

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMÈRI DE TIZI-OUZOU



FACULTÉ DU GÉNIE DE LA CONSTRUCTION  
Département d'Hydraulique

*Filière : Hydraulique*

## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

Présenté pour Obtenir le Diplôme de Master

*Spécialité : Ouvrages Hydrauliques*

Thème

*Étude numérique d'un écoulement à surface libre  
en présence d'une singularité*

Réalisé par :

*Mr. RABHI Karim*

*Mr. SAMET Makhlouf*

Soutenu devant le jury composé de :

<i>NOM et Prénom</i>	<i>Grade</i>	<i>Lieu d'exercice</i>	<i>Qualité</i>
<i>Mme. LEBDIRI Fatima</i>	<i>MCB</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Présidente</i>
<i>Mr. HAMANI Sofiane</i>	<i>MCB</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Promoteur</i>
<i>Mr. YAHY Takai Eddine</i>	<i>MAB</i>	<i>UMMTO</i>	<i>Examineur</i>

Date de soutenance : le 25/06/2025

## Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu Tout-Puissant de nous avoir accordé la force, la patience et la persévérance nécessaires à l'accomplissement de ce travail.

Nous adressons nos remerciements les plus sincères à notre encadrant, Monsieur HAMANI Sofiane, pour son accompagnement précieux, ses conseils avisés et sa disponibilité constante tout au long de ce projet.

Nous exprimons notre profonde reconnaissance aux membres du jury pour leur présence, leur attention et leurs remarques constructives lors de la soutenance. Leurs retours ont enrichi ce travail et contribué à son évaluation.

Nous remercions également l'ensemble des enseignants du département d'hydraulique pour la qualité de leur enseignement, leur encadrement rigoureux et leur engagement tout au long de notre formation universitaire.

Nos remerciements s'adressent également à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire, que ce soit par un soutien technique, moral ou logistique.

# *Dédicaces*

*Je dédie ce travail*

*À **ma chère famille,***

*pour votre amour inconditionnel, votre soutien moral et vos prières constantes, qui m'ont accompagné à chaque étape de ce parcours.*

*À **tous mes amis et collègues ,***

*pour votre présence, vos encouragements et les moments de répit que vous m'avez offerts au bon moment.*

*À tous ceux qui m'ont aidé à finir ce mémoire.*

*Ce travail est aussi le vôtre. Merci du fond du cœur.*

*RABHI Karim*

# *Dédicaces*

*Je dédie ce travail*

*À celle qui a patiemment attendu les fruits de mon éducation et de mon dévouement, **ma mère.***

*À celui qui a transformé les nuits en jours pour me garantir les meilleures conditions de réussite, **mon père.***

*À **mes frères**, pour votre soutien indéfectible et les moments de bonheur partagés. Vous avez toujours su me motiver et me faire sourire dans les épreuves. Merci d'avoir été mes compagnons tout au long de cette aventure.*

*À **mes amis**, qui m'ont accompagné dans les hauts comme dans les bas. Vos rires, votre solidarité et votre loyauté ont été ma force. Merci pour ces souvenirs inestimables.*

*À mon binôme, **Karim**, pour ta collaboration précieuse et ton engagement sans faille. Ce projet n'aurait pas eu la même portée sans ton apport. Travailler à tes côtés a été un réel privilège.*

*SAMET Makhlouf*

# Table des matières

Liste des figures	viii
Liste des tableaux	x
Liste des symboles utilisés	xi
Introduction générale	1
<b>1 Ecoulement à surface libre</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Ecoulement à surface libre . . . . .	3
1.3 Formule générale de l'écoulement : . . . . .	4
1.4 Paramètres géométriques des canaux . . . . .	5
1.4.1 Les différents types de canaux . . . . .	5
1.4.2 Section mouillée d'un canal . . . . .	5
1.4.3 Périmètre mouillée d'un canal . . . . .	6
1.4.4 Rayon hydraulique d'un canal . . . . .	6
1.4.5 Profondeur ou tirant d'eau . . . . .	7
1.4.6 Canal prismatique . . . . .	7
1.5 Les paramètres hydrauliques . . . . .	7
1.5.1 Le débit . . . . .	7
1.5.2 La vitesse moyenne : . . . . .	8
1.5.3 La charge hydraulique . . . . .	8
1.6 Les régimes d'écoulement . . . . .	9
1.6.1 L'écoulement laminaire : . . . . .	10

1.6.2	L'écoulement intermédiaire :	11
1.6.3	L'écoulement turbulent :	11
1.7	Contraction d'un canal :	11
1.7.1	Contraction en forme d'entonnoir :	11
1.7.2	Contraction en forme d'éventail	12
1.8	Travaux réalisés	13
1.8.1	Etude d'une contraction rectiligne symétrique	14
1.8.2	Etude de l'élargissement de Rouse	16
1.8.3	Etude d'un élargissement rectiligne symétrique	17
<b>2</b>	<b>Modélisation mathématique</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction	20
2.2	La turbulence	20
2.3	Les équations régissant les écoulements turbulents à surface libre	22
2.3.1	Equation de continuité	22
2.3.2	Conservation de la quantité de mouvement	22
2.4	L'équation de Navier –Stokes (Conservation de la quantité de mouvement)	23
2.5	Approches de résolution des équations de l'écoulement turbulent	25
2.6	Modélisation de la turbulence	28
2.6.1	Concept de viscosité turbulente : l'hypothèse de Boussinesq	28
2.6.2	Le modèle $k - \varepsilon$	31
2.6.3	Le modèle $k - \omega$	34
2.6.4	Le modèle $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport)	35
2.6.5	Le modèle RSM	38
<b>3</b>	<b>Modélisation numérique</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction	39
3.2	Méthode des différences finies	39
3.3	Méthode des éléments finis	39
3.4	Méthode des volumes finis	40
3.4.1	Équation générale de transport	41

3.4.2	Génération de maillage . . . . .	42
3.4.3	Intégration des équations sur chaque volume élémentaire . . . . .	42
3.4.4	Discrétisation du terme de diffusion . . . . .	44
3.4.5	Discrétisation du terme de convection . . . . .	45
3.4.6	Schémas de discrétisation . . . . .	46
3.4.7	Discrétisation du terme source . . . . .	48
3.4.8	Discrétisation de la variation temporelle . . . . .	49
3.5	Présentation des logiciels de simulation numérique . . . . .	51
3.5.1	Présentation du code ANSYS Fluent . . . . .	51
3.6	Algorithmes de couplage pression-vitesse . . . . .	54
3.7	Présentation du logiciel OpenFOAM . . . . .	54
3.7.1	Structure du fichier des cas d'OpenFOAM . . . . .	55
3.7.2	Répertoire "constant" . . . . .	56
3.7.3	Répertoire "système" . . . . .	57
3.7.4	Répertoire "0" . . . . .	58
3.7.5	Modélisation de la turbulence par OpenFOAM . . . . .	59
3.7.6	Modélisation de l'écoulement diphasique . . . . .	59
3.8	Conclusion . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Applications et discussion</b>	<b>60</b>
4.1	Introduction . . . . .	60
4.2	Les géométries . . . . .	60
4.2.1	Description géométrique de la transition convergente symétrique . . . . .	60
4.2.2	Description géométrique de l'élargissement de Rouse . . . . .	61
4.2.3	Description géométrique de la transition divergente symétrique . . . . .	62
4.3	Simulations réalisées . . . . .	63
4.3.1	Etude d'une contraction rectiligne symétrique . . . . .	63
4.3.2	Etude de l'élargissement de Rouse . . . . .	65
4.3.3	Etude d'un élargissement rectiligne symétrique . . . . .	67
4.4	Conclusion . . . . .	69

Conclusion générale	70
Bibliographie	71

## Table des figures

1.1	Classification des différents types d'écoulements . . . . .	4
1.2	Coupe transversale d'un cours d'eau . . . . .	5
1.3	Coupe transversale d'un cours d'eau . . . . .	5
1.4	Coupe transversal . . . . .	6
1.5	Périmètre mouille (P) . . . . .	6
1.6	Tirant d'eau . . . . .	7
1.7	Différentes grandeurs hydrauliques . . . . .	9
1.8	Écoulement laminaire . . . . .	10
1.9	Écoulement intermédiaire . . . . .	11
1.10	Écoulement turbulent . . . . .	11
1.11	Schématisation de l'écoulement dans une contraction de canal d'après (Ippen et Dawson, 1951) . . . . .	12
1.12	Contraction en forme d'éventail à l'aval d'un évacuateur de crue (Berreksi, 2012) a) Coupe longitudinale b) Vue en plan . . . . .	13
1.13	Contraction rectiligne symétrique . . . . .	14
1.14	Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans une contraction rectiligne symétrique (Berreksi, 2012) . . . . .	15
1.15	Ligne d'eau le long de la paroi latérale solide dans une contraction rectiligne symétrique. . . . .	15
1.16	Élargissement de Rouse (Berreksi, 2012) . . . . .	16
1.17	Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans l'élargissement symétrique de Rouse . . . . .	16
1.18	Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse (Berreksi, 2012) . . . . .	17
1.19	Élargissement rectiligne symétrique . . . . .	17

1.20	Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique . . . . .	18
1.21	Ligne d'eau le long de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique	18
2.1	La création de la turbulence autour d'un obstacle. . . . .	21
2.2	La cascade l'énergie de la turbulence. . . . .	21
2.3	Evolution de la vitesse fluctuante en fonction du temps. . . . .	26
2.4	Représentation du modèle SST $k - \omega$ ( <a href="#">OpenFOAM Foundation</a> ) . . . . .	37
3.1	Volume élémentaire (2D) . . . . .	40
3.2	Volume de contrôle pour un écoulement bidimensionnel . . . . .	42
3.3	Schématisation d'un volume de contrôle et les volumes adjacents . . . . .	45
3.4	Schéma de la méthode VOF . . . . .	52
3.5	Présentation de la structure d'OpenFOAM . . . . .	55
3.6	Structure des dossiers d'un cas OpenFOAM . . . . .	56
3.7	Contenu du répertoire <i>constant</i> . . . . .	57
3.8	Contenu du sous-répertoire <i>polyMesh</i> . . . . .	57
4.1	Convergence rectiligne avec OpenFoam . . . . .	60
4.2	Représentation de maillage de convergence rectiligne avec fluent . . . . .	61
4.3	élargissement de Rouse avec OpenFoam . . . . .	61
4.4	Représentation de maillage,Elargissement de Rouse avec fluent . . . . .	62
4.5	convergence rectiligne avec OpenFoam . . . . .	62
4.6	Représentation de maillage avec fluent . . . . .	63
4.7	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de la paroi dans une convergence . . . . .	64
4.8	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une convergence . . . . .	65
4.9	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de la paroi dans l'élargissement de rouse .	66
4.10	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans l'élargissement de rouse	67
4.11	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une divergence . . . . .	68
4.12	Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une divergence . . . . .	69
4.13	Nombre de froude Froude au niveau de symétrie . . . . .	69

## Liste des tableaux

2.1	Rapports $\ell_m/\delta$ pour différents types d'écoulements . . . . .	29
2.2	différents modèles à deux équations . . . . .	31
3.1	Tableau récapitulatif de la valeur de $\phi$ et $S_\phi$ dans l'équation de transport .	42
3.2	Tableau récapitulatif des schémas de convection . . . . .	48
3.3	Les schémas de discrétisation selon la variation de $\theta$ . . . . .	49
4.1	Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de la convergence rectiligne symétrique . . . . .	61
4.2	Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de l'élargissement de Rouse . . . . .	62
4.3	Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de la divergence rectiligne symétrique . . . . .	63

## Liste des symboles utilisés

### Notations

$A$	Section mouillée.
$F$	Flux massique.
$Fr$	Nombre de Froude.
$g$	Accélération de la pesanteur.
$J$	Perte de charge (ou pente d'énergie).
$k$	Énergie cinétique turbulente.
$\ell$	Longueur de mélange (mixing length).
$P$	Pression ou point central d'un volume de contrôle.
$\phi$	Propriété scalaire transportée.
$\bar{S}$	Source moyenne de la propriété $\phi$ dans le volume de contrôle.
$S_p$	Source ponctuelle au nœud $P$ du volume de contrôle.
$S_u$	Source liée aux conditions aux limites.
$S_\phi$	Source de la propriété $\phi$ .
$t$	Temps.
$u, v$	Composantes de vitesse (selon $x$ et $y$ ).
$\vec{V}$	Vecteur vitesse.
$Y$	Tirant d'eau (profondeur).
$Z$	Cote du fond (altitude).
$\alpha$	Coefficient de non-uniformité des vitesses.
$\delta$	Épaisseur caractéristique de l'écoulement.
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker.
$\mu_t$	Viscosité turbulente dynamique.
$\nu_t$	Viscosité turbulente.
$\omega$	Fréquence spécifique de turbulence.
$\rho$	Densité du fluide.

## **Abréviations**

CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
MEF	Méthode des éléments finis
MVF	Méthode des volumes finis
MDF	Méthode des différences finies
OF	OpenFOAM

# Introduction générale

L'étude de l'écoulement de l'eau dans des canaux à surface libre revêt un grand intérêt dans le domaine de l'hydraulique, en particulier pour la conception, le dimensionnement et l'optimisation des ouvrages à surface libre. Parmi les éléments influençant fortement ces écoulements, les transitions géométriques, telles que les contractions et les élargissements qui jouent un rôle déterminant. Ces variations de section modifient la dynamique du fluide, entraînant des variations locales de la vitesse, de la hauteur d'eau et de la pression. La compréhension et la modélisation de ces effets sont essentielles pour garantir la performance hydraulique des structures et prévenir les désordres hydrauliques.

Avec l'évolution des technologies et l'accès à des ordinateurs puissants, la modélisation numérique est devenue un outil essentiel pour étudier les écoulements à surface libre. Elle permet de simuler avec précision des situations complexes, tout en limitant les coûts et les difficultés des essais physiques. Cette méthode est particulièrement utile pour analyser l'effet des changements de forme du canal, comme les contractions et les élargissements, sur le comportement de l'eau.

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons à l'analyse numérique des écoulements à surface libre, en particulier dans des configurations présentant des transitions géométriques. Nous procéderons à une étude comparative entre les résultats obtenus par simulation numérique et ceux disponibles dans la littérature, qu'ils soient expérimentaux ou numériques. Ce présent travail est organisé en quatre chapitres.

Dans le chapitre 1, nous présenterons les généralités sur les écoulements à surface libre, en décrivant leurs principales caractéristiques ainsi que les différentes formes de contractions hydrauliques observées dans les canaux. Ce chapitre se terminera par une revue de quelques travaux réalisés dans ce domaine.

Dans le chapitre 2, nous nous intéresserons au mouvement du fluide et aux équations fondamentales qui le régissent. Nous introduirons la notion de turbulence, puis nous exposerons les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ainsi que

l'équation de Navier-Stokes. Ensuite, nous aborderons les modèles de turbulence fondés sur la viscosité turbulente.

Dans le chapitre 3, nous traiterons les méthodes numériques nécessaires à la résolution des équations, en raison de leur complexité et de leur nature non linéaire.

Enfin, dans le chapitre 4, nous analyserons les profils de la ligne d'eau dans différentes configurations de transitions hydrauliques. Nous étudierons leur évolution le long de l'axe de symétrie et des parois solides, puis nous comparerons les résultats numériques obtenus aux données expérimentales disponibles ainsi qu'à d'autres résultats issus de la littérature.

# Écoulement à surface libre

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par des généralités sur les écoulements à surface libre et ces caractéristiques ; Ensuite, nous avons définis les contractions subis sur les canaux ; Enfin, nous avons citée quelques travaux réalisées dans ce type d'écoulement.

## 1.2 Écoulement à surface libre

Les écoulements à surface libre sont des écoulements dont la surface est en contact direct avec l'atmosphère. Comme les écoulements en charge, ils peuvent être permanents (stationnaires) ou non permanents (transitoires).

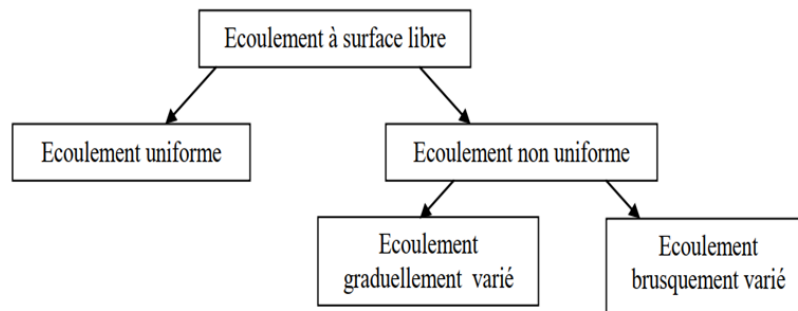
En réalité, les écoulements strictement permanents n'existent pas, mais cette hypothèse est souvent retenue pour deux raisons principales :

1. Variations lentes : Dans certains cas, les conditions géométriques et hydrauliques évoluent suffisamment lentement pour que les variations temporelles puissent être négligées.
2. Simplification des analyses : Cette approximation permet aux ingénieurs de simplifier les calculs, facilitant ainsi la conception et la réhabilitation des infrastructures hydrauliques (canaux, rivières aménagées, etc.)([Habbaz, 2025](#)).

Par ailleurs, un écoulement à surface libre – qu'il soit uniforme (vitesse et profondeur constantes) ou graduellement varié (changement progressif) ; peut être caractérisé par son régime :

- Fluvial (subcritique) : Profondeur importante, vitesse faible (écoulement lent).
- Critique : Transition où le nombre de Froude  $Fr = 1$
- Torrentiel (supercritique) : Profondeur faible, vitesse élevée (écoulement rapide).

La figure (1.1) résume tous les types d'écoulements à surface libre soit uniforme ou non uniforme ;



**Figure 1.1** : Classification des différents types d'écoulements

### 1.3 Formule générale de l'écoulement :

Partant du même principe que les écoulements en charge, l'équation générale d'un écoulement à surface libre en régime uniforme s'écrit sous la forme suivante :

$$Z_1 + Y_1 + \alpha \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + Y_2 + \alpha \frac{v_2^2}{2g} + J \quad (1.1)$$

Avec :

$Z$  : cote du fond (altitude)

$Y$  : tirant d'eau (hauteur de la lame d'eau)

$v$  : vitesse moyenne de l'écoulement

$J$  : perte de charge (ou pente de l'énergie) entre les sections 1 et 2

$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$  : Coefficient de la non-uniformité de la répartition des vitesses, il est pris en général égal à 1 pour les écoulements turbulents ;

Pour un écoulement uniforme la vitesse d'écoulement ne change pas d'une section à une autre alors on peut admettre que  $v_1 = v_2$  ;

## 1.4 Paramètres géométriques des canaux

### 1.4.1 Les différents types de canaux

#### 1.4.1.1 Les canaux naturels

Les canaux naturels, généralement constitués des cours d'eau présents au sein des bassins versants, se manifestent sous diverses formes telles que les ruisselets, ruisseaux, torrents, ravins, rivières, fleuves et estuaires (CoursGCChap5). La section transversale de ces écoulements reste indéterminée. La coupe transversale d'un cours d'eau est illustrée dans la figure suivante :

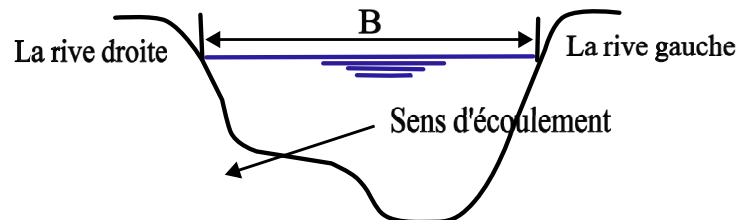


Figure 1.2 : Coupe transversale d'un cours d'eau

#### 1.4.1.2 Les canaux artificiels

Un canal est qualifié d'artificiel lorsque les paramètres de la section géométrique de l'écoulement sont spécifiquement définis. Parmi les différentes formes géométriques possibles, on rencontre principalement les sections trapézoïdales, rectangulaires, triangulaire, circulaire et parfois ovale. La figure (1.3) illustre quelques exemples de formes de canaux artificiels.

