

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université Mouloud MAMMERRI de Tizi-Ouzou**



**Faculté de Génie Electrique et d'Informatique**  
**Département d'Automatique**

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

En vue de l'obtention du diplôme

*D'INGENIEUR D'ETAT EN AUTOMATIQUE*

*Thème*

*Identification d'un système par  
analyse d'images*

Proposé et dirigé par :

A. MAIDI  
K. HAMMOUCHE

Présenté par :

Hamama ISSAD

Soutenu le : 08/07/2009    Devant le jury d'examen composé de :

Président        : Mr.    S. DJENNOUNE  
Examineur      : Melle O. CHILALI  
Examineur      : Mme. S. ALKAMA

*Promotion 2009*

# *Remerciement*



# Remerciements



*Une pensée pieuse à Dieu qui a éclairé notre chemin et mené vers la concrétisation de ce modeste travail.*

*Ce présent travail n'aurait pas pu s'effectuer sans le soutien et l'encouragement permanent de toutes les personnes qui ont contribué dans sa réalisation ; qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude, je remercie particulièrement :*

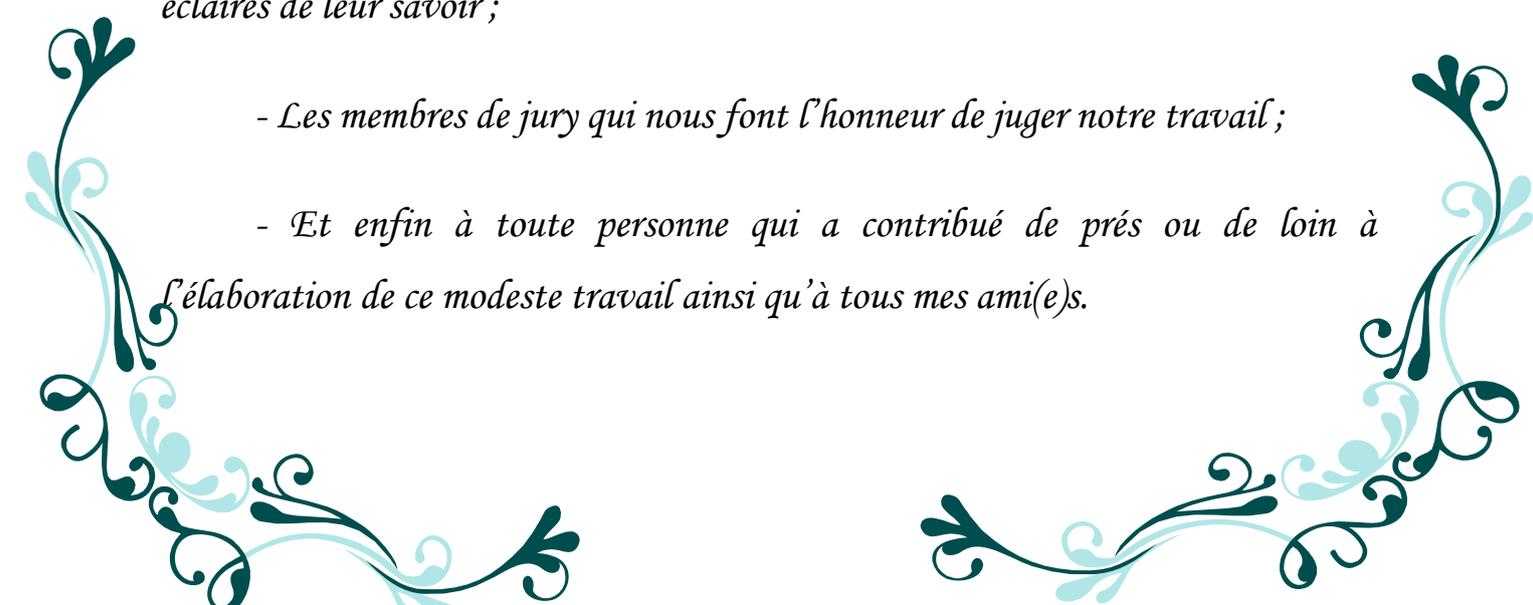
*- Mes promoteurs Mr A. MAIDI et Mr K. HAMMOUCHE enseignants à l'UMMTO, pour leurs gentillesse, compréhension, disponibilité, ainsi que pour toute l'aide et assistance qu'ils m'ont apporté durant l'élaboration de ce mémoire ;*

*- Tous les membres de ma famille pour leurs soutient, leurs encouragements et leur aide précieuse.*

*- Tous les enseignants que j'ai eus durant ma formation, qui nous ont éclairés de leur savoir ;*

*- Les membres de jury qui nous font l'honneur de juger notre travail ;*

*- Et enfin à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce modeste travail ainsi qu'à tous mes ami(e)s.*



