - \omega_m t)}_{\text{porteuse}}$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ \Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \vec{k}_m = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \\ \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \end{cases}$$



Pour $\Delta\vec{k}$ et $\Delta\omega$ faibles, un phénomène de battements apparaît, car la première onde (l'enveloppe) produit une modulation d'amplitude de l'onde moyenne (la porteuse) sous-jacente avec une période beaucoup plus grande que celle de l'onde moyenne.

La vitesse apparente de propagation de l'énergie de l'onde totale est essentiellement égale à celle de son enveloppe. Cette dernière est donnée par :

$$v_{enveloppe} = \frac{\Delta\omega}{\|\Delta\vec{k}\|}$$

alors que la vitesse de propagation de l'onde moyenne est :

$$v_{moyenne} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\|\vec{k}_1 + \vec{k}_2\|}$$

En passant à la limite $\Delta\omega \to 0$ et $\vec{k} \to 0$, la vitesse de l'enveloppe tend vers la vitesse de groupe v_g, tandis que la vitesse de l'onde moyenne tend vers la vitesse de phase v_φ :

$$v_{enveloppe} \to v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$v_{moyenne} \to v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

La vitesse de groupe correspond à la vitesse de propagation de l'énergie. Par opposition à la vitesse de phase, la vitesse de groupe est une vitesse 'physique', c'est-à-dire qu'elle correspond à la vitesse de transport de l'information, et ne peut par conséquent dépasser la vitesse de la lumière.

6. 7. Enoncés des exercices

Exercice 1

Soit l'équation de l'onde sonore suivante :

$$S(x,t) = 2.10^{-2} \sin(4.10^3\pi\, t - 2.7\,\pi\, x)$$

1- Déterminer le type de l'onde et le sens de sa propagation.
2- Déterminer les caractéristiques de l'onde : amplitude, pulsation, période, nombre d'onde, longueur d'onde et vitesse de propagation.

Exercice 2

La fonction d'onde d'une onde stationnaire sur une corde est donnée par :

$$S(x,t) = 4\ \sin(0.5\, x)\cos(30\, t)$$

où x et S sont en centimètres et t en secondes.
1- Déterminer la fréquence, l'amplitude et la vitesse des ondes qui se superposent.
2- Quelle est la vitesse d'une particule du milieu en $x = 2.4\ cm$ à $t = 0.8\ s$?

Exercice 3

Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide est donné par :

$$\vec{E}(y,t) = E_0\, cos\,(\omega t + ky)\,\vec{e}_x$$

1- Rappeler l'équation de d'Alembert.
2- Monter que la fonction ci-dessus n'est solution de l'équation de d'Alembert que si ω et k vérifient une relation que l'on déterminera.
3- Quels sont la direction et le sens de propagation de cette onde ?
4- Quelle est la nature de cette onde (longitudinale ou transversale) ?
5- Etablir la relation entre le nombre d'onde et la longueur d'onde.
6- Pour les ondes électromagnétiques dans le vide, on montre que :

$$\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial y^2}$$

avec : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$ et $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ F/m.$
En déduire la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide.

6. 8. Solutions des exercices

Exercice 1

$S(x,t) = 2.10^{-2}\sin(4.10^3\pi\, t - 2.7\,\pi\, x)$

1- Type de l'onde et sens de propagation :
C'est une onde sinusoïdale progressive se propageant dans la direction des x positifs.

2- Caractéristiques de l'onde :
On a : $S(x,t) = S_0\sin(\omega t - kx)$
Amplitude : $S_0 = 2.10^{-2}\ m$
Pulsation : $\omega = 4.10^3\pi\ \ rad/s$
Période :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4.10^3\pi} = 0.5\times 10^{-3}\ s.$$

Nombre d'onde : $k = 2.7\,\pi\, rad.m^{-1}$
Longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{2.7\,\pi} = 0.74\, m$$

Vitesse de propagation :

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{4.10^3\pi}{2.7\,\pi} = 1.48\, m/s$$

Ou bien :

$$\lambda = v\,T \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \frac{0.74}{0.5\times 10^{-3}} = 1.48\, m/s$$

Exercice 2

$S(x,t) = 4\ \sin(0.5\, x)\cos(30\, t)$
On a : $S(x,t) = 2S_0\ \sin(kx)\cos(\omega t)$

1- Détermination de la fréquence, l'amplitude et la vitesse des ondes qui se superposent :
Fréquence :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{30}{2\pi} \Rightarrow f = 4.77\ Hz$$

Amplitude :
On calcul l'amplitude de l'une ou l'autre des deux ondes progressives, soit :

$$A = \frac{4}{2} = 2\ cm$$

Vitesse de propagation :

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{30}{0.5} = 60\ cm/s$$

2- Vitesse d'une particule du milieu en $x = 2.4\ cm$ à $t = 0.8\ s$:
L'expression générale de la vitesse d'une particule est :

$$v_p = \frac{\partial S}{\partial t} = -30\times 4\sin(0.5\, x)\sin(30\, t) = -120\ \sin(0.5\, x)\sin(30\, t)$$

Pour $x = 2.4\ cm$ à $t = 0.8\ s$, on obtient :
$v_p = -120\ \sin(0.5\times 2.4)\sin(30\times 0.8) = 101\ cm/s$
NB : La vitesse de l'onde $v \neq$ la vitesse de la particule v_p.

Exercice 3

$\vec{E}(y,t) = E_0\, cos\,(\omega t + ky)\,\vec{e}_x$

1- Equation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

2- Montrons que $\vec{\mathrm{E}}(\mathrm{y},\mathrm{t})$ est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} = -E_0 k\ \sin(\omega t + ky)\,\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} = -E_0\, k^2 \cos(\omega t + ky)\vec{e}_x \ldots (1)$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -E_0\omega\ \sin(\omega t + ky)\,\vec{e}_x$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\, E_0 \cos(\omega t + ky)\vec{e}_x$$

d'où :

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}E_0\cos(\omega t + ky)\vec{e}_x \Rightarrow -E_0 k^2\cos(\omega t + ky)\,\vec{e}_x = -\frac{\omega^2}{v^2}E_0\cos(\omega t + ky)\,\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

C'est la relation de dispersion de l'onde.

3- Direction et sens de propagation de cette onde :

La direction de propagation de l'onde est selon les y décroissants.

Le sens de propagation de l'onde (la vibration) se fait selon x.

4- Nature de l'onde : La direction de la perturbation est selon x, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (selon y), donc l'onde est transversale.

5- Relation entre le nombre d'onde et la longueur d'onde :

$$\lambda = v\,T$$

et

$$k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

donc :

$$\lambda = \frac{\omega}{k}T$$

On a :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donc :

$$\lambda = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{k} = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

6- Pour les ondes électromagnétiques dans le vide, on montre que :

$$\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial y^2}$$

Déduction de la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide :
On a :

$$\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\vec{E}(y,t)}{\partial y^2}$$

donc :

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

AN :

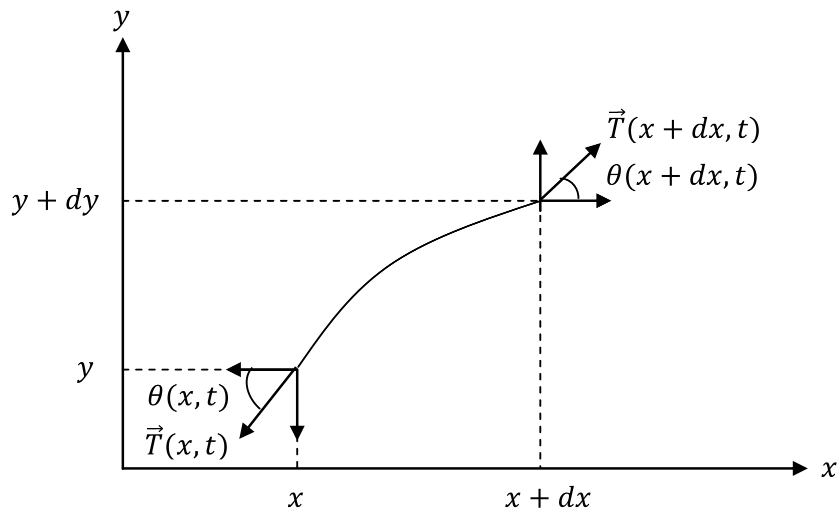
$$v = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^8\ m/s$$

C'est la vitesse de la lumière.

Chapitre 7 : Cordes vibrantes

7. 1. Equation des ondes

Une corde au repos occupe un segment le long de l'axe des x, tendue avec une tension T (force) appliquée à ses deux extrémités. On déforme la corde dans la direction y et on la lâche. Soit $y(x,t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x et à l'instant t. Notons θ l'angle de la tangente à la corde et de l'axe Ox au point d'abscisse x.



Une corde vibrant transversalement

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur un élément de la corde de masse dm, situé entre x et $x+dx$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = dm\,\vec{a} \Longrightarrow \vec{T}(x,t) + \vec{T}(x+dx,t) = dm\,\vec{a}$$

NB : La force de pesanteur est négligée.

Par projection selon x :

$$-T(x,t)\cos\theta(x,t) + T(x+dx,t)\cos\theta(x+dx,t) = 0$$

On suppose que la déformation est petite, de sorte que l'angle θ soit toujours petit.

Dans ce cas : $\cos\theta(x,t) \simeq 1$, $\cos\theta(x+dx,t) \simeq 1$, d'où :

$$-T(x,t) + T(x+dx,t) = 0 \Longrightarrow T(x,t) = T(x+dx,t) = T$$

Par projection selon y :

$$-T(x,t)\sin\theta(x,t) + T(x+dx,t)\sin\theta(x+dx,t) = dm\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

La masse dm du segment est donnée par : $dm = \mu\,dx$, où μ est une densité linéique de masse de la corde, qui s'exprime en (kg/m). On aura alors :

$$T[\sin\theta(x+dx,t) - \sin\theta(x,t)] = \mu\,dx\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

En utilisant le développent de Taylor au premier ordre (dx est supposé très petit), on obtient :

$$\sin\theta(x+dx,t) - \sin\theta(x,t) = \frac{\partial \sin\theta(x,t)}{\partial x}dx$$

On aura :

$$T\frac{\partial \sin\theta(x,t)}{\partial x}dx = \mu\, dx\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow T\frac{\partial \sin\theta(x,t)}{\partial x} = \mu\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Pour des angles θ petits, on a :

$$\sin\theta(x,t) \simeq \tan\theta(x,t)$$

d'où :

$$T\ \frac{\partial \tan\theta(x,t)}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

On a :

$$\tan\theta(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

d'où :

$$T\ \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\ \Longrightarrow \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

On pose :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

où v est la vitesse de propagation de la perturbation le long de la corde ou célérité de l'onde.

On aura donc :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

C'est l'équation de d'Alembert, équation de propagation de l'onde. Cette équation étendue aux trois dimensions de l'espace, sera appliquée à la propagation du son puis à la propagation des ondes électromagnétiques.

7. 2. Ondes progressives harmoniques

On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$y(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$$

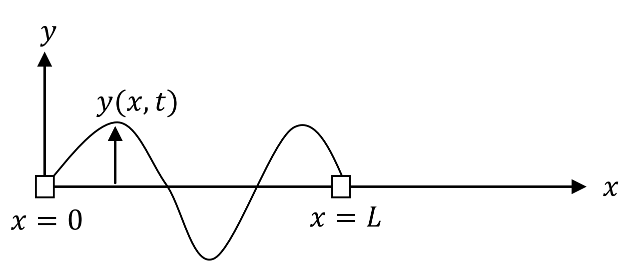
Ces solutions correspondent à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH). Ces fonctions, de période temporelle $T = 2\pi/\omega$ possèdent une période spatiale $\lambda = vT = 2\pi\, v/\omega$ appelée longueur d'onde. On définit le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que : $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$. L'OPPH est alors de la forme :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

7. 3. Oscillations libres d'une corde de longueur finie

On considère une corde de longueur L fixée à ses extrémités d'abscisse $x = 0$ et $x = L$:

$y(0,t) = y(L,t) = 0$ à tout instant.



On crée une onde incidente. En notation complexe : $y(x,t) = A\ e^{j(\omega t - kx)}$
Lorsqu'une impulsion se propageant sur une corde atteint l'extrémité, elle est réfléchie. Si l'extrémité est fixe, l'impulsion est inversée.

Lorsqu'une impulsion se propageant le long d'une corde est réfléchie à une extrémité fixe, elle est inversée.

L'onde résultante sera : $y(x,t) = A\ e^{j(\omega t - kx)} + B\ e^{j(\omega t + kx)}$

Condition 1 : à $x = 0$, $y(0,t) = 0 \quad \forall\ t$
$A\ e^{j\omega t} + B\ e^{j\omega t} = 0 \quad \forall\ t \Longrightarrow A = -B$

d'où :

$$y(x,t) = A\ e^{j(\omega t - kx)} - A\ e^{j(\omega t + kx)} = A\left(e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)}\right) = A\ e^{j\omega t}\left(\ e^{-jkx} - e^{jkx}\right)$$
$$= -2jAe^{j\omega t}\left(\frac{e^{jkx} - e^{-jkx}}{2j}\right) = -2jA\ (\cos\omega t + j\sin\omega t)\sin kx$$
$$= 2A\sin\omega t\sin kx - j2A\cos\omega t\sin kx$$

En notation réelle :

$$y(x,t) = 2A\ \underbrace{\sin\omega t}_{f(t)}\ \underbrace{\sin kx}_{g(x)}$$

C'est une onde stationnaire. Elle résulte de la superposition de deux ondes progressives de même amplitude et se propageant dans des sens opposés.