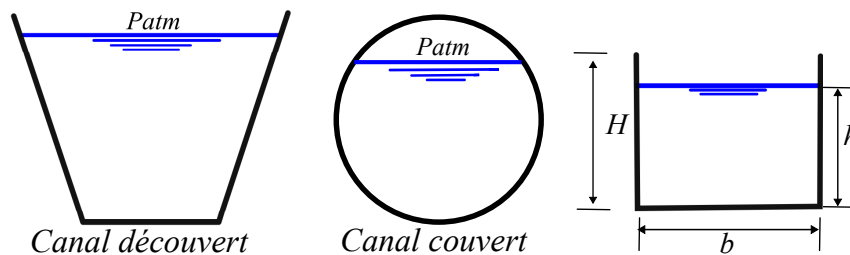


Figure 1.3 : Coupe transversale d'un cours d'eau

### 1.4.2 Section mouillée d'un canal

La section mouillée, notée ici (A), d'un canal correspond à la section perpendiculaire à la direction de l'écoulement, délimitée par la surface libre et les parois du canal.

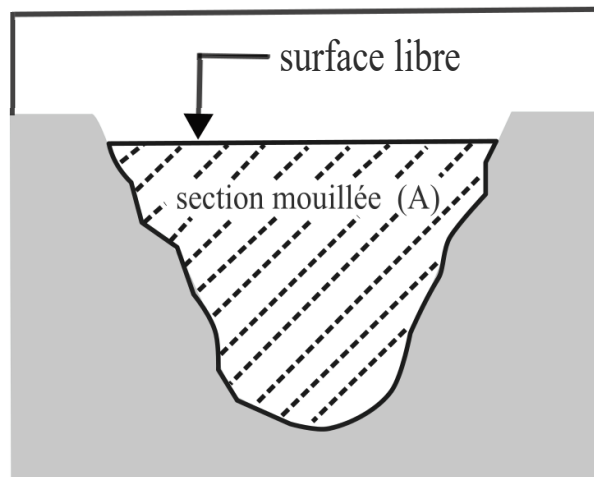


Figure 1.4 : Coupe transversal

### 1.4.3 Périmètre mouillée d'un canal

Le périmètre mouillé ( $P$ ) d'un canal comprend uniquement le contact entre l'eau et les parois du canal. Dans le cas d'un cours d'eau naturel, chaque surface a son périmètre mouillé propre à elle.

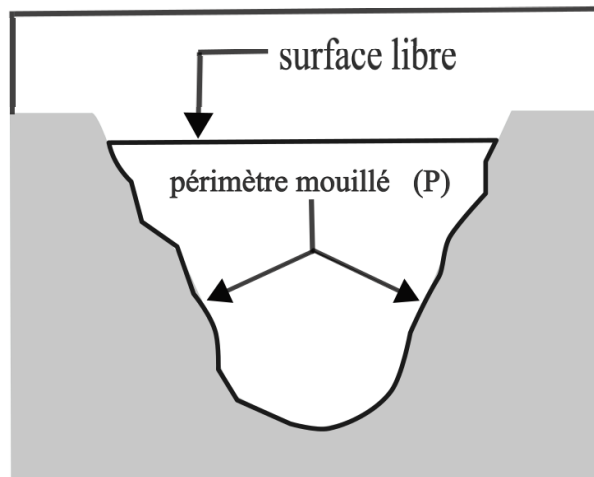


Figure 1.5 : Périmètre mouillé ( $P$ )

### 1.4.4 Rayon hydraulique d'un canal

On appelle rayon hydraulique  $R_H$  le quotient de l'aire de la section mouillée  $A$  et du périmètre mouillé  $P$  :

$$R_H = \frac{A}{P} \quad (1.2)$$

### 1.4.5 Profondeur ou tirant d'eau

Le tirant d'eau correspond à la profondeur maximale depuis la surface libre dans une section donnée du cours d'eau. il est désigné dans notre  $Z_e$

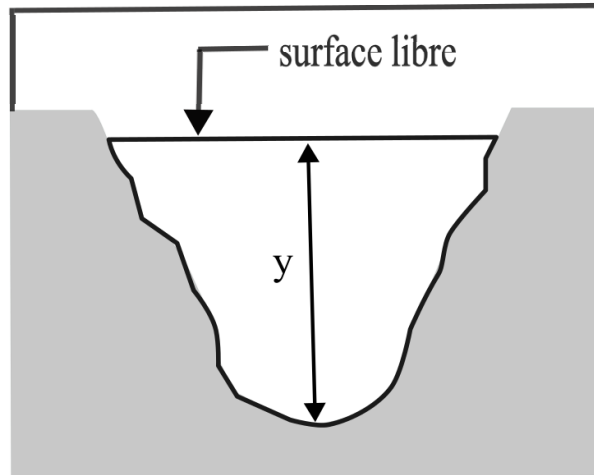


Figure 1.6 : Tirant d'eau

### 1.4.6 Canal prismatique

Un canal prismatique est un canal dont la section transversale demeure constante, et dont la pente longitudinale ainsi que la rugosité sont uniformes, bien que la hauteur puisse varier.

## 1.5 Les paramètres hydrauliques

### 1.5.1 Le débit

Le débit hydraulique désigne le volume de liquide qui traverse une section donnée d'un conduit ou d'un cours d'eau sur une période déterminée, généralement exprimé en mètres cubes par seconde ( $m^3/s$ ). Ce paramètre est crucial pour l'analyse et la gestion des systèmes hydrauliques, tels que les barrages et les réseaux d'irrigation. Le calcul du débit s'effectue fréquemment à l'aide de la relation :

$$Q = \frac{V}{t} \quad (1.3)$$

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (1.4)$$

Ou :

$Q$  : représente le débit ( $m^3/s$ ).

$t$  : temps en ( $s$ ).

$V$  : volume en ( $m^3$ ).

### 1.5.2 La vitesse moyenne :

La vitesse désigne la distance parcourue par un mobile par unité de temps. En hydraulique, l'attention se porte principalement sur la vitesse moyenne de la masse de fluide dans la direction de l'écoulement. Cette vitesse ( $U$ ) est définie comme le rapport entre le débit moyen ( $Q$ ) et la section de l'écoulement ( $A$ ). Soit :

$$U = \frac{Q}{A} \quad (1.5)$$

### 1.5.3 La charge hydraulique

La charge hydraulique constitue une notion essentielle pour l'étude des écoulements souterrains, qu'ils soient sous pression ou à surface libre. Dans ce contexte, l'unité de charge est le mètre. Toutefois, la charge hydraulique peut également être interprétée comme une forme d'énergie, en la multipliant par  $\rho \cdot g$ , où  $\rho$  représente la masse volumique de l'eau et  $g$  l'accélération due à la gravité. Cette énergie se compose de trois termes : l'énergie de pression, l'énergie potentielle gravitationnelle et l'énergie cinétique.

La charge hydraulique d'un écoulement s'exprime traditionnellement en hauteur d'eau de la façon suivante :

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z \quad (1.6)$$

Avec :

$H$  : charge hydraulique ( $m$ );

$u$  : vitesse ( $m/s$ );

$p$  : pression ( $Pa$  ou  $N/m^2$ ) (nota : en général, on ne tient pas compte de la pression atmosphérique et on raisonne en pression relative en considérant une pression nulle en

surface);

$\rho$  : masse volumique ( $kg/m^3$ );

$g$  : accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ );

$z$  : altitude ( $m$ ).

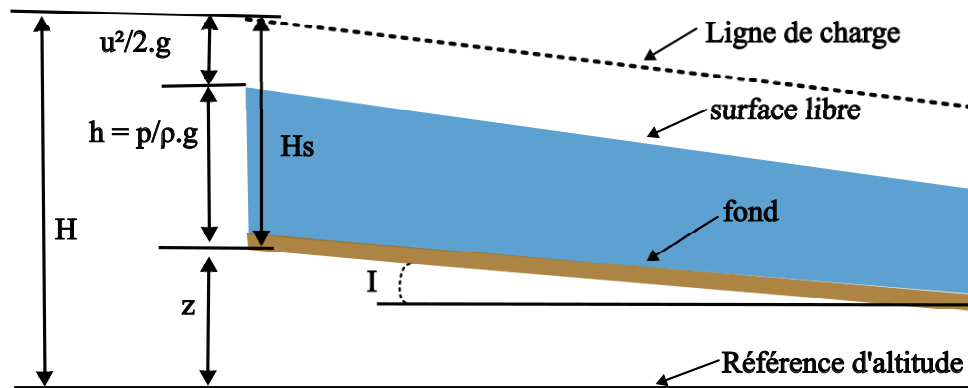


Figure 1.7 : Différentes grandeurs hydrauliques

Dans le cas d'une répartition hydrostatique de la pression, le terme de pression  $\frac{p}{\rho \cdot g}$  est simplement égal à la hauteur d'eau  $h$ .

On parle de charge spécifique si la charge hydraulique est exprimée par rapport au rayon de la conduite.

Le terme  $\frac{u^2}{2 \cdot g}$  représente la charge dynamique, les autres termes (d'énergie potentielle et de pression) représentent la charge piézométrique.

En l'absence de dissipation, la charge spécifique reste constante, et l'écoulement repose sur la transformation continue de l'énergie potentielle liée à la gravité (différence d'altitude) en énergie cinétique ou en pression. En présence de dissipation, la diminution de la charge entre deux points successifs de l'écoulement est désignée sous le terme de perte de charge. Le long d'un tronçon de conduite ou d'un canal, l'évolution de la charge hydraulique peut être représentée par la courbe de la ligne d'énergie.

## 1.6 Les régimes d'écoulement

Par référence aux expériences menées par Reynolds (1883) sur l'écoulement d'un fluide dans une conduite rectiligne, il a été mis en évidence de l'existence de deux principaux régimes d'écoulement à savoir laminaire et turbulent. Entre ces deux régimes on trouve

le régime de transition.

En utilisant des fluides de viscosités différentes et en faisant varier le débit ainsi que le diamètre de la canalisation, Reynolds a démontré que le critère permettant de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension, connu sous le nom de nombre de Reynolds, défini par :

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (1.7)$$

avec :

$\rho$  = masse volumique du fluide  $kg/m^3$

$v$  = vitesse moyenne  $m/s$

$D$  = diamètre de la conduite en  $m$

$\eta$  = viscosité dynamique du fluide

$\nu$  = viscosité cinématique ( $\nu = \eta \cdot \rho$ ) en  $m^2/s$

L'expérience montre que :

- si  $Re < 2000$  le régime est LAMINAIRE
- si  $2000 < Re < 10^5$  le régime est intermédiaire ou de transition.
- si  $Re > 10^5$  le régime est dit TURBULENT

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se faisant progressivement.

### 1.6.1 L'écoulement laminaire :

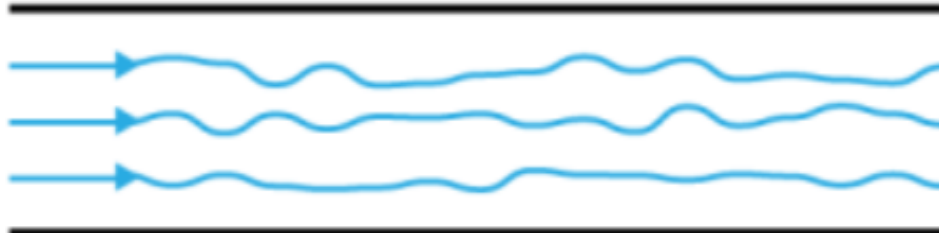
écoulement rectiligne, le fluide s'écoule en filets parallèles à l'axe de la conduite, sans mélange.



**Figure 1.8 :** Écoulement laminaire

### 1.6.2 L'écoulement intermédiaire :

l'écoulement est plus ou moins rectiligne, avec un peu de mélange (petits tourbillons).



**Figure 1.9 :** Écoulement intermédiaire

### 1.6.3 L'écoulement turbulent :

l'écoulement se fait avec de grands tourbillons, avec un mélange important.



**Figure 1.10 :** Écoulement turbulent

## 1.7 Contraction d'un canal :

La contraction se produit dans les zones où la pente du radier est accentuée, la rugosité est réduite et le débit augmente.

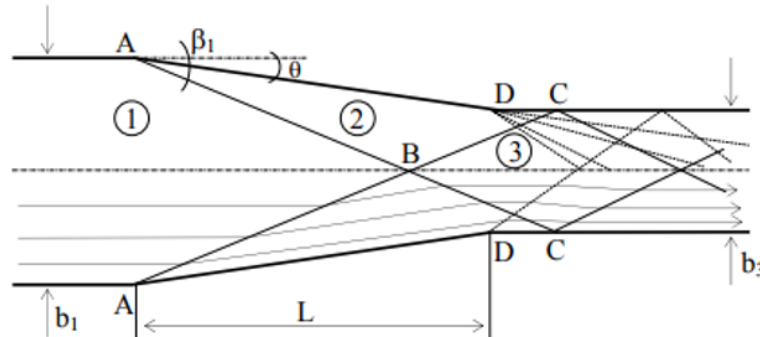
Une contraction bien conçue se distingue par un écoulement uniforme dans la section rétrécie du canal. À défaut, des ondes transversales peuvent se former, se manifestant à distance en aval, ce qui peut nécessiter des hauteurs de parois considérables pour contenir l'écoulement.

Il existe plusieurs types de contractions, notamment celles en forme d'entonnoir et celles en forme d'éventail ([Berreksi, 2012](#)).

### 1.7.1 Contraction en forme d'entonnoir :

On définit un angle de contraction  $\theta$ .

Soit la contraction rectiligne symétrique :  $b_1$  et  $b_3$  sont respectivement les largeurs du canal d'entrée et de sortie ( $b_1 > b_3$ ).



**Figure 1.11** : Schématisation de l'écoulement dans une contraction de canal d'après (Ippen et Dawson, 1951)

La contraction du canal entraîne la naissance des ondes positives à l'entrée du canal rétrécie qui se rencontrent au niveau de l'axe de symétrie du canal, et pénètrent par réflexion dans le canal aval rectangulaire.

La contraction du canal entraîne au même moment, la naissance des ondes négatives juste à la sortie du canal rétrécie et à l'entrée du canal aval rectangulaire.

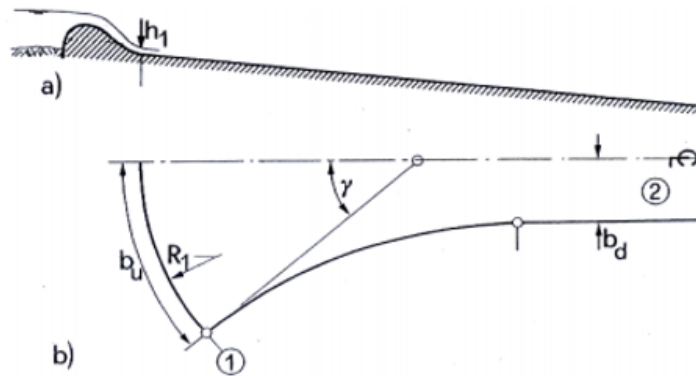
L'interférence entre les ondes positives et négatives donne naissance à des ondes croisées qui peuvent persister loin dans le canal aval entraînant dans cette zone de grandes instabilités.

### 1.7.2 Contraction en forme d'éventail

La courbure de l'éventail est dirigée dans le sens de l'écoulement, ce qui en fait une conception particulièrement adaptée aux évacuateurs de crue dotés d'un seuil arqué.

Selon les quelques études disponibles dans ce domaine, une surface minimale a été attribuée aux contractions de canaux en forme d'éventail. La section d'entrée, située en aval du seuil de l'évacuateur, possède un rayon  $R_1$  (figure 1.12 )

Les principales caractéristiques de cette contraction incluent une prise d'eau en éventail, un canal convergent et un coursier aval de forme prismatique. Le rapport de convergence est défini par  $m = \frac{b_d}{b_u}$ , tandis que  $\gamma$  représente l'angle au centre, exprimé systématiquement en radians. Par ailleurs, le radier situé en aval de la zone d'entrée est une surface plane, généralement caractérisée par une pente longitudinale constante.



**Figure 1.12 :** Contraction en forme d'éventail à l'aval d'un évacuateur de crue (Berreksi, 2012)  
 a) Coupe longitudinale  
 b) Vue en plan

Où,  $b_u$  : L'arc de l'éventail et  $b_d$  : La largeur du canal rectangulaire

## 1.8 Travaux réalisés

Les études portant sur les écoulements à surface libre en présence d'une singularité analysent généralement les phénomènes hydrodynamiques complexes apparaissant à leur voisinage, tels que les fluctuations de pression, les turbulences et les déformations de la surface libre. Une singularité, dans ce contexte, peut correspondre à une modification soudaine de la géométrie du canal ou du champ d'écoulement (obstacle, rétrécissement, élargissement ou changement de pente), entraînant ainsi des effets marqués sur la dynamique du fluide, comme des perturbations localisées, des tourbillons ou des zones de recirculation.

Les travaux de recherche dans ce champ d'étude visent à approfondir la compréhension de l'impact des singularités sur la dynamique des écoulements, particulièrement en ce qui concerne les variations de débit, les champs de vitesse et les gradients de pression. Pour y parvenir, les chercheurs combinent des méthodes analytiques, des expérimentations en laboratoire et des simulations numériques afin de caractériser et d'anticiper les perturbations induites par ces singularités dans les écoulements à surface libre. Ces recherches trouvent des applications concrètes dans l'analyse des canaux à ciel ouvert, des déversoirs de crues et des conduites hydrauliques sous pression.

Parmi les études les plus marquantes figurent celles analysant l'influence des singularités hydrauliques, notamment les modifications géométriques, les changements de pente brusques ou les zones de recirculation au niveau d'ouvrages tels que les déversoirs, les siphons ou les canaux à géométrie complexe. Pour explorer ces phénomènes, les chercheurs

emploient fréquemment des méthodes comme l'étude de la couche limite, la simulation des turbulences ou la modélisation des ondes de choc et des déformations de surface.

Une étude notable est celle de Berreksi (2012), qui a analysé les profils hydrauliques le long de l'axe central et des parois latérales dans différents types de transitions : une contraction rectiligne symétrique, un élargissement symétrique de type Rouse et un élargissement rectiligne symétrique. Berreksi (2012) a utilisé le schéma numérique explicite de MacCormack. Ces configurations avaient auparavant fait l'objet d'études expérimentales par Coles et Shintaku (1943) (citant les travaux de (Ippen et Dawson, 1951), ainsi que (Bhallamudi et Chaudhry, 1992)) et de modélisations numériques par Bhallamudi et Chaudhry (1992).