# *Sommaire*

# Sommaire

<i>Introduction Générale</i> .....	1
------------------------------------	---

## **Chapitre I : *Modélisation et identification des systèmes***

I.1. Introduction .....	3
I.2. Modèle et système .....	3
I.2.1. Système (processus) .....	3
I.2.2. Modèle (modèle d'un système) .....	4
I.3. Type de modèle .....	5
I.3.1. Modèle de connaissance .....	6
I.3.2. Modèle de comportement .....	6
I.3.3. Modèle intermédiaire .....	7
I.4. Identification .....	7
I.5. Méthodes d'identification .....	10
I.5.1. Méthode graphique .....	10
I.5.2. Méthode non récursive .....	10
I.5.3. Méthode récursive .....	11
I.5.4. Méthode du modèle .....	11
I.6. Conclusion .....	12

## **Chapitre II : *Modélisation d'un pendule simple***

II.1. Introduction .....	13
II.2. Présentation .....	13
II.3. Modélisation du pendule simple .....	14
II.3.1. Formalisme de Lagrange .....	14
II.3.2. Calcul de l'équation différentielle .....	14
1) Calcul de l'énergie cinétique .....	14
2) Calcul de l'énergie potentielle .....	15
3) Calcul du Lagrangien .....	15
4) Calcul des moments .....	15
II.3.3. Calcul de représentation d'état .....	16

II.3.4. Linéarisation autour du point d'équilibre .....	17
1) Point d'équilibre .....	17
2) Linéarisation autour de ce point .....	18
3) Expression mathématique de la réponse temporelle du système .....	19
II.4. Simulation et interprétation des résultats .....	19
II.5. Conclusion .....	21

### **Chapitre III : *Mesure des positions de la masse du pendule par vision artificielle***

III.1. Introduction .....	22
III.2. Acquisition d'une séquence d'image du pendule.....	22
III.3. Détection de la masse m en mouvement .....	24
III.3.1. Méthodes de détection d'objet en mouvement .....	24
1) Méthodes structurelles (haut niveau).....	24
2) Analyse du flux optique (niveau intermédiaire).....	25
3) Méthodes orientées mouvement (bas niveau) .....	25
III.3.2. Méthode adoptée .....	27
III.4. Binarisation des images de la séquence .....	29
III.5. Calcul des centres de gravité de la masse .....	31
III.6. Conclusion .....	32

### **Chapitre IV : *Simulation et interprétation des résultats***

IV.1. Introduction .....	33
IV.2. Mesures de la variable caractéristique .....	33
IV.3. Identification des paramètres du pendule .....	36
IV.4. Résolution du problème d'optimisation.....	38
IV.5. Conclusion .....	39

<b>Conclusion Générale</b> .....	41
----------------------------------	----

*Introduction*  
*Générale*

L'automatique en tant qu'ensemble de théories mathématiques utilisées pour l'analyse et la synthèse des lois de commande pour les systèmes, repose essentiellement sur un modèle mathématique du système à commander. Le modèle doit être simple mais traduit fidèlement le comportement dynamique du système pour qu'il soit exploitable.

Ainsi, pour la conception d'un système de commande, la première étape consiste à déterminer un modèle mathématique pour le système à commander. Ce modèle peut être obtenu par différentes approches, ce qui permet de définir trois types de modèles. La première approche consiste à écrire toutes les lois physiques reliant les variables caractéristiques du système. Cette approche, appelée modélisation, conduit généralement à des équations différentielles non linéaires qui peuvent être linéarisées autour des points de fonctionnement pour dériver des modèles linéaires (fonctions de transfert). Ce type de modèle est appelée boîte blanche. La deuxième approche, appelée identification, est basée sur les mesures des variables caractéristiques, généralement les entrées et les sorties, utilisées pour déterminer moyennant des algorithmes, les paramètres d'un modèle dont la structure est choisie simple. Ce type de modèle est appelé boîte noire.

Vu la complexité des systèmes physiques, le modèle de type boîte noire est le plus utilisé, puisqu'une représentation acceptable du comportement dynamique peut toujours être obtenue. Un des problèmes rencontrés dans l'identification des paramètres d'un modèle boîte noire est la collecte des mesures car pour certains systèmes il est impossible de placer des capteurs ou ces derniers sont onéreux.

Les techniques de traitement d'images ont beaucoup évolué ces dernières années, et permettent de répondre à certaines questions liées à l'automatique. Parmi ces questions, on retrouve le problème d'indentification sans contact, c'est-à-dire la mesure est obtenue sans avoir un contact direct entre le capteur et la variable à mesurer. Ainsi, la vision artificielle joue un rôle important dans les problèmes d'automatique.

Dans ce présent mémoire, on s'intéresse à l'identification sans contact. L'idée consiste à utiliser une séquence vidéo (un ensemble d'images) qui sera traitée moyennant des méthodes de traitement d'images pour récupérer une mesure d'une variable caractéristique. Cette technique est très intéressante pour les objets en mouvement dont on cherche à identifier les trajectoires, c'est-à-dire leur modèle mathématique. Pour illustrer cette démarche, on

considère comme application l'identification d'un pendule simple à partir d'une séquence d'images permettant de récupérer les différentes positions de la masse dans un repère fixe.

Le présent mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre I présente des notions générales relatives à la modélisation et l'identification.

Le chapitre II concerne la modélisation du pendule simple à identifier.