Condition 2 : à $x = L$, $y(L,t) = 0 \quad \forall\ t$
$y(L,t) = 2A\sin\omega t\sin kL$

On a $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

d'où :

$$y(L,t) = 2A\sin\omega t\sin\frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \quad \forall\ t$$

donc :

$$\sin\frac{2\pi L}{\lambda} = 0 \Longrightarrow \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \Longrightarrow L = n\frac{\lambda}{2}, n \in N^*$$

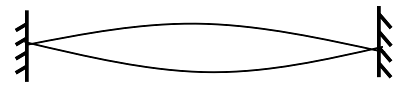
NB : La longueur de la corde doit être égale à un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde. Cette condition traduit la contrainte imposée par les extrémités fixes de la corde : on doit avoir un nœud de vibration et l'on sait que deux nœuds de vibration successifs sont distants de $\lambda/2$.

Les trois modes propres d'une corde fixée à ses extrémités :

$n = 1$

$L = \frac{\lambda}{2}$ et $\omega = \frac{\pi v}{L}$

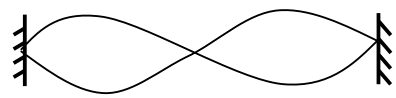
Mode fondamental



$n = 2$

$L = \lambda$ et $\omega = \frac{2\pi v}{L}$

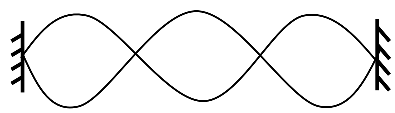
Mode harmonique 1



$n = 3$

$L = \frac{3\lambda}{2}$ et $\omega = \frac{3\pi v}{L}$

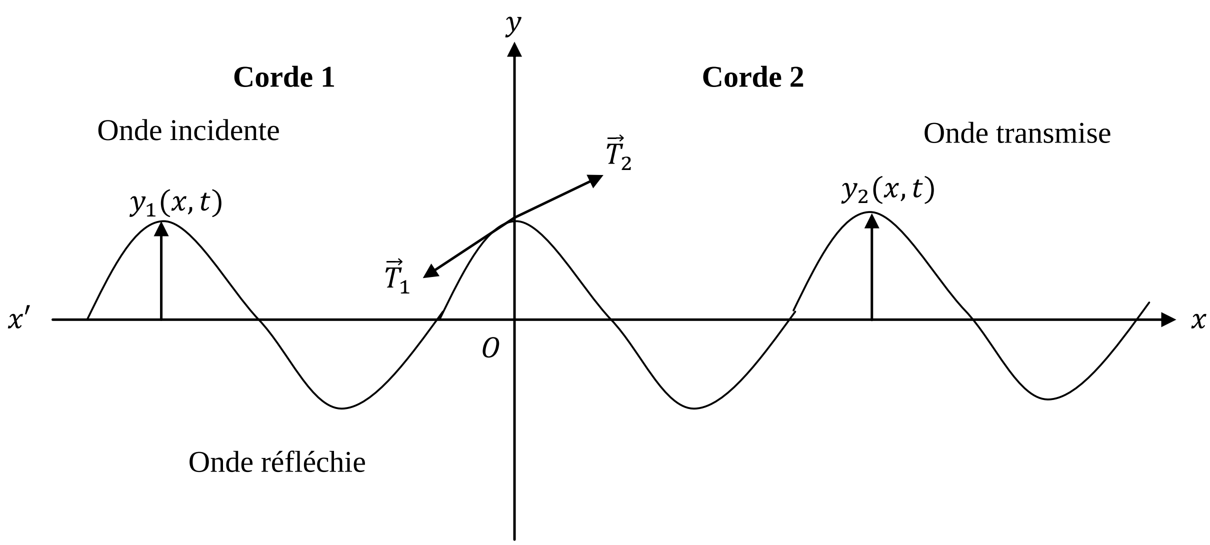
Mode harmonique 2



7. 4. Réflexion et transmission

7. 4. 1. Cas de deux cordes de longueurs semi-infinies

Deux cordes de masses linéiques respectives μ_1 et μ_2, tendues horizontalement suivant l'axe $x'Ox$ avec les tensions T_1 et T_2, respectivement, sont reliées en $x = 0$.



Réflexion et transmission dans deux cordes semi-infinies.

Une onde incidente sinusoïdale, $y_i(x,t)$, de pulsation ω et d'amplitude A arrive de $-\infty$ et se propage dans le sens des x croissants.

a/ Expressions des déplacements

Corde 1

Onde incidente : $y_i(x,t) = A\, e^{j(\omega t - k_1 x)}$, $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$ et $v_1 = \sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}}$

Onde réfléchie : $y_r(x,t) = B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$

d'où : $y_1(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t) = A\, e^{j(\omega t - k_1 x)} + B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$

Corde 2

Onde transmise : $y_t(x,t) = C\ e^{j(\omega t - k_2 x)}$, $k_2 = \frac{\omega}{v_2}$ et $v_2 = \sqrt{\frac{T_2}{\mu_2}}$

d'où : $y_2(x,t) = y_t(x,t) = C\ e^{j(\omega t - k_2 x)}$

NB : A, B et C sont les amplitudes des déplacements associés, respectivement, à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.

b/ Coefficients de réflexion et de transmission

On définit les coefficients de réflexion et de transmission, respectivement, par

$$r = \frac{B\ e^{j(\omega t + k_1 x)}}{A\ e^{j(\omega t - k_1 x)}}|_{x=0} = \frac{B}{A}$$

$$t = \frac{C\ e^{j(\omega t - k_2 x)}}{A\ e^{j(\omega t - k_1 x)}}|_{x=0} = \frac{C}{A}$$

- **Relation de continuité de déplacement en $x = 0$**

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \Longrightarrow A\ e^{j\omega t} + Be^{j\omega t} = Ce^{j\omega t} \Longrightarrow A + B = C \Longrightarrow \frac{A}{A} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \Longrightarrow 1 + r = t \ldots (1)$$

- **Relation de continuité de la force et sa direction en $x = 0$**

$\tan\big(\theta_{avant}(x=0)\big) = \tan\Big(\theta_{après}(x=0)\Big)$

avec $\tan\theta(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$

il vient :

$$\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0}$$

(continuité de pente)

$$\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} = -jk_1\big(A\ e^{j(\omega t - k_1 x)}\big) + jk_1\big(B\ e^{j(\omega t + k_1 x)}\big) = -jk_1\big(A\ e^{j(\omega t - k_1 x)} - B\ e^{j(\omega t + k_1 x)}\big)$$

$$\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x} = -jk_2 C\ e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

En $x = 0$:

$$\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = -jk_1 e^{j\omega t}(A - B)$$

$$\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = -jk_2 C e^{j\omega t}$$

d'où :

$$-T_1 jk_1 e^{j\omega t}(A - B) = -T_2 jk_2 C e^{j\omega t} \Longrightarrow T_1 k_1 (A - B) = T_2 k_2 C \Longrightarrow A - B = \frac{T_2 k_2 C}{T_1 k_1}$$

avec :

$$T_1k_1 = T_1\frac{\omega}{v_1} = \frac{T_1\omega}{\sqrt{\frac{T_1}{\mu_1}}} = T_1\omega\sqrt{\frac{\mu_1}{T_1}} = \omega\sqrt{\mu_1T_1} = \omega Z_1$$

Z_1 : impédance caractéristique de la corde 1.

De même : $T_2k_2 = \omega Z_2$

Z_2 : impédance caractéristique de la corde 2.

donc :

$$A - B = \frac{\omega Z_2 C}{\omega Z_1} = \frac{Z_2 C}{Z_1}$$

$$\frac{A}{A} - \frac{B}{A} = \frac{Z_2}{Z_1}\frac{C}{A} \Longrightarrow 1 - r = \frac{Z_2}{Z_1}t \;...\,(2)$$

A partir des équations (1) et (2), on obtient :

$1 + r = t \;...\,(1)$

$1 - r = \frac{Z_2}{Z_1}t \;...\,(2)$

(1) dans (2) :

$$1 - r = \frac{Z_2}{Z_1}(1 + r) = \frac{Z_2}{Z_1} + r\,\frac{Z_2}{Z_1} \Longrightarrow 1 - \frac{Z_2}{Z_1} = r\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \Longrightarrow r = \frac{1 - \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1}}{\frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$t = 1 + r = 1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

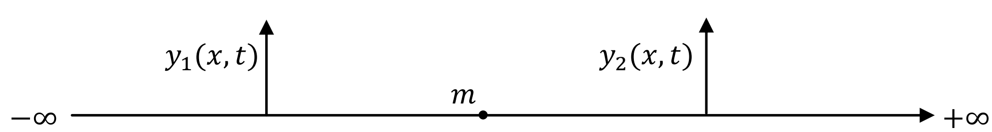
$$\Longrightarrow t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Cas particulier

$Z_1 = Z_2 \Longrightarrow r = 0$ et $t = 1 \Longrightarrow$ Pas de réflexion $\Longrightarrow$ Transmission totale.

7. 5. Exercice d'application

Une corde infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T. En $x = 0$, on fixe une masse m. Au repos, la corde est parallèle à l'axe des x. On néglige son poids et on ne considérera que les déplacements de faible amplitude.



Une onde incidente sinusoïdale $y_i(x,t)$ de pulsation ω et d'amplitude A, arrive de $-\infty$ et se déplace dans le sens des x croissants.

1- Donner $y_1(x,t)$ dans la région des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ dans le région des $x > 0$.

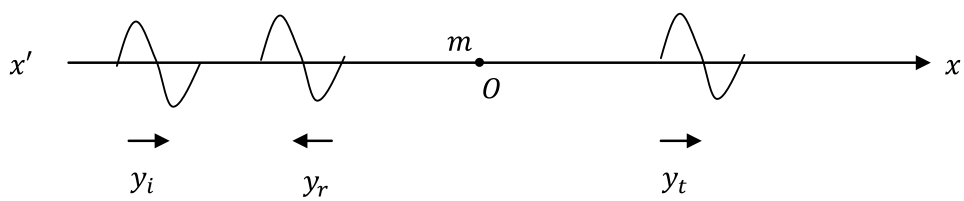
2- Monter que la force transversale agissant sur la masse m est donnée par :
$$F_y(0,t) = T\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right]$$

3- A l'aide de la condition de continuité en déplacement en $x = 0$ et de la relation fondamentale de la dynamique appliquée à m, montrer que le coefficient de réflexion r s'écrit $r = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2Z_c}$ et $Z_C^2 = T\mu$.

4- Monter que r s'écrit sous la forme : $r = -\frac{1}{1-2j\frac{Z_C}{m\omega}}$. Quelles sont ses valeurs quand $m = 0$ et $m \to \infty$. Expliquer.

7. 6. Solution de l'exercice d'application

1- $y_1(x,t)$ dans la région des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ dans le région des $x > 0$.

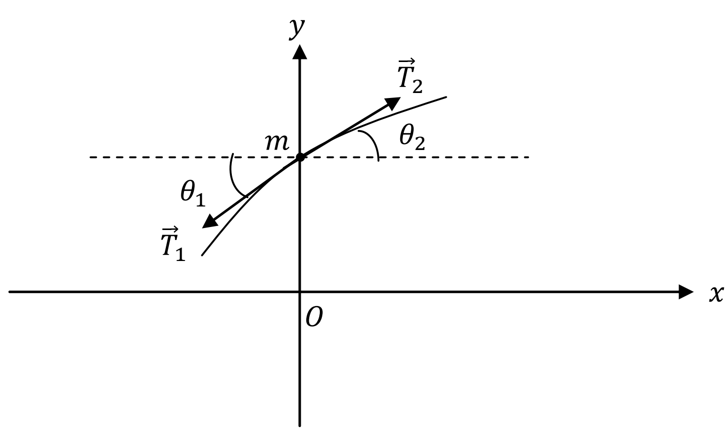


$y_1(x,t)$ est la superposition d'une onde incidente y_i et d'une onde réfléchie y_r :
$$y_1(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)} + B\, e^{j(\omega t + kx)}$$

$y_2(x,t)$ est l'onde transmise :
$$y_2(x,t) = C\, e^{j(\omega t - kx)}$$

où A, B et C sont les amplitudes des déplacements associés, respectivement, à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.

