SUR LA PROGRAMMATION LINEAIRE MULTIOBJECTIFS FLOUE STOCHASTIQUE

REMERCIEMENTS

– Je remercie Moncef Abbas, Professeur à l'USTHB, de m'avoir encadré.

– Je remercie également Didier Dubois, directeur de recherche CNRS à l'IRIT, Université Paul Sabatier de Toulouse, de m'avoir aidé, en tant que co-encadrant, à finaliser ce travail.

– Mes remerciements vont également à Mohamed Morsli, Professeur à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

– Un grand Merci aux membres du jury, Djamel Hamadouche et Mohand Ouanes, respectivement Professeur et Maitre de conférence Classe A à l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, ainsi Mohamed El Amine Chergui, Maitre de conférence Classe A à l'USTHB, pour la lecture de mon manuscrit et les critiques qu'ils m'ont apportées.

– Je remercie également Le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique pour le support financier qu'il m'a accordé pour finaliser ma thèse à l'IRIT, au sein de l'équipe ADRIA.

– Je tiens aussi à remercier tous les membres de l'équipe ADRIA et du personnel administratif et technique de l'IRIT pour leur hospitalité et leur gentillesse.

Résumé

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience ou d'un problème d'optimisation ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces dernières peuvent être imprécises avec une imprécision de nature floue, ou aléatoire de par la nature de leurs variabilités et des expériences précédentes. C'est ce qui a motivé l'introduction de la programmation floue et la programmation stochastique. Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation floue et en programmation stochastique .
Dans pas mal de situations le flou et l'aléa peuvent se trouver combinés dans un programme mathématique, ce qui a donné naissance à la programmation floue stochastique.
Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme pour cette combinaison. Elles ont été introduites en premier lieu par Kwakernaak. Par la suite d'autres auteurs, tels que Kruse et Meyer, Puri et Ralescu et récemment I. Couso et D. Dubois ont donné d'autres interprétations de ce concept. Shapiro a introduit les variables aléatoires floues normales.
Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa dans un contexte d'optimisation . Il en existe dans la littérature, ceux traitant des cas des programmes mathématiques en présence de variables aléatoires floues dans les objectifs et/ou dans les contraintes.
Ce travail s'évetue à prolonger les travaux dans ce domaine et à proposer des méthodes de résolution d'un programme linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues.
Après avoir donné les définitions des différents types de variables aléatoires floues, un état de l'art de la programmation linéaire floue stochastique est donné, suivi de notre contribution qui consiste, en premier lieu, à généraliser conjointement, aux variables aléatoires floues, les deux variantes du chance constrained programming, l'une avec des coefficients flous due à Dubois , l'autre avec des coefficients aléatoires due à Charnes et Cooper , pour avoir :chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients .
Cette dernière, avec ses trois versions : (i) en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et necessité (version 1) ; (ii) en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues (version 2) ; et (iii) en combinant chance-constrained programming et comparaisons d'intervalles aléatoires (intervalle flou peut être vu comme un intervalle aléatoire) (version 3), a pour but de transformer les contraintes en présence de variables aléatoires floues en des contraintes déterministes équivalentes.
Ensuite nous considérons des programmes linéaires multiobjectifs flous stochastiques en présence de variables aléatoires floues discrètes, normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R ou normales de type L-R, nous distinguons quatre cas, selon que les coefficients des objectifs sont déterministes, flous, aléatoires ou flous aléatoires. Pour la résolution, nous pouvons appliquer pour tous les cas, chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients . Ou combiner selon le cas considéré, les techniques de la programmation multiobjectifs déterministe, floue ou stochastique entre elles ou avec chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients ou l'approche semi-infinie.
Pour illustrer la pertinence de nos idées, nous avons traité des exemples numériques.
Ce travail se termine par une conclusion où nous répertorions les principaux résultats obtenus et nous indiquons quelques axes pour de futurs travaux.

INTRODUCTION

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience ou d'un problème d'optimisation ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces dernières peuvent être imprécises avec une imprécision de nature floue, ou aléatoire de par la nature de leurs variabilités et des expériences précédentes. C'est ce qui a motivé l'introduction de la programmation floue et la programmation stochastique. Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation floue ([17], [36], [37], [38], [41]) et en programmation stochastique ([22], [21], [25], [28]) .

Dans pas mal de situations le flou et l'aléa peuvent se trouver combinés dans un programme mathématique, ce qui a donné naissance à la programmation floue stochastique.

Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme pour cette combinaison. Elles ont été introduites en premier lieu par Kwakernaak [27]. Par la suite d'autres auteurs, tels que Kruse et Meyer [26], Puri et Ralescu [35] et récemment I. Couso et D. Dubois [19] ont donné d'autres interprétations de ce concept. Shapiro [39] a introduit les variables aléatoires floues normales.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa dans un contexte d'optimisation ([6], [45],[46], [47],[43], [33], [29], [24]). Il en existe dans la littérature, ceux traitant des cas des programmes mathématiques en présence de variables aléatoires floues dans les objectifs ([29], [23],[46], [47],[43]) et dans les contraintes ([46], [47],[43], [1],[2],[32]).

Les premiers ont été réalisés par Qiao et Wang [43] qui ont considéré un programme linéaire multiobjectifs dont les coefficients des objectifs et des contraintes sont des variables aléatoires floues. Ils ont réduit le problème à un programme stochastique standard en considérant les α-coupes des coefficients flous et en définissant deux ensembles de contraintes, en utilisant les bornes supérieures des coupes pour l'un et les bornes inférieures pour l'autre. Dans [1] et [32] une approche semi-infinie a été proposée dans le but de transformer les contraintes floues stochastiques, d'un programme linéaire dont l'objectif est déterministe, en des contraintes stochastiques et utiliser les méthodes chance-constrained programming [8] ou two-stage programming [11] pour la résolution du programme résultant. Dans [3], E.E. Ammar a récemment étudié un programme linéaire multiobjectifs dont les coefficients des objectifs et des contraintes sont des variables aléatoires floues.

Ce travail s'évertue à prolonger les travaux dans ce domaine et à proposer des méthodes de résolution d'un programme linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues.

Pour ce faire des aperçus volontairement limités à l'essentiel de la programmation linéaire uni et multiobjectifs flou et stochastique sont donnés aux chapitres 1 et 2.

Au chapitre 3, après avoir donné les définitions des différents types de variables aléatoires floues, un état de l'art de la programmation linéaire floue stochastique est donné, suivi de notre contribution qui consiste, en premier lieu, à généraliser conjointement, aux variables aléatoires floues, les deux variantes du chance constrained programming, l'une avec des coefficients flous due à Dubois [15], l'autre avec des coefficients aléatoires due à Charnes et Cooper [8], pour avoir :chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [2].

Cette dernière, avec ses trois versions : (i) en combinant probabilité et possibilité, ou probabilité et necessité (version 1) ; (ii) en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues (version 2) ; et (iii) en combinant chance-constrained programming et comparaisons d'intervalles aléatoires (intervalle flou peut être vu comme un intervalle aléatoire) (version 3), a pour but

de transformer les contraintes en présence de variables aléatoires floues en des contraintes déterministes équivalentes.
Dans le cas où les coefficients des contraintes sont purement flous ou purement aléatoires, chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [2] se réduit à chance constrained programming with fuzzy coefficients [15] ou chance constrained programming with stochastic coefficients [8].
Au Chapitre 4, nous avons repris les méthodes proposées par Katagiri et col [23] et Li et col [29] pour la résolution d'un programme linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires pour les premiers [23] et constantes pour les seconds [29].
Ensuite nous considérons des programmes linéaires multiobjectifs flous stochastiques en présence de variables aléatoires floues discrètes, normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R ou normales de type L-R, nous distinguons quatre cas, selon que les coefficients des objectifs sont déterministes, flous, aléatoires ou flous aléatoires. Pour la résolution, nous pouvons appliquer pour tous les cas, chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [2]. Ou combiner selon le cas considéré, les techniques de la programmation multiobjectifs déterministe, floue ou stochastique entre elles ou avec chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [2] ou l'approche semi-infinie.
Pour illustrer la pertinence de nos idées, nous avons traité des exemples numériques.
Ce travail se termine par une conclusion où nous répertorions les principaux résultats obtenus et nous indiquons quelques axes pour de futurs travaux.

Chapitre 1

Programmation linéaire multiobjectifs floue

En programmation linéaire uniobjectif ou multiobjectifs, on peut se trouver face à des situations où les données sont mal connues, imprécises avec une imprécision de nature graduelle, et des cas où les contraintes et/ou l'objectif ne sont pas des impératifs stricts, ils peuvent être relachés. Ceci a donné naissance à la programmation linéaire unie ou multiobjectifs floue.

1.1 Programmation linéaire floue

On distingue deux cas :

1. le cas où les inégalités (ou égalités) sont relaxées.
2. le cas où les données imprécises sont représentées par des ensembles flous

Dans la littérature, le terme programmation flexible est utilisé pour désigner le premier cas et les termes de programmation robuste ou programmation possibiliste pour le second cas, selon que les contraintes sont repectivement sous formes inclusives ou sous forme d'inégalités.

1.1.1 Programmation flexible

Décision dans un environnement flou

On considère un problème dont l'objectif et les m contraintes sont vaguement définis, représentés par des ensembles flous d'un même référentiel X dont les fonctions d'appartenace respectives sont μ_0

et μ_i, $i = 1, 2, ...m$. La décision qui doit satisfaire l'objectif et les m contraintes est donc représentée par un ensemble flou, intersection de ces derniers et dont la fonction d'appartenance est μ_D telle que $\mu_D(x) = min(\mu_i(x)/i = 0, 1, 2, ..., m)$.
La meilleure décision est déterminée par la résolution du problème suivant : $max(\mu_D(x)/x \in X) = max\left\{min(\mu_i(x)/i = 0, 1, 2, ..., m)/x \in X\right\}$.

Exemple 1 *On veut réaliser l'objectif suivant : " x doit être plus grand que 5" sous la contrainte "x doit être proche de 10".*
La contrainte et l'objectif sont donc des ensembles flous dont leurs fonctions d'apprtenance respectives sont :

$\mu_c(x) = (1 + (x - 10)^2)^{-1}$ *et*

$$\mu_o(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - (1 + (0.2(x-5))^2)^{-1} & si\, x > 5 \\ & \\ 0 & sinon \end{array} \right\}$$

La décision est donc représentée par le sous ensemble flou dont la fonction d'appartenace μ_D est définie par $\mu_D(x) = min(\mu_0(x),\mu_C(x))$.
La meilleure décision est déterminée par la résolution du problème suivant : $max(\mu_D(x)/x \in R) = max\left\{min(\mu_0(x), \mu_C(x))/x \in R\right\}$.

Résolution d'un problème maxmin

Considérons le problème max-min suivant :

$$(P)\left\{\ \max\left\{min(\mu_i(x)/i = 0, 1, 2, ..., m)/x \in X\right\}\ \right\}$$

Pour sa résolution, on introduit la variable auxilliaire $\lambda = min(\mu_i(x)/i = 0, 1, 2, ..., m)$, alors le programme (P) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P)' \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \\ \lambda \leq \mu_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

ensuite on pourra utiliser les résultats suivants :

Lemme 1 *[31]*
si $(\overline{\lambda}, \overline{x})$ *est optimal pour le programme suivant :*

$$(P)' \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \\ \lambda \leq \mu_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

alors $\overline{\lambda} = min(\mu_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m)$.

Théorème 1 *[31]*
$\overline{x}$ *est solution optimale pour le programme* $(P)'$ *si et seulement si* $(\overline{\lambda}, \overline{x})$,
avec $\overline{\lambda} = min(\mu_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m)$, *est solution optimale pour le programme suivant :*

$$(P)'' \left\{ \begin{array}{l} \max \lambda \\ \\ \lambda \leq \mu_i(x),\ i = 0, 1, 2, ..., m \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1 \\ \ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

Résolution d'un programme linéaire flexible

Considérons le programme linéaire flexible suivant :

$$(P_{fl}) \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{max}\, cx \\ \\ A_i x \, \widetilde{\theta} \, b_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{\theta} \in \left\{ \widetilde{\leq}, \widetilde{=}, \widetilde{\geq} \right\}$ et $\widetilde{\leq}, \widetilde{=}, \widetilde{\geq}$ sont les versions flexibles de $\leq, =, \geq$ respectivement.
La notation ~ désigne le fait que l'objectif et les contraintes ne sont pas des impératifs stricts.
Selon Zimermann [51] Le programme (P_{fl}) peut s'interpreter comme suit :

$$(P_{fl})' \left\{ \begin{array}{l} cx \widetilde{\leq} z \\ \\ A_i x \, \widetilde{\theta} \, b_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

l'objectif flou et Les contraintes floues peuvent être représentés par les ensembles flous respectifs U_0 et U_i, $i = 1, 2, ..., m$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement μ_0 et μ_i, $i = 1, 2, ..., m$. où μ_i, $i = 1, 2, ..., m$ est définie selon que $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\leq}$, $\widetilde{\cong}$ ou $\widetilde{\geq}$ comme suit :

- $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\leq}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & A_i x \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0, 1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i x > b_i + d_i,\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

- $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\cong}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & A_i x = b_i,\ i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0, 1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i x < b_i - d_i \text{ et } A_i x > b_i + d_i,\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

- $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\geq}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & A_i x \geq b_i,\ i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0, 1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i x < b_i - d_i,\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

Pour résoudre le programme (P_{fl}) on applique le concept de décision de Bellman et Zadeh au programme $(P_{fl})'$ ce qui revient à résoudre le programme max-min suivant :

$$(P)' \left\{ \begin{array}{l} \max(min(\mu_i(x)/i = 0, 1, 2, ..., m)) \\ \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

1.1.2 Programmation linéaire en présence des données floues

En programmation linéaire, dont les contraintes sont sous forme inclusive ou sous formes d'inégalités, on peut se trouver face à des situations où une ou plusieurs données est ou sont des intervalles flous comme suit :

1.1.2.1 Contraintes sous forme d'inclusion (programmation robuste)

Programmation linéaire inexacte (Solster [31])

Un programme linéaire inexact est un programme de la forme :

$$(P_{So}) \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ x_1K_1 + x_2K_2 + ... + x_nK_n \subset K \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $(K_j)_{j=2,...,n}$ est K sont des ensembles convexes de R^n, $\subset$ est l'inclusion entre ensembles et $+$ représente l'addition ensembliste, elle est définie comme suit :
soient A et B deux ensembles vulgaires, alors $A + B = \{a + b, a \in A\, et\, b \in B\}$.

Remarque 1 *Il est clair qu'un programme linéaire est un cas particulier du programme* (P_{So}) *où* $K_j = a_j$, $j = 2, ..., n$ *et* $K = b$ *où* a_j *et* b *sont des nombres réels.*

Proposition 1 $P = \{x \in R^n\, {}_1K_1 + x_2K_2 + ... + x_nK_n \subset K,\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n\}$ *est un sous ensemble convexe de* R^n.
Si de plus :

1. $K = \{y \in R^n : y \leq b\}$ *alors* $P = P' = \left\{x \in R^n / \overline{A}x \leq b\right\}$
   où $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ *et* $\overline{a}_{ij} = sup\,\{a_j/a_j \in K_j\}$ *avec* a_{ij} *la ième composante de* a_j.
2. $K = \{y \in R^n : y \geq b\}$ *alors* $P = P'' = \{x \in R^n / \underline{A}x \leq b\}$
   où $\underline{A} = (\underline{a}_{ij})$ *et* $\underline{a}_{ij} = inf\,\{a_j/a_j \in K_j\}$ *avec* a_{ij} *la ième composante de* a_j.

Programmation robuste

Un programme robuste est un programme de la forme :

$$(P_R) \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ x_1 \odot \widetilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \widetilde{A}_2 \oplus ... \oplus x_n \odot \widetilde{A}_n [\subset] \widetilde{b} \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $(\widetilde{A}_j)$, $j = 1, 2, ..., n$ sont des sous ensembles flous de R et " $\oplus$ " addition des ensembles flous et "$[\subset]$" inclusion entre ensembles flous
On représente l'ensemble des contraintes de $((\mathrm{P}_R)par$:
E=$\left\{x \in R^n / x_1 \odot \widetilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \widetilde{A}_2 \oplus ... \oplus x_n \odot \widetilde{A}_n [\subset] \widetilde{b} / x \geq 0\right\}$

Théorème 2 *$x^0 \in E$ est optimal pour (P_R) si et seulement si $x^0 \in E$ est optimal pour le programme suivant :*

$$(P_R)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ x_1\widetilde{A}_1^\alpha + x_2\widetilde{A}_2^\alpha + ... + x_n\widetilde{A}_n^\alpha \subset \widetilde{b}^\alpha \quad \forall\alpha \in]0,1] \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n \end{array} \right\}$$

$(P_R)'$ est un programme semi-infini, c'est à dire un programme avec une infinité de contraintes.

En supposant que les images des fonctions d'appartenance des sous ensembles flous sont discrètes et finies, on obtient un programme linéaire avec un nombre fini de contraintes comme suit :

Proposition 2 *Si $Im\mu\widetilde{A}_j = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p,\}$ avec $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_p < 1$*
Alors :
$x \in E = \left\{x \in R^n / x_1 \odot \widetilde{A}_1 \oplus x_2 \odot \widetilde{A}_2 \oplus ... \oplus x_n \odot \widetilde{A}_n [\subset] \widetilde{b} / x \geq 0\right\}$ *si et seulement si*

$$x \in E' = \left\{ \begin{array}{l} x_1\widetilde{A}_1^{\alpha_k} + x_2\widetilde{A}_2^{\alpha_k} + ... + x_n\widetilde{A}_n^{\alpha_k} \subset \widetilde{b}^{\alpha_k} \quad k = 1,2,...,p \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n \end{array} \right\}$$

– si les composantes $\widetilde{a}_{ij}$ de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{b}_i$ de $\widetilde{b}$ sont des nombres flous dont les ensembles de niveau respectifs sont des intervalles compacts.

Alors le programme $(P_R)'$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(P_R)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ [\underline{a}_{i1}^{\alpha_k}, \overline{a}_{i1}^{\alpha_k}]x_1 + [\underline{a}_{i2}^{\alpha_k}, \overline{a}_{i2}^{\alpha_k}]x_2 + ... + [\underline{a}_{in}^{\alpha_k}, \overline{a}_{in}^{\alpha_k}]x_n \subset [\underline{b}_i^{\alpha_k}, \overline{b}_i^{\alpha_k}],\ i = 1,2,...,m, k = 1,2,...,p \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n. \end{array} \right\}$$

ou sous la forme équivalente suivante :

$$(P_R)''' \left\{ \begin{array}{l} \\ \underline{a}_{i1}^{\alpha_k}x_1 + \underline{a}_{i2}^{\alpha_k}x_2 + ... + \underline{a}_{in}^{\alpha_k}x_n \geq \underline{b}_i^{\alpha_k},\ i = 1,2,...,m, k = 1,2,...,p \\ \\ \overline{a}_{i1}^{\alpha_k}x_1 + \overline{a}_{i2}^{\alpha_k}x_2 + ... + \overline{a}_{in}^{\alpha_k}x_n \leq \overline{b}_i^{\alpha_k}],\ i = 1,2,...,m, k = 1,2,...,p \\ \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n. \end{array} \right\}$$

1.1.2.2 Contraintes sous forme d'inégalités (programmation possibiliste)

Considérons le progamme linéaire flou suivant :

$$(P_{lp})\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \\ \widetilde{A}\odot x\preceq\widetilde{b}\\ \\ x\in D=\{x\in R^n/x\geq 0\}\end{array}\right\}$$

où les composantes $\widetilde{a}_{ij}$ de la matrice $\widetilde{A}(m\times n)$ et $\widetilde{b}_i$ du vecteur $\widetilde{b}(n\times 1)$ sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance sont respectivement $\mu_{\widetilde{a}_{ij}}$ et $\mu_{\widetilde{b}_i}$.

(P_{lp}) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{lp})'\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}\odot x_j\preceq\widetilde{b}_i, i=1,...m\\ \\ x_j\geq 0, j=1,...n\end{array}\right\}$$

Soient $\pi_{\widetilde{a}_{ij}}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i}$ les distributions de possibilités de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ respectivement.
(Par définition $\pi_{\widetilde{a}_{ij}}=\mu_{\widetilde{a}_{ij}}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i}=\mu_{\widetilde{b}_i}$ [50]).
Pour la résoulution de $(P_{lp})'$ les méthodes suivantes ont été proposées [32] :

1. la première consiste à remplacer les intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ par les valeurs les plus possibles respectives $\overline{a}_{ij}$ et $\overline{b}_i$ (i.e. $\overline{a}_{ij}$ et $\overline{b}_i$ sont tels que $\mu_{\widetilde{a}_{ij}}(\overline{a}_{ij})=sup\mu_{\widetilde{a}_{ij}}(a_{ij})$ et $\mu_{\widetilde{i}}(\overline{b}_i)=sup\mu_{\widetilde{b}_i}(b_i)$) et résoudre le programme détérministe résultant :

$$(P_{ld})'_1\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}x_j\leq\overline{b}_i, i=1,...m\\ \\ x_j\geq 0, j=1,...n\end{array}\right\}$$

2. la deuxième consiste à remplacer $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ par leurs supports respectifs $supp\,\widetilde{a}_{ij}$ et $supp\,\widetilde{b}_i$ et résoudre le programme détérministe résultant :

$$(P_{ld})'_2\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leq b_i, i=1,...m\quad (a_{ij},b_i)\in supp\,\widetilde{a}_{ij}\times supp\,\widetilde{b}_i\\ \\ x_j\geq 0, j=1,...,n\end{array}\right\}$$

Remarque 2 *$(P_{ld})'_1$ et $(P_{ld})'_2$ caricaturent le problème car :*

1. *Pour la première approche, il n'est tenu compte que des valeurs les plus possibles de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$. Les autres ne sont pas prises en considération.*
2. *Pour la deuxième approche, tous les éléments de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ sont pris en considération mais sans tenir compte de leurs degré de compatibilité.*

L'approche suivante est plus réaliste dans la mesure où elle tient compte des éléments de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ et de leur degré de compatibilité. Soient $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{b}}$ les fonctions d'appartenance communes de $\widetilde{A}$ et $\widetilde{b}$ respectivement.
Considérons deux ensembles paramétrés T^1 et T^2 qui sont en correspondance univoque avec $supp\widetilde{A}$ et $supp\widetilde{b}$ respectivement comme suit :
à $t_1 \in supp\widetilde{A}$ et $t_2 \in supp\widetilde{b}$ on associe par les bijections respectives A et b ce qui suit :

$$\begin{array}{l} A : supp\widetilde{A} \longrightarrow T^1 \\ t_1 \in supp\widetilde{A} \longrightarrow A(t_1) = (a_{ij}(t_1))_{i,j} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} b : supp\,\widetilde{b} \longrightarrow T^2 \\ t_2 \in supp\,\widetilde{b} \longrightarrow b(t_2) = (b_i(t_2))_i \end{array}$$

où :$a_{ij}(t_1) = t_{1ij}$ et $b_i(t_2) = t_{2i}$.
Posons $T = T^1 \times T^2$ et pour $(t_1, t_2) \in T = T^1 \times T^2$, $\mu(t) = min(\mu_{\widetilde{A}}(A(t_1), \mu_{\widetilde{b}}(b(t_2))$, c'est le degré de compatibilité de $A(t_1)$ et $b(t_2)$ avec les réstrictions définies par $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{b}}$.
Soient $(T^{\alpha_i})_i$ une subdivision de T définie de la manière suivante :

$$(T^{\alpha_i})_i = \{t = (t_1, t_2)/\alpha_{i-1} < \mu(t) \leq \alpha_i\}\,,\; i = 1, ..., l+1$$

où $\{\alpha_i\}_{i=0,\ldots,l+1}$ sont des nombres réels tels que : $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_l < \alpha_{l+1} = 1$
et les nombres réels $\{\tau_i\}_{i=1,\ldots,l+1}$ tels que : $0 = \tau_{l+1} < \tau_l < ... < \tau_2 < \tau_1 < 1$ choisis pour pénaliser $t \in T$ tels que $\mu(t)$ est au bas niveau .

Considérons le problème mathématique suivant :

$$(P_d)_1 \left\{ \begin{array}{ll} \max cx & \\ & \\ A(t_1)x - b(t_2) \leq \tau^m_{l+1} & (t_1, (t_2) \in T^{\alpha_{l+1}} \\ & \\ A(t_1)x - b(t_2) \leq \tau^m_{l} & (t_1, (t_2) \in T^{\alpha_{l}} \\ & \\ \vdots & \\ A(t_1)x - b(t_2) \leq \tau^m_{1} & (t_1, (t_2) \in T^{\alpha_{1}} \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n & \end{array} \right\}$$

où τ^m_j est un m-vecteur dont les composantes sont égales à τ_j.
Si les fonctions d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{b}}$ sont continues, $(P_d)_1$ sera un programme semi-infini.

Théorème 3 *Le programme mathématique suivant :*

$$(P_d)_2 \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \overline{A}^{\alpha_{l+1}}x - \tau_{l+1}^m \leq \underline{b}^{\alpha_{l+1}} \\ \\ \overline{A}^{\alpha_l}x - \tau_l^m \leq \underline{b}^{\alpha_l} \\ \\ \vdots \\ \overline{A}^{\alpha_1}x - \tau_1^m \leq \underline{b}^{\alpha_1} \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

où $\overline{A}^{\alpha_k} = sup\left\{A(t_1)/t_1 \in A^{\alpha_{k-1}}\right\}$ *et* $\underline{b}^{\alpha_k} = inf\left\{b(t_2)/t_2 \in b^{\alpha_{k-1}}\right\}; k = 1, ..., n$
est équivalent au programme $(P_d)_1$.

1.2 Chance-constrained programming with fuzzy coefficients

Dubois [15] a montré que la méthode "Chance-constrained programming" peut être appliquée aux contraintes en présence d'intervalles flous. Il propose de remplacer, dans "Chance-constrained programming" due à Charnes et Cooper [8], probabilité par :

1. possibilité
2. nécessité

définies dans [12] et en annexe A, section A.5.2.
Dans [15], compte tenu des relations existantes entre possibilité et nécessité à savoir que nécessité d'un ensemble flou est inférieure à sa possibilté, il a été déduit que les contraintes résultant du deuxième cas sont plus fortes que celle résultant du premier, d'où la distinction entre les deux comme suit :

1. Contraintes faibles :

$$(P_p^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

2. Contraintes fortes :

$$(P_n^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

Néanmoins, pour les deux autres possibilité et nécessité notées pos_3 et nec_2, définies dans [12] et en annexe A, section A.5.2, les contraintes suivantes sont intermédiaires :

3. Contraintes intermédiaires :

   – en utilisant pos_3

$$(P_{p_3}^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ pos_3(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

   – en utilisant nec_2

$$(P_{n_2}^c)' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ nec_2(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \alpha_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

En vertu des propriétés de pos, nec, pos_3 et nec_2 qui consistent à transformer les inégalités entre intervalles flous en inégalités entre nombres réels [15], les contraintes ci-dessus énumérées peuvent s'écrire sous formes linéaires déterministes comme suit :

1. Cas de contraintes faibles :

$$(P_p^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\alpha_i}, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

2. Cas de contraintes fortes :

$$(P_n^c)'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \underline{b}_i^{1-\alpha_i}, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

3. Cas de contraintes intérmediaires
   - en utilisant pos_3

$$(P^c_{p3})'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\alpha_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\alpha_i}, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

   - en utilisant nec_2

$$(P^c_{n_2})'' \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\alpha_i} x_j \leq \underline{b}_i^{1-\alpha_i}, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

1.3 Programmation linéaire multiobjectifs floue

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou suivant :

$$(P^1_{M.O.F}) \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c}_1 x, \widetilde{c}_2 x, ..., \widetilde{c}_k x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_r = (\widetilde{c}_{r1}, \widetilde{c}_{r2}, ..., \widetilde{c}_{rn})$ et les $\widetilde{c}_{rj}$, $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ sont des intervalles flous et $\mu_{\widetilde{c}_{rj}}$, $\mu_{\widetilde{a}_{ij}}$ et $\mu_{\widetilde{b}_i}$ leurs fonctions d'appartenance respectives.
Pour résoudre ce type de problème Sakawa et Yano [37] ont proposé "‘Interactive decision making method" comme suit :
Ils ont défini en premier lieu l'ensemble $\alpha-$niveau $L_\alpha((\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj})$ de $\widetilde{a}_{ij}$, $\widetilde{b}_i$ et $\widetilde{c}_{rj}$ comme suit :
$L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj}) = \Big\{(a_{ij}, b_i, c_{rj}) / \mu_{\widetilde{a}_{ij}}(a_{ij}) \geq \alpha,\ \mu_{\widetilde{b}_i}(b_i) \geq \alpha,\ \mu_{\widetilde{c}_{rj}}(c_{rj}) \geq \alpha,\ \ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq r \leq k\Big\}$.
Ensuite pour α donné et $a_{ij}, b_i, c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj})$, ils ont considéré le programme linéaire multiobjectifs déterministe suivant :

$$\alpha\text{−M.O.L.P} \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1 x, c_2 x, ..., c_k x) \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ (a_{ij}, b_i, c_{rj}) \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj}) \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

qu'ils appellent $\alpha-$multiobjectifs linéaire programme noté $\alpha-$M.O.L.P et les paramètres a_{ij}, b_i, c_{rj}

sont considérés comme des variables de décision et non des constantes.
Dans [37], pour le programme $\alpha-$M.O.L.P, l'ensemble des solutions admissibles a été représenté par $X(a_{ij}, b_i) = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\right\}$ et le concept de solution pareto-optimale a été introduit comme suit :

Définition 1 *(solution $\alpha-$pareto-optimale)[37]*
$x^* \in X(a^*_{ij}, b^*_i)$ est appelée solution $\alpha-$pareto-optimale de $\alpha-$M.O.L.P s'il n'existe pas $x \in X(a_{ij}, b_i)$, $a_{ij}, b_i, c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj})$ tel que $c_r x \leq c^*_r x^*$, $r \in \{1, ..., k\}$ avec $c_l x < c^*_l x^*$ pour au moins un $l \in \{1, ..., k\}$ où $(a^*_{ij}, b^*_i, c^*_{rj})$ sont appelés paramètres $\alpha-$niveau optimaux.

Au lieu de considérer seulement l'objectif flou à atteindre comme étant "'approximativement plus petit qu'une certaine valeur"', Sakawa et Yano [37] ont voulu considérer le cas général c'est à dire dans ce même programme, subdiviser l'ensemble des objectifs en 3 sous ensembles de telle sorte que l' objectif flou à atteindre pour chaque objectif, du premier sous ensemble est : "'approximativement inférieur à une certaine valeur"', du deuxième est :"' approximativement supérieur à une certaine valeur"' et du troisième est : "'approximativement égal à une certaine valeur"'. Et I_1, I_2 et I_3 (avec $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, ..., k\}$ et $I_i \cap I_j = \oslash$, $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, 3$.) représentent les ensembles des indices des objectifs de ces trois sous ensembles respectifs. Ce qui conduit à transformer le $\alpha-$M.O.L.P en un programme G$\alpha-$M.O.L.P plus général suivant :

$$\text{G}\alpha\text{−M.O.L.P}\left\{\begin{array}{ll} \min c_r x & (r \in I_1) \\ \\ \max c_r x & (r \in I_2) \\ \\ \mathit{equal}\; c_r x & (r \in I_3) \\ \\ x \in X(a_{ij}, b_i) & \\ \\ (a_{ij}, b_i, c_{rj}) \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj}) & \end{array}\right\}$$

avec $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, ..., k\}$ et $I_i \cap I_j = \oslash$, $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, 3$.

Vu La définition 1 de la solution $\alpha-$pareto-optimale, il est évident qu'il existe une infinité de solutions $\alpha-$pareto-optimales. Le choix de l'une d'elles par le décideur ne peut qu'être basé sur un jugement subjectif. Pour cela il est naturel que ce dernier propose pour chaque objectif, un objectif flou à atteindre qui peut être, pour un problème fuzzy min, "'approximativement plus petit qu'une certaine valeur"', pour fuzzy max, "'approximativement plus grand qu'une certaine valeur"' et pour fuzzy equal "'approximativement égal à une certaine valeur"' et qui peuvent être caractérisés par la fonction d'appartenance $\mu_r(c_r x)$ déterminée de manière subjective par le décideur qui en calculant le minimum et le maximum de chaque objectif sous les mêmes contraintes avec $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, les a établit comme suit :

1. $i \in I_1$

$$\mu_i(c_ix) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & (c_ix)_R^1 \geq c_ix \\ \\ D_{iR}(c_ix) & si & (c_ix)_R^1 < c_ix < (c_ix)_R^0 \\ \\ 0 & si & c_ix \geq (c_ix)_R^0 \end{array} \right\}$$

2. $i \in I_2$

$$\mu_i(c_ix) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & (c_ix)_L^0 \geq c_ix \\ \\ D_{iL}(c_ix) & si & (c_ix)_L^0 < c_ix < (c_ix)_L^1 \\ \\ 1 & si & c_ix \geq (c_ix)_L^1 \end{array} \right\}$$

3. $i \in I_3$

$$\mu_i(c_ix) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & c_ix \leq (c_ix)_L^0 \\ \\ D_{iL}(c_ix) & si & (c_ix)_L^0 \leq c_ix \leq (c_ix)_L^1 \\ \\ 1 & si & (c_ix)_L^1 \leq c_ix \leq (c_ix)_R^1 \\ \\ D_{iR}(c_ix) & si & (c_ix)_R^1 \leq c_ix \leq (c_ix)_R^0 \\ \\ 0 & si & (c_ix)_R^0 \leq c_ix \end{array} \right\}$$

où $D_{iR}(c_ix)$ et $D_{iL}(c_ix)$ sont respectivement des fonctions continues strictement décroissantes et croissantes ; $(c_ix)_L^0$ et $(c_ix)_R^0$ d'une part $(c_ix)_L^1$ et $(c_ix)_R^1$ d'autre part sont les cas les plus défavorables aux plus favorables niveaux pour c_ix.
Le problème se ramène à un programme multiobjectifs dont les fonctions objectifs sont des fonctions d'appartenance, d'où l'introduction par Sakawa et Yano [37] du concept de M-$\alpha-$pareto-optimalité comme suit :

Définition 2 *(solution M-$\alpha-$pareto-optimale)[37]*
$x^* \in X(a_{ij}^*, b_i^*)$ est appelée solution M-$\alpha-$pareto-optimale de $G\alpha-M.O.L.P$ s'il n'existe pas $x \in X(a_{ij}, b_i)$, $a_{ij}, b_i, c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj})$ tel que $\mu_r(c_rx) \geq \mu_r(c_r^*x^*)$, $r = 1, ..., k$ avec $\mu_r(c_rx) > \mu_r(c_r^*x^*)$ pour au moins un $r \in [1, ..., k\}$, où $(a_{ij}^*, b_i^*, c_{rj}^*)$ sont appelés paramètres $\alpha-$niveaux optimaux et $c_r = (c_{r1}.c_{r2}, ..., c_{rn})$.