Le chapitre III décrit une méthode de traitement d'images permettant de déterminer les positions de la masse à partir d'une séquence d'images.

Le chapitre IV expose la méthode du modèle utilisée pour identifier le pendule simple en utilisant les coordonnées du centre de gravité de la masse.

A la fin une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé est donnée.

Chapitre

**1**

*Modélisation et  
identification des systèmes*

## I.1. Introduction

Afin de pouvoir déterminer le modèle d'un système dynamique, deux méthodes peuvent être appliquées ; la modélisation qui nécessite la traduction de toutes les lois physiques en équations mathématiques, et l'identification, qui est une modélisation expérimentale, utilise des mesures pour déterminer les paramètres du modèle.

Ce présent chapitre est consacré à la présentation générale de la notion du modèle et ses différents types. Le chapitre aborde également le principe d'identification d'un système dynamique et donne un aperçu sur les différentes méthodes d'identification.

## I.2. Modèle et système

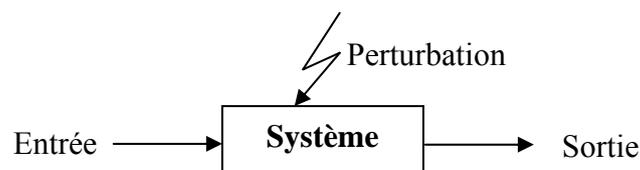
Un modèle est issu de la rencontre d'un système et de son modélisateur. Il ne faut donc pas confondre le modèle et la réalité du processus : un modèle ne peut pas être exact.

### I.2.1. Systèmes (Processus)

On définit un système comme étant une combinaison de parties assemblées pour concourir à un résultat. Par exemple, un réacteur chimique, une colonne de distillation, etc. Pour concevoir ou analyser un système, on convient de l'isoler, quoique ceci ne puisse être toujours réalisé. Dans le domaine technique, on en déduit la définition suivante :

*Un système est un dispositif isolé soumis aux lois de la physique, et caractérisé par certaines grandeurs. Une grandeur est ce que l'on peut évaluer, mesurer ou calculer.*

Dans le cas général, un processus est un système traversé par des flux d'information, d'énergie et de matière tout en étant soumis à des perturbations. Pour le système, on propose la représentation symbolique suivante :



**Figure I.1** Représentation générale d'un processus.

Du point de vue physique, un processus correspond à un système physique envisagé dans le cadre de l'évolution des échanges réalisés avec son environnement.

Diverses variables peuvent être mises en évidence sur un processus.

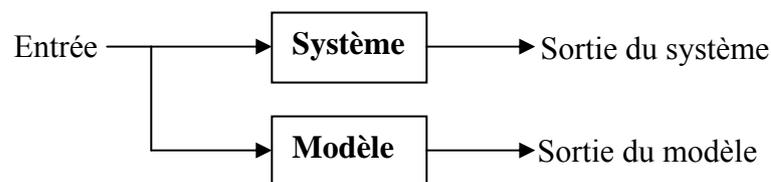
- des entrées de commandes qui permettent d'agir sur l'évolution du processus ;
- des entrées de perturbation, en général non contrôlables par l'utilisateur et agissent également sur le processus ;
- des sorties, variables mesurables ou au moins détectables, qui caractérisent l'action du processus sur son environnement ;
- des variables d'état, variables internes du système, dont l'action sur l'environnement n'est pas nécessairement directement perceptible mais dont l'évolution régit celle du processus.

L'étude et la commande d'un processus s'effectuent en se basant sur un modèle du système.

### I.2.2. Modèle (modèle d'un système)

Le modèle d'un système est une structure mathématique qui est une traduction de la réalité pour pouvoir appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques. Soumise aux mêmes signaux d'action que le système réel, cette structure reproduit le comportement d'une expérience, c'est-à-dire que les variables calculées à partir du modèle sont voisines aux valeurs mesurées sur le processus.

La **Figure I.2** illustre un exemple de modèle, dans le cas où le modèle possède la même entrée que le système, dans ce cas on parle du modèle parallèle.



**Figure I.2** Configuration du modèle.

Nous sommes souvent amenés à parler d'un modèle établi pour un domaine de fonctionnement donné et dans un cadre d'hypothèses. Pour un modèle, quelque soit la valeur du signal appliqué à l'entrée, la simulation donnera un résultat. Par contre, l'application du même signal pour le système réel peut être néfaste.

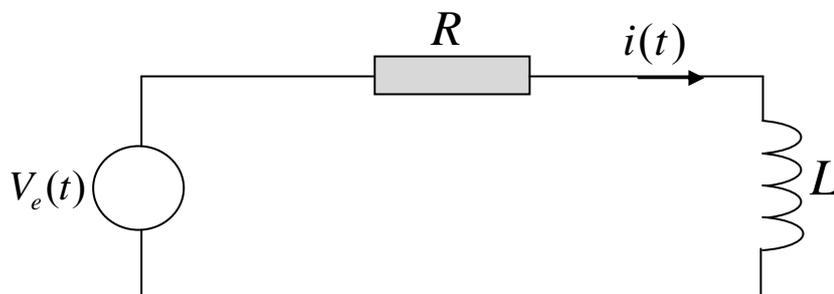
La réalité physique d'un phénomène est généralement très complexe, et bien souvent, on est amené à considérer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices pour traduire cette réalité en équations.