2- Montrons que la force transversale agissant sur la masse m est donnée par :
$$F_y(0,t) = T\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right]$$



RFD :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

Par projection selon y :

$$-T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 = m\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = m\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} \dots (1)$$

On étudie les petits déplacements :
$\theta_1 \ll 1$ et $\theta_2 \ll 1$:
d'où :

$$\sin\theta_1 \simeq \tan\theta_1 \simeq \frac{\partial y_1}{\partial x}$$

$$\sin\theta_2 \simeq \tan\theta_2 \simeq \frac{\partial y_2}{\partial x}$$

$$(1) \Rightarrow -T_1 \tan\theta_1 + T_2 \tan\theta_2 = m\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \Rightarrow -T_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + T_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} = m\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \dots (2)$$

Par projection selon x :

$-T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 = 0$ (pas de mouvement selon x).

On a : $\cos\theta_1 \simeq \cos\theta_2 = 1 \Rightarrow T_1 = T_2 = T$

d'où :

$$(2) \Rightarrow T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\right] = m\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

En $x = 0$:

$$T\left[\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}\right] = m\frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial t^2} = F_y(0,t)$$

donc :

$$F_y(0,t) = T\left[\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}\right]$$

3-

- Condition de continuité de y en $x = 0$:

$$y_1(0,t) = y_2(0,t) \Rightarrow A\,e^{j\omega t} + B\,e^{j\omega t} = C\,e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{A}{A} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A} \Rightarrow 1 + r = t \dots (1)$$

- Relation fondamentale de la dynamique appliquée à m :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Rightarrow F_y(0,t) = m\frac{\partial^2 y_2(0,t)}{\partial t^2} \Rightarrow T\left[\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}\right] = m\frac{\partial^2 y_2(0,t)}{\partial t^2}$$

On a :

$y_1(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)} + B\, e^{j(\omega t + kx)}$

$y_2(x,t) = C\, e^{j(\omega t - kx)}$

$\dfrac{\partial y_1(x,t)}{\partial x} = -Ajk\, e^{j(\omega t - kx)} + Bjk\, e^{j(\omega t + kx)} \Longrightarrow \dfrac{\partial y_1(0,t)}{\partial x} = -jAk\, e^{j\omega t} + jBk\, e^{j\omega t}$

$\dfrac{\partial y_2(x,t)}{\partial x} = -Cjk\, e^{j(\omega t - kx)} \Longrightarrow \dfrac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} = -jCk\, e^{j\omega t}$

$\dfrac{\partial y_2(x,t)}{\partial t} = j\omega C\, e^{j(\omega t - kx)}$

$\dfrac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 C\, e^{j(\omega t - kx)} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 y_2(0,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 C\ \ e^{j\omega t}$

d'où :

$T\big[-jCk\, e^{j\omega t} - jAk\, e^{j\omega t} + jBk\, e^{j\omega t}\big) = -m\omega^2 C\, e^{j\omega t} \Rightarrow Tjk(A - B - C) = -m\omega^2 C$
$\Longrightarrow m\omega^2 C = Tjk(C - A + B)$

En simplifiant par A :

$m\omega^2 \dfrac{C}{A} = Tjk\left(\dfrac{C}{A} - \dfrac{A}{A} + \dfrac{B}{A}\right) \Longrightarrow m\omega^2 t = Tjk(t - 1 + r) \ldots (2)$

- Montrons que le coefficient de réflexion r s'écrit $r = -\frac{jm\omega}{jm\omega + 2Z_c}$ et $Z_C^2 = T\mu$:

On a :
$1 + r = t \ldots (1)$
$m\omega^2 t = Tjk(t - 1 + r) \ldots (2)$

(1) dans (2) :
$m\omega^2(1 + r) = Tjk(1 + r - 1 + r) \Longrightarrow m\omega^2 + m\omega^2 r = 2Tjkr \Longrightarrow m\omega^2 = (-m\omega^2 + 2jTk)r$
$\Longrightarrow r = \dfrac{m\omega^2}{2jTk - m\omega^2}$

On a :
$k = \dfrac{\omega}{v}$

d'où :
$r = \dfrac{m\omega^2}{2jT\dfrac{\omega}{v} - m\omega^2} = \dfrac{m\omega}{2j\dfrac{T}{v} - m\omega} = \dfrac{-jm\omega}{2\dfrac{T}{v} + jm\omega}$

Sachant que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$$r = \frac{-jm\omega}{2\sqrt{\frac{T^2\mu}{T}} + jm\omega} = \frac{-jm\omega}{2\sqrt{T\mu} + jm\omega}$$

On a : $Z_C^2 = T\mu \Longrightarrow Z_C = \sqrt{T\mu}$

NB : Z_C c'est l'impédance caractéristique de la corde.

On aura :

$$r = \frac{-jm\omega}{2\,Z_C + jm\omega}$$

NB : On trouvera le même résultat en utilisant :

$$T\left[\frac{\partial y_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial y_1(0,t)}{\partial x}\right] = m\frac{\partial^2 y_1(0,t)}{\partial t^2}$$

4- Montrons que r s'écrit sous la forme :

$$r = -\frac{1}{1 - 2j\,\frac{Z_c}{m\omega}}$$

On a :

$$r = \frac{-jm\omega}{2\,Z_C + jm\omega} = \frac{-1}{\frac{2\,Z_C + jm\omega}{jm\omega}} = \frac{-1}{1 + \frac{2\,Z_C}{jm\omega}} = \frac{-1}{1 - 2j\,\frac{Z_c}{m\omega}}$$

Valeurs de r quand $m = 0$ et $m \to \infty$:

$m = 0$:

$$r \to \frac{-1}{1 - \infty} = 0$$

Pas de réflexion (transmission totale).
La masse n'existe pas. L'onde sera progressive.

$m \to \infty$

$$r \to \frac{-1}{1} = -1$$

Réflexion totale.
L'extrémité devient fixe. On aura une réflexion totale.

Chapitre 8 : Ondes acoustiques dans les fluides

8. 1. Introduction

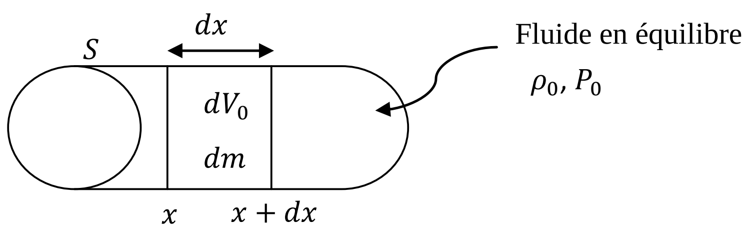
Une onde sonore correspond à la propagation d'une perturbation longitudinalement dans un milieu matériel, en transportant de l'énergie mais pas de la matière. La science qui étudie ces ondes s'appelle l'acoustique. Les ondes sonores ne se propagent pas dans le vide. Elles s'appuient nécessairement sur un milieu matériel quelle que soit son état (solide, liquide, gaz, plasma). Nous étudierons, dans ce chapitre, quelques propriétés des ondes sonores dans les fluides, comme l'aire ou l'eau.

Il est possible d'obtenir l'équation d'onde qui régit la propagation des ondes dans un fluide par la même démarche que celle utilisée pour établir l'équation de propagation des ondes transversales dans une corde.

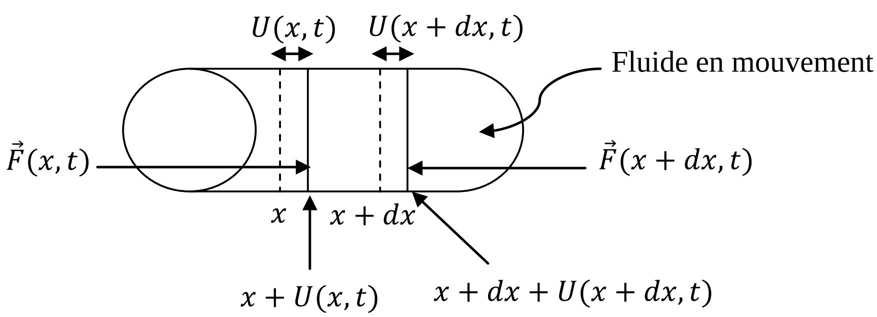
8. 2. Equation d'onde

8. 2. 1. Equation d'Euler

On considère un tuyau cylindrique de section S, rempli d'un fluide de densité ρ_0. Le fluide est en équilibre et sa pression est P_0. Etudions le mouvement longitudinal du fluide dû à la création d'une perturbation à l'entrée du tuyau. L'axe des x étant choisi parallèlement à l'axe du tuyau.



Afin de trouver l'équation de propagation, on applique la relation fondamentale de la dynamique sur un élément de volume de fluide d'épaisseur infinitésimale dx et de masse dm, située entre x et $x + dx$.



Soient $U(x,t)$ le déplacement longitudinal à l'instant t du plan d'abscisse x, et $\vec{F}(x,t)$ et $\vec{F}(x + dx, t)$ les forces agissant sur la tranche de fluide respectivement en x et $x + dx$.

$$\sum \vec{F}_{ext} = dm\,\vec{a} \Longrightarrow \vec{F}(x,t) + \vec{F}(x + dx, t) = dm\,\vec{a}$$

Par projection selon l'axe Ox :

$$F(x,t) - F(x + dx, t) = dm\,\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$$

On a :

$P(x,t) = \frac{F(x,t)}{S}$

$P(x+dx,t) = \frac{F(x+dx,t)}{S}$

d'où :

$S[P(x,t) - P(x+dx,t)] = dm \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x,t)$, on obtient :

$P(x+dx,t) - P(x,t) = \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} dx$

d'où :

$-S \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} dx = dm \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$

On a une conservation de la masse dans l'élément fluide, donc :
$dm = \rho_0 dV_0 = \rho_0 S\, dx$

donc :

$-S \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} dx = \rho_0 S\, \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} dx \Longrightarrow \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$

- **Approximation acoustique**

Dans cette approximation, la pression acoustique et la masse volumique sont très faibles :
$P(x,t) = P_0 + p(x,t),\, p(x,t) \ll P_0$
$\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t),\, \mu(x,t) \ll \rho_0$

avec :

$P(x,t)$: pression instantanée en un point quelconque.

$p(x,t)$: pression acoustique (surpression), autrement dit, la variation de la pression.

$\mu(x,t)$: variation de la masse volumique.

Comme $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$
On aura :

$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}$ ... (1)
C'est l'équation d'Euler.

8. 2. 2. Equation de conservation de la masse

L'écoulement d'un fluide doit être tel qu'il conserve la masse. On peut considérer alors l'évolution de la masse de fluide contenue dans un élément de volume fixe infinitésimal, pendant un intervalle de temps infinitésimal. Par un raisonnement analogue à celui de la sous-section 8. 2. 1, on obtient l'équation locale de la conservation de la masse :

$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(x,t)\, v(x,t)]}{\partial x} = 0$ ... (2)

Cette équation stipule que la variation de la masse dans l'élément infinitésimal est égale à la différence entre la *masse entrante* et la *masse sortante*. La quantité $\rho(x,t)\, v(x,t)$, qui a la dimension d'une masse par unité de surface et par unité de temps, est identifiée avec le *flux de masse* de fluide à travers une section transverse du tuyau.

- **Démonstration**

La variation de masse pendant dt due à l'écoulement est donnée par la somme des flux de masse entrants à travers les deux faces pendant cet intervalle de temps.

On a :
$dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dx = \rho\, S\, v\, dt$

Considérons la face située en x. Pendant un intervalle de temps dt la masse de fluide entrant par cette face est donnée par :

$$dm_{|x} = \rho(x,t) \underbrace{S\, v(x,t) dt}_{\text{volume de fluide entrant pendant } dt}$$

De même, la masse entrant par la face située en $x + dx$ est donnée par :

$$dm_{|x+dx} = -\,\rho(x+dx,t)\, S\, v(x+dx,t) dt$$

NB : Le signe négatif est nécessaire pour prendre en compte le fluide entrant par cette face qui se déplace vers les x décroissants.

Additionnant également les contributions des autres faces nous obtenons pour la variation de la masse pendant dt :

$$S\, \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\, dx\, dt = [\rho(x,t)\, v(x,t) - \rho(x+dx,t)\, v(x+dx,t]\, S\, dt \simeq -\frac{\partial[\rho(x,t)\, v(x,t)]}{\partial x} dx$$

Car on :
$$\rho(x+dx,t)\, v(x+dx,t) - \rho(x,t)\, v(x,t) = \frac{\partial[\rho(x,t)\, v(x,t)]}{\partial x} dx$$

Nous obtenons finalement l'équation locale de la conservation de la masse : équation (2).

NB : Les équations fondamentales de la dynamique du fluide (1) et (2), ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement le fluide. La première fait intervenir la pression et la seconde fait intervenir la densité. Pour obtenir une caractérisation complète du système il faut introduire une équation d'état liant la pression, la densité et la température du fluide.