### 1.8.1 Étude d'une contraction rectiligne symétrique

Cette application a pour objectif d'étudier l'écoulement torrentiel à travers une contraction rectiligne symétrique, illustrée par la figure ci-dessous.

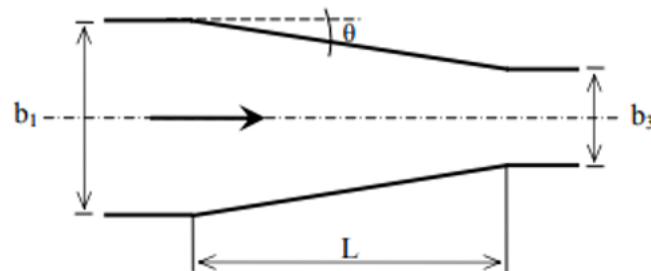
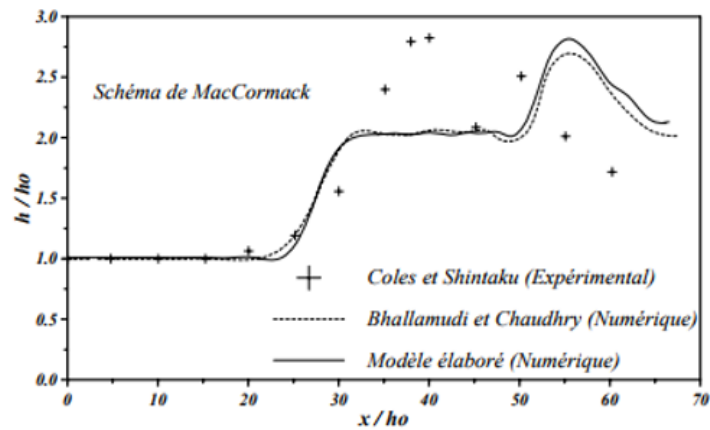
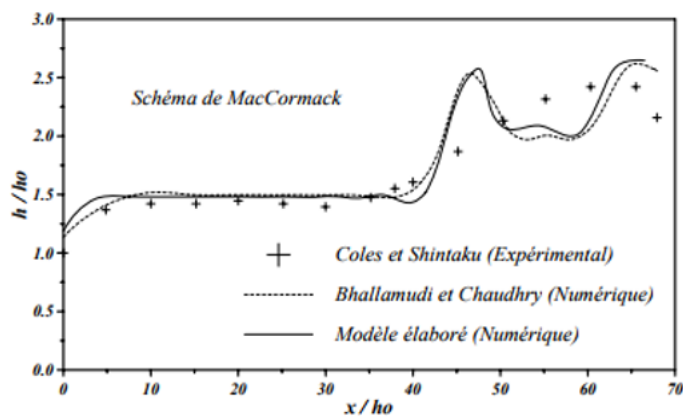


Figure 1.13 : Contraction rectiligne symétrique

La mise en œuvre de la méthode des différences finies en utilisant le schéma de MacCormack sous sa forme explicite a permis de prédire l'évolution de la surface libre, aussi bien dans la section médiane que près des parois, comme en témoignent les courbes reportées aux figures 1.14 (profil axial) et 1.15 (profil pariétal).



**Figure 1.14** : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans une contraction rectiligne symétrique (Berreksi, 2012)



**Figure 1.15** : Ligne d'eau le long de la paroi latérale solide dans une contraction rectiligne symétrique.

Les résultats issus révèlent : une surélévation progressive puis stabilisation axiale (Fig.1.16), des ondes stationnaires pariétales maximales près de la transition (Fig. 1.17). Le schéma de MacCormack capture efficacement les ondes transversales générées par la contraction, en accord avec les résultats expérimentaux de la littérature.

### 1.8.2 Etude de l'élargissement de Rouse

Dans l'élargissement typique de Rouse sous forme d'une courbe douce, la forme des parois latérales est donnée par l'équation suivante :

$$b(x) = \frac{b_1}{2} \left[ \left( \frac{x}{b_1 F_1} \right)^{1.5} + 1 \right]$$

- $b_1$  : la largeur de canal
- $F_1$  : nombre de Froude incident
- $x$  : la longueur de canal

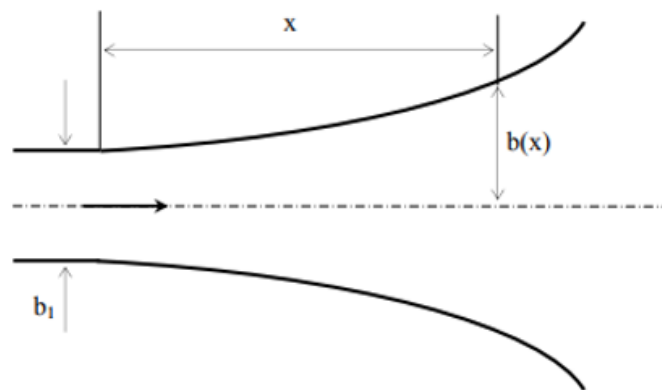


Figure 1.16 : Elargissement de Rouse (Berreksi, 2012)

Le schéma explicite de MacCormack a permis d'obtenir les profils de la ligne d'eau le long de l'axe et de la paroi, présentés respectivement aux figures.

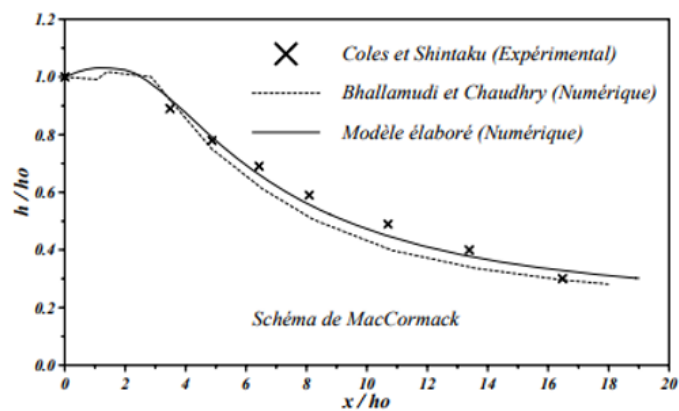
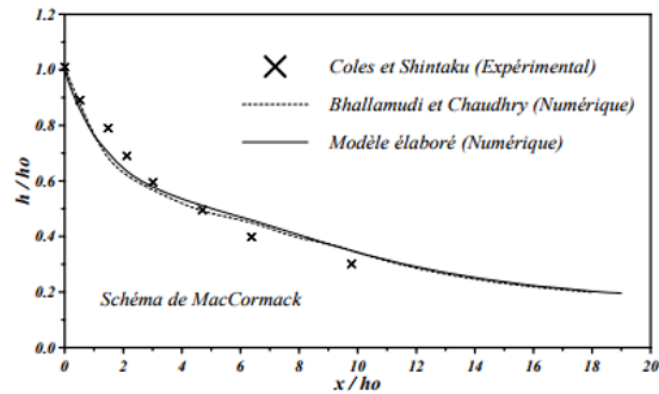


Figure 1.17 : Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans l'élargissement symétrique de Rouse



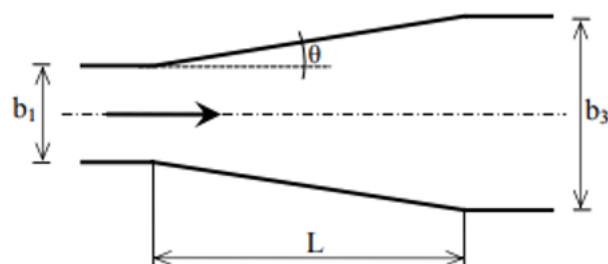
**Figure 1.18** : Ligne d'eau le long de la paroi dans l'élargissement symétrique de Rouse (Berreksi, 2012)

Les résultats du profil axial (Fig. 1.17) montrent une diminution régulière de la profondeur sans perturbations de l'écoulement. Le long de la paroi (Fig. 1.18), la stabilité de l'écoulement confirme l'efficacité du profil de Rouse pour limiter les perturbations.

L'élargissement de Rouse, conçu pour atténuer les ondes transversales, est bien simulé par le schéma, avec une bonne adéquation aux données théoriques.

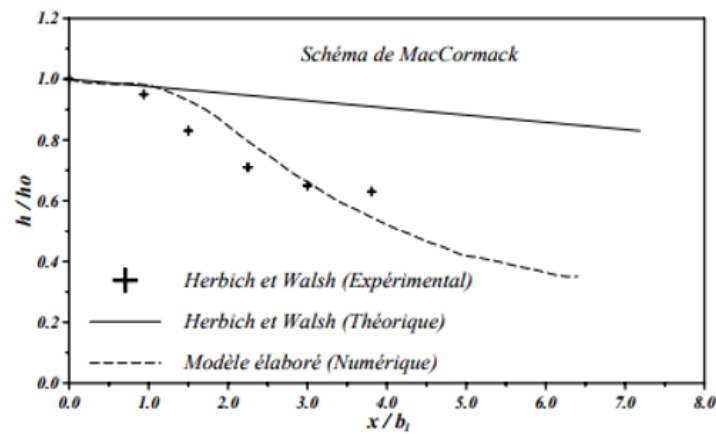
### 1.8.3 Etude d'un élargissement rectiligne symétrique

Cette troisième application a pour objectif d'analyser un écoulement torrentiel à travers un élargissement rectiligne symétrique de section transversale rectangulaire.

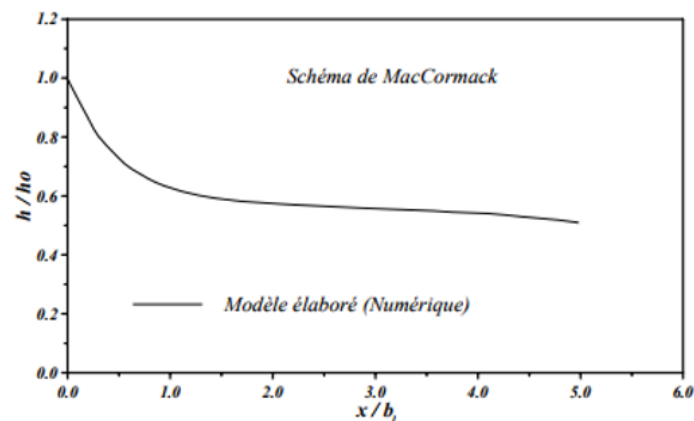


**Figure 1.19** : Élargissement rectiligne symétrique

Les résultats de simulation issus des travaux de Berreksi (2012) sont comparés aux autres résultats comme illustré dans la figure ci-dessous.



**Figure 1.20 :** Ligne d'eau le long de l'axe de symétrie dans un élargissement rectiligne symétrique



**Figure 1.21 :** Ligne d'eau le long de la paroi dans un élargissement rectiligne symétrique

Au niveau du profil axial (Figure 1.20), il a été observé qu'une chute soudaine du tirant d'eau accompagnée d'oscillations. Ceci est le résultat du décollement de l'écoulement. Au niveau de la paroi latérale (Figure 1.21).

Une présence d'ondes transversales d'amplitude importante a été observée provoquant une instabilité caractéristique pour ce type configuration de transition en écoulement à surface libre (Berreksi, 2012).

## **Conclusion**

Ce chapitre a permis d'introduire les écoulements à surface libre, en soulignant leurs caractéristiques physiques. Nous avons également défini les effets des contractions géométriques dans les canaux, qui modifient localement les profils de vitesse et de profondeur, et recensé des travaux clés ayant exploré ces phénomènes. Ces dernières, intrinsèquement non linéaires et souvent turbulents, soulignent la nécessité d'outils de modélisation robustes pour prédire et optimiser les écoulements réels. C'est précisément l'objet du chapitre 2, qui s'appuie sur ces bases pour présenter les modèles mathématiques capables de décrire ces dynamiques.

## Modélisation mathématique

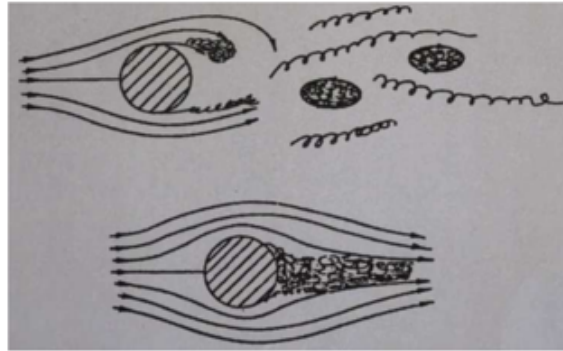
### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du mouvement du fluide ainsi qu'à l'établissement des équations fondamentales qui le régissent. Nous débuterons par la définition de la turbulence, Par la suite, Nous allons présenter les équations décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien, à travers l'équation de conservation de la masse, l'équation de la quantité de mouvement et l'équation de Navier-Stokes. Enfin, nous aborderons les différentes approches de modélisation de la turbulence, en mettant l'accent sur les modèles basés sur la viscosité turbulente.

### 2.2 La turbulence

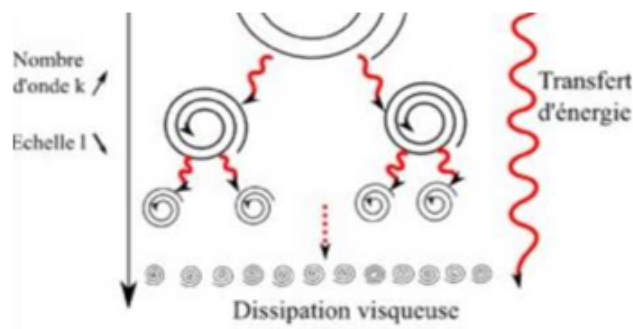
La turbulence se caractérise par un mouvement tourbillonnaire complexe, marqué par une large gamme de tailles de structures tourbillonnaires et de vitesses de rotation ([Vazquez, 2006](#)). Ce mouvement, intrinsèquement rotationnel, peut être interprété comme un enchevêtrement de structures tourbillonnaires tridimensionnelles, dont les vecteurs de rotation sont orientés dans toutes les directions et varient fortement dans le temps, même dans un régime considéré comme stationnaire.

L'écart entre les plus grandes et les plus petites structures tourbillonnaires tend à croître avec l'intensité de la turbulence. Ces structures peuvent être perçues comme des entités dynamiques qui s'étirent mutuellement. Ce mécanisme d'étirement des filets tourbillonnaires constitue une caractéristique fondamentale du phénomène turbulent, favorisant un transfert progressif d'énergie vers des échelles de plus en plus petites. À ces échelles fines, les effets visqueux deviennent prépondérants et entraînent la dissipation de l'énergie cinétique : ce processus est connu sous le nom de cascade d'énergie.



**Figure 2.1** : La création de la turbulence autour d'un obstacle.

Les grandes structures tourbillonnaires sont soumises à des instabilités hydrodynamiques qui conduisent à leur fragmentation en structures plus petites. Leur maintien dans l'écoulement est assuré par l'apport d'énergie provenant de l'écoulement moyen, un mécanisme souvent désigné sous le terme de forçage. Ces grandes structures se caractérisent par un nombre de Reynolds élevé, ce qui les rend particulièrement sensibles à l'instabilité. Le transfert d'énergie des grandes vers les petites structures correspond au processus de cascade d'énergie. Au cours de ce mécanisme, l'énergie cinétique est redistribuée vers des échelles de plus en plus fines, jusqu'à ce que la taille des structures soit suffisamment réduite pour que les effets visqueux dominent. À ce stade, l'énergie est dissipée sous forme de chaleur, marquant l'arrêt du processus de cascade. (Marty, 2012)



**Figure 2.2** : La cascade l'énergie de la turbulence.

## 2.3 Les équations régissant les écoulements turbulents à surface libre

L'écoulement d'un fluide quelconque est régi par les équations de la conservation de la masse, dite aussi équation de continuité, et l'équation de la quantité de mouvement.

### 2.3.1 Equation de continuité

La forme générale de cette équation est déduite du bilan de masse appliquée sur un volume de contrôle infinitésimal. Elle est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \mp S \quad (2.1)$$

Et en absence d'apport et de perte cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2)$$

Cette équation garantit que la masse du fluide est conservée. En d'autres termes, la divergence de la vitesse (le taux de changement de volume) est nulle pour un fluide incompressible.

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

### 2.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

D'une manière générale l'équation de conservation de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme indicielle comme suit :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i)}_A = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x_i}}_B + \underbrace{\rho g_{x_i}}_C + \underbrace{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}_D \quad (2.4)$$

Cette équation exprime la conservation de la quantité de mouvement du fluide sous l'effet gradients de vitesse.

avec :

A : la variation de la quantité de mouvement par unité de volume.

B : forces associées à la pression par unité de surface.

$C$  : forces volumiques par unité de volume.

$D$  : contraintes visqueuses par unité de surface

$u_i$  : composante de la vitesse suivant la direction  $i$ .

$g_{xi}$  : composante de force de volume par unité de volume due à la gravité

$P$  : la pression

$\rho$  : la masse volumique du fluide.

$\tau_{ij}$  : tenseur de contraintes visqueuses, et  $i$  et  $j$  des indices ( $i, j=1, 2, 3$ ).

## 2.4 L'équation de Navier –Stokes (Conservation de la quantité de mouvement)

Les équations de Navier-Stokes résultent de la combinaison des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement appliquées à un fluide newtonien.

Pour ce type de fluide, les contraintes visqueuses  $\tau_{ij}$  sont liées au taux de déformation locale selon la relation suivante :

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div}(\mathbf{V}) \quad (2.5)$$

avec

- $\mathbf{V}$  : Vecteur vitesse d'écoulement de composante  $u_i$ .
- $\mu$  : Viscosité dynamique.
- $\lambda$  : Viscosité associée à la déformation volumétrique.
- $\operatorname{div}(\mathbf{V})$  : Elle est prise égale à  $-\frac{2}{3}\mu$  dans certains cas particuliers.
- $\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker, où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- $S_{ij}$  : Tenseur des taux de déformation, exprimé par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Ainsi, l'expression 2.5 devient :

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad (2.7)$$

En intégrant ces relations dans les lois de conservation, on obtient la forme indiciale des équations de Navier-Stokes :

Équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i) = -\frac{\partial(P)}{\partial x_i} + \rho g_{x_i} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad (2.9)$$

pour un fluide incompressible, la divergence du champ de vitesse est nulle :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial(P)}{\partial x_i} + \rho g_{x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.11)$$

L'équation de quantité de mouvement se simplifie alors :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P)}{\partial x_i} + g_{x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \quad (2.13)$$

## 2.5 Approches de résolution des équations de l'écoulement turbulent

**a. La résolution directe :** Les équations de Navier - Stokes traduisent complètement les écoulements à surface libre turbulents. Cependant, malgré les récents progrès réalisés au niveau technologique, leur résolution numérique complète pose problème.

En effet, les tourbillons peuvent être de l'ordre du millimètre alors que le domaine peut s'étendre sur des mètres et même des kilomètres. Une grille assez fine pour une description assez précise de toutes les échelles de la turbulence exigerait un nombre considérable de cellules (Chassaing, 2000) . Or, la capacité de stockage et la vitesse des ordinateurs demeurent à l'heure actuelle insuffisantes.

Un autre inconvénient de cette approche est le fait que la grande finesse de la structure de la turbulence exige la prescription de données initiales et aux limites à un niveau important, ce qui n'est pas sans poser parfois de sérieuses difficultés.