On retient que le modèle exact d'un système dynamique n'existe pas. Le modèle doit satisfaire deux exigences opposées : reproduire la réalité le plus précisément possible et avoir une structure mathématique la plus simple possible (pour une utilisation aisée).

Un modèle reste un compromis dans un ensemble de contraintes. Une fois la structure du modèle est choisit, on cherchera à régler ses paramètres au mieux au sens d'un critère à préciser. Si plusieurs structures de modèles sont candidates à la description des mêmes données, la comparaison de leurs performances s'effectuera à l'aide d'un critère qui permet de les quantifier.

### I.3. Type de modèle

La modélisation d'un phénomène peut s'effectuer selon des degrés de connaissance divers. L'utilisateur souhaite que ce degré de connaissance soit le plus élevé possible, mais la complexité de la réalité physique permet au mieux d'obtenir un modèle approximatif ; c'est ce qui conduit à classer les modèles en trois types : les modèles de connaissance, les modèles de comportement et les modèles intermédiaires qui correspondent à des objectifs différents. Pour illustrer ces différents types, considérons le circuit électrique RL représenté par la **Figure I.3** comme exemple. L'objectif est de déduire les différents types du modèle.



**Figure I.3** Circuit électrique RL.

### I.3.1. Modèle de connaissance

C'est un modèle dont la structure a été établie en faisant appel à des modèles plus généraux à partir des lois de la physique ou de la chimie. Les paramètres des modèles de connaissance ont alors un sens physique : longueur, résistance électrique, inertie, etc., c'est-à-dire que l'on est susceptible de les retrouver avec la même signification dans les modèles d'autre processus.

C'est en fait la voie classique de la mise en équation qui tend à utiliser au mieux toutes les connaissances scientifique et technique disponibles.

Ces modèles sont beaucoup riches de significations que les modèles de représentation et contiennent toutes les informations utiles sur les processus. Ils sont, par contre, beaucoup plus complexes et difficiles à obtenir. Ces modèles s'appellent **Boite blanche**.

Pour l'exemple du circuit RL, les valeurs de R et L sont supposées connues. Pour avoir le modèle de connaissance on utilise les lois physiques (loi de Kirchhoff, d'Ohm), on obtient :

$$V_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}V_e(t) \quad (\text{I.1})$$

Soit :

$u(t) = V_e(t)$  : tension d'entrée du circuit électrique RL.

$x(t) = i(t)$  : courant du circuit électrique RL.

$y(t) = V_R(t)$  : tension aux bornes de la résistance, que l'on prend comme tension de sortie.

D'où :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{R}{L}x(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ y(t) = Rx(t) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

La structure est imposée par les lois de physique. Les paramètres sont donnés.

### I.3.2. Modèle de comportement

C'est un modèle généralement linéaire dont la validité reste limitée à des petites variations autour du point de fonctionnement. On les appelle aussi **fonction de transfert** ou **modèle ARMAX** (Auto Régressive avec Moyenne Ajustée à variable exogène). Les coefficients du modèle sont les paramètres de ce modèle qui ont rarement un sens physique. Ces modèles sont désignés par un modèle **Boite noire**.

Les valeurs de R et L sont supposées inconnues. La fonction de transfert est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} + D \quad \Rightarrow \quad G(s) = R \left( s + \frac{R}{L} \right)^{-1} \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} \quad (\text{I.3})$$

De l'équation (I.2) nous avons :

$$A = -\frac{R}{L}, \quad B = \frac{1}{L}, \quad C = R, \quad D = 0.$$

La structure est imposée par des lois physiques. Les paramètres sont inconnus.

### I.3.3. Modèle intermédiaire

Il constitue un hybride entre les deux modèles précédent. Il peut être considéré comme des modèles de connaissances simplifié. La structure est déterminée par des lois physiques (*modèle de connaissance*) et les paramètres à partir des mesures (*Boîte grise*). Dans ce cas, on parle d'une *modélisation semi-physique*.

Les valeurs de R et L sont inconnues. La structure est obtenue par l'écriture des lois physique.

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}u(t) \\ V_R(t) = Ri(t) \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Les paramètres de R et L sont déterminés par des expériences.

## I.4. Identification

L'identification constitue une phase importante dans la construction du modèle. C'est par elle que le choix de la classe de modèles à adopter puis les valeurs des paramètres qui le caractérisent vont se préciser.

Le plus souvent, l'identification s'effectue en optimisant un critère de qualité qui caractérise

l'écart entre le comportement du processus (repéré par un ensemble de mesures), et celui de son modèle (étudié par simulation) pour un ensemble de sollicitations données.

Rappelons que la modélisation est l'opération d'obtention d'un modèle de connaissance du procédé, et l'identification celle déterminant un modèle du procédé à l'aide du procédé (tableaux) de mesures entrées – sorties. Cette dernière consiste ainsi à élaborer un modèle de représentation, c'est une démarche expérimentale.