8. 2. 3. Equation d'état

On introduit une relation thermodynamique qui définit le coefficient de compressibilité adiabatique d'un fluide :
$$\chi = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)$$
où :
χ est le coefficient de compressibilité.
K module de compressibilité.
dV variation de volume.

dP variation de pression.
Dans notre cas, pour un élément de fluide :
$$\chi = \frac{1}{K} = -\frac{1}{dV_0}\left(\frac{dV - dV_0}{P - P_0}\right)$$

A l'équilibre, on a : $dV_0 = S\,dx$

En mouvement :
$$\begin{aligned} dV &= S\big[x + dx + U(x+dx,t) - \big(x + U(x,t)\big)\big] \\ &= S\,[dx + U(x+dx,t) - U(x,t)] \\ &= S\,dx + S[U(x+dx,t) - U(x,t)] \end{aligned}$$

De nouveau, un développement en série de Taylor au premier ordre permet d'écrire :
$$U(x+dx,t) - U(x,t) = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dx$$

d'où :
$$dV = S\,dx + S\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dx \Rightarrow\ dV = dV_0 + \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dV_0\ \Rightarrow dV - dV_0 = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}dV_0$$

$$\Rightarrow \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

et on a : $P = P_0 + p(x,t) \Rightarrow P - P_0 = p(x,t)$

d'où :
$$\chi = \frac{1}{K} = -\frac{1}{P - P_0}\left(\frac{dV - dV_0}{dV_0}\right) = -\frac{1}{p(x,t)}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Rightarrow p(x,t)\chi = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{p(x,t)}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \Rightarrow p(x,t) = -K\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$$

donc :
$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -K\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \ldots (3)$$

8. 2. 4. Equation de d'Alembert

- **Equation en pression**

Une onde sonore de faible amplitude à une dimension, dans un fluide au repos, est caractérisée par les trois équations fondamentales d'Euler, de conservation de la masse et d'état :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \ldots (1) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \ldots (a)$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial[\rho(x,t)\,v(x,t)]}{\partial x} = 0 \ldots (2) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \ldots (b)$$

$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = -K\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \dots (3) \Rightarrow \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \dots (c)$$

Dérivons l'équation (c) une fois par rapport au temps. Au premier ordre, nous obtenons la relation :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)$$

En utilisant l'équation (a), on aura :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right)$$

Soit finalement :

$$\rho_0\chi\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

C'est l'équation de d'Alembert à une dimension, pour la surpression. La célérité des ondes sonores ou vitesse du son, est alors identifiée comme :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}}$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation précédente comme :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

- **Equation en vitesse**

Considérons maintenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (a) :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$$

En utilisant l'équation (c) on obtient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\chi}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)$$

Soit finalement :

$$\rho_0\chi\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Comme :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}}$$

On aura :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Nous remarquons que $v(x,t)$ satisfait également l'équation d'onde.

8. 3. Vitesse de propagation

Le phénomène de propagation étant un processus adiabatique, la relation liant la pression et le volume est :

PV^{γ} = constante

avec

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

où : C_p : chaleur spécifique à pression constante.
C_v : chaleur spécifique à volume constant.
En calculant la différentielle :
$d(PV^\gamma) = 0 \Rightarrow V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1}dV = 0$

Au voisinage de l'équilibre : $V \approx V_0$ et $P \approx P_0$

d'où :

$$V_0{}^\gamma dP + \gamma P_0 V_0{}^{\gamma-1}dV = 0 \Rightarrow dP + \frac{\gamma P_0}{V_0^\gamma}V_0^{\gamma-1}dV = 0 \Rightarrow dP + \frac{\gamma P_0}{V_0}dV = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{dP}_{\text{variation de pression}} = -\gamma P_0 \underbrace{\frac{dV}{V_0}}_{\text{dilatation volumique}} \Rightarrow dP\, V_0 = -\gamma P_0 dV \Rightarrow \frac{dP}{dV} = -\frac{\gamma P_0}{V_0}$$

En tenant compte de la définition du module de compressibilité, on obtient :

$$\chi = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)$$

A l'équilibre : $V \approx V_0$

$$\chi = \frac{1}{K} = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{dV}{dP}\right) = -\frac{1}{V_0}\left(-\frac{V_0}{\gamma P_0}\right) = \frac{1}{\gamma P_0}$$

Donc, la vitesse du son dans un fluide est donnée par :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \frac{1}{\gamma P_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

NB : La valeur de la pression à l'équilibre dépend fortement de la température. Pour une mole de gaz parfait, on a :

$$P_0 V_0 = RT \Rightarrow P_0 = \frac{RT}{V_0}$$

où : R est la constante des gaz parfaits.

On aura

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{V_0 \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Tel que : $V_0 \rho_0$ représente la masse volumique M du gaz.
NB : Dans un gaz parfait, le vitesse de propagation du son est proportionnelle à la racine carrée de la température mesurée en kelvin (K).

- **Exemple de vitesse de son**

La vitesse de propagation des ondes acoustiques dépend de deux paramètres : la masse volumique et la compressibilité du fluide à l'équilibre. Dans l'eau, la masse volumique est $\rho_0 = 10^3\ kg.m^{-3}$ et la compressibilité $\chi = 4.6\ 10^{-10}\ Pa^{-1}$, ce qui donne une vitesse du son d'environs $1500\ m.s^{-1}$. Dans l'air, la vitesse du son est proche de $340\ m.s^{-1}$.

8. 4. Onde progressive sinusoïdale

Considérons la propagation d'une onde progressive sinusoïdale dans le sens des x croissants. La pression acoustique est donnée par :

$$p(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$$

On définit le module du vecteur d'onde k par $k = \omega/v$

d'où :

$$p(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

En notation complexe, l'onde progressive sinusoïdale s'écrit :

$$p(x,t) = A\ e^{j(\omega t - kx)}$$

D'après l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\int \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\ dt$$

On a :

$$p(x,t) = A\ e^{j(\omega t - kx)} \Longrightarrow \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -jkA\ e^{j(\omega t - kx)}$$

d'où :

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}(-jkA)\int\ e^{j(\omega t - kx)}\ dt = \frac{jkA}{\rho}\frac{1}{j\omega}e^{j(\omega t - kx)}$$

On a :

$$k = \frac{\omega}{v} \Longrightarrow \omega = k.v$$

On aura :

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \frac{A}{\rho v}e^{j(\omega t - kx)}$$

d'où :

$$\dot{U}(x,t) = \frac{1}{\rho v}A\ e^{j(\omega t - kx)}$$

C'est l'expression de la vitesse de particules.

On constate que pour une onde progressive, la vitesse de particules est en phase avec la pression acoustique.

8. 5. Réflexion –Transmission

8. 5. 1. Impédance acoustique

L'impédance acoustique d'un fluide à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit :

- Dans un fluide illimité

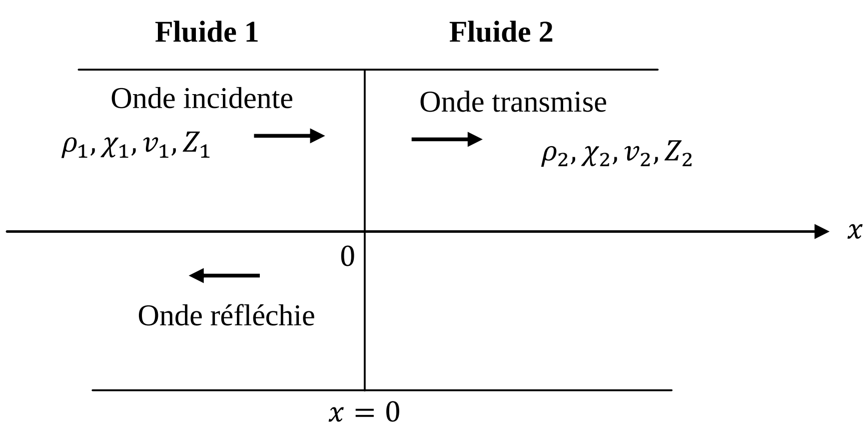
$$Z(x) = \frac{p(x,t)}{\dot{U}(x,t)}$$

- Dans un tuyau, de section S et contenant un fluide :

$$Z(x) = \frac{p(x,t)}{S\,\dot{U}(x,t)}$$

$S\,\dot{U}(x,t)$ est le débit acoustique.

8. 5. 2. Cas de deux fluides semi-infinis



Interface (jonction)

Une onde incidente sinusoïdale, $p_i(x,t)$, de pulsation ω et d'amplitude A arrive de $-\infty$ et se propage dans le sens des x croissants.

- **Expressions des pressions acoustiques et des vitesses**

  - **Fluide 1 :**

Onde incidente :

$$p_i(x,t) = A\, e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

avec :

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

et

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_1}}$$

Onde réfléchie :

$$p_r(x,t) = B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

d'où :

$$p_1(x,t) = p_i(x,t) + p_r(x,t) = A\, e^{j(\omega t - k_1 x)} + B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

- Expression de la vitesse
On a l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} = -\rho_1 \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 U_1(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\int \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} dt$$

$$\Rightarrow \dot{U}_1(x,t) = -\frac{1}{\rho_1}\int \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} dt$$
$$\Rightarrow \dot{U}_1(x,t) = -\frac{1}{\rho_1}\int \frac{\partial}{\partial x}\left[A\, e^{j(\omega t - k_1 x)} + B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}\right] dt = \frac{k_1}{\rho_1 \omega}\left[A\, e^{j(\omega t - k_1 x)} - B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}\right]$$
$$\Rightarrow \dot{U}_1(x,t) = \frac{1}{\rho_1 v_1}\left[A\, e^{j(\omega t - k_1 x)} - B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}\right]$$

- **Fluide 2**

Onde transmise :
$p_t(x,t) = C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}$

avec
$k_2 = \frac{\omega}{v_2}$
et
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_2 \chi_2}}$

d'où :
$p_2(x,t) = p_t(x,t) = C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}$

- Expression de la vitesse
On a l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} = -\rho_2 \frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 U_2(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\int \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} dt$$

$$\Rightarrow \dot{U}_2(x,t) = -\frac{1}{\rho_2}\int \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} dt$$
$$\Rightarrow \dot{U}_2(x,t) = -\frac{1}{\rho_2}\int \frac{\partial}{\partial x}\left[C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}\right] dt = \frac{k_2}{\rho_2 \omega}\left[C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}\right]$$
$$\Rightarrow \dot{U}_2(x,t) = \frac{1}{\rho_2 v_2}\left[C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}\right]$$

- **Coefficients de réflexion et de transmission**

Condition de continuité à l'interface en $x = 0$:
- Continuité de pression acoustique :
$p_1(0,t) = p_2(0,t) \Rightarrow A + B = C \ldots (4)$
- Continuité de débit acoustique :
$S_1\, \dot{U}_1(0,t) = S_2\, \dot{U}_2(0,t)$
Dans notre cas : $S_1 = S_2 = S$

d'où :

$$\frac{S}{\rho_1 v_1}(A-B) = \frac{S}{\rho_2 v_2} C \Rightarrow \frac{1}{Z_1}(A-B) = \frac{1}{Z_2} C \ldots (5)$$

avec :

$Z_1 = \frac{\rho_1 v_1}{S}$: impédance acoustique du fluide 1.

$Z_2 = \frac{\rho_2 v_2}{S}$: impédance acoustique du fluide 2.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en pression acoustique par :

$$r_p = \frac{B\, e^{j(\omega t + k_1 x)}}{A\, e^{j(\omega t - k_1 x)}}\Big|_{x=0} = \frac{B}{A}$$

$$t_p = \frac{C\, e^{j(\omega t - k_2 x)}}{A\, e^{j(\omega t - k_1 x)}}\Big|_{x=0} = \frac{C}{A}$$

A partir des équations (4) et (5), on a :

$$A + B = C$$

$$\frac{1}{Z_1}(A-B) = \frac{1}{Z_2} C$$

d'où :

$$\frac{1}{Z_1}(A-B) = \frac{1}{Z_2}(A+B) \Rightarrow A\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}\right) = B\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$$

$$r_p = \frac{B}{A} = \frac{\left(\frac{1}{Z_1} - \frac{1}{Z_2}\right)}{\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)}$$

$$\Rightarrow r_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$A + B = C \Rightarrow B = C - A$$

$$\frac{1}{Z_1}(A-B) = \frac{1}{Z_2} C \Rightarrow \frac{1}{Z_1}(A - C + A) = \frac{1}{Z_2} C \Rightarrow 2A = C Z_1 \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)$$

$$t_p = \frac{C}{A} = \frac{2}{Z_1\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)}$$

$$\Rightarrow t_p = \frac{2\, Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

8. 6. Enoncés des exercices

Exercice 1

Dans les conditions normale de température et de pression, l'air est caractérisé par une masse volumique à l'équilibre $\rho = 1.21\ kg.m^{-3}$ et une valeur de $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.402$.

1- Calculer la vitesse de propagation du son dans l'air et son impédance acoustique spécifique dans ces conditions de température et de pression ($T = 20\ °C$ et $P_0 = 10^5\ N.m^{-2}$).

Exercice 2

(Ondes longitudinales dans un tuyau sonore)

Dans un tuyau sonore de section S et d'axe $x'Ox$, contenant un fluide de densité ρ, on considère une première onde acoustique, plane, sinusoïdale, de pulsation ω et de nombre d'onde k, se propageant dans le sens des x croissants. L'élongation de cette onde est donnée par : $u(x,t) = a\, e^{j(\omega t - kx)}$, $a \in C$.

1- Rappeler l'expression de l'équation de propagation des ondes acoustiques pour $u(x,t)$. En déduire la relation entre ω et k.