Afin de passer ce type de difficultés, deux solutions sont utilisées : l'approche statistique et la simulation des grandes structures turbulentes(Lipeme Kouyi, 2004).

**b. Approche à grande échelle :** En plus de la DNS, il y a une autre approche intéressante, la SGE (la simulation à grande échelle), qui s'appuie sur la distinction des structures des tourbillons selon leur taille, en introduisant une fonction de filtrage aux équations de Navier-Stokes. La gamme d'application de la LES correspond à un nombre de Reynolds s'élevant à  $10^4$ . C'est une limite très forte qui exclut l'écoulement dans des canaux naturels ou artificiels (Chassaing, 2000).

**c. L'approche statistique :** Les écoulements turbulents sont le plus souvent modélisés à l'aide des équations de Navier-Stokes moyennées de Reynolds (RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes). Une approche alternative repose sur l'utilisation de moyennes pour représenter les effets des fluctuations inhérentes à l'agitation turbulente. Parmi les méthodes les plus couramment employées, l'approche statistique occupe une place centrale. Elle consiste à caractériser l'écoulement turbulent à partir des grandeurs moyennes telles que la vitesse, la pression ou la température, dont les distributions reflètent le comportement global de l'écoulement. Cette démarche implique la décomposition de Reynolds, qui sépare chaque variable en une composante moyenne et une composante fluctuante. La partie fluctuante traduit les écarts instantanés et locaux entre les valeurs réelles et leurs moyennes respectives, et permet ainsi d'analyser l'influence des phénomènes turbulents sur le comportement global de l'écoulement (Boudiaf, 2009).

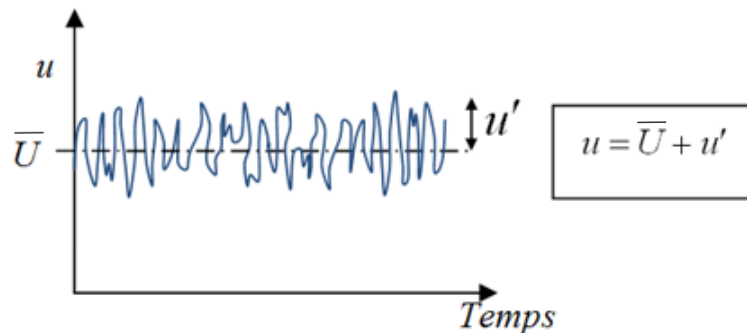
$$U = u' + \bar{U}$$

$$P = P' + \bar{P}$$

Avec :

- $\bar{U}$  : La vitesse moyenne
- $u'$  : La vitesse fluctuante
- $\bar{P}$  : La pression moyenne
- $P'$  : La pression fluctuante

La vitesse variable moyenne ( $\bar{U}$  ou  $\bar{P}$ ) est obtenue par une moyenne de la mesure au niveau d'un point donné de l'écoulement, par contre la variable fluctuant ( $u'$  ou  $p'$ ) représente la différence entre la variable instantanée et sa moyenne dans le temps. La figure suivante illustre le cas de la vitesse de la vitesse moyenne et fluctuante.



**Figure 2.3** : Evolution de la vitesse fluctuante en fonction du temps.

La variable moyenne est obtenue par moyenne dans le temps. Pour un temps suffisamment grand on admet que cette moyenne est donnée par :

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u'_i dt = 0 \quad (2.14)$$

Et :

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt \quad (2.15)$$

$$\bar{p}' = \frac{1}{T} \int_0^T p' dt = 0 \quad (2.16)$$

Cette décomposition en valeur moyenne et fluctuante entraîne au niveau physique, une considération du mouvement moyen et du mouvement d'agitation turbulente.

Le symbole  $(\bar{\quad})$  représente l'opérateur de moyenne statistique ou moyenne d'ensemble qui est défini, en fait, comme la limite statistique de la moyenne arithmétique prise à travers un certain nombre d'expériences faites dans les mêmes conditions générales de l'écoulement. Cette moyenne vérifiés les règles de Reynolds suivantes.

Si on considère  $f$  et  $g$  deux fonctions aléatoires,  $f'$  et  $g'$  les fluctuations des fonctions aléatoires de  $f$  et  $g$  respectivement, et  $s$  une variable d'espace ou de temps.

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} + f' & g &= \bar{g} + g' \\ \bar{f}' &= \bar{g}' = 0 & \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{f - g} &= \bar{f} - \bar{g} & \overline{af} &= a\bar{f} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} & \overline{\bar{f}} &= \bar{f} \\ \overline{fg} &= \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} = \overline{\bar{f}\bar{g} + \bar{f}g' + f'\bar{g} + f'g'} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'} \end{aligned}$$

L'équation de quantité et de conservations de mouvement devient : Conservation de la masse (équation de continuité) :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.17)$$

Conservation du mouvement (équations de Navier - Stokes) :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + g_{x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u'_1 u'_j}) \quad (2.18)$$

Les termes  $-\overline{u'_1 u'_j}$  appelés contraintes de Reynolds proviennent de la décomposition de  $ij$  Reynolds. Ils posent un problème de fermeture.

## 2.6 Modélisation de la turbulence

L'objectif de la modélisation est de développer des relations ou des équations permettant de calculer les contraintes de Reynolds en fonction des caractéristiques de l'écoulement moyen, assurant ainsi la fermeture du système d'équations de Reynolds.

### 2.6.1 Concept de viscosité turbulente : l'hypothèse de Boussinesq

Les modèles de turbulence s'appuient sur la représentation des contraintes turbulentes à l'aide du concept de viscosité turbulente, formulé pour la première fois par [Boussinesq \(1877\)](#).

Ce concept permet d'exprimer le tenseur de Reynolds en fonction du taux de déformation moyen.

$$\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.19)$$

- $\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ )
- $k$  : Énergie cinétique turbulente
- $\nu_t$  : Viscosité turbulente (propriété de l'écoulement turbulent)

Ainsi, la détermination du tenseur de Reynolds est ramenée à l'évaluation de la viscosité turbulente. Selon la méthode adoptée pour le calcul de cette dernière, on distingue différentes classes de modèles :

#### a. Les modèles à zéro équation

Ce modèle proposé par [Prandtl \(1925\)](#) basé sur deux hypothèses pour la détermination de la viscosité turbulente dans un écoulement turbulent cisailé.

La première hypothèse est inspirée de la théorie cinétique des gaz elle est introduite sur l'expression de la contrainte de cisaillement  $\tau$  :

$$\frac{\tau}{\rho} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \ell_m V_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad \text{donc} \quad \nu_t = \ell_m V_t \quad (2.20)$$

Avec :

$\nu_t$  : la viscosité turbulente.

$V_t$  : la vitesse caractéristique.

$\ell_m$  : la longueur caractéristique.

$\bar{u}$  : la vitesse moyenne.

La deuxième hypothèse repose sur la définition d'une vitesse caractéristique donnée par :

$$V_t = \ell_m \left| \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right| \quad (2.21)$$

Cela conduit à l'expression suivante de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right| \quad (2.22)$$

Pour généraliser cette relation à des écoulements quelconques, on utilise l'expression suivante :

$$\nu_t = \ell_m^2 \sqrt{\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}} \quad (2.23)$$

La longueur de mélange  $\ell_m$  est généralement prise proportionnelle à l'épaisseur caractéristique de l'écoulement, notée  $\delta$ , selon [Schiestel \(2008\)](#). L'un des principaux avantages

**Tableau 2.1** : Rapports  $\ell_m/\delta$  pour différents types d'écoulements

Type d'écoulement	Zone de mélange bidimensionnelle	Jet plan	Jet circulaire	Jet radial	Sillage plan
$\ell_m/\delta$	0.07	0.09	0.075	0.125	0.16

de ces modèles réside dans leur simplicité. Toutefois, leur inconvénient majeur est la limitation de leur domaine d'application, qui se restreint aux écoulements simples. Ils sont souvent utilisés pour fournir une première estimation des profils de vitesse moyenne dans ces écoulements.

### b. Modèles à une équation de transport

Ce type de modèle repose sur une seule équation de transport pour évaluer la viscosité turbulente. Contrairement aux modèles à zéro équation, qui négligent en général les caractéristiques turbulentes de l'écoulement, les modèles à une équation introduisent une grandeur turbulente, comme l'énergie cinétique turbulente  $k$ , pour calculer  $\nu_t$ . Parmi ces modèles, on peut citer : le modèle de [Prandtl \(1925\)](#), celui de [Nee et Kovaszny \(1969\)](#), ainsi que le modèle de [Spalart et Allmaras \(1992\)](#).

Dans le modèle de Prandtl, la viscosité turbulente s'exprime par :

$$\nu_t = c_\mu l \sqrt{k} \quad (2.24)$$

L'énergie cinétique turbulente est décrite par l'équation de transport modélisée suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \nu_t \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\nu_t}{h_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \frac{k^{3/2}}{\ell} \quad (2.25)$$

Avec :

- $c_\mu$  : constante numérique égale à 0.09
- $\ell$  : échelle de longueur
- $h_k = 1.5$

### c. Les modèles à deux équations

Dans cette famille de modèles, la viscosité turbulente est également exprimée à l'aide de la relation de Prandtl-Kolmogorov :

$$\nu_t = c_\mu l \sqrt{k} \quad (2.26)$$

$l$  : échelle des tourbillons porteurs de l'énergie.

où  $l$  représente l'échelle des tourbillons porteurs d'énergie. Ces modèles reposent sur deux équations de transport : l'une pour l'échelle de vitesse  $k$ , et l'autre pour l'échelle de turbulence  $l$ , ou bien une autre variable  $Z = k^m l^n$ , à partir de laquelle on peut retrouver  $l$ .

Les équations de la variable  $Z$  est généralement de la forme suivante :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = C_{Z1} \frac{Z}{k} P + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\ell \sqrt{k}}{h_Z} \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right) - C_{Z2} \frac{Z \sqrt{k}}{\ell} + S_Z \quad (2.27)$$

Avec :

- $S_Z$  : une source secondaire variant suivant le choix de  $Z$ .

La modélisation de la turbulence vise à représenter les effets des fluctuations turbulentes moyennées, en particulier les contraintes de Reynolds. Pour fermer les équations de Reynolds, Fluent propose trois types de modèles :

**Tableau 2.2 :** différents modèles à deux équations

Modèle	Fonction $Z$ utilisée
Kolmogoroff (1942)	$k^{1/2}\ell$
Rotta (1951)	$\ell$
Davido (1961)	$k^{3/2}\ell = \varepsilon$
Harlow, Nakayama (1967)	$k^{3/2}\ell = \varepsilon$
Saffman (1970)	$k\ell^2$
Jones, Launder	$k^{3/2}\ell = \varepsilon$
Wilcox (1988)	$k^{1/2}\ell$

- Le modèle  $k - \varepsilon$ ,
- Le modèle  $k - \omega$  (Wilcox),
- Le modèle des contraintes de Reynolds (RSM).

Nous allons présenter dans ce qui suit les caractéristiques principales des modèles les plus utilisés.

### 2.6.2 Le modèle $k - \varepsilon$

Le modèle  $k-\varepsilon$  est le plus simple des modèles complets dits à deux équations. Il repose sur la résolution de deux équations de transport supplémentaires : l'une pour l'énergie cinétique turbulente ( $k$ ) et l'autre pour son taux de dissipation ( $\varepsilon$ ).

Ce modèle suppose que le régime de turbulence est pleinement établi dans tout le domaine d'écoulement, ce qui signifie que les structures turbulentes sont bien développées. Il considère également que les effets de la viscosité moléculaire sont négligeables par rapport à ceux de la viscosité turbulente, notamment loin des parois.

Il est basé sur l'hypothèse de Boussinesq, à savoir qu'il existe une analogie entre l'action des forces visqueuses et les contraintes de Reynolds dans l'écoulement moyen, soit :

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.28)$$

Le modèle détermine la viscosité turbulente  $\mu_t$  à partir de l'énergie cinétique turbulente  $k$  et du taux de dissipation  $\varepsilon$ , selon la relation suivante :

$$\nu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.29)$$

Où :

- $\nu_t$  : viscosité turbulente,
- $\rho$  : densité du fluide,
- $k$  : énergie cinétique de turbulence,
- $\varepsilon$  : taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence,
- $C_\mu$  : constante empirique, généralement  $C_\mu \approx 0,09$

Deux équations de transport sont utilisées dans le cadre du modèle  $k$ - $\varepsilon$  : l'une pour l'énergie cinétique de turbulence  $k$ , et l'autre pour le taux de dissipation de cette énergie  $\varepsilon$ .

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.31)$$

La signification physique de ces équations est la suivante :

Taux de variation de  $k$  ( $\varepsilon$ ) + Transport de  $k$  ( $\varepsilon$ ) par convection = Transport de  $k$  ( $\varepsilon$ ) par diffusion + Taux de production de  $k$  ( $\varepsilon$ ) - Taux de destruction de  $k$  ( $\varepsilon$ )

Les résultats issus des calculs dépendent fortement des valeurs attribuées aux constantes empiriques du modèle, à savoir :  $C_\mu$ ,  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$  et  $C_{\varepsilon 2}$ .

Les valeurs des constantes utilisées dans le modèle  $k$ - $\varepsilon$  sont les suivantes :  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $C_\mu = 0.09$

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  est largement répandu dans le domaine de l'ingénierie en raison de sa robustesse, de sa faible exigence en ressources de calcul et de sa précision jugée satisfaisante pour une large variété d'écoulements turbulents. Il a fait l'objet de nombreuses validations expérimentales, ce qui renforce sa fiabilité dans des applications pratiques.

Cependant, il donne de mauvais résultats pour une catégorie importante de situations comme les écoulements non confinés, les écoulements tourbillonnants et les écoulements en rotation (Rodi, 1984).

### 2.6.2.1 Prise en compte des effets de parois dans le modèle $k$ - $\varepsilon$

Le modèle  $k$ - $\varepsilon$  standard, introduit par [Launder et Spalding \(1974\)](#), repose sur deux équations de transport : l'une pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , et l'autre pour son taux de dissipation  $\varepsilon$ . Il est très populaire en ingénierie en raison de son bon compromis entre précision et coût de calcul, en particulier pour les écoulements confinés à parois.

Dans le cadre de la modélisation des écoulements turbulents à surface libre, il n'est pas toujours nécessaire de résoudre en détail la structure fine de la couche limite turbulente. Cependant, la présence d'une paroi exerce un effet global significatif sur la dynamique de l'écoulement, notamment à travers les contraintes pariétales et la distribution de la vitesse dans les couches proches de la paroi. Pour cela, la modélisation s'appuie sur des lois empiriques issues de l'étude des écoulements pariétaux cisailés simples.

La couche limite turbulente proche d'une paroi lisse peut être divisée en trois zones, définies à l'aide de variables adimensionnelles :

$$y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu} \quad ; \quad u^+ = \frac{\bar{U}}{u_\tau} \quad (2.32)$$

Avec :

$$u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

- $u_\tau$  : la vitesse de frottement
- La première zone, appelée sous-couche visqueuse qu'étendant jusqu'à une épaisseur de  $y^+ = 5$ , est dominée par la viscosité turbulente. Dans cette zone le profil de vitesse est linéaire et s'écrit :

$$u^+ = y^+ \quad (2.34)$$

Où  $\tau_w$  : est la tension de cisaillement à la paroi.

- Une couche intermédiaire où la viscosité du fluide et la viscosité turbulente sont équivalentes, appelée zone tampon.
- La troisième, une zone externe dominée par la viscosité turbulente, dans laquelle le profil de vitesse suit une loi logarithmique :

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (2.35)$$

avec :

- $\bar{u}$  : vitesse moyenne de l'écoulement
- $u^*$  : vitesse de frottement
- $\kappa$  : La constante de VON KARMAN égale à 0.4
- $C$  : constante d'intégration.

L'option « standard wall function » est disponible lorsqu'on utilise le modèle  $k-\varepsilon$  ou RSM, mais ne peut être utilisée avec le modèle  $k-\omega$  (fluent 6.0).

Avec le modèle  $k - \varepsilon$  standard, les contraintes de Reynolds à la paroi sont calculées en supposant l'existence d'un profil de vitesse entre la paroi et la première cellule proche de la paroi (fluent 6.0) .

### 2.6.3 Le modèle $k - \omega$

Le modèle  $k-\omega$  standard proposé par FLUENT est basé sur les travaux de Wilcox (1998). Sa structure est similaire à celle du modèle  $k-\varepsilon$ , dans le sens où il repose également sur la résolution de deux équations de transport : l'une pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , et l'autre pour le taux de dissipation spécifique  $\omega$ .

Ce modèle est particulièrement adapté pour la modélisation des écoulements en présence de parois, grâce à sa capacité à bien prédire les couches limites turbulentes sans nécessiter de fonctions murales.

Le taux de dissipation spécifique  $\omega$  est défini comme :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.36)$$

Où

- $\varepsilon$  : est le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente
- $k$  : est l'énergie cinétique turbulente.

Les équations de transport s'écrivent comme suit :

Équation de transport de  $k$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (2.37)$$

Équation de transport de  $\omega$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k U_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (2.38)$$

Où :

- $G_k$  : production d'énergie cinétique turbulente par les gradients de vitesse moyenne,
- $G_\omega$  : production du taux spécifique de dissipation  $\omega$ ,
- $\Gamma_k, \Gamma_\omega$  : coefficients de diffusion turbulente pour  $k$  et  $\omega$ ,
- $Y_k, Y_\omega$  : termes de dissipation,
- $S_k, S_\omega$  : termes sources spécifiques (souvent nuls dans les cas standards).

La dissipation due à la turbulence est donnée par :

$$\text{De } k : Y_k = \rho \beta^* f_{\beta^*} k \omega$$

$$\text{De } \omega : Y_\omega = \rho \beta_i f_\beta \omega^2$$

Les constantes du modèle  $k$ - $\omega$  sont les suivants :

$\alpha_\infty^*$	$\alpha_\infty$	$\alpha_0$	$\beta_\infty^*$	$\beta_t$	$R_\beta$	$R_k$	$R_\omega$	$\zeta^*$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
1	0.52	1/9	0.09	0.072	8	6	2.95	1.5	2.0	2.0

Le modèle  $k - \omega$  présente un avantage par rapport au modèle  $k - \varepsilon$  en ce qu'il prend mieux en compte les effets liés à la turbulence dans les écoulements à faible nombre de Reynolds. Il est également adapté aux écoulements compressibles et permet d'intégrer les transferts pariétaux.

Le modèle de Wilcox peut être appliqué aux écoulements en charge, aux écoulements à surface libre soumis à de fortes contraintes de cisaillement, aux jets, ainsi qu'aux écoulements autour d'obstacles (phénomènes de sillage) et à la diffusion de polluants dissous.

#### 2.6.4 Le modèle $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport)

Le modèle  $k - \omega$  SST (Shear Stress Transport) est un modèle de turbulence hybride développé par [Menter \(1994\)](#). Il combine les atouts du modèle  $k - \omega$ , efficace dans les

zones proches des parois, et du modèle  $k - \varepsilon$ , plus adapté aux régions éloignées des parois. Ce couplage permet une meilleure prédiction des phénomènes complexes tels que les écoulements décollés et les transitions dans la couche limite.