L'identification est une opération qui consiste à déterminer les paramètres du modèle dynamique d'un système à partir des mesures réalisées à l'entrée et à la sortie de ce système. L'identification est d'une importance fondamentale pour la commande automatique.

L'identification des systèmes linéaires est devenue une démarche habituelle, et un nombre important de méthodes sont disponibles pour résoudre le problème d'identification dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, en utilisant les méthodes d'identification itérative ou non itérative. La raison principale de ce succès est due essentiellement à la simplicité des modèles linéaires.

En réalité, la plupart des processus physiques ont un comportement non linéaire, excepté dans un intervalle limité (autour du point de fonctionnement) où ils peuvent être considérés linéaires. Il est donc nécessaire de caractériser ou de prédire le comportement d'un processus non linéaire réel en utilisant directement des modèles non linéaires, afin d'améliorer les performances d'identification.

Dans le cadre de l'identification des systèmes non linéaires, la tâche la plus délicate est le calcul de la dimension du système, ceci est une caractéristique commune des structures de modèles non linéaires, puisque les systèmes non linéaires montrent habituellement une variété de comportements dynamique complexes.

A partir de la régression non linéaire, il n'existe pas beaucoup de différences entre l'identification d'un système linéaire et celle d'un système non linéaire. Les méthodes d'identification linéaire sont considérées comme la racine de l'arbre d'identification, toute autre méthode non linéaire peut être extraite à partir de ces méthodes linéaires.

L'étape cruciale de l'identification des systèmes non linéaires est le choix de la structure du modèle. En général, il est utile de subdiviser l'identification non linéaire en deux catégories :

- L'identification de la structure (la caractérisation) ;
- L'identification des paramètres (l'estimation des paramètres).

### ***L'identification de la structure :***

La caractérisation est l'étape qui consiste à choisir la structure du modèle, donc la structure des équations.

### ***L'identification des paramètres :***

L'estimation est l'étape qui consiste à trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans les équations. Ces valeurs numériques sont déterminées pour que le comportement du modèle soit le plus proche du système. Cette comparaison est effectuée à l'aide d'un critère, une fois le critère choisi, il faut à l'aide d'un processus mathématique (appel Algorithmes d'optimisation) réduire (ou minimiser) cet écart système-modèle. Parmi ces algorithmes, on peut citer les moindres carrés, le principe du maximum de vraisemblance, etc.

Comme le modèle à élaborer est souvent destiné pour servir à une commande du système, il convient de le choisir aussi simple que possible. Mais en même temps il doit être fidèle et précis. On parle alors de compromis précision- simplicité

Après avoir décidé du type et de la structure du modèle linéaire, il reste à trouver des valeurs de paramètres raisonnables. L'objectif de la technique d'optimisation des paramètres est de trouver la meilleure approximation  $\hat{y}(t)$  de la sortie du système  $y(t)$  qui peut être perturbée par le bruit  $\varepsilon(t)$ .

Pour les systèmes non linéaires en général, il n'y a pas de techniques d'identification universelle car tout dépend de l'information à priori sur le système, c'est-à-dire de leurs représentation mathématique. Les différences dans le comportement dynamique de ces modèles peuvent être extrêmement significatives et sont entièrement dues aux différentes manières dont les composantes du modèle sont combinées.

## I.5. Méthode d'identification

Les différentes méthodes d'identification peuvent être scindées en quatre classes :

- Méthodes graphiques,
- Méthodes récursives,
- Méthodes non récursives,
- Méthode du modèle.

### I.5.1. Méthodes graphiques

Ces méthodes sont basées sur la réponse indicielle du système. Elles sont graphiques et ne permettent pas d'avoir des résultats précis mais peuvent conduire à un modèle suffisant. La réponse d'un système à un échelon ou une impulsion sur la variable d'entrée (commande) fournit un renseignement intéressant sur sa dynamique.

La lecture de la structure du modèle à partir de la réponse indicielle s'effectue selon la réponse : si elle possède un retard ou non, si le processus est stable ou de type intégrateur et si elle possède un dépassement ou est apériodique.

Suivant la réponse, on choisit le type du modèle à identifier et la méthode associée. Pour identifier des modèles à structure simple (Typiquement du 1<sup>er</sup> ordre avec retard), si ce type de modèle ne suffit pas, on fait appel à des méthodes d'identification numérique (méthodes récursives et non récursives). En effet les méthodes graphiques sont mal adaptées à l'identification du modèle précis ou d'ordre élevé ( $\geq 2$ ). Parmi les méthodes graphiques on peut citer la méthode de Streje, méthode de Broïda. [ ]

### I.5.2. Méthode non récursive

Ces méthodes traitent d'un ensemble de données (entrées/sorties) obtenues sur un horizon "période" de temps (par exemple la méthode des moindres carrés récursifs).