2- Déterminer la vitesse $\dot{u}(x,t)$ et la surpression $p(x,t)$. En déduire l'impédance acoustique caractéristique $\left(z_c = \frac{pression}{débit}\right)$.

3- Même question qu'en 2 pour une onde acoustique se propageant dans le sens des x décroissants de même pulsation et d'amplitude complexe b.

4- On considère maintenant la superposition des deux ondes précédentes. Calculer la vitesse résultante des particules ainsi que la surpression $p(x,t)$. En déduire l'impédance au point x.

8. 7. Solution des exercices

Exercice 1

1- La vitesse du son dans l'air :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

On a :

$$\rho = \frac{M}{V} \Longrightarrow \rho V = M$$

d'où :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\rho V}}$$

Pour une mole :

$$PV = RT \Longrightarrow P = \frac{RT}{V}$$

d'où :

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

AN :

$$v = \sqrt{\frac{1.402 \times 10^5}{1.21}} = 340.4\, m.s^{-1}$$

- Impédance acoustique :

L'aire est un fluide illimité donc :

$$Z = \frac{p(x,t)}{\dot{U}(x,t)}$$

D'après l'équation d'Euler

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\int \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} dt$$

On a :

$$p(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)} \Longrightarrow \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -jkA\, e^{j(\omega t - kx)}$$

d'où :

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}(-jkA)\int e^{j(\omega t - kx)}\, dt = \frac{jkA}{\rho}\frac{1}{j\omega} e^{j(\omega t - kx)}$$

On a :

$$k = \frac{\omega}{v} \Longrightarrow \omega = kv$$

d'où :

$\dot{U}(x,t) = \frac{1}{\rho v}\, A\, e^{j(\omega t - kx)}$: vitesse de particules

$$Z = \frac{p(x,t)}{\dot{U}(x,t)} = \frac{A\, e^{j(\omega t - kx)}}{\frac{1}{\rho v}\, A\, e^{j(\omega t - kx)}} = \rho v$$

AN : $Z = 1.21 \times 340.4 = 411.9\ Pa.s.m^{-1}$

NB : L'unité de l'impédance acoustique est $(Pa.s.m^{-1})$, souvent appelé le rayl.

Exercice 2

1- Expression de l'équation de propagation des ondes acoustiques pour $u(x,t)$:
On a l'équation d'Euler

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \ldots (1)$$

et on a :

$$p(x,t) = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \ldots (2)$$

On dérive l'équation (2) par rapport à x, on obtient :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ldots (3)$$

$$(1) = (3) \Longrightarrow -\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\chi}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

On a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}} \Longrightarrow \frac{1}{\rho\chi} = v^2$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

C'est l'équation de propagation des ondes pour $u(x,t)$.

- Déduction de la relation entre ω et k :

On a : $u(x,t) = a\, e^{j(\omega t - kx)}$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -jka\, e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 a\, e^{j(\omega t - kx)} = -k^2 u(x,t)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = j\omega a\, e^{j(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 a\, e^{j(\omega t - kx)} = -\omega^2 u(x,t)$$

d'où :

$$-k^2 u(x,t) = \frac{1}{v^2}(-\omega^2) u(x,t) \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k}$$

C'est la vitesse de propagation de l'onde.

2- Vitesse $\dot{u}(x,t)$:

$$\dot{u}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = j\omega a\, e^{j(\omega t - kx)} = j\omega u(x,t)$$

Surpression $p(x,t)$:

D'après l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow p(x,t) = -\rho \int \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx$$

On a :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 a\, e^{j(\omega t - kx)}$$

d'où :

$$p(x,t) = \rho\, \omega^2 a \int e^{j(\omega t - kx)} dx = -\frac{\rho\, \omega^2 a}{jk} e^{j(\omega t - kx)} = -\frac{\rho\, \omega^2 a}{jk} u(x,t)$$

Comme

$$k = \frac{\omega}{v}$$

donc :

$$p(x,t) = j\rho\omega v\, u(x,t)$$

- Impédance acoustique caractéristique :

En l'absence d'onde réfléchie :

$$z_c = \frac{p(x,t)}{S\, \dot{u}(x,t)} = \frac{j\rho\omega v\, u(x,t)}{S j\omega u(x,t)} = \frac{\rho v}{S}$$

3- Soit $u'(x,t)$ l'onde réfléchie : $u'(x,t) = b\, e^{j(\omega t+kx)}$
Vitesse $\dot{u}'(x,t)$:
$$\dot{u}'(x,t) = \frac{\partial u'(x,t)}{\partial t} = j\omega b\, e^{j(\omega t+kx)} = j\omega u'(x,t)$$

Surpression $p'(x,t)$:
D'après l'équation d'Euler :
$$\frac{\partial p'(x,t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u'(x,t)}{\partial t^2} \Longrightarrow p'(x,t) = -\rho \int \frac{\partial^2 u'(x,t)}{\partial t^2} dx$$
On a :
$$\frac{\partial^2 u'(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 b\, e^{j(\omega t+kx)}$$

d'où :
$$p'(x,t) = \rho\, \omega^2 b \int e^{j(\omega t+kx)} dx = \frac{\rho\, \omega^2 b}{jk} e^{j(\omega t+kx)} = \frac{\rho\, \omega^2 b}{jk} u'(x,t)$$
Comme
$$k = \frac{\omega}{v}$$

donc :
$$p'^{(x,t)} = -j\rho\omega v\, u'(x,t)$$

4- Vitesse résultante des particules ainsi que la surpression $p(x,t)$:

Le déplacement total est :
$$U(x,t) = u(x,t) + u'(x,t) = a\, e^{j(\omega t-kx)} + \mathrm{b}\, e^{j(\omega t+kx)} = e^{j\omega t}\left(a\, e^{-jkx} + b\, e^{jkx}\right)$$

Vitesse totale :
$$\dot{U}(x,t) = \dot{u}(x,t) + \dot{u}'(x,t) = j\omega\, u(x,t) + j\omega\, u'(x,t) = j\omega[u(x,t) + u'(x,t)] = j\omega U(x,t)$$

Surpression totale :
$$P(x,t) = p(x,t) + p'(x,t) = j\rho\omega v u(x,t) - j\rho\omega v u'(x,t) = j\rho\omega v e^{j\omega t}\left(a\, e^{-jkx} - b\, e^{jkx}\right)$$

- Impédance au point x
$$Z(x) = \frac{P(x,t)}{S\, \dot{U}(x,t)} = \frac{j\rho\omega v e^{j\omega t}\left(a\, e^{-jkx} - b\, e^{jkx}\right)}{Sj\omega e^{j\omega t}(a\, e^{-jkx} + b\, e^{jkx})}$$

On a :
$$z_c = \frac{\rho v}{S}$$

d'où :
$$Z(x) = z_c \left(\frac{a\, e^{-jkx} - b\, e^{jkx}}{a\, e^{-jkx} + b\, e^{jkx}}\right)$$

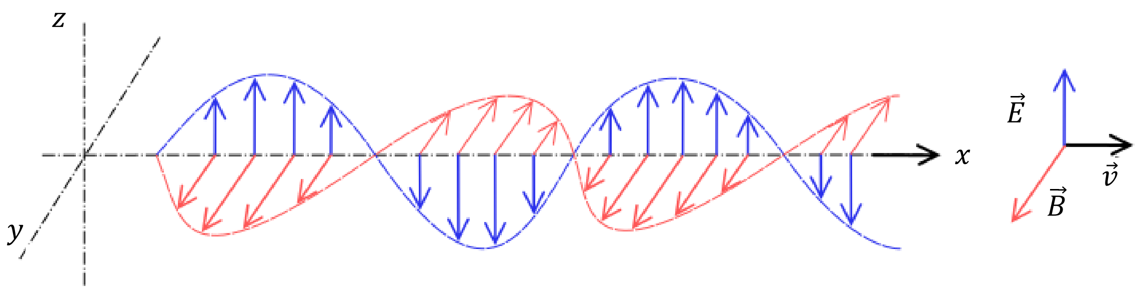
Chapitre 9 : Ondes électromagnétiques

9. 1. Introduction

Les ondes électromagnétiques, contrairement aux ondes mécaniques, n'ont pas besoin d'un support matériel pour se déplacer. Selon leur longueur et leur fréquence, les ondes électromagnétiques se classent en différentes catégories. Celles qui sont les plus connues sont celles de la lumière visible puisqu'elles sont perceptibles par l'œil, mais il existe aussi d'autres formes de rayonnements que l'œil ne peut pas percevoir.

Les longueurs d'onde des rayons électromagnétiques varient entre $0.001\ nm$ et $100\ m$. Les types d'ondes électromagnétiques sont les suivants : ondes radio, micro-ondes, rayons infrarouge, lumière visible, rayons ultraviolets, rayons X, rayons gamma.

Une onde électromagnétique comporte à la fois un champ électrique et un champ magnétique oscillant à la même fréquence. Ces deux champs, perpendiculaires l'un par rapport à l'autre se propagent dans un milieu selon une direction orthogonale (figure ci-dessous). La propagation de ces ondes s'effectue à une vitesse qui dépend du milieu considéré.



Les variations des champs électriques et magnétiques sont liées par les équations de Maxwell.

9. 2. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell, reliant entre eux les phénomènes électriques et magnétiques non stationnaires, s'écrivent :

Théorème de Gauss : $\vec{\nabla}\,\vec{D} = \rho$ ... (1)

Conservation du flux magnétique : $\vec{\nabla}\,\vec{B} = 0$ ... (2)

Théorème de Maxwell Faraday : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ... (3)

Théorème d'Ampère Maxwell : $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ... (4)

où :

$\vec{E}(\vec{r}, t)$: champ électrique variable dans le temps et dans l'espace.

$\vec{D}(\vec{r}, t)$: induction électrique variable dans le temps et dans l'espace.

$\vec{H}(\vec{r}, t)$: champ magnétique variable dans le temps et dans l'espace.

$\vec{B}(\vec{r}, t)$: induction magnétique variable dans le temps et dans l'espace.

$\vec{J}$: vecteur densité de courant de conduction.

ρ : densité de charges électriques.

Les équations (3) et (4) montrent qu'un champ magnétique non stationnaire crée un champ électrique et inversement. Un champ électrique variable, dans le temps crée un champ magnétique.

Ainsi l'existence de l'un implique nécessairement celle de l'autre. L'ensemble de ces deux champs variables dans le temps constitue le champ électromagnétique.

Aux équations de Maxwell, il faut ajouter les équations matérielles qui font intervenir les propriétés du milieu :

$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \dots (5)$
$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \dots (6)$
$\vec{J} = \gamma\,\vec{E} \dots (7)$

ε : permittivité absolue du milieu.
μ : perméabilité absolue du milieu.
γ : conductivité du milieu.

On définit aussi les quantités relatives ε_r et μ_r telles que $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0\mu_r$, où :
ε_0 est la permittivité qui caractérise le vide, $\varepsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}\ C^2/N.m^2$,
μ_0 est la perméabilité qui caractérise le vide, $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H/m$.

NB : Pour un diélectrique parfait $\mu_r \simeq 1$.
Un diélectrique parfait est un milieu qui ne comporte aucune charge $(\rho = 0)$ et n'est le siège d'aucun courant de conduction $\left(\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$.

9. 3. Equation des ondes électromagnétiques
Une simple manipulation des équations (3) et (4) montre que dans un diélectrique parfait, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ obéissent aux équations différentielles :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2\vec{E} \dots (8)$$
et
$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2\vec{H} \dots (9)$$

C'est l'équation d'une onde qui se propage à la vitesse $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. Dans le vide, la vitesse de propagation est $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \times 10^8\ m.s^{-1}$. Le rapport $n = c/v$ est l'indice du milieu.

Démonstration

$$(3) \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}\right) \dots (10)$$
$$(4) \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On a :
$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$$
et
$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

d'où :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{1}{\mu}\vec{B} = \frac{\partial(\varepsilon\,\vec{E})}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu\varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \dots (11)$$

En introduisant l'équation (11) dans (10), on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \dots (12)$$

On sait que :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

d'où :

$$(12) \Rightarrow -\nabla^2\vec{E} = -\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{E}$$

Pourquoi $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{E}\right) = 0$?

On a $\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D}$

d'où : $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}.\vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ car $\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$

$\rho = 0$ dans un diélectrique parfait, donc $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$.

$$(4) \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{D}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}\right) \dots (13)$$

En introduisant l'équation (3) dans (13), on obtient :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \dots (14)$$

On sait que :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{H}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{H}\right) - \nabla^2\vec{H} = -\nabla^2\vec{H}$$

d'où :

$$(14) \Rightarrow -\nabla^2\vec{H} = -\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

Comme $\vec{B} = \mu\,\vec{H}$

On aura :

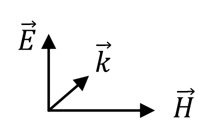
$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\vec{H}$$

Pourquoi $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{H}\right) = 0$?