#### 2.6.4.1 Équations de Transport du Modèle SST $k - \omega$

Le modèle SST  $k - \omega$  combine les avantages des modèles  $k - \omega$  (précis près des parois) et  $k - \varepsilon$  (robuste dans le champ libre) en utilisant une fonction de mélange  $F_1$  pour assurer une transition en douceur entre les deux.

**Équation de l'énergie cinétique turbulente ( $k$ ) :**

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.39)$$

**Équation du taux de dissipation spécifique ( $\omega$ ) :**

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (2.40)$$

Le terme supplémentaire, multiplié par  $(1 - F_1)$ , permet une transition entre les modèles  $k - \omega$  et  $k - \varepsilon$ . Lorsque  $F_1 = 1$ , le modèle se comporte comme un modèle  $k - \omega$  ; lorsque  $F_1 = 0$ , il adopte le comportement du modèle  $k - \varepsilon$ .

#### 2.6.4.2 Fonction de Mélange $F_1$

La fonction  $F_1$  est définie pour assurer une transition en douceur entre les deux modèles :

- $F_1 = 1$  près des parois, activant le modèle  $k - \omega$
- $F_1 = 0$  dans le champ libre, activant le modèle  $k - \varepsilon$

Cette approche permet au modèle SST  $k - \omega$  de bénéficier de la précision du modèle  $k - \omega$  près des parois et de la robustesse du modèle  $k - \varepsilon$  dans le champ libre, offrant ainsi une meilleure prédiction des écoulements turbulents complexes. ([OpenFOAM Foundation](#))

Pour une illustration visuelle de la fonction de mélange et des zones d'application des modèles, vous pouvez consulter l'image suivante :

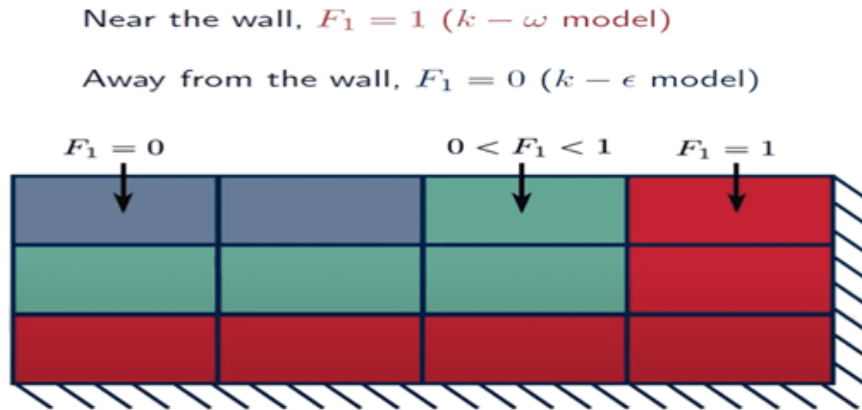


Figure 2.4 : Représentation du modèle SST  $k - \omega$  (OpenFOAM Foundation)

### 2.6.4.3 Viscosité turbulente ( $\mu_t$ ) du modèle $k - \omega$ SST

La modélisation de la viscosité turbulente dans le cadre du modèle  $k - \omega$  SST (Shear Stress Transport) repose sur une formulation améliorée par rapport aux modèles standards, pour mieux capturer les effets de séparation et les gradients de cisaillement élevés.

Pour le modèle  $k - \omega$  standard, la viscosité turbulente est donnée par :

$$\mu_t = \frac{k}{\omega} \quad (2.41)$$

Mais dans le modèle  $k - \omega$  SST, elle est ajustée à l'aide d'un limiteur de cisaillement et d'une fonction de mélange :

$$\mu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; S F_2)} \quad (2.42)$$

où :

- $a_1$  est une constante du modèle,
- $S$  est le module du taux de déformation (cisaillement),
- $F_2$  est une seconde fonction de mélange utilisée pour limiter la viscosité turbulente dans les régions fortement séparées.

Le terme  $\max(a_1 \omega; S F_2)$  limite artificiellement  $\mu_t$  dans les zones de faible cisaillement, empêchant la sur-prédiction de la turbulence dans les zones de détachement. Cela permet d'obtenir de meilleurs accords avec les résultats expérimentaux, notamment pour les écoulements décollés ou avec forts gradients de pression.

### 2.6.5 Le modèle RSM

Le modèle des contraintes de Reynolds (Reynolds Stress Model, RSM) constitue un modèle de fermeture de second ordre. Dans certaines situations, telles que les couches limites courbées, les écoulements tourbillonnants ou en rotation, l'approximation basée sur l'hypothèse de Boussinesq pour modéliser les contraintes de Reynolds devient inapplicable (Versteeg et Malalasekera, 2007).

Ce modèle est considéré comme l'un des plus généraux et des plus complets parmi les modèles classiques de turbulence. Il fournit des résultats satisfaisants pour de nombreux types d'écoulements, qu'ils soient simples ou complexes, tels que les jets avec impact, les tunnels asymétriques, les écoulements dans des conduits circulaires ou non circulaires, ainsi que les écoulements courbés. Toutefois, son principal inconvénient réside dans son coût élevé en ressources informatiques (Matene, 2011).

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le mouvement des fluides ainsi que les équations fondamentales qui le régissent. Nous avons commencé par définir la turbulence, puis présenté les équations décrivant l'écoulement d'un fluide newtonien, notamment les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et l'équation de Navier-Stokes. Enfin, nous avons abordé les principales approches de modélisation de la turbulence, en mettant l'accent sur les modèles fondés sur le concept de viscosité turbulente.

Le système d'équations à résoudre se résume comme suit :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + g_{x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu_t \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right]$$

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j k)}{\partial x_j} = P_k - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial (\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_\omega}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

L'étude des méthodes numériques permettant de résoudre ce système sera présentée dans le chapitre suivant.

## Modélisation numérique

### 3.1 Introduction

Dans le deuxième chapitre, les équations présentées sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. En raison de leur complexité, leur résolution nécessite le recours à des méthodes numériques.

Plusieurs méthodes sont actuellement utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles, parmi lesquelles on trouve la méthode des différences finies (MDF), celle des éléments finis (MEF) et la méthode des volumes finis (MVF). Le logiciel Fluent adopte la MVF pour résoudre les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique turbulente ainsi que du taux de dissipation de cette dernière. L'ensemble de ces équations peut être exprimé sous la forme d'une équation générale de convection-diffusion, également appelée équation générale de transport.

### 3.2 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) constitue l'une des approches numériques les plus répandues pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), notamment dans les problèmes de transfert de chaleur et de matière. Leur popularité découle de leur simplicité de formulation, de leur facilité d'implémentation et de leur capacité à être étendues à des problèmes multidimensionnels (2D et 3D). Elles coexistent avec d'autres méthodes numériques telles que les méthodes des éléments finis (MEF) et les méthodes des volumes finis (MVF), chacune présentant des avantages spécifiques en fonction des applications visées [Ferziger et Perić \(2002\)](#).

### 3.3 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une technique numérique permettant de résoudre de manière approchée certains problèmes physiques. Elle consiste à discrétiser le domaine

spatial en un ensemble de petits sous-domaines appelés *éléments* ou *mailles*. Sur chaque élément, le problème est reformulé sous une forme plus simple, généralement en un système d'équations linéaires. Ces systèmes locaux sont ensuite assemblés pour former un système global, représenté sous forme matricielle. La résolution de ce système permet d'obtenir une approximation du champ recherché (scalaire, vectoriel ou tensoriel), tout en respectant les équations du problème et les conditions aux limites.

### 3.4 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis (MFV) repose sur la forme intégrale des équations de conservation. Le domaine est discrétisé en un ensemble de volumes de contrôle, chacun associé à un nœud de calcul central où les variables sont évaluées. Les valeurs aux interfaces sont obtenues par interpolation à partir des valeurs nodales. Les intégrales de surface et de volume sont ensuite approximées à l'aide de formules de quadrature, ce qui conduit à une équation algébrique par volume, faisant intervenir les valeurs des nœuds voisins (Ferziger et Perić, 2002).

Le volume de contrôle de forme rectangulaire permet de modéliser les phénomènes électromagnétiques dans le cas de géométries simples. Cette méthode consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires, de forme régulière et adjacents. Chaque volume est délimité par deux interfaces dans le cas monodimensionnel (selon les directions  $e$  et  $w$ ) et par quatre interfaces dans le cas bidimensionnel. Chaque volume entoure un nœud du maillage (Figure 3.1).

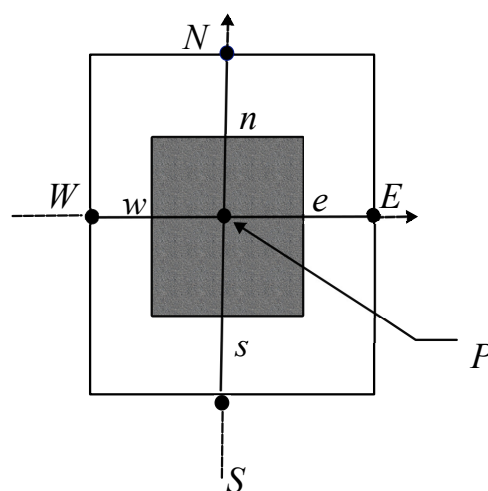


Figure 3.1 : Volume élémentaire (2D)

Pour résoudre un problème à l'aide de la méthode des volumes finis, on procède généralement en suivant les étapes suivantes :

- Génération de maillage
- Intégration des équations sur chaque volume élémentaire
- Discrétisation des équations de transport
- Formulation et résolution du système d'équations algébrique résultant.

Afin de clarifier la procédure adoptée dans la résolution, nous présentons ci-après la résolution de l'équation générale relative à une propriété  $\phi$  dans le cadre d'un écoulement bidimensionnel en régime transitoire.

### 3.4.1 Équation générale de transport

Les équations de conservation exposées dans le chapitre précédent peuvent être unifiées sous une forme générale, ce qui évite de répéter le processus de discrétisation pour chaque équation. En notant  $\phi$  la variable considérée, chacune d'elles peut être exprimée sous une équation de transport commune en coordonnées cartésiennes :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_I + \underbrace{(\rho V\phi)}_{II} = \underbrace{(\Gamma_\phi grad(\phi))}_{III} + \underbrace{S_\phi}_{IV} \quad (3.1)$$

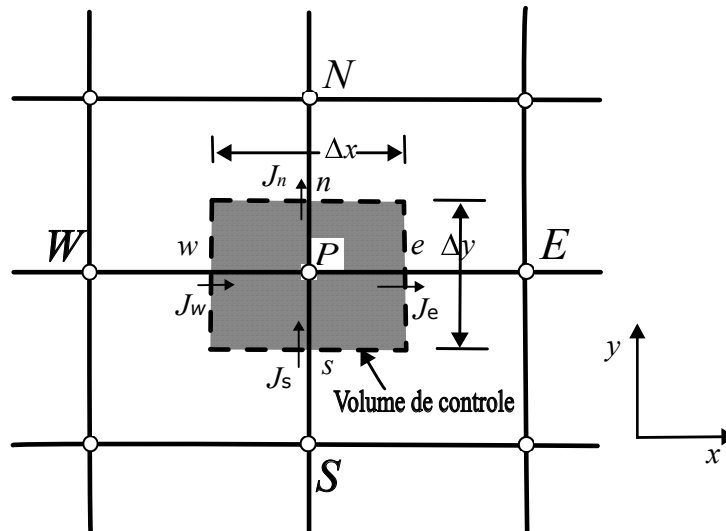
- I : Terme d'accumulation (variation temporelle)
- II : Transport de convection
- III : Transport de diffusion
- $\Gamma_\phi$  : coefficient de transport par diffusion
- $S_\phi$  : source de  $\phi$

**Tableau 3.1 :** Tableau récapitulatif de la valeur de  $\phi$  et  $S_\phi$  dans l'équation de transport

L'équation de	La variable $\phi$	Terme source $S_\phi$
Continuité	1	0
Quantité de mouvement	$u_i, u_j, u_k$	$S_{u_i}, S_{u_j}, S_{u_k}$
k	k	$S_k$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	$S_\varepsilon$
VOF	$\alpha$	0

### 3.4.2 Génération de maillage

On considère le volume de contrôle bidimensionnel illustré dans la figure ci-après.


**Figure 3.2 :** Volume de contrôle pour un écoulement bidimensionnel

Ce volume, appelé maille ou élément, est centré en un nœud P et partage ses quatre faces  $w$ ,  $e$ ,  $n$ ,  $s$  avec les mailles voisines de centres W, E, N, S. Les flux  $J_w$ ,  $J_e$ ,  $J_n$ ,  $J_s$  sont définis sur ces faces de dimensions  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ .

### 3.4.3 Intégration des équations sur chaque volume élémentaire

Soit le volume de contrôle  $\Omega$  défini ci-dessous. On peut écrire l'équation générale de transport pour une grandeur scalaire  $\phi$ , pondérée par la densité  $\rho$ , sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}\phi) d\Omega dt \\
 = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\Gamma_{\phi} \operatorname{grad}(\phi)) d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

En appliquant le théorème de la divergence, une intégrale de volume d'une divergence peut être transformée en une intégrale de surface :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(V) d\Omega = \int_S V \vec{n} dS \tag{3.3}$$

Où :

- S désigne la frontière de  $\Omega$
- $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire sortant

On obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+dt} \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} d\Omega dt + \int_t^{t+dt} \int_S (\rho\mathbf{V}\phi) \cdot \vec{n} dS dt \\
 = \int_t^{t+dt} \int_S (\Gamma_{\phi} \operatorname{grad}\phi) \cdot \vec{n} dS dt + \int_t^{t+dt} \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, incompressible, avec les composantes de vitesse  $u$  et  $v$  selon  $x$  et  $y$ , cette équation devient :

$$\begin{aligned}
 \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} p \frac{\partial\phi}{\partial t} d\Omega dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_S (pu\phi)n_x dS + \int_S (pv\phi)n_y dS \right] dt \\
 = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_S \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) n_x dS + \int_S \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) n_y dS \right] dt \\
 + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega dt
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Enfin, si l'on subdivise la frontière S du volume de contrôle en ses différentes facettes (est, ouest, nord, sud), et en supposant que les flux sont constants sur chaque facette (hypothèse valable pour des mailles suffisamment petites  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ), on peut exprimer l'intégrale de surface comme suit :

$$\int_S() \vec{n} dS = \int_{A_e} J_e dS - \int_{A_w} J_w dS + \int_{A_n} J_n dS - \int_{A_s} J_s dS \quad (3.6)$$

Et si les flux sont constants sur chaque facette, alors :

$$\int_S() \vec{n} dS = \int_{A_e} J_e A_e - \int_{A_w} J_w A_w + \int_{A_n} J_n A_n - \int_{A_s} J_s A_s \quad (3.7)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+dt} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega dt + \int_t^{t+dt} \left[ (\rho u \phi)_e A_e - (\rho u \phi)_w A_w + (\rho v \phi)_n A_n - (\rho v \phi)_s A_s \right] dt \\ &= \int_t^{t+dt} \left[ \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e A_e - \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w A_w \right. \\ & \quad \left. + \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n A_n - \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s A_s \right] dt + \int_t^{t+dt} \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

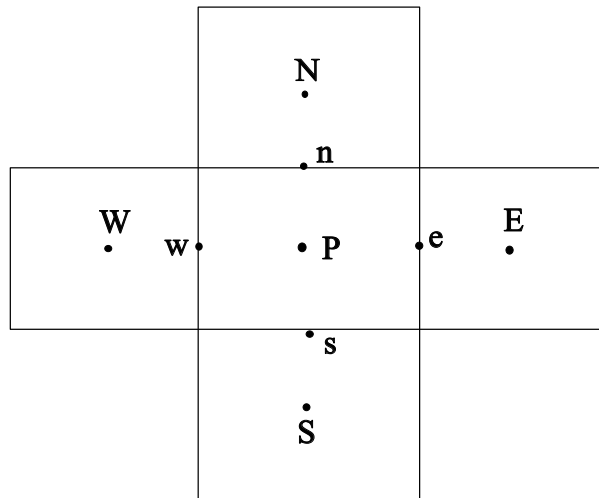
#### 3.4.4 Discrétisation du terme de diffusion

La présence des flux de diffusion  $\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$  implique que la valeur de la variable  $\phi$  en un point donné (nœud) dépend directement des valeurs de  $\phi$  aux nœuds voisins.

En utilisant la notation de la figure 3.3, on peut développer la fonction  $\phi$  en série de Taylor autour du point e, situé entre les nœuds P et E, selon l'axe x. Cela donne :

$$\phi_E = \phi_e + \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_e \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_e \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots \quad (3.9)$$

$$\phi_P = \phi_e - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_e \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_e \left( \frac{\Delta x}{2} \right)^3 + \dots \quad (3.10)$$



**Figure 3.3** : Schématisation d'un volume de contrôle et les volumes adjacents

En appliquant un schéma d'ordre deux à chaque série de Taylor ci-dessus, puis en soustrayant l'équation (3.9) de l'équation (3.10), on élimine les termes pairs et on obtient une approximation centrée du gradient :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \quad (3.11)$$

De manière analogue, les expressions des gradients de  $\phi$  sur les autres faces du volume de contrôle s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta x} \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_n = \frac{\phi_n - \phi_P}{\Delta y} \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_s = \frac{\phi_P - \phi_s}{\Delta y} \quad (3.14)$$

### 3.4.5 Discrétisation du terme de convection

Le terme de convection traduit le transport d'une quantité scalaire  $\phi$  par un champ de vitesse  $\vec{V} = (u, v)$ . Dans un cadre bidimensionnel, ce terme s'écrit sous forme conservative :

$$(\rho \vec{V} \phi) = \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} \quad (3.15)$$

L'intégration sur un volume de contrôle  $\Omega$ , suivi de l'application du théorème de Gauss, permet de transformer l'intégrale de volume en une intégrale de surface :

$$\int_{\Omega} (\rho \vec{V} \phi) d\Omega = \int_S (\rho \vec{V} \phi) \cdot \vec{n} dS \quad (3.16)$$

La surface S étant composée de 4 faces dans un maillage cartésien (est, ouest, nord, sud), l'intégrale de surface est approchée par une somme des flux traversant ces faces :

$$\int_S (\rho \vec{V} \phi) \cdot \vec{n} dS \approx F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \quad (3.17)$$

Où :

- $F = \rho \vec{V} \cdot \vec{n} A$  est le flux massique à travers chaque face.
- $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$  sont les valeurs de  $\phi$  aux centres des faces.

### 3.4.6 Schémas de discrétisation

Le terme de convection peut être discrétisé à l'aide de divers schémas reposant sur l'interpolation de la grandeur  $\phi$  aux faces des mailles, à partir de ses valeurs connues aux centres de ces dernières.

En théorie, la solution numérique d'un problème ne dépend pas du schéma de discrétisation choisi lorsque le maillage devient infiniment fin. Toutefois, dans la pratique, le nombre de nœuds reste limité, ce qui impose une analyse approfondie des différents schémas de convection. Un schéma de convection efficace doit ainsi répondre à un certain nombre de critères essentiels (Chung, 2010) :

- **Conservatif** : c'est-à-dire assurer l'équilibre des flux entre les volumes adjacents, propriété généralement garantie par l'approche en volumes finis.
- **Limitable** : ce qui implique que la solution reste physiquement réaliste, notamment par le respect du signe des coefficients de la matrice discrète.