Le principe des moindres carrés selon Gauss est de choisir des paramètres d'un modèle de telle sorte que la somme des carrés de mesures expérimentalement multipliées par un coefficient caractérisant le degré de précision, soit minimale. Cette approche peut s'appliquer à n'importe quel type de modèle, mais une solution analytique ne peut être obtenue que si le modèle est linéaire en fonction des paramètres. La formulation standard des moindres carrés consiste à supposer que les valeurs calculées (prédites)  $\hat{y}(t)$  sont données par le modèle.

### I.5.3. Méthode récursive

Ces méthodes traitent de paires de donnée (entrées-sorties) à chaque instant et produisant une estimation paramétrique, données ou de la lecture des données.

L'identification récursive permet de calculer en ligne à chaque période d'échantillonnage, un nouvel estimé du vecteur de paramètres du système  $\hat{\theta}(k)$ .

L'algorithme sera de la forme suivante :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + C(k) \quad (\text{I.4})$$

Le nouvel estimé est par conséquent l'estimé calculée à la période précédente auquel on ajoute une correction basée sur la nouvelle information disponible  $y(k)$  et  $u(k)$ . L'identification récursive est utilisée en commande adaptative indirecte.

L'identification récursive permet de suivre les variations des paramètres du procédé particulièrement si on donne un poids fort, dans le calcul, aux mesures les plus récentes.

### I.5.4. Méthode du modèle

La méthode du modèle suit strictement, dans son déroulement, le principe de base de la modélisation.

On cherche, par une méthode itérative, à minimiser l'écart entre la variable mesurée et celle estimée par le modèle. Sachant que cet écart est une fonction positive des paramètres du modèle. Le problème se ramène donc à un problème de minimisation d'une fonction, généralement réalisée par des techniques de programmation non linéaire. Nous pouvons classer les méthodes en trois catégories : méthodes du premier ordre, méthodes du deuxième ordre et méthodes itératives linéaire.

On constate que les méthodes qui procèdent directement à une minimisation d'un écart entre les mesures et les valeurs prédites par le modèle présentent des performances plus intéressantes, bien qu'elles soient plus lourdes de mise en œuvre. Un compromis souvent utilisé consiste alors à effectuer la recherche avec une méthode itérative (programmation non linéaire), à partir d'un point initial obtenu par une technique d'estimation linéaire, ce qui accélère d'autant la recherche puisque l'on part d'un voisinage de la solution.

## **I.6. Conclusion**

Dans ce chapitre on constate que les problèmes d'identifications sont généralement résolus à l'aide de trois ensembles : les données issues de l'expérience, les modèles et les algorithmes d'identification.

Le problème consiste généralement à choisir une expérience donnant le maximum d'information. Le choix d'un modèle candidat peut se faire à partir des lois physiques régissant le système dont les paramètres sont peut connus ou mal connus (boite grises), ou bien à partir du résultat de l'expérience sans connaissance à priori (boites noires). Les algorithmes d'identification permettent, à partir des données, de préciser les paramètres du modèle candidat.

Dans le chapitre suivant, la modélisation d'un pendule simple, en utilisant le principe de Lagrange, sera abordée.

Chapitre

**2**

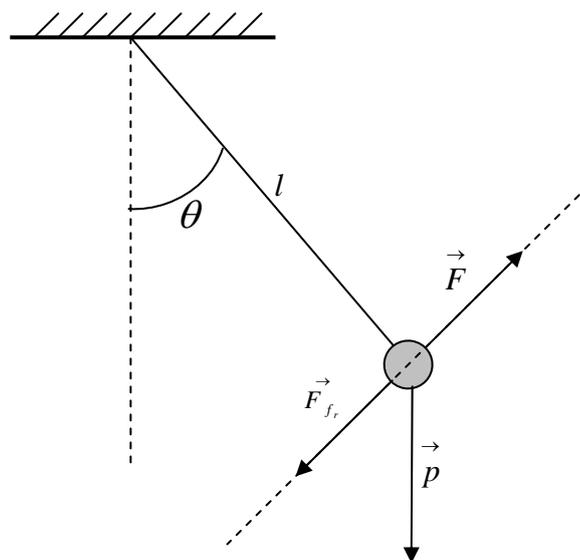
*Modélisation d'un pendule  
simple*

## II.1. Introduction

Après avoir consacré le premier chapitre à la théorie et aux outils mathématiques relatifs à la modélisation et à l'identification des systèmes en général, le présent chapitre illustre la démarche de la modélisation et d'identification des paramètres du système non linéaire, en l'occurrence un pendule simple, un exemple plus pédagogique qu'autre chose.

## II.2. Présentation

Comme application à étudier dans ce chapitre, nous avons considéré un pendule simple, illustré par la **Figure II.1**. Il est constitué d'un fil supposé non élastique d'une longueur  $l$  et d'une masse  $m$  d'une forme géométrique quelconque. Il est soumis à trois forces : le poids  $P$ , la force motrice  $F$  et la force de frottement  $F_{fr}$ .



**Figure II.1.** Pendule simple.

Où :

$\theta$  : L'angle que fait le pendule avec la verticale,

$l$  : La longueur du fil supposé non élastique,

$\vec{F}$  : Force motrice,

$\vec{F}_{fr}$  : Force de frottement,

$\vec{P}$  : Le poids de la masse  $m$ .