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$$

$\vec{\nabla}.\vec{H} = \vec{\nabla}.\frac{\vec{B}}{\mu} = 0$ car $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$

9. 4. Ondes sinusoïdales planes



Une des solutions des équations (8) et (9) est l'onde sinusoïdale :

$\vec{E} = \vec{E}_0\,e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}$, $\vec{H} = \vec{H}_0\,e^{j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)}$

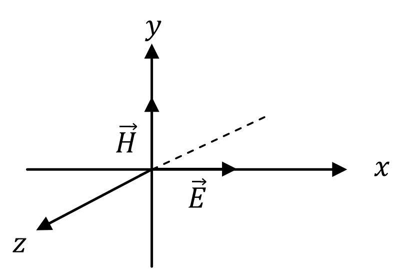
$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ est le vecteur d'onde, il donne la direction de propagation, ω est la pulsation, λ est la longueur d'onde.
$\vec{n}$: vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde.

Dans ce cas, l'onde est transversale et les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct.

Démonstration
Considérons l'onde sinusoïdale progressive dont les champs ont pour expressions :
$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$, $\vec{B} = \vec{B}_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$
Les champs ne dépendent des coordonnées que par le terme
$\vec{k}.\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
On aura donc $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = ik_x\vec{E}$ soit $\frac{\partial}{\partial x} = ik_x$ et, de même, $\frac{\partial}{\partial y} = ik_y$, $\frac{\partial}{\partial z} = ik_z$
De sorte que l'opérateur $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ s'écrira dons ce cas : $\vec{\nabla} = i\vec{k}$
Les équations de Maxwell :
$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$
$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
Deviennent alors :
$\vec{k}.\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{E}$ est transversal
$\vec{k}.\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \Rightarrow \vec{B}$ est transversal
$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \vec{B} \perp (\vec{k}, \vec{E})$$
$$\vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\omega\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{B})$$
Ces expression mettent en évidence le caractère transversal de l'onde, et montrent que $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct.

9. 5. Polarisation rectiligne

Si au cours de la propagation les directions des vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$ restent inchangés ($\vec{E}$ vibre selon l'axe x et $\vec{H}$ selon l'axe y), alors l'onde est dite à polarisation rectiligne.



Polarisation rectiligne ($\vec{E}$ et $\vec{H}$ décrivent des segments de droite).

NB : Dans le cas d'une onde sinusoïdale plane à polarisation rectiligne, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ vibrent en phase et sont reliés par la relation :

$$H\sqrt{\mu_0\mu_r} = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r} \ldots (15).$$

Il existe d'autre types de polarisations : polarisations elliptique et circulaire (les extrémités de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ décrivent respectivement des ellipses et cercles, dans le plan xOy).

9. 6. Energie

Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. L'énergie transportée par unité de volume (densité d'énergie) est donnée par :

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 + \mu_0\mu_r H^2) \ldots (16)$$

On définit aussi le vecteur de Poynting $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ qui représente le flux de puissance par unité de surface ; c'est à dire l'énergie qui traverse une unité de surface par seconde : c'est l'intensité de l'onde.

Dans le cas d'une onde plane à polarisation rectiligne :

$$\mu_0\mu_r H^2 = \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 \ldots (17)$$

D'autre part

$$\vec{E} \perp \vec{H} \Rightarrow |\vec{P}| = |\vec{E} \wedge \vec{H}| = E.H = E^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}} \ldots (18)$$

9.7. Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont les conditions de continuité des champs à la limite de séparation de deux milieux caractérisés par des constantes ε_1, ε_2, μ_1, μ_2 différentes.

Certaines composantes sont continues, d'autres présentent une discontinuité sur les surfaces de séparation (S) lorsqu'elles comportent des charges superficielles ou des courants superficiels.

Ces conditions aux limites, qui permettent de trouver le comportement des ondes à la limite de deux milieux, se démontrent à partir des formes intégrales des équations de Maxwell généralisées (indépendantes du milieu) : on calcule la circulation du champ sur un contour ayant deux côtés parallèles à la surface (S) et deux côtés orthogonaux, ou son flux à travers une surface fermée dont les bases sont parallèles à (S) et la surface latérale orthogonale à (S).

9. 7. 1. Conditions aux limites pour $\vec{D}$ et $\vec{E}$

Le théorème de Gauss donne

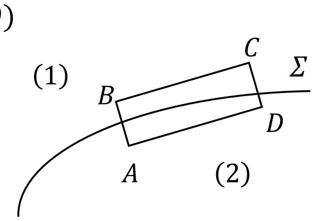
$$\int_S \vec{D}\, d\vec{S} = q$$

q est la charge électrique entourée par la surface S.

Si l'on applique cette loi au contour $ABCD$ entourant un élément de surface Σ séparant deux milieux 1 et 2 et contenant une densité de charge σ, on aboutit à la condition :

$$(D_N)_2 - (D_N)_1 = \sigma \ldots (19)$$

où D_N est la composante normale à Σ.



A la traversée d'une surface de séparation chargée, la composante normale du vecteur induction électrique subit une discontinuité égale à la densité de charges superficielle.

Le théorème de la circulation de $\vec{E}$: $\oint \vec{E}.d\vec{l} = 0$ qui traduit que le travail des forces électriques le long d'un circuit fermé est nul, dans le cas appliqué au parcours $ABCDA$ mène à :

$$(E_T)_2 - (E_T)_1 = 0 \ldots (20)$$

La composante tangentielle de $\vec{E}$ est conservée à la traversée de la surface de séparation de deux milieux différents.

9. 7. 2. Conditions aux limites pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ Le flux magnétique à travers une surface quelconque fermée est nul. Il en résulte qu'*à la traversée d'une surface de séparation de deux milieux différents, la composante normale du vecteur induction magnétique est conservée :*

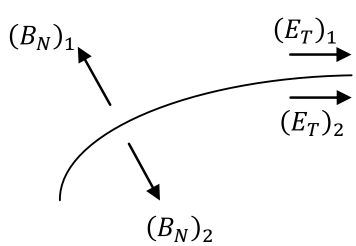
$$(B_N)_2 = (B_N)_1 \ldots (21)$$

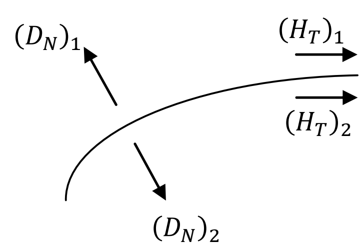
La loi des courants de conduction $\oint \vec{H}.d\vec{l} = \vec{J}$ où $\vec{J}$ est le vecteur densité de courant entouré par le circuit fermé l, se traduit par *une discontinuité de la composante parallèle de H à la traversée de la surface de séparation de deux milieux différents :*

$$(H_T)_2 - (H_T)_1 = j \ldots (22)$$

où j est la composante de $\vec{J}$ normale à la surface entourée par l.

En résumé, les conditions aux limites sont :





$(E_T)_2 = (E_T)_1$
$(B_N)_2 = (B_N)_1$

Continuité

$(D_N)_2 - (D_N)_1 = \sigma$
$(H_T)_2 - (H_T)_1 = j$

Discontinuité

9. 8. Réflexion et transmission sur un diélectrique

9. 8. 1. Définition

Un diélectrique est une substance non conductrice d'électricité. Elle est dépourvue de charges libres et de courant de conduction. Nous aurons, dans les conditions aux limites développées ci-dessus : $\sigma = 0$ et $J = 0$.

Alors, on aura :

- Continuité de $\vec{E}_T$ et $\vec{D}_N$.
- Continuité de $\vec{B}_N$ et $\vec{H}_T$.

9. 8. 2. Onde plane à polarisation rectiligne sous incidence quelconque

On se propose d'étudier la transmission et la réflexion d'une onde plane sur une surface de séparation (S) de deux milieux isotropes d'indices de réfraction n_1 et n_2, de perméabilités $\mu_1$et μ_2.

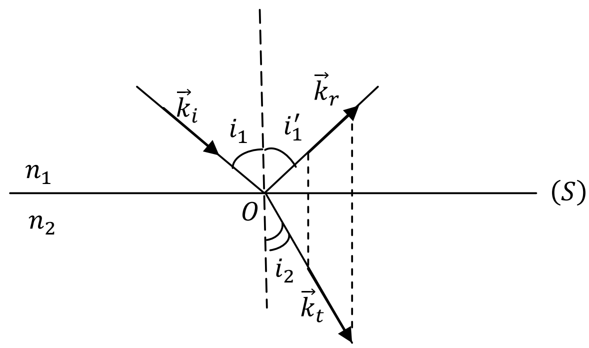
Le résultat dépend de l'état de polarisation de l'onde incidente qui peut toujours se décomposer en deux ondes polarisées rectilignement : une onde dont le champ électrique $\vec{E}$ est parallèle au plan d'incidence et une onde dont le champ $\vec{E}$ est normal au plan d'incidence.

Pour ces deux ondes, les coefficients de transmission t et de réflexion r sont les rapports des amplitudes complexes des champs transmis et réfléchis à celle du champ incident.

- **Rappel**

Lois de Descartes

Soit une onde incidente sous la forme :
$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$



Loi de réflexion : $i_1 = i'_1$
Loi de réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

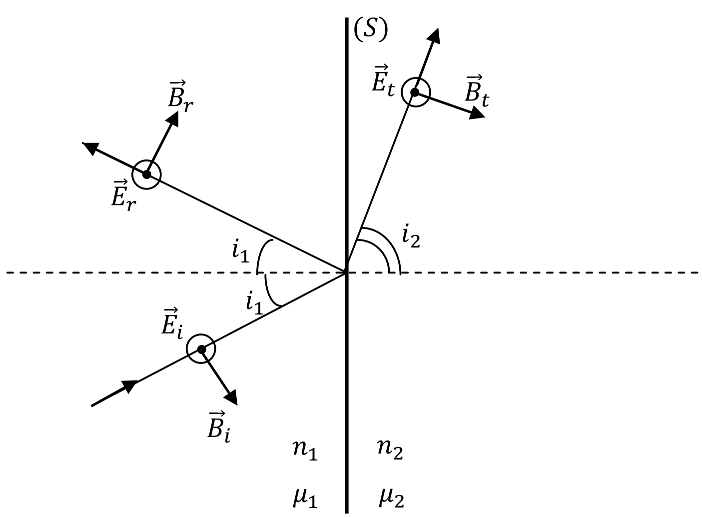
- **Champ électrique normal au plan d'incidence**

La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à l'interface s'écrit
$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$

NB : Les indices i, r et t identifient, respectivement, l'onde incidente, réfléchie et transmise.

On a : $\vec{B} = \mu\, \vec{H}$, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ donne
$\mu_1 H_{0i} \cos i_1 - \mu_1 H_{0r} \cos i_1 = \mu_2 H_{0t} \cos i_2$

et on a : $H_0 = E_0/\mu v = nE_0/\mu c$



Les équations de continuité s'écrivent alors
$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \dots (a)$
$n_1\,(E_{0i} - E_{0r}) \cos i_1 = n_2\, E_{0t} \cos i_2 \dots (b)$

(a) dans (b) :

$n_1\,(E_{0i} - E_{0r}) \cos i_1 = n_2\,(E_{0i} + E_{0r}) \cos i_2$

Ce qui donne

$$r_N = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \dots (23)$$

$(a) \Rightarrow E_{0r} = E_{0t} - E_{0i} \dots (c)$

(c) dans (b) :

$n_1\,(E_{0i} - E_{0t} + E_{0i}) \cos i_1 = n_2\, E_{0t} \cos i_2$

On en déduit

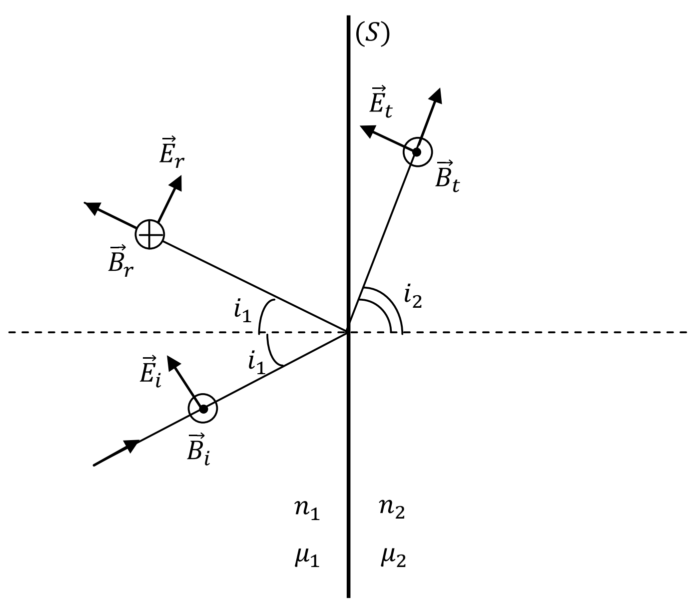
$$t_N = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \dots (24)$$

- **Champ électrique parallèle au plan d'incidence**

L'orientation des champs est représentée sur la figure où l'on a choisi le sens positif de $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ de manière qu'à l'incidence normale ils coïncident avec celui de $\vec{E}_i$. Les conditions de passage s'écrivent
$E_{0i} \cos i_1 + E_{0r} \cos i_1 = E_{0t} \cos i_2 \Rightarrow (E_{0i} + E_{0r}) \cos i_1 = E_{0t} \cos i_2$
$\Rightarrow E_{0t} = (E_{0i} + E_{0r}) \cos i_1 \,/ \cos i_2 \dots (d)$

