MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MASTER

SPECIALITE: RECHERCHE OPERATIONNELLE

Présenté par:

MELLE. BOUZIDI AICHA MELLE.KACEL MALIKA

Sujet:

ETUDE D'UN RAFFINEMENT DE L'ÉQUILIBRE DE NASH

Devant le jury d'examen composé de:

M. Hamaz Abdelghani ;	MCB;	U.M.M.T.O;	Président
Mme Achemine Farida ;	MCB;	U.M.M.T.O;	Promotrice
Mme Bouarab ouiza ;	MCB;	U.M.M.T.O;	Examinatrice
Mme Fahem Karima;	MAA;	U.M.M.T.O;;	Examinatrice

Soutenu le: 22/09/2013

Remerciements

Nous tenons à remercier tout dabord le bon Dieu de nous avoir donner le courage et la patience pour mener à bien ce travail pendant toute cette longue annèe.
Nous tenons à remercier vivement notre promotrice Mme. Achemine de nous avoir proposer ce sujet ,pour la qualitèe de son encadrement et son suivi durant tout ce projet , qu'elle trouve ici l'expression de nos sincères remerciements.

On voudrait exprimer nos profonds remerciement à nos famiiles pour leurs soutiens inconditionnel,merci de nous avoir encourager supporter et accepter tant de sacrifices durant cette periode.

Nous remercions chaleuresement l'ensemble des membres de jury pour l'honneur qui nous ont fait en acceptant de juger ce memoire de fin d'ètude .

Nous adressons nos sincères remerciements à M. MERAKEB pour sa disponibilité et les soutient qui nous a apporter durant la preparation de ce memoire.
Nous tèmoignons aussi, notre vive reconnaissance a tout le corps enseignant du dèpartement de Recherche Opèrationnelle de nous avoir donner un enseignement de qualitè
En fin nous remercions toutes personnes ayant contribuer de prés et de loin au bon accomplissement de notre travail.

Table des matières

Introduction

La théorie des jeux n'est pas une nouveauté puisque le concept d'équilibre apparaît pour la première fois dans l'oeuvre de Cournot en 1838. Nous allons essayer de définir ce qu'est la théorie des jeux. A chaque décideur est affecté un résultat mais ce résultat dépend de l'ensemble des décisions prises par tous. On peut alors se demander comment tirer de cette théorie des règles de décision applicables dans les entreprises et les organisations ? Quelles sont donc ses applications en stratégie et au monde de la realitè ?
La théorie des jeux peut être définie comme un outil d'analyse des comportements humains. Elle permet de décrire et d'analyser de nombreuses relations économiques et sociales sous la forme de jeux stratégiques. Ses domaines d'applications sont multiples. En effet, même si les économistes ont été les premiers à s'approprier cet outil, différents secteurs tel que la sociologie ou bien encore les chercheurs en sciences politiques s'appuient désormais sur cette théorie.
La théorie des jeux est vraiment née grâce à Von Neumann et Morgenstern dans leur ouvrage, The theory of Games and Economic Behavior, publié en 1944. Cependant, certaines de leurs idées avaient déjà été avancées notamment par les économistes Cournot et Edgeworth au 19ème siècle. Nash apporta également sa pierre à l'édifice avec ces 4 articles écrit durant sa thèse: " Equilibrium points in N-Person Games", 1950."The Bargaining Problem", 1950, Econometrica. "Non-Cooperative Games", 1951, Annals of Mathematics. "Two-Person Cooperative Games", 1953, Econometrica
La théorie des jeux est en fait la description de ce qui se passe lorsque des personnes interagissent rationnellement. Cependant, il convient d'apporter un bémol à cette réflexion puisque tous les individus ne se comportent et n'agissent pas toujours de manière rationnelle.

La théorie des jeux moderne commence avec la publication en 1944 du livre d'Oskar Morgenstern et John von Neumann, Theory of Games and Economic Behavior. Elle a été principalement développée dans les années 1950, notamment avec les travaux de John Nash. Elle est maintenant considérée comme un outil essentiel dans de nombreuses disciplines : huit théoriciens des jeux ont obtenu le " prix Nobel d'économie ".
Elle constitue une approche mathématique de problèmes de stratégie tels qu'on en trouve en recherche opérationnelle et en économie. Elle étudie les situations où les choix de deux protagonistes - ou davantage - ont des conséquences pour l'un comme pour l'autre.
Un des buts de la théorie des jeux est d'abord de créer des modèles mathématiques de base. Ces modèles essaient de synthétiser tous les éléments essentiels pour décrire l'interaction, puis d'introduire des concepts de solution pour décrire les issues possibles d'un jeu, et enfin, d'appliquer ces outils pour mieux comprendre les phénomènes sociaux mais aussi pour prédire les conséquences d'une interaction stratégique.
Dans notre travail, on va présenter quelques-uns des principaux résultats concernant le raffinement de l'équilibre de Nash dans un jeu sous forme normale.
Ce memoire est reparti en trois chapitres et organisé comme suit :
Le premier chapitre sera consacré aux notions générales de la théorie des jeux. Nous ferons un rappel des définitions essentielles sur les jeux ainsi que les concepts de solutions. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons principalement à un équilibre connu dans les jeux sous forme normale, à savoir l'équilibre de Nash. Nous formulerons sa généralisation aux jeux en stratégies mixtes et nous étudierons les conditions de son existence. Dans le troisième chapitre, nous avons repris un article "slightly equilibrium altruistic " [8] ayant traité un nouveau concept de raffinement pour les jeux sous forme normale, appelée équilibre légèrement altruiste. Le mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Notions genérale de la théorie des jeux

1.1 Introduction

La théorie des jeux est un ensemble d'outils pour analyser les situations dans lesquelles ce qui est optimal de faire pour un agent (personne physique, entreprise,...) dépend des anticipations qu'elle forme sur ce qu 'un ou plusieurs autre agents vont faire. Elle a pour objectif de modéliser ces situation,de déterminer une stratégie optimale pour chacun des agents, de prédir l'équilibre du jeu et de trouver comment aboutir a une situation optimale.[1] [3] [4]

1.2 Définitions essentielles

Nous consacrons ce chapitre aux notions de base de la théorie des jeux. Nous rappellerons les notions essentielles sur les jeux ainsi que les concepts de solutions.

Définition 1.1.

On appelle un **jeu** une situation où des individus (des joueurs) sont conduits a faire des choix parmi un certain nombres d'actions possibles appelées " **stratégies** " ou chaque stratégie est une description complète de la façon dont un joueur entend jouer du début a la fin du jeu dans un cadre défini à l'avance " **règle du jeu** "le résultats de ses choix constituant une **issu** du jeu a laquelle est associé un gain positif ou négatif pour chacun des participants.

Définition 1.2.
Une stratégie du joueur i est un plan d'actions qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer.

1.2.1 Classification générale des jeux

La diversité des situations conflictuelles qu'on peut rencontrer en pratique engendre différents types de jeux et des méthodes spécifiques de résolution.[6]

1.2.2 Classification selon le nombre de coups

Dans un jeu d'échec les joueurs jouent à tour de rôle ; on dira qu'il s'agit d'un jeu séquentiel. Par contre, dans le cas d'un appel d'offre, les participant font leurs offres au même temps, il s'agit alors d'un jeu simultané. Deux catégories des jeux sont alors identifiées:

Les jeux sous forme normale (strategique)

Un jeu sous forme normale (on dit aussi forme stratégique) est un jeu dans lequel les joueurs jouent chacun une seule fois, et de manière simultanée autrement dit ce sont les jeux qui se déroulent en un seul coup.

Un jeu sous forme normale est donc un jeu ayant les caractéristiques suivantes :
- Il s'agit d'un jeu à information complète.
- Il s'agit d'un jeu simultané (statique) où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de l'autre joueur et le jeu ne se répète pas.
- Les joueurs sont rationnels et leur objectif est la maximisation de leur paiement.

Dans la forme normale d'un jeu, chaque joueur choisit une stratégie et le paiement qu'obtient chaque joueur dépend de la combinaison des stratégies choisies.

La forme normal d'un jeu peut être utilisée dans le cas où les joueurs interviennent simultanément.
Un jeu sous forme normale est la donnée de 3 éléments :

- $N = \{1,...,n\}$, l'ensemble des joueurs, un joueur quelconque est appelé i et donc $i \in \{1,2,...,n\}$.

- X_i, l'ensemble non vide des actions ou stratégies pures du joueur i. Une stratégie du joueur i est notée x_i avec $x_i \in X_i$. Une issue $(x_1,x_2,...,x_n)$ est une combinaison possible des stratégies des n joueurs.

- $f_i : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \longrightarrow R$, la fonction d'utilité, de gain ou de paiement du joueur i. Lorsque les n joueurs choisissent l'issue $(x_1,x_2,...,x_n)$ le joueur i obtient le gain $f_i(x_1,x_2,...,x_n)$.

Nous utiliserons la formulation suivante pour représenter un jeu statique sous forme normale:

$$G = \langle N; X; f \rangle,$$

avec $f = (f_1,f_2,...,f_n)$ et $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Remarque 1.1.

Remarquons que la forme normale est définie pour un jeu où les joueurs choisissent leur stratégie simultanément. Mais ceci ne signifie pas nécessairement que les joueurs agissent en même temps. En fait, pour obtenir la forme normale (jeu simultané), il suffit que chaque joueur choisisse sa stratégie en ignorant le choix des autres joueurs.

Les jeux sous forme extensive

Pour représenter un jeu non coopératif sous forme extensive, on a besoin :

1)d'un ensemble fini de joueur ;
2) d'un arbre du jeu : il se compose d'un ensemble fini dont les éléments sont

des nœuds ,ces derniers sont ordonnes par une relation binaire de succession.On définit alors :des nœuds initiaux symbolises par des ronds vides : ils n'ont pas de prédécesseurs.
3) des nœuds terminaux symbolisés par un vecteur de paiements des joueurs : ils

n'ont pas de successeur
4) des nœuds de décision symbolisés par des ronds pleins : ils ont des prédécesseurs

et des successeurs. Certaines situations ou les agents prennent des décisions à tour de rôle peuvent être décrites commodément à l'aide d'un arbre de jeu (en fait, une arborescente) autrement dit ce sont les jeux comportant plusieurs coups.