## II.3. Modélisation du pendule simple

En premier lieu, il faut déterminer l'équation différentielle régissant la dynamique du pendule simple, en utilisant pour cela le formalisme de Lagrange. On en déduit ensuite, à partir de l'équation différentielle, un modèle d'état.

### II.3.1. Formalisme de Lagrange

Le Lagrangien est défini mathématiquement comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire :

$$L = T - P \quad (\text{II.1})$$

Où :

$T$  : énergie cinétique,

$P$  : énergie potentielle,

$L$  : Lagrangien; différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

Le Lagrangien vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum M \quad (\text{II.2})$$

Où :

$\sum M$  : Somme des moments de toutes les forces agissant sur le système.

### II.3.2. Calcul de l'équation différentielle

#### 1. Calcul de l'énergie cinétique :

La trajectoire du pendule est circulaire, d'où la relation de l'énergie cinétique suivante :

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (\text{II.3})$$

Où :

$I$  : moment d'inertie du système donné par le théorème de Huyguens comme suit:

$$I = I_{\Delta} + ml^2 = 0 + ml^2 \quad (\text{II.4})$$

donc :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (\text{II.5})$$

## 2. Calcul de l'énergie potentielle :

L'énergie potentielle du pendule s'exprime comme suit :

$$P = ph = mgh \quad (\text{II.6})$$

Où  $h$  représente la hauteur du point matériel  $m$  tel que le point de passage du point  $m$  par l'axe d'équilibre est pris comme référence des potentiels. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} h &= l(1 - \cos(\theta)) \\ P &= mgl(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

## 3. Calcul du lagrangien :

En résumé, on a le Lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} L &= T - P \\ L &= \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Par la suite, la relation (II.2) conduit à :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) \quad (\text{II.9})$$

## 4. Calcul des moments :

Pour le cas du pendule simple considéré, deux sortes de moment existent, le moment moteur dû à l'action d'une force motrice, et le moment résistant dû à la force de frottement.

$$\text{Le couple moteur :} \quad \Gamma = Fl. \quad (\text{II.10})$$

$$\text{Le couple résistant :} \quad \Phi = -F_f l = -\alpha \cdot \dot{\theta} l \cdot l = -\alpha l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II.11})$$

Où  $\alpha$  est un coefficient de résistance.

Signalons ici que le couple du poids est nul car sa direction est parallèle à la verticale.

$$\text{On a alors :} \quad \sum M = \Gamma + \Phi = Fl - \alpha l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II.12})$$

En portant les équations (II.8) et (II.11) dans (II.2), on aura :

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = Fl - \alpha l^2 \dot{\theta} \quad (\text{II.13})$$

Après simplification et réorganisation on a :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = \frac{1}{ml} F(t) \quad (\text{II.14})$$

L'équation du système obtenue (II.13) est une équation différentielle du second ordre non linéaire, étant donnée la présence de non linéarité  $\sin(x_1)$ . Cette équation représente l'équation temporelle régissant la dynamique du système.

### II.3.3. Calcul de la représentation d'état

Pour déterminer le modèle d'état du pendule simple, on considère comme variable d'état :

$x_1(t) = \theta(t)$  : représente la position angulaire.

$x_2(t) = \dot{\theta}(t)$  : représente la vitesse angulaire.

On aura donc :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta(t) \\ \dot{x}_1 &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\theta}(t) = -\frac{\alpha}{m} \dot{\theta}(t) - \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) + \frac{1}{ml} F(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\alpha}{m} x_2(t) + \frac{1}{ml} F(t) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

Ainsi le modèle d'état du pendule simple est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\alpha}{m} x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml} \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{II.16})$$

Tel que :

$u(t) = F(t)$  représente la commande du système.

$x_1(t)$  : représente la position de la masse  $m$  (l'angle qu'elle fait avec la verticale).

$x_2(t)$  : représente la vitesse angulaire.

Le modèle donné par (II.16) est non linéaire vu la présence de la non linéarité  $\sin(x_1)$ .

### II.3.4. Linéarisation autour du point d'équilibre

#### 1. Point d'équilibre :

Lorsque le système atteint son état stationnaire, toutes les variables seront constantes, c'est-à-dire :

$$\dot{x}_e = f(x_e, u_e) = 0$$

Où :

$x_e$  : est un point d'équilibre du système ;

$u = u_e$  : constante.

La sortie à l'équilibre  $y_e = h(x_e, u_e)$ .