On a : $\vec{B} = \mu\, \vec{H}$
$\mu_1 H_{0i} - \mu_1 H_{0r} = \mu_2 H_{0t}$

et on a :
$H_0 = E_0/\mu v = nE_0/\mu c$



On aura donc
$n_1(E_{0i} - E_{0r}) = n_2\ E_{0t} \dots (e)$
(d) dans (e) :

$$n_1(E_{0i} - E_{0r}) = n_2(E_{0i} + E_{0r}) \cos i_1 / \cos i_2$$

On en déduit

$$r_P = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \dots (25)$$

$(d) \Rightarrow E_{0i} \cos i_1 + E_{0r} \cos i_1 = E_{0t} \cos i_2 \Rightarrow E_{0r} \cos i_1 = E_{0t} \cos i_2 - E_{0i} \cos i_1$
$\Rightarrow E_{0r} = E_{0t} \dfrac{\cos i_2}{\cos i_1} - E_{0i} \dots (f)$

(f) dans (e) :

$$n_1\left(E_{0i} - E_{0t}\frac{\cos i_2}{\cos i_1} + E_{0i}\right) = n_2\ E_{0t}$$

Ce qui donne

$$t_P = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \dots (26)$$

La puissance étant proportionnelle au carré de l'amplitude, les coefficients de réflexion et de transmission en puissance sont :

$$\Re = \frac{\text{Puissance réfléchie}}{\text{Puissance incidente}} = r^2$$

$$\mathcal{T} = \frac{\text{Puissance transmise}}{\text{Puissance incidente}} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t^2$$

$$\Re + \mathcal{T} = 1$$

En considérant, par exemple, les expressions (25) et (26) :

$$\Re = r_P^2 = \left(\frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2 = \frac{n_1^2 \cos^2 i_2 - 2n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2 + n_2^2 \cos^2 i_1}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}$$

$$\mathcal{T} = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} t_P^2 = \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}\left(\frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1}\right)^2 = \frac{4n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}$$

$$\Re + \mathcal{T} = \frac{n_1^2 \cos^2 i_2 + 2n_1 n_2 \cos i_1 \cos i_2 + n_2^2 \cos^2 i_1}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2} = \frac{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2}{(n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1)^2} = 1$$

Ceci traduit la loi de conservation de l'énergie.

9. 8. 3. Onde plane à polarisation rectiligne sous incidence normale

Les coefficients de réflexion et de transmission se déduisent des formules (23) et (24) ou bien (25) et (26), avec $\cos i_1 = \cos i_2 = 1$. Les coefficients de réflexion r_N et r_P sont tous deux égaux à

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Et les coefficients de transmission t_N et t_P tous deux égaux à

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Il n'y a plus de distinction entre vibration parallèle et normale au plan d'incidence, car il n'y a plus de plan d'incidence, le rayon incident étant confondu avec la normale.

9. 9. Différents types d'ondes électromagnétiques

En partant des ondes les plus énergétiques, on distingue successivement :

- **Les rayons gamma (γ) :** ils sont dus aux radiations émises par les éléments radioactifs. Très énergétiques, ils traversent facilement la matière et sont très dangereux pour les cellules vivantes. Leurs longueurs d'onde s'étendent de ($10^{-14}\ m$) à ($10^{-12}\ m$).

- **Les rayons X :** rayonnements très énergétiques traversant plus ou moins facilement les corps matériels et un peu moins nocifs que les rayons gamma. Ils sont utilisés notamment en médecine pour les radiographies, dans l'industrie (contrôle des bagages dans le transport aérien), et dans la recherche pour l'étude de la matière (rayonnement synchrotron). Les rayons X ont des longueurs d'onde comprises entre ($10^{-12}\ m$) et (10^{-8} m).

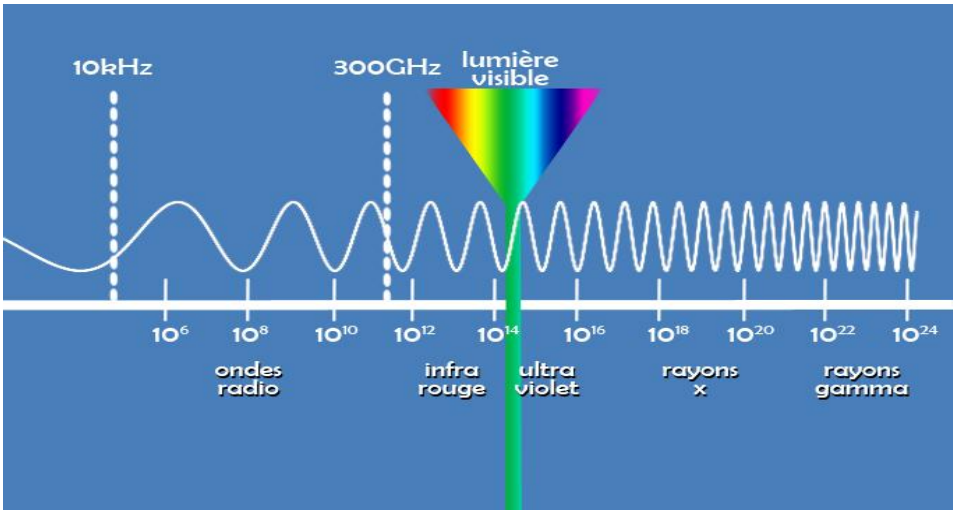
- **Les ultraviolets :** rayonnements qui restent assez énergétiques, ils sont nocifs pour la peau. Heureusement pour nous, une grande part des ultraviolets est stoppée par l'ozone atmosphérique qui sert de bouclier protecteur des cellules. Leurs longueurs d'onde s'échelonnent de ($10^{-8}\ m$) à ($4.10^{-7} m$).

- **Le domaine visible :** correspond à la partie très étroite du spectre électromagnétique perceptible par notre œil. C'est dans le domaine visible que le rayonnement solaire atteint son maximum ($0.5\ \mu m$) et c'est également dans cette portion du spectre que l'on peut distinguer l'ensemble des couleurs de l'arc en ciel, du bleu au rouge. Il s'étend de ($4.10^{-7}\ m$) - *lumière bleue* - à ($8.10^{-7}\ m$) - *lumière rouge*.

- **L'infrarouge :** rayonnement émis par tous les corps dont la température est supérieure au zéro absolu ($-273°C$). En télédétection, on utilise certaines bandes spectrales de l'infrarouge pour mesurer la température des surfaces terrestres et océaniques, ainsi que celle des nuages. La gamme des infrarouges couvre les longueurs d'onde allant de ($8.10^{-7}\ m$) à ($10^{-3}\ m$).

- **Les ondes radar ou hyperfréquences :** cette région du spectre est utilisée pour mesurer le rayonnement émis par la surface terrestre et s'apparente dans ce cas à la télédétection dans l'infrarouge thermique, mais également par les capteurs actifs comme les systèmes radar. Un capteur radar émet son propre rayonnement électromagnétique et en analysant le signal rétrodiffusé, il permet de localiser et d'identifier les objets, et de calculer leur vitesse de déplacement s'ils sont en mouvement. Ceci, quelque soit la couverture nuageuse, de jour comme de nuit. Le domaine des hyperfréquences s'étend des longueurs d'onde de l'ordre du *centimètre* jusqu'au *mètre*.

- **Les ondes radio :** ce domaine de longueurs d'onde est le plus vaste du spectre électromagnétique et concerne les ondes qui ont les plus basses fréquences. Il s'étend des longueurs d'onde de quelques cm à plusieurs km. Relativement faciles à émettre et à recevoir, les ondes radio sont utilisées pour la transmission de l'information (radio, télévision et téléphone). La bande FM des postes de radio correspond à des longueurs d'onde de l'ordre du $mètre$. Celles utilisées pour les téléphones cellulaires sont de l'ordre de 10 cm environ.



Spectre électromagnétique. Les ondes sont classées selon leurs fréquences en Hertz.

9. 10. Enoncés des exercices

Exercice 1

Deux ondes électromagnétiques se propagent dans le vide. Les composantes de champs électriques sont :

Pour $\vec{E}_1$: $(E_1)_x = 0$, $(E_1)_y = 0$, $(E_1)_z = E_0 \cos(\omega t + kx)$

Pour $\vec{E}_2$: $(E_2)_x = 0$, $(E_2)_y = 0$, $(E_2)_z = E_0 \cos(\omega t + ky)$

1- Calculer H_1 et H_2 et dire de quelles ondes il s'agit.

2- Calculer l'onde résultante. Quelle est sa direction de propagation ? Conclure.

3- L'onde 1 tombe sur un milieu diélectrique d'indice $n_2 = \sqrt{2}$ perpendiculaire à l'axe x.

a- Calculer les amplitudes des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{H}_1$ réfléchis et transmis.

b- Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie.

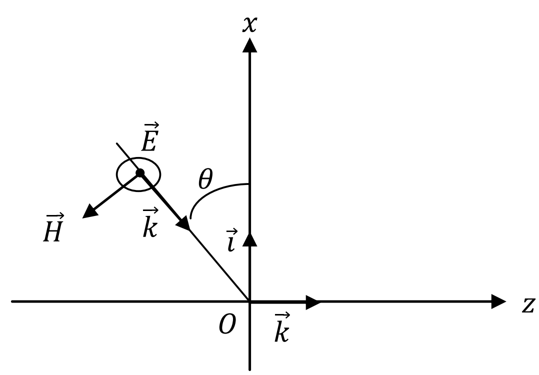
c- Comment doit-on disposer le milieu n_2 par rapport à l'axe x pour qu'il y ait réflexion de l'onde ?

Exercice 2

Une onde monochromatique sinusoïdale tombe sur une surface parfaitement réfléchissante sous une incidence quelconque θ. Le champ électrique E_I est parallèle à l'axe Oy (perpendiculaire au plan de la feuille et sortant).

1- Donner l'expression de E_I et H_I pour l'onde incidente.

2- Donner l'expression de E_R et H_R pour l'onde réfléchie.

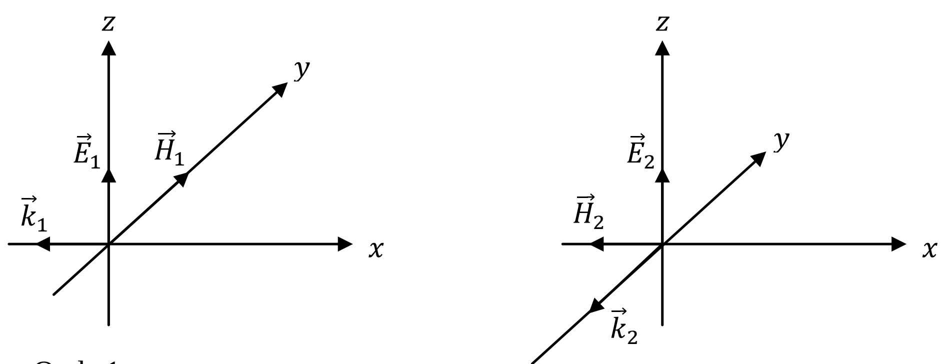


9. 11. Solution des exercices

Exercice 1

1- Détermination de H_1 et H_2 :

Les champs magnétiques sont obtenus à partir des champs électriques via la relation de Maxwell : $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$



- Onde 1 :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_{1z} \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_{1z}}{\partial x}\vec{j} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_1}{\partial t}$$

$$\vec{H}_1 = H_{1x}\,\vec{i} + H_{1y}\,\vec{j} + H_{1z}\,\vec{k}$$

donc :

$$\frac{\partial E_{1z}}{\partial x} = \mu_0 \frac{H_{1y}}{\partial t} \Rightarrow H_{1y} = \frac{1}{\mu_0}\int \frac{\partial E_{1z}}{\partial x} dt$$

$$H_{1y} = \frac{1}{\mu_0}\int (-E_0 k)\sin(\omega t + kx) dt = \frac{E_0 k}{\mu_0 \omega}\cos(\omega t + kx)$$

On a :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

d'où :

$$H_{1y} = \frac{E_0}{\mu_0 v}\cos(\omega t + kx)$$

On a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

d'où :

$$H_{1y} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + kx)$$

On aura :

$H_{1x} = H_{1z} = 0$ et $H_{1y} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + kx)$

- Onde 2 :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_{2z} \end{vmatrix} = \frac{\partial E_{2z}}{\partial y}\vec{\imath} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_2}{\partial t}$$

$$\vec{H}_2 = H_{2x}\,\vec{\imath} + H_{2y}\,\vec{\jmath} + H_{2z}\,\vec{k}$$

donc :

$$\frac{\partial E_{2z}}{\partial y} = -\mu_0 \frac{H_{2x}}{\partial t} \Rightarrow H_{2x} = -\frac{1}{\mu_0}\int \frac{\partial E_{2z}}{\partial y}\,dt$$

$$H_{2x} = -\frac{1}{\mu_0}\int (-E_0 k)\sin(\omega t + ky)dt = -\frac{E_0 k}{\mu_0 \omega}\cos(\omega t + ky)$$

On a :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

d'où :

$$H_{2x} = -\frac{E_0}{\mu_0 v}\cos(\omega t + ky)$$

On a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

d'où :

$$H_{2x} = -E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + ky)$$

On aura :

$H_{2y} = H_{2z} = 0$ et $H_{2x} = -E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + ky)$

Ce sont des ondes planes sinusoïdales à polarisation rectiligne.