- **La transportivité du schéma** : doit être cohérente avec le régime d'écoulement, en particulier au regard du nombre de Peclet, qui caractérise le rapport entre les effets de convection et de diffusion.

Divers schémas de discrétisation du terme convectif ont été développés, parmi lesquels on peut citer :

#### 3.4.6.1 Schéma centré (*Central differencing, 2e ordre*)

Pour estimer  $\phi$  à une face  $f$  entre les mailles  $P$  et  $F$ , on écrit :

$$\phi_f = \frac{1}{2} (\phi_P + \phi_F) \quad (3.18)$$

Dans ce schéma, l'interpolation de la variable s'effectue par une moyenne arithmétique entre les valeurs aux centres des mailles. Bien qu'il respecte la propriété de conservativité, il présente certaines limites : la condition de limitabilité peut être violée dans le cas d'écoulements fortement convectifs, en raison de l'apparition de coefficients négatifs dans la matrice discrète. De plus, ce schéma ne permet pas de distinguer le sens du transport convectif.

#### 3.4.6.2 Schéma amont (*Upwind, 1er ordre*)

Le schéma UPWIND tient compte de la direction de l'écoulement en attribuant à la face la valeur de la cellule amont. Particulièrement adapté aux régimes à forte convection, il satisfait les trois propriétés fondamentales des schémas de convection et est largement utilisé en raison de sa simplicité. Toutefois, il peut introduire une diffusion numérique artificielle, notamment lorsque le maillage n'est pas aligné avec la direction principale de l'écoulement.

#### 3.4.6.3 Schéma hybride

L'idée globale de ce schéma est d'utiliser le schéma centré (SDC) dans les zones où le flux est diffusif et le schéma UPWIND dans les zones où le flux est convectif. Il permet de basculer automatiquement d'un schéma à un autre suivant la valeur de nombre de Peclet.

Le nombre de Peclet est déterminé par la formule suivante :

$$P_{C_i} = \frac{F_i}{D_i} = \frac{\rho v_i A_i}{\frac{\Gamma_\phi A_i}{\Delta x}} \quad (3.19)$$

Avec :

- $P_{C_i}$  : nombre de Peclet.
- $F_i$  : le flux de masse à travers la face  $i$  du volume de contrôle.
- $D_i$  : Le flux diffusif à travers la face  $i$  du volume de contrôle.

**Tableau 3.2** : Tableau récapitulatif des schémas de convection

Nombre de Peclet	Schéma utilisé	Sens de l'écoulement	Valeurs de $\phi_i$
$ Pe  < 2$	Différence centrée	-	$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}$ $\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$ $\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}$ $\phi_s = \frac{\phi_S + \phi_P}{2}$
$Pe \geq 2$	UPWIND	$w \rightarrow E$ $S \rightarrow N$	$\phi_w = \phi_W; \phi_e = \phi_P$ $\phi_s = \phi_S; \phi_n = \phi_P$
$Pe \leq -2$	UPWIND	$w \leftarrow E$ $S \leftarrow N$	$\phi_w = \phi_P; \phi_e = \phi_E$ $\phi_s = \phi_P; \phi_n = \phi_N$

La limite de 2 adaptée pour  $Pe$  est obtenue à partir de tests numériques ([Versteeg et Malalasekera \(2007\)](#)).

### 3.4.7 Discrétisation du terme source

$$\int_{\Omega} S_\phi d\Omega = \bar{S} \Delta\Omega \quad (3.20)$$

Pour garantir la convergence lors de la résolution des équations algébriques, le terme source est linéarisé, ce qui donne :

$$\int_{\Omega} S_\phi d\Omega = S_u + S_p \phi_P \quad (3.21)$$

Où :

- $S_u$  : Est la partie constante qui ne dépend pas explicitement de  $\phi_P$
- $S_p$  : étant la pente de  $\phi_P$

On remplace dans l'équation (III.6) on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \int_t^{t+dt} p \frac{\partial \phi}{\partial t} dt d\Omega + \int_t^{t+dt} \left[ F_e \frac{\phi_E + \phi_p}{2} - F_w \frac{\phi_W + \phi_p}{2} + F_n \frac{\phi_N + \phi_p}{2} - F_s \frac{\phi_S + \phi_p}{2} \right] dt \\
 & = \int_t^{t+dt} \left[ D_e(\phi_E - \phi_p) - D_w(\phi_p - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_p) - D_s(\phi_p - \phi_S) \right] dt \\
 & \quad + \int_t^{t+dt} \tilde{S} \Delta \Omega dt
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.4.8 Discrétisation de la variation temporelle

La discrétisation temporelle des grandeurs  $\phi_S, \phi_P, \phi_W, \phi_E$  peut s'effectuer en considérant leurs valeurs à l'instant initial  $t$ , à l'instant suivant  $t + \Delta t$ , ou selon une combinaison pondérée des deux. Cette approche est généralisée par l'expression suivante (Versteeg et Malalasekera (2007)) :

$$\int_t^{t+dt} \phi_P dt = \left[ \theta \phi_P + (1 - \theta) \phi_P^0 \right] \Delta t \tag{3.23}$$

Dans  $\theta$ , le schéma illustré dans le tableau (3.3) est passé de 0 à 1, en réponse à cette variation.

**Tableau 3.3** : Les schémas de discrétisation selon la variation de  $\theta$

$\theta$	$\int_t^{t+dt} \phi_P dt$	Le schéma correspondant
0	$\phi_P^0 \Delta t$	Schéma explicite
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(\phi_P - \phi_P^0) \Delta t$	Schéma de Crank-Nicolson
1	$\phi_P \Delta t$	Schéma implicite

On a également :

$$\int_{\Omega} \int_t^{t+dt} \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} dt d\Omega = \rho(\phi_P - \phi_P^0) \Delta \Omega \tag{3.24}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 & \rho(\phi_p - \phi_p^0)\Delta\Omega + \left(\frac{F_e}{2} + D_e - \frac{F_w}{2} + D_w + \frac{F_n}{2} + D_n - \frac{F_s}{2} + D_s\right) [\theta\phi_p + (1-\theta)\phi_p^0]\Delta t \\
 &= \left(-\frac{F_e}{2} + D_e\right) [\theta\phi_E + (1-\theta)\phi_E^0]\Delta t \\
 &+ \left(\frac{F_w}{2} + D_w\right) [\theta\phi_W + (1-\theta)\phi_W^0]\Delta t \\
 &+ \left(-\frac{F_n}{2} + D_n\right) [\theta\phi_N + (1-\theta)\phi_N^0]\Delta t \\
 &+ \left(\frac{F_s}{2} + D_s\right) [\theta\phi_S + (1-\theta)\phi_S^0]\Delta t + \bar{S}\Delta\Omega\Delta t
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Suite à quelques arrangements (On effectue des calculs sur  $\Delta t$ , ensuite on additionne et on soustrait  $(F_e - F_w + F_n - F_s)$  :

$$\begin{aligned}
 & \left(\rho\frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + a_E + a_W + a_N + a_S - S_p + F_e - F_w + F_n - F_s\right) \phi_p \\
 &= a_E[\theta\phi_E + (1-\theta)\phi_E^0] + a_W[\theta\phi_W + (1-\theta)\phi_W^0] \\
 &+ a_N[\theta\phi_N + (1-\theta)\phi_N^0] + a_S[\theta\phi_S + (1-\theta)\phi_S^0] \\
 &+ \left[\rho\frac{\Delta\Omega}{\Delta t} - (a_E + a_W + a_N + a_S + F_e - F_w + F_n - F_s)(1-\theta)\right] \phi_p^0 + S_u
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Avec :

$$a_E = \frac{-F_e}{2} + D_e \tag{3.27}$$

$$a_W = \frac{F_w}{2} + D_w \tag{3.28}$$

$$a_N = \frac{-F_n}{2} + D_n \tag{3.29}$$

$$a_S = \frac{F_s}{2} + D_s \tag{3.30}$$

Dans le cas implicite  $\theta = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \left(p\frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + a_E + a_W + a_N + a_S - S_p + F_e - F_w + F_n - F_s\right) \phi_p \\
 &= a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + p\frac{\Delta\Omega}{\Delta t}\phi_p^0 + S_u
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

D'une façon générale :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + \rho \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \phi_P^0 + S_u \quad (3.32)$$

Avec :

$$a_P = \rho \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + a_E + a_W + a_N + a_S - S_p + F_e - F_w + F_n - F_s \quad (3.33)$$

### 3.5 Présentation des logiciels de simulation numérique

À l'ère actuelle, une multitude de logiciels spécialisés permet la modélisation des écoulements fluides via la résolution des équations de Navier-Stokes, recourant aux méthodes des volumes finis, des différences finies ou des éléments finis. Parmi les outils les plus répandus figurent les codes calcul commerciaux : FLUENT, CFX-F3D, PHOENICS, STAR-CD, TRIO et COMSOL.

Dans le cadre de cette étude, les deux codes ANSYS Fluent et OpenFoam ont été retenus pour leur robustesse et leur polyvalence.

#### 3.5.1 Présentation du code ANSYS Fluent

ANSYS Fluent constitue un logiciel généraliste de mécanique des fluides numériques (CFD), doté d'un solveur performant pour la résolution des équations gouvernant les écoulements. Son architecture repose sur la méthode des volumes finis, garantissant une discrétisation spatiale précise des équations de transport. Le code intègre divers schémas numériques (upwind, centré, etc.) et des algorithmes de stabilisation, assurant convergence et précision des simulations.

##### 3.5.1.1 Modélisation de la turbulence

Le logiciel prend en charge les régimes laminaire et turbulent, proposant deux approches distinctes :

- **Les modèles statistiques** (RANS), incluant les formulations  $k-\varepsilon$ ,  $k-\omega$ , Spalart-Allmaras et les modèles de tenseur de Reynolds (RSM), adaptés à une modélisation moyenne des contraintes turbulentes.

- **Les simulations aux grandes échelles (LES)**, résolvant explicitement les structures turbulentes macroscopiques tout en modélisant les échelles sous-maille.

Ces modèles permettent d'appréhender des phénomènes complexes tels que la séparation de couche limite ou les tourbillons ([fluent 6.0](#)).

### 3.5.1.2 Traitement des écoulements diphasiques

Deux paradigmes sont disponibles pour les écoulements multiphasiques :

1. **Approche Euler-Lagrange** : Le fluide continu est traité en description eulérienne, tandis que la phase dispersée (particules, gouttelettes) est suivie de manière lagrangienne. Cette méthode convient aux écoulements dilués (phase dispersée  $< 10\%$ ).
2. **Approche Euler-Euler** : Les phases sont considérées comme des milieux continus interpénétrants. Trois modèles spécifiques sont proposés :

#### a-Modèle VOF (Volume of Fluid)

Idéal pour les interfaces immiscibles (écoulements stratifiés, surface libre), il suit la fraction volumique de chaque fluide via une équation de transport couplée aux équations de Navier-Stokes. Un couplage avec la méthode Level-Set affine la représentation des interfaces.

Le modèle VOF (*Volume Of Fluid*) est une méthode numérique de suivi d'interface fondée sur le concept de fraction volumique. Cette approche permet de caractériser la dynamique de l'interface séparant deux fluides non miscibles (par exemple, eau-air) en résolvant une équation de transport pour la fraction volumique de chaque phase au sein du domaine calculé. ([Lipeme Kouyi \(2004\)](#))

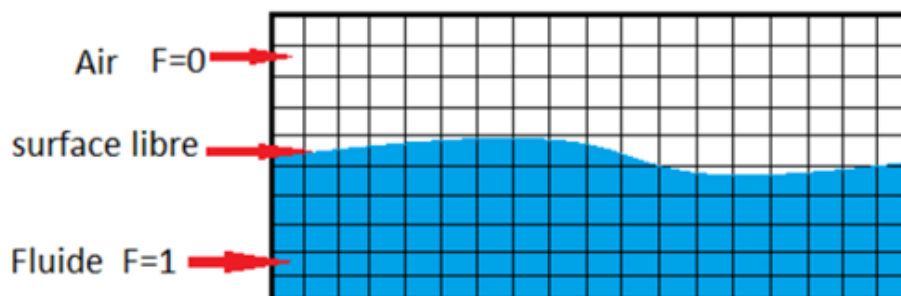


Figure 3.4 : Schéma de la méthode VOF

**Principe :**

La fraction volumique, notée généralement  $\alpha$ , est définie comme la proportion d'une phase fluide dans une cellule de maillage ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ). L'interface est reconstruite localement à partir des valeurs discrètes de  $\alpha$ , souvent via des algorithmes géométriques (méthode PLIC *Piecewise Linear Interface Calculation*).

**Équations gouvernantes :**

Le modèle couple les équations de Navier-Stokes à une équation de conservation de la fraction volumique :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \text{div}(\alpha u) = 0 \quad (3.34)$$

où  $u$  représente le champ de vitesse partagé par les deux phases.

**Domaine d'application :**

Particulièrement adapté aux écoulements à surface libre (vagues, remplissage de réservoirs) ou stratifiés (écoulements diphasiques avec interface nette), le modèle VOF exclut les phénomènes de mélange ou de diffusion entre phases.

**Limites de ce modèle :**

- Il est conçu pour des fluides visqueux.
- Toutes les cellules du domaine doivent être entièrement remplies, soit par de l'eau, soit par de l'air.
- L'une des deux phases doit être considérée comme compressible.
- Le modèle n'est pas adapté à la simulation de fluides mélangés.

**b-Modèle de mélange (Mixture model)**

Le modèle de mélange est une formulation multiphasique simplifiée conçue pour modéliser des écoulements où plusieurs phases fluides ou granulaires interagissent tout en possédant des vitesses relatives. Contrairement au modèle Volume of Fluid (VOF), qui traite les interfaces comme des discontinuités nettes, cette approche considère les phases comme des milieux continus interpénétrants, cohabitant dans un même espace physique ([Guechi et al. \(2011\)](#)).

**c-Modèle eulérien**

Il résout un système d'équations de conservation indépendant pour chaque phase, permettant une modélisation détaillée des interactions interphasiques (transferts de masse, énergie). Ce modèle s'applique aux écoulements denses et complexes.

### 3.6 Algorithmes de couplage pression-vitesse

La résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles implique un couplage fort entre pression et vitesse, nécessitant des algorithmes spécialisés. Fluent intègre quatre méthodes :

- **SIMPLE** (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) : Corrige itérativement le champ de pression à partir d'une estimation initiale, en respectant la continuité (Patankar et Spalding (1972)).
- **SIMPLEC** (*SIMPLE-Consistent*) : Optimise SIMPLE via un facteur de relaxation accru, accélérant la convergence pour des écoulements stationnaires.
- **PISO** (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) : Ajoute une étape de correction supplémentaire, recommandée pour les régimes transitoires ou compressibles.
- **Algorithme couplé** : Résout simultanément les équations de mouvement et de continuité via un schéma implicite, améliorant la stabilité au prix d'un coût calcul élevé (Fluent).

Ces algorithmes, combinés à des schémas de discrétisation adaptés (QUICK, Second-Order Upwind), assurent une précision accrue pour des géométries complexes, tout en maîtrisant les instabilités numériques (Chung (2010)).

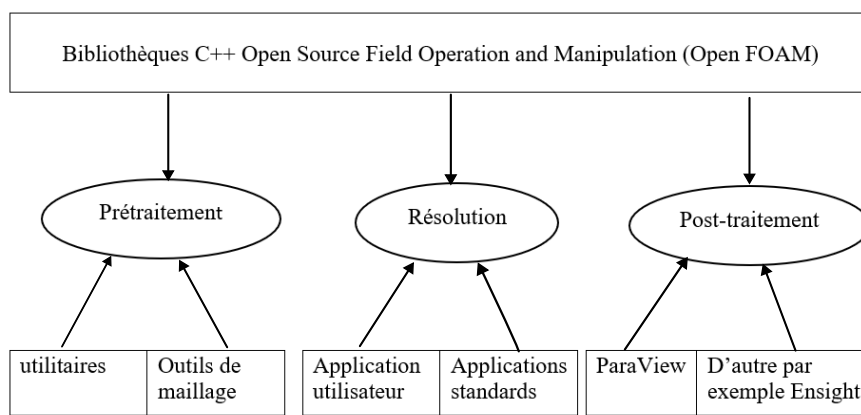
### 3.7 Présentation du logiciel OpenFOAM

OpenFOAM est avant tout une bibliothèque C++, principalement utilisée pour créer des exécutables, appelés applications. Ces applications se divisent en deux catégories :

- Les solveurs, conçus pour résoudre des problèmes spécifiques en mécanique des milieux continus ;
- Les utilitaires, destinés à manipuler des données ou effectuer des tâches techniques.

Les utilisateurs peuvent développer de nouveaux solveurs ou utilitaires, sous réserve de maîtriser les méthodes numériques, les principes physiques et les techniques de programmation sous-jacentes.

OpenFOAM intègre des environnements de pré-traitement (préparation des simulations) et de post-traitement (analyse des résultats). Ces environnements reposent eux-mêmes sur des utilitaires OpenFOAM, assurant une gestion cohérente des données à toutes les étapes. La structure générale d'OpenFOAM est illustrée dans la figure ci-dessous ([OpenFOAM User Guide](#)).



**Figure 3.5 :** Présentation de la structure d'OpenFOAM

### 3.7.1 Structure du fichier des cas d'OpenFOAM

Structure d'annuaire de base d'un OpenFOAM cas, contenant l'ensemble minimal de dossiers requis pour l'exécution d'un application, est représentée sur la figure ( 3.6) et décrits comme ci-dessous :

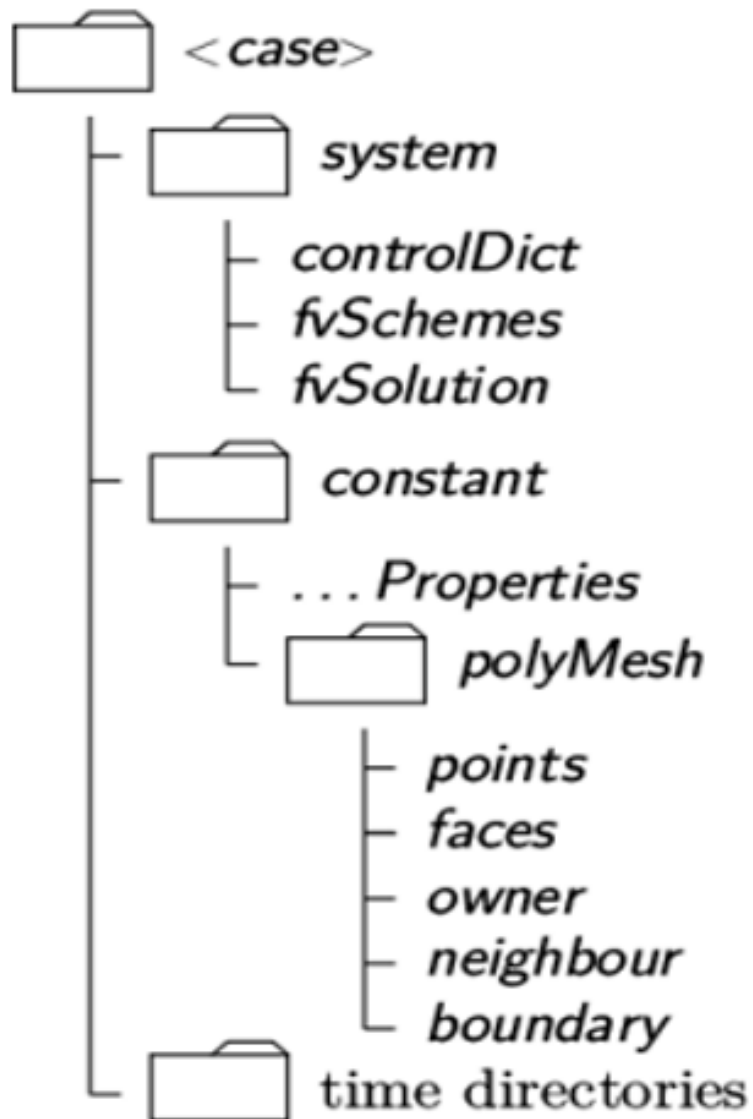


Figure 3.6 : Structure des dossiers d'un cas OpenFOAM

### 3.7.2 Répertoire "constant"

Ce dossier contient des fichiers spécifiant des propriétés et des modèles, ainsi qu'un sous-répertoire noté *polyMesh* contenant une description complète du maillage.

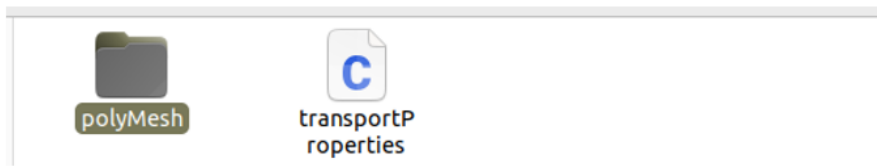


Figure 3.7 : Contenu du répertoire *constant*

Les fichiers constituant ce sous-répertoire sont illustrés dans la figure ci-dessous.



Figure 3.8 : Contenu du sous-répertoire *polyMesh*

### 3.7.2.1 Fichiers du sous-répertoire *polyMesh*

- **points** : Une liste de vecteurs représentant les sommets des cellules.
- **faces** : Une liste de faces, chaque face étant décrite par une liste d'indices de sommets dans la liste des points.
- **owners** : Une liste des propriétaires des faces. La position du propriétaire dans la liste fait référence à la face à laquelle il appartient. Le nombre de propriétaires est égal au nombre total de faces (faces intérieures + faces frontières).
- **neighbours** : Une liste de cellules voisines. Le nombre de voisins est fondamentalement égal au nombre de faces intérieures.
- **boundary** : Regroupe les limites du domaine, les faces de chaque type de limite étant appelées *patch* et portant un nom. Le type de chaque *patch* de frontière (*type*) est déclaré avec son nombre de faces (*nFaces*) et la face de départ (*startFace*), qui fait référence à l'index de la première face de la liste.

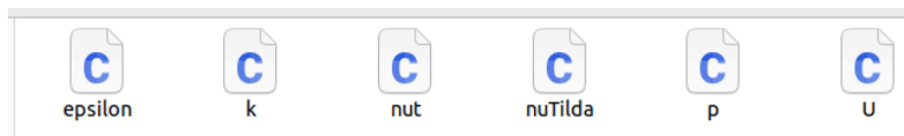
### 3.7.3 Répertoire "système"

Ce répertoire contient les fichiers nécessaires pour le choix de paramètres associés à la procédure de solution. Il contient au moins les quatre fichiers suivants :

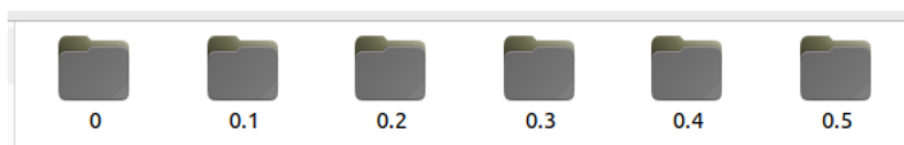
- **controlDict** : Permet de configurer la simulation (temps de début/fin, pas de temps, paramètres de sortie de données).
- **fvSchemes** : Sélectionne les schémas de discrétisation utilisés dans la solution.
- **fvSolution** : Contient des informations relatives aux algorithmes de solution et aux coefficients de relaxation utilisés dans le processus de résolution.
- **blockMeshDict** : Permet de créer la géométrie et de générer son maillage si aucun logiciel externe n'a été utilisé.

### 3.7.4 Répertoire "0"

Ce dossier contient des fichiers nécessaires selon la simulation à réaliser, *e.g.* vitesse  $U$ , pression  $P$ , taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente epsilon, énergie cinétique turbulente  $k$  etc. Chaque fichier peut contenir : soit, valeurs initiales et conditions limites que l'utilisateur doit spécifier pour définir le problème. Les champs de chaque variable doivent toujours être initialisés.



Lors de la simulation des dossiers générés porteront le nom de chaque temps simulé. Chaque dossier contient les fichiers relatifs à chaque variable. Chaque fichier contient les valeurs de la variable considérée dans tout le domaine de maillage. Puisque nous commençons souvent la simulation à la fois  $t = 0$ , les conditions initiales sont généralement stockées dans le répertoire 0.



### 3.7.5 Modélisation de la turbulence par OpenFOAM

OpenFOAM offre une approche flexible et modulaire pour modéliser les écoulements turbulents en mécanique des fluides numérique (*CFD*). Il intègre une large gamme de modèles de turbulence, allant des approches *RANS* (moyennées) aux méthodes LES (simulation des grandes échelles) et hybrides (*DES*, *SAS*).

### 3.7.6 Modélisation de l'écoulement diphasique

OpenFOAM propose une variété de solveurs pour la simulation des écoulements diphasiques, couvrant différentes approches selon la nature de l'écoulement. Parmi ces méthodes, on trouve la technique Volume of Fluid (*VOF*), utilisée pour modéliser des interfaces nettes entre deux fluides non miscibles à l'aide d'une fonction scalaire représentant la fraction volumique d'une phase. Le modèle Euler-Euler permet de traiter les deux phases comme des milieux inter-pénétrants, avec des équations distinctes pour chaque phase et des modèles d'interaction entre elles, ce qui le rend adapté aux écoulements chargés en particules ou bulles. Pour les cas plus complexes impliquant plusieurs phases ou des réactions chimiques entre phases, des variantes du modèle Euler-Euler sont disponibles.

OpenFOAM offre également la possibilité de simuler des interfaces mobiles à l'aide d'un maillage dynamique, utile dans les situations où la géométrie évolue au cours du temps, bien que cette méthode soit généralement réservée aux écoulements laminares ou faiblement turbulents en raison de ses limitations numériques.

OpenFOAM propose également des outils pour le maillage mobile, permettant de modéliser des interfaces ou des structures mouvantes (méthode *ALE* – Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Cette approche est utilisée lorsqu'il est nécessaire de suivre précisément le déplacement d'une interface, par exemple pour des objets flottants ou des parois flexibles.

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous détaillons les étapes fondamentales de résolution d'un problème via la Méthode des Éléments Finis (*MEF*) et la Méthode des Volumes Finis (*MVF*) ainsi que la Méthode des différences finies (*MDF*). L'équation générale de transport, choisie comme cas d'étude, est discrétisée selon ces deux méthodes pour en comparer les mécanismes. En parallèle, les logiciels OpenFoam et FLUENT sont introduits, leur utilisation pratique pour les simulations étant approfondie dans le chapitre suivant.

## Applications et discussion

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse des profils de la ligne d'eau dans différentes configurations de transitions hydrauliques. L'étude porte notamment sur l'évolution de la ligne d'eau le long de l'axe de symétrie ainsi que le long de la paroi latérale solide. Dans un premier temps, les géométries étudiées sont décrites en détail. Ensuite, les résultats numériques obtenus sont interprétés et comparés aux données expérimentales disponibles ainsi qu'à d'autres résultats issus de la littérature.

### 4.2 Les géométries

Dans le présent travail, trois configurations de canal ont été étudiées, à savoir : une convergence rectiligne symétrique, une divergence rectiligne symétrique, et un élargissement de Rouse, chacune présentant des caractéristiques géométriques spécifiques.

#### 4.2.1 Description géométrique de la transition convergente symétrique

Les figures ci-dessous présentent la géométrie réalisée avec Fluent et OpenFoam.



Figure 4.1 : Convergence rectiligne avec OpenFoam

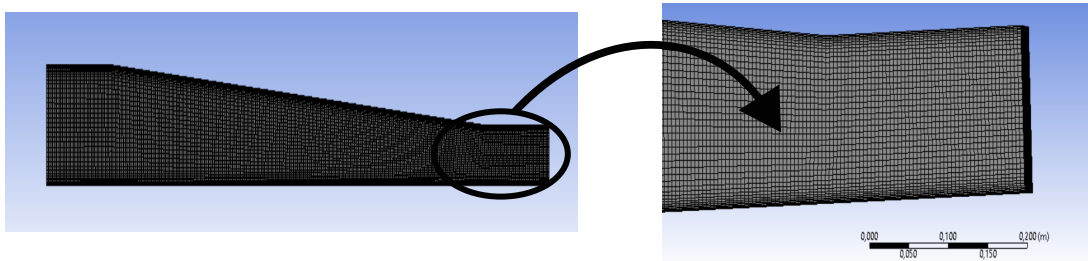


Figure 4.2 : Représentation de maillage de convergence rectiligne avec fluent

Tableau 4.1 : Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de la convergence rectiligne symétrique

Catégorie	Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<b>Dimensions</b>	Longueur de la transition	$L$	1.45	m
	Largeur à l'amont	$b_1$	0.610	m
	Largeur à l'aval	$b_2$	0.305	m
	Angle de déviation	$\theta$	6.0038	degrés
<b>Conditions aux limites</b>	Nombre de Froude amont	$F_1$	4	–
	Profondeur amont	$h_0$	0.0305	m
	Vitesse longitudinale amont	$u_0$	2.188	m/s
	Vitesse transversale aval	$v_0$	0	m/s
<b>Hypothèses physiques</b>	Pente du canal	–	Horizontal	–
	La rugosité	$n$	0	–

#### 4.2.2 Description géométrique de l'élargissement de Rouse



Figure 4.3 : élargissement de Rouse avec OpenFoam

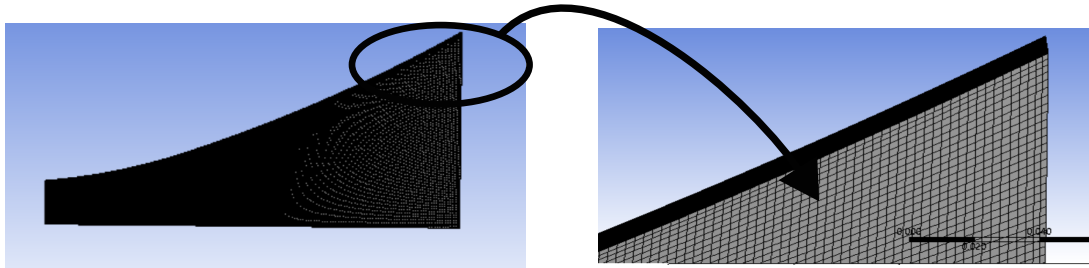


Figure 4.4 : Représentation de maillage, Elargissement de Rouse avec fluent

Tableau 4.2 : Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de l'élargissement de Rouse

Catégorie	Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<b>Dimensions</b>	Longueur de l'expansion	$L$	0.549	m
	Largeur à l'amont	$b_1$	0.122	m
	Rapport $h_0/b_1$	$h_0/b_1$	0.25	–
<b>Conditions aux limites</b>	Nombre de Froude amont	$F_1$	2	–
	Hauteur d'eau à l'amont	$h_0$	0.0305	m
	Vitesse longitudinale amont	$u_0$	1.094	m/s
	Vitesse transversale amont	$v_0$	0	m/s
<b>Hypothèses physiques</b>	Pente du canal	–	Horizontal	–
	La rugosité	$n$	0.012	–

### 4.2.3 Description géométrique de la transition divergente symétrique



Figure 4.5 : convergence rectiligne avec OpenFoam

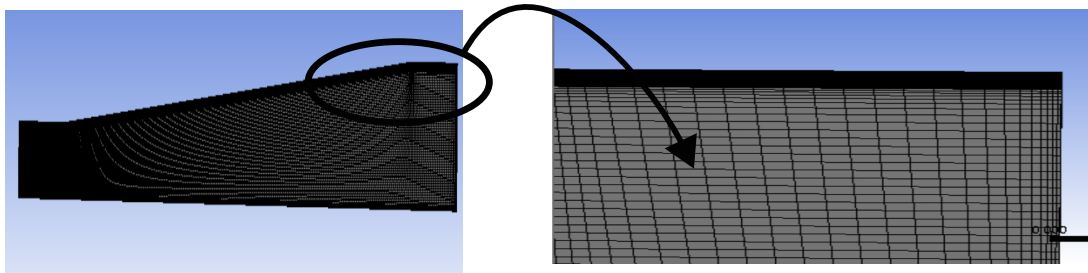


Figure 4.6 : Représentation de maillage avec fluent

Tableau 4.3 : Caractéristiques géométriques, hydrauliques et numériques de la divergence rectiligne symétrique

Catégorie	Paramètre	Symbole	Valeur	Unité
<b>Dimensions</b>	Longueur de la transition	$L$	1.52	m
	Largeur à l'amont	$b_1$	0.305	m
	Largeur à l'aval	$b_3$	0.610	m
	Angle de déviation	$\theta$	5.73	degrés
<b>Conditions aux limites</b>	Nombre de Froude amont	$F_1$	4.15	–
	Tirant d'eau à l'amont	$h_0$	0.012	m
	Vitesse longitudinale amont	$u_0$	1.402	m/s
	Vitesse transversale amont	$v_0$	0	m/s
<b>Hypothèses physiques</b>	Pente de frottement	–	Négligeable	–
	La rugosité	$S_0$	lisse	degrés

### 4.3 Simulations réalisées

Dans ce qui suit nous présentons les résultats de simulation avec Fluent et openFoam des cas présentés auparavant. Ces résultats seront comparés aux résultats issus de la littérature.

#### 4.3.1 Etude d'une contraction rectiligne symétrique

Cette application a pour objectif d'étudier l'écoulement torrentiel au sein d'une contraction rectiligne symétrique, représentée par la figure 1.13. Les résultats de simulation sont comparés aux résultats issus de la littérature. A première vue, les deux codes de calcul Fluent et openFoam reproduisent le ressaut hydraulique observé dans l'expérience de Coles et Shintaku (1943) ainsi que dans la simulation numérique de Berreksi (2012).

### Au niveau de la paroi latérale :

- On constate ici deux surélévations importantes, la première se manifeste presque à la fin de la contraction entre les points  $x/h_0 = 33.2$  et  $x/h_0 = 47.5$ , et la deuxième loin dans le canal aval rectangulaire.
- Les résultats obtenus avec Ansys-fluent et OpenFoam sont proches dans l'ensemble et ils montrent un accord satisfaisant avec les résultats numériques de [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#) ainsi celles de [Berreksi \(2012\)](#), Bien qu'il existe une légère différence, les résultats sont pratiquement similaires.
- L'analyse comparative avec les mesures expérimentales met en évidence une correspondance satisfaisante dans l'ensemble, bien que la hauteur maximale calculée soit légèrement supérieure à celle observée par [Coles et Shintaku \(1943\)](#) et les résultats numériques de [Berreksi \(2012\)](#) .

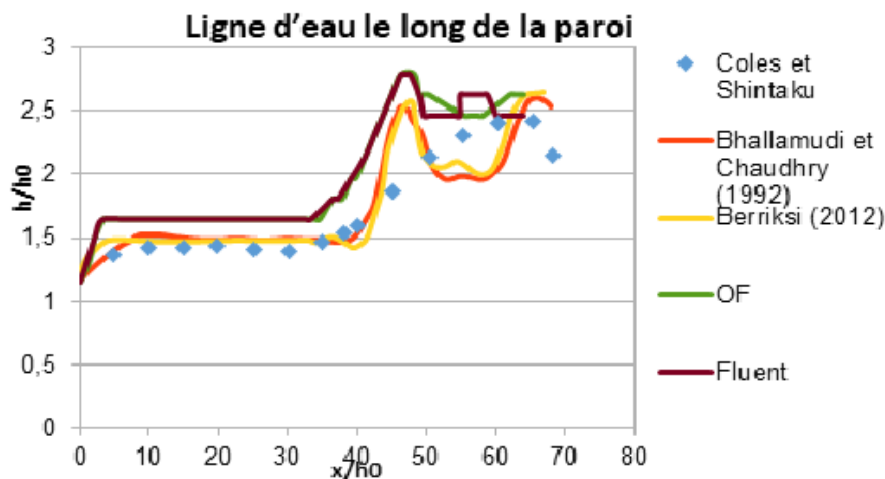
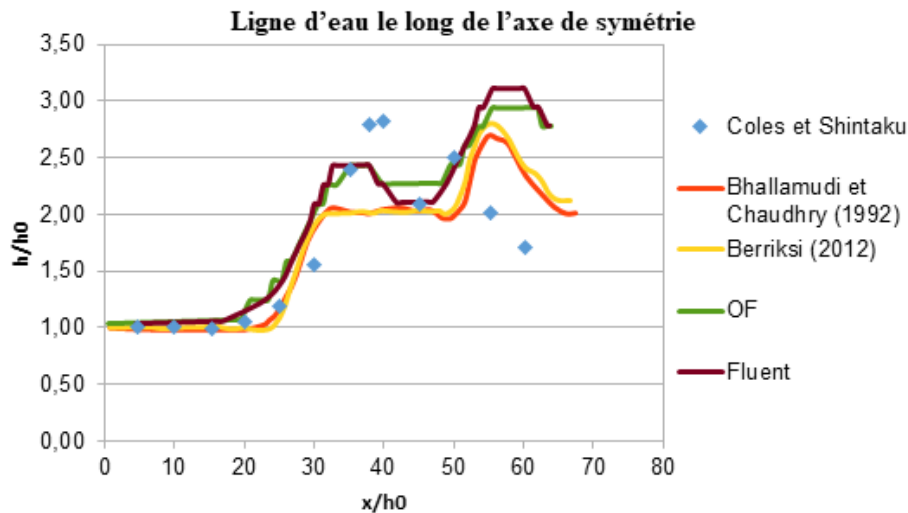


Figure 4.7 : Profil de la ligne d'eau sur l'axe de la paroi dans une convergence

### Au niveau de e l'axe de symétrie :

- Deux surélévations distinctes sont présentes au niveau de l'axe de symétrie dans la ligne d'eau : l'une à l'intérieur de la contraction, et l'autre, plus considérable, à l'intérieur du canal aval rectangulaire. Elle prend naissance au début du canal aval, juste à la fin du rétrécissement. Signalons que le point d'abscisse 47,75 sur l'axe  $x/h_0$  correspond à la fin de la contraction.
- Les résultats obtenus avec Ansys-fluent et OpenFoam sont presque identiques, ils montrent un accord important avec les résultats numériques de [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#) et de [Berreksi \(2012\)](#).

- En comparaison avec les mesures expérimentales, les résultats obtenus s'avèrent relativement moins satisfaisants. Un décalage est en effet observé entre le pic numérique et le pic expérimental rapporté par [Coles et Shintaku \(1943\)](#).



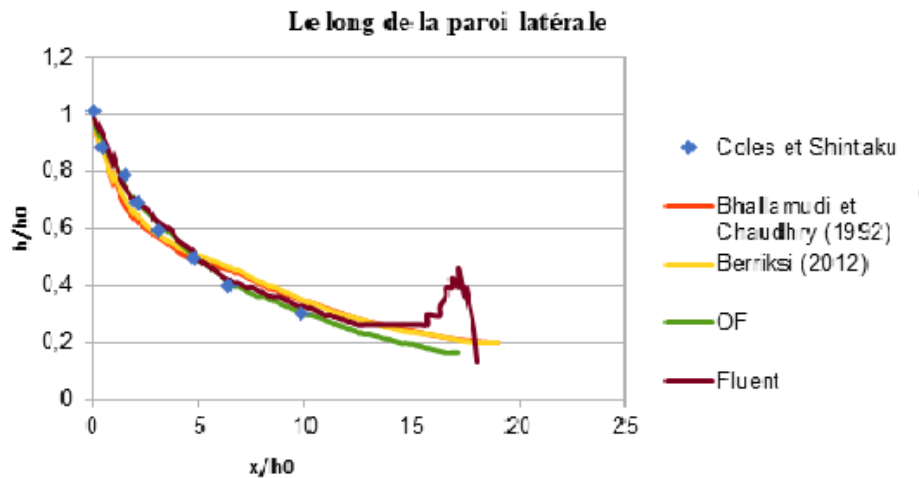
**Figure 4.8 :** Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une convergence

### 4.3.2 Etude de l'élargissement de Rouse

Les résultats sont obtenus comme suit :

#### Au niveau de la paroi latérale :

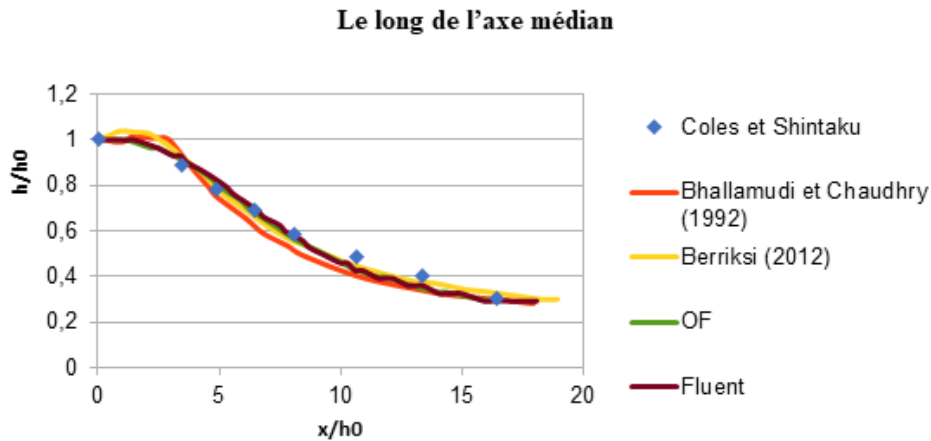
- Le profil de la surface libre diminue avec la distance, mais cette diminution s'effectue plus rapidement que celle observée le long de l'axe de symétrie.
- D'après les résultats présentés, on n'observe aucune agitation dans la surface d'écoulement, sauf au point  $x/h_0=17$ , où la courbe obtenue par Fluent montre une légère perturbation. Cette singularité pourrait être attribuée à des effets numériques spécifiques au logiciel Fluent, tels que des instabilités liées au maillage, à la discrétisation, ou aux conditions aux limites.
- La ligne d'eau calculée est presque identique à celle déterminée numériquement par [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#) et [Berreksi \(2012\)](#)
- Comparé aux mesures expérimentales de [Coles et Shintaku \(1943\)](#) (rapportées par [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#)), le profil obtenu à l'aide du schéma de Fluent et OF présente une approximation jugée satisfaisante.



**Figure 4.9 :** Profil de la ligne d'eau sur l'axe de la paroi dans l'élargissement de rouse

#### Au niveau l'axe de symétrie :

- On observe que la ligne d'eau décroît avec la distance, cette décroissance s'effectue de manière progressive au début de l'élargissement.
- Aucune instabilité de l'écoulement n'a été constatée au sein de cette structure hydraulique.
- Une bonne correspondance est observée entre les résultats produits par Fluent et OpenFoam avec ceux obtenus numériquement par [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#) et [Berreksi \(2012\)](#).
- Les résultats de cette analyse montrent également un très bon accord avec les mesures expérimentales de [Coles et Shintaku \(1943\)](#), rapportées par [Bhallamudi et Chaudhry \(1992\)](#).



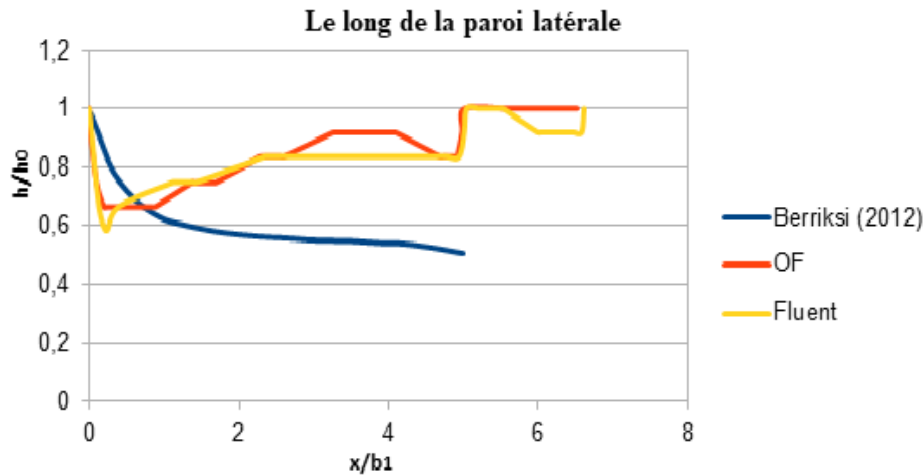
**Figure 4.10 :** Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans l'élargissement de rouse

### 4.3.3 Etude d'un élargissement rectiligne symétrique

Cette troisième application a pour objectif l'analyse d'un écoulement torrentiel à travers un élargissement rectiligne symétrique de section transversale rectangulaire, tel qu'illustré à la figure 1.19. Ce cas a été étudié expérimentalement par [Herbich et Walsh \(1972\)](#) et numériquement par [Berreksi \(2012\)](#)

**Au niveau la paroi latérale :**

- On observe une diminution assez significative de la surface libre à l'entrée de l'élargissement rectiligne suivie par une augmentation progressive de la hauteur d'eau.
- Les résultats obtenus avec OpenFOAM et ANSYS Fluent sont très proches l'une de l'autre, ce qui indique que les deux méthodes simulent le phénomène de façon similaire, avec des écarts négligeables entre elles.
- Au début, les résultats de OF et Fluent montrent une bonne concordance avec celles de [Berreksi \(2012\)](#), leurs valeurs étant proches et suivant la même tendance de décroissance rapide initiale. Cependant, après cette phase initiale, OF et Fluent se stabilisent à des valeurs plus élevées, s'écartant progressivement de résultats de [Berreksi \(2012\)](#), qui continue à décroître de manière plus marquée.



**Figure 4.11** : Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une divergence

Cette différence est due à la formation d'un ressaut hydraulique, un phénomène qui pourrait résulter d'un changement de régime d'écoulement (torrentiel au fluviale).

#### Au niveau l'axe de symétrie :

- une élévation de la ligne d'eau au début de l'élargissement jusqu'au point  $x/b1=1,6$  ; Après, la ligne d'eau subit un léger abaissement, qui s'accroît progressivement jusqu'au point  $x/b1=3$ , puis connaît une élévation progressive indiquant un rétablissement partiel du régime hydraulique en aval.
- Les résultats obtenus par OpenFoam et Fluent sont plus proches, et ils montrent une concordance avec les mesures expérimentales réalisées par [Herbich et Walsh \(1972\)](#).
- Au-delà de  $x/b1=3$ , les résultats de [Berreksi \(2012\)](#) montrent que la ligne d'eau continue sa diminution. Par contre Dans notre cas, les résultats issus des deux codes Fluent et open-Foam montrent une surélévation de la surface libre (ressaut hydraulique). Cette dernière est due au fait que le nombre de Froude diminue de 4 à 2 comme le montre la figure 4.13.

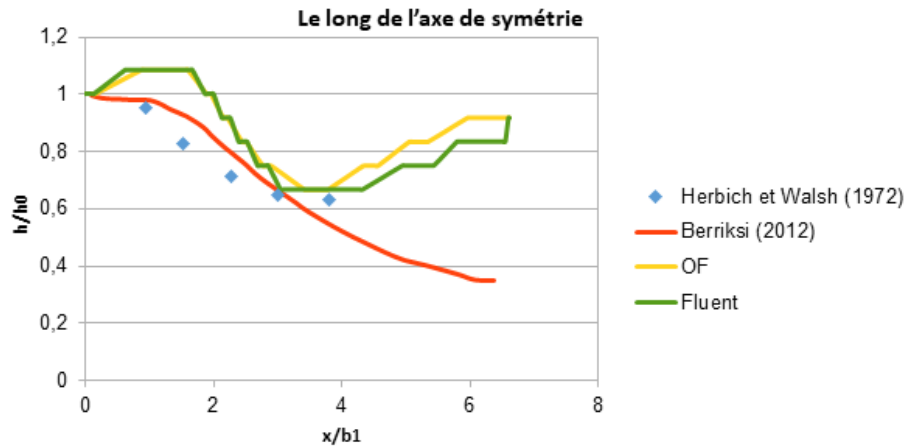


Figure 4.12 : Profil de la ligne d'eau sur l'axe de symétrie dans une divergence

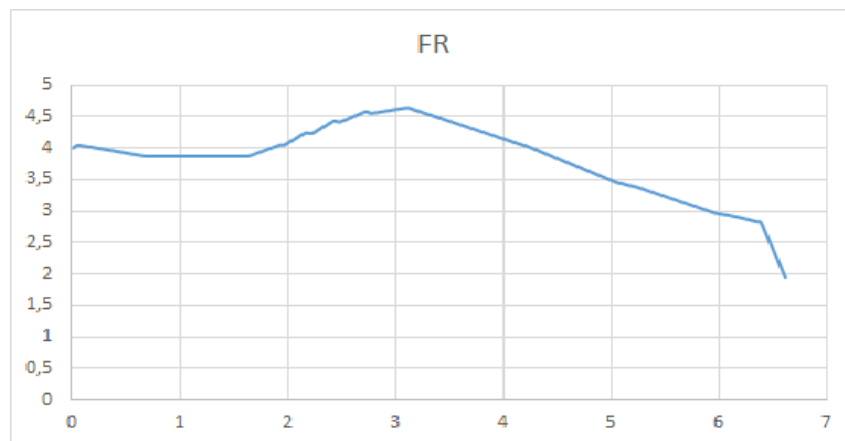


Figure 4.13 : Nombre de froude Froude au niveau de symétrie

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, l'évolution de la ligne d'eau a été analysée pour différentes configurations de transitions hydrauliques, en se concentrant sur l'axe de symétrie et la paroi latérale solide. L'objectif principal était de comprendre l'impact des géométries sur les profils hydrauliques. Les résultats numériques obtenus ont montré une bonne cohérence avec les données expérimentales et les références issues de la littérature, validant ainsi la démarche de modélisation adoptée. Cette analyse a permis de mettre en évidence les effets des transitions sur le régime d'écoulement, en particulier la formation de ressauts hydrauliques et les variations du nombre de Froude.

## Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons étudié la dynamique des écoulements à surface libre en présence de transitions géométriques telles que les contractions et les élargissements symétriques. L'objectif principal était d'analyser l'impact de ces variations de géométrie sur l'évolution de la ligne d'eau et les régimes d'écoulement.

Pour ce faire, nous avons utilisé la simulation numérique à l'aide des logiciels ANSYS Fluent et OpenFOAM. Le modèle de turbulence  $k-\omega SST$  a été utilisé pour mieux capturer les effets de la turbulence associés aux écoulements à surface libre .

Les résultats numériques obtenus ont été confrontés à des données expérimentales et des résultats issus de la littérature, en particulier ceux de [Bhalla et Chaudhry \(1992\)](#) et [Berreksi \(2012\)](#). L'analyse a révélé une bonne concordance, notamment dans la représentation des phénomènes comme le ressaut hydraulique, la chute de tirant d'eau.

Parmi les principaux résultats de ce travail, nous retenons :

- Une représentation précise de l'évolution de la surface libre le long des axes de symétrie et des parois latérales.
- La capacité des modèles numériques à prédire les profils de la ligne d'eau dans différentes géométries.
- Une validation satisfaisante des simulations à travers la comparaison avec les profils expérimentaux.

Ainsi, ce travail contribue à une meilleure compréhension des comportements hydrauliques dans des configurations complexes, et démontre l'efficacité de la modélisation numérique pour appuyer la conception et l'optimisation des ouvrages hydrauliques à surface libre.

## Bibliographie

- Berreksi A. : *Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert*. Thèse de doctorat ès sciences, École Nationale Polytechnique d'Alger, Alger, Algérie, 2012.
- Bhallamudi S. M. et Chaudhry M. H. : Computation of flows in open channel transitions. *Journal of Hydraulic Research*, 30(1):77–93, janvier 1992.
- Boudiaf H. : Contribution à l'écoulement turbulent homogène et isotrope dans les canaux à surface libre. Mémoire de magister, Université de Batna, Batna, Algérie, avril 2009. Pages 18, 21.
- Boussinesq JOSEPH : *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Imprimerie Nationale, Paris, 1877. Travail fondateur sur la dynamique des fluides à surface libre.
- Chassaing P. : *Turbulence en mécanique des fluides : analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Collection Polytech. Cépaduès éditions, 2000.
- Chung T. J. : *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, University of Alabama in Huntsville, 2nd ed. édition, 2010.
- Coles D. et Shintaku T. : Experimental relation between sudden wall angle changes and standing waves in supercritical flow. B.S. thesis, Lehigh University, 1943. Bethlehem, Pennsylvania, USA.
- CoursGCCChap5.
- Ferziger JOEL H. et Perić MILOVAN : *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd édition, 2002. ISBN 3-540-42074-6. URL <http://www.springer.de>.
- fluent 6.0 : *User's Guide*.
- Guechi R., Desevaux P. et Baucour P. : Étude numérique du refroidissement d'une surface métallique par pulvérisation (spray cooling). In *20<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique*, Besançon, France, septembre 2011. Communication présentée du 29 août au 2 septembre, page 2.
- Habbaz B.M. : *Hydraulique Fluviale*. Département d'Hydraulique, Faculté d'Architecture et de Génie Civil, 2025. Polycoié de cours destiné aux étudiants Master Hydraulique.
- Herbich J. B. et Walsh P. : Supercritical flow in rectangular expansions. *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, 98(9):1691–1700, septembre 1972.

- Ippen A. T. et Dawson J. H. : Design of channel contractions. *In Symposium on High-Velocity Flow in Open Channels*, volume 116, pages 326–346. ASCE, 1951.
- Launder B. E. et Spalding D. B. : The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2):269–289, 1974.
- Lipeme Kouyi G. : *Expérimentations et modélisations tridimensionnelles de l'hydrodynamique et de la séparation particulaire dans les déversoirs d'orage*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur – Strasbourg I, Strasbourg, décembre 2004. Pages 23, 34, 58, 67, 73, 77.
- Marty P. : Mécanique des fluides, 2012. Université Joseph Fourier, Grenoble, le 09/07/2012, p. 20.
- Matene E. : Présentation du code fluent et de la méthode numérique de prévision. Projet de recherche, CUKM, Khmes Meliana, 2011. Pages 75–76.
- Menter F. R. : Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.
- Nee V. W. et Kovasznay L. S. G. : Simple phenomenological theory of turbulent shear flows. *Physics of Fluids*, 12(3):473–484, 1969.
- OpenFOAM Foundation : *k-SST*. OpenFOAM Foundation. URL <https://doc.openfoam.com/2306/tools/processing/models/turbulence/ras/linear-evm/rtm/kOmegaSST/>.
- OpenFOAM User Guide.
- Patankar S. V. et Spalding D. B. : A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787–1806, 1972.
- Prandtl LUDWIG : Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *In Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, pages 62–74. Zürich, Suisse, 1925. Rapport sur les recherches concernant la turbulence pleinement développée.
- Reynolds OSBORNE : An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 174:935–982, 1883.
- Rodi W. : *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics : A State-of-the-Art Review*. International Association for Hydraulic Research (IAHR), Rotterdam, Netherlands, 2nd ed. édition, 1984.
- Schiestel R. : *Modeling and Simulation of Turbulent Flows*. Wiley, 2nd ed édition, 2008.
- Spalart PHILIPPE R. et Allmaras STEPHEN R. : A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. Rapport technique NASA-TM-103975, NASA Technical Memorandum, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, 1992.
- Vazquez J. : Hydraulique à surface libre. <https://www.engees.unistra.fr>, 2006. Systèmes Hydrauliques Urbains – ENGEES, École nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg, pp. 10–11.

Versteeg H. K. et Malalasekera W. : *An Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method*. Pearson Education, Harlow, England, 2nd ed. édition, 2007.

Wilcox DAVID C. : *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, California, 2nd ed. édition, 1998.

**ملخص:** في إطار هذا العمل، تم التركيز على المحاكاة العددية للجريان المضطرب ذي السطح الحر داخل قنوات تحتوي على انتقالات هندسية، مثل الانقباضات والانفراجات المتماثلة. ولهذا الغرض، تم استخدام نماذج عددية عبر برنامجي أنسيس فلونت و أوبن فوم، وكلاهما يعتمدان على طريقة الحجم المنتهية. تم استخدام معادلات نافير-ستوكس لسائل غير قابل للانضغاط، بالإضافة إلى نموذج حجم السائل لتتبع السطح الحر. وقد تمحور التحليل حول تطور خط الماء والظواهر المرتبطة بانتقالات نظام الجريان.

**الكلمات المفتاحية:** نمذجة، جريان مضطرب، انقباض، انفراج، الحجم المنتهية

**Résumé :** Dans le cadre de ce présent travail, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique d'un écoulement turbulent à surface libre au sein de canaux présentant des transitions géométriques, telles que les contractions et élargissements symétriques. Pour cela, nous avons mis en œuvre des modèles numériques en utilisant les logiciels ANSYS Fluent et OpenFOAM, tous deux basés sur la méthode des volumes finis. Les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible ont été utilisées, ainsi que le modèle VOF (Volume of Fluid) pour le suivi de la surface libre. L'analyse a porté sur l'évolution de la ligne d'eau et les phénomènes liés aux transitions de régime d'écoulement.

**Mots clés :** écoulement turbulent, élargissement, contraction, modélisation, volumes finis.

**Abstract :** As part of this work, we focused on the numerical simulation of a turbulent free-surface flow in channels with geometric transitions, such as symmetric contractions and expansions. To this end, we implemented numerical models using ANSYS Fluent and OpenFOAM software, both based on the finite volume method. The Navier-Stokes equations for an incompressible fluid were used, along with the VOF (Volume of Fluid) model to track the free surface. The analysis focused on the evolution of the water surface profile and flow regime transition phenomena.

**Keywords :** Turbulent flow, Expansion, Contraction, Modeling, Finite volumes