Dans le cas du pendule simple, on a :

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{pmatrix} \Rightarrow (\dot{x}_e = 0) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{1e} = 0 \\ \dot{x}_{2e} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

$\dot{x}_{1e} = 0 \Rightarrow x_{2e} = 0$  : la vitesse angulaire est nulle.

$$\dot{x}_{2e} = 0 \Rightarrow -\frac{\alpha}{m} x_{2e} + \frac{g}{m} \sin x_{1e} + u_e = 0 \quad (\text{II.18})$$

$$\sin x_{1e} = -\frac{u_e}{g} m \Rightarrow x_{1e} = -\text{Arc sin} \frac{u_e}{g} m$$

Ainsi on a le point d'équilibre

$$x_e = \begin{pmatrix} x_{1e} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad x_{1e} = -\text{Arc sin} \left( \frac{u_e}{g} m \right) \quad (\text{II.19})$$

**2. La linéarisation autour de ce point :**

Pour linéariser le système autour du point d'équilibre, introduisons les variables d'écart suivantes :

$$\hat{x} = x - x_0 \quad ; \quad \hat{y} = y - y_0 \quad \text{et} \quad \hat{u} = u - u_0 \quad (\text{II.20})$$

La linéarisation autour du point d'équilibre se fait comme suit :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \hat{u} \quad (\text{II.21})$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \hat{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \hat{u} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

L'application pour le pendule simple conduit au modèle linéaire suivant :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ml \end{bmatrix} \hat{u} \quad (\text{II.23})$$

Comme  $\cos x_1 = 1$ , alors :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ml \end{bmatrix} \hat{u} \quad (\text{II.24})$$

et la sortie :

$$\hat{y} = [1 \quad 0] \hat{x} + 0 \cdot \hat{u}$$

D'où l'équation de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{U}(s)} \Rightarrow f(g, l, m, \alpha) \quad (\text{II.25})$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

$$\Rightarrow G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l} & s + \frac{\alpha}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ml \end{bmatrix} + 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{ml} \frac{1}{s \left( s + \frac{\alpha}{m} \right) + \frac{g}{l}} \quad (\text{II.27})$$

### 3. Expression mathématique de la réponse temporelle du système :

Pour trouver la réponse temporelle  $y(t)$  du système linéaire à une entrée impulsion d'amplitude  $F$ , on utilise directement la réponse à l'aide de la transformée de Laplace inverse, comme suit :

$$Y(s) = G(s).U(s) \Rightarrow y(t) = L^{-1}\{G(s).U(s)\} \quad (\text{II.28})$$

D'où vient la réponse du système  $y(t)$  suivante :

$$y(t) = \frac{2F}{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sinh \frac{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}}{2ml} t \quad (\text{II.29})$$

## II.4. Simulation et interprétation des résultats

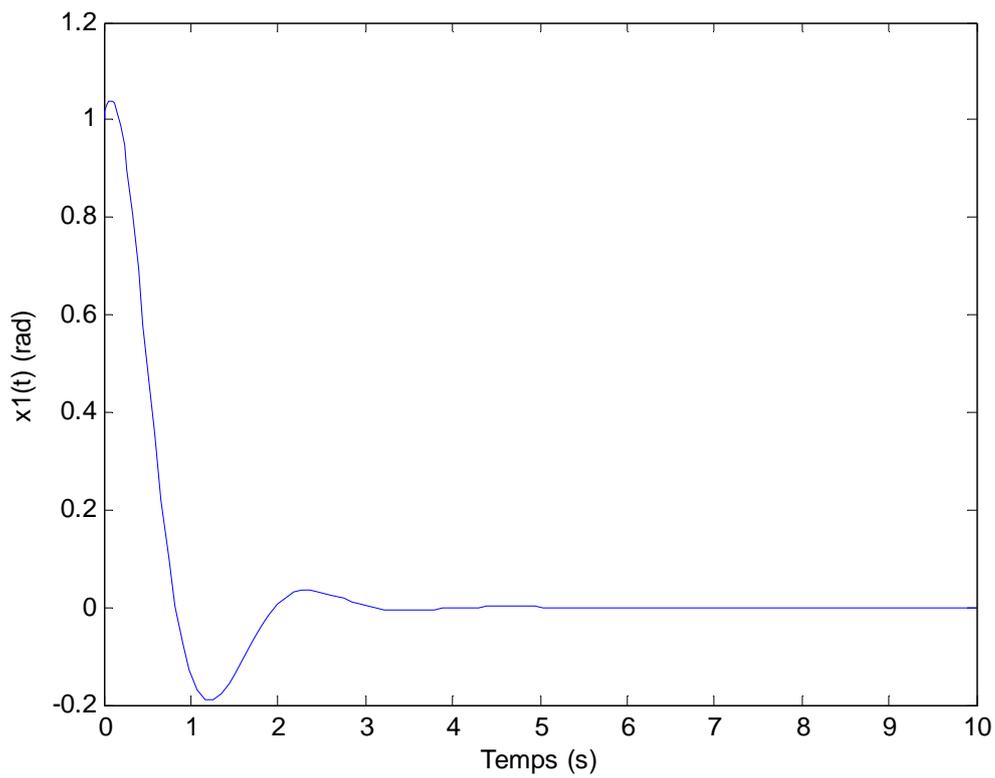
Pour la simulation du système étudié dans ce présent chapitre, on utilise le langage de programmation *Matlab*. Les valeurs des paramètres du pendule simple considérées sont :

$$g = 10 \text{ N/kg} ; m = 2 \text{ kg} ; l = 1