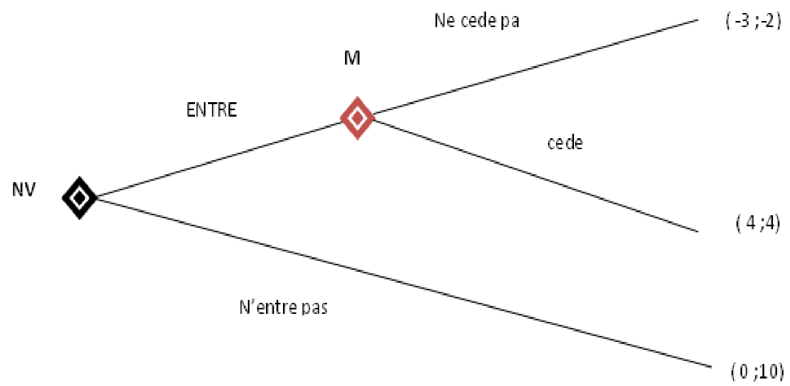
La formes extensive d'un jeu peut être utilisée dans le cas ou les règles du jeu stipulent que certains joueurs interviennent plusieurs fois la représentation d'un tel jeu se fait par l'arbre qui consiste à clarifier la séquence des actions des joueurs et l'information dont ils disposent à chaque nœud.

Cette description d'un jeu sous forme extensive suppose que les ensembles d'actions sont finis.

Remarque 1.2.
La forme extensive permet une description "dynamique" du jeu parce qu'elle spécifie les séquences de décisions prises par les joueurs. En revanche, un jeu en forme stratégique est plus facile à manipuler et il est donc plus souvent utilisée dans les applications.L'arbre d'un jeu en forme extensive diffère d'un arbre de décision en théorie de l'incertitude parce que plusieurs decideurs y sont associés.

Exemple 1.1.
considérons une entreprise, notée NV(pour nouveau venu) qui envisage de produire un bien dont l'offre est le fait d'une autre entreprise, M (pour monopole).Pour NV le choix est simple, soit il entre soit il n'entre pas, M ayant décidé s'il cède, par exemple en limitant sa production afin d'éviter un effondrement des prix dans le cas ou NV entre, ou s'il ne cède pas. Nous avons donc trois issues possibles : soit NV n'entre pas et M fait le bénéfice maximum, soit NV entre et M cède de sorte qu'il y a un partage des ventes entre les deux entreprises, soit NV entre et M ne cède pas, et toutes deux produisent à perte. Nous avons donc l'arbre de Kuhn ou à chaque issue est associée un vecteur de gains (a; b), a donne le gain de celui qui joue en premier (ici, NV) et b le gain de celui qui joue en second (ici, M).

Représentation de la forme extensive:



3.

FIG. 1.1

Remarque 1.3.

Chaque jeu sous forme extensive correspond à un jeu sous forme normale dans lequel les joueurs choisissent simultanément les stratégies qu'ils mettront en oeuvres.
En revanche, un jeu sous forme stratégique peut correspondre à plusieurs jeux sous forme extensive différents.

Classification selon l'information que possède chaque joueur

Jeu à information complète:

On dit qu'un jeu est à information complète si chacun des participants connaît : Son ensemble de stratégies ; L'ensemble des stratégies des autres joueurs ; Toute la gamme de sissues possible, et les gains qui leurs sont associés ; Les motifs des autres joueurs (en plus des siens propres) information complète. C'est-à-dire que chaque joueur connaît tous les détails du modèle et peut se mettre à la place du modélisateur.

Jeu à information incomplète:

Un jeu est dit à information incomplète lorsque les joueurs manquent d'information à propos des fonctions gains (des résultats provenant du choix de diverses stratégies).

Jeu a information parfaite et jeu à information imparfaite

On parle de jeu à information parfaite dans le cas de jeu à mécanisme séquentiel, où chaque joueur a connaissance en détail de toutes les actions effectuées avant son choix. Les échecs sont à information complète et parfaite.

Un jeu est dit à information imparfaite si un des joueurs ne connaît pas,à un moment de déroulement du jeu, ce qu'a joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas ou on cache l'information aux joueurs ou parce que les joueurs jouent simultanément.

Remarque 1.4.

Les jeux à information à la fois imparfaite et incomplète sont de loin les plus complexes. Dans ces jeux certains joueurs peuvent disposer d'informations propres sur la manière dont le hasard va intervenir dans l'issue du jeu (une meilleure connaissance des probabilités d'occurrence de tel ou tel événement qui va affecter le cours du jeu), par exemple, les jeux de guerre relèvent typiquement de cette catégorie, l'aléa sur la réussite d'un engagement entre corps de troupes dépendant d'informations non partagées par les adversaires sur les rapports de force entre ces troupes.

Classification selon les relations entre les joueurs

Jeu non coopératif :

On appelle jeu non coopératif, tout jeu où les joueurs ne peuvent pas se regrouper en coalition, mais ils peuvent être d'accord sur telle ou telle issue, à condition qu'ils ne contractent pas d'accord contraignant. Aucun joueur ne cherchera à manipuler les autres, il ne cherche qu'à maximiser son propre gain.

Jeu coopératif :

Un jeu est coopératif lorsque des joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante (par exemple, sous la forme d'un contrat qui prévoit une sanction légale dans le cas du non respect de l'accord). On dit alors qu'ils forment une coalition dont les membres agissent de concert.
Par exemple, à un croisement, chacun des deux automobilistes a la possibilité de passer ou non. Le code de la route impose sa stratégie à chacun des joueurs par une signalisation.

Définition d'une coalition

Une coalition est un sous ensemble $X \subseteq N = \{1,...,n\}$, $X \neq \emptyset$, de l'ensemble de tous les joueurs.
$(2^n - 1)$ coalitions sont possibles.
$X = \{i\}$: coalition d'un seul joueur (singleton).
$X = N$: coalition de tous les joueurs (grande coalition).

1.3 Elimination répétée des stratégies strictement dominées

Définition 1.3.
Une stratégie $x_i \in X_i$ est une stratégie strictement dominée pour le joueur i dans le jeu $G = \langle N; X; f \rangle$, s'il existe $y_i \neq x_i$ tel que :

$$f_i(x_i,x_{-i}) < f_i(y_i,x_{-i}) \quad pour \quad tout \quad x_{-i} \in X_{-i}.$$

Un jeu est dit résolvable par élimination itérative des stratégies strictement dominées si on obtient un unique profil en éliminant successivement les stratégies strictement dominées.

Remarque 1.5.
Les profils obtenus après élimination itérative des stratégies strictement dominées ne dépendent pas de l'ordre choisi pour l'élimination des stratégies.

Un joueur rationnel ne doit jamais jouer une stratégie strictement dominée. Lorsque nous sommes opposés à un joueur rationnel, nous pouvons supposer que ce dernier n'utilisera jamais une telle stratégie, nous pouvons donc l'éliminer de son ensemble de stratégies possibles. Une manière de déterminer les équilibres d'un jeu consiste à éliminer en premier toutes les stratégies strictement dominées puis de rechercher dans le jeu réduit les équilibres.

Pour illustrer cette méthode nous considérons la forme normale (stratégique) du jeu représentée par la matrice des paiements suivante :

Joueur 2

		B1	B2	B3
	A1	(10,10)	(4,9)	(4,11)
Joueur 1	A2	(5,6)	(8,3)	(3,4)
	A3	(4,0)	(8,1)	(5,3)

tableau 3

Cette matrice des paiements indique pour chacun des deux joueurs $(n = 2)$, l'ensemble des stratégies possibles et qui sont $X_1 = \{A_1,A_2,A_3\}$ et $X_2 = \{B_1,B_2,B_3\}$. Au niveau de chaque cellule de la matrice, le nombre de gauche représente l'utilité du joueur 1 et le nombre de droite l'utilité du joueur 2. Il s'agit maintenant de déterminer quel pourrait être l'équilibre prévisible de ce jeu, c'est à dire le choix simultané de stratégies par les deux joueurs, sachant que chaque joueur agit de façon rationnelle (maximise son utilité) et prend en considération le choix de l'autre joueur.

Dans le jeu du tableau 3 : cet équilibre est aisément prévisible. L'équilibre peut ici être obtenu par *élimination successive des stratégies strictement dominées.*On remarque en effet, que la stratégie B_3 procure au joueur 2 un plus grand paiement que la stratégie B_2 et ce, quelle que soit la stratégie choisie par le joueur 1. On dit dans ce cas que la stratégie B_2 est strictement dominée par la stratégie B_3 . Un joueur rationnel ne choisira jamais de jouer la stratégie B_2. La stratégie B_2 peut donc être éliminée et le jeu réduit devient comme suit:

Joueur 2

Joueur 1		B1	B3
	A1	(10,10)	(4,11)
	A2	(5,6)	(3,4)
	A3	(4,0)	(5,3)

tableau 4

Notons que c'est le joueur 2 qui a éliminé la stratégie B_2 . Mais comme le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il sait que le joueur 2 a éliminé la stratégie B_2. De plus, le joueur 2 sait que le joueur 1 sait qu'il a éliminé la stratégie B_2... Cette structure d'information, appelée *connaissance commune*, permet de passer de la forme normale représentée dans le tableau 3 à la forme normale représentée dans le tableau 4 du jeu et cela pour les deux joueurs.

Le même type de raisonnement montre qu'à partir de la matrice des paiements réduite du tableau 4, le joueur 1 ne peut choisir la stratégie A_2 car celle-ci est strictement dominée par la Stratégie A_1. Après élimination de la stratégie strictement dominéeA_2, le jeu se simplifie encore comme suit :

Joueur 2

Joueur 1		B1	B3
	A1	(10,10)	(4,11)
	A3	(4,0)	(5,3)

tableau 5

Ici également, l'élimination de la stratégie strictement dominée A_2 est une information commune aux deux joueurs. L'examen de la matrice des paiements du tableau 5 montre que pour le joueur 2, la stratégie B_1 est strictement dominée par la stratégie B_3 ,Sachant que La stratégie B_1 est éliminée par le joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 est de choisir la stratégie A_3. Ainsi, l'issue finale du jeu est (A_3,B_3) et les joueurs 1 et 2 reçoivent un paiement (Utilité) égal respectivement à 5 et 3. L'issue (A_3,B_3) est appelée équilibre en stratégies strictement dominantes. L'utilisation de la notion d'équilibre ici est motivée par le fait qu'aucun joueur n'est incité à dévier de façon unilatérale vers une autre stratégie. Si par exemple le joueur 1 décidait de façon unilatérale de jouer la stratégie A_1 ou la stratégie A_2, il obtiendrait un paiement de 4 ou de 3, inférieurs au paiement de 5.

1.4 Gain minimal garanti

On considère le jeu sous forme normale

$$G = \langle N; X; f \rangle.$$

Le joueur i est prudent(ou pessimiste) s'il croit (ou considère) qu'en utilisant la stratégie x_i, les autres joueurs vont choisir le vecteur de stratégies x_{-i} qu'il déteste le plus :

$$f_i(x_i,x_{-i}) = \min_{t_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i,t_{-i}).$$

Dans ce cas, s'il est rationnel, alors il va jouer la stratégie x_i^* qui va maximiser son paiement étant donné sa croyance :

$$f_i(x_i^*,x_{-i}^*) = \min_{t_{-i}} f_i(x_i^*,t_{-i}) = \max_{x_i} \min_{t_{-i}} f_i(x_i,t_{-i}) = \underline{v}.$$

Donc, si le joueur i joue la stratégie x_i^*, alors il est sûr, au pire des cas, d'obtenir le paiement : $\underline{v_i}$.

Définition 1.4.
x_i^* est appelée la stratégie maxmin (ou la stratégie prudente), $\underline{v_i}$ est appelée : la valeur maxmin (le gain minimal garanti) du joueur i. Un vecteur de stratégies où tous les joueurs utilisent une stratégie maxmin = $\underline{v_i}$ est appelé : vecteur de stratégies maxmin.

1.5 Jeu à somme nulle

[2]
On dit qu'un jeu a deux personnes est à somme nulle si le montant totale des gains

à la fin de la partie est nulle, en d'autre terme si le montant total gagné par un joueur est égale au mentant perdu par l'autre.

Définition 1.5.
Un jeu à somme nulle est un jeu où la somme des gains de tous les joueurs est égal à 0. C'est à dire:

$$\sum_{i \in N} f_i(x) = 0, \quad \forall x \in X = \prod_{i \in N} X_i.$$

En 1944, John Von Neumann et Oskar Morgenstern ont démontré que tout jeu à somme nulle pour n personnes n'est en fait qu'une forme généralisé de jeu à somme nulle pour deux personnes.

Dans un jeu fini à deux joueurs à somme nulle, le gain d'un joueur correspond à une perte équivalente de l'autre. La matrice du jeu donne toujours, par convention, le gain du joueur 1; le terme de ligne i et de colonne j,(a_{ij}) donne le gain du joueur 1 quand il joue la stratégie i et que le joueur 2 joue la stratégie j (le gain du joueur 2 est alors $-a_{ij}$).

Le jeu est alors appelé **jeu matriciel**. Dans un tel jeu, il existe une règle de décision qui est la règle du minmax. L'idée est que, ne sachant pas ce que va jouer l'autre, chaque joueur va juger la valeur de chaque coup qu'il peut jouer par le résultat obtenu si l'autre joueur joue au mieux. Par exemple, le joueur 1 ne va regarder de chaque ligne i que le résultat minimum $\underset{j}{Min}\ (a_{ij})$. Il choisira alors la ligne i qui maximise cette valeur, c'est-à-dire que le joueur 1 doit choisir la ligne i déterminant le $\underset{i}{Max}(\underset{j}{Min}(a_{ij}))$ appelé **valeur inférieur du jeu** ou **niveau de sécurité du joueur 1**. A l'opposé, le joueur 2 doit choisir le $\underset{j}{Min}(\underset{i}{Max}(a_{ij}))$ appelé **valeur supérieur du jeu** ou **stratégie de sécurité du joueur 2**.

Exemple 1.2.

Considérons le jeu suivant appelé ≪ pile ou face ≫. Dans ce jeu, deux enfants placent secrètement une pièce de un euro dans le creux de leurs mains. Puis simultanément chaque enfant ouvre sa main et montre à l'autre sa pièce. Si les deux pièces sont toutes les deux

coté pile ou coté face, l'enfant 1 donne un euro à l'enfant 2. Dans le cas contraire c'est l'enfant 2 qui donne un euro à l'enfant 1. C'est un jeu à information imparfaite car les deux enfants ouvrent les mains simultanément sans savoir comment l'un et l'autre avaient placé la pièce dans leur main.
La forme normale (stratégique) de ce jeu apparait dans la figure suivante :

Enfant 2

Enfant 1		Pile	Face
	Pile	$(-1,1)$	$(1,-1)$
	Face	$(1,-1)$	$(-1,1)$

tableau 1

Dans les quatre cases du tableau 1 :
→ Le premier chiffre est le paiement que reçoit l'enfant 1.
→ Le second chiffre est le paiement que reçoit l'enfant 2.

1.5.1 Point selle

Définition 1.6.
Si dans un jeu matriciel $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,j=1,\ldots,n}$. il existe une paire (i_k,j_l) telle que :

$$a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj}.$$

On dit que (i_k,j_l) est un point selle en stratégies pures pour le jeu matriciel.

Proposition 1.1. [5]
Si dans une matrice de jeu à somme nulle, on a

$$\max_i \ \min_j \ a_{ij} = \min_j \ \max_i \ a_{ij}.$$

Alors le jeu admet un point selle en stratégies pures.

Démonstration.
Supposons que (i_k,j_l)est un point selle.
Montrons que : $\max\limits_i \ \min\limits_j \ a_{ij} \leq \min\limits_j \ \max\limits_i \ a_{ij}$

- (i_k,j_l) point selle, alors

$$a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj} \quad \forall i \in I, j \in J$$

$\Longrightarrow \underset{i}{max} \;\; a_{il} \leq a_{kl} \leq \underset{j}{min} \;\; a_{kj}$

On a donc $\underset{i}{max} \;\; a_{il} \leq \underset{j}{min} \;\; a_{kj}$

$\underset{j}{min} \;\; \underset{i}{max} \;\; a_{ij} \leq \underset{i}{max} \;\; a_{il} \leq \underset{j}{min} \;\; a_{kj} \leq \underset{i}{max} \;\; \underset{j}{min} \;\; a_{ij}$

d'où, $\underset{j}{min} \;\; \underset{i}{max} \;\; a_{ij} \leq \underset{i}{max} \;\; \underset{j}{min} \;\; a_{ij} \qquad (1)$

d'autre part, d'aprés la proposition 1.1, on a

$\underset{i}{max} \;\; \underset{j}{min} \;\; a_{ij} \leq \underset{j}{min} \;\; \underset{i}{max} \;\; a_{ij} \qquad (2)$

de (1) et (2), on a

$$\underset{i}{max} \;\; \underset{j}{min} \;\; a_{ij} = \underset{j}{min} \;\; \underset{i}{max} \;\; a_{ij}$$

□

Remarque 1.6. Si (k,l) est un point selle pour une matrice de jeu, alors les joueur Max et Min ne peuvent améliorer leur gain unilatéralement en déviant de k et l respectivement. On dit alors que (k,l) est un équilibre.

Chapitre 2

Équilibre de Nash dans les jeux sous forme normale

2.1 Introduction:

L'équilibre de Nash est une notion très importante de la théorie des jeux. C'est une situation dans laquelle aucun des joueurs ne souhaite modifier son comportement étant donné le comportement de l'autre. Pour déterminer si la situation est un équilibre de Nash, il faut examiner si à partir de cette situation, chaque joueur est ou non incité à changer de stratégie. A l'équilibre de Nash, les joueurs n'ont pas de regrets. Cet équilibre s'applique à des jeux avec n'importe quel nombre de joueurs. Autrement dit, l'équilibre de Nash est une solution qui correspond à des anticipations correctes des joueurs, leurs croyances sont avérées. Elle est autoréalisatrice : en choisissant l'équilibre de Nash comme solution, chaque joueur agit en pensant que les autres en feront autant.

2.2 Equilibre de Nash en stratégie pure

Les jeux admettant un équilibre en stratégies strictement dominantes ne constituent pas le cas général. C'est le cas par exemple du jeu sous forme normale suivant pour lequel on peut vérifier qu'il n'existe pas d'équilibre en stratégies strictement dominantes.

Pour caractériser l'issue de ce jeu, un nouveau concept d'équilibre à été proposé en 1950 par J.F.Nash. [7]

On considère le jeu sous forme normale $J = \langle N,f,X \rangle$

Définition 2.1.

Un profil de stratégies $x^* = (x_1^*,...,x_n^*) \in X$ est un équilibre de Nash si aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie x_i^* (quand les autres joueurs continuent à jouer le profil x_{-i}^*) :

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i \;\; ; \;\; f_i(x_i^*,x_{-i}^*) \geq f_i(x_i,x_{-i}^*).$$

x^*est un équilibre de Nash strict si:

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X_i; \;\; f_i(x_i^*,x_{-i}^*) > f_i(x_i,x_{-i}^*).$$

Remarque 2.1.
L'équilibre de Nash est une issue où simultanément chaque joueur i choisit la meilleure stratégie compte tenu du meilleur choix des autres joueurs.
La différence entre l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash est donc la suivante : dans l'équilibre en stratégies dominantes, le choix du joueur i est optimal pour tout choix du joueur j, alors que dans l'équilibre de Nash, le choix de i est optimal pour (seulement) tout choix optimal de j. Comme pour l'équilibre en stratégies dominantes, l'équilibre de Nash est stable car c'est une issue où aucun joueur n'est incité à dévier de façon unilatérale.

Exemple 2.1.

Le dilemme de prisonnier est l'exemple le plus connu dans la théorie des jeux.
La police arrête deux suspects qui ont commis un délit ensembles et les intérrogent.A chacun d'eux, on présente le marché suivant: si ton complice avoue et que tu te tais, tu écoperas de dix ans ferme et lui s'en tirera avec un sursis. Si c'est l'inverse, c'est toi qui pourra obtenir un sursis tandis qu'il croupira en prison. Si vous avouez tous les deux, la peine sera partagée (cinq ans ferme). Si les deux se taisent, la peine sera (trois ans ferme) pour chacun.

Joueur 2

Joueur 1		se tait (N)	avoue (D)
	se tait (N)	$(-3^{\circ}, -3^{\bullet})$	$(-10{,}0^{\bullet})$
	avoue (D)	$(0^{\circ}, -10)$	$(-5, -5)$

tableau 3

L'unique équilibre de Nash :(N;N).
La recherche de l'équilibre de Nash, est opérée en pratique par la recherche des points d'intersections entre les fonctions de meilleures réponses de tous les joueurs.

2.2.1 Équilibre de Nash et correspondance de meilleures réponses

On considère le jeu sous forme normal $J =< N,X,f >$

Définition 2.2.

Pour chaque joueur $i \in N$ et profil de stratégies des autres joueur x_{-i} , on dit que x_i est la meilleure réponse contre x_i si:

$$\forall i \in N; \quad f_i(x_i,x_{-i}) \geq f_i(y_i,x_{-i}) \quad \forall y_i \in X_i$$

Remarque 2.2.

Dans l'équilibre de Nash x^*, on a x_i^* est la meilleure réponse pour x_{-i}^*,$\forall i \in N$
On appelle correspondance de meilleur réponse du joueur i, l'application:

$$C_i : X_{\text{-}i} \longrightarrow 2^{X_i}$$
$$x_{-i} \longrightarrow C_i(x_{-i}).$$

qui a x_i associe l'ensemble des meilleurs réponses du joueur i à x_{-i}

$$C_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i, f_i(x_i,x_{-i}) \geq f_i(y_i,x_{-i}) \quad \forall y_i \in X_i\}$$

$$= \{x_i \in X_i, f_i(x_i,x_{-i}) = \sup_{y_i \in X_i} f_i(y_i,x_{-i})\}.$$

On appelle correspondance de meilleure réponse du jeu J , l'application multivoque:

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow 2^X \\ x &\longrightarrow C(x) = \prod_{i\in N}(C_i(x_{-i})). \end{aligned}$$

Définition 2.3.
On appelle une application (de X vers Y) multivoque, une fonction $C : X \to 2^Y$ (2^Y ensemble des parties de Y) qui à $x \in X$ associe un sous ensemble non vide de Y.

Remarque 2.3.
x est dit point fixe de $C \Leftrightarrow x \in C(x)$,$(x = y)$

Exemple 2.2.

joueur 2

joueur 1		D	B
	D	(2,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,2)

TAB. 2.1 –

$X_1 = \{D,B\} \qquad X_2 = \{D,B\}$

Les correspondances de meilleures réponses sont données par

$C_1 : X_2 \to 2^{X_1}$

$C_1(B) = \{B\}$

$C_1(D) = \{D\}$

$C_2 : X_1 \to 2^{X_2}$

$C_2(B) = \{B\}$

$C_2(D) = \{D\}$

$C : X_1 * X_2 \to 2^{X_1 * X_2}$

$C(B,B) = C_1(B) * C_2(B) = \{B\} * \{B\} = \{(B,B)\}$

$C(D,D) = C_1(D) * C_2(D) = \{D\} * \{D\} = \{(D,D)\}$

$C(B,D) = C_1(D) * C_2(B) = \{D\} * \{B\} = \{(D,B)\}$

$C(D,B) = C_1(B) * C_2(D) = \{B\} * \{D\} = \{(B,D)\}$

Les points fixes de C sont (D,D) et(B,B) ce sont donc les équilibres de Nash de ce jeu.

2.3 Existence d'un équilibre de Nash

.

Théorème 2.1.

Le jeu sous forme normale $\langle N,X,f\rangle$ *où* $X_\mathrm{i} \subset R^{n_\mathrm{i}}$; $n_\mathrm{i} \in N^*$
$f : X \longrightarrow R$,$X = \prod_{i\in N} X_\mathrm{i}$, *admet un équilibre de Nash si pour tout* $i \in N$, *les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\forall i \in N$ *l'ensemble des stratégies* X_i *est non vide,compact et convexe,*
2. *Les fonctions* $f : x \longrightarrow f_\mathrm{i}(x)$ *est continue,* $\forall i \in N$,
3. *Les fonctions :* $x_i \longrightarrow f_i\ (x_i,x_{-i})$ *est quasi-concave sur*X_i $\forall x_{-i} \in X_{-i}$, $\forall i \in I$.

Proposition 2.1.
Considérons la correspondance de meilleur réponce du jeu J:

$$\begin{aligned} C : X &\longrightarrow 2^X \\ x &\longrightarrow C(x) = \prod_{i\in N}(C_i(x_{-i})). \end{aligned}$$

Nous avons l'equivalence entre les assertions suivantes:
1) $\overline{x}$ *est un point fixe de* C *c-à-d* $\overline{x} \in C(\overline{x})$
2) $\overline{x}$ *est un equilibre de Nash de* J

Démonstration.

1) $\Leftrightarrow \overline{x} \in C(\overline{x}) \Leftrightarrow \overline{x} \in \prod_{i\in N} C_i(\overline{x_{-i}})$
$\Leftrightarrow (\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n}) \in C_1(\overline{x_{-1}}) * C_2(\overline{x_{-2}}) * ... * C_n(\overline{x_{-n}})$
$\Leftrightarrow \overline{x_i} \in C_i(\overline{x_{-i}}),\forall i \in N.$
$\Leftrightarrow f_i(\overline{x_i},\overline{x_{-i}}) \geq f_i(y_i,\overline{x_{-i}}),\forall y_i \in X_i,\forall i \in N. \Leftrightarrow \overline{x}$ est un equilibre de Nash dans J. □

Preuve du théorème de Nash

Il suffit de verifier que les conditions du théorème du point fixe sont satisfaites par C.

Théorème 2.1. *(Théorème de point fixe de KAKUTANI)* [2]

Soit X un sous ensemble non vide, convexe et compact et considérons une correspondance $C(.) : X \to X$ de graphe compact tel que pour tout $x \in X$,l'ensemble $C(x)$ est non vide, convexe et compact, alors $C(.)$ admet dans X un point fixe x°.i.e. $x^{\circ} \in C(x^{\circ})$.

Remarque 2.4.

C est une correspondance fermée c'est à dire: $\forall (x_n,y_n) \in G_r(C)$ une suite tel que: $(x_n,y_n) \to (\overline{x},\overline{y})$, alors $(\overline{x},\overline{y}) \in G_r(c)$, où $G_r(c) = \{(x,y) \in X * Y, y \in C(x)\}$.

Démonstration.

On considère la correspondance

$$C : X \longrightarrow 2^x$$
$$x \longrightarrow C(x) = \Pi_{i \in I}(C_i(x_{-i})).$$

Etape 1
On a X_i , $\forall i \in I$, est non vide, convexe et compact $\Longrightarrow X = \prod_{i=1} X_i \neq \emptyset$, non vide, convexe et compact.
Etape 2
(C est fermé) $\Longleftrightarrow (\overline{G_r(c)} = G_r(c))$. C'est à dire on doit démontrer que:
$\forall (x_k,y_k) \in G_r(c)$,tq $(x_k,y_k) \longrightarrow_{k\longrightarrow\infty} (\overline{x},\overline{y})$, on a $(\overline{x},\overline{y}) \in G_r(c)$.
Soit $(x_k,y_k) \in G_r(c)$
avec $x_k = (x_1^k,.......,x_n^k)$;
$y_k = (y_1^k,.......,y_n^k)$;
$(x_k,y_k) \longrightarrow_{k\longrightarrow\infty} (\overline{x},\overline{y})$.
On a :

$(x_k,y_k) \in G_r(c) \Longleftrightarrow y^k \in C(x_n) = \prod_{i=1} C_i(x^k_{-i})$
$\Longleftrightarrow y^k_i \in C_i(x^k_{-i}) \forall i \in N$
$\Longleftrightarrow \ f_i(y^k_i,x^k_{-i}) \geq f_i(z_i,x^k_{-i}) \forall z_i \in X_i, \forall i$
Par passage à la limite, on aura $k \to \infty$:
$\lim_{k\to\infty} f_i(y^k_i,x^k_{-i}) \geq \lim_{k\to\infty} f_i(z_i,x^k_{-i}), \forall z_i \in X_i, \forall i \in N.$

comme f est continue , $i \in N$, on aura:
$f_i(\lim_{k\to\infty} y^k_i, \lim_{k\to\infty} x^k_{-i}) \geq f_i(\lim_{k\to\infty} z_i, \lim_{k\to\infty} x^k_{-i}) \forall z_i \in X_i, \forall i \in N$
$\Leftrightarrow f_i(\overline{y_i},\overline{x_{-i}}) \geq f_i(z_i,\overline{x_{-i}}) \forall z_i \in X_i, \forall i \in N.$
$\Leftrightarrow \overline{y_i} \in C(\overline{x_{-i}}) \forall i \in N.$
$\Leftrightarrow \overline{y} \in C(\overline{x})$
$\Leftrightarrow (\overline{x},\overline{y}) \in G_r(c).$

Etape 3
3.1) $\forall x \in X, \ \ C(x) \neq \emptyset$
Soit x $\in X, C(x) = \prod_{i=1}^{n} C_i(x_{-i})$
Montreons que $C_i(x_{-i}) \neq \emptyset$
$C_i(x_{-i}) = \{\overline{y_i}, \ \ f_i(\overline{y_i},x_{-i}) \geq f_i(y_i,x_{-i}) \ \ \forall y_i \in X_i\}$
$= \{\overline{y}; f_i(\overline{y_i},x_{-i}) = \max_{y_i \in X_i} f_i(y_i,x_{-i})\}.$

Comme f_i est continue sur X_i qui est compact alors
$\exists$ y$^\circ_i \in X_i$ tel que $f_i(y^\circ_i,x_{-i}) = \max_{y_i\in X_i} f_i(y_i,x_{-i})$
$Donc y^\circ_i \in C_i(x_{-i}).$
Ce qui est signifie que $C_i(x_{-i}) \neq \emptyset, \forall i. \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} C_i(x_i) = \emptyset \Rightarrow C(x) \neq \emptyset.$

3.2)$\forall x \in X$, $C(x)$ est convexe (c'est à valeurs convexes)
Soient $x^1,x^2 \in C(x)$ et $\lambda \in [0,1]$
Montrer que:$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in C(x).$
On a

x$^1 \in C(x) \Leftrightarrow x^1_i \in C_i(x_{-i}, \forall i$
$\Leftrightarrow f_i(x^1_i,x_{-i}) \geq f_i(y_i,x_{-i}) \forall y_i \in X_i, \forall i \in N.$
$x^2 \in C(x) \Leftrightarrow f_i(x^2_i,x_{-i}) \geq f_i(y_i,x_{-i}) \forall y_i \in X_i, \forall i \in N.$
f_i est quasi-concave sur X_i:

$f_i(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2, x_{-i}) \geq \min\{f_i(x_i^1, x_{-i}), f_i(x_i^2, x_{-i})\} \geq f_i(y_i^1, x_i), \forall y_i \in X_i, \forall i \in N$
C'est-à-dire :
$\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2 \in C_i(x_{-i}), \forall i \in N.$

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in C(x) \Rightarrow C(x) \text{ est convexe.}$$

3.3) $\forall x \in X, C(x)$ est compact
Comme X est compact, donc il suffit de démontrer que $C(x)$ est fermé (un fermé dans un compact est compact) $C(x) = \prod_{i=1}^{n} C_i(x_{-i})$, ce qui revient à démontrer que $C_i(x_{-i})$ sont fermés.
Soit $(x_i^n)_{n\geq 0}$ une suite de $C_i(x_{-i})$ telle que $x_i^n \rightarrow_{n\to\infty} x_i^*$
montrons que $x_i^* \in C_i(x)$
On a

$f_i(x_i^n, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_i(x_i^n, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i}), \forall y_i \in X_i$
f continue

$$\Rightarrow \forall y_i \in X_i, f_i(x_i^*, x_{-i}) \geq f_i(y_i, x_{-i})$$
$\Rightarrow x_i^* \in C_i(x_{-i})$
On a $C_i(x_{-i})$ est fermé donc $C(x)$ est fermé

Toutes les conditions du théorème de KAKUTANI sont verifiées, ce qui donne l'existence d'un point fixe de C, donc un équilibre de Nash. □

2.4 Propriétés de l'équilibre de Nash

1. Un profil (unique) obtenu par élimination itérative des stratégies strictement dominée (EISD) est un équilibre de Nash.

Exemple 2.3.

Soit le jeu suivant:

joueur 2

joueur 1		L	M	R
	T	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	B	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Tab. 2.2 –

La stratégie R est strictement dominée par M,donc elle peut être éliminée et on obtient le jeu suivant:

joueur 2

joueur 1		L	M
	T	(1,0)	(1,2)
	B	(0,3)	(0,1)

Tab. 2.3 –

Mais dans ce nouveau jeu, B est strictement dominée par T pour le joueur 1 Donc B peut être éliminé.

joueur 2

joueur 1		L	M
	T	(1,0)	(1,2)

Tab. 2.4 –

Dans ce nouveau jeu, L peut être éliminé car elle est dominée par M ceci nous ramène à joueur 2

joueur 1		T	F
	T	(3,2)	(1,1)
	F	(0,0)	(2,3)

TAB. 2.5 –

un jeu à une seul issue(T,M) de paiement(1,2).

Donc (T,M) est un équilibre de Nash.

2. Un jeu peut avoir plusieurs équilibres de Nash (pluralité).

Exemple 2.4. (bataille des sexes)
La multiplicité des équilibres est une des difficultés majeures rencontrées en théorie des jeux. L'exemple le plus célèbre est probablement celui de la bataille des sexes. Un couple discute des possibilités de sortie pour la soirée. Il y a deux possibilités: le théâtre ou un match de football. "Il" préfère le théâtre, "elle" préfère le foot. Toutefois, il est encore plus important pour les deux de passer la soirée ensemble. Tout ceci peut être résume au sein de la matrice suivante ou les nombres ne sont qu'indicatifs.

On note par $\circ$ la meilleure reponse du joueur 1, et par $\bullet$ la meilleure reponse du joueur 2. On obtient le tableau suivant:

joueur 2

joueur 1		T	F
	T	(3°,$2^\bullet$)	(1,1)
	F	(0,0)	(2°,$3^\bullet$)

TAB. 2.6 –

$\circ \cap \bullet = \{(T,T),(F,F)\}$ sont deux équilibre de Nash.
Donc il y a deux équilibres de Nash donnes par (T,T) et (F,F).

3. Un jeu sous forme normal ne possède pas toujours un équilibre de Nash

Exemple 2.5. soit le jeu sous forme normale suivant

joueur 2

joueur 1		P	F
	P	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	F	$(-1,1)$	$(1,-1)$

TAB. 2.7 –

On note par $\circ$ la meilleure réponse du joueur 1, et par $\bullet$ la meilleure réponse du joueur 2 ;

joueur 2

joueur 1		P	F
	P	$(1^{\circ},-1)$	$(-1,1^{\bullet})$
	F	$(-1,1^{\bullet})$	$(1^{\circ},-1)$

TAB. 2.8 –

$\circ \bigcap \bullet = \emptyset$, donc ce jeu n'admet pas d'équilibre de Nash.

Remarque 2.5.
Deux équilibres de Nash $x^* = (x_i^*,x_{-i}^*)$ et $x^{*\prime} = (x_{i'}^*,x_{-i'}^*)$ sont interchangeables si pour tout i, (x$_i^*$,x_-^*i) et $(x_i^{*\prime},x_-^*i')$ sont aussi des équilibres de Nash.

Deux équilibres de Nash sont équivalents s'ils donnent la même utilité à tous les joueurs, i.e

$$\forall i \in N, \quad f_i(x^*) = f_i(x^{*\prime}).$$

4. Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.

Définition 2.4. (Efficacité au sens de Pareto)
On considère le jeu $\langle N,X,f\rangle$.
- On dit que l'issue x' Pareto - domine l'issue x si

$$\begin{cases} 1)\ f_i(x') \geq f_i(x), \ \ \forall i \in N, \\ et \\ 2)\ \exists j \in N, \ \ f_j(x) > f_j(x'). \end{cases}$$

- Une issue x^* est un optimum de Pareto s'il n'existe pas un autre résultat que le Pareto-domine.
- Les résultats x et x' ne sont pas pareto -comparable si:

$$\begin{cases} 1)\ \exists i \in N, f_i(x') > f_i(x) \ \ , \\ 2)\ \exists j \neq i, \ \ f_j(x') < f_j(x). \end{cases}$$

Autrement dit, la notion d'optimum de Pareto ne permet pas de comparer entre eux : il est nécessaire de faire appel à d'autres critères. Pour cette raison, une situation d'optimalité " au sens de Pareto " n'est pas nécessairement une situation socialement optimale. Pour prendre un exemple extrême, une société où toutes les richesses appartiennent à un seul homme est un optimum de Pareto, car transférer une partie de ses richesses à d'autres personnes réduirait le bien-être d'au moins un individu. Par ailleurs, dans cette même situation, s'il devient possible de faire des changements qui augmenteraient le stock total de richesses de la société sans retirer de capital à cet homme, alors la situation n'est plus Pareto-optimale. Il convient donc d'employer une terminologie rigoureuse et de parler d'état efficace " au sens de Pareto ".

Exemple 2.6.

On reprend l'exemple 2.1

joueur 2

		se tait(N)	avoue(D)
joueur 1	se tait (N)	$(-3,-3)$	$(-10,0)$
	avoue (D)	$(0,-10)$	$(-5,-5)$

(N,N) est un équilibre de Nash mais (D,D) pareto domine cet équilibre.

2.5 Équilibre de Nash et extension mixte

On considère le jeu sous forme normale $J = \langle N,X,f \rangle$
NB : On etend dire dans tout ce qui précède par stratégie une strategie pure.

2.5.1 L'extension mixte de (J)

Définition 2.5.

L'extension mixte de (J) est le jeu sous forme normale $J_m = \langle N,\Sigma,F \rangle$ défini par:
$\forall i \in N, \Sigma = \prod_{i=1}^{n} \Sigma_i$.
$\Sigma_i = \triangle(x_i) = \{\sigma_i = (\sigma_i^1,....,\sigma_i^{|x_i|}) \in R^{|x_i|}, \sigma_i^k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \sigma_i^k = 1\}$.
C'est l'ensemble des mesures de probabilité.
Σ_i est l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i
On note
$\sigma_i = (\sigma_i(x_i))_{xi} \in X_i = (\sigma_i(x_i^1),\sigma_i(x_i^2),.....)$
$\forall i \in N, \forall \sigma \in \triangle(x_i)$, on a

$$F_i(\sigma) = \sum_{x_1,...,x_n \in X} f_i(x_1,...,x_n) \times \sigma_1(x_1) \times \sigma_2(x_2) \times ... \times \sigma_n(x_n)\sigma_i(x_i)$$

est la probabilité par laquelle la stratégie x_i est jouée par i.

$$\begin{cases} \sigma = (\sigma_i)_{i \in N} \\ \sigma_i = (\sigma_i(x_i))_{xi} \in X_i \end{cases}$$

- $F_i(\sigma)$ est l'espérance de l'utilité du joueur i si chaque joueur j compte choisir une stratégie x_j avec une probabilité σ_j.

- $\sigma_i \in \triangle(x_i)$ est appelée stratégie mixte du joueur i.

- $\mathrm{x}_i \in X_i$ est une stratégie pure du joueur i, identique à la masse de Dirac δ_{x_i}.

$$\delta_{x_i}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = x_i \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

X_i est l'ensemble des stratégies pures.

Exemple 2.7.

joueur 2

joueur 1		a	b
	a	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	b	$(-1,1)$	$(1,-1)$

Tab. 2.9 –

Son extension mixte

$J_m = \langle\{1,2\},\xi,F\rangle$.

$\Sigma_i = \triangle(x_i) = \{\sigma_i = (\sigma_i^1,\sigma_i^2) \in R_2/\sigma_1,\sigma_2 \geq 0 \text{ et } \sigma_i^1 + \sigma_i^2 = 1\}$.

$$\begin{cases} \sigma_i^1 = \sigma_i(a) \\ \sigma_i^2 = \sigma_i(b) \end{cases}$$

$\Sigma_i \subset [0,1] \times [0,1], \ \ \forall i \in N$.

$\Sigma_1 = \{(p,1-p), \ \ p \in [0,1]\}$.

$\Sigma_2 = \{(q,1-q), \ \ q \in [0,1]\}$.

Les fonctions gains F_i

On note

$\sigma_1 = (p,1-p) = (\sigma_1(a),\sigma_1(b))$.

$\sigma_2 = (q,1-q) = (\sigma_2(a),\sigma_2(b))$.

Ce qui donne

$F_1(\sigma) = f_1(a,a)\times\sigma_1(a)\times\sigma_2(a)+f_1(a,b)\times\sigma_1(a)\times\sigma_2(b)+f_1(b,a)\times\sigma_1(b)\times\sigma_2(a)+f_1(b,b)\times \sigma_1(b)\times\sigma_2(b) = 1\times p\times q-1\times p\times(1-q)-1\times(1-p)q+1\times(1-p)\times(1-q) = 1-2p-2q+4pq$.

$F_2(\sigma) = f_2(a,a)\times\sigma_1(a)\times\sigma_2(a)+f_2(a,b)\times\sigma_1(a)\times\sigma_2(b)+f_2(b,a)\times\sigma_1(b)\times\sigma_2(a)+f_2(b,b)\times \sigma_1(b)\times\sigma_2(b) = -1(p)(q)+1(p)(1-q)+1(1-p)(q)-1(1-p)(1-q) = -4pq+2p+2q-1$.

2.5.2 Equilibre de Nash en stratégie mixte

Définition 2.6.

Un équilibre de Nash en stratégies mixtes de J est un profile de stratégie $\sigma^* \in \Sigma$ tel que:

$$\forall i \in N,\forall\sigma_i \in \xi_i, \ \ F_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) \geq F_i(\sigma_i,\sigma{-}i^*)$$

Proposition 2.2.
Tout jeu fini sous forme normale possède un équilibre de Nash en stratégie mixtes.

Exemple 2.8. (Jeu de coordination)
A la suite d'une série d'incidents technique, la plupart des centraux téléphoniques d'une grande ville sont hors service .les services de télécommunications sont alors dans l'obligation de rationner l'accès au réseau et la règle serait la suivante "Si un appel dépasse 5 mn, les services coupent la ligne .Pour continuer la conversation, un des deux interlocuteurs doit rappeler l'autre Lequel des interlocuteurs doit rappeler? Celui qui a appelé a l'origine ou celui qui a été Appelé? Les paiements sont représentés par le tableau suivant:

joueur 2

joueur 1		Appeler	Attendre
	Appeler	(2,2)	(0,0)
	Attendre	(0,0)	(1,1)

tableau 1

Les correspondances de meilleure réponse des deux joueurs:
Pour le premier joueur:

$$C_1(q) = \{\overline{p} \text{ tel que} E_1(p,q) \leq E_1(\overline{p},q), \forall q \in [0,1]\}$$

$$E_1(p,q) = 2 \times pq + 0(1-q) + 0 \times (1-p)q + 1 \times (1-p)(1-q) = (3q-1)p + (1-q)$$

$$E_1(p,q) = (3q-1)p + (1-q)$$

La meilleure réponse $(notée MR_1(q))$ du joueur 2 dépondra du signe du coefficient $(3p-1)$.
1) Si $(3q-1) < 0$. i.e.$q < 1/3$, alors $MR_1(q)) = 0$.
2) Si $(3q-1) > 0$.i.e.$q < 1/3$, alors $MR_1(q)) = 1$.
3) Si $(3q-1) = 0$.i.e.$q = 1/3$, alors $MR_1(q)) = [0,1]$.

donc

$$MR_1(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q > \frac{1}{3}, \\ [0,1] & \text{si} q = \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{si } q < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

interprétation

1)*Si* q < 1/3 alors la meilleure réponse du joueur 1 est la stratégie mixte (0 ,1) qui correspond à la stratégie pure"Attendre"

2)*Si* q>1/3 alors la meilleure réponse du joueur 1 est la stratégie mixte (0 ,1) qui correspond à la stratégie pure "Appeler"

3)*Si* q = 1/3 alors le joueur 1 est indifférent entre ses deux stratégies pures et la meilleure réponse sera n'importe quelle stratégie mixte x .

Sa représentation graphique est donné par la figure 2.1 :

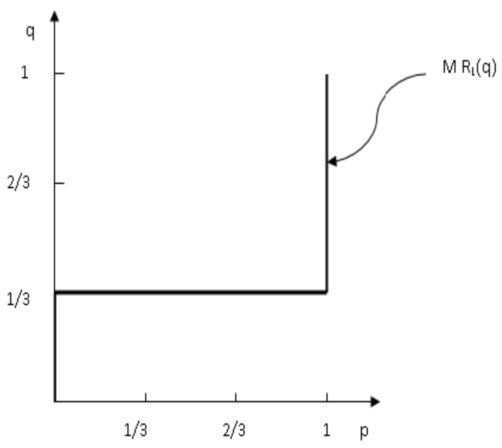


Fig. 2.1

La correspondance de meilleures réponses pour le joueur 2 est:

$C_2(q) = \{\overline{q} \text{ tel que} E_2(p,q) \leq E_2(p,\overline{q}), \forall p \in [0,1]\}$

$\mathrm{E}_2(p,q) = 2 \times pq + 0(1-q) + 0 \times (1-p)q + 1 \times (1-p)(1-q) \doteq (3q-1)p + (1-q)$

$E_2(p,q) = (3p-1)q + (1-p)$

$$MR_2(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p > \frac{1}{3}, \\ [0,1] & \text{si} p = \frac{1}{3}, \\ 0 & \text{si } p < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sa représentation graphique est donné par la figure 2.1

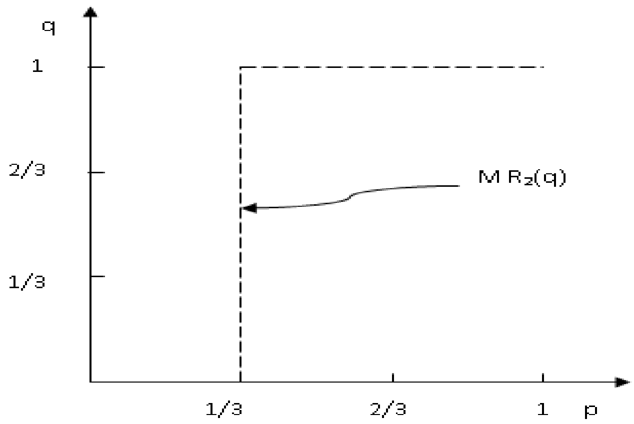


Fig. 2.2

En combinant les deux figures 2.1 et 2.2 , on obtient la figure suivante:

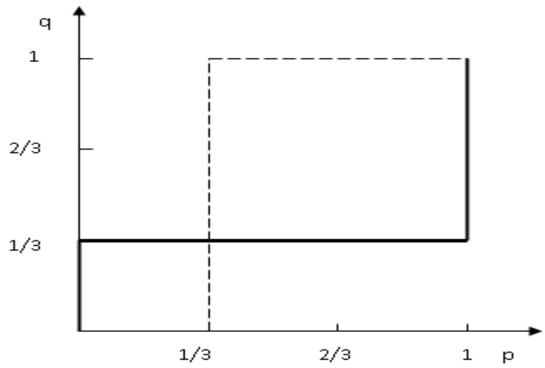


Fig. 2.3

Les points d'intersection des deux courbes de meilleures réponses définissent les équilibres de Nash pour le jeu .

D'après ce graphe, les points d'intersection sont (1,1), (0,0) et (1/3,1/3) qui correspondent aux équilibres de Nash respectivement suivants (Appeler, Appeler), (Attendre, Attendre) et en stratégies mixtes (1/3,2/3) .

Autrement dit , le jeu admet trois équilibres de Nash.

Chapitre 3

Un Raffinement De L'equilibre de Nash

3.1 Introduction

Nous présentons un concept d'amélioration pour des équilibres de Nash (équilibre légèrement altruistes) défini par un processus de limite et qui capture l'idée de l'altruisme réciproque ≪ **Slightly altruistic equilibrium** ≫.
L'existence est garantie pour chaque jeu fini et pour une grande classe des jeux avec un continum de stratégies. Il est bien connu que, en cas de multiplicité, les équilibres de Nash puissent souffrir de graves inconvénients. Il peut être instable (petits départs à la rationalité classique). G. De Marco et J. Morgan [8] propose un nouveau concept d'amélioration pour les jeux sous forme normale, appelé équilibre légèrement altruiste.

3.2 Définition des équilibres légèrement altruistes

Il existe des jeux présentant plusieurs équilibres de Nash, dont certains sont peu réalistes, car reposant sur des stratégies qui ont rationnellement peu de chances d'être choisies. Dans le cas des jeux dynamiques, certains équilibres de Nash irréalistes peuvent être éliminés par induction à rebours , qui suppose que tous les coups futurs seront rationnels. Ce faisant, on élimine des menaces non crédibles car de telles menaces de jouer une stratégie dommageable à l'autre joueur en réponse à une stratégie donnée de sa part peuvent être non rationnelles à jouer une fois que l'autre joueur a quand même joué la stratégie en question.

On considère un jeu sous forme normale à N joueurs

$$J =< I,X,f > ,$$

où
$I = \{1,...,N\}$ est l'ensemble des joueurs.
$X = \prod_{i \in I} X_i$.

$X_i \in R^{k_i}$ est l'ensemble des stratégies du joueur i ;
$f = (f_1,...,f_N)$,
$f_i : X \to R$ est la fonction des profits (gains) du joueur i;
Soit E l'ensemble des équilibres de Nash du jeu J, on rappelle (voir chapitre 2) que le point x^* appartient à E si,

$$\forall i \in I, \;\; f_i(x_i^*,x_{-i}^*) \geq f_i(x_i,x_{-i}^*), \;\; \forall x_i \in X_i,$$

où (x_i,x_{-i}^*) dénote le vecteur $(x_1^*,...,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,...,x_N^*)$, $\forall x^* \in X$.

Définition 3.1. [12]
Pour chaque $n \in N$, soit ε_n un nombre réel positif. Pour chaque joueur i , on considère la fonction $h_{i,n} : X \to R$ appelée ε_n - profit altruiste et définie par

$$\boldsymbol{h_{i,n}(x) = f_i(x) + \varepsilon_n[\sum_{j \in I \setminus \{i\}} f_j(x)]} \tag{3.1}$$

pour tout $x \in X$. Pour tout $n \in N$, le jeu

$$J_n = \{I,X,h_{1,n},...,h_{N,n}\} \tag{3.2}$$

J_n est dit ε_n jeu altruiste associé à J.

Chaque $h_{i,n}$ représente la fonction d'utilité du joueur i. Elle tient compte de la somme des profits des adversaires avec le poids ε_n.

Définition 3.2.
Un équilibre de Nash x^* du jeu J est dit équilibre légèrement altruiste s'il existe une suite de nombres réels positifs $(\varepsilon_n)_n$ décroissante vers 0 et une suite des profils de stratégie $(x_n)_n \subseteq X$ tel que

(i) x_n est un équilibre de Nash de J_n pour chaque $n \in N$.

(ii) x_n converge vers x^* quand $n \to \infty$.

Remarque 3.1.
Nous précisons que chaque équilibre dans le J_n traduit l'idée de l'altruisme réciproque. Dans le jeu J_n chaque joueur maximise ses profits perturbés par une petite quantité de la somme de profits des adversaires, si les autres font la même chose.

Exemple 3.1.
Soit le jeu sous forme normale suivant qui possède deux équilibres de Nash

	a	b
A	(1,2)	(−1,1)
B	(2,1)	0,(−1,1)

TAB. 3.1 –

On note par ∘ la meilleure seponse du joueur 1 et par • la meilleure seponse du joueur 2:

On obtient le jeu suivant

	a	b
A	$(1,2^\bullet)$	$(-1^\circ,1)$
B	$(2^\circ,1^\bullet)$	$0,(-1^\circ,1^\bullet)$

TAB. 3.2 –

La fonction gains du joueur 1 est
$\mathrm{f}_1(A,a) = 1$
$f_1(A,b) = -1$
$f_1(B,a) = 2$

$f_1(B,b) = -1$

La fonction gains du joueur 2 est
$\mathrm{f}_2(A,a) = 2$
$f_2(A,b) = 1$
$f_2(B,a) = 1$
$f_2(B,b) = 1$

Dans le jeu (J_n), Les fonctions d'utilité des joueurs sont
Pour le joueur 1 :
$\mathrm{h}_{1,n}(A,a) = f_1(A,a) + \varepsilon_n[f_2(A,a)] = 1 + 2\varepsilon_n$
$h_{1,n}(A,b) = f_1(A,b) + \varepsilon_n[f_2(A,b)] = -1 + \varepsilon_n$
$h_{1,n}(B,a) = f_1(B,a) + \varepsilon_n[f_2(B,a)] = 2 + \varepsilon_n$
$h_{1,n}(B,b) = f_1(B,b) + \varepsilon_n[f_2(B,b)] = -1 + \varepsilon_n$

Pourle joueur 2:
$\mathrm{h}_{2,n}(A,a) = f_2(A,a) + \varepsilon_n[f_1(A,a)] = 2 + \varepsilon_n$
$h_{2,n}(A,b) = f_2(A,b) + \varepsilon_n[f_1(A,b)] = 1 - \varepsilon_n$
$h_{2,n}(B,a) = f_2(B,a) + \varepsilon_n[f_1(B,a)] = 1 + 2\varepsilon_n$
$h_{2,n}(B,b) = f_2(B,b) + \varepsilon_n[f_1(B,b)] = 1 - \varepsilon_n$

On obtient le jeu J_n :

	a	b
A	$(1 + 2\varepsilon_n, 2 + \varepsilon_n)$	$(-1 + \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)$
B	$(2 + \varepsilon_n, 1 + 2\varepsilon_n)$	$(-1 + \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)$

TAB. 3.3 –

Les deux équilibres de Nash pour ce jeu sont :(B,a)et (B,b).

Cas 1:

En choisissant la suite (ε_n) qui vérifien les conditions suivantes

$$\begin{cases} 2 + \varepsilon_n > 1 + 2\varepsilon_n \\ 2 + \varepsilon_n > 1 - \varepsilon_n \\ 1 + 2\varepsilon_n > 1 - \varepsilon_n \end{cases}$$

C'est à dire

$$\begin{cases} \varepsilon_n < 1, \\ \varepsilon_n > -1/2 \\ \varepsilon_n > 0 \end{cases}$$

On a $\varepsilon_n \in [0{,}1]$ et il suffit de prendre par exemple $\varepsilon_n = 1/2^n$ qui converge vers 0.

Les meilleures réponses sont données comme suit

	a	b
A	$(1 + 2\varepsilon_n, 2 + \varepsilon_n^{\bullet})$	$(-1 + \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)$
B	$(2 + \varepsilon_n^{\circ}, 1 + 2\varepsilon_n^{\bullet})$	$(-1 + \varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)$

TAB. 3.4 –

D'où (B,a) est un équilibre de Nash légèrement altruiste du jeu J_n

Cas 2:

En choisissant une suite vérifiant les conditions suivante:

$$\begin{cases} 1 + 2\varepsilon_n > 2 + \varepsilon_n \\ 1 \text{ - } 2\varepsilon_n > 1 + 2\varepsilon_n \\ 1 \text{ - } \varepsilon_n > 1 + 2\varepsilon_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_n > 1, \\ \varepsilon_n > -1/3 \\ \varepsilon_n < 0 \end{cases}$$

L'esnsembe est vide: $\varepsilon_n = \emptyset$ et on déduit que l'équilibre de Nash (B,b) n'est pas légèrement altruiste.

Les meilleures réponses dans ces conditions sont données par

	a	b
A	$(1+2\varepsilon_n^\circ, 2+\varepsilon_n)$	$(-1+\varepsilon_n^\circ, 1-\varepsilon_n)$
B	$(2+\varepsilon_n, 1+2\varepsilon_n)$	$(-1+\varepsilon_n^\circ, 1-\varepsilon_n^\bullet)$

TAB. 3.5 –

3.3 Existence de l'équilibre de Nash légèrement altruiste.

Des conditions suffisantes de l'existence de l'équilibre de Nash légèrement altruiste sont données par G. De Marco ·et J. Morgan [12].

Théorème 3.1. [14]
Pour le jeu J possède au moins un équilibre légèrement altruiste. On suppose que pour chaque joueur i, X_i est un sous-ensemble compact et convexe de R^{k_i}, f_i est continu sur X et concave sur x_j.

Preuve
Pour tout $m \in N$,on considère la fonction $h_{i,m}$ définie sur X par :

$$h_{i,m}(x) = f_i(x) + 1/2^m \sum_{j\in I} {}_{/\{i\}} f_j(x) \tag{3.3}$$

pour tout $x \in X$, Comme $h_{i,m}$ est continue sur X et concave sur X_i, $i \in I$, alors le jeu $J_m =< I; X_1,...,X_N; h_{1,m},...,h_{N,m} >$ possède au moins un équilibre de Nash pour chaque $m \in N$.

Soit x_m un équilibre de Nash du jeu altruiste J_m avec $\varepsilon_m = 1/2^m$. Comme X est compact, on a l'existence d'une sous suite $(x_{m_n})_n$ de $(x_m)_m$ qui converge vers x^* quand $n \to \infty$. x_{m_n} est un équilibre de Nash de J_{m_n}.

Il s'en suit que :

$$\forall i \in I \ , \ h_{i,m_n}(x_{i,m_n}, x_{-i}, m_n) \geq h_{i,m_n}(x'_{i,m_n}, x_{-i}, m_n) \text{ pour tout } x'_i \in X_i.$$

Alors pour tout i et tout, $x'_i \in X_i$, on a :

$f_i(x_i^*,x_{-i}^*) = \lim_{n\to\infty} h_{i,m_n}(x_{i,m_n},x_{-i},m_n) \geq \lim_{n\to\infty} h_{i,m_n}(x'_{i,m_n},x_{-i},m_n) = f_i(x'_i,x_{-i}^*)$.
Par conséquent x^* est un équilibre de Nash de J et c'est la limite de la suite des équilibres de Nash de ε_n- jeu altruiste J_n, avec $\varepsilon_n = 1/2^{m_n}$.

3.4 Propriétés alternatives de stabilité basées sur l'alruislme.

Dans la définition des équilibres légèrement altruistes, chaque joueur n'a pas l'importance relative de ses adversaires. Il traite équitablement les autres joueurs dans le jeu perturbé et maximise la moyenne des profits des adversaires. Cependant, il se pourrait que les joueurs possèdent un a priori sur les poids (importance) des autres joueurs. Dans ce cas on considère le système des à priori :

$$\alpha = (\alpha^i)_{i\in I} \in R_+^{N(N-1)}$$

où $\alpha^i = (\alpha^{i,j})_{j\neq i}$ est l' à priori du joueur i et $\alpha_{i,j}$ est l'importance relative pour le joueur i de l'utilité du joueur j avec $\sum_{j\neq i}\alpha_{i,j} = 1$ et $\alpha_{i,j} \geq 0$ pour tout $i \neq i$.

On a alors les gains perturbés du jeu ε_n-altruiste qui sont donnés comme suit:

$$\beta_{i,n}^\alpha = f_i + \varepsilon_n[\textstyle\sum_{j\in I/\{i\}} \alpha_{i,j} f_j]$$

et le jeu perturbé ε_n-altruiste est:

$$\overline{J}_n^\alpha =< I,X,\beta^\alpha >$$

$I = \{1,...,N\}$;
$X = X_1 \times ... \times X_N$;
$\beta^\alpha = (\beta_1^\alpha,...,\beta_{N,n}^\alpha)$.

Par conséquent, il serait possible de choisir les équilibres du jeu J qui sont des limites des équilibres des jeux $\overline{J}_n^\alpha$ pour une suite ε_n convergeant vers 0 (équilibres légèrement altruistes avec un a priori α).[13]

Définition 3.3. [11]

Un équilibre de Nash x^* pour le jeu J est dit équilibre légèrement altruiste avec un a priori α s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante vers 0 et une suite de profile des stratégies $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, telle que:

(i) x_n est un équilibre de Nash de $\overline{J_n^\alpha}$,$\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $x_n \to x^*$,$n \to \infty$.
Naturellement, ceci pourrait changer les prévisions (seulement dans les jeux avec plus de 2 joueurs).

L'existence d'un tel équilibre pour le jeu est garantie dans les conditions du théorème 3.1., il suffit de considérer alors $\beta_{i,n}^\alpha$ au lieu de $h_{i,n}$.

Remarque 3.2. Plus généralement, il serait possible de modifier la définition 3.1 et d'exiger d'autres propriétés de stabilité.

Soit $\varepsilon_n^i = (\varepsilon_n^{i,j})_{j\neq i}$,$\overline{\varepsilon_n} = (\varepsilon_n^i)_{i\in I} \in R_+^{N(N-1)}$ et considérons le jeu:

$$\widetilde{J_{\overline{\varepsilon_n}}} = \{I; X_1,...,X_N; f_1 + \sum_{j\in I/\{1\}} \varepsilon_n^{1,j} f_j,...,f_N + \sum_{j\in I/\{N\}} \varepsilon_n^{N,j} f_j\}$$

Si on exige un équilibre x^* qui soit une limite d'une suite d'équilibre de Nash du jeu $\overline{J_{\overline{\varepsilon_n}}}$ pour au moins une suite $(\overline{\varepsilon_n})_{n\in N}$ convergeant vers 0, on obtient alors un ensembles d'équilibre qui contient les équilibres légèrement altruistes.

En effet, si on pose $\varepsilon_{n^{i,j}} = \varepsilon_n$,$\forall j \neq i$, on aura un équilibre légèrement altruiste.

Par conséquent , on obtient un mécanisme de sélections qui a un niveau inférieur d'efficacité que celui donné par la définition 3.1.

Exemple 3.2.
On considère le jeu à trois joueurs suivant:

	L	R
T	1,1,2	$0,-1,1$
B	1,2,1	$0,-1,1$

TAB. 3.6 –

	L	R
T	0,0,0	$0,-1,0$
B	0,0,0	$0,-1,0$

TAB. 3.7 –

Les lignes représente les strategie du premier joueur, le second joueur correspond aux colonnes et le troisième aux matrices.
L est une stratégie dominante pour le joueur 2 et M est une stratégie dominante pour le joueur 3 puis , dénotant avec $x_1(T)$ des stratégies mixtes du joueur 1, l'ensemble des équilibres de Nash de ce jeu est

$$E = \{(x_1(T),L,M) \mid x_1(T) \in [0,1]\}.$$

Si on considère une suite $(\overline{\varepsilon_n})_{n\in N} \subset R_+^6$ convergeant vers 0, où $\overline{\varepsilon_n} = (\varepsilon_n^{1,2},\varepsilon_n^{1,3},\varepsilon_n^{2,1},\varepsilon_n^{2,3},\varepsilon_n^{3,1},\varepsilon_n^{3,2})$ et le jeu correspondant $\widetilde{J}_{\bar{\varepsilon}_n}$. Pour n suffisamment grand L est une stratégie dominante pour le joueur 2 et M est une stratégie dominante pour le joueur 3. Ainsi nous tenons compte seulement du fonction de profit du joueur 1 dans le jeu perturbé $\widetilde{J}_{\bar{\varepsilon}_n}$, étant donné les stratégies de ses adversaires L et M .

- Si on considère une suite $(\overline{\varepsilon_n})_{n\in N} \subset R_+^6$ convergeant à 0 avec $\varepsilon_n^{1,2} < \varepsilon_n^{1,3}$ alors l'unique équilibre du jeu $\widetilde{J}_{\bar{\varepsilon}_n}$ pour n suffisamment grand, est (T,L,M).
- Si on considère une suite $(\overline{\varepsilon_n})_{n\in N} \subset R_+^6$ convergeant à 0 avec $\varepsilon_n^{1,2} > \varepsilon_n^{1,3}$, alors l'unique équilibre du jeu $\widetilde{J}_{\bar{\varepsilon}_n}$ pour n suffisamment grand, est (B,L,M) .

	L
T	1+$\varepsilon_n^{1,2} + 2\varepsilon_n^{1,3}$
B	1+$2\varepsilon_n^{1,2} + \varepsilon_n^{1,3}$

TAB. 3.8 –

3.5 Propriété de bienveillance(Friendliness Property)

Définition 3.4. On dit que l'equilibre de Nash $x = (x_i,x_{-i})$ vérifie la propriété Friendliness Property si pour chaque joueur i et pour chaque équilibre de Nash $x = (x_i,x_{-i})$, la stratégie x_i maximise la somme des gains des adversaires du joueur i sur l'ensemble des stratégies x'_i de joueur i tel qui (x'_i,x_{-i}) est un équilibre Nash de le jeu.[15]

Théorème 3.2.

On suppose que pour chaque joueur $i \in I$, X_i est un sous-ensemble compact et convexe de $R^{k(i)}$, f_i est une fonction concave par rapport à x_j sur X_j, $\forall j \in I$ et continument différentiable sur X. Soit $\nabla_{xi} f_i(x)$ le gradient de f_i par rapport à x_i en x, donné par :
$A : X \longrightarrow R = \prod_i \in_I R^{k_i}$ défini par:

$$A(x) = (\nabla_{x_1} f_1(x),\nabla_{x_2} f_2(x),...,\nabla_{x_N} f_N(x)), \tag{3.4}$$

est pseudomonotonne sur X c. a.d $< A(x),x - t >\geq 0 \Rightarrow < A(t),x - t >\geq 0,x \in X,t \in X,$ où

$$< A(x),t >= \sum_{i\in I} < \nabla_{x_i} f_i(x),t_i >_i x,t \in X \tag{3.5}$$

et $< .,. >$ (resp.$< .,. >_i$) sont les produits scalaires dans $\mathbb{R}$ (respectivement dans $\mathbb{R}^{k(i)}$). Alors, pour chaque joueur i et pour chaque équilibre légèrement altruistic $x^* = (x_i^*,x_{-i}^*)$ la stratégie x_i^* maximise $\sum_{j\in I} \{i\} f_j(.,x_{-i}^*)$ sur l'ensemble $E_i(x_{-i}^*) = \{x_i \in X_i/(x_i,x{-}i^*) \in E\}$. C'est-à-dire, l' équilibre légèrement altruiste satisfait propriété de bienveillance.

Preuve

soit x_i^* un équilibre légèrement altruistic, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n \subset R_+ \ \{0\}$ décroissante vers 0 et il existe une suite des équilibre de Nash $(x_n)_n \subseteq X$ de J_n telle que $x_n \to x^*$ quand $n \to \infty$.

Comme x_n est un équilibre de Nash du jeu J, alors pour chaque joueur i,

$$h_{i,n}(x_{i,n},x_{-i,n}) \geq h_{i,n}(x'_i,x_{-i,n}),$$

pour tout $x'_i \in X_i$.

Sachant que X_i est convexe, alors pour chaque $x'_i \in X_i, x_{i,\lambda} = (1-\lambda)x_{i,n} + \lambda x'_i = x_{i,n} + \lambda(x'_i - x_{i,n})$ appartient à X_i et

$$h_{i,n}(x_{i,n},x_{-i,n}) \geq h_{i,n}(x_{i,\lambda},x_{-i,n})$$

pour tout $\lambda \in]0,1[$.
Par conséquent

$$\frac{\lim_{\lambda\to 0^+} h_{i,n}(x_{i,\lambda},x_{-i,n}) - h_{i,n}(x_{i,n},x_{-i,n})}{\lambda} =< \nabla_{x_i} h_{i,n}(x_n),x'_i - x_{i,n} >_i \leq 0 \tag{3.6}$$

D'où, $< \nabla_{x_i} h_{i,n}(x_n),x_{i,n} - x'_i >_i \geq 0$, pour chaque $x'_i \in X_i$. Comme cette inégalité est vraie pour chaque joueur i alors

$$\sum < \nabla_{x_i} f_i(x_n) + \varepsilon_n[\sum_{j\in I/\{i\}} \nabla_{x_i} f_j(x_n)],\ \ x_{i,n} - x'_i >_i \geq 0,\ \ pourtout x' \in X\ . \tag{3.7}$$

Soit :$B : X \to R$ un opérateur défini par :

$$B(x) = (\sum_{j\in I/\{1\}} \nabla_{x_1} f_j(x), \sum_{j\in I/\{2\}} \nabla_{x_2} f_j(x),..., \sum_{j\in I/\{N\}} \nabla_{x_N} f_j(x)). \tag{3.8}$$

Alors

$$< B(x),t >= \sum_i \in I < \sum_{j\in I/\{i\}} \nabla_{x_i} f_j(x),t_i >_i$$

et alors (3.7) s'écrit comme suit

$$< (A + \varepsilon_n B)(x_n),x_n - x' > \geq 0,x' \in X. \tag{3.9}$$

Soit $x^{\backslash\backslash}$ un équilibre de Nash de J alors la suite

$$< \nabla_{x_i} f_i(x^{\backslash\backslash}), x^{\backslash\backslash}_i - x_{i,n} >_i \geq 0,$$

pour chaque joueur i et par conséquent

$$< A(x^{\backslash\backslash}), x^{\backslash\backslash} - x_n > \geq 0.$$

Lorsque A est pseudomonotone, il s en suitque $< A(x_n), x^{\backslash\backslash} - x_n > \geq 0$, et de (3.9) on aura

$$\varepsilon_n < B(x_n), x_n - x^{\backslash\backslash} > \geq < A(x_n), x^{\backslash\backslash} - x_n > \geq 0 \tag{3.10}$$

pour tout $x^{\backslash\backslash} \in E$.
où E est un ensemble des équilibres de Nash du jeu J, par conséquent (3.10) implique que

$$< B(x_n), x_n - x^{\backslash\backslash} > \geq 0$$

pour tout $x^{\backslash\backslash} \in E$, quand $n \to \infty$

$$< B(x^*), x^* - x^{\backslash\backslash} > \geq 0. \tag{3.11}$$

pour tout x$^{\backslash\backslash} \in E$
Pour chaque joueur i , soit $g_i : X \to R$, une fonction définie par

$$g_i(x) = \sum_{j \in I/\{i\}} f_j(x)$$

$x \in X$.
Comme g_i est concave par rapport à chaque variable, ainsi pour chaque $x^{\backslash}_i \in X_i$,

$$g_i(x^{\backslash}_i, x^*_{-i}) - g_i(x^*_i, x^*_{-i}) \leq < \nabla_{x_i} g_i(x^*), x^{\backslash}_i - x^*_i >_i .$$

Finalement, pour chaque $x^{\backslash\backslash}_i \in E_i(x^*_{-i}) = \{x_i \in X_i | (x_i, x^*_{-i}) \in E\}$, de (3.12), on aura

$$< B(x^*), x^* - x^{\backslash\backslash} > = \sum_{j \in I} < \nabla_{x_j} g_j(x^*), x^*_j - x^{\backslash\backslash}_j >_j = < \nabla_{x_i} g_i(x^*), x^*_i - x^{\backslash\backslash}_i >_i \geq 0 \tag{3.12}$$

Par conséquent

$$g_i(x''_i,x^*_{-i}) - g_i(x^*_i,x^*_{-i}) \leq 0.$$

On déduit que tout équilibre légèrement altruistes satisfait la propriété de bienveillance.

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéréssés à un raffinement de l'équilibre de Nash.
Après avoir rappeler les notions genèrales de la théorie des jeux et quelques concepts de solutions
Nous avons repris la definition de l'equilibre de Nash, ces propriètès et le thèoreme de son existence en strategie pures et mixtes.
Dans ce travail, nous avons repris un concept de raffinement de l'équilibre de Nash,grace à ce dernier,on peut selectionner un équilibre de Nash lorsque il y a pluralité des équilibres.
la théorie des jeux ne doit pas être utilisée pour " résoudre " le jeu et apporter une réponse chiffrée. En fait, les résultats des jeux sont souvent sensibles aux hypothèses émises par l'auteur du modèle sur le rythme des mouvements, l'information disponible et la rationalité des décisions des joueurs.
L'intérêt majeur de la théorie des jeux est qu'elle donne une idée de la structure de l'interaction entre les participants. Il s'agit non seulement d'apprendre la bonne façon de jouer, mais aussi de comprendre les possibilités existantes et les conséquences du changement des règles du jeu.
Et comme perspectives on propose d'ètudier d'autre raffinement et comparer entre eux.

Bibliographie

Bibliographie

[1] Binmore K. (1999). jeu et theorie dans jeux,de Boek université Paris.

[2] F.Kacher et K.Bouibed Manuel de l'etudiant.

[3] jeux de societé .Patrick Ganzanez et John Crète

[4] Owen G(1968). Games theory.W.B.Sanders company, philadelphia, London,Toranto.

[5] Shmuel ZAMIR CNRS, EUREQua Paris 1 et LEI/CREST, en collaboration avec Rida LARAKI CNRS, Laboratoire d'Econom´etrie de l'Ecole Polytechnique

[6] Fundenberg, D., and Tirole,(1995.) J. *Game Theory,* The MIT Press, Cambridge, Massachussetts, London, England, fifth Printed,

[7] J.F.NASH ,(PNAS 1950), Equilibrum.in n-personne games

[8] Fudenberg, D.Tirole,Cambridge (1991), Game Theory. MIT Press,

[9] Breton, M. Fredj, K. and Zaccour, G.(2002). Characteristic Functions,Coalitions stability and free-riding in a Game of pollution control, The 10th International Symposium on Dynamic Games and Application, St Petersburg, Russia, St Petersburg State University, Vol.1, pp.129-138.

[10] Nash, J.(1951), Non-cooperative games.

[11] van Damme, Berlin (1989), Stability and Perfection of Nash Equilibria. Springer,

[12] De Marco, G., Morgan, (2004) A selection mechanism for Nash equilibria.

[13] Hillas, J., Jansen, M., Potters, J., Vermeulen, D (2001) On the relation among some definitions of the strategic stability.

[14] Mangasarian, O.L (1965) Pseudo-convex functions.

[15] De Marco, G., Morgan, J (2008) Friendliness and reciprocity in equilibrium selection. Int. Game Theory Rev.

Sites internet:
www.memoir-on-line.com
www.sciencedirect.com
www.wikepedia.org