Problème minmax

Le décideur choisit α et les fonctions d'appartenance de référence $\overline{\mu_r}$, $r = 1, 2, ..., k$, la solution M-$\alpha-$pareto-optimale correspondant à ce choix peut être obtenue en résolvant le problème minimax suivant :

$$(P^1_{M.O.D})_2 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(c_1x), \overline{\mu_2} - \mu_2(c_2x), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(c_kx)) \\ \\ x \in X(a_{ij}, b_i) \\ \\ (a_{ij}, b_i, c_{rj}) \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_{rj}). \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^1_D)_3 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(c_rx) \leq v & r = 1, ..., k \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & i = 1, 2, ..., m \\ \\ a_{ij}, b_i, c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \, \widetilde{b}_i, \, \widetilde{c}_{rj}) & \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} & \\ \end{array} \right\}$$

En remplaçant dans $(P^1_D)_3$, $\mu_r(c_rx)$ par son expression donnée au 2.3, pour $r \in I_1$, $r \in I_2$ et $r \in I_3$ et en tenant compte du fait que D_{rR} et D_{rL} sont respectivement décroissant et croissant, donc il en est de même pour D^{-1}_{rR} et D^{-1}_{rL} respectivement, nous pouvons alors conclure que $(P^1_D)_3$ est équivalent au programme suivant :

$$(P^1_D)_4 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ \\ c_rx \leq D^{-1}_{rR}(\overline{\mu}_r - v) & r \in I_1 \cup I_3 \\ \\ c_rx \geq D^{-1}_{rL}(\overline{\mu}_r - v) & r \in I_2 \cup I_3 \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & i = 1, 2, ..., m \\ \\ a_{ij}, b_i, c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{a}_{ij}, \, \widetilde{b}_i, \, \widetilde{c}_{rj}) & \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} & \\ \end{array} \right\}$$

Puisque $c_r \in \widetilde{c}^\alpha_r = [c^L_{r\alpha}, c^R_{r\alpha}]$, $a_{ij} \in \widetilde{a}^\alpha_{ij} = [a^L_{ij\alpha}, a^R_{ij\alpha}]$ et $b_i \in \widetilde{b}^\alpha_i = [b^L_{i\alpha}, b^R_{i\alpha}]$, nous pouvons obtenir une solution optimale du $(P_D^1)_3$ en résolvant le programme suivant :

$$(P_D^1)_5 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ c^L_{r\alpha}x \leq D^{-1}_{rR}(\overline{\mu}_r - v) & r \in I_1 \cup I_3 \\ c^R_{r\alpha}x \geq D^{-1}_{rL}(\overline{\mu}_r - v) & r \in I_2 \cup I_3 \\ \sum_{j=1}^n a^L_{ij\alpha}x_j \leq b^R_{i\alpha} & i = 1, 2, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} & \end{array} \right\}$$

Théorème 4 *[37]*

1. *Si x^* est une solution optimale unique du problème $(P_D^1)_5$, alors x^* est M-$\alpha-$pareto-optimale du problème $G\alpha-M.O.L.P.$*
2. *Si x^* est M-$\alpha-$pareto-optimale du problème $G\alpha-M.O.L.P$, x^* est une solution optimale du problème $(P_D^1)_5$ pour $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, ..., \overline{\mu}_k)$.*

Le test de M-$\alpha-$pareto-optimalité de la solution optimale x^* peut être obtenu par la formulation et la résolution du programme suivant :

$$(P_D^1)_6 \left\{ \begin{array}{lll} \min \sum_{i=1}^k \epsilon_i & & \\ c^L_{r\alpha}x + \epsilon_r = c^L_{r\alpha}x^* & \epsilon_r \geq 0 & r \in I_1 \cup I_3 \\ c^R_{r\alpha}x - \epsilon_r = c^R_{r\alpha}x^* & \epsilon_r \geq 0 & r \in I_2 \cup I_3 \\ \sum_{j=1}^n a^L_{ij}x_j \leq b^R_i & i = 1, 2, ..., m & \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} & & \end{array} \right\}$$

Soient $\overline{x}$ et $\overline{\epsilon}$ une solution optimale du problème $(P_D^1)_6$. Si pour tout $i = 1, 2, ..., k$, $\overline{\epsilon} = 0$, alors x^* est une solution M-$\alpha-$pareto-optimale. Si pour au moins un $i \in \{1, 2, ..., k]$, $\overline{\epsilon} > 0$, il est facile de montrer que $\overline{x}$ est une solution M-$\alpha-$pareto-optimale.

Chapitre 2

Programmation linéaire multiobjectifs stochastique

Lors de la formulation mathématique d'un problème de décision ou d'optimisation qui se ramène à un programme linéaire uniobjectif ou multiobjectifs. Supposer que les données sont déterministes ou constantes est une hypothèse peu réaliste compte tenu du fait qu'elles peuvent être aléatoires de par leurs variabilités et des expériences précédentes, donc représentées par des variables aléatoires. Ce qui a donné naissance à la programmation linéaire stochastique uniobjectif ou multiobjectifs.

2.1 Programmation linéaire stochastique

Un programme linéaire stochastique est un programme linéaire en présence de variable(s) aléatoire(s) définie(s) sur un espace de probabilié (Ω, F, P) de distribution connue.
Considérons le programme linéaire stochastique suivant :

$$(P_S)\left\{\begin{array}{l} \max c(\omega)x \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ...m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

avec $c(\omega) = (c_1(\omega), ..., c_n(\omega))$ où $c_i(\omega)$, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) et $x_j, j = 1, ...n$ sont des nombres réels positifs

Il y a essentiellement deux différents types de modèles en programmation linéaire stochastique qui sont :

1. méthode passive ou "‘wait and see"
2. méthode active ou "‘here and now"

2.1.1 Méthode passive

Le décideur peut attendre la réalisation des variables aléatoires et résoudre le programme déterministe résultant. Dans ce modèle, on s'intéresse généralement à la distribution de probabilité de la valeur optimale ou à son espérance mathématique et/ou sa variance.

Comme l'approche passive, relevant de la philosophie du "wait and see", concerne plus les problèmes prévisionnels, nous allons dans ce travail focaliser sur la philosophie du "‘here and now"’.

2.1.2 Méthode active

Cette méthode est basée sur la décision sur x ou stratégie sur x qui est prise à l'avance, avant les réalisations des variables aléatoires.

Résoudre le programme (P_S), revient à lui associer un programme déteministe équivalent comme suit :

2.1.3 Objectif du programme équivalent

Considérons le programme linéaire stochastique sous la forme suivante :

$$(P_S^1)\left\{\begin{array}{l} \max c(\omega)x \\ \\ x \in D = \{x/Ax \leq b,\ x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où c est un vecteur aléatoire et $A = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$ sont déterministes.

Pour établir la fonction objectif du problème équivalent, nous avons plusieurs méthodes dans la littérature. Parmi elles, nous considérons les méthodes suivantes :

- E-modèle
  la méthode E-modèle est la plus utilisée, elle consiste à remplacer la variable aléatoire de l'objectif par son espérance mathématique pour obtenir le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_d^1)_1\left\{\begin{array}{l} \max E(c(\omega))x \\ \\ x \in D = \{x/Ax \leq b,\ x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

– V-modèle
La minimisation de la variance appelée V-modèle comme suit :

Dans le cas où c est un vecteur aléatoire d'espérance $\overline{c}$, de matrice de covariance V. La variance de $c(\omega)x$ est x^tVx il en résulte de la méthode V-modèle le programme déterministe suivant :

$$(P_d^1)_2 \left\{ \begin{array}{l} \min x^tVx \\ \\ x \in D = \{x/Ax \leq b,\ x \geq 0\} \end{array} \right\}$$

– P-modèle ou méthode à risque minimum
La maximisation de la probabilité que la valeur de l'objectif est au moins égale à un certain niveau u choisi par le décideur est appelée P-modèle ou méthode à risque minimum.

$$(P_d^1)_3 \left\{ \begin{array}{l} \max \{P_u(c(\omega)x) = P(\omega/c(\omega)x \geq u)\} \\ \\ x \in D = \{x/Ax \leq b,\ x \geq 0\} \end{array} \right\}$$

La solution de ce problème, dans le cas gaussien, est donnée par le programme fractionnel suivant :

$$(P_d^1)_3' \left\{ \begin{array}{l} \max \frac{\overline{c}x-u}{x^tVx} \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

où $\overline{c}$ est l'espérance mathématique de $c(\omega)$, V sa matrice de covariance et x^tVx la variance de $c(\omega)x$.

– Méthode de Katoka
La maximisation de $\alpha-$fractile de la fonction de distribution de l'objectif où α est choisi par le décideur.

$$(P_d^1)_4 \left\{ \begin{array}{l} \max u \\ P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Dans le cas gaussien on a :
$P(\omega/c(\omega)x > u) = \alpha \Longleftrightarrow P(\omega/c(\omega)x \leq u) = 1 - \alpha.$ et
$P(\omega/c(\omega)x \leq u) = P\left\{\omega/\frac{c(\omega)x-\overline{c}x}{\sqrt{x^tVx}} \leq \frac{u-\overline{c}x}{\sqrt{x^tVx}}\right\} = \phi(\frac{u-\overline{c}x}{\sqrt{x^tVx}})$
où ϕ est la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.
Donc :
$P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha \Longleftrightarrow \phi(\frac{u-\overline{c}x}{\sqrt{x^tVx}}) = 1 - \alpha \Longleftrightarrow u = \overline{c}x - \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx}.$
par conséquent résoudre le problème $(P_d^1)_4$ revient, dans ce cas gaussien, à résoudre le problème suivant :

$$(P_d^1)_4' \left\{ \begin{array}{l} \max \overline{c}x - \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx} \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

$\overline{c}x - \phi^{-1}(\alpha)\sqrt{x^tVx}$ est concave si $\phi^{-1}(\alpha) \geq 0 \Longleftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{2}$.
ce quit revient à dire, si on revient au problème $(P_d^1)_4$, si $P(\omega/c(\omega)x \geq u) = \alpha \geq \frac{1}{2}$, avoir le maximum de gain avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$
($\alpha = 1$ on revient au E-modèle).

2.1.4 Contraintes du programme équivalent

La première méthode utilisée pour la résolution d'un programmation linéaire stochastique consiste à remplacer chacune des variables aléatoires des contraintes par leurs espérances mathématiques respectives et résoudre le programme déterministe résultant.

L'exemple suivant montre le manque de réalisme d'une telle méthode.

Exemple 2 *[21]*

Considérons le programme linéaire stochastique suivant :

$$P_S^2 \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + x_2 \\ \\ a(\omega)x_1 + x_2 \geq 7 \\ \\ b(\omega)x_1 + x_2 \geq 4 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où le couple de variables aléatoires $(a(\omega), b(\omega))$ est uniformément distribué sur le rectangle suivant : $\left\{(\alpha, \beta)/1 \leq \alpha \leq 4, \frac{1}{3} \leq \beta \leq 1\right\}$.
En remplaçant $a(\omega)$ et $b(\omega)$ par leurs espérances mathématiques respectives $E(a)$ et $E(b)$ avec $E(a) = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$ et $E(b) = \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3}$, on obtient le programme déterministe suivant :

$$P_d^2 \left\{ \begin{array}{l} \min x_1 + x_2 \\ \\ \frac{5}{2}x_1 + x_2 \geq 7 \\ \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 \geq 4 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

dont l'unique solution optimale est $x_1^* = \frac{18}{11}$ et $x_2^* = \frac{32}{11}$.
Cherchons la probabilité pour que cette solution soit réalisable :
$P\left\{a(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 7, b(\omega)x_1^* + x_2^* \geq 4\right\} = P\left\{a(\omega) \geq \frac{5}{2}, b(\omega) \geq \frac{3}{2}\right\} = P(a(\omega) \geq \frac{5}{2}).P(b(\omega) \geq \frac{2}{3}) =$

$(1-F_a(\frac{5}{2}))(1-F_b(\frac{2}{3}))=\frac{1}{4}$, où F_a et F_b sont les fonctions de répartitions des variables aléatoires respectives $a(\omega)$ et $b(\omega)$.
La probabilité pour que cette solution soit réalisable est donc faible, ce qui montre le manque de réalisme d'une telle méthode.

Pour la résolution du programme linéaire stochastique (P_S), il existe dans la littérature deux méthodes essentielles à savoir "'méthode avec recours"' et "'Chance constrained programming"' qui consistent respectivement à transformer :
- le programme (P_S) en un programme déterministe équivalent en introduisant des fonctions de pénalité pour la violation des contraintes stochastiques et ajouter l'espérance de leurs coûts à la fonction économique d'origine.
- les contraintes stochastiques du programme (P_S) en des contraintes déterministes équivalentes en considérant la probabilité de leurs réalisations, simultanément ou séparément, au moins égale à un seuil ou à des seuils choisi(s) par le décideur.

"'Chance constrained programming"' accepte la violation des contraintes jusaqu'à un certain seuil choisi par le décideur, par contre "'méthode avec recours"' ne le permet pas, par conséquent des fonctions de pénalité peuvent fournir un moyen pour ajouter un coût de violations à la fonction économique comme suit :

2.1.5 Programmation linéaire stochastique avec recours

Une première formulation de ce problème appelée "'méthode avec recours"' ou "'programmes à deux étapes"' est due à Dantzig [11] :

Soit y une décision corrective ou appelé recours, prise pour compenser $q(\omega)$ un vecteur de pénalisation du recours,$q(\omega)y$ est la pénalité introduite pour compenser ces violations.

$$(P_d)\left\{\ \min E(c(\omega)x + min\,(q^t(\omega)y/W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x, x \geq 0, y \geq 0/y)\ \right\}$$

$Q(x,\omega) = min\left\{q^t(\omega)y/W(\omega)y = b(\omega) - A(\omega)x, x \geq 0, y \geq 0/y\right\}$ correspond au problème recours ou est deuxième niveau

On pose : $K = (x \in R^n/Q(x,\omega) < +\infty$ avec une probabilité égale à 1)
Soit P_ω une distribution de probabilité, on pose :
$\overline{c} = E_\omega(c(\omega)) = \int_\Omega c(\omega)dP_\omega$ et $Q(x) = \int_\Omega Q(x,\omega)dP_\omega$ alors le programme s'écrit sous la forme suivante :

$$(P_d)\left\{\begin{array}{l} \min \overline{c}x + Q(x) \\ \\ x \in B = \{x \in R^n/x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

Dans le cas où P_ω est une distribution de probabilité discrète et finie telle que $P_\omega(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ..., r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$, on a $Q(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i q(\omega_i) y^i$
Alors le programme s'écrit sous la forme suivante :

$$(P_d) \left\{ \begin{array}{l} \min \bar{c}x + \sum_{i=1}^{r} p_i q(\omega_i) y^i \\ \\ A(\omega_i)x + W(\omega_i)y^i = b(\omega_i),\ i = 1, 2, ..., r \\ \\ x \in B, y^i \geq 0 \end{array} \right\}$$

Simple recours

Dans le cas où $W(\omega) = W$ est fixe, c'est une matrice non stochastique qui se présente sous la forme $W = (I, -I)$ où $I(m \times m)$ est la matrice identité.

Définition 3 *[21]*
$W = (I, -I)$, où $I(m \times m)$ est la matrice identité, est appelée matrice de simple recours.

Les violations des contraintes originales qui apparaissent aprés le choix de la décision $x \in B$ et la réalisation de $A(\omega)$ et $b(\omega)$ valent $q(\omega)$.
Il est préférable de représenter le deuxième étage du programme sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Q(x,}\omega) = min\ \{q^+(\omega)y^+ + q^-(\omega)y^- \\ \\ \mathrm{y}^+ - y^- = b(\omega) - A(\omega)x \\ \\ \mathrm{y}^+ \geq 0, y^- \geq 0 \\ \\ \mathrm{y}^+,\ y^- \in R^n \end{array} \right\}$$

Théorème 5 *$Q(x, \omega)$ est fini si et seulement si $q^+(\omega) + q^-(\omega) \geq 0$ avec une probabilité égale à 1.*

2.1.6 Chance constrained programming

Etant donné que la méthode Chance constrained programming focalise sur les contraintes, nous considérons alors un programme linéaire stochastique dont l'objectif est déterministe comme suit :

$$(P_S^3) \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

avec $c = (c_1, ..., c_n)$ où c_i sont des nombres réels et a_{ij} et b_i pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ sont des variables aléatoires de distribution connue sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) et $x_j, j = 1, ..., n$ sont des nombres réels positifs

Il y a essentiellement deux différentes versions de "Chance constrained programming " qui consistent à :
- remplacer l'ensemble des contraintes par la probabilité (jointe) de leurs réalisations simultanées au moins égale à un seuil convenablement choisi par le décideur pour la première version
- remplacer chaque contrainte par la probabilité de sa réalisation au moins égale à un seuil choisi par le décideur, pour la seconde version ;

comme suit :
- Première version :

$$(P_d^3)_1 \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ P\left\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega),\ i = 1, 2, ..., m\right\} \geq \alpha, \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

- Deuxième version :

$$(P_d^3)_2 \left\{ \begin{array}{l} \max cx \\ \\ P\left\{\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

La deuxième version est plus avantageuse que la première car le décideur peut choisir pour chaque contrainte $A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)$ suivant les données du problème, le seuil α_i tel que $P(\omega / A_i(\omega)x \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i$.

Soient :
- $X(\alpha) = \left\{x \geq 0 / P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega),\ i = 1, ..., m) \geq \alpha\right\}$, l'ensemble des solutions admissibles pour $(P_d^3)_1$

- $X_i(\alpha_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\right\}$, l'ensemble des solutions admissibles pour $(P_d^3)_2$.

La question qui se pose : Les ensembles $X(\alpha)$ et $X_i(\alpha_i)$ sont-ils convexes ? car ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant([21] :

Exemple 3 *[21]*

Soit $X(\omega) = (x_1(\omega), x_2(\omega))$ *un vecteur aléatoire tel que* $P\{\omega/(x_1(\omega_1), x_2(\omega_1)) = (3,1)\} = \frac{1}{3}$ *et* $P\{\omega/(x_1(\omega_2), x_2(\omega_2)) = (-3,-2)\} = \frac{2}{3}$.
Nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{lll} x \leq \frac{1}{3} & \textit{pour} & 3x \leq 1 \quad -3x \leq -2 \\ \\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} & \textit{pour} & 3x \nleq 1 \quad -3x \nleq -2 \\ \\ x \geq \frac{2}{3} & \textit{pour} & 3x \nleq 1 \quad -3x \leq -2 \end{array}\right\}$$

d'où :

$$P\{\omega A(\omega)x \leq b(\omega)\} = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{3} & si & x \leq \frac{1}{3} \\ \\ 0 & si & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & si & x \geq \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

$$X(\alpha) est \left\{\begin{array}{ll} \textit{disjoint donc non convexe pour} & 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \\ \textit{convexe pour} & \frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{2}{3} \\ \\ \textit{vide pour} & \alpha > \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$

Nous allons voir par la suite que $X(\alpha)$ (resp. $X_i(\alpha_i)$) peut être convexe si les variables aléatoires sont normales ou discrètes et sous certaines conditions concernant les valeurs de α (resp. α_i).
Seuls les cas où α (resp. α_i.) est égal à 0 ou 1 ou le cas où A (resp. A_i esr déterministe et b (resp. b_i) est aléatoire nous assure la convexité de $X(\alpha)$ (resp. $X_i(\alpha_i)$) quelque soit la distribution de probabilité de variables aléatoires b (resp. b_i).

Théorème 6 *[21]*

- $X(0)$ *et* $X(1)$ *sont convexes*
- $X_i(0)$ *et* $X_i(1)$ *sont convexes*

Théorème 7 *[21]*
Si les a_{ij} *sont détérministes et* b_i *stochastiques.*
alors :

- $X(\alpha)$ *est convexe pour toute distribution de probabilité de* b
- $X_i(\alpha_i)$ *est convexe pour toute distribution de probabilité de* b_i.

Preuve.
$P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow 1 - P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow 1 - F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \geq \alpha_i$, $i = 1, ..., m$.

$1 - F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \geq \alpha_i \Leftrightarrow F_{b_t}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j) \leq 1 - \alpha_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$.
$X(\alpha_i) = \left\{ x \geq 0 / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i) \right\}, \; i = 1, 2, ..., m$

Théorème 8 *[21]*
Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité, et la distribution de probabilité discrète et finie $p(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ..., r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$.
Alors :
– *pour $\alpha > 1 - min_{k\in(1,2,...,r)}p_k$ l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe*
– *pour $\alpha_i > 1 - min_{k\in(1,2,...,r)}p_k$, l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.*

Théorème 9 *[21]*
Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m \times n)$ et du vecteur $b(m \times 1)$ respectivement.
Si a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, b_i sont (n+1) variables aléatoires normales d'espérances mathématiques μ_{i1}, μ_{i2}, ..., μ_{in}, λ_i et de variances σ_{i1}^2, σ_{i2}^2, ..., σ_{in}^2, δ_i^2 respectivement,
alors :
– *pour $\alpha > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X(\alpha)$ est convexe*
– *pour $\alpha_i > \frac{1}{2}$, l'ensemble $X_i(\alpha_i)$ est convexe.*

Preuve.
Montrons que $X_i(\alpha_i)$ est convexe.
Posons $y_i(x, \omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)), i = 1, ..., m$ c'est une combinaison linéaire de $n+1$ variables aléatoires normales. Donc $y_i(x, \omega)$ est une variable aléatoire normale de moyenne $E(y_i(x, \omega)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}x_j - \lambda_j$ et de variance $V(y_i(x, \omega)) = z^t S_i z$ où $z = (x_1, x_2, ..., x_n, -1)^t$ et $S_i((n+1) \times (n+1))$ est la matrice de covariance suivante :

$$\mathbf{S_i} = \begin{pmatrix} V(a_{i1}) & Cov(a_{i1}, a_{i2}) & \dots & Cov(a_{i1}, a_{in}) & Cov(a_{i1}, b_i) \\ Cov(a_{i2}, a_{i1}) & V(a_{i2}) & Cov(a_{i2}, a_{i3}) & \dots & Cov(a_{i2}, b_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(a_{in}, a_{i1}) & Cov(a_{in}, a_{i2}) & \dots & V(a_{in}) & Cov(a_{in}, b_i) \\ Cov(b_i, a_{i1}) & Cov(b_i, a_{i2}) & \dots & Cov(b_i, a_{in}) & V(b_i) \end{pmatrix}$$

où V et Cov représentent respectivement variance et Covariance.
Posons :
$m_{y_i}(x) = E(y_i(x, \omega))$, $\sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x, \omega))$ et $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x, \omega))}$.
Nous avons :
$P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) = P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega) \leq 0) = P(\omega / \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)})$.
Donc :
$P(\omega / \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow P(\omega / \frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i$.
$\frac{y_i(x,\omega) - m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite et soit ψ sa fonction de distributiion qui est strictement croissante et bijective de l'ensemble des nombres réels R dans]0,1[.

Donc $P(\omega/\frac{y_i(x,\omega)-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \leq \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) = \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)})$. Par conséquent :
$P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i \Leftrightarrow \psi(\frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)}) \geq \alpha_i \Leftrightarrow \frac{-m_{y_i}(x)}{\sigma_{y_i}(x)} \geq \psi^{-1}(\alpha_i) \Leftrightarrow \psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0$
$X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$.
La matrice S_i est définie positive donc $\sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x,\omega))$ et $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$ sont convexes en x et $m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$ est linéaire affine en x. Alors $X_i(\alpha_i)$ est convexe si $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$, i.e. $\alpha_i \geq \frac{1}{2}$ car $\psi^{-1}(\alpha_i) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha_i \geq \psi(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque 3 *A partir de la preuve du théorème 9, on voit qu'on peut représenter aisément* $X_i(\alpha_i) = \left\{x/P(\omega/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)) \geq \alpha_i\right\}$ *par :*

- $X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sigma_{y_i}(x) + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$ *où* ψ^{-1} *est la fonction réciproque de la fonction de répartition de la variable aléatoire normale centrée réduite.*
  Pour cela, il suffit de poser $y_i(x,\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)) \leq 0$, *et calculer :*
  $m_{y_i}(x) = E(y_i(x,\omega))$, $\sigma_{y_i}^2(x) = V(y_i(x,\omega))$ *et* $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{V(y_i(x,\omega))}$, *avec* $V(y_i(x,\omega)) = z^t S_i z$ *où* $z = (x_1, x_2, ..., x_n, -1)^t$ *et* $S_i((n+1) \times (n+1))$ *est la matrice de covariance de* $y_i(x,\omega)$.
- $X_i(\alpha_i) = \left\{x/\psi^{-1}(\alpha_i)\sqrt{\sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2} + m_{y_i}(x) \leq 0\right\}$ *si* a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, b_i *sont indépendantes. Car dans ce cas* $Cov(a_{ij}, a_{ik}) = 0, \forall j \neq k, 1 \leq j, 1 \leq k \leq n$ *et* $Cov(a_{ij}, b_i) = 0$, $\forall j = 1, ..., n$; *donc* $\sigma_{y_i}^2(x) = \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2$ *et* $\sigma_{y_i}(x) = \sqrt{\sigma_{ij}^2 x_j^2 + \delta_i^2}$.

2.2 Programmation linéaire multiobjectifs stochastique

Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant :

$$(P^1_{M.O.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega), i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$, $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$ avec $1 \leq r \leq k$, $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq m$ sont des variables aléatoires de distribution connue.

2.2.1 Programme de risque minimal multiple

Considérons le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant dont les contraintes sont déterministes.

$$(P^2_{M.O.S})\left\{\begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i=1,...m \\ \\ x_j \geq 0, j=1,...n \end{array}\right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires et a_{ij} et b_i sont déterministes.
Posons $D = \left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i / x_j \geq 0, j=1,...n,\ i=1,2,...,m\right\}$.

Dans [40], Stancu-Minasian et Wets ont considéré un cas général de probleme de risque minimal multiple comme suit : la maximisation des probabilités que les valeurs des k objectifs sont au moins égales à des seuils de pérformance u_k, il en résulte le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^2_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1), P(\omega/c_2(\omega)x \geq u_2), ..., P(\omega/c_k(\omega)x \geq u_k)) \\ \\ x \in D. \end{array}\right\}$$

$(P^2_{M.O.D})$ est appelé problème à rique minimal multiple à niveaux $u_1, u_2, ..., u_k$.

Supposons que chaque vecteur aléatoire $c_r(\omega)$ est gaussien avec l'espérance mathématique $\overline{c}_r$ et la matrice de covariance V_r.
Les solutions de bon compromis de $(P^2_{M.O.D})$ peuvent être obtenues en considérant le problème suivant : [9]

$$(P^2_{M.O.D})'\left\{\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^k \lambda_i P(\omega/c_i(\omega)x \geq u_i) \\ \\ x \in D. \end{array}\right\}$$

ou maximiser la probabilité jointe [22] comme suit :

$$(P^2_{M.O.D})"'\left\{\begin{array}{l} \max P\left\{\omega/c_1(\omega)x \geq u_1, c_2(\omega)x \geq u_2, ..., c_k(\omega)x \geq u_k\right\} \\ \\ x \in D. \end{array}\right\}$$

Pour la résolution du problème $(P^2_{M.O.D})$, Stancu-Minasian a proposé la méthode suivante : résolvons le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \max P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

Soit p_1 sa valeur optimamle. On résout ensuite le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \max P(\omega/c_2(\omega)x \geq u_2) \\ \\ P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1 \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

où ϵ_1 est donné et $P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1$ a pour équivalent déterministe, la contrainte $\overline{c}_1 x + \phi^{-1}(1 - p_1 + \epsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1$
ainsi de suite...

$$\left\{\begin{array}{l} \max P(\omega/c_k(\omega)x \geq u_k) \\ \\ P(\omega/c_1(\omega)x \geq u_1) \geq p_1 - \epsilon_1 \\ \\ \vdots \\ P(\omega/c_{k-1}(\omega)x \geq u_{k-1}) \geq p_{k-1} - \epsilon_{k-1} \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

qui a pour équivalent déterministe le programme suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \max \frac{\overline{c}_k x - u_k}{x^t V_k x} \\ \\ \overline{c}_1 x + \phi^{-1}(1 - p_1 + \epsilon_1)\sqrt{x^t V_1 x} \geq u_1 \\ \\ \vdots \\ \overline{c}_{k-1} x + \phi^{-1}(1 - p_{k-1} + \epsilon_{k-1})\sqrt{x^t V_{k-1} x} \geq u_{k-1} \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

D'autre part Contini [10] a développé un algorithme selon l'approche du "'Stochastic goal programming"' dans le cas où les variables aléatoires sont normales et dont l'espérance mathématique et la variance sont données. Il a établit une équivalence entre le programme stochastique et un programme quadratique déterministe dont le but est de maximiser la probabilité que la fonction objectif appartienne à une région bien déteminée.

2.2.2 Stochastic goal programming

Contini [10] ajoute un vecteur aléatoire $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$ qui suit une loi normale d'espérance 0 et de matrice de covariance V.

Le problème revient donc à maximiser $z_k(x) = c_{k1}(\omega)x_1 + c_{k2}(\omega)x + ... + c_{kN}(\omega)x_N + u_k(\omega) = C'_k(\omega)x + u_k(\omega)$, $k = 1, 2, ..., r$
Soient $z = (z_1, z_2, ..., z_r)$, et $\overline{z}_i$ la valeur que le décideur souhaite qu'elle soit atteinte par z_i. L'egalité $z_i = \overline{z}_i$ ne peut avoir lieu à cause des perturbations dues au facteur aléatoire u.
Alors un domaine Y^* tel que $\overline{z} \in Y^*$, est choisi au départ, ensuite le problème revient à déterminer le vecteur x qui maximise la probabilité que $z \in Y^*$ d'où le modèle suivant :

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \max P(z(x) \in Y^*) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

Etant donné que u est un vecteur aléatoire normale, le domaine Y^* est un ellipsoide de E^r centré en $\overline{z}$ représenté comme suit :
$Y^* = \left\{ y = (y_1, y_2, ..., y_r)/(y - \overline{z}^t)V^{-1}(y - \overline{z}) \leq e^2 \right\}$ où e est un scalaire convenablement choisi.

Théorème 10 *[10]*
la solution optimale du problème (P) est obtenue par la résolution du problème quadratique suivant :

$$(P)' \left\{ \begin{array}{l} \min \overline{z}^t V^{-1} z + x^t (C^t V^{-1} C) x + 2(C^t V^{-1} \overline{z})^t \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

En pratique, on peut se trouver face à des situations où les valeurs des variables aléatoires sont mal connues, imprécises, exprimées linguistiquement, et donc peuvent être représentées par par des intervalles flous. Ce qui a valu l'introduction du concept de variables aléatoires floues. Leur présence dans un programme linéaire uni ou multiobjectifs peut s'avérer plus que nécessaire pour ne pas s'éloigner de la réalité du problème. Ce qui a donné naissance à la programmation linéaire unie ou multiobjectifs floue stochastique que nous considérons aux deux chapitres suivants.

Chapitre 3

Programmation linéaire floue stochastique

Il existe des situations dans un contexte d'optimisation ou de décision où les deux principales incertitudes, à savoir le flou et l'aléa, ne sont pas mutuellement exclusives. Elles peuvent se trouver combinées. Ce à quoi nous nous intéressons dans ce chapitre et dans le chapitre suivant où nous prenons en considération la co-existence du flou et de l'aléa dans un programme linéaire uniobjectif ou multiobjectifs. C'est ce qui a donné naissance à la programmation linéaire floue stochastique uniobjectif ou multiobjectifs.
Certains chercheurs se sont intéressés à la résolution de ce type de problèmes tels que Wang et Qiao [43], Katagiri *et al.* [23], Jun. Li et col.[29], E.E. Ammar[3] et Iskander [20] et bien d'autres.

Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison du flou et l'aléa comme le montre l'exemple suivant du à Kwakernaak [27].
'On interroge des individus sur la caractérisation de l'été en Europe"'.
La réponse est : 'chaud', 'trés chaud'.
Elle est :

1. aléatoire car tout dépend du lieu (pays) et des étés précédents.
2. floue car elle est vague.

Donc la réponse peut être représentée par une variable aléatoire dont les valeurs sont floues, autrement dit par une variable aléatoire floue, ce qui a motivé l'introduction de ce concept en premier lieu par Kwakernaak [27]. Plus tard, d'autres auteurs tels que Kruse et Meyer [26], Puri et Ralescu [35] et récemment I. Couso et D. Dubois [19] ont proposé d'autres interprétations de ce concept.

3.1 Variables aléatoires floues

Kwakernaak [27] considère une variable aléatoire floue comme une variable aléatoire dont les valeurs sont des intervalles flous comme suit :

Définition 4 *[27]*
Soit (Ω, F, P) *un espace de probabilité .*
Une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ *est une application de* (Ω, F, P) *à valeurs dans l'ensemble des intervalles flous* $F(R)$ *comme suit :*

$$\widetilde{X} : \Omega \to F(R)$$

$$\omega \to \widetilde{X}(\omega)$$

$\alpha -$ *coupe de* $\widetilde{X}$ *est* $\widetilde{X}^{\alpha}(\omega) = [\underline{X}^{\alpha}(\omega), \overline{X}^{\alpha}(\omega)]$ *où*
$\underline{X}^{\alpha}(\omega) = inf\,\{x/X(\omega)(x) \geq \alpha\}\,,\, \overline{X}^{\alpha}(\omega) = sup\,\{x/X(\omega)(x) \geq \alpha\}$
et $X(\omega)$ *est la fonction d'appartenance de* $\widetilde{X}$*.*

Dans ce qui suit nous allons définir les différentes sortes de variables aléatoires floues à savoir les variables aléatoires floues discrètes, normales, discrètes de type *L-R* et normales de type *L-R*.

3.1.1 Variables aléatoires floues discrètes

Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité , et $p(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ..., r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_k = 1$, une distribution de probabilité discrète.
Une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ est dite discrète si à chaque réalisation aléatoire $\omega \in \Omega$, la valeur $\widetilde{X}(\omega)$ est un intervalle flou comme suit :
$P(\widetilde{X}(\omega_k) = \widetilde{a}_k) = p_k$, $k = 1, 2, ..., r$ où $\widetilde{a}_k$, $k = 1, 2, ..., r$ sont des intervalles flous.

Exemple 4 *Soit* (Ω, F, P) *un espace probabilisé où :*
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ *un espace discret fini,* P_ω *la distribution de probabilité suivante :*

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; \quad P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

On considère la variable aléatoire floue discrète $\widetilde{X}$ *dans le cas où* $\widetilde{X}(\omega_1)$ *et* $\widetilde{X}(\omega_2)$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance peuvent être discrètes ou continues comme suit :*

- $Im\widetilde{X}(\omega) = \{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2\}$ *où* $\widetilde{a}_1$ *et ,*$\widetilde{a}_2$ *sont des nombres flous dont les fonctions d'appartenance respectives* $\mu_{\widetilde{a}_1}$ *et* $\mu_{\widetilde{a}_2}$ *sont discrètes telles que* $\mu_{\widetilde{a}_1}(1) = \mu_{\widetilde{a}_2}(1) = 0.2$, $\mu_{\widetilde{a}_1}(3) = \mu_{\widetilde{a}_2}(4) = 0.9$, $\mu_{\widetilde{a}_1}(5) = \mu_{\widetilde{a}_2}(6) = 0.6$. *et* $P(\widetilde{X}(\omega_1) = \widetilde{a}_1) = 0.25$ *et* $P(\widetilde{X}(\omega_2) = \widetilde{a}_2) = 0.75$.
  On obtient les variables aléatoires réelles discrètes X_1, X_2, X_3. *dont les distributions de probabilité*

ainsi que leur degré de compatibilité avec $\widetilde{X}$ *sont comme suit :*

$$\left\{\begin{array}{lll} P\{X_1(\omega_1)=1\}=0.25 & P\{X_1(\omega_2)=2\}=0.75 & X(\omega)(X_1)=0.2 \\ P\{X_2(\omega_1)=3\}=0.25 & P\{X_2(\omega_2)=4\}=0.75 & X(\omega)(X_2)=0.9 \\ P\{X_3(\omega_1)=5\}=0.25 & P\{X_3(\omega_2)=6\}=0.75 & X(\omega)(X_3)=0.6 \end{array}\right\}$$

– $Im\widetilde{X}(\omega)=\left\{\widetilde{4},\widetilde{5}\right\}$ *où* $\widetilde{4}$ *et* $\widetilde{5}$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance respectives sont continues et définies comme suit :*

$$\mu_{\widetilde{4}}=\left\{\begin{array}{lll} 0 & si & x\leq 3 \\ x-3 & si & x\in]3,4] \\ 1 & si & x\in]4,5] \\ -x+6 & si & x\in]5,6] \\ 0 & si & x>6 \end{array}\right\}$$

$$\mu_{\widetilde{5}}=\left\{\begin{array}{lll} 0 & si & x\leq 4 \\ x-4 & si & x\in]4,5] \\ 1 & si & x\in]5,6] \\ -x+7 & si & x\in]6,7] \\ 0 & si & x>7 \end{array}\right\}$$

Et l'on a $P(\widetilde{X}(\omega_1)=\widetilde{4})=0.25$ *et* $P(\widetilde{X}(\omega_2)=\widetilde{5})=0.75$.
Il existe une infinité de variables aléatoires réelles X_k *telles que* $X(\omega)(X_k)=\alpha_k\in(0,1]$.
On peut extraire certaines parmi elles en considérant par exemple $\alpha_1=0.2$, $\alpha_2=0.4$ *et* $\alpha_3=0.8$.
On obtient les variables aléatoires réelles suivantes avec leurs distributions de probabilité :

$$\left\{\begin{array}{lll} P\{\underline{X}_1(\omega_1)=3.2\}=0.25 & P\{\underline{X}_1(\omega_2)=4.2\}=0.75 & X(\omega)(\underline{X}_1)=0.2 \\ P\{\overline{X}_1(\omega_1)=5.8\}=0.25 & P\{\overline{X}_1(\omega_2)=6.8\}=0.75 & X(\omega)(\overline{X}_1)=0.2 \\ P\{\underline{X}_2(\omega_1)=3.4\}=0.25 & P\{\underline{X}_2(\omega_2)=4.4\}=0.75 & X(\omega)(\underline{X}_2)=0.4 \\ P\{\overline{X}_2(\omega_1)=5.6\}=0.25 & P\{\overline{X}_2(\omega_2)=6.6\}=0.75 & X(\omega)(\overline{X}_2)=0.4 \\ P\{\underline{X}_3(\omega_1)=3.8\}=0.25 & P\{\underline{X}_3(\omega_2)=4.8\}=0.75 & X(\omega)(\underline{X}_3)=0.8 \\ P\{\overline{X}_3(\omega_1)=5.2\}=0.25 & P\{\overline{X}_3(\omega_2)=6.2\}=0.75 & X(\omega)(\overline{X}_3)=0.8 \end{array}\right\}$$

3.1.2 Variables aléatoires floues normales

En nous basant sur la conception de kwakernaak [27], à savoir qu'une variable aléatoire floue est une vague perception d'une variable aléatoire réelle, nous considérons une variable aléatoire originale, réelle X, normalement distribuée d'espérance μ et de variance σ^2. En pratique, l'espérance μ de X est mal connue, c'est à peu prés μ, donc représentée par l'intervalle flou $\widetilde{\mu}$ Alors nous avons une variable aléatoire floue $\widetilde{X}$ normalement distributée d'espérance floue $\widetilde{\mu}$ et de variance réelle σ^2 telle que considérée dans Shapiro [39] et telle que $\forall\alpha \in (0,1]$, $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \overline{\mu}^\alpha$, où $\underline{\mu}^\alpha$ et $\overline{\mu}^\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\widetilde{\mu}^\alpha = [\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha]$.
Nous déduisons que $\underline{X}^\alpha$ et $\overline{X}^\alpha$ sont des variables aléatoires normales réelles d'espérances respectives $\underline{\mu}^\alpha$ et $\overline{\mu}^\alpha$ et de même variance σ^2, où $\underline{X}^\alpha$ et $\overline{X}^\alpha$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de $\widetilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{X}^\alpha(\omega), \overline{X}^\alpha(\omega)]$
Puisque $\underline{\mu}^\alpha \leq \mu \leq \overline{\mu}^\alpha$, donc $\forall t \in R$, $F_{\underline{X}^\alpha}(t) \leq F_X(t) \leq F_{\overline{X}^\alpha}(t)$, où $F_{\underline{X}^\alpha}$, F_X et $F_{\overline{X}^\alpha}$ sont les fonctions de répartition de $\underline{X}^\alpha$, X et $\overline{X}^\alpha$ respectivement.
Pour plus de détails voir Shapiro [39].

3.1.3 Variables aléatoires floues de type L-R

Soit $FN(L,R)$ un ensemble d'intervalles flous de type L-R vus comme des intervalles aléatoires [7](i.e. $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R) \Leftrightarrow \widetilde{a} = [\underline{a} - L^{-1}(Y)\delta^a, \overline{a} + R^{-1}(Z)\gamma^a]$, où Y et Z sont des variables aléatoires uniformément distribuées sur l'intervalle $[0,1]$, Les fonctions de références L et R sont non-négatives, définies sur $[0,\infty)$ non-décroissantes telles que $L(0) = R(0) = 1$, et δ^a, γ^a sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

Nous remplaçons $F(R)$ par $FN(L,R)$ dans la définition 4, alors $\widetilde{X}$ est appelée variable aléatoire floue de type L-R et notée $\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$, où $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont des variables aléatoires réelles et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.
Autrement dit $\widetilde{X}(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(Y)\delta^x, \overline{x}(\omega) + R^{-1}(Z)\gamma^x]$.
l'α-coupe de $\widetilde{X}(\omega)$ est : $\widetilde{X}^\alpha(\omega) = [\underline{x}(\omega) - L^{-1}(\alpha)\delta^x, \overline{x}(\omega) + R^{-1}(\alpha)\gamma^x]$.

3.1.4 Variables aléatoires floues normales de type L-R

$\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ est une variables aléatoire floue normale de type L-R d'espérance mathématique floue $\widetilde{\mu} = (\underline{\mu}, \overline{\mu}, \delta^\mu, \gamma^\mu)$ qui est un intervalle flou de type L-R et de variance réelle σ^2, si $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ (avec $\underline{x} \leq \overline{x}$) sont des variables aléatoires normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}$, $\overline{\mu}$ et de même variance σ^2 et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

3.1.5 Variables aléatoires floues discrètes de type L-R

$\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ est une variable aléatoire floue discrète de type L-R si $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ ($\underline{x} \leq \overline{x}$) sont des variables aléatoires dicrètes et δ^x, γ^x sont des nombres réels positifs et représentent respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.

Exemple 5 *Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité où :*
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ un espace discret fini, P_ω la distribution de probabilité suivante :

$$P_\omega(\omega_1) = 0.25; \quad P_\omega(\omega_2) = 0.75;$$

Et une variable aléatoire floue discrète de type L-R, $\widetilde{X}(\omega) = (\underline{x}(\omega), \overline{x}(\omega), \delta^x, \gamma^x)$ telle que : $P(\widetilde{X}(\omega_1) = \widetilde{a}) = 0.25$ et $P(\widetilde{X}(\omega_2) = \widetilde{b}) = 0.75$ où $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a)_{L-R}$ et $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b)_{L-R}$ (avec $\delta^x = \delta^a = \delta^b = \delta$ et $\gamma^x = \gamma^a = \gamma^b = \gamma$) sont des intervalles flous du type L-R dont les fonctions d'appartenance respectives $\mu_{\widetilde{a}}$ et $\mu_{\widetilde{b}}$ sont définies par :

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in [\underline{a}, \overline{a}], \\ \\ L(\frac{\underline{a}-x}{\delta}) & \text{pour } x \leq \underline{a}, \\ \\ R(\frac{x-\overline{a}}{\gamma}) & \text{pour } x \geq \overline{a}. \end{array} \right\}.$$

$$\mu_{\widetilde{b}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \\ \\ L(\frac{\underline{b}-x}{\delta}) & \text{pour } x \leq \underline{b}, \\ \\ R(\frac{x-\overline{b}}{\gamma}) & \text{pour } x \geq \overline{b}. \end{array} \right\}.$$

3.1.6 Evénement flou

C'est un événement représenté par un ensemble flou dont la fonction d'appartenance est Borel-mesurable.

3.1.7 Probabilité d'un événement flou

Soit E l'ensemble des événements $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
tel que :

- $P(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, ..., n$
- $0 \leq p_i \leq 1$, $\forall i = 1, 2, ..., n$
- $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

et $\widetilde{A}$ un événement flou dont la fonction d'appartenance est $\mu_{\widetilde{A}}$.
La probabilité de $\widetilde{A}$, notée $P(\widetilde{A})$, est donnée par Zadeh de la manière suivante :

$$P(\widetilde{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(x_i) p_i.$$

Elle représente l'espérance mathématique de $\mu_{\widetilde{A}}$.

3.2 Programmation linéaire floue stochastique

Un programme linéaire flou stochastique est un programme linéaire où le flou et l'aléa se trouvent combinés.
On peut distinguer les cas suivants :

1. *programmation linéaire flexible avec des données aléatoires.*
2. *programmation linéaire en présence de variables aléatoires floues.*
3. *programmation linéaire en présence de variables aléatoires réelles et des nombres flous.*

Le troisième cas est un cas particulier du deuxième.

3.2.1 Décision dans un environnement flou probabilisé

Considérons le problème de décision au sens de Bellman et Zadeh [4] où l'objectif et les contraintes représentés par des ensembles flous probabilisés au sens de Hirota [18] La décision D doit satisfaire l'objectif et les contraintes qui contiennent les imprécisions du type flou probabiliste donc représentées par les sous ensembles flous probabilisés X_0 et X_i, $i = 1, 2, ..., n$ d'un même référentiel X dont les fonctions d'appartenace respectives sont $\mu_{X_0}(x, \omega)$ et $\mu_{X_i}(x, \omega)$, $i = 1, 2, ..., n$. La décision D est donc le sous ensemble flou probabilisé D, intersection des X_i, $i = 0, 1, ..., n$, $D = \bigcap_{i=0}^{n} X_i$
Si on utilise le minimum pour représenter l'intersection, on a :
$\mu_{X_D}(x, \omega) = min \left\{ \mu_{X_0}(x, \omega), \mu_{X_1}(x, \omega), ..., \mu_{X_n}(x, \omega) \right\}$.
Dans certains cas, on peut la représenter par :
$\mu_{X_D}(x, \omega) = \gamma min(\mu_{X_i}(x, \omega) / i = 0, 1, ..., n) + (1 - \gamma) min(1, \sum_{i=0}^{n} \mu_{X_i}(x, \omega))$
où γ est un nombre réel compris entre 0 et 1.

3.2.2 Programmation linéaire flexible en présence de variables aléatoire réelles

3.2.2.1 Objectif flexible stochastique

Considérons le programme linéaire flexible stochastique suivant :

$$(P^1_{FS})\left\{\begin{array}{l} \widetilde{min}\, c(\omega)x \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{min}\, c(\omega)x$ *est la version flexible de* $minc(\omega)x$ *et* $c(\omega)$ *un vecteur aléatoire de distribution connue.*

Pour la résolution de (P^1_{FS})*, on procède de la manière suivante : On considère le programme stochastique suivant :*

$$(P^1_S)\left\{\begin{array}{l} \min c(\omega)x \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

qu'on peut résoudre en utilisant la méthode E-model, on remplace donc $c(\omega)$ *par son espérance mathématique* $E(c(\omega))$ *dans* (P^1_S)*qui est donc équivalent au programme déterministe suivant :*

$$(P^1_D)\left\{\begin{array}{l} \min E(c(\omega))x \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

Par conséquent (P^1_{FS}) *s'écrit sous la forme suivante :*

$$(P^1_F)\left\{\begin{array}{l} \widetilde{min}\, E(c(\omega))x \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où (P^1_F) *est un programme flexible qu'on peut résoudre en utilisant la méthode de Zimermann .*
Ce qui donne (P^1_F) *équivalent au programme flou suivat :*

$$(P^1_F)'\left\{\begin{array}{l} E(c(\omega))x \widetilde{\leq} Z_0 \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où Z_0 *est un seuil convenablement choisi.*
l'objectif flou $E(c(\omega))x\widetilde{\leq}Z_0$ *peut être représenté par un ensemble flou* U_0 *dont la fonction d'appartenance est* μ_0*.*
Résoudre le programme $(P_F)'$ *revient à résoudre le programme suivant :*

$$(P^1)'\left\{\begin{array}{l} \max \mu_0(x) \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

3.2.2.2 Contraintes flexibles stochastiques

Les contraintes flexibles stochastiques se présentent sous la forme suivante :
$\left\{A(\omega)x\widetilde{\theta}b(\omega),\, x \in R^n/x \geq 0\right\}$ où $\widetilde{\theta} \in \left\{\widetilde{\leq}, \widetilde{\cong}, \widetilde{\geq}\right\}$ et la matrice $A(\omega)(m \times n)$ ou/et le vecteur $b(\omega)(m \times 1)$ est/sont stochastique(s).
où μ_i est définie selon que $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\leq}$, $\widetilde{\cong}$ ou $\widetilde{\geq}$ comme suit :

– $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\leq}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i(\omega)x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & A_i(\omega)x \leq b_i(\omega),\, i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0,1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i(\omega)x > b_i(\omega) + d_i,\, i = 1, 2, ..., m \end{array}\right\}$$

– $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\cong}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i(\omega)x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & A_i(\omega)x = b_i(\omega),\, i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0,1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i(\omega)x < b_i(\omega) - d_i \text{ et } A_i(\omega)x > b_i(\omega) + d_i,\, i = 1, 2, ..., m \end{array}\right\}$$

– $\widetilde{\theta}$ est $\widetilde{\geq}$

$$\mu_i(x) = \mu_i(A_i(\omega)x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & A_i(\omega)x \geq b_i(\omega),\, i = 1, 2, ..., m \text{ est satisfaite} \\ \\ \in (0,1) & \text{si les contraintes sont faiblement violées} \\ \\ 0 & si\, A_i(\omega)x < b_i(\omega) - d_i,\, i = 1, 2, ..., m \end{array}\right\}$$

Considérons le programme flexible stochastique suivant :

$$(P_{FS}^2)\left\{\begin{array}{l} \min cx \\ \\ A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega),\, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n/x \geq 0\} \end{array}\right\}$$

où $A_i(\omega)$ est le vecteur aléatoire, ième ligne de la matrice stochastique $A(\omega)$ et $b_i(\omega)$ est la variable aléatoire, ième ligne du vecteur stochastique $b(\omega)$, de distribution connue.

Les contraintes flexibles stochastiques peuvent être représentées par les ensembles flous probabilisés au sens de Hirota dont les fonctions d'appartenances sont respectivement : $\mu_i(x,\omega)$, $i = 1, 2, ..., m$ représentent les degrés d'appartenance de x à l'ensemble $\left\{x/A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)\right\}$, $i =$

$1, 2, ..., m$ et la probabilité de l'événement flou $A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)$ peut être considérée comme la mesure du degré d'admissibilité de x.

Supposons que $(A_i(\omega), b_i(\omega))$, $i = 1, 2, ..., m$ admettent la distribution de probabilité discrète suivante :
$P\left\{\omega : (A_i(\omega), b_i(\omega)) = (A_i^j, b_i^j)\right\} = \xi_i^j$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$. et résolvons le programme (P_{FS}) en utilisant : la probabilité non floue d'un évènement flou.

Résolution de (P_{FS}^2) :
Soient α_i, $i = 1, 2, ..., m$ des seuils convenablement choisis par le décideur et
$X_i(\alpha_i) = \left\{x \in X / P(\omega; A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)) \geq \alpha_i\right\}$, $i = 1, 2, ..., m$.
(P_{FS}^2) peut être remplacé par le programme déterminiiste suivant :

$$(P_d^2)\begin{Bmatrix} \min cx \\ \\ P(\omega : A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)) \geq \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., m. \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{Bmatrix}$$

ou puisque :
$P(\omega : A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)) = E(\mu_i(x, A_i^j, b_i^j)) = \sum_{j=1}^{l_i} \mu_i(x, A_i^j, b_i^j)\xi_i^j \geq \alpha_i$
par :

$$(P_d^2)'\begin{Bmatrix} \min cx \\ \\ \sum_{j=1}^{l_i} \mu_i(x, A_i^j, b_i^j)\xi_i^j \geq \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x \geq 0\} \end{Bmatrix}$$

- si $X_i(\alpha_i)$ est un ensemble convexe alors (P_d^2) et $(P_d^2)'$ sont des programmes convexes.
- si $E(\mu_i(x, A_i^j, b_i^j))$ est une fonction linéaire ou linéaire par morceaux de x, alors (P_d^2) et $(P_d^2)'$ sont des programmes linéaires.
- si $A_i(\omega)$ et $b_i(\omega)$ sont indépendantes et leurs distributions de probabilité respectives sont :
  $P\left\{\omega : A_i(\omega) = A_i^k\right\} = S_i^k$, $k = 1, 2, ..., m_i$
  $P\left\{\omega : b_i(\omega) = b_i^j\right\} = p_i^j$, $j = 1, 2, ..., n_i$
  et soit $\mu_i(x, A_i^k, b_i^j)$ la fonction d'appartenance de l'ensemble flou probabilisé $A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)$ et
  $P(\omega : A_i(\omega)x\,\widetilde{\theta}\,b_i(\omega)) = E(\mu_i(x, A_i^k, b_i^j)) = \sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_i} \mu_i(x, A_i^k, b_i^j)p_i^j S_i^k \geq \alpha_i$, $i = 1, 2, ..., m$
  Alors (P_{FS}^2) s'écrit sous la forme suivante :

$$(P_d^2)''\begin{Bmatrix} \min cx \\ \\ \sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_i} \mu_i(x, A_i^k, b_i^j)p_i^j S_i^k \geq \alpha_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in D = \{x^n / x \geq 0\} \end{Bmatrix}$$

3.2.3 Programmation linéaire en présence de variables aléatoires floues

3.2.3.1 Contraintes sous forme d'inclusion (programmation robuste stochastique)

Un programme robuste stochastique est un programme de la forme :

$$(P_{RS})\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ \\ \widetilde{a}_{i1}(\omega)\odot x_1 \oplus \widetilde{a}_{i2}(\omega)\odot x_2 \oplus ... \oplus \widetilde{a}_{in}(\omega)\odot x_n [\subset] \widetilde{b}_i(\omega),\ i=1,2,...,m,\ \alpha\in(0,1] \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{a}_{ij(\omega)}$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont les variables aléatoires floues et $\oplus$, $\odot$ et $[\subset]$ représentent en utilisant le principe d'extension, pour ω donné, la généralisation de respectivement l'addition, la multiplication dans R et l'inclusion entre ensembles vulgaires aux intervalles flous.

Théorème 11 *[1]*
$x_0 \in X$ est optimal pour (P_{RS}) si et seulement si x_0 est optimal pour le programme $(P_{RS})'$ suivant :

$$(P_{RS})'\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ \\ \widetilde{a}_{i1}^{\alpha}(\omega)x_1 + \widetilde{a}_{i2}^{\alpha}(\omega)x_2 + ... + \widetilde{a}_{in}^{\alpha}(\omega)x_n \subset \widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega),\ i=1,2,...,m,\ \alpha\in(0,1] \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{a}_{i1}^{\alpha}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega)$ sont les α-coupe des variables aléatoires floues $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ respectivement.

$(P_{RS})'$ est un programme semi-infini, c'est à dire un programme avec une infinité de contraintes.

En supposont que les images des fonctions d'appartenance des sous ensembles sont discrètes et finies, on obtient un programme linéaire avec un nombre fini de contraintes comme suit :

Théorème 12 *[1]*
Si $Im\mu\widetilde{a}_{ij} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l,\}$ avec $0=\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_l<1$ et $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$
Alors :
$x_0 \in B$ est optimal pour (P_{RS}) si et seulement si x_0 est optimal pour le programme $(P_{RS})''$ suivant :

$$(P_{RS})''\left\{\begin{array}{l} \max cx \\ \\ \widetilde{a}_{i1}^{\alpha_k}(\omega)x_1 + \widetilde{a}_{i2}^{\alpha_k}(\omega)x_2 + ... + \widetilde{a}_{in}^{\alpha_k}(\omega)x_n \subset \widetilde{b}_i^{\alpha_k}(\omega),\ i=1,2,...,m,\ k=1,2,...,p \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

Preuve. Il suffit de monter que les contraintes des programmes (P_{RS}) et $(P_{RS})''$ sont équivalentes.

Soient :

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{a}_{i1}(\omega)\odot x_1 \oplus \widetilde{a}_{i2}(\omega)\odot x_2 \oplus ... \oplus \widetilde{a}_{in}(\omega)\odot x_n[\subset]\widetilde{b}_i(\omega),\ i=1,2,...,m,\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\}\end{array}\right\}$$

les contraintes du programme (P_{RS}).
En vertu du lemme 2, annexe A, on a :$\forall\alpha\in]0,1]$,

$$(C)\left\{\begin{array}{l}\widetilde{a}_{i1}^{\alpha}(\omega)x_1+\widetilde{a}_{i2}^{\alpha}(\omega)x_2+...+\widetilde{a}_{in}^{\alpha}(\omega)x_n\subset\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega),\ i=1,2,...,m,\ k=1,2,...,p\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\}\end{array}\right\}$$

donc en particulier pour $\alpha=\alpha_k,\ k=1,...,p.$ on obtient alors les contraintes de $(P_{RS})''$.
en tenant compte de l'addition d'intervalles, de leur multiplication par un nombre réel et l'inclusion entre eux,le programme $(P_{RS})''$ peut s'écrit sous la forme suivante :

$$(P_{Ls})\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \\ \underline{a}_{i1}^{\alpha_k}(\omega)x_1+\underline{a}_{i2}^{\alpha_k}(\omega)x_2+...+\underline{a}_{in}^{\alpha_k}(\omega)x_n\geq\underline{b}_i^{\alpha_k}(\omega),\ i=1,2,...,m,k=1,2,...,p\\ \\ \overline{a}_{i1}^{\alpha_k}(\omega)x_1+\overline{a}_{i2}^{\alpha_k}(\omega)x_2+...+\overline{a}_{in}^{\alpha_k}(\omega)x_n\leq\overline{b}_i^{\alpha_k}(\omega),\ i=1,2,...,m,k=1,2,...,p\\ \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n.\end{array}\right\}$$

Réciproquement.
Soient :

$$(\mathrm{C}_k)\left\{\begin{array}{l}\widetilde{a}_{i1}^{\alpha_k}(\omega)x_1+\widetilde{a}_{i2}^{\alpha_k}(\omega)x_2+...+\widetilde{a}_{in}^{\alpha_k}(\omega)x_n\subset\widetilde{b}_i^{\alpha_k}(\omega),\ i=1,2,...,m,\ k=1,2,...,p\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0,\ j=1,2,...,n\}\end{array}\right\}$$

$lescontraintesde(\mathrm{P}_{RS})''$.
Soit $\alpha\in]0,1]$ alors il existe $k\in N,\ 1\leq k\leq p-1$ tel que $\alpha_k\leq\alpha\leq\alpha_{k+1}$, donc :

- Si $\alpha=\alpha_{k+1}$ ou $\alpha=\alpha_{k+1}$, il suffit donc de remplacer α_k par α dans (C_k).
- si $\alpha_k<\alpha<\alpha_{k+1}$, alors on a $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k+1}}(\omega)\subset\widetilde{a}_{ij}^{\alpha}(\omega)\subset\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_k}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k+1}}(\omega)\subset\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega)\subset\widetilde{b}_i^{\alpha_k}(\omega)$.
  Comme $0=\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_l<1$ et $\forall\omega\in\Omega,\ Im\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_l,\}$ avec $\alpha\leq\alpha_{k+1}$, on a d'une part :
  $\forall\omega\in\Omega,\ \widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k+1}}(\omega)=\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)\geq\alpha_{k+1}\right\}=\bigcup_{r=k+1}^{p}\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)=\alpha_r\right\}$
  et on a d'autre part :
  $\forall\omega\in\Omega,\ \widetilde{a}_{ij}^{\alpha}(\omega)=\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)\geq\alpha\right\}=\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)=\alpha\right\}\cup\bigcup_{r=k+1}^{p}\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)=\alpha_r\right\}=\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k+1}}(\omega)$ car $\forall\omega\in\Omega,\ \alpha\notin Im\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}$ donc $(\left\{u/\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}(u)=\alpha\right\}=\oslash)$.
  Donc :
  $\widetilde{a}_{i1}^{\alpha_{k+1}}(\omega)x_1+\widetilde{a}_{i2}^{\alpha_{k+1}}(\omega)x_2+...+\widetilde{a}_{in}^{\alpha_{k+1}}(\omega)x_n\subset\widetilde{b}_i^{\alpha_{k+1}}(\omega)\subset\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

  $\widetilde{a}_{i1}^{\alpha}(\omega)x_1+\widetilde{a}_{i2}^{\alpha}(\omega)x_2+...+\widetilde{a}_{in}^{\alpha}(\omega)x_n\subset\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega)$. Par conséquent $\forall\alpha\in(0,1]$, on a :

en vertu de la théorie des ensembles :
$\bigcup_{\alpha\in I}\alpha(\widetilde{a}_{i1}^{\alpha}(\omega)x_1+\widetilde{a}_{i2}^{\alpha}(\omega)x_2+...+\widetilde{a}_{in}^{\alpha}(\omega)x_n)\subset\bigcup_{\alpha\in I}\alpha\widetilde{b}_i^{\alpha}(\omega)$.
Et, en vertu du théorème de déccomposition de Zadeh :
$\widetilde{a}_{i1}(\omega)\odot x_1\oplus\widetilde{a}_{i2}(\omega)\odot x_2\oplus...\oplus\widetilde{a}_{in}(\omega)\odot x_n[\subset]\widetilde{b}_i(\omega)$.

3.2.3.2 Contraintes sous forme d'inégalités (programmation possibiliste stochastique)

Considérons le progamme linéaire flou stochastique suivant :

$$(P_{FS}^3)\left\{\begin{array}{l}\max\ \phi(x)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j\preceq\widetilde{b}_i(\omega),i=1,...m\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x\geq 0\}\end{array}\right\}$$

où $\phi(x)$ est un objectif déterministe ,$\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$ sont des variables aléatoires floues. Et $\sum_{j=1}^{n}$, $\odot$ et $\preceq$ nreprésentent la généralisation au moyen du principle d'extension de l'addition, la multiplication et l'inégalité de nombres réels aux intervalles flous.

(P_{FS}^3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(P_{PS}^3)'\left\{\begin{array}{l}\max cx\\ \widetilde{A}(\omega)\odot x\preceq\widetilde{b}(\omega)\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x\geq 0\}\end{array}\right\}$$

où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont les composantes de la matrice $\widetilde{A}(\omega)(m\times n)$ du vecteur $\widetilde{b}(\omega)(n\times 1)$ respectivement.

On a par définition, $\forall\omega\in\Omega$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des des intervalles flous. Soient $\forall\omega\in\Omega$, $\pi_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i(\omega)}$ les distributions de possibilités de $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ respectivement.
(Par définition $\forall\omega\in\Omega$, $\pi_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}=\mu_{\widetilde{a}_{ij}(\omega)}$ et $\pi_{\widetilde{b}_i(\omega)}=\mu_{\widetilde{b}_i(\omega)}$ [50])

Soient $\forall\omega\in\Omega$, $\mu_{\widetilde{A}(\omega)}$ et $\mu_{\widetilde{b}(\omega)}$ les fonctions d'appartenance communes de $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{b}(\omega)$ respectivement.
Posons $T^1(\omega)=supp\widetilde{A}(\omega)$, $T^2(\omega)=supp\widetilde{b}(\omega)$ et $T(\omega)=T^1(\omega)\times T^2(\omega)$ (produit cartésien de $T^1(\omega)$ et $T^2(\omega)$) et $S^{\overline{\alpha_i}}(\omega)=\widetilde{A}^{\overline{\alpha_i}}(\omega)\times\widetilde{b}^{\overline{\alpha_i}}(\omega)$.
On définit pour $t(\omega)=(t_1(\omega),(t_2(\omega))\in T(\omega)=T^1(\omega)\times T^2(\omega)$,l'application μ par :
$\mu((t)(\omega))=min(\mu_{\widetilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega)),\mu_{\widetilde{b}(\omega)}(b(t_2(\omega))$, c'est le degré de compatibilité de $t_1(\omega)$ et $t_2(\omega)$ avec $\widetilde{A}(\omega)$ et $\widetilde{b}(\omega)$ respectivement.
Soient $(T^{\alpha_i}(\omega))_i$ une subdivision de $T(\omega)$ définie de la manière suivante :

$$T^{\alpha_i}(\omega)=\{t=(t_1(\omega),(t_2(\omega))/\alpha_{i-1}<\mu(t(\omega))\leq\alpha_i\}\,,\ i=1,...,l+1$$

où $\{\alpha_i\}_{i=0,...,l+1}$ sont des nombres réels tels que :$0=\alpha_0<\alpha_1<...<\alpha_l<\alpha_{l+1}=1$.
On a donc pour $i\neq j\,T^{\alpha_i}(\omega)\cap T^{\alpha_j}(\omega)=\oslash$ et $\bigcup_{i=1}^{p+1}T^{\alpha_i}(\omega)=T(\omega)$.

On a donc $T^{\alpha_i}(\omega) = \{t = (t_1(\omega), (t_2(\omega))/\alpha_{i-1} < \mu(t(\omega))\, et\, \mu(t(\omega)) \leq \alpha_i\}$, autrement dit $(t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_i}(\omega) \Longleftrightarrow \alpha_{i-1} < min(\mu_{\widetilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega)), \mu_{\widetilde{b}(\omega)}(b(t_2)(\omega))$ et $min(\mu_{\widetilde{A}(\omega)}(A(t_1(\omega)), \mu_{\widetilde{b}(\omega)}(b(t_2)(\omega)) \leq \alpha_i$, i.e.
$T^{\alpha_i}(\omega) = \left\{(t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in (\widetilde{A}^{\overline{\alpha_{i-1}}}(\omega) \times \widetilde{b}^{\overline{\alpha_{i-1}}}(\omega)) - (\widetilde{A}^{\overline{\alpha_i}}(\omega) \times \widetilde{b}^{\overline{\alpha_i}}(\omega))\right\} =$
$\left\{(t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in S^{\overline{\alpha_{i-1}}}(\omega) - S^{\overline{\alpha_i}}(\omega)\right\}$
Soit une suite de nombres réels $\{\tau_i\}_{i=1,...,l+1}$ telle que $0 = \tau_{l+1} < \tau_l < ... < \tau_2 < \tau_1 < 1$ choisis pour pénaliser $t \in T(\omega)$ tels que $\mu(t)$ est au bas niveau .

Le programme $(P^3_{PS})'$ peut être approché par le programme stochastique suivant :[1]

$$(P^3_S) \begin{cases} \max cx \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{l+1} \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{l} \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l}}(\omega) \\ \vdots \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{1} \quad (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{1}}(\omega) \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{cases}$$

où τ^m_j est un m-vecteur dont les composantes sont égales à τ_j.
Si $\forall\omega$ les fonctions d'appartenance $\mu_{\widetilde{A}}(\omega)$ et $\mu_{\widetilde{b}(\omega)}$ sont continues, (P^3_S) sera un programme semi-infini.
Théorème 13 *[1]*
(P^3_S) est équivalent au programme linéaire stochastique suivant :

$$(P^3_{LS}) \begin{cases} \max cx \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}^{\alpha_{l+1}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}^{\alpha_{l+1}}_{2i}(\omega) \quad i = 1, ..., m \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}^{\alpha_{l}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{l} \leq \underline{t}^{\alpha_{l}}_{2i}(\omega) \quad i = 1, ..., m \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \bar{t}^{\alpha_{1}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{1} \leq \underline{t}^{\alpha_{1}}_{2i}(\omega) \quad i = 1, ..., m \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{cases}$$

où $\bar{t}^{\alpha_k}_{1ij}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}^{\alpha_{k-1}}_{ij}(\omega)$ et $\underline{t}^{\alpha_k}_{2i}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}^{\alpha_{k-1}}_i(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$
Preuve. Il suffit de montrer que les contraintes des programmes (P^3_S) et (P^3_{LS}) sont équivalentes.
Soient $\{t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \delta^m_k; (t_1(\omega), t_2(\omega)) \in T^{\alpha_k}(\omega),\, k = 1, ...p+1\}$ les contraintes de (P_S).
On a $(t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in S^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - S^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$, donc les composantes $t_{1ij}(\omega)$ de la matrice $t_1(\omega)$ et $t_{2i}(\omega)$

du vecteur $t_2(\omega)$ sont telles que : $(t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$ où $s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) = a_{ij}^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \times b_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$.
On peut donc représenter les contraintes sous la forme suivante :
$\left\{\sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j - \tau_k \leq t_{2i}(\omega),\ (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega),\ k = 1, ...p+1,\ i = 1, ...m\right\}$.
On sait que $\forall \omega \in \Omega$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des intervalles flous, donc pour $\alpha_{k-1} < \alpha_k$ on a :
$a_{ij}^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \subset a_{ij}^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega)$ et $b_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega) \subset b_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega)$.
D'où $sup\left\{t_{1ij}(\omega)/(t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)\right\} = sup\left\{t_{1ij}(\omega)/t_{1ij}(\omega) \in \widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)\right\} = \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$.
D'autre part on a :
$inf\left\{t_{2i}(\omega)/(t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)\right\} = inf\left\{t_{2i}(\omega)/t_{2i}(\omega) \in \widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)\right\} = \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$.
Puisque on a :
$\sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j \leq t_{2i}(\omega) + \tau_k$ pour $(t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)$, donc $t_{2i}(\omega) + \delta_k$ est un majorant de l'ensemble $E = \left\{\sum_{j=1}^n t_{1ij}(\omega)x_j,\ (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)\right\}$ et $\sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j$ est le plus petit des majorants de E, par conséquent $\sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j \leq t_{2i}(\omega) + \tau_k$.
Par ailleurs :
$\sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k$ est un minorant de l'ensemble $F = \left\{t_{2i}(\omega),\ (t_{1ij}(\omega), t_{2i}(\omega)) \in s_i^{\overline{\alpha_{k-1}}}(\omega) - s_i^{\overline{\alpha_k}}(\omega)\right\}$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est le plus grand des minorants de F donc $\sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$.
On obtient donc les contraintes de (P_{LS}^3).
La réciproque est évidente.
$\sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega) \Longrightarrow \sum_{j=1}^n t_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k \leq t_{2i}^{\alpha_k}(\omega) \Longleftrightarrow$
$t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \delta_k^m; (t_1(\omega), t_2(\omega)) \in T^{\alpha_k}(\omega)$.
$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X/P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_s}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_s}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i = 1, ...m; s = 1, ...l+1$.
Puisque $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, donc $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega) = \overline{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega) = \underline{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, par conséquent
$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X/P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i = 1, ...m; s = 1, ...l+1$.

Nous allons établir dans la prochaine section 3.5 les conditions de convexité de $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$

3.3 Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Les contraintes du problème flou stochastique (P_{FS}^3) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{b}_i(\omega) \succeq \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j, \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

$\sum_{j=1}^n$ et $\odot$ représentent respectivement, pour $\omega \in \Omega$ donné, l'addition des intervalles flous de type L-R et leur multiplication un nombre réel (voir annexe A).
Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues

de type L-R, alors

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}^{a} x_j, \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij}^{a} x_j).$$

Pour simplifier les expressions, nous considérons la matrice $A(m \times n)$ et le vecteur $b(m \times 1)$ dont les composantes sont respectivement a_{ij} et b_i.
Dans la suite de ce travail, dire que A (resp. b) est déterministe, flou, stochastique ou flou stochastique signifie que a_{ij} (resp. b_i) sont respectivement déterministes, des intervalles flous, des variables aléatoires réelles ou des variables aléatoires floues. Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients prend la forme suivante :

$$P(\rho(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i$$

qui est une combinaison de probabilité et ρ où $\rho(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ évalue le degré de confiance pour lequel le coefficient restreint par $\widetilde{a}$ est plus grand que le coefficient restreint par $\widetilde{b}$.

3.4 Différentes versions de Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Nous avons trois versions, selon le choix de ρ qui peut représenter :

1. les degrés de préférence possibiliste ou nécessaire (combinaison de probabilité et possibilité ou combinaison de probabilité et nécessité)
2. les indices de dominance stochastique des intervalles aléatoires dus à Chanas et col. [7] (combinaison de probabilité et indices de comparaison d'intervalles aléatoires)
3. les indices scalaires de comparaison d'intervalles flous (combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantitiés floues)

comme suit :

3.4.1 Combinaison de probabilité et possibilité

$$(P_p^3) \left\{ \begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P \left\{ \omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i \right\} \geq p_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array} \right\}$$

où P et pos représentent respectivement probabilité et possibilité. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \geq 0$ de (P_p^3) est appelée pro-pos admissible. L'ensemble des solutions pro-pos admissibles de (P_p^3) est noté $X_p^i(p_i, \beta_i)$.

Proposition 3 *$X_p^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :*

1. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :*
   $X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 : P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ..., m$
   où $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{b}_i^{\beta_i}(\omega)$.
2. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, alors :*
   $X_p^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a)x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ..., m$.

La preuve est triviale, Il suffit d'utiliser les propriétés de possibilité données dans [15] et reprises dans la proposition 1, Annexe A.
Remarque 4 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :*
- *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*
- *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \beta_i$.*

3.4.2 Combinaison de probabilité et nécessité

$$(P_n^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

où P et nec représentent respectivement probabilité et nécessité. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ de (P_n^3) est appelée *pro-nec admissible*. L'ensemble des solutions pro-nec admissibles de (P_n^3) est noté $X_n^i(p_i, \beta_i)$.
Proposition 4 *$X_n^i(p_i, \beta_i)$ peut s'écrire comme suit :*

1. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues, alors :*
   $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 : P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)x_j \leq \underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ..., m$,
   où $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{a}_{ij}^{1-\beta_i}(\omega)$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$.
2. *Si $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta_{ij}^a, \gamma_{ij}^a)$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta_i^b, \gamma_i^b)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, alors :*
   $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1 - \beta_i)\gamma_{ij}^a)x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1 - \beta_i)\delta_i^b) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ..., m$.

La preuve est triviale, Il suffit d'utiliser les propriétés de nécessité données dans [15] et reprises dans la proposition 1, Annexe A.

Remarque 5 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :*

- *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*
- *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i$ se réduit à $nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i) \geq \beta_i$.*

3.4.3 Combinaison de probabilité et indices scalaires de comparaison de quantitiés floues

$$(P_F^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array}\right\}$$

où P représent la probabilité et $F(\widetilde{a})$ est un scalaire, substitut de $\widetilde{a}$. Il est évident que $F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ sont des variables aléatoires réelles. Le problème est bel et bien un standard chance-constrained programming. Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ du problème (P_F^3) est appelée *pro-F admissible*. On note $X_F^i(p_i)$, l'ensemble des solutions pro-F admissibles du problème (P_F^3) .

Remarque 6 *Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :*

- *des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$.*
- *des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i$ se réduit à $\sum_{j=1}^{n} F(\widetilde{a}_{ij})x_j \leq F(\widetilde{b}_i)$.*

3.4.4 Combinaison de chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires

$$(P_{\mu_k}^3)\left\{\begin{array}{l} \max \phi(x) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m; k = 1, 2, 3, 4, 1I, 4I. \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array}\right\}$$

Une solution admissible $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ...x_n^0) \geq 0$ du problème $(P_{\mu_k}^3)$ est appelée *pro-μ_k admissible*. On note $X_{\mu_k}^i(p_i, \beta_i)$, l'ensemble des solutions pro-μ_k admissibles du problème $(P_{\mu_k}^3)$.

En tenant compte de la définition de $X_{\mu_k}(p_i, \beta_i)$ et du lemme 4, annexe A, les ensembles de solutions admissibles $X^i_{\mu_k}(p_i, \beta_i)$, $k = 2, 3$ peuvent s'écrire comme suit :

Proposition 5 *Soient $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ et $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ des variables aléatoires floues de type L-R.*
Nous avons alors :

1. $X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij})x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i) \geq p_i \right\}$.
2. $X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^a_{ij})x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i) \geq p_i \right\}$.

Preuve. Nous avons par définition :
- $X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i) = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_2(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i) \geq p_i \right\}$
- $X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i) = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 / P(\omega : \mu_3(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \geq p_i \right\}$

Pour $\omega \in \Omega$ donné $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ et $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ sont des intervalles flous de type L-R.
Il en est de même pour $\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j = (\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}(\omega)x_j, \sum_{j=1}^n \delta^a_{ij}x_j, \sum_{j=1}^n \gamma^a_{ij}x_j)$.
Alors en vetu du lemme 4, annexe A, nous avons :
- $\mu_2(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij})x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$
- $\mu_3(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^a_{ij})x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$

D'où :
- $P\left\{ \omega : \mu_2(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} =$
  $P\left\{ \omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij})x_j \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i \right\}$
- $P\left\{ \omega : \mu_3(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} =$
  $P\left\{ \omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^a_{ij})x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i \right\}$

Si les coefficicients $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des contraintes sont respectivement remplacés par :
- des variables aléatoires réelles $a_{ij}(\omega)$ et $b_i(\omega)$, alors $P\left\{ \omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$ se réduit à $P\left\{ \omega : \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i$.
- des intervalles flous $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$, alors $P\left\{ \omega : \mu_k(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i \right\} \geq p_i$ se réduit à $\mu_k(\widetilde{b}_i, \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij} \odot x_j) \geq \beta_i$.

3.5 Convexité des ensembles de solutions admissibles

Sous certaines conditions, les ensembles de solutions admissibles peuvent être convexes pour toutes distributions de probabilité des variables aléatoires floues comme suit :

Théorème 14 *on a :*
Si $p_i = 0$ ou $p_i = 1$ alors :

– $X_F^i(p_i)$ *est convexe*
– $X_p^i(p_i, \beta_i)$ *et* $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \in (0,1]$.
– $X_{\mu_2}^i(p_i, \frac{1}{2})$ *et* $X_{\mu_3}^i(p_i, \frac{1}{2})$ *sont convexes.*
– $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$ *est convexe* $\forall \alpha_s \in (0,1]$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 6 du chapitre 2, section 2.1.6.

En tenant compte des conditions de convexité des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de chance-constrained programming [21] en programmation linéaire stochastique et en nous basant sur les propositions 3, 4 et 5 du chapitre 3, section3.4, nous distinguons le cas où A est déterministe ou flou et les autres où A est stochastique ou flou stochastique comme suit :

3.5.1 Cas où A est déterministe ou flou

Nous considérons le cas le plus général : A est flou et b est flou stochastique dont les composantes sont des variables aléatoires floues en général ou des variables aléatoires floues particulières, de type L-R.

En nous basant sur les propositions 3, 4 et 5 du chapitre 3, section3.4, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et le théorème 7 du chapitre 2, section 2.1.6, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 15 *Soient* (Ω, F, P) *un espace de probabilité,* $\widetilde{a}_{ij}$ *et* $\widetilde{b}_i(\omega)$ *les composantes de la matrice* $\widetilde{A}(m \times n)$ *et du vecteur* $b(\omega)(m \times 1)$ *respectivement.*

1. *Si* $\widetilde{a}_{ij}$ *sont des intervalles flous et* $\widetilde{b}_i(\omega)$ *sont des variables aléatoires floues.*
   Alors pour toute distribution de probabilité de $\widetilde{b}_i(\omega)$*, on a :*
   – $\forall \beta_i \in (0,1]$ *et* $\forall p_i \in [0,1]$, $\quad X_p^i(p_i, \beta_i)$ *et* $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes.*
   – $\forall p_i \in [0,1]$, $\quad X_F^i(p_i)$ *est convexe.*
   – $\forall \alpha_s \in (0,1]$ *et* $\forall p_i^s \in [0,1]$, $\quad X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$ *est convexe.*
2. *Si* $\widetilde{a}_{ij}$ *sont des intervalles flous de type L-R et* $\widetilde{b}_i(\omega)$ *sont des variables aléatoires floues de type L-R.*
   Alors pour toute distribution de probabilité de $\widetilde{b}_i(\omega)$ *, on a :*
   – $\forall \beta_i \in (0,1]$ *et* $\forall p_i \in [0,1]$, $\quad X_p^i(p_i, \beta_i)$, $X_n^i(p_i, \beta_i)$ *sont convexes.*
   – $\forall p_i \in [0,1]$, $\quad X_{\mu_2}^i(p_i, \frac{1}{2})$ *et* $X_{\mu_3}^i(p_i, \frac{1}{2})$ *sont convexes.*
   – $\forall \alpha_s \in (0,1]$ *et* $\forall p_i^s \in [0,1]$, $\quad X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$ *est convexe.*

Preuve.

1. Puisque $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous, donc on remplace $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega)$ par $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ dans $X_p^i(p_i, \beta_i)$, il s'ensuit que $\forall \beta_i \in (0,1]$ et $\forall p_i \in [0,1]$:

$x \in X_p^i(p_i,\beta_i) \Longleftrightarrow P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i \Leftrightarrow$
$1 - P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i}(\omega) x_j \geq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i \Leftrightarrow 1 - \Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}(\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j) \geq p_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq$
$\Psi^{-1}_{\overline{b}_i^{\beta_i}}(1-p_i)$ où $\Psi_{\overline{b}_i^{\beta_i}}$ est la fonction de répartition de $\overline{b}_i^{\beta_i}$.
En remplaçant $P(\omega : \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)) \geq p_i$ par
$\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij}^{\beta_i} x_j \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_i^{\beta_i}}(1-p_i)$ dans $X_p^i(p_i,\beta_i)$,on voit facilement que $\forall \beta_i \in (0,1]$ et $\forall p_i \in [0,1]$:
$X_p^i(p_i,\beta_i)$ est convexe pour toute distribution de probabilité de $\overline{b}_i^{\beta_i}$.
La preuve est la même pour les autres ensembles de solutions admissibles, il suffit de remplacer dans cette preuve :

- $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ par $\overline{a}_{ij}^{1-\beta_i}$ et $\underline{b}_i^{1-\beta_i}(\omega)$ respectivement,pour $X_n^i(p_i,\beta_i)$.
- $\underline{a}_{ij}^{\beta_i}$ et $\overline{b}_i^{\beta_i}(\omega)$ par $F(\widetilde{a}_{ij})$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ respectivement, pour $X_F^i(p_i)$.

2. $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous, donc on remplace $\overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)$ par $\overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}$ dans $X_s^i(p_i^s,\alpha_s)$
   $x \in X_s^i(p_i^s,\alpha_s) \Longleftrightarrow P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}} x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s \Leftrightarrow$
   $1 - P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega) x_j - \tau_s \geq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s \Leftrightarrow 1 - \Psi_{\underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}}(\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}} x_j - \tau_s) \geq p_i^s \Leftrightarrow$
   $\sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega) x_j \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}}(1-p_i^s) + \tau_s$ où $\Psi_{\underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}}$ est la fonction de répartition de $\underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}$.
   $X_s^i(p_i^s,\alpha_s)$ est convexe pour toute distribution de probabilité de $\underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}$.
3. $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous de type L-R, donc on remplace $\underline{a}_{ij}(\omega)$ par $\underline{a}_{ij}$ dans $X_p^i(p_i,\beta_i)$, donc
   $x \in X_p^i(p_i,\beta_i) \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a) x_j \leq \overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b\right\} \geq p_i \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n (\underline{a}_{ij} -$
   $L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a) x_j) - R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_i}(1-p_i)$ où $\Psi_{\overline{b}_i}$ est la fonction de répartition de $\overline{b}_i$. La preuve est la même pour les autres ensembles de solutions admissibles, il suffit de remplacer :
   - $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b$ par $\overline{a}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma_{ij}^a$ et $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta_i^b$ respectivement pour $X_n^i(p_i,\beta_i)$.
   - $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\frac{1}{2})\delta_{ij}^a$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\frac{1}{2})\gamma_i^b$ par $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\frac{1}{2})\delta_{ij}^a$ et $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(\frac{1}{2})\delta_i^b$, respectivement pour $X_{\mu_2}^i(p_i,\frac{1}{2})$.
   - $\underline{a}_{ij} - L^{-1}(\frac{1}{2})\delta_{ij}^a$ par $\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\frac{1}{2})\gamma_{ij}^a$, pour $X_{\mu_3}^i(p_i,\frac{1}{2})$.

4. $\widetilde{a}_{ij}$ sont des intervalles flous de type L-R, donc on remplace dans $X_s^i(p_i^s,\alpha_s)$, $\overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)$ et $\underline{b}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)$ par respectivement $\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\alpha_{s-1})\delta_{ij}^a$ et $\underline{b}_i - L^{-1}(\alpha_{s-1})\gamma_i^b$,donc
   $x \in X_s^i(p_i^s,\alpha_s) \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\alpha_{s-1})\tau_{ij}^a) x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(\alpha_{s-1})\gamma_i^b\right\} \geq p_i^s \Longleftrightarrow$
   $\sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\alpha_{s-1})\delta_{ij}^a) x_j - \tau_s + L^{-1}(\alpha_{s-1})\gamma_i^b \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_i}(1-p_i^s) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n (\overline{a}_{ij} + R^{-1}(\alpha_{s-1})\delta_{ij}^a) x_j \leq$
   $\Psi^{-1}_{\underline{b}_i}(1-p_i^s) + \tau_s - L^{-1}(\alpha_{s-1})\gamma_i^b$ où $\Psi_{\underline{b}_i}$ est la fonction de répartition de $\underline{b}_i$.

3.5.2 Cas où A est stochastique ou flou stochastique

Nous considérons le cas le plus général : A et b sont flous stochastiques dont les composantes sont des variables aléatoires floues, en général, ou particulières, de type L-R.

En nous basant sur les propositions 3, 4 et 5 du chapitre 3, section3.4, les expressions des ensembles de solutions admissibles résultant de l'application de "chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients" et les théorèmes 8 et 9 du chapitre 2, section 2.1.6, nous distinguons le cas général (au sens de Shapiro) de variables aléatoires floues normales (resp.le cas particulier, de type L-R) et le cas général de variables aléatoires floues discrètes (resp.le cas particulier, de type L-R) et nous établissons les résultats suivants :

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues

1. Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro

   Théorème 16 *Soient (Ω, F, P) un espace de probabilité, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ les composantes de la matrice $A(m \times n)$ et du vecteur $b(m \times 1)$ respectivement.*
   Si $\widetilde{a}_{i1}$, $\widetilde{a}_{i2}$, ...$\widetilde{a}_{in}$, $\widetilde{b}_i$ sont (n+1) variables aléatoires floues normales d'espérances mathématiques respectives $\widetilde{\mu}_{i1}$, $\widetilde{\mu}_{i2}$, ...$\widetilde{\mu}_{in}$, $\widetilde{\lambda}_i$ qui sont des intervalles flous et de variances respectives σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, ...σ^2_{in}, ν^2_i .
   Alors :
   – *$\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes.*
   – *$\forall \alpha_s \in (0, 1]$ et pour $p^s_i > \frac{1}{2}$, $X^i_s(p^s_i, \alpha_s)$ est convexe.*

   Preuve.

   Du 3.1.4, on a :
   – $\underline{a}^{\beta_i}_{i1}, \underline{a}^{\beta_i}_{i2}, ...\underline{a}^{\beta_i}_{in}, \overline{b}^{\beta_i}_i$ sont (n+1) variables aléatoires rélles normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}^{\beta_i}_{i1}$, $\underline{\mu}^{\beta_i}_{i2}$, ...$\underline{\mu}^{\beta_i}_{in}$, $\overline{\lambda}^{\beta_i}_i$ et de variances respectives σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, ...σ^2_{in}, ν^2_i
   – $\overline{a}^{1-\beta_i}_{i1}, \overline{a}^{1-\beta_i}_{i2}, ...\overline{a}^{1-\beta_i}_{in}, \underline{b}^{1-\beta_i}_i$ sont (n+1) variables aléatoires rélles normales d'espérances mathématiques respectives $\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{i1}$, $\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{i2}$, ...$\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{in}$, $\underline{\lambda}^{1-\beta_i}_i$ et de variances respectives σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, ...σ^2_{in}, ν^2_i
   – $\overline{a}^{\alpha_{s-1}}_{i1}, \overline{a}^{\alpha_{s-1}}_{i2}, ...\overline{a}^{\alpha_{s-1}}_{in}, \underline{b}^{\alpha_{s-1}}_i + \tau_s$ sont (n+1) variables aléatoires rélles normales d'espérances mathématiques respectives $\overline{\mu}^{\alpha_{s-1}}_{i1}$, $\overline{\mu}^{\alpha_{s-1}}_{i2}$, ...$\overline{\mu}^{\alpha_{s-1}}_{in}$, $\underline{\lambda}^{\alpha_{s-1}}_i + \tau_s$ et de variances respectives σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, ...σ^2_{in}, ν^2_i
   Alors en vertu du théorème 9, on a :
   – $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes
   – $\forall \alpha_{s-1} \in (0, 1]$ et pour $p^s_i > \frac{1}{2}$, $X^i_s(p^s_i, \alpha_{s-1})$ sont convexes.
2. cas des variables aléatoires floues discrètes

   Théorème 17 *Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité muni d'une distribution de probabilité discrète finie suivante : $P(\omega_k) = q_k$, $k = 1, 2, ...r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$.*

Alors :
- *pour* $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_F(p_i)$ *est convexe.*
- $\forall \beta_i \in (0,1]$ *et pour* $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$, $X^i_n(p_i, \beta_i)$ *sont convexes.*
- $\forall \alpha_s \in (0,1]$ *et pour* $p^s_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_s(p^s_i, \alpha_s)$ *est covexe.*

Preuve.On a $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ qui sont des variables aléatoires floues discrètes et pour $k \in \{1, 2, ...r\}$,
$P(\widetilde{a}_{ij}(\omega_k) = \widetilde{\theta}_{ijk}) = P(\widetilde{b}_i(\omega_k) = \widetilde{\eta}_{ik}) = q_k$, où $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$ sont des intervalles flous.
Alors on a :
- $F(\widetilde{a}_{ij}(\omega))$ et $F(\widetilde{b}_i(\omega))$ sont des variables aléatoires réelles discrètes $P(F(\widetilde{a}_{ij}(\omega_k)) = F(\widetilde{\theta}_{ijk})) = q_k$ et $P(F(\widetilde{b}_i(\omega_k)) = F(\widetilde{\eta}_{ik})) = q_k$, où $F(\widetilde{\theta}_{ijk})$ et $F(\widetilde{\eta}_{ik})$ sont des nombres réels.
  Par conséquent, en vertu du théorème 8, on conclut que :
  pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_F(p_i)$ est convexe.
- $\underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)$, $\overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)$, $\overline{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega)$ and $\underline{b}^{1-\beta_i}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que :
  $P(\underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega_k) = \underline{\theta}^{\beta_i}_{ijk}) = P(\overline{b}^{\beta_i}_i(\omega_k) = \overline{\eta}^{\beta_i}_{ik}) = P(\overline{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega_k) = \overline{\theta}^{1-\beta_i}_{ijk}) = P(\underline{b}^{1-\beta_i}_i(\omega_k) = \underline{\eta}^{1-\beta_i}_{ik}) = q_k$,
  où $\underline{\theta}^{\beta_i}_{ijk}$ et $\overline{\eta}^{\beta_i}_{ik}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des $\beta_i - coupe$ de $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$.Et $\overline{\theta}^{1-\beta_i}_{ijk}$ et $\underline{\eta}^{1-\beta_i}_{ik}$ sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure des $(1 - \beta_i) - coupe$ de $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\widetilde{\eta}_{ik}$ respectivement.
  Par conséquent, en vertu du théorème 8, on conclut que :
  $\forall \beta_i \in (0,1]$ et pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes.

- $\overline{a}^{\alpha_{s-1}}_{ij}(\omega)$ et $\underline{b}^{\alpha_{s-1}}_i(\omega) + \tau_s$ sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que :
  $P(\overline{a}^{\alpha_{s-1}}_{ij}(\omega_k) = \overline{\theta}^{\alpha_{s-1}}_{ijk}) = P(\underline{b}^{\alpha_{s-1}}_i(\omega_k) + \tau_s = \underline{\eta}^{\alpha_{s-1}}_{ik} + \tau_s) = q_k$,
  où $\overline{\theta}^{\alpha_{s-1}}_{ijk}$ est la borne supérieure de $(\alpha_{s-1}) - coupe$ de $\widetilde{\theta}_{ijk}$ et $\underline{\eta}^{\alpha_{s-1}}_{ik}$ est laborne inférieure de $(\alpha_{s-1}) - coupe$ de $\widetilde{\eta}_{ik}$.
  Par conséquent, en vertu du théorème 8, on conclut que :
  $\forall \alpha_s \in (0,1]$ et pour $p^s_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, $X^i_s(p_i, \alpha_s)$, $X^i_n(p_i)$ sont convexes.

Les composantes de A et b sont des variables aléatoires floues de type L-R

3. Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R

Corollaire 1 *Soient* (Ω, F, P) *un espace de probabilité et* $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ *et* $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ *des variables aléatoires floues normales de type L-R telles que :*
- $\underline{a}_{i1}$, $\underline{a}_{i2}$, $...\underline{a}_{in}$, $\underline{b}_i$ *sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives* $\underline{\mu}_{i1}$, $\underline{\mu}_{i2}$, $...\underline{\mu}_{in}$, $\underline{\lambda}_i$ *et de variances respectives* σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, $...\sigma^2_{in}, \delta^2_i$.
- $\overline{a}_{i1}$, $\overline{a}_{i2}$, $...\overline{a}_{in}$, $\overline{b}_i$ *sont des variables aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives* $\overline{\mu}_{i1}$, $\overline{\mu}_{i2}$, $...\overline{\mu}_{in}$, $\overline{\lambda}_i$ *et de variances respectives* σ^2_{i1}, σ^2_{i2}, $...\sigma^2_{in}, \delta^2_i$.

Alors pour $p_i > \frac{1}{2}$:
- $X^i_p(p_i, \beta_i)$ *et* $X^i_n(p_i, \beta_i)$ *sont convexes* $\forall \beta_i \in (0,1]$.
- $X^i_{\mu_2}(p_i, \frac{1}{2})$, $X^i_{\mu_3}(p_i, \frac{1}{2})$ *sont convexes.*

Preuve. $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, donc, nous reprenons la preuve du théorème 16, avec :

- d'une part que pour chaque $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\overline{b}^{\beta_i}_i = \overline{b}_i + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$ est une variable aléatoire réelle normale d'espérance mathématique $\overline{\lambda}^{\beta_i}_i = \overline{\lambda}_i + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$ et de variance δ^2_i et pour $j = 1, 2, ..., n$:
  $\underline{a}^{\beta_i}_{ij} = \underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$ sont des variable aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\underline{\mu}^{\beta_i}_{ij} = \underline{\mu}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$ et de variances respectives σ^2_{ij}.
- d'autre part que pour chaque $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $\underline{b}^{1-\beta_i}_i = \underline{b}_i - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$ est une variable aléatoire réelle normale d'espérance mathématique $\underline{\lambda}^{1-\beta_i}_i = \underline{\lambda}_i - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$ et de variance δ^2_i et pour $j = 1, 2, ..., n$:
  $\overline{a}^{1-\beta_i}_{ij} = \overline{a}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$ sont des variable aléatoires réelles normales d'espérances mathématiques respectives $\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{ij} = \overline{\mu}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$ et de variances respectives σ^2_{ij} .

  Alors nous concluons que $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, les ensembles admissibles $X^i_p(p_i, \beta_i)$, $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes.
- En remplaçant, dans la preuve du théorème 16 , $\overline{b}^{\beta_i}_i$ par $\underline{b}^{\beta_i}_i$, donc $\overline{\lambda}^{\beta_i}_i$ par $\underline{\lambda}^{\beta_i}_i$ d'une part. Et d'autre part $\underline{b}^{1-\beta_i}_i$ par $\overline{b}^{1-\beta_i}_i$, donc $\underline{\lambda}^{1-\beta_i}_i$ par $\overline{\lambda}^{1-\beta_i}_i$ et en tenant compte de la particularité L-R de $\widetilde{a}_{ij}$ et $\widetilde{b}_i$,
  i.e. ($\overline{b}^{1-\beta_i}_i = \overline{b}_i + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^b_i$, $\overline{\lambda}^{1-\beta_i}_i = \overline{\lambda}_i + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^b_i$, $\overline{a}^{1-\beta_i}_{ij} = \overline{a}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$, $\overline{\mu}^{1-\beta_i}_{ij} = \overline{\mu}_{ij} + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$, $\underline{b}^{\beta_i}_i = \underline{b}_i - L^{-1}(\beta_i)\delta^b_i$, $\underline{\lambda}^{\beta_i}_i = \underline{\lambda}_i - L^{-1}(\beta_i)\delta^b_i$, $\underline{a}^{\beta_i}_{ij} = \underline{a}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$, $\underline{\mu}^{\beta_i}_{ij} = \underline{\mu}_{ij} - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$.)
  Nous concluons que $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > \frac{1}{2}$, les ensembles de solutions admissibles $X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i)$
  et $X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i)$ sont convexes, donc en particulier pour $\beta_i = \frac{1}{2}$.

4. Cas des variables aléatoires floues discrètes de type L-R

Corollaire 2 *Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité muni d'une distribution de probabilité discrète $P(\omega_k) = q_k$, $k = 1, 2, ...r$ et $\sum_{k=1}^{k=r} q_k = 1$ et soient $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ des variables aléatoires floues discrètes de type L-R.*
Alors pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$:
- *$X^i_p(p_i, \beta_i)$ et $X^i_n(p_i, \beta_i)$ sont convexes $\forall \beta_i \in (0, 1]$.*
- *$X^i_{\mu_2}(p_i, \frac{1}{2})$, $X^i_{\mu_3}(p_i, \frac{1}{2})$ sont convexes.*

Preuve. Puisque $\widetilde{a}_{ij} = (\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}, \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ sont des variables aléatoires floues discrètes de type L-R, donc $\underline{a}_{ij}(\omega)$, $\overline{a}_{ij}(\omega)$, $\underline{b}_i(\omega)$ et $\overline{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes, alors, il en de même pour $\underline{a}_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta^a_{ij}$, $\overline{a}_{ij}(\omega) + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^a_{ij}$,
$\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\delta^b_i$, $\underline{b}_i(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta^b_i$, $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma^b_i$ et $\overline{b}_i(\omega) + R^{-1}(1-\beta_i)\gamma^b_i$.
Par conséquent, en vertu du théorème 8, nous avons $\forall \beta_i \in (0, 1]$ et pour $p_i > 1 - min_{k\in(1,2,...r)} q_k$, les ensembles de solutions admissibles $X^i_p(p_i, \beta_i)$, $X^i_n(p_i, \beta_i)$, $X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i)$, $X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i)$, donc en particulier pour $\beta_i = \frac{1}{2}$, $X^i_{\mu_2}(p_i, \frac{1}{2})$, $X^i_{\mu_3}(p_i, \frac{1}{2})$ sont convexes.

Chapitre 4

Programmation linéaire multiobjectifs floue stochastique

Un programme linéaire multiobjectifs flou stochastique est un programme linéaire multiobjectifs en présence :
– de variables aléatoires floues

ou

– de variables aléatoires réelles et d'intervalles flous.

Dans ce qui suit, nous considérerons des programmes linéaires multiobjectifs flous stochastiques, dont les coefficients des fonctions objectifs sont :
– des variables aléatoires floues,
– déterministes,
– des intervalles flous,
– des variables aléatoires réelles.

4.1 Les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues

Dans ce cas,un programme linéaire multiobjectifs est flou stochastique quelque soit la nature des coefficients des contraintes.

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^4_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l}\max(\widetilde{c}_1(\omega)\odot x, \widetilde{c}_2(\omega)\odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)\odot x)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,2,...,m\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\}\end{array}\right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega)=(\widetilde{c}_{r1}(\omega),\widetilde{c}_{r2}(\omega),...,\widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P).

Quatre cas de variables aléatoires floues normales seront considérés pour $(P^4_{M.O.F.S})$ comme suit :

1. le cas où les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires, a été considéré par Katagiri et col.[23]. Elles se présentent sous la la forme suivante : $\widetilde{c}_{rj}(\omega)=(\overline{d}_{rj}(\omega),\overline{\alpha}_{rj}(\omega),\overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ où $\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires normales.
2. le cas où les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R, dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs, a été considéré par Jun. Li et col.[29]. Elles se présentent sous la la forme suivante : $\widetilde{X}(\omega)=(x(\omega),\delta^x,\gamma^x)$ où $x(\omega)$ est une variable aléatoire normale et δ^x,γ^x sont des nombres réels positifs.

   Et les deux cas suivants que nous proposerons :
3. le cas où des variables aléatoires floues $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs, de la forme : $\widetilde{X}(\omega)=(\underline{x}(\omega),\overline{x}(\omega),\delta^x,\gamma^x)$ où $\underline{x}(\omega)$ et $\overline{x}(\omega)$ sont des variables aléatoires normales et δ^x,γ^x sont des nombres réels positifs. .

   et
4. le cas où les variables aléatoires floues $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont normales au sens de Shapiro.

4.1.1 Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont aléatoires

Puisque les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires floues, nous avons alors un programme linéaire multiobjectifs flou stochastique quelque soit la nature des coefficients des contraintes qui peuvent être des variables aléatoires réelles ou floues, des intervalles flous ou même déterministes.
C'est le cas où ils sont déterministes qui a été considéré par Katagiri et col.[23] comme suit :

Soit le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^5_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l}\min(\widetilde{c}_1(\omega)\odot x,\widetilde{c}_2(\omega)\odot x,...,\widetilde{c}_k(\omega)\odot x)\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/Ax\leq b,\ x\geq 0\}\end{array}\right\}$$

où les contraintes sont déterministes $Ax \leq b \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1,2,...,m.$ et $\widetilde{c}_r(\omega) = (\widetilde{c}_{r1}(\omega),\widetilde{c}_{r2}(\omega),...,\widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R telles que pour tout $\omega\in\Omega$, leurs foctions d'appartenance sont définies comme suit :

$$\mu_{\widetilde{c}_{rj}(\omega)}(s)=\left\{\begin{array}{ll}L(\frac{\overline{d}_{rj}(\omega)-s}{\overline{\alpha}_{rj}(\omega)}) & (s\leq\overline{d}_{rj}(\omega),\forall\omega)\\ \\ R(\frac{s-\overline{d}_{rj}(\omega)}{\overline{\beta}_{rj}(\omega)}) & (s>\overline{d}_{rj}(\omega),\forall\omega),r=1,...,k;j=1,...n\end{array}\right\}$$

où :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega)=(\overline{d}_{rj}(\omega),\overline{\alpha}_{rj}(\omega),\overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ avec $L(t)=max(0,l(t))$ et $R(t)=max(0,r(t))$ sont des fonctions réelles continues de $[0,+\infty)$ dans $[0,1]$, et $l(t)$, $r(t)$ sont des fonctions strictement croissantes, continues telles que $l(0)=r(0)=1$.
$\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires réelles définies par $\overline{d}_{rj}(\omega) = d^1_{rj}+\bar{t}_r(\omega)d^2_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}(\omega) = \alpha^1_{rj}+\bar{t}_r(\omega)\alpha^2_{rj}$ et ,$\overline{\beta}_{rj}(\omega)) = \beta^1_{rj}+\bar{t}_r(\omega)\beta^2_{rj}$, où $\bar{t}_r$ est une variable aléatoire normale d'espérance m_r et de variance σ^2_r et d^l_{rj}, α^l_{rj} et β^1_{rj}, $l=1,2$ sont des constantes et les écarts $\overline{\alpha}_{rj}(\omega)$ et $\overline{\beta}_{rj}(\omega)$ sont positifs pour tout $\omega\in\Omega$.
Puisque tous les coefficients de chaque fonction objectif sont des variables aléatoires floues de type L-R, alors pour tout $\omega\in\Omega$, les opérations effectuées sur les nombres flous, en utilisant le principe d'extension du à Zadeh, ont donné des nombres flous caractérisés par les fonctions d'appartenance suivantes :

$$\mu_{\widetilde{c}_r(\omega)x}(y)=\left\{\begin{array}{ll}L(\frac{\overline{d}_r(\omega)x-y}{\overline{\alpha}_r(\omega)x}) & (y\leq\overline{d}_r(\omega)x,\forall\omega)\\ \\ R(\frac{y-\overline{d}_r(\omega)x}{\overline{\beta}_r(\omega)x}) & (y>\overline{d}_r(\omega)x,\forall\omega),r=1,...,k\end{array}\right\}$$

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^5_{M.O.F.S})$

Pour la résolution du problème $(P^5_{M.O.F.S})$ Katagiri et col. [23] se sont basés sur la nature imprécise du jugement du décideur qui propose donc que chaque objectif doit atteindre le but flou $\widetilde{G}_r$ défini par "'l'objectif est à peu prés inférieur ou égal à une certaine valeur"' qui peut être caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\widetilde{G}_r}(y)=\left\{\begin{array}{ll}1 & y\leq g^1_r\\ \\ g_r(y) & g^1_r\leq y\leq g^0_r\\ \\ 0 & g^0_r\leq y\end{array}\right\}$$

où g_r est une fonction continue strictement décroissante.
En utilisant le concept de mesure de possibilité, le degré de possibilité que la valeur de l'objectif satisfait le but flou est représenté par $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r)) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\}$, $r = 1, 2, ..., k$ que le décideur préfére maximiser, le problème $(P^5_{M.O.F.S})$ est alors reformulé comme suit :

$$(P^5_{M.O.S})\left\{\begin{array}{l} \max(\Pi_{\widetilde{C}_1(\omega)x}(\widetilde{G}_1), \Pi_{\widetilde{C}_2(\omega)x}(\widetilde{G}_2), ..., \Pi_{\widetilde{C}_k(\omega)x}(\widetilde{G}_k)) \\ \\ x \in B \end{array}\right\}$$

qui est un programme muliobjectifs stochastique car $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}$ est aléatoire.
Pour sa résolution, la méthode de risque minimal multiple a été utilisée dans [23], il en résulte alors le programme déterministe suivant :

$$(P^5_{M.O.D})_1\left\{\begin{array}{l} \max P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\}, \ r = 1, 2, ..., k \\ x \in B \end{array}\right\}$$

Puisque $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r \Longleftrightarrow sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\} \geq h_i$
$\Longleftrightarrow \exists y : \mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y) \geq h_r, \quad \mu_{\widetilde{G}_r}(y)) \geq h_r,$
$\Longleftrightarrow \exists y : L(\frac{\overline{d}_r(\omega)x-y}{\overline{\alpha}_r(\omega)x}) \geq h_r, \quad R(\frac{y-\overline{d}_r(\omega)x}{\overline{\beta}_r(\omega)x}) \geq h_r, \quad \mu_{\widetilde{G}_r}(y) \geq h_r,$
$\Longleftrightarrow \exists y : \left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq y \leq \overline{d}_r(\omega) + R^*(h_r)\overline{\beta}_r(\omega)x, \quad y \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r(y}(h_r)$
$\Longleftrightarrow \left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r),$
où $L^*(h_r)$ et $\mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)$ sont des pseudo fonctions inverses définies par :
$L^*(h_r) = sup\left\{s/L(s) \geq h_r\right\}, \quad \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r) = sup\left\{s/\mu_{\widetilde{G}_r}(s) \geq h_r\right\}.$
Par ailleurs supposons que $(d^2_r - L^*(0)\overline{\alpha}^2_r)x > 0$, $r = 1, 2, ..., k$, $pourtout x \in D$,
$P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\} = P\left[\left\{\overline{d}_r(\omega) - L^*(h_r)\overline{\alpha}_r(\omega)\right\} x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)\right] =$
$\mathrm{P}\left[\omega : (d^1_r + \overline{t}_r(\omega)d^2_r)x - L^*(h_r)(\alpha^1_r + \overline{t}_r(\omega)\alpha^2_r)x \leq \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)\right] =$
$\mathrm{P}\left[\omega : \overline{t}_r(\omega) \leq \frac{(L^*(h_r)\alpha^1_r - d^1_r)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d^2_r - L^*(h_r)\alpha^2_r)x}\right] = T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha^1_r - d^1_r)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d^2_r - L^*(h_r)\alpha^2_r)x}) = p_r(x).$
par conséquent $(P^5_{M.O.D})_1$ peut s'écrire comme suit :

$$(P^5_{M.O.D})_2\left\{\begin{array}{l} \max(p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)) \\ \\ x \in B \end{array}\right\}$$

Pour obtenir une solution pareto-optimale du problème $(P^5_{M.O.D})_2$, l'algorithme suivant a été proposé dans [23].

Algorithme intéractif pour obtenir une solution pareto optimale

Etant donné que le programme est multiobjectifs, donc une solution qui optimise simultanément tous les objectifs est rare. Une solution pareto-optimale est à envisager, elle a été définie comme suit :

Définition 5 *[23]*
x^* est appelée solution pareto-optimale si et seulement si il n'existe pas $x \in D$ tel que $p_r(x) \geq p_r(x^*)$, $\forall r \in \{1, 2, ..., k\}$ et $p_j(x) > p_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Définition 6 *[23]*
x^* est appelée solution faiblement pareto-optimale si et seulement si il n'existe pas $x \in D$ tel que $p_j(x) > p_j(x^*)$, $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Pour chaque objectif $p_r(x)$, $r = 1, 2, ..., k$, le décideur choisit une probabilité de référence à atteindre $\overline{p}_r$, $r = 1, 2, ..., k$.

$$(P^5_{M.O.D})_3 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{p}_1 - p_1(x), \overline{p}_2 - p_2(x), ..., \overline{p}_k - p_k(x)) \\ \\ x \in D \end{array} \right\}$$

qui est équivalent à :

$$(P^5_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \overline{p}_r - p_r(x) \leq v, \; r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

qui peut se réécrire, en remplaçant $p_r(x)$ par $T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x})$, sous la forme suivante :

$$(P^5_{M.O.D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x} \geq T_r^*(\overline{p}_r - v), \; r = 1, 2, ..., k. \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

où $T_r^*(s)$ est la pseudo fonction inverse définie par :
$T_r^*(s) = inf \{u / T_r(u) \geq s\}$, $r = 1, 2, ..., k$

Algorithme

1. Calculer $minE(\overline{d}_i)x$ et $maxE(\overline{d}_i)x$ sous les contraintes données.
2. Etablir les fonctions d'appartenance du but flou $\widetilde{G}_r$, $r = 1, 2, ..., k$
3. Demander au décideur de choisir les niveaux h_r, $r = 1, 2, ..., k$.
4. Choisir les probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$.

5. Avec ce Choix de probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$, résoudre le problème $(P^5_{M.O.D})_5$ pour obtenir la valeur minimale de v.
6. Si le décideur est satisfait des résultats obtenus avec ce choix des probabilités de référence p_r, $r = 1, 2, ..., k$, alors stop. Sinon lui demander un autre choix des probabilités de référence et reprendre le processus à partir de 5.

Exemple 6 *Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l}\min(\widetilde{c}_{11}(\omega)\odot x_1+\widetilde{c}_{12}(\omega)\odot x_2+\widetilde{c}_{13}(\omega)\odot x_3,\widetilde{c}_{21}(\omega)\odot x_1+\widetilde{c}_{22}(\omega)\odot x_2+\widetilde{c}_{23}(\omega)\odot x_3)\\ \\ 2x_1+6x_2+3x_3\leq 150\\ \\ 6x_1+3x_2+5x_3\leq 175\\ \\ 5x_1+4x_2+2x_3\leq 160\\ \\ 2x_1+2x_2+3x_3\geq 90\\ \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0.\end{array}\right\}$$

où :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega) = (\overline{d}_{rj}(\omega), \overline{\alpha}_{rj}(\omega), \overline{\beta}_{rj}(\omega))_{L-R}$ dont la fonction d'appartenance est définie au

$\overline{d}_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}$, $\overline{\beta}_{rj}$, sont des variables aléatoires réelles définies par $\overline{d}_{rj}(\omega) = d^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega)d^2_{rj}$, $\overline{\alpha}_{rj}(\omega) = \alpha^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega)\alpha^2_{rj}$ et ,$\overline{\beta}_{rj}(\omega) = \beta^1_{rj} + \bar{t}_r(\omega)\beta^2_{rj}$, où $r = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$ et

$d^1_1 = (d^1_{11}, d^1_{12}, d^1_{13}) = (2, 1, 3), \quad d^2_1 = (d^2_{11}, d^2_{12}, d^2_{13}) = (1.3, 1.1, 1.2),$

$d^1_2 = (d^1_{21}, d^1_{22}, d^1_{23}) = (-7, -7, -9), \quad d^2_2 = (d^2_{21}, d^2_{22}, d^2_{23}) = (1.1, 1.2, 1.1).$

$\alpha^1_1 = (\alpha^1_{11}, \alpha^1_{12}, \alpha^1_{13}) = (0.3, 0.4, 0.5), \quad \alpha^2_1 = (\alpha^2_{11}, \alpha^2_{12}, \alpha^2_{13}) = (0.05, 0.04, 0.05),$

$\alpha^1_2 = (\alpha^1_{21}, \alpha^1_{22}, \alpha^1_{23}) = (0.3, 0.5, 0.4), \quad \alpha^2_2 = (\alpha^2_{21}, \alpha^2_{22}, \alpha^2_{23}) = (0.05, 0.04, 0.05).$

$\beta^1_1 = (\beta^1_{11}, \beta^1_{1}, \beta^1_{12}) = (0.5, 0.6, 0.5), \quad \beta^2_1 = (\beta^2_{11}, \beta^2_{1}, \beta^2_{12}) = (0.06, 0.05, 0.06),$

$\beta^1_2) = (\beta^1_{21}, \beta^1_{22}, \beta^1_{23}) = (0.4, 0.5, 0.5), \quad \beta^2_2 = (\beta^2_{21}, \beta^2_{22}, \beta^2_{23}) = (0.06, 0.06, 0.05).$

et $\bar{t}_i$, $i = 1, 2$ sont des variables aléatoires normales centrées réduites (pour $i = 1, 2$, $\bar{t}_i \hookrightarrow N(0, 1.))$

Pour la résolution du problème $(P_{M.O.F.S})$, Katagiri et col. [23] se sont basés, tel que vu au 3.6.2, 1., sur la nature imprécise du jugement du décideur qui propose donc que chaque objectif doit atteindre le but flou $\widetilde{G}_r$ défini par "'l'objectif est à peu prés inférieur ou égal à une certaine valeur"' qui peut être caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{G}_r}$ définie au 3.6.2, 1.
En utilisant le concept de mesure de possibilité, le degré de possibilité que la valeur de l'objectif satisfait le but flou est représenté par $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r)) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(y), \mu_{\widetilde{G}_r}(y))/y\right\}$, $r = 1, 2, ..., k$ que le décideur préfére maximiser, le problème $(P_{M.O.F.S})$ est alors reformulé comme suit :

$$(P_{M.O.S})\left\{\begin{array}{l} \max(\Pi_{\widetilde{C}_1(\omega)x}(\widetilde{G}_1), \Pi_{\widetilde{C}_2(\omega)x}(\widetilde{G}_2), ..., \Pi_{\widetilde{C}_k(\omega)x}(\widetilde{G}_k)) \\ \\ x \in B \end{array}\right\}$$

qui est un programme muliobjectifs stochastique car $\Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}$ est aléatoire.
Pour sa résolution, la méthode de risque minimal multiple a été utilisée dans [23], il en résulte alors le programme déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D})_1\left\{\begin{array}{l} \max P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\}, \ r = 1, 2, ..., k \\ x \in B \end{array}\right\}$$

$P\left\{\omega : \Pi_{\widetilde{C}_r(\omega)x}(\widetilde{G}_r) \geq h_r\right\} = P\left[\omega : \bar{t}_r(\omega) \leq \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}\right] = T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x}) = p_r(x)$.
où $L^*(h_r)$ et $\mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)$ sont des pseudo fonctions inverses définies par :
$L^*(h_r) = sup\left\{s/L(s) \geq h_r\right\}, \quad \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r) = sup\left\{s/\mu_{\widetilde{G}_r}(s) \geq h_r\right\}$.
par conséquent $(P^5_{M.O.D})_1$ peut s'écrire comme suit :

$$(P_{M.O.D})_2\left\{\begin{array}{l} \max(p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x)) \\ \\ x \in B \end{array}\right\}$$

Pour chaque objectif $p_r(x)$, $1 \leq r \leq k$, le décideur choisit une probabilité de référence à atteindre $\overline{p}_r$, on obtient alors le problème minmax suivant :

$$(P_{M.O.D})_3\left\{\begin{array}{l} \min max(\overline{p}_1 - p_1(x), \overline{p}_2 - p_2(x), ..., \overline{p}_k - p_k(x)) \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

qui est équivalent à :

$$(P_{M.O.D})_4\left\{\begin{array}{l} \min v \\ \\ \overline{p}_r - p_r(x) \leq v, \ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in D. \end{array}\right\}$$

qui peut se réécrire, en remplaçant $p_r(x)$ par $T_r(\frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x})$, sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ \frac{(L^*(h_r)\alpha_r^1 - d_r^1)x + \mu^*_{\widetilde{G}_r}(h_r)}{(d_r^2 - L^*(h_r)\alpha_r^2)x} \geq T_r^*(\overline{p}_r - v),\ r = 1, 2, ..., k. \\ \\ x \in D. \end{array} \right\}$$

où $T_r^*(s)$ est la pseudo fonction inverse définie par :
$T_r^*(s) = inf\,\{u/T_r(u) \geq s\}\,,\ r = 1, 2, ..., k$

Etape 1 : Le décideur choisit en premier lieu pour la résolution du problème minmax $(P_{M.O.D})_3$, les probabilités de référence : $\overline{p}_1 = 1$, $\overline{p}_2 = 1$, il en résulte les résultats suivants :

$$\left\{\ p_1(x) = 0.56 \quad p_2(x) = 0.56 \quad x_1 = 6.49 \quad x_2 = 13.19 \quad x_3 = 19.30\ \right\}$$

Etape 2 : Le décideur n'est pas satisfait de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ ainsi obtenus et préfére élargir $p_1(x)$ donc modifie $\overline{p}_2$ et refait les calculs avec les probabilités de référence $\overline{p}_1 = 1$, $\overline{p}_2 = 0.80$, les résultats obtenus sont :

$$\left\{\ p_1(x) = 0.67 \quad p_2(x) = 0.47 \quad x_1 = 7.79 \quad x_2 = 13.68 \quad x_3 = 17.45\ \right\}$$

Etape 3 : Le décideur n'est pas du tout satisfait de la valeur de $p_2(x)$ ainsi obtenue qu'il juge faible alors il propose de refaire les calculs avec les probabilités de référence $\overline{p}_1 = 0.90$, $\overline{p}_2 = 0.80$, d'où les résultats suivants :

$$\left\{\ p_1(x) = 0.61 \quad p_2(x) = 0.51 \quad x_1 = 7.14 \quad x_2 = 13.43 \quad x_3 = 18.37\ \right\}$$

Le décideur est satisfait de $p_1(x)$ et $p_2(x)$ ainsi obtenus et arrête te processus interactif et la solution satisfaisante est donc : $x_1 = 7.14$, $x_2 = 13.43$, $x_3 = 18.37$.

4.1.2 Cas des variables aléatoires floues normales de type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs

Jun. Li et col.[29] ont considéré le même type de programme linéaire multiobjectifs flou stochastique que Katagiri et col. [23] mais avec des contraintes floues stochastiques et les coefficients aussi bien de ces dernières que des objectifs sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, mais dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs comme suit :

$$(P^6_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega)\odot x, \widetilde{c}_2(\omega)\odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)\odot x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,2,...,m \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega)=(\widetilde{c}_{r1}(\omega),\widetilde{c}_{r2}(\omega),...,\widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type $L-R$ comme suit :
$\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (a_{ij}(\omega),\delta^a_{ij},\gamma^a_{ij})_{L-R}$, $\widetilde{b}_i(\omega) = (b_i(\omega),\delta^b_i,\gamma^b_i)_{L-R}$ et $\widetilde{c}_{ij}(\omega) = (c_{ij}(\omega),\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij})_{L-R}$ dont les écarts δ^a_{ij}, γ^a_{ij}, δ^b_i,γ^b_i, $\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij}$ sont des nombres réels positifs. Et
$a_{ij}\hookrightarrow N(\mu_{ij},\sigma^2_{ij})$, $b_i\hookrightarrow N(\lambda_i,\nu^2_i)$ $\widetilde{c}_{ij}(\omega)=(c_{ij}(\omega),\delta^c_{ij},\gamma^c_{ij})_{L-R}$
$c_r\hookrightarrow N(d^c_r,V^c_r)$ où $d^c_r=(d^c_{r1},d^c_{r2},...,d^c_{rn})$ avec $E(c_{rj})=d^c_{rj}$ et V^c_r est la matrice de covariance de c_r.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^6_{M.O.F.S})$

Pour la résolution de $(P^6_{M.O.F.S})$, Jun. Li et col.[29] ont proposé deux méthodes à savoir : prob-pos constrained multiobjective programming model et pro-nec constrained multiobjective programming model [29] qui consistent à remplacer prob par prob-pos et prob-nec respectivement dans la formule de risque minimum multiple (voir 1.2.1) pour les objectifs et dans la formule chance constrained programming due à Charnes et Cooper [8](voir 1.1.6) pour les contraintes comme suit :
– pro-pos constrained multiobjective programming model

$$(P^{6p}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1,f_2,...,f_k) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j\succeq f_r)\geq\alpha_r\right\}\geq p^o_r,\ r=1,2,...,k \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j\preceq \widetilde{b}_i(\omega))\geq\beta_i\right\}\geq p_i, i=1,2,...,m \\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

En utilisant les propriétés de possibilité [15], on a : pour ω donné,
$pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j\succeq f_r)\geq\alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^n \overline{c}^{\alpha_r}_{rj}(\omega)x_j\geq f_r$ donc

$P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ où $\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega)$. Comme $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R,donc $\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}(\omega) = c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c$ d'où on a :
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ qui, en utilisant la remarque 1 comme suit :

on pose $y_r = f_r - \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \leq 0$, on a $m_{y_r}(x) = E(y_r) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j$ et $V(y_r) = V(\sum_{j=1}^{n}c_{rj}(\omega)x_j) = x^tV_r^cx$ donc $\sigma_{y_r}(x) = \sqrt{x^tV_r^cx}$. Par conséquent
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}+f_r-\sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j \leq 0 \Longrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j - \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$ ou bien
$f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$.
Jun. Li et col. ont établit que $(P_{M.O.D}^{6p})$ est équivalent au programme multiobjectif déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{6p})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx},\ r = 1,2,...,k \\ \\ x \in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array} \right\}$$

où $X_p^i(p_i,\beta_i) = \left\{x \geq 0/P(\omega : \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(\omega) - L^{-1}(\beta_i)\delta_{ij}^a)x_j \leq b_i(\omega) + R^{-1}(\beta_i)\gamma_i^b) \geq p_i\right\}$, $i = 1, ...m$.
$(P_{M.O.D}^{6p})_1$ est équivalent au programme suivant :

$$(P_{M.O.D}^{6p})_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(H_1(x), H_2(x), ..., H_k(x)) \\ \\ x \in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array} \right\}$$

où $H_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$, $r = 1,2,...,k$.

Ensuite, dans le but d'obtenir une solution satisfaisante au problème $(P_{M.O.D}^{6p})_2$, Jun. Li et col.[29] ont utilisé "'Interactive fuzzy satisfying method"' comme suit : en considérant la nature imprécise du jugement du décideur, il est naturel que ce dernier suggère que chaque objectif atteigne le but flou suivant : " $H_r(x)$ est approximativement plus grand qu'une certaine valeur" qui est caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_r(H_r(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & H_r(x) > H_r^1, \\ \\ \frac{H_r(x)-H_r^0}{H_r^1-H_r^0} & H_r^0 \leq H_r(x) \leq H_r^1, \\ \\ 0 & H_r(x) \leq H_r^0. \end{array} \right\}$$

où pour $r = 1,2,...,k$, H_r^0 et H_r^1 sont tels que $\mu_r(H_r^1(x)) = 1$ et $\mu_r(H_r^0(x)) = 0$ et peuvent être déterminés par la résolution des programmes suivants $max(H_r(x)/x \in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m)$ et $min(H_r(x)/x \in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i = 1,2,...,m)$, qui sont convexes pour $p_i > \frac{1}{2}$, donc leurs solutions

optimales peuvent être déterminées aisément.
Le programme $(P^{6p}_{M.O.D})_2$ peut être approché par le programme suivant :

$$(P^{6p}_{M.O.D})_3 \left\{ \begin{array}{l} \max(\mu_1(H_1(x)), \mu_2(H_2(x)), ..., \mu_k(H_k(x))) \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

Pour chaque objectif $\mu_r(H_r(x))$, le décideur choisit une fonction d'appartenance $\overline{\mu_r}$ comme but à atteindre, ce qui revient à résoudre le programme suivant :

$$(P^{6p}_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(H_1(x)), \overline{\mu_2} - \mu_2(H_2(x)), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(H_k)(x)) \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

En introduisant une variable auxilliaire λ,
$(P^{6}_{M.O.D})_4$ est alors équivalent au programme suivant :

$$(P^{6p}_{D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(H_r(x)) \leq \lambda,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui peut, en remplaçant $\mu_r(H_r(x))$ par son expression, s'écrire sous la forme suivante :

$$(P^{6p}_{D})_6 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \sum_{j=1}^{n}(d^c_{rj} + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1 - p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x} \geq H^0_r i + (\overline{\mu_r} - \lambda)(H^1_r - H^0_r),,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

La relation entre une solution optimale du problème $(P^{6p}_{D})_5$ et la solution pareto-optimale du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_2$ est donnée par le théorème suivant :
Théorème 18 *[36]*

1. *Si $x^* \in X^i_p(p_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ est une unique solution optimale du problème $(P^{6p}_{D})_5$ pour $\overline{\mu_i}$, $i = 1, 2, ..., k$, alors x^* est une solution pareto-optimale du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_2$.*
2. *Si x^* est une solution pareto-optimale du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_2$ avec $0 < \mu_r(H_r(x^*) < 1$, $\forall r = 1, 2, ..., k$, alors il existe $\overline{\mu_r}$, $r = 1, 2, ..., k$ tel que x^* est une solution optimale du problème $(P^{6p}_{D})_5$.*

Remarque 7 *Si $x^* \in X^i_p(p_i, \beta_i)$, $i = 1, 2, ..., m$ n'est pas une solution optimale unique du problème $(P^{6p}_{D})_5$, sa pareto-optimalité peut être obtenue en résolvant le problème suivant :*

$$(P^{6p}_{D})_7 \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i \\ \\ \mu_r(H_r(x)) + \epsilon_r = \overline{\mu_r},\ \epsilon_r \geq 0,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

Algorithme intéractif pour obtenir une solution satisfaisante au problème $(P^{6p}_{M.O.D})_{2;}$

1. Le décideur choisit les fonctions d'appartenance de référence $\overline{\mu}_r, r = 1, 2, ..., k$.
2. La solution optimale du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_4$ qui est aussi pareto-optimale du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_2$, est considérée comme solution satisfaisante pour $(P^{6p}_{M.O.D})_2$.
3. Si la valeur obtenue de $\mu_r(H_r(x^*)$ est satisfaisante, le processus s'arrête et x^* est choisie comme solution satisfaisante pour le problème $(P^{6p}_{M.O.D})_{2;}$ sinon le décideur modifie les valeurs des fonctions d'appartenance de référence μ_r et reprendre à partir de 2.

– pro-nec constrained multiobjective programming model

$$(P^{6n}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

En utilisant les propriétés de nécessité [15], on a : pour ω donné, $nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) x_j \geq f_r$ donc $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ où $\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega)$. Comme $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires floues de type L-R,donc $\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}(\omega) = c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c$ d'où on a : $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o$ qui peut se présenter sous une forme linéaire. Pour cela, on pose $y_r = f_r - \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j \leq 0$, on a $m_{y_r}(x) = E(y_r) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j$ et $V(y_r) = V(\sum_{j=1}^{n} c_{rj}(\omega) x_j) = x^t V_r^c x$ donc $\sigma_{y_r}(x) = \sqrt{x^t V_r^c x}$. Par conséquent $P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \Longleftrightarrow \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x} + f_r - \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j \leq 0 \Leftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j - \Psi^{-1}(p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$ ou bien
$f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$ (car $\Psi^{-1}(1-p_r^o) = -\Psi^{-1}(p_r^o)$).

Ainsi, on obtient le résultat suivant établi dans [29].

– $P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_i^0 \Leftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c) x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$

qui prouve dans [29] :

l'équivalence entre $(P^{6n}_{M.O.D})$ et le programme suivant :

$$(P^{6n}_{M.O.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(d^c_{rj} - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x},\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

où $X^i_n(p_i, \beta_i) = \left\{ x \geq 0 / P(\omega : \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}(\omega) + R^{-1}(1-\beta_i)\delta^a_{ij})x_j \leq b_i(\omega) - L^{-1}(1-\beta_i)\gamma^b_i) \geq p_i \right\}$, $i = 1, ...m$.

ainsi que l'équivalence entre $(P^{6n}_{M.O.D})_1$ et le programme suivant :

$$(P^{6n}_{M.O.D})_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(G_1(x), G_2(x), ..., G_k(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

où $G_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(d^c_{rj} - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x}$

"'Interactive fuzzy satisfying method"' a été utilisée dans [29] pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{6p}_{M.O.D})_2$ comme suit : en considérant la nature imprécise du jugement du décideur, il est naturel que ce dernier propose, pour chaque objectif, le but flou suivant à atteindre : " $G_r(x)$ est approximativement plus grand qu'une certaine valeur" qui est caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_r(G_r(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & G_r(x) > G^1_r, \\ \\ \frac{G_r(x) - G^0_r}{G^1_r - G^0_i} & G^0_r \leq G_r(x) \leq G^1_r, \\ \\ 0 & G_r(x) \leq G^0_r. \end{array} \right\}$$

où pour $r = 1, 2, ..., k$ on a G^0_r et G^1_r sont tels que $\mu_r(G^1_r(x)) = 1$ et $\mu_r(G^0_r(x)) = 0$ et peuvent être déterminés par la résolution des programmes suivants $max(G_r(x)/x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m)$ et

$min(G_r(x)/x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m)$, qui sont convexes pour $p_i > \frac{1}{2}$, donc leurs solutions optimales peuvent être déterminées aisément.

Pour résoudre le programme $(P^{6n}_{M.O.D})_3$, le décideur choisit pour chaque objectif $\mu_r(G_r(x))$, une fonction d'appartenance $\overline{\mu_r}$ comme but à atteindre. Ce qui conduit à résoudre le programme suivant :

$$(P^{6n}_{M.O.D})_4 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(G_1(x)), \overline{\mu_2} - \mu_2(G_2(x)), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(G_k)(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

En introduisant une variable auxilliaire λ, $(P^{6n}_{M.O.D})_4$ est équivalent programme suivant :

$$(P^{6n}_{D})_5 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(G_r(x)) \leq \lambda,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

ou, au programme suivant :

$$(P_D^{6n})_6 \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ \\ \sum_{j=1}^{n}(d_{rj}^c - L^{-1}(1-\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x} \geq H_r^0 + (\overline{\mu_r} - \lambda)(G_r^1 - G_r^0),\ r = 1,2,...,k \\ \\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1,2,...,m \end{array} \right\}$$

qui est un programme convexe, si $p_i > \frac{1}{2}$.
Le théorème 18 s'applique quant à la relation existant entre la solution optimale de $(P_D^{6n})_5$ et la solution pareto optimale de $(P_{M.O.D}^{6n})_2$.

Exemple 7 *[29] Soit le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P_{M.O.F.S}^{6})' \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{\xi}_1(\omega) \odot x_1 \oplus \widetilde{\xi}_2(\omega) \odot x_2 \oplus \widetilde{\xi}_3(\omega) \odot x_3 \oplus \widetilde{\xi}_4(\omega) \odot x_4 \oplus \widetilde{\xi}_5(\omega) \odot x_5, \\ \widetilde{\xi}_6(\omega) \odot x_1 \oplus \widetilde{\xi}_7(\omega) \odot x_2 \oplus \widetilde{\xi}_8(\omega) \odot x_3 \oplus \widetilde{\xi}_9(\omega) \odot x_4 \oplus \widetilde{\xi}_{10}(\omega) \odot x_5) \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\ \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\ \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\ \\ x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20. \end{array} \right\}$$

où $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (1.2, 0.5, 1.3, 0.8, 0.9)$
$\xi_{1(\omega)} = (p_1(\omega), 3, 3)_{LR}$ *avec* $p_1 \hookrightarrow N(113, 1)$, $\xi_2(\omega) = (p_2(\omega), 8, 8)_{LR}$ *avec* $p_2 \hookrightarrow N(241, 4)$.
$\xi_3(\omega) = (p_3(\omega), 3, 3)_{LR}$ *avec* $p_3 \hookrightarrow N(87, 1)$, $\xi_4(\omega) = (p_4(\omega), 78, 7)_{LR}$ *avec* $p_4 \hookrightarrow N(56, 2)$.
$\xi_5(\omega) = (p_5(\omega), 5, 5)_{LR}$ *avec* $p_5 \hookrightarrow N(92, 1)$, $\xi_6(\omega) = (p_6(\omega), 10, 10)_{LR}$ *avec* $p_6 \hookrightarrow N(628, 1)$.
$\xi_7(\omega) = (p_7(\omega), 7, 7)_{LR}$ *avec* $p_7 \hookrightarrow N(143, 2)$, $\xi_8(\omega) = (p_8(\omega), 12, 12)_{LR}$ *avec* $p_8 \hookrightarrow N(476, 2)$.
$\xi_9(\omega) = (p_9(\omega), 5, 5)_{LR}$ *avec* $p_9 \hookrightarrow N(324, 2)$, $\xi_{10}(\omega) = (p_{10}(\omega), 8, 8)_{LR}$ *avec* $p_{10} \hookrightarrow N(539, 2)$.
Et p_i, $i = 1, 2, ..., 10$ *sont des variables aléatoires indépendantes.*
Pour la résolution, en appliquant "'pro-pos constrained multiobjective programming model"' avec $\alpha_i = p_i^0 = 0.9$ *alors* $R^{-1}(\delta_l) = 0.1$, $\phi^{-1}(1 - \gamma_l) = -1.28$, $l = 1, 2$.

Il en résulte le programme suivant :

$$(P^6_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\widetilde{\xi}_1(\omega) \odot x_1 + \widetilde{\xi}_2(\omega) \odot x_2 + \widetilde{\xi}_3(\omega) \odot x_3 + \widetilde{\xi}_4(\omega) \odot x_4 + \widetilde{\xi}_5(\omega) \odot x_5 \geq f_1) \geq \delta_1\right\} \geq \gamma_1 \\ \\ P\left\{\omega : pos(c_1\widetilde{\xi}_6(\omega) \odot x_1 + c_2\widetilde{\xi}_7(\omega) \odot x_2 + c_3\widetilde{\xi}_8(\omega) \odot x_3 + c_4\widetilde{\xi}_9(\omega) \odot x_4 + \right. \\ c_5\widetilde{\xi}_{10}(\omega) \odot x_5 \geq f_2) \geq \delta_2 \geq \gamma_2 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\ \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\ \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\ \\ x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20. \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^6_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(H_1(x) = 0.1(3x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 + (113x_1 + 241x_2 + 67x_3 + 56x_4 + 92x_5) \\ -1.28\sqrt{x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + x_5^2}, \\ H_2(x) = 0.1(1.2x_1 + 3.5x_2 + 15.6x_3 + 4x_4 + 7.2x_5 + (753.6x_1 + 71.5x_2 + 618.8x_3 + 259.2x_4 \\ +485.1x_5) - 1.28\sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2}) \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 350 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 300 \\ \\ 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 1085 \\ \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 660 \\ \\ x_1 \geq 20,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 20,\ x_4 \geq 20,\ x_5 \geq 20. \end{array} \right\}$$

dont la solution satisfaisante peut être obtenue en appliquant l'algorithme précédent comme suit :

Etape 1 : Le décideur choisit en premier lieu les fonctions d'appartenance de référence suivantes : $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 1$, *d'où l'obtention des résultats suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41476.7 & H_2 = 214244.8 & \mu_1(H_1) = 0.833 & \mu_2(H_2) = 0.833 & & \\ x_1 = 216.1 & x_2 = 39.6 & x_3 = 54.3 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.167 \end{array} \right\}$$

Etape 2 : Le décideur souhaite croitre la valeur de H_2 quitte à sacrifier H_1, donc il opte pour :
$\overline{\mu}_1 = 0.95,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41093.2 & H_2 = 21725.6 & \mu_1(H_1) = 0.805 & \mu_2(H_2) = 0.855 & & \\ x_1 = 216.6 & x_2 = 37.0 & x_3 = 56.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.145 \end{array} \right\}$$

Etape 3 :Le décideur n'étant toujours pas satisfait des résultats obtenus, opte pour :
$\overline{\mu}_1 = 1,\ \ \overline{\mu}_2 = 0.95.$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41860.2 & H_2 = 21273.6 & \mu_1(H_1) = 0.861 & \mu_2(H_2) = 0.811 & & \\ x_1 = 215.6 & x_2 = 34.4 & x_3 = 58.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.139 \end{array} \right\}$$

Etape 4 : $\overline{\mu}_1 = 0.90,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 40709.6 & H_2 = 21720.6 & \mu_1(H_1) = 0.777 & \mu_2(H_2) = 0.877 & & \\ x_1 = 217.3 & x_2 = 34.4 & x_3 = 58.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.123 \end{array} \right\}$$

Etape 5 : $\overline{\mu}_1 = 0.80,\ \ \overline{\mu}_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} H_1 = 41093.2 & H_2 = 21725.6 & \mu_1(H_1) = 0.805 & \mu_2(H_2) = 0.855 & & \\ x_1 = 216.6 & x_2 = 37.0 & x_3 = 56.4 & x_4 = 20.0 & x_5 = 20.0 & \lambda = 0.145 \end{array} \right\}$$

Le décideur est satisfait des résultats obtenus, le processus s'arrête, la solution est : $x^* = (216.6, 37.0, 56.4, 20.0, 2$

Nous remarquons que les variables aléatoires floues considérées dans $(P^6_{M.O.F.S})$ et dans [29] sont normales de type L-R, de la forme $\widetilde{X} = (x, \alpha^x, \beta^x)$ où x est une variable aléatoire réelle normale et les écarts à gauche et à droite respectifs α^x et β^x sont des nombres réels positifs.
Nous allons, pour la suite, les considérer selon les deux cas suivants :

- Premier cas : normales de type L-R telles que définies au 3.1.4, donc de la forme $\widetilde{X} = (\underline{x}, \overline{x}, \alpha^x, \beta^x)$ où $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont des variables aléatoires normales (avec $\underline{x} \leq \overline{x}$) et les écarts à gauche et à droite respectifs α^x et β^x sont des nombres réels positifs.
- Deuxième cas : normales au sens de Shapiro [39].

Nous proposons en plus deux autres méthodes dans le sens de chance constrained à savoir $pro - \mu_k$, $k = 2, 3, 4I$ (i.e. en combinant chance constrained et comparaison d'intervalles aléatoires) pour le premier cas, et $pro - F$ (i.e. en combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues) pour le deuxième.

Nous reconsidérons alors $(P^6_{M.O.F.S})$, avec $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$ des variables floues normales, de type L-R telles que définies au 3.1.4 ou, au sens de Shapiro.Et $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ peuvent être déterministes, des intervalles flous, des variables aléatoires réelles normales, ou des variables aléatoires floues normales, de type L-R, ou au sens de Shapiro.
Nous prenons le cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales, de type L-R telles que définies au 3.1.4 ou au sens de Shapiro comme suit :

4.1.3 Cas des variables aléatoires floues normales d'un autre type L-R dont les écarts à gauche et à droite sont des nombres réels positifs

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^7_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega) \odot x, \widetilde{c}_2(\omega) \odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega) \odot x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_r(\omega) = (\widetilde{c}_{r1}(\omega), \widetilde{c}_{r2}(\omega), ..., \widetilde{c}_{rn}(\omega))$ et les $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales de type L-R, telles que définies au 3.1.4, comme suit :
$\widetilde{c}_{rj}(\omega) = (\underline{c}_{rj}(\omega), \overline{c}_{rj}(\omega), \delta^c_{rj}, \gamma^c_{rj})$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega) = (\underline{a}_{ij}(\omega), \overline{a}_{ij}(\omega), \delta^a_{ij}, \gamma^a_{ij})$ et $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), \delta^b_i, \gamma^b_i)$ où $\underline{c}_{rj}(\omega)$ et $\overline{c}_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires normales d'espérances respectives $\underline{d}^c_{rj}$ et $\overline{d}^c_{rj}$. Et soit V_r la matrice de covariance de $\underline{c}_r$ et $\overline{c}_r$ et soient $\underline{d}^c_r = (\underline{d}^c_{r1}, \underline{d}^c_{r2}, ..., \underline{d}^c_{rn})$ et $\overline{d}^c_r = (\overline{d}^c_{r1}, \overline{d}^c_{r2}, ..., \overline{d}^c_{rn})$ leurs espérances mathématiques respectives. Quant aux espérances mathématiques et variances des $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$, nous gardons les mêmes que celles considérées à la section 3.1.4.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^7_{M.O.F.S})$

Nous appliquons la méthode 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' comme suit :

1. En combinant probabilité et possibilité :
nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7p}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r)\geq \alpha_r\right\}\geq p_r^o,\ r=1,2,...,k\\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega))\geq \beta_i\right\}\geq p_i,\ i=1,2,...,m\\ \\ x\in B=\{x\in R^n/x_j\geq 0, j=1,2,...,n\}\end{array}\right.$$

En vertu des propriétés de possibilité, nous avons pour chaque ω donné,
$pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\odot x_j \succeq f_r)\geq \alpha_r \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j\geq f_r$, donc
$P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}(\omega)\dot{x}_j \succeq f_r)\geq \alpha_r\right\} = P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j)\geq f_r\right\}$.
Par conséquent $(P^{7p}_{M.O.D})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7p}_{M.O.D})'_{11}\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j\geq f_r\right\}\geq p_r^o,\ r=1,2,...,k,\\ \\ x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m\end{array}\right.$$

où $X_p^i(p_i,\beta_i)=\left\{x\in R^n/P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)x_j\leq \widetilde{b}_i(\omega))\geq \beta_i\right\}\geq p_i/x\geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i>\frac{1}{2}$ et $\forall\beta_i\in(0,1]$ (voir 4.2.1).
Puisque les variables aléatoires rélles $\overline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : posons $y_r(x,\omega)=f_r-\sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j\leq 0$, calculons $m_{y_r}(x)=E(y_r(x,\omega))=f_r-\sum_{j=1}^{n}E((\overline{c}_{rj}(\omega))+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j=f_r-\sum_{j=1}^{n}(\overline{d}_{rj}^c(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j$ et $\sigma_{y_r}^2(x)=V(\sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)x_j)$, (voir en annexe,les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj}(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j\geq f_r\right\}\geq p_r^o \Longleftrightarrow f_r\leq\sum_{j=1}^{n}(\overline{d}_{rj}^c(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j+\Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx}$.
Par conséquent $(P^{7p}_{M.O.D})'_{11}$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7p}_{M.O.D})'_{12}\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ f_r\leq\sum_{j=1}^{n}(\overline{d}_{rj}^c(\omega)+R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c)x_j+\Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^tV_r^cx},\ r=1,2,...,k,\\ \\ X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m\end{array}\right.$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{7p}_{M.O.D})'_{13}\left\{\begin{array}{l}\max(Q_1(x),Q_2(x),...,Q_k(x)\\ \\ x\in X_p^i(p_i,\beta_i),\ i=1,2,...,m\end{array}\right.$$

où $Q_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(\overline{d}_{rj}^{c}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^{c})x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$.

Nous pouvons utiliser "'Interactive fuzzy satisfying method"' pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P_{M.O.D}^{7p})_{13}$.

2. En combinant probabilité et nécessité :
nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{7n})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

En vertu des propriétés de nécessité, nous avons pour chaque ω donné,
$nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r \iff \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \geq f_r$, donc
$P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} = P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j) \geq f_r\right\}$.
Par conséquent $(P_{M.O.D}^{7n})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{7n})'_{11} \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X_n^i(p_i, \beta_i) = \left\{x \in R^n / P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i / x \geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i > \frac{1}{2}$ et $\forall \beta_i \in (0, 1]$ (voir 4.2.1).
Puisque les variables aléatoires rélles $\underline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : en posant $y_r(x,\omega) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \leq 0$, en calculant $m_{y_r}(x) = E(y_r(x,\omega))f_r - \sum_{j=1}^{n} E((\underline{c}_{rj}(\omega)) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^c(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j$ et $\sigma_{y_r}^2(x) = V(\sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega)x_j) = x^t V_r^c x$ (voir en annexe, les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o \iff f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^c(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x}$.
Par conséquent $(P_{M.O.D}^{7n})'_{11}$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{7n})'_{12} \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}_{rj}^c(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta_{rj}^c)x_j + \Psi^{-1}(1-p_r^o)\sqrt{x^t V_r^c x} \\ \\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{7n}_{M.O.D})'_{13} \left\{ \begin{array}{l} \max(T_1(x), T_2(x), ..., T_k(x)) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

où $T_r(x) = \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x}$.

Nous pouvons utiliser "'Interactive fuzzy satisfying method"' pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{7n}_{M.O.D})'_{13}$

3. En combinant chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires comme suit :
   - en combinant probabilité et μ_2
     Nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7\mu_2}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_2(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j, f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \mu_2(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{7\mu_2}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i) = \left\{x \in R^n / P\left\{\omega : \mu_2(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i / x \geq 0\right\}$ qui est convexe pour $p_i > \frac{1}{2}$ et $\forall \beta_i \in (0, 1$.
Puisque les variables aléatoires rélles $\underline{c}_{rj}(\omega)$ sont normales, nous pouvons utiliser la remarque 1 comme suit : en posant $y_r(x, \omega) = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \leq 0$, en calculant $m_{y_r}(x) = E(y_r(x, \omega)) f_r - \sum_{j=1}^{n} E((\underline{c}_{rj}(\omega)) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j = f_r - \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j$ et $\sigma^2_{y_r}(x) = V(\sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega)x_j) = x^t V^c_r x$ (voir en annexe, les propriétés de l'espérance mathématique et de la variance) et conclure que
$P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r \Longleftrightarrow f_r \leq \sum_{j=1}^{n}(\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1 - \alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x}$.
Par conséquent $(P^{7\mu_2}_{M.O.D})'$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe sui-

vant :

$$(P^{7\mu_2}_{M.O.D})'_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ f_r \leq \sum_{j=1}^{n} (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x},\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{7\mu_2}_{M.O.D})'_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(T_1(x), T_2(x), ..., T_k(x)) \\ \\ x \in X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

où $T_r(x) = \sum_{j=1}^{n} (\underline{d}^c_{rj}(\omega) - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j + \Psi^{-1}(1-p^o_r)\sqrt{x^t V^c_r x},\ r = 1, 2, ..., k.$

Nous pouvons utiliser "'Interactive fuzzy satisfying method"' pour obtenir une solution satisfaisante du problème $(P^{7\mu_2}_{M.O.D})'_2$

– en combinant probabilité et μ_3
  Nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7\mu_3}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_3(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j, f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \mu_3(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right.$$

qui est équivalent au programme suivant :

$$(P^{7\mu_3}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} (\underline{c}_{rj}(\omega) + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right.$$

– en combinant probabilité et μ_l, $l = 4, 4I$:
  nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{7\mu_l}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(\omega)x_j \leq \overline{b}_i(\omega)\right\} \geq p_i,\ i = 1, ...m, \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right.$$

$(P^{7\mu_l}_{M.O.D})'$, $l \in \{4, 4I\}$ est équivalent au programme suivant :

$$(P^{7\mu_l}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X^i_{\mu_4}(p_i, 1),\ i = 1, 2, ..., m. \end{array} \right\}$$

4.1.4 Cas des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro

Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^{8}_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(\widetilde{c}_1(\omega) \odot x, \widetilde{c}_2(\omega) \odot x, ..., \widetilde{c}_k(\omega) \odot x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_{rj}(\omega)$, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro.

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^{8}_{M.O.F.S})$

Pour la résolution de $(P^{8}_{M.O.F.S})$, nous proposons les deux méthodes suivantes :
– 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients'.
– 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' et l'approche semi-infinie.
comme suit :

1. 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients'.
   Nous appliquons 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' comme suit :
   – en combinant probabilité et possibilité :
     nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{8p}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r^o, r = 1, 2, ..., k \\ \\ P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)x_j \leq \overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)) \geq p_i,\ i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

   où $\underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)$ et $\overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{b}^{\beta_i}_i(\omega)$.

qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{8p}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{c}^{\alpha_r}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_p(p_i, \beta_i) = \left\{x_j / P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{a}^{\beta_i}_{ij}(\omega)x_j \leq \overline{b}^{\beta_i}_i(\omega)) \geq p_i,\ x_j \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n\right\}$

– en combinant probabilité et nécessité :
nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{8n}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p^o_r,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega)x_j \leq \underline{b}^{1-\beta_i}_i(\omega)) \geq p_i, i = 1, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $\overline{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega)$ est la borne supérieure de $\widetilde{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega)$ et $\underline{b}^{1-\beta_i}_i(\omega)$ est la borne inférieure de $\widetilde{b}^{\beta_i}_i(\omega)$.
qui est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{8n}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \underline{c}^{1-\alpha_r}_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p^o_r, r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_n(p_i, \beta_i) = \left\{x_j / P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{a}^{1-\beta_i}_{ij}(\omega)x_j \leq \underline{b}^{1-\beta_i}_i(\omega)) \geq p_i,\ x_j \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n\right\}$

2. 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' et l'approche semi-infinie.
On applique en premier lieu l'approche semi-infinie, $(P^8_{M.O.F.S})$ peut être approché par le

programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^8_{M.O.F.S})' \left\{ \begin{array}{ll} \max(\widetilde{c}_1(\omega)x, \widetilde{c}_2(\omega)x, ..., \widetilde{c}_k(\omega)x) & \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega) & i=1,...,m \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega) & i=1,...,m \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega) & i=1,...,m \\ x_j \geq 0, j=1,2,...,n & \end{array} \right\}$$

où $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k=1,...,l+1$

Nous appliquons les méthodes 'Chance consstrained programming with fuzzy stochastic coefficients' pour les objectifs et 'Chance consstrained programming due à Charnes et Cooper pour les contraintes résultant de l'approche semi-infinie, nous obtenons le programme équivalent suivant :

$$(P^8_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{ll} \max(f_1, f_2, ..., f_k) & \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^n \widetilde{c}_{rj}(\omega) \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r\right\} \geq p_r & r=1,2,...,k \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i=1,2,...,m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^l & i=1,2,...,m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^1 & i=1,2,...,m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,2,...,n\} & \end{array} \right\}$$

qui est multiobjectifs déterministe, donc pour sa résolution, dans le but d'avoir une solution de bon compromis, nous pouvons utiliser les fonctions scalarisantes ou la méthode goal programming.

4.2 Les coefficients des objectifs sont déterministes

Dans ce cas, un programme linéaire multiobjectifs est flou stochastique, s'il y a présence de :

– variables aléatoires réelles et d'intervalles flous
ou

– de variables aléatoires floues

dans au moins l'une de ses contraintes.
Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^9_{M.O.F.S})\left\{\begin{array}{l}\max(c_1x, c_2x, ..., c_kx)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i=1,...,m\\ \\ x_j\geq 0, j=1,2,...,n\end{array}\right\}$$

où $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, ..., c_{rn})$ et les c_{rj} sont déterministes et les $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P).

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^9_{M.O.F.S})$

Puisque les coefficients des fonctions objectifs sont déterministes, donc pour résoudre le problème $(P^9_{M.O.F.S})$, nous proposons l'approche semi-infinie ou la méthode chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients, dans le but de remplacer ses contraintes floues stochastiques par des contraintes stochastiques ou déterministes équivalentes. Autremnt dit de transformer le programme multiobjectifs flou stochastique $(P^9_{M.O.F.S})$ en un programme multiobjectifs stochastique ou déterministe équivalent.

Méthode chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Appliquer la méthode chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients à des contraintes en présence de variables aléatoires floues c'est leur appliquer la combinaison entre probabilité et ρ (où ρ est définit au 3.4) .
Nous distinguons par rapport à ρ les 3 cas suivants selon que ces variables aléatoires floues sont :

– discrètes , normales au sens de Shapiro, discrètes de type L-R ou normales de type L-R, auxqels cas $\rho \in \{pos, nec\}$,

– discrètes ou normales au sens de Shapiro, $\rho = F$.
– discrètes de type L-R ou normales de type L-R, $\rho = \mu_r$, $r = 2, 3, 4, 4I$,

comme suit :

1. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes, discrètes de type L-R, normales au sens de Shapiro ou normales de type L-R.

– En combinant probabilité et possibilité :

$$(P^{9p}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i=1,2,...,m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

$(P^{9p}_{M.O.D})$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{9p}_{M.O.D})'\left\{\begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ x \in X^i_p(p_i, \beta_i),\ i=1,2,...,m \end{array}\right\}$$

où $X^i_p(p_i, \beta_i)$ est défini au 3.4.1, proposition 3 et ses conditions de convexité sont données au 3.5

– En combinant probabilité et nécessité :

$$(P^{9n}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i=1,2,...,m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

$(P^{9n}_{M.O.D})$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{9n}_{M.O.D})'\left\{\begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ x \in X^i_n(p_i, \beta_i),\ i=1,2,...,m \end{array}\right\}$$

où $X^i_n(p_i, \beta_i)$ est défini au 3.4.2, proposition 4 et ses conditions de convexité sont données au 3.5

2. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes ou normales.

– En combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues :

$$(P^{9F}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ P\left\{\omega : F(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j) \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i, i=1,2,...,m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,2,...,n\} \end{array}\right\}$$

où $(P^{9F}_{M.O.D})$ est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{9F}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ x \in X^i_F(p_i),\ i = 1, 2, ..., m \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_F(p_i)$ est définit au 3.4.3, et ses conditions de convexité sont données au 3.5.

3. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes de type L-R ou normales de type L-R.

   – En combinant chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires

$$(P^{9\mu_r}_{M.O.D}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ P\left\{\omega : \mu_r(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ...m, r = 2, 3, 4, 4I. \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

$(P^{9\mu_r}_{M.O.D})$ est équivalent aux programmes multiobjectifs déterministes respectifs suivants :

$$(P^{9\mu_r}_{M.O.D})' \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \\ x \in X^i_{\mu_r}(p_i, \beta_i),\ i = 1, ..., m, r = 2, 3, 4, 4I. \\ \end{array} \right\}$$

où $X^i_{\mu_r}(p_i, \beta_i)$ est défini au 3.4.4, proposition 5 et ses conditions de convexité sont données au 3.5.

Approche semi-infinie

Le programme $(P^9_{M.O.F.S})$ peut être approché par le programme multiobjectifs stochastique suivant :

$$(P^9_{M.O.S}) \left\{ \begin{array}{ll} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) & \\ \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{l+1} & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_l & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_l}(\omega) \\ \\ \vdots & \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_1 & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_1}(\omega) \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n & \end{array} \right\}$$

où τ^m_j est un m-vecteur dont les composantes sont égales à τ_j.

Théorème 19 *$(P^9_{M.O.S})$ est équivalent au programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant :*

$$(P^9_{M.O.S})' \left\{ \begin{array}{ll} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) & \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega) & i=1,...,m \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega) & i=1,...,m \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega) & i=1,...,m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,...,n\} & \end{array} \right\}$$

où $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k=1,...,l+1$

Pour résoudre le programme $(P^9_{M.O.S})'$, nous appliquons les techniques de la programmation multiobjectifs, c'est à dire utiliser les fonctions scalarisantes ou la méthode goal programming et celles de la programmation stochastique, c'est à dire la méthode chance constrained programming ou la méthode avec recours comme suit :

- En utilisant la fonction scalarisante et la méthode chance constrained programming, nous obtenons le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P^9_{L.D})_1 \left\{ \begin{array}{ll} \max \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i x & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i=1,...,m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^l & i=1,...,m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^1 & i=1,...,m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j=1,...,n\} & \end{array} \right\}$$

où $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k=1,...,l+1$

$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X / P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_s}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_s}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i=1,...m; s=1,...l+1.$
Puisque $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne

inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, donc $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega) = \overline{a}_{ij}^{\alpha_k}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega) = \underline{b}_i^{\alpha_k}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, par conséquent
$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X / P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i = 1, ...m; s = 1, ...l+1.$

Convexité de $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$

Pour $s \in \{1, ..., l+1\}$ et $i \in \{1, ..., m\}$ donnés , nous avons montré au 3.5 dans quels cas $X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in B / P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s\right\}$ est convexe.

– En utilisant la fonction scalarisante et la méthode avec recours, nous obtenons le programme linéaire déterministe suivant :

$$(P_{L.D}^9)_2 \left\{ \begin{array}{l} max \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i x_i + E\left\{q_i^{\alpha_k}(\omega) Y_i^{\alpha_k}(\omega)\right\} \\ \\ Y_i^{\alpha_k}(\omega) = \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x_j - \tau_k - \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega),\ i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., l+1 \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

$\odot$

4.3 Les coefficients des objectifs sont des intervalles flous

Dans ce cas, un programme linéaire multiobjectifs est flou stochastique, s'il y a présence de variables aléatoires réelles ou de variables aléatoires floues dans au moins l'une de ses contraintes. Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P_{M.O.F.S}^{10}) \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c_1} \odot x, \widetilde{c_2} \odot x, ..., \widetilde{c_k} \odot x) \\ \\ \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n \end{array} \right\}$$

où $\widetilde{c}_r = (\widetilde{c}_{r1}, \widetilde{c}_{r2}, ..., \widetilde{c}_{rn})$ et les $\widetilde{c}_{rj}$ sont des intervalles flous qui peuvent être de type L-R et les $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des variables aléatoires floues qui peuvent être discrètes, discrètes de type L-R, normales au sens de shapiro, normales de type L-R, définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P).

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P_{M.O.F.S}^{10})$

Pour la résolution du problème $(P_{M.O.F.S}^{10})$, nous proposons les méthodes suivantes :

1. Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients
2. Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients et "'Interactive decision making méthod"

3. L'approche semi-infinie et "'Interactive decision making méthod"

comme suit :

4.3.1 Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

Appliquons la méthode chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients à des contraintes en présence de variables aléatoires floues dans les cas suivants :

1. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes, discrètes de type L-R, normales au sens de Shapiro ou normales de type L-R.
2. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes ou normales.
3. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes de type L-R ou normales de type L-R.

comme suit :

1. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes, discrètes de type L-R, normales au sens de Shapiro ou normales de type L-R.
   – En combinant probabilité et possibilité :
   Nous obtenons le programme suivant :

$$(P_{M.O.D}^{10p}) \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj} \odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ P\left\{\omega : pos(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

   qui est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P_{M.O.D}^{10p})' \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}^{\alpha_r} x_j \geq f_r \\ \\ x \in X_p^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m \end{array} \right\}$$

   où $X_p^i(p_i, \beta_i)$ est donné à la proposition 3 et sa condition de convexité au 3.5.

   Dans le cas où les intervalles flous $\widetilde{c}_{rj}$ sont de type L-R, on remplace dans $(P_{M.O.D}^{10p})'$, $\overline{c}_{rj}^{\alpha_r}$ par $\overline{c}_{rj} + R^{-1}(\alpha_r)\gamma_{rj}^c$.
   – En combinant probabilité et nécessité :

nous obtenons le programme suivant :

$$(P^{10n}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{c}_{rj}\odot x_j \succeq f_r) \geq \alpha_r,\ r = 1, 2, ..., k\\ \\ P\left\{\omega : nec(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega)) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m\\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\}\end{array}\right\}$$

qui est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{10n}_{M.O.D})'\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}x_j \geq f_r\\ \\ x \in X_n^i(p_i, \beta_i),\ i = 1, 2, ..., m\end{array}\right\}$$

où $X_n^i(p_i, \beta_i)$ est donné à la proposition 4 et sa condition de convexité au 3.5.
Dans le cas où les intervalles flous $\widetilde{c}_{rj}$ sont de type L-R, on remplace dans $(P^{10n}_{M.O.D})'$, $\underline{c}_{rj}^{1-\alpha_r}$ par $\overline{c}_{rj} - L^{-1}(1 - \alpha_r)\delta^c_{rj}$.

2. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes ou normales.

– En combinant probabilité et indices scalaires de comparaison de quantités floues :

nous obtenons le programme suivant :

$$(P^{10F}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}F(\widetilde{c}_{rj}x_j) \geq f_r,\ r = 1, ..., k\\ \\ P\left\{\omega : F(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{a}_{ij}(\omega)\odot x_j) \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))\right\} \geq p_i, i = 1, 2, ..., m\\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\}\end{array}\right\}$$

qui est équivalent au programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{10F}_{M.O.D})'\left\{\begin{array}{l}\max(f_1, f_2, ..., f_k)\\ \\ \sum_{j=1}^{n}F(\widetilde{c}_{rj})x_j \geq f_r,\ r = 1, ..., k\\ \\ x \in X_F^i(p_i),\ i = 1, 2, ..., m\end{array}\right\}$$

où $X_F^i(p_i) = \left\{x_j \geq 0, j1, 2, ..., n / P(\omega : \sum_{j=1}^{n}F(\widetilde{a}_{ij})(\omega)x_j \leq F(\widetilde{b}_i(\omega))) \geq p_i,\right\},\ i = 1, 2, ..., m$

3. Cas où $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et/ou $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues discrètes de type L-R ou normales de type L-R.
   Dans ce cas nous considérons que les les $\widetilde{c}_{rj} = (\underline{c}_{rj}, \overline{c}_{rj}, \delta^c_{rj}, \gamma^c_{rj})$ sont des intervalles flous de type L-R.
   – En combinant chance-constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires : nous obtenons le programme suivant :

$$(P^{10\mu_l}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ \mu_l(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_{rj} \odot x_j, f_r) \geq \alpha_r, r = 1, ..., k, l = 2, 3, 4, 4I. \\ \\ P\left\{\omega : \mu_l(\widetilde{b}_i(\omega), \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j) \geq \beta_i\right\} \geq p_i, i = 1, ..., m, l = 2, 3, 4, 4I. \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n \end{array}\right\}$$

   qui est équivalent aux programmes multiobjectifs déterministes suivants selon que $l = 2, 3, 4, 4I$ commme suit :

   – l=2

$$(P^{10\mu_2}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ \sum_{j=1}^{n}(\underline{c}_{rj} - L^{-1}(1-\alpha_r)\delta^c_{rj})x_j \geq f_r \\ \\ x \in X^i_{\mu_2}(p_i, \beta_i),\ i = 1, ..., m. \\ \end{array}\right\}$$

   – l=3

$$(P^{10\mu_3}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ \sum_{j=1}^{n}(\overline{c}_{rj} + R^{-1}(\alpha_r)\gamma^c_{rj})x_j \geq f_r,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_{\mu_3}(p_i, \beta_i),\ i = 1, ..., m. \\ \end{array}\right\}$$

   – l=4,4I

$$(P^{10\mu_l}_{M.O.D})\left\{\begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{rj}x_j \geq f_r,\ r = 1, 2, ..., k \\ \\ x \in X^i_{\mu_l}(p_i, \beta_i),\ i = 1, ..., m. \\ \end{array}\right\}$$

où $X^i_{\mu_l}(p_i, \beta_i)$, $l = 2, 3, 4, 4I$ sontt donnés à la proposition 5 et leurs conditions de convexité au 3.5.

4.3.2 Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients et "‘Interactive decision making method"

Pour la résolution du problème $(P^{10}_{M.O.F.S})$, nous appliquons en premier lieu la méthode Chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients aux contraintes, nous obtenons le programme linéaire multiobjectifs flou équivalent suivant :

$$(P^{10}_{M.O.F})_1 \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c_1}x, \widetilde{c_2}x, ..., \widetilde{c_k}x) \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

où X est l'ensemble des contraintes, résultant de l'application de cette méthode, est donné selon la version de cette dernière, par les proposition 3,4 ou 5 et ses conditions de convexité par 3.5.
Ensuite, nous appliquons les techniques de la programmation multiobjectifs floue à savoir "‘Interactive decision making method" (vue au chapitre 2), nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{10}_{M.O.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(\mu_1(c_1x), \mu_2(c_2x), ..., \mu_k(c_kx)) \\ \\ c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

où $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, ..., c_{rn})$, $L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) = \left\{c_{rj}/\mu_{\widetilde{c}_{rj}}(c_{rj}) \geq \alpha\right\}$ et $\mu_{\widetilde{c}_{rj}}$ sont les fonctions d'appartenance des intervalles flous $\widetilde{c}_{rj}$.
$\mu_l(c_lx)$ est tel que défini au 2.3, pour le cas fuzzymin,(donc $l \in I_1$).

$$(P^{10}_{mnmx})_1 \left\{ \begin{array}{l} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(c_1x), \overline{\mu_2} - \mu_2(c_2x), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(c_kx)) \\ \\ c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

où $\overline{\mu_l}$ l'objectif à atteindre choisi par le décideur.

$$(P^{10}_{L.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) \\ \\ \overline{\mu_r} - \mu_r(c_rx) \leq v,\ r = 1, ..., k \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

En remplaçant dans $(P^{10}_{L.D})_1$, $\mu_r(c_rx)$ par son expression donnée au 2.3, pour $r \in I_1$ et en tenant compte du fait que D_{rR} et D_{rL} sont respectivement décroissant et croissant, donc il en est de même pour D_{rR}^{-1} et D_{rL}^{-1} respectivement, nous pouvons alors conclure que $(P_{L.D}^{10})_1$ est équivalent au programme suivant :

$$(P_{L.D}^{10})_2 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ c_r x \leq D_{rR}^{-1}(\overline{\mu}_r - v), r = 1, ..., k \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

Puisque $c_r \in \widetilde{c}_r^{\alpha} = [c_{r\alpha}^L, c_{r\alpha}^R]$, $a_{ij} \in \widetilde{a}_{ij}^{\alpha} = [a_{ij\alpha}^L, a_{ij\alpha}^R]$ et $b_i \in \widetilde{b}_i^{\alpha} = [b_{i\alpha}^L, b_{i\alpha}^R]$, nous pouvons obtenir une solution optimale du $(P_{M.O.D}^{10})$ en résolvant le programme suivant :

$$(P_{L.D}^{10})_3 \left\{ \begin{array}{l} \min v \\ \\ c_{r\alpha}^L x \leq D_{rR}^{-1}(\overline{\mu}_r - v), r = 1, ..., k \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

En vertu du théorème 10 [37] du chapitre 2, nous avons :

1. Si x^* est une solution optimale unique du problème $(P_{L.D}^{10})_3$‘ alors x^* est M-pareto-optimale du problème $(P_{M.O.D}^{10})_1$.
2. Si x^* st M-pareto-optimale du problème $(P_{M.O.D}^{10})_1$, x^* est une solution optimale du problème$(P_{L.D}^{10})_3$ pour $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, ..., \overline{\mu}_k)$.

4.3.3 L'approche semi-infinie et "‘Interactive decision making méthod"

Pour la résolution du problème $(P_{M.O.F.S}^{10})$, en utilisant en premier lieu l'approche semi-infinie, nous obtenons que $(P_{M.O.F.S}^{10})$ peut être approché par le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P_{M.O.F.S}^{10})' \left\{ \begin{array}{ll} \min(\widetilde{c_1}x, \widetilde{c_2}x, ..., \widetilde{c_k}x) & \\ \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_{l+1}^m & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_l^m & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_l}(\omega) \\ \\ \vdots & \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau_1^m & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_1}(\omega) \\ \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n & \end{array} \right\}$$

qui est équivalent auprogramme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^{10}_{M.O.F.S})" \left\{ \begin{array}{l} \min(\widetilde{c_1}x, \widetilde{c_2}x, ..., \widetilde{c_k}x) \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ i = 1, ..., m \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega) \\ i = 1, ..., m \\ \\ \vdots \\ \\ \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega) \\ i = 1, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$

En appliquant la méthode 'Chance constrained programming' du à Charnes et Cooper, nous établissons que $(P^{10}_{M.O.F.S})"$ est équivalent au programme linéaire flou suivant :

$$(P^{10}_{M.O.F})_2 \left\{ \begin{array}{ll} \min(\widetilde{c_1}x, \widetilde{c_2}x, ..., \widetilde{c_k}x) & \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i = 1, ..., m \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^{l} & i = 1, ..., m \\ \\ \vdots & \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^{1} & i = 1, ..., m \\ \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} & \end{array} \right\}$$

où $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$

$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X / P(\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_s}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_s}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i = 1, ...m; s = 1, ..., l+1.$
Puisque $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne supérieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{a}_{ij}^{\alpha_{k-1}}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega)$ est la borne inférieure de l'intervalle aléatoire $\widetilde{b}_i^{\alpha_{k-1}}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, donc $\overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega) = \overline{a}_{ij}^{\alpha_k}(\omega)$ et $\underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega) = \underline{b}_i^{\alpha_k}(\omega)$, $k = 1, ..., l+1$, par conséquent

$X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in X / P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s\right\}, i = 1, ..., m; s = 1, ..., l+1.$

Convexité de $X_s^i(p_i^s, \alpha_s)$

Pour $s \in \{1, ..., l+1\}$ et $i \in \{1, ..., m\}$ donnés , nous avons montré au 3.5 dans quels cas $X_s^i(p_i^s, \alpha_s) = \left\{x \in B / P(\omega : \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ij}^{\alpha_{s-1}}(\omega)x_j - \tau_s \leq \underline{b}_i^{\alpha_{s-1}}(\omega)) \geq p_i^s\right\}$ est convexe.

Ensuite, nous appliquons au programme $(P_{M.O.F}^{10})_2$ les techniques de la programmation multiobjectifs floue à savoir "‘Interactive decision making method" (vue au chapitre 2), comme suit : le décideur choisit α et les fonctions d'appartenance de référence $\overline{\mu_l}$, $l = 1, ..., k$, la solution M-α pareto-optimale correspondant à ce choix peut être obtenue en résolvant le problème minmax suivant :

$$(P_{M.O.D}^{10})_2 \left\{ \begin{array}{ll} \min max(\overline{\mu_1} - \mu_1(c_1x), \overline{\mu_2} - \mu_2(c_2x), ..., \overline{\mu_k} - \mu_k(c_kx)) & \\ c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i = 1, ..., m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega)x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^l & i = 1, ..., m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \overline{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega)x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^1 & i = 1, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} & \end{array} \right\}$$

où $c_r = (c_{r1}, c_{r2}, ..., c_{rn})$, $L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) = \left\{c_{rj} / \mu_{\widetilde{c}_{rj}}(c_{rj}) \geq \alpha\right\}$ et $\mu_{\widetilde{c}_{rj}}$ sont les fonctions d'appartenance des intervalles flous $\widetilde{c}_{rj}$.
$\mu_l(c_lx)$ est tel que défini au 2.3, pour le cas fuzzy min (donc $l \in I_1$) et $\overline{\mu_l}$ l'objectif à atteindre

choisi par le décideur. $(P^{10}_{M.O.D})_2$ est équivalent au programme déterministe suivant :

$$(P^{10}_{L.D})_3 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ \overline{\mu_l} - \mu_l(c_l x) \leq v, \; l = 1, ..., k & \\ c_{rj} \in L_\alpha(\widetilde{c}_{rj}) & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega) x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i = 1, ..., m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega) x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^l & i = 1, ..., m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega) x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^1 & i = 1, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} & \end{array} \right\}$$

En remplaçant dans $(P^{10}_{L.D})_3$, $\mu_r(c_r x)$ par son expression donnée au 2.3, pour $r \in I_1$ et en tenant compte du fait que D_{rR} et D_{rL} sont respectivement décroissant et croissant, donc il en est de même pour D^{-1}_{rR} et D^{-1}_{rL} respectivement, nous pouvons alors conclure que $(P^{10}_{L.D})_3$ est équivalent au programme suivant :

$$(P^{10}_{L.D})_4 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ c_r x \leq D^{-1}_{rR}(\overline{\mu}_r - v), \; l = 1, ..., k & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_{l+1}}(\omega) x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_{l+1}}(\omega)\right\} \geq p_i^{l+1} & i = 1, ..., m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_l}(\omega) x_j - \tau_l \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_l}(\omega)\right\} \geq p_i^l & i = 1, ..., m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^n \bar{t}_{1ij}^{\alpha_1}(\omega) x_j - \tau_1 \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_1}(\omega)\right\} \geq p_i^1 & i = 1, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} & \end{array} \right\}$$

Puisque $c_r \in \widetilde{c}_r^{\,\alpha} = [c^L_{r\alpha}, c^R_{r\alpha}]$, $a_{ij} \in \widetilde{a}_{ij}^{\,\alpha} = [a^L_{ij\alpha}, a^R_{ij\alpha}]$ et $b_i \in \widetilde{b}_i^{\,\alpha} = [b^L_{i\alpha}, b^R_{i\alpha}]$, nous pouvons obtenir une solution optimale du $(P^{10}_{M.O.D})_3$ en résolvant le programme suivant :

$$(P^{10}_{L.D})_5 \left\{ \begin{array}{ll} \min v & \\ c^L_{r\alpha} x \leq D^{-1}_{rR}(\overline{\mu}_r - v),\ l = 1, ..., k & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}^{\alpha_{l+1}}_{1ij}(\omega) x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}^{\alpha_{l+1}}_{2i}(\omega)\right\} \geq p^{l+1}_i & i = 1, ..., m \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}^{\alpha_l}_{1ij}(\omega) x_j - \tau_l \leq \underline{t}^{\alpha_l}_{2i}(\omega)\right\} \geq p^l_i & i = 1, ..., m \\ \vdots & \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} \overline{t}^{\alpha_1}_{1ij}(\omega) x_j - \tau_1 \leq \underline{t}^{\alpha_1}_{2i}(\omega)\right\} \geq p^1_i & i = 1, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ...n\} & \end{array} \right\}$$

En vertu du théorème 10 [37] du chapitre 2, nous avons :

1. Si x^* est une solution optimale unique du problème $(P^{10}_{L.D})_4$ alors x^* est M-$\alpha-$pareto-optimale du problème $(P^{10}_{M.O.F})_2$.
2. Si x^* st M-$\alpha-$pareto-optimale du problème $(P^{10}_{M.O.F})_2$, x^* est une solution optimale du problème $(P^{10}_{L.D})_4$ pour $\overline{\mu} = (\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, ..., \overline{\mu}_k)$.

4.4 Les coefficients des objectifs sont des variables aléatoires réelles

Dans ce cas, pour qu'un programme linéaire multiobjectifs soit flou stochastique, il suffit qu'il y ait la présence d'intervalles flous ou de variables aléatoires floues dans au moins l'une de ses contraintes. Considérons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :

$$(P^{11}_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1(\omega)x, c_2(\omega)x, ..., c_k(\omega)x) \\ \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(\omega) \odot x_j \preceq \widetilde{b}_i(\omega), i = 1, 2, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n\} \end{array} \right\}$$

où $c_r(\omega) = (c_{r1}(\omega), c_{r2}(\omega), ..., c_{rn}(\omega))$ et les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles, $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ des variables aléatoires floues définies sur un espace de probabilité (Ω, F, P).

Résolution du programme linéaire multiobjectifs flou stochastique $(P^{11}_{M.O.F.S})$

Pour la résolution du problème $(P^{11}_{M.O.F.S})$, nous proposons les méthodes suivantes :

1. Chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients que nous pouvons appliquer dans le cas où :
   - les $c_{rj}(\omega)$ sont des variables aléatoires réelles normales et les $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont des variables aléatoires floues normales au sens de shapiro ou normales de type *L-R*.
2. E-model et chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients ou E-model et l'approche semi-infinie dans le cas précédent ou dans le cas suivant :
   - les $c_{rj}(\omega)$ sont discrètes et les $\widetilde{a}_{ij}(\omega)$ et $\widetilde{b}_i(\omega)$ sont discrètes ou discrètes de type *L-R*.

comme suit :

1.la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

nous appliquons donc la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients, nous obtenons alors le programme suivant :

$$(P^{11}_{M.O.D})_1 \left\{ \begin{array}{l} \max(f_1, f_2, ..., f_k) \\ \\ P\left\{\omega : \sum_{j=1}^{n} c_{rj}(\omega)x_j \geq f_r\right\} \geq p_r^o,\ r = 1, 2, ..., k, \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

où X est l'ensemble des contraintes résultant de l'application de cette méthode, est donné selon la version de cette dernière, par les proposition 3,4 ou 5 et sa condition de convexité par 3.5.

2. E-model et la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients

En appliquant E-model et la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients au programme $(P^{11}_{M.O.F.S})$, nous obtenons le programme multiobjectifs déterministe suivant :

$$(P^{11}_{M.O.D})_2 \left\{ \begin{array}{l} \max(E(c_1(\omega))x, E(c_2(\omega))x, ..., E(c_k(\omega))x) \\ \\ x \in X \end{array} \right\}$$

où X est l'ensemble des contraintes résultant de l'application de la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients, est donné, selon la version de cette dernière, par les proposition 3,4 ou 5 et sa condition de convexité par 3.5.

le programme multiobjectifs déterministe $(P^{11}_{M.O.D})_2$ peut être résolu en utilisant les fonctions scalarisantes ou goal programming.

3. E-model et l'approche semi-infinie

Le programme $(P^{11}_{M.O.F.S})$ peut, en utilisant la méthode E-model et l'approche semi-infinie, être approché par le programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant :

$$(P^{11}_{M.O.S})\left\{\begin{array}{ll} \max(E(c_1(\omega))x, E(c_2(\omega))x, ..., E(c_k(\omega))x) & \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{l+1} & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l+1}}(\omega) \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{l} & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{l}}(\omega) \\ \vdots & \\ t_1(\omega)x - t_2(\omega) \leq \tau^m_{1} & (t_1(\omega), (t_2(\omega)) \in T^{\alpha_{1}}(\omega) \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., n & \end{array}\right\}$$

qui est équivalent au programme linéaire multiobjectifs stochastique suivant :

$$(P^{11}_{M.O.S})'\left\{\begin{array}{ll} \max(E(c_1(\omega))x, E(c_2(\omega))x, ..., E(c_k(\omega))x) & \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{t}^{\alpha_{l+1}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{l+1} \leq \underline{t}^{\alpha_{l+1}}_{2i}(\omega) & i = 1, ..., m \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{t}^{\alpha_{l}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{l} \leq \underline{t}^{\alpha_{l}}_{2i}(\omega) & i = 1, ..., m \\ \vdots & \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{t}^{\alpha_{1}}_{1ij}(\omega)x_j - \tau_{1} \leq \underline{t}^{\alpha_{1}}_{2i}(\omega) & i = 1, ..., m \\ x \in B = \{x \in R^n / x_j \geq 0, j = 1, ..., n\} & \end{array}\right\}$$

que nous pouvons résoudre en utilisant les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs déterministe à savoir les fonctions scalarisantes ou goal programming et celles de la programmation linéaire stochastique à savoir 'chance constrained programming' ou la méthode avec recours.

Exemple 8 *Considèrons le programme linéaire multiobjectifs flou stochastique suivant :*

$$(P^1_{mofs})' = \left\{ \begin{array}{l} \max(x_1 + \frac{2}{3}x_2, x_1 + \frac{8}{3}x_2) \\ \\ \widetilde{a}_{11} \odot x_1 + \widetilde{a}_{12} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_1(\omega) \\ \\ \widetilde{a}_{21} \odot x_1 + \widetilde{a}_{22} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_2(\omega) \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ *sont des intervalles flous (resp. des intervalles flous de type L-R) et* $(\widetilde{b}_i)_{i=1,2}$ *sont des variables aléatoires floues discrètes (rep. des variables aléatoires floues discrètes de type L-R) définies sur l'espace de probabilité* (Ω, F, P), *où* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, *muni de la distribution de probabilité suivante :* $P(\omega_1) = 0.25$, $P(\omega_2) = 0.75$.

1. *Cas où* $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ *sont des intervalles flous et* $(\widetilde{b}_i)_{i=1,2}$ *sont des variables aléatoires floues.*
   $\widetilde{a}_{11} = \widetilde{1}, \quad \widetilde{a}_{12} = \widetilde{3}$
   $\widetilde{a}_{21} = \widetilde{2}, \quad \widetilde{a}_{22} = \widetilde{4}.$
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_1) = \widetilde{1}) = P(\widetilde{b}_2(\omega_1) = \widetilde{2}) = 0.25$ *et*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_2) = \widetilde{3}) = P(\widetilde{b}_2(\omega_2) = \widetilde{4}) = 0.75.$
   $\widetilde{m}$, $m = 1, 2, 3, 4$ *sont des intervalles flous dont les fonctions d'appartenance* $\mu_{\widetilde{m}}$, $m = 1, 2, 3, 4$ *sont définies comme suit :*

$$\mu_{\widetilde{m}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < m-1, \\ \\ x - m + 1 & m - 1 \leq x < m, \\ \\ 1 & m \leq x < m+1, \\ -x + m + 2 & m + 1 \leq x \leq m + 2, \\ \\ 0 & x > m + 2. \end{array} \right\}.$$

   Etant donné que les objectifs sont déterministes et qu'il y a présence de variables aléatoires floues dans les contraintes, pour la résolution de $(P^1_{mofs})'$, *nous pouvons utiliser d'une part les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs déterministe à savoir la méthode scalarisante avec les paramètres* $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ *et* $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, *nous obtenons alors le programme linéaire flou stochastique suivant :*

$$(P^1_{fs})' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ \widetilde{a}_{11} \odot x_1 + \widetilde{a}_{12} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_1(\omega) \\ \\ \widetilde{a}_{21} \odot x_1 + \widetilde{a}_{22} \odot x_2 \preceq \widetilde{b}_2(\omega) \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

   que nous pouvons, d'autre part, résoudre en utilisant les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs floue stochastique à savoir la méthode' chance-constrained programming *with fuzzy stochastic coefficients' avec ses différentes versions comme suit :*

- *en combinant probabilité et possibilité avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *et* $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$, *on a :*
  $P(\overline{b}_1^{0.8}(\omega_1) = 2.2) = P(\overline{b}_2^{0.8}(\omega_1) = 3.2) = 0.25$ *et*
  $P(\overline{b}_1^{0.8}(\omega_2) = 4.2) = P(\overline{b}_2^{0.8}(\omega_2) = 5.2) = 0.75$,
  $\underline{a}_{11}^{0.8} = 0.8$, $\underline{a}_{12}^{0.8} = 2.8$, $\underline{a}_{21}^{0.8} = 1.8$, $\underline{a}_{22}^{0.8} = 3.8$.
  Et on obtient :

$$(P_p^1)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 0.8x_1 + 2.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_1^{0.8}}(0.25) = 2.2 \\ \\ 1.8x_1 + 3.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\overline{b}_2^{0.8}}(0.25) = 3.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

  où $\Psi^{-1}_{b_i}$, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* b_i, $i = 1, 2$.

  Nous obtenons la solution $x^0 = (\frac{11}{4}, 0)$ *qui est (0.75,0.8) Pro-pos pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.
- *en combinant probabilité et nécessité avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *and* $\beta_1 = \beta_2 = 0.8$, *nous avons :*
  $P(\underline{b}_1^{0.2}(\omega_1) = 0.2) = P(\underline{b}_2^{0.2}(\omega_1) = 1.2) = 0.25$ *et*
  $P(\underline{b}_1^{0.2}(\omega_2) = 2.2) = P(\underline{b}_2^{0.2}(\omega_2) = 3.2) = 0.75$,
  $\overline{a}_{11}^{0.2} = 2.8$, $\overline{a}_{12}^{0.2} = 4.8$, $\overline{a}_{21}^{0.2} = 3.8$, $\overline{a}_{22}^{0.2} = 5.8$.
  Nous obtenons :

$$(P_n^1)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 2.8x_1 + 4.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_1^{0.2}}(0.25) = 0.2 \\ \\ 3.8x_1 + 5.8x_2 \leq \Psi^{-1}_{\underline{b}_2^{0.2}}(0.25) = 1.2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

  où $\Psi^{-1}_{b_i}$, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* b_i, $i = 1, 2$.

  Nous obtenons la solution $x^0 = (0, \frac{1}{24})$ *qui est (0.75,0.8) Pro-nec pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.
- *en combininant probabilité et indices de comparaison de quantitiés floues avec* $p_1 = p_2 = 0.75$, *nous avons :*
  $P(F(\widetilde{b}_1(\omega_1) = 1)) = P(F(\widetilde{b}_2(\omega_1) = 2)) = 0.25$ *et*
  $P(F(\widetilde{b}_1(\omega_2) = 3)) = P(F(\widetilde{b}_2(\omega_2) = 4)) = 0.75$.
  $F(\widetilde{a}_{11}) = 1$, $F(\widetilde{a}_{12}) = 3$, $F(\widetilde{a}_{21}) = 2$, $F(\widetilde{a}_{22}) = 4$.

Nous obtenons :

$$(P_F^1)' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ x_1 + 3x_2 \leq \Psi^{-1}_{F(b_1)}(0.25) = 1 \\ \\ 2x_1 + 4x_2 \leq \Psi^{-1}_{F(b_2)}(0.25) = 2 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $\Psi^{-1}_{b_i}$, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* b_i, $i = 1, 2$.

Nous obtenons la solution $x^0 = (1, 0)$ *qui est 0.75 Pro-F pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

2. *Cas où* $(\widetilde{a}_{ij})_{i,j=1,2}$ *sont des intervalles flous de type* $L-R$ *et* $\widetilde{b}_{i=1,2}$ *sont des variables aléatoires discrètes de type L-R comme suit :*
   $\widetilde{a}_{11} = (1, 2, 1, 1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{12} = (3, 4, 1, 1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{21} = (2, 3, 1, 1)_{L-R}$, $\widetilde{a}_{22} = (4, 5, 1, 1)_{L-R}$. *Et*
   $\widetilde{b}_i(\omega) = (\underline{b}_i(\omega), \overline{b}_i(\omega), 1, 1)$, $i = 1, 2$. *tels que :*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_1) = \widetilde{\gamma}^1_1) = P(\widetilde{b}_2(\omega_1) = \widetilde{\gamma}^1_2) = 0.25$, *et*
   $P(\widetilde{b}_1(\omega_2) = \widetilde{\gamma}^2_1) = P(\widetilde{b}_2(\omega_2) = \widetilde{\gamma}^2_2) = 0.75$ *avec :*
   $\gamma^1_1 = (1, 2, 1, 1)_{L-R}$, $\gamma^2_1 = (3, 4, 1, 1)_{L-R}$, $\gamma^1_2 = (2, 3, 1, 1)_{L-R}$, $\gamma^2_2 = (4, 5, 1, 1)_{L-R}$.
   Où $L(x) = max(0, 1 - x)$ *et* $L = R$.
   Pour résoudre le programme linéaire flou stochastique $(P^1_{fs})'$, *nous appliquons la méthode chance-constrained programming with fuzzy stochastic coefficients en utilisant la version qui consiste à combiner chance constrained programming et comparaison d'intervalles aléatoires avec* $p_1 = p_2 = 0.75$ *et* $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$,*, nous obtenons :*
   – *en combinant probabilité et* μ_2,

$$(P^1_{\mu_2})' \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 0.5x_1 + 2.5x_2 \leq \Psi_1^{-1}(0.25) = 0.5 \\ \\ 1.5x_1 + 3.5x_2 \leq \Psi_2^{-1}(0.25) = 1.5 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où Ψ_i^{-1}, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* $\underline{b}_i - L^{-1}(0.2)$, $i = 1, 2$.

La solution est $x^0 = (1, 0)$ *qui est (0.75,0.5)* $Pro - \mu_2$ *pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

– *en combinant probabilité et* μ_3,

$$(P^1_{\mu_3})' = \left\{ \begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 \\ \\ 2.5x_1 + 4.5x_2 \leq \Phi_1^{-1}(0.25) = 2.5 \\ \\ 3.5x_1 + 5.5x_2 \leq \Phi_2^{-1}(0.25) = 3.5 \\ \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

où $\Phi^{-1}_{b_i}$, $i = 1, 2$ *sont respectivement les fonctions réciproques des fonctions de répartition des* $\overline{b}_i + L^{-1}(0.8)$, $i = 1, 2$.

La solution est $x^0 = (0, \frac{5}{9})$ *qui est (0.75,0.5)*$Pro - \mu_3$ *pareto-optimale pour* $(P^1_{mofs})'$.

Exemple 9 *Résoudre le programme linéaire multi-objectifs flou stochastique suivant :*

$$(P_{M.O.F.S}) \left\{ \begin{array}{l} \max(5x_1 + 4x_2, 2x_1 + x_2) \\ \\ \widetilde{A}(\omega) \odot x \preceq \widetilde{b}(\omega) \\ \\ x \in X = \left\{ x \in R^2 / x_j \geq 0, j = 1, 2 \right\} \end{array} \right\}$$

où les composantes de la matrice $\widetilde{A}(\omega)(2 \times 2)$ *et du vecteur* $\widetilde{b}(\omega)(2 \times 1)$ *sont des variables aléatoires floues discrètes définies sur un espace de probabilité* (Ω, F, P) *avec* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ *muni de la distribution de probabilité suivante :* $P(\omega_1) = 0.25$ *et* $P(\omega_2) = 0.75$.
On a :

$\widetilde{A}(\omega_1) = \begin{pmatrix} \widetilde{1} & \widetilde{1} \\ \\ \widetilde{2} & \widetilde{1} \end{pmatrix}, \widetilde{b}(\omega_1) = \begin{pmatrix} \widetilde{3} \\ \\ \widetilde{4} \end{pmatrix}, \widetilde{A}(\omega_2) = \begin{pmatrix} \widetilde{1} & \widetilde{3} \\ \\ \widetilde{1} & \widetilde{2} \end{pmatrix}, \widetilde{b}(\omega_2) = \begin{pmatrix} \widetilde{5} \\ \\ \widetilde{4} \end{pmatrix}$ *.où pour chaque* $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\widetilde{m}$ *est le nombre flou dont la fonction d'appartenance est définie par :*

$$\mu_{\widetilde{m}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si\, x \leq m - 1 \\ \\ x - (m - 1) & si\, x \in]m - 1, m] \\ \\ -x + m + 1 & si\, x \in]m, m + 1] \\ \\ 0 & si\, x > m + 1 \end{array} \right\}$$

Etant donné que les objectifs sont déterministes et qu'il y a présence de variables aléatoires floues dans les contraintes, pour la résolution de $(P^1_{mofs})'$, *nous pouvons utiliser d'une part les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs déterministe à savoir la fonction scalarisante avec les* *coefficients de pondération* $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ *et* $\lambda_2 = \frac{2}{3}$, *nous obtenons alors le programme linéaire flou stochastique suivant :*

$$(P_{L.F.S})\left\{\begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \\ \widetilde{A}(\omega) \odot x \preceq \widetilde{b}(\omega) \\ \\ x \in X = \left\{x \in R^2/x_j \geq 0, j = 1,2\right\} \end{array}\right\}$$

que nous pouvons, d'autre part résoudre en utilisant les techniques de la programmation linéaire multiobjectifs floue stochastique à savoir l'approche semi-infinie comme suit :
Soient :
$0 = \alpha_0 < 0.4 = \alpha_1 < 0.6 = \alpha_2 < 0.8 = \alpha_3 < 1 = \alpha_4$
et
$0 = \tau_4 < 0.01 = \tau_3 < 0.02 = \tau_2 < 0.03 = \tau_1 < 1$
on obtient le programme linéaire stochastique suivant :

$$(P_{LS})\left\{\begin{array}{ll} \max 3x_1 + 2x_2 & \\ & \\ \sum_{j=1}^{2} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega)x - \tau_k \leq \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega) & i = 1,2; k = 1,2,3 \\ & \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \end{array}\right\}$$

que nous pouvons résoudre en utilisant la méthode avec recours comme suit :
Soient :
$q_i^{\alpha_1}(\omega_l) = 2, \quad q_i^{\alpha_2}(\omega_l) = 3, \quad q_i^{\alpha_3}(\omega_l) = 4, \quad , l = 1,2;\ l = 1,2.$ *choisis par le décideur pour pénaliser la violation des contraintes et posons :*

$$Y_i^{\alpha_k}(\omega_l) = \left\{\begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{2} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega_l)x - \tau_k - \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega_l) & si\ \sum_{j=1}^{2} \overline{t}_{1ij}^{\alpha_k}(\omega_l)x - \tau_k - \underline{t}_{2i}^{\alpha_k}(\omega_l) \geq 0 \\ & \\ 0 & sinon \end{array}\right\}$$

Posons $Y_i^{\alpha_k}(\omega_l) = Y_{il}^k$, $k = 1,2,3;\ l = 1,2; i = 1,2.$

$$Y^l = \begin{pmatrix} Y_1^{\alpha_1}(\omega_l) \\ Y_2^{\alpha_1}(\omega_l) \\ Y_1^{\alpha_2}(\omega_l) \\ Y_2^{\alpha_2}(\omega_l) \\ Y_1^{\alpha_3}(\omega_l) \\ Y_2^{\alpha_3}(\omega_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{1l}^1 \\ Y_{2l}^1 \\ Y_{1l}^2 \\ Y_{2l}^2 \\ Y_{1l}^3 \\ Y_{2l}^3 \end{pmatrix};\ q(\omega_l) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le programme résultant détérministe est :
de minimiser l'objectif suivant :

$3x_1 + 2x_2 + 0.5Y_{11}^1 + 0.5Y_{21}^1 + 0.75Y_{11}^2 + 0.75Y_{21}^2 + Y_{11}^3 + Y_{21}^3 + 1.5Y_{12}^1 + 1.5Y_{22}^1 +$

$2.25Y_{12}^2 + 2.25Y_{22}^2 + 3Y_{12}^3 + 3Y_{22}^3$

sous les contraintes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}
Y_{11}^1 = 1.6x_1 + 1.6x_2 - 2.43 \\
Y_{21}^1 = 2.6x_1 + 1.6x_2 - 3.43 \\
Y_{11}^2 = 1.4x_1 + 1.4x_2 - 2.62 \\
Y_{21}^2 = 2.4x_1 + 1.4x_2 - 3.62 \\
Y_{11}^3 = 1.2x_1 + 1.2x_2 - 2.81 \\
Y_{21}^3 = 2.2x_1 + 1.2x_2 - 3.81 \\
Y_{12}^1 = 1.6x_1 + 3.6x_2 - 4.43 \\
Y_{22}^1 = 1.6x_1 + 2.6x_2 - 3.43 \\
Y_{12}^2 = 1.4x_1 + 3.4x_2 - 4.62 \\
Y_{22}^2 = 1.4x_1 + 2.4x_2 - 3.62 \\
Y_{12}^3 = 1.2x_1 + 3.2x_2 - 4.81 \\
Y_{22}^3 = 1.2x_1 + 2.2x_2 - 3.81
\end{array}\right\}$$

La solution est : $x_1 = 1.34 \quad , x_2 = 1$

CONCLUSION

Depuis plusieurs années, les deux importantes sources d'incertitude considérées sont de caractère flou ou aléatoire. Nous venons de voir qu'elles ne sont pas mutuellement exclusives, qu'elles peuvent se trouver combinées. Les variables aléatoires floues donnent un meilleur formalisme de cette combinaison.

Ces dernières années, des travaux ont été réalisés dans la prise en compte simultanée du flou et de l'aléa en programmation mathématique.

Dans ce travail, après avoir donné une vue panoramique des travaux existants dans ce domaine, nous avons apporté notre contribution dans l'étude de la combinaison du flou et de l'aléa en programmation linéaire multiobjectifs.

Nous avons, en premier lieu, généralisé conjointement, aux variables aléatoires floues, chance constrained programming with fuzzy coefficients [15] et chance constrained programming with stochastic coefficients [8], pour aboutir à chance constrained programming with fuzzy stochastic coefficients [2]. Cette généralisation nous a permis de développer des approches pour la programmation linéaire multiobjectifs en présence de variables aléatoires floues normales au sens de Shapiro, discrètes, normales de type L-R ou discrètes de type L-R.

Nous avons, en deuxième lieu, établit les conditions de convexité des ensembles admissibles résultant de l'application de cette méthode. C'est en quelque sorte une extension aux variables aléatoires floues des conditions de convexité des ensembles admissibles résultant de l'application de chance constrained programming due à Charnes et Cooper en programmation linéaire stochastique.

Nous avons, en troisième lieu, étudié tous les cas de combinaison du flou et de l'aléa dans un programme linéaire multiobjectifs.

Toutefois, nous entrevoyons quelques perspectives intéressantes pour faire avancer les débats dans ce domaine. Il serait intéressant d'étendre l'inégalité de Tchebycheff aux variables aléatoires floues. En effet, cette inégalité autoriserait la transformation d'un programme flou stochastique en un programme flou. Ce dernier étant plus facile à résoudre.

Annexe A

Ensembles flous

Définition 7 *Soit X un référentiel.*
Un sous ensemble flou $\widetilde{A}$ de X est défini comme suit :
$\widetilde{A} = \left\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)); x \in X\right\}$ *où*
$\mu_{\widetilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1]$ *est la fonction d'appartenance du sous ensemble flou $\widetilde{A}$ considéré et peut représenter suivant le contexte :*
– *le degré d'appartenance à un sous ensemble aux contours mal définis ;*
– *le niveau de compatibilité avec un concept donné ;*
– *le niveau de similarité avec un prototype ;*
– *etc...*

Cette définition permet une modélisation simple de catégories vagues.

Exemple 10 *On se propose de mesurer l'acuité visuelle (moyenne des deux yeux) des individus d'une certaine localité X.*
Soit A l'ensemble des individus ayant une bonne acuité visuelle. Cet ensemble a un contour mal défini. En effet, il y a des individus dont l'acuité visuelle est égale à 1, 0.8, 0.6 ou toute autre valeur comprise entre 0 et 1.

A.1 Concepets usuels

A.1.1 Sous ensemble de niveau

Un sous ensemble de niveau $\alpha \in (0, 1]$, noté $\widetilde{A}^{\alpha}$ est l'ensemble :
$\widetilde{A}^{\alpha} = \left\{x \in X / \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\right\}$.

Il contient tous les éléments de X qui sont compatibles avec $\widetilde{A}$ à un niveau au moins égal à α.

A.1.2 Sous ensemble de niveau strict

Un sous ensemble de niveau strict $\alpha \in (0,1]$, noté $\widetilde{A}^{\overline{\alpha}}$ est l'ensemble :
$\widetilde{A}^{\overline{\alpha}} = \left\{x \in X/\mu_{\widetilde{A}}(x) > \alpha\right\}$.

A.1.3 Support de $\widetilde{A}$

Le support de $\widetilde{A}$, noté $supp\widetilde{A}$, c'est l'ensemble des éléments de X qui appartiennent tant soit peu à $\widetilde{A}$ c'est à dire : $supp\widetilde{A} = \left\{x \in X/\mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\right\}$.

A.1.4 Hauteur de $\widetilde{A}$

La hauteur de $\widetilde{A}$, noté $haut\widetilde{A}$, est définie comme suit :
$Haut\widetilde{A} = sup\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), x \in X\right\}$.

A.1.5 Sous ensemble flou normalisé

$\widetilde{A}$ est dit normalisé s'il existe $x \in X$ tel que $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$.

A.1.6 Sous ensemble flou convexe

$\widetilde{A}$ est dit convexe si quelque soient x_1 et x_2 appartenant à X et λ à $[0,1]$ on a :
$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{B}}(x_2))$.
Autrement dit $\widetilde{A}$ est convexe si $\mu_{\widetilde{A}}$ est quasi concave.

Proposition 6 – *$\widetilde{A}$ est convexe si et seulement si $\widetilde{A}^{\alpha}$ est convexe* $\forall\alpha \in]0,1]$.
– *Si $\widetilde{A}$ est convexe et $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors $\widetilde{A}^{\alpha_2} \subset \widetilde{A}^{\alpha_1}$.*

A.1.7 Opérations ensemblistes

Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux ensembles flous de X, de fonctions d'appartenances $\mu_{\widetilde{A}}$ et $\mu_{\widetilde{B}}$ respectivement.
On définit les opérations ensemblistes comme suit :

- Inclusion :
  $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a $\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x)$.
- Egalité :
  $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ si et seulement si $\forall x \in X$ on a $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x)$.
- Intersection :
  $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ est le sous ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x))$.
- Réunion :
  $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ est le sous ensemble flou de X dont la fonction d'appartenance est définie par $\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = max(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x))$.

A.2 Principe d'extension

Définition 8 *Soient $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ n sous ensembles flous de $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivement.*
Le produit cartésien $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n$ est le sous ensemble flou ayant pour fonction d'appartenance :
$\mu_{\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_2 \times ... \times \widetilde{A}_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = min(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n))$.

A.2.1 Principe d'extension

Soit $f : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \longrightarrow Y$
où :
$X_1, X_2, ..., X_n, Y$ sont des ensembles vulgaires et $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ n sous ensembles flous de $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivement.
Le principe d'extension permet d'induire par f et $\widetilde{A}_i, i = 1, 2, ..., n$ le sous ensemble $\widetilde{B}$ de Y caractérisé par la fonction d'appartenance suivante :

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} supmin(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)) & \text{si } f^{-1}(y) \neq \oslash \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y) = \oslash. \end{array} \right\}$$

Le principe comme on le voit permet de passer des opérations sur les ensembles vulgaires à des opérations sur les ensembles flous.
C'est sur ce principe que Dubois et Prade [13] ont bâti l'arithmétique floue dont nous allons donner ci-dessous les grandes lignes.

A.2.2 Arithmétique floue

Etant donné une opération $*$ définie sur les nombres réels, on peut l'étendre en $(*)$ aux nombres flous $\widetilde{M}$ et $\widetilde{N}$ de fonctions d'appartenances respectives $\mu_{\widetilde{M}}$ et $\mu_{\widetilde{N}}$.
On obtient le nombre flou suivant $\widetilde{M}(*)\widetilde{N}$ dont la fonction d'appartenance est définie à partir du principe d'extension de la manière suivante :
$\mu_{\widetilde{M}(*)\widetilde{N}}(z) = sup\left\{min(\mu_{\widetilde{M}}(x), \mu_{\widetilde{N}}(y))/x * y = z\right\}$.

Lemme 2 *Soient $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ deux ensembles flous d'un même référentiel X. Quelque soit $\alpha(0,1]$, on a :*
- $(\widetilde{A} + \widetilde{B})^{\alpha} = \widetilde{A}^{\alpha} + \widetilde{B}^{\alpha}$.
- $(\lambda\widetilde{A})^{\alpha} = \lambda\widetilde{A}^{\alpha}$.

A.3 Théorème de décomposition de Zadeh

Soit $\widetilde{A}$ un ensemble flou, alors $\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha\widetilde{A}^{\alpha}$,
où $\widetilde{A}^{\alpha}$ représente l' α-coupe de $\widetilde{A}$.

A.4 Intervalle flou

Définition 9 *Un intervalle flou $\widetilde{A}$ est défini par une application $\mu_{\widetilde{A}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ semi-continue supérieurement telle que $\forall z \in [x,y], \mu_{\widetilde{A}}(z) \geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y))$, et $\exists x \in \mathbb{R}, \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$.*

L'α-coupe de $\widetilde{A}$ est $\widetilde{A}^{\alpha} = \{\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ est donc un intervalle fermé $[\underline{a}_{\alpha}, \overline{a}_{\alpha}]$, et ces intervalles sont emboîtés : $\widetilde{A}^{\alpha} \subseteq \widetilde{A}^{\beta}$ si $\alpha \geq \beta$.

A.4.1 Nombre flou

Un intervalle flou $\widetilde{A}$ dont l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{R}/\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\right\}$ est réduit à un point, est souvent appelé nombre flou.

Intervalle flou de type L-R

Un intervalle flou $\widetilde{a}$ est dit de type L-R si sa sa fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{a}}$ est définie par : (see [12])

$$\mu_{\widetilde{a}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } x \in [\underline{a}, \overline{a}], \\ L(\frac{\underline{a}-x}{\alpha_a}) & \text{for } x \leq \underline{a}, \\ R(\frac{x-\overline{a}}{\beta_a}) & \text{for } x \geq \overline{a}. \end{array} \right\}.$$

où L et R sont des fonctions de référence et les nombres réels strictement positifs α_a et β_a sont respectivement l'écart à gauche et l'écart à droite.
On note $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \alpha_a, \beta_a)_{L-R}$.
Si de plus $L(1) = R(1) = 0$ alors $supp\widetilde{a}$ est borné.
Soit $FN(L, R)$ l'ensemble des intervalles de type L-R.

A.4.2 Opérations sur les intervalles flous de type L-R

Soient $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \alpha_a, \beta_a)_{L-R}$ et $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \alpha_b, \beta_b)_{L-R}$

- Addition
  $\widetilde{a} \oplus \widetilde{b} = (\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}, \alpha_a + \alpha_b, \beta_a + \beta_b)_{L-R}$
- Multiplication par un scalaire

$$\lambda \odot (\underline{a}, \overline{a}, \alpha_a, \beta_a)_{L-R} = \left\{ \begin{array}{ll} (\lambda\underline{a}, \lambda\overline{a}, \lambda\alpha_a, \lambda\beta_a)_{L-R} & si\, \lambda > 0 \\ (\lambda\overline{a}, \lambda\underline{a}, -\lambda\beta_a, -\lambda\alpha_a)_{R-L} & si\, \lambda < 0. \end{array} \right\}$$

- Soustraction
  $\widetilde{a} \ominus \widetilde{b} = \widetilde{a} \oplus (-\widetilde{b}) = (\underline{a}, \overline{a}, \alpha_a, \beta_a)_{L-R} \oplus (-\overline{b}, -\underline{b}, \beta_b, \alpha_b)_{L-R} = (\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}, \alpha_a + \beta_b, \beta_a + \alpha_b)_{L-R}$

intervalle flou de type L-R au sens de Chanas

Chanas et col [7] considèrent un intervalle flou $\widetilde{a}$ de type L-R comme un cas particulier d'intervalle aléatoire comme suit :
$\widetilde{a} = [\underline{a} - L^{-1}(X)\alpha_a, \overline{a} + R^{-1}(X)\beta_a]$. où X est une variable aléatoire uniformément distribué sur $(0, 1]$ telle que pour chaque $X = \alpha$ on obtient $\widetilde{a}^{\alpha} = [\underline{a} - L^{-1}(\alpha)\alpha_a, \overline{a} + R^{-1}(\alpha)\beta_a]$ comme réalisation.

A.5 Comparaison d'intervalles flous

A.5.1 Comparaison d'intervalles de nombres réels

Soient $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ et $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ deux intervalles de nombres réels.Donc $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}$ and $\overline{b}$ sont des nombres réels tels que $\underline{a} < \overline{a}$ and $\underline{b} < \overline{b}$.Pour ordonner A et B, nous avons quatre relations $>_i, i = 1, 2, 3, 4$, definies dans [13] comme suit :

1. $[\underline{a}, \overline{a}] >_1 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} > \overline{b}$ (i.e. $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x > y$)
2. $[\underline{a}, \overline{a}] >_2 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b}$ (i.e. $\forall x \in A$, $\exists y \in B$, $x \geq y$)
3. $[\underline{a}, \overline{a}] >_3 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} > \overline{b}$ (i.e. $\exists x \in A$, $\forall y \in B$, $x > y$)
4. $[\underline{a}, \overline{a}] >_4 [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \overline{a} \geq \underline{b}$ (i.e. $\exists (x, y) \in A \times B$, $x \geq y$)

La relation $>_1$ est la plus forte ,$>_4$ est la plus faible,$>_2$ et $>_3$ sont les intermédiaires.

A.5.2 Comparaison d'intervalles flous

Dubois et Prade [12] proposent de fuzzifier ces quatre relations d'ordre d'intervalles en utilisant le pricipe d'extension

Possibilité, Necessité

Considérons deux intervalles flous $\widetilde{a}$ et $\widetilde{b}$ dont les fonctions d'appartenance sont respectivement $\mu_{\widetilde{a}}$ et $\mu_{\widetilde{b}}$.
Dans ce qui suit les abréviations *pos* and *nec* représentent respectivement possibilité et nécessité.

On définit la possibilité de $\widetilde{a} \leq \widetilde{b}$ et la nécessité de $\widetilde{a} \leq \widetilde{b}$ comme suit :

Définition 10 *[12]*

1. $pos(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) = sup(min(\mu_{\widetilde{a}}(x), \mu_{\widetilde{b}}(y))$ *où* x *et* y *sont des nombres réels tels que* $x \leq y$.
2. $nec(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) = 1 - pos(\widetilde{a} > \widetilde{b}) = 1 - sup(min(\mu_{\widetilde{a}}(x), \mu_{\widetilde{b}}(y))$ *où* x *et* y *sont des nombres réels tels que* $x > y$.

3. $nec_2(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) = inf\left\{sup\left[max(1-\mu_{\widetilde{A}}(u), \mu_{\widetilde{B}}(v))/u \geq v\right]\right\}$
4. $pos_3(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) = sup\left\{inf\left[min(\mu_{\widetilde{A}}(u), 1-\mu_{\widetilde{B}}(v))/u \leq v\right]\right\}$

Proposition 7 *[12]*

1. $pos(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \leq \overline{b}^{\alpha}$
2. $nec(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) \geq \alpha \Longleftrightarrow \overline{a}^{1-\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$
3. $nec_2(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) \Longleftrightarrow \underline{a}^{\alpha} \leq \underline{b}^{1-\alpha}$
4. $pos_3(\widetilde{a} \leq \widetilde{b}) \Longleftrightarrow \overline{a}^{1-\alpha} \leq \overline{b}^{\alpha}$

A.5.3 Indices de comparaison de quantitiés floues

Plusieurs chercheurs ont proposé des substituts scalaires pour comparer les quantités floues. c'est en quelque sorte une substitution des nombres réels aux intervalles flous pour induire un ordre total. Parmi eux, nous considérons les quatre indices suivants [42] :
Soient $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ des quantités floues et $\widetilde{a}_i^{\alpha}$ l'$\alpha - coupe$ de $\widetilde{a}_i$ définies par $\widetilde{a}_i^{\alpha} = \{x/a_i(x) \geq \alpha\}$ où $a_i(x)$ est la fonction d'appartenance de $\widetilde{a}_i$ et avec $\underline{a}_i^{\alpha} = inf\widetilde{a}_i^{\alpha}$ et $\overline{a}_i^{\alpha} = sup\widetilde{a}_i^{\alpha}$.

- Indices de Yager [44, 48, 49] :
  $Y_2(\widetilde{a}_i) = \int_0^1 M(\underline{a}_i^{\alpha})d\alpha$ où $M(\underline{a}_i^{\alpha})$ est la valeur moyenne de $\widetilde{a}_i^{\alpha}$.
  Si $\widetilde{a}_i$ est convexe alors $M(\underline{a}_i^{\alpha}) = \frac{1}{2}(\underline{a}_i^{\alpha} + \overline{a}_i^{\alpha})$.
- Indices de Campos et Munoz [5] :
  $CM_1^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = \int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)}(\lambda\underline{a}_i^{\alpha} + (1-\lambda)\overline{a}_i^{\alpha})d\alpha$ où $\lambda \in [0, 1]$.
  Si $\widetilde{a}_i$ est convexe alors $Y_2(\widetilde{a}_i) = CM_1^{\frac{1}{2}}(\widetilde{a}_i)$.
- indices de Liou et Wang [30] :
  $LW^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = \lambda\int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)} r_i^{-1}(\alpha)d\alpha + (1-\lambda)\int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)} l_i^{-1}(\alpha)d\alpha$, avec $\lambda \in [0, 1]$.
  où $\widetilde{a}_i$, $i = 1, 2, ..., n$ sont des nombres flous continus,l_i^{-1} et r_i^{-1} sont les fonctions inverses des fonctions respectives l_i et r_i qui sont strictement monotones.
  Si l_i est strictement croissante et r_i est strictement décroissante, nous avons $r_i^{-1}(\alpha) = \overline{a}_i^{\alpha}$ et $l_i^{-1}(\alpha) = \underline{a}_i^{\alpha}$. Alors $CM_1^{\lambda}(\widetilde{a}_i) = LW^{\lambda}(\widetilde{a}_i)$.
- Indices de Fortemps et Roubens[16] :
  $FR(\widetilde{a}_i) = \frac{1}{2hgt(\widetilde{a}_i)}\int_0^{hgt(\widetilde{a}_i)}(\underline{a}_i^{\alpha} + \overline{a}_i^{\alpha})d\alpha$

Remarque 8 *[42]*

- *Si $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont des nombres flous, alors pour les indices Y_2 et FR, nous remplaçons $hgt(\widetilde{a}_i)$ par l. Alors $FR = Y_2 = CM_1^{\frac{1}{2}}$.*
- *Si $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont des nombres flous continus avec l_i un écart à gauche strictement croissant et r_i un écart à droite strictement décroissant, nous avons alors $FR = Y_2 = CM_1^{\frac{1}{2}} = LW^{\frac{1}{2}}$.*

Le lecteur peut aisément vérifier la linéarité des indices de comparaison des quantités floues comme suit :

Remarque 9 *Soient $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ des nombres flous, nous avons $\forall i, j \in (1, 2, ..., n)$:*
- $F(\widetilde{a}_i + \widetilde{a}_j) = F(\widetilde{a}_i) + F(\widetilde{a}_j)$.
- $F(\gamma\widetilde{a}_i) = \gamma F(\widetilde{a}_i)$, *$\gamma$ est un nombre réel,*

où $F \in \left\{FR, Y_2, CM_1^{\frac{1}{2}}\right\}$, et $F = LW^{\frac{1}{2}}$ si de plus $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_n$ sont continus.

A.5.4 Comparaison d'intervalles flous de type L-R

L'objectif est la comparaison d'intervalles flous de type L-R au sens de Chanas

Soient A et B deux intervalles de nombres réel , $>_i, i = 1, 2, 3, 4$ les quatre relations d'ordre des intervalles et $\chi_i, i = 1, 2, 3, 4$ leurs respectives fonctions indicatrices définies comme suit :

$$\chi_i(A, B) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } A >_i B \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}$$

Chanas et col [7] ont proposé une généralisation des relations $>_i, i = 1, 2, 3, 4$ aux intervalles flous de type L-R , vus comme des intervalles aléatoires, par les relations floues suivantes $(>_k), k = 1, 2, 3, 4, 1I, 4I$ établies dans [7] et dont les fonctions d'appartenance μ_k sont définies dans [7] comme suit :
Soient $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L, R)$ et $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in FN(L, R)$ deux intervalles flous de type L-R
$\mu_k : (FN(L, R))^2 \to [0, 1] , k = 1, 2, 3, 4, 1I, 4I$:

Supposons que les intervalles flous sont de type L-R , tels que , $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$ et $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in \mathcal{F}_{LR}(\mathbb{R})$. Les relations floues pour des intervalles aléatoires peuvent se présenter dans le cas d'indépendance comme suit :

1. $\mu_1(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \overline{b} + R^{-1}(\xi)\gamma^b)$
2. $\mu_2(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^b)$
3. $\mu_3(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\xi)\gamma^a > \overline{b} + R^{-1}(\xi)\gamma^b)$
4. $\mu_4(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\xi)\gamma^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^b)$

Chanas et al. considèrent deux autres cas où ξ et ζ sont des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$:

1. $\mu_{1I}(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\underline{a} - L^{-1}(\xi)\delta^a > \overline{b} + R^{-1}(\zeta)\gamma^b)$
2. $\mu_{4I}(\widetilde{a}, \widetilde{b}) = P(\overline{a} + R^{-1}(\zeta)\gamma^a > \underline{b} - L^{-1}(\xi)\delta^a)$.

Lemme 3 *Pour deux intervalles flous quelconques de type L-R, nous avons les conditions suivantes :* $\mu_1(\widetilde{a},\widetilde{b}) > 0 \Rightarrow \underline{a} > \overline{b}$ *et*
pour $k \in \{4, 4I\}$ $\mu_k(\widetilde{a},\widetilde{b}) < 1 \Leftrightarrow \underline{b} > \overline{a}$ *(ou par équivalence* $\mu_k(\widetilde{a},\widetilde{b}) = 1 \Leftrightarrow \underline{b} \leq \overline{a}$*).*

Proposition 8 *Soient* $\widetilde{a}$ *et* $\widetilde{b}$ *deux intervalles flous de type L-R .*

1. $\mu_1(\widetilde{a},\widetilde{b}) = 1 - \mu_4(\widetilde{b},\widetilde{a})$
2. $\mu_1(\widetilde{a},\widetilde{b}) \leq \mu_i(\widetilde{a},\widetilde{b}) \leq \mu_4(\widetilde{a},\widetilde{b}), \forall i \in \{2,3\}$
3. $\mu_1(\widetilde{a},\widetilde{b}) > 0 \Rightarrow \mu_4(\widetilde{a},\widetilde{b}) = 1$

Les fonctioons d'appartenance μ_2, μ_3 et $\mu_k, k = 4, 4I$ vérifient les propriétés suivantes :

Lemme 4 *Soient* $\widetilde{a} = (\underline{a}, \overline{a}, \delta^a, \gamma^a) \in FN(L,R)$ *et* $\widetilde{b} = (\underline{b}, \overline{b}, \delta^b, \gamma^b) \in FN(L,R)$ *deux intervalles flous de type L-R, les conditions suivantes sont satisfaites : [7]*
– $\underline{a} - \underline{b} - L^{-1}(\frac{1}{2})(\delta^a - \delta^b) \geq 0 \Leftrightarrow \mu_2(\widetilde{a},\widetilde{b}) \geq \frac{1}{2}$,
– $\overline{a} - \overline{b} + R^{-1}(\frac{1}{2})(\gamma^a - \gamma^b) \geq 0 \Leftrightarrow \mu_3(\widetilde{a},\widetilde{b}) \geq \frac{1}{2}$,
– *Pour* $k \in \{4, 4I\}$ $\mu_k(\widetilde{a},\widetilde{b}) < 1 \Leftrightarrow \underline{b} > \overline{a}$ *(ou équivalent à* $\mu_k(\widetilde{a},\widetilde{b}) = 1 \Leftrightarrow \underline{b} \leq \overline{a}$*).*

Annexe B

Eléments de la théorie des probabilités

Nous rappelons dans cette annexe quelques notions de la théorie des probabilités utilisées dans la suite de travail.

B.1 Notions d'espace mesurable

Soit Ω l'espace fondamental, il peut être fini, infini, dénombrable ou non.

B.1.1 Tribus d'évènements

Une famille F de sous ensembles de Ω s'appelle tribu si :
- $\Omega \in F$,
- $\forall A \in F \Longrightarrow \overline{A} \in F$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A,
- $\forall A \in F, \forall B \in F \Longrightarrow A \cup B \in F$,
- quelque soit la suite $(A_n)_{n\in N}$ d'éléments de F, on a $\bigcup_{n\in N} A_n \in F$.

B.1.2 Espace probabilisable

- Le couple (Ω, F) où ensemble fondamental et F tribu s'appelle espace mesurable ou probabilisable.
- Tout élément de F s'appelle évènement.

B.1.3 Espace probabilisé

Soit (Ω, F) un espace probabilisable,
une probabilité P est une application de $F \longrightarrow [0, 1$ telle que :
- $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P((A_i)$ où les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints et I dénombrable.

(Ω, F, P) s'appelle espace probabilisé.

B.1.4 Tribu borélienne sur R

La Tribu borélienne B_R est engendrée par les intervalles $]a, b[,\ a, b \in R$.

B.1.5 Applications mesurables

Définition 11 *Soient (Ω, F) et (E, T) deux espaces probabilisables,
toute application $X : \Omega \longrightarrow E$ est dite mesurable si $\forall A \in T \Longrightarrow X^{-1}(A) \in F$.*

Proposition 9 *Si f et g sont des applications mesurables ;
Alors les applications suivantes sont mesurables :*
- *$f + g$*
- *fg*
- *$inf(f, g)$*
- *$sup(f, g)$*
- *cf avec c constante réelle.*

B.2 Variables aléatoires réelles

Définition 12 *Une variable aléatoire réelle est une application mesurable X d'un espace probabilisé (Ω, F, P) dans $R, B_R)$,
c'est à dire :$\forall B \in B_R \Longrightarrow X^{-1}(B) \in F$.*

On peut associer à l'évènement B une probabilité par l'intermédiaire de X telle que $P(X^{-1}(B)) = P_X(B)$.
La probabilité P_X ainsi définie sur $R, B_R)$ s'appelle loi de probabilité ou distribution de probabilité de la variable aléatoire X.

Remarque 10 *En pratique, une variable aléatoire réelle est une application*

$$X : \Omega \longrightarrow R$$

$$\omega \longrightarrow X(\omega)$$

Dans le cas où :

- X *prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs ,* X *est dite variable aléatoire discrète.*

- X *prend n'importe quelle valeur sur un intervalle de* R *,* X *est dite variable aléatoire continue.*

B.2.1 Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition F de la variable aléatoire X, la fonction définie de $\Omega \longrightarrow [0,1]$ par $F(t) = P(X \leq t)$.

B.2.2 Densité de probabilité

Soit F une fonction de répartition de la variable aléatoire X.
Si F admet une dérivée f sauf peut être en un nombre fini de points, f s'appelle la densité de la variable aléatoire X.

B.2.3 Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X,le nombre suivant s'il existe :
$E(X) = \int_\Omega (X(\omega)dP(\omega)$ où $\int_\Omega$ désigne l'intégrale de Lesbegues-Stieljeis.

Propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance, alors :

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X), \quad \forall a \in R$
- $E(b) = b \quad \forall b \in R$
- si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$

B.2.4 Variance

On appelle variance de la variable aléatoire X,le nombre réel suivant :
$\sigma^2(X) = \int_\Omega (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) = E(X - E(X))^2$.

Propriétés de la variance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance mathématique, alors :
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX) = a^2 V(X), \quad \forall a \in R$
- $V(X+b) = V(X) \quad \forall b \in R$
- $V(b) = 0 \quad \forall b \in R$
- si $V(X) = 0 \Longleftrightarrow X = E(X)$

B.2.5 Ecart-type

Soit une variable aléatoire X admettant une variance $V(X)$, on appelle écart-type de X, le réel :
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

B.2.6 Covariance

On appelle covariance de deux variables aléatoires X et Y,notée $Cov(X,Y)$, le nombre réel suivant :
$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriétés de la covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même Ω admettant une espérance, alors :
- $Cov(X,Y) = 0$ si X et Y sont indépendantes
- $V(aX+bY) = a^2V(X) + 2abCov(X,Y) + b^2V(Y)$

B.2.7 Variables aléatoires normales

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ strictement popsitif si elle a admet pour densité de probabilité la fonction $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$.

Une telle variable aléatoire est alors dite gaussienne.
On note $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$.

Remarque 11 *Si $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ alors X est dite variable aléatoire normale centrée réduite. Donc elle admet pour fonction de densité $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.*

B.2.8 Variable aléatoire normale centrée réduite

Fonction de répartition d'une variable aléatoire normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e. $X \hookrightarrow N(0, 1)$, sa fonction de répartition est définie par $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Propriétés de la fonction ϕ

- ϕ est indéfiniment dérivable, et $\phi^{'} = \varphi$
- Elle est strictement croissante et $lim_{x \to -\infty} \phi(x) = 0$ et $lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1$
- $\forall x \in R, \phi(-x) = 1 - \phi(x)$

Remarque 12 *Si $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma^2)$ alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma^2} \hookrightarrow N(0, 1)$.*

Fractiles d'une variable aléatoire normale centrée réduite

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite, i.e. $X \hookrightarrow N(0, 1)$.
On cherche en fonction d'une valeur α donnée, à déterminer le nombre u_α, appelé fractile, tel que $P(\omega / X(\omega) \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Annexe C

Programmation linéaire multiobjectifs

Considérons le programme linéaire multiobjectifs suivant :

$$(P_{LMO}) \left\{ \begin{array}{l} \max(c_1x, c_2x, ..., c_kx) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, ...m \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array} \right\}$$

où

On pose $D = \left\{ x_j / \sum_{j=1}^{n} a_{ij})x_j \leq b_i, i = 1, ...m / x_j \geq 0, j = 1, ...n \right\}$. Pour résoudre ce type de problème, il n'existe généralement pas de solution qui optimise les objectifs simultanément. L'amélioration de l'un se fait au détriment de l'autre.
Donc l'idéal c'est de trouver une solution de bon compromis entre les objectifs. C'est à dire qu'il n'existe aucune autre solution admissible qui fournisse des valeurs au moins aussi bonne sur chaque objectif et meilleur sur au moins l'un d'eux que cette dernière. C'est ce qu'on appelle solution efficace ou pareto optimale définnie comme suit :

C.1 Solution efficace ou Pareto optimale

Définition 13 *$x^* \in D$ est une solution efficace ou paréto optimale pour (P_{LMO}) s'il n'existe pas $x \in D$ tel que $c_ix^* \leq c_ix, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$ et il n'existe pas au moins un $j \in \{1, 2, ..., k\}$ tel que $c_jx^* < c_jx$.*

La détermination des solutions efficaces est la méthode la plus générale parmi les méthodes d'optimisation en programmation multiobjectifs.

Pour obtenir les solutions efficaces en utilisant la programmation paramétrique, on utilise le théorème suivant :

Théorème 20 *$x^* \in D$ est une solution efficace ou pareto optimal pour (P_{LMO}) si et seulement si x^* est optimale pour le problème suivant :*

$$(P_\lambda)\left\{\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, ...m \\ x_j \geq 0, j = 1, ...n \end{array}\right\}$$

où λ donné,$\lambda \in \left\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) \in R^k : 0 < \lambda_i < 1,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\right\}$.

C.2 Fonctions scalarisantes

- La somme pondérée :
  $s_1(z, \lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z_i$
- la distance pondérée de Tchebychev :
  $s_2(z, \lambda, \overline{z}) == max \left\{\lambda_i \left|z_i - \overline{z}_i\right| / 1 \leq i \leq k\right\}$.
- la distance pondérée augmentée de Tchebychev :
  $s_3(z, \lambda, \overline{z}) == max \left\{\lambda_i \left|z_i - \overline{z}_i\right| / 1 \leq i \leq k\right\} + \rho(\sum_{i=1}^{k} \left|z_i - \overline{z}_i\right|)$.

C.2.1 Théorèmes de caractérisation des solutions efficaces

Les résultats suivants nous permettent d'établir un lien entre la solution optimale de chacun des programmes mathématiques dont l'objectif est respectivement s_1, s_2, s_3 et la solution efficace de (P_{LMO}) .

Soit $\Lambda = \left\{\lambda_r / \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \, et \, \lambda_r > 0,\ r = 1, 2, ..., k\right\}$.

Théorème 21 *Soit le problème paramétrique :*

$$(P_1)\left\{\begin{array}{l} \min s_1(z(x), \lambda) \\ \\ x \in D \end{array}\right\}$$

avec $\lambda \in \Lambda$

- *Si x est solution optimale de $(P_{1)}$, x est solution efficace.*
- *Si x est solution efficace et que Z_D est un ensemble convexe, il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que x est solution optimale de (P_1),.*

Théorème 22

$$(P_2)\left\{\begin{array}{l}\min s_1(z(x),\lambda,\overline{z})\\ \\ x\in D\end{array}\right\}$$

Une solution x est une solution efficace si et seulement si x est solution optimale 'unique' du problème $(P_{2)}$.

Théorème 23

$$(P_3)\left\{\begin{array}{l}\min s_1(z(x),\lambda,\overline{z})\\ \\ x\in D\end{array}\right\}$$

avec $\lambda\in\Lambda$

- *Si x est solution optimale de $(P_{3)}$, x est solution efficace.*
- *Si x est solution efficace, il existe $\lambda\in\Lambda$ et ρ une valeur positive suffisamment petite telle que x est solution optimale de (P_3),.*

C.3 Les principales méthodes de résolution

Les principales méthodes de résolution sont les méthodes interactives qui sont caractérisées par une alternance de phases de calcul et la discussion avec le décideur qui, à chque fois est invité à apporter une modification sur le ou les objectifs et la méthode "Goal programming" qui est fréquemment utilisée et qui consite à minimiser les écarts entre les k fonctions objectifs et les buts choisis par le décideur.

C.3.1 Les "Goal programming"

La technique consiste à ramener à un programme mathématique à objectif unique qui est construit à partir des écarts entre les valeurs des fonctions objectifs et des valeurs souhaitées (Goals) par le décideur. Pour chacune des k fonctions objectifs $c_1,c_2,...,c_k$, le décideur choisit un but G_i et une métrique M_i de calcul de l'écart au but qui peut être l'optimum de la fonction c_i, et être calculé par un simplexe si c_i est linéaire. Nous obtenons alors dans ce cas le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l}\min\|z-\overline{z}\|_p\\ x_1\geq 0,x_2\geq 0\end{array}\right\}$$

où $z=(z_1,z_2,...,z_k)$ est le vecteur des fonctions objectifs. et $\overline{z}_i=z_i(x^*)$, $i=1,2,...,k$ est la valeur optimale de la fonction objectif z_i.

Par ailleurs, nous avons $\|z-\overline{z}\|_p = \sum_{i=1}^{k}(|z_i-\overline{z}_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $z_i-\overline{z}_i = e_i^+ - e_i^-$ tels que : si $e_i^+ > 0$ alors $e_i^- = 0$ et réciproquement si $e_i^- > 0$ alors $e_i^+ = 0$.

Bibliographie

[1] F. Aiche, sur l'optimisation floue stochastique,*Thèse de Magistère, Université de Tizi-ouzou* (1995).

[2] F. Aiche, M. Abbas and D. Dubois, Chance Constrained Programming with fuzzy stochastic coefficients, *Fuzzy optimization and decision making, Springer* 2012

[3] E.E. Ammar, On fuzzy random multiobjective quadratic programming, *European Journal of operational research* 193 (2009) 329-341.

[4] R. Bellman and L.A Zadeh. Decision making in fuzzy environment. *Management* Sci.17 (1970) 14-164.

[5] L. Campos, Aa ; Munoz, A subjective approach for ranking fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 145-153.

[6] Chakraborty, D. & Rao, K.R. & Tiwari, R.N. (1994) Interactive decision making in mixed (fuzzy and stochastic) environment,*European Journal of Operational Research* 31, 89-107.

[7] S. Chanas, P.Zielinski, Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets-further results. *Information Sciences* 117, 191-200, 1999.

[8] A. Charnes and W.W. Coper,Chance constrained programming, *Management sci.* 6 (1959) 73-79.

[9] A. Charnes and A.C Stedry, Search-Theoritic models of organization cotrol by budget multiple goals, *Managment Sciences* 12 (5) (1966) 467-481.

[10] B. Contini, A stochastic approach to goal programming, *Oper.Res.* 16 (3) (1968) 492-498.

[11] G.B. Dantzig, Linear programming under uncertaity, *Management Sciences* 1 (1955) 3-4.

[12] D. Dubois and H. Prade, *possibility theory* (Plenum, New York 1988).

[13] D. Dubois and H. Prade, fuzzy numbers an overview, in J.C. Bezdek, Ed. *Analysis of fuzzy information 2* (C.R.C, Boca Raton, 1988) 3-39.

[14] D. Dubois and H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory,*Information Sciences*30 (1983) 183-225.

[15] D. Dubois, Linear programming with fuzzy data, in J.C. Bezdek, Ed. *Analysis of fuzzy information volume III, Application in Engineering and Sciences*, (C.R.C Press) (1987) 241-263.

[16] P. Fortemps, M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems*82 (1996) 319-330.

[17] E.L. Hannan, Linear programming with multiple fuzzy goals, *Fuzzy Sets and Systems*6 (1981) 235-248.

[18] K. Hirota, Concepts of probabilistic sets, IEEE Conf. on decision and control (1977) 1361-1366.

[19] Couso, I. & Dubois, D. (2009) On the variability of the concept of variance for fuzzy random variables, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* 17, 1070-1080.

[20] M.G. Iskander, A suggested approach for possibility and necessity dominance indices in stochastic fuzzy linear programming,*Applied Mathematic Letters* 18 (2005) 395-399.

[21] D. Kall, Stochastic linear programming. *Spring Verlag Berlin Heidelberg*, New York (1978) 79-92.

[22] R. Kaplan and J. Soden, On the objective function for the sequentiel P-model of Chance constrained programming,*Oper.Res.* 19 (1),(1971) 106-114.

[23] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato, I. Nishizaki, Interactive multiobjective fuzzy random linear programming : Maximization of possibilkity and probability, *European Journal of operational research* 188 (2008) 330-339.

[24] Katagiri, H. & Sakawa, M. & Ishii, H. (2004) Fuzzy random bottleneck spanning tree problems

[25] Katoka, S. On stochastic programming II.A preliminary study of stochastic programming model, Hitotsubashi J. Arts. Sci. 2 (1962) 36-44. using possibility and necessity measures, *European Journal of Operational Research* 152 88-95.

[26] H. Kruse and Meyer, Statistics with vague data, *D. Riedel Publishing Company*, 1987.

[27] H. Kwakernaak, Fuzzy random variables I,II,*information sciences* (1979).

[28] Leclerq, J.P, Stochastic programming and interactive multicriteria approach, *European Journal of operational research* 188 (2008) 330-339.

[29] J. Li, J. Xu, M. Gen, A class of multiobjective linear programming model with fuzzy random coefficients, *Mathematical and Computer Modelling* 10(1) (1982) 33-41..

[30] T. Liou, J. Wang, Ranking fuzzy numbers with integral value, *Fuzzy Sets and Systems* (1992) 247-255.

[31] M.K. Luhandjula, Fuzzy optimization : An appraisal, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 187-203.

[32] M.K. Luhandjula, Fuzziness and randomness in an optimization framework, *Fuzzy Sets and Systems* 30 (3) (1989) 257-282.

[33] Luhandjula, M.K, Optimization under hybrid uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 187-203.

[34] Luhandjula, M.K, On some optimisation models in fuzzy-stochastic environment, *European Journal of Operational Research* 207 (2010) 1433-1441.

[35] Puri and Ralescu,Fuzzy random variables. *J. Math. and Appl.* 1114 (1986) 409-420.

[36] M. Sakawa, Fuzzy Sets and Interactive multiobjective optimization, Plenum Press, New York,1993.

[37] M. Sakawa, H. Yano, Interactive decision making for multiobjective linear programming problems with fuzzy parameters, inG. Fandel, M. Grauer, A. Kurzhanski and A.P. Wierzbieki (Eds), Large-Scale Modelling and interactive Decision Analysis, *Spring Verlag*, (1986) 88-96.

[38] M. Sakawa, H. Yano, Interactive fuzzy satisfied method for multiobjective linear fractional programming problems with fuzzy parameters, in Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds), Towards interactive and Intelligent Decision Support System, Vol.2, Proceedings, Kyoto, Japan, *Spring Verlag*, (1987), 338-347.

[39] Shapiro, A.F, Fuzzy random variables, *Insurance : Mathematics and Economics* 2008, doi :10.1016 : j.insmatheco. 2008.O5.008.

[40] Stancu-Minasian, I.M. and Wets, M.J. (1976) A research bibliography in stochastic programming, *Oper.Res.* 24 (6), 1078-1119.

[41] Tanaka, H.and Assi, K. Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 13 (1984) 1-10.

[42] X. Wang, E.E. Kerre, Reasonable properties for ordering of fuzzy quantities, *Fuzzy Sets and Systems* 118 : 375-406, 2001.

[43] W. Wang, Z. Qiao, Linear programming with fuzzy random variables coefficients,*Fuzzy Sets and Systems* 57 (1993) 295-311.

[44] R.R Yager, Ranking fuzzy subsets over the unit interval, Proc. CDC (1978).

[45] Yazini, A.V.(1987) Fuzzy and stochastic programming, *Fuzzy Sets and Systems* 22, 171-188.

[46] Qiao, Z. & Wang, W. (1993) On solution and distribution problem of the linear programming with fuzzy rando variable coefficients,*Fuzzy Sets and Systems* 58, 155-170.

[47] Qiao, Z.& Zhang, Y. & Wang, W. (1994) On fuzzy random linear programming,*Fuzzy Sets and Systems* 65, 31649.

[48] R.R Yager, On choosing between fuzzy subsets, *Kyberntes* 9 (1980) 151-154.

[49] R.R Yager, Criteria for evaluatuing fuzzy ranking methods of the unit interval, *Information Sciences* 24 (1993) 139-157.

[50] L. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.

[51] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions,*Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978)45-55.

TABLE DES MATIERES