2- Onde résultante :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0\cos(\omega t + kx)\,\vec{\jmath} + E_0\cos(\omega t + ky)\,\vec{\jmath} = E_0[\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t + ky)]\,\vec{\jmath}$$

On a :

$$\begin{aligned}\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t + ky) &= 2\cos\left(\frac{\omega t + kx + \omega t + ky}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t + kx - (\omega t + ky)}{2}\right)\\ &= 2\cos\left(\omega t + \frac{k}{2}(x+y)\right)\cos\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)\end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{E} = 2\,E_0\cos\left(\frac{k}{2}(x-y)\right)\cos\left(\omega t + \frac{k}{2}(x+y)\right)\vec{\jmath}$$

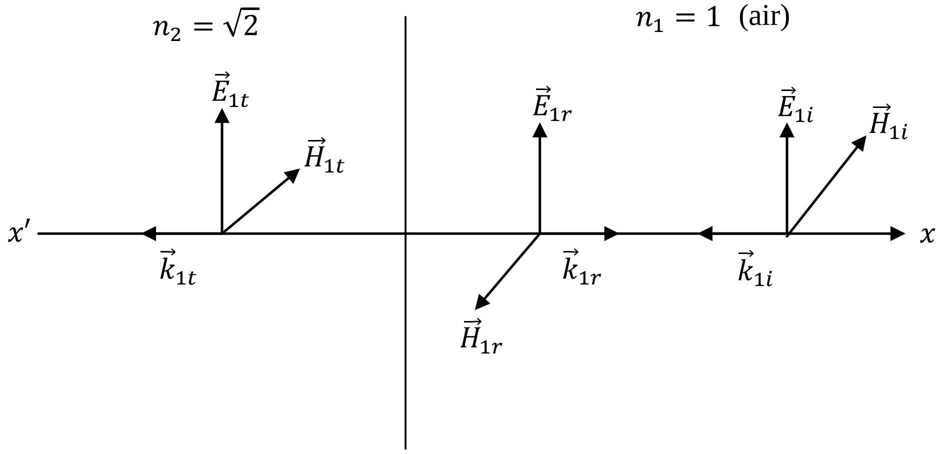
$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + kx)\,\vec{j} - E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + ky)\,\vec{i}$$

d'où :

$$\vec{H} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\cos(\omega t + kx)\,\vec{j} - \cos(\omega t + ky)\,\vec{i}]$$

La direction de propagation d'une telle onde est indéterminée. L'onde n'est pas progressive.

3- L'onde 1 tombe sur un milieu diélectrique d'indice $n_2 = \sqrt{2}$ perpendiculaire à l'axe x.
a- Amplitudes des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{H}_1$ réfléchis et transmis :
Les indices i, r et t identifient, respectivement, l'onde incidente, réfléchie et transmise.
La surface de séparation entre les deux milieux est en $x = 0$.



Ecrivons la continuité de la composante tangentielle des champs en $x = 0$:
$E_{1i} + E_{1r} = E_{1t}$ ... (1)
$H_{1i} - H_{1r} = H_{1t}$ ... (2)

D'autre part, pour une onde plane à polarisation rectiligne :
$H_{1i} = E_{1i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, $H_{1r} = E_{1r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$, $H_{1t} = E_{1t}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}$

E_{1t} =?
On a :
$H_{1i} - H_{1r} = H_{1t}$ d'où : $E_{1i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} - E_{1r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = E_{1t}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}$

Pour un diélectrique : $\mu_r = 1$ et $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r}$

d'où : $E_{1t} = (E_{1i} - E_{1r})\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = (E_{1i} - E_{1r})\frac{1}{n}$
On a :
$E_{1i} + E_{1r} = E_{1t} \Rightarrow E_{1r} = E_{1t} - E_{1i}$

d'où :

$$E_{1t} = (E_{1i} - E_{1r})\frac{1}{n} = (E_{1i} - E_{1t} + E_{1i})\frac{1}{n} = \frac{2E_{1i}}{n} - \frac{E_{1t}}{n} \Rightarrow E_{1t} = \frac{2}{n+1}E_{1i}$$

Comme $H_{1t} = E_{1t}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{\mu_0\mu_r}}$

On aura :

$$H_{1t} = \frac{2n}{n+1}E_{1i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

$E_{1r} =?$

On a :

$$E_{1i} + E_{1r} = E_{1t} = (E_{1i} - E_{1r})\frac{1}{n} = \frac{E_{1i}}{n} - \frac{E_{1r}}{n} \Rightarrow E_{1r} + \frac{E_{1r}}{n} = \frac{E_{1i}}{n} - E_{1i} \Rightarrow E_{1r} = \frac{1-n}{1+n}E_{1i}$$

Comme :

$$H_{1r} = E_{1r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

On aura :

$$H_{1r} = \frac{1-n}{1+n}E_{1i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

b- Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$r = \frac{E_{1r}}{E_{1i}} = \frac{\frac{1-n}{1+n}E_{1i}}{E_{1i}} = \frac{1-n}{1+n}$$

$$t = \frac{E_{1t}}{E_{1i}} = \frac{\frac{2}{n+1}E_{1i}}{E_{1i}} = \frac{2}{1+n}$$

Coefficients de réflexion et de transmission en énergie :

On a :

$$\langle p_{1i}\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1i}^2$$

$$\langle p_{1r}\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1r}^2$$

$$\langle p_{1t}\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{n}\,E_{1t}^2$$

$$\Re = \frac{\langle p_{1r}\rangle}{\langle p_{1i}\rangle} = \frac{E_{1r}^2}{E_{1i}^2} = r^2$$

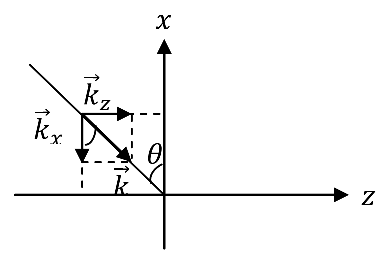
$$\mathcal{T} = \frac{\langle p_{1t}\rangle}{\langle p_{1i}\rangle} = \frac{nE_{1t}^2}{E_{1i}^2} = nt^2$$

$$\Re + \mathcal{T} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 + n\left(\frac{2}{1+n}\right)^2 = \frac{1-2n+n^2+4n}{(1+n)^2} = \frac{1+2n+n^2}{(1+n)^2} = \frac{(1+n)^2}{(1+n)^2} = 1$$

c- Il ne peut y avoir de réflexion totale puisque $n_2 > n_1$ ($n_1 = 1$ pour l'air).

Exercice 2

1- Expression de E_I et H_I pour l'onde incidente :
L'expression d'une onde sinusoïdale plane progressive est :
$E_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$



On a : $\vec{E}_I \parallel y$

Pour l'onde incidente :
$\vec{k} = -k\cos\theta\,\vec{\imath} + k\sin\theta\,\vec{\jmath}$
et $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$$\vec{k}.\vec{r} = -kx\cos\theta + kz\sin\theta = -\,k(x\cos\theta - z\sin\theta)$$

Ainsi :
$\vec{E}_I = E_0 e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\,\vec{\jmath}$

L'expression de H_I est obtenue via l'équation de Maxwell :
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_I = -\mu\frac{\partial \vec{H}_I}{\partial t}$$
Tel que : $\mu = \mu_0\mu_r$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_I & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_I}{\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial E_I}{\partial x}\vec{k} = -\mu\left(\frac{\partial H_I}{\partial t}\vec{\imath} + \frac{\partial H_I}{\partial t}\vec{k}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_I}{\partial z} = \mu\frac{\partial (H_I)_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_I}{\partial x} = -\mu\frac{\partial (H_I)_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial (H_I)_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_I}{\partial z} \\ \frac{\partial (H_I)_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_I}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial E_I}{\partial z}\, dt \\ (H_I)_z = -\frac{1}{\mu}\int \frac{\partial E_I}{\partial x}\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial}{\partial z}\left(E_0 e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\right) dt \\ (H_I)_z = -\frac{1}{\mu}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(E_0 e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\right) dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = \frac{1}{\mu}\int -E_0 jk\sin\theta\, e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} dt \\ (H_I)_z = -\frac{1}{\mu}\int E_0 jk\cos\theta\, e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = -\frac{1}{\mu} E_0 jk \sin\theta \frac{1}{j\omega}\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_I)_z = -\frac{1}{\mu} E_0 jk \cos\theta \frac{1}{j\omega}\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

On a :
$k = \frac{\omega}{v}$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = -\frac{E_0}{\mu v} \sin\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_I)_z = -\frac{E_0}{\mu v} \cos\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

On a :
$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = -E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_I)_z = -E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

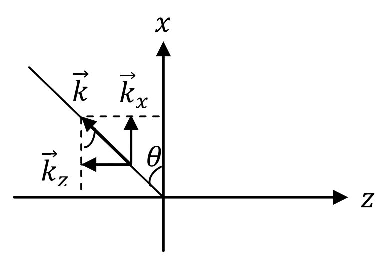
On a : $\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0\, \mu_r$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_I)_x = -E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r}{\mu_0\, \mu_r}} \sin\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_I)_z = -E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, \varepsilon_r}{\mu_0\, \mu_r}} \cos\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

avec $(H_I)_y = 0$

2- Expression de E_R et H_R pour l'onde réfléchie :
Pour l'onde réfléchie :
$\vec{k} = k\cos\theta\, \vec{\imath} - k\sin\theta\, \vec{k}$
et $\vec{r} = x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} + z\, \vec{k}$



$\vec{k}.\vec{r} = kx\cos\theta - kz\sin\theta = k(x\cos\theta - z\sin\theta)$

Ainsi :
$\vec{E}_R = \vec{A}\, e^{j(\omega t + \vec{k}.\vec{r})} = \vec{A}\, e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}$

La conservation de la composante tangentielle de E montre que $\vec{A} = -E_0\, \vec{\jmath}$
d'où :
$\vec{E}_R = -E_0\, e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\, \vec{\jmath}$

L'expression de H_R est obtenue via l'équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_R = -\mu \frac{\partial \vec{H}_R}{\partial t}$$

Tel que : $\mu = \mu_0 \mu_r$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_R & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_R}{\partial z}\vec{\imath} + \frac{\partial E_R}{\partial x}\vec{k} = -\mu\left(\frac{\partial H_R}{\partial t}\vec{\imath} + \frac{\partial H_R}{\partial t}\vec{k}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_R}{\partial z} = \mu \frac{\partial (H_R)_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_R}{\partial x} = -\mu \frac{\partial (H_R)_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial (H_R)_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_R}{\partial z} \\ \frac{\partial (H_R)_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_R}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial E_R}{\partial z}\, dt \\ (H_R)_z = -\frac{1}{\mu}\int \frac{\partial E_R}{\partial x}\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = \frac{1}{\mu}\int \frac{\partial}{\partial z}\left(-E_0 e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\right) dt \\ (H_R)_z = -\frac{1}{\mu}\int \frac{\partial}{\partial x}\left(-E_0 e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))}\right) dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = \frac{1}{\mu}\int (-E_0)(-jk\sin\theta)\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} dt \\ (H_R)_z = -\frac{1}{\mu}\int (-E_0)(jk\cos\theta)\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = \frac{1}{\mu} E_0 jk\sin\theta \frac{1}{j\omega}\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_R)_z = \frac{1}{\mu} E_0 jk\cos\theta \frac{1}{j\omega}\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

On a :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = \frac{E_0}{\mu v}\sin\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_R)_z = \frac{E_0}{\mu v}\cos\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

On a :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_R)_z = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta\ e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

On a : $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_r$ et $\mu = \mu_0\,\mu_r$

d'où :

$$\Rightarrow \begin{cases} (H_R)_x = E_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\mu_0\,\mu_r}}\sin\theta\; e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \\ (H_R)_z = E_0\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\mu_0\,\mu_r}}\cos\theta\; e^{j(\omega t + k(x\cos\theta - z\sin\theta))} \end{cases}$$

avec $(H_R)_y = 0$

Bibliographie

1. H. DJELOUAH, Vibrations et ondes, Pages Bleues Internationales (2020).

2. S. BOUDRAHEM, Physique des vibrations et des ondes mécaniques, Office des Publications Universitaires (2015).

3. A. K. ZINE, Formalisme de Lagrange et oscillations linéaires, Office des Publications Universitaires (2011).

4. F. SOUIDI, I- Les mouvements vibratoires, II- Les ondes, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène (2000).

5. M. BENDAOUD, Vibrations et ondes, Office des Publications Universitaires (1994).

6. M. TAMINE et O. LAMROUS, Ondes et vibrations, Office des Publications Universitaires (1993).

7. Jean FAGET et Jean MAZZASHI, Travaux dirigés d'électromagnétisme, Paris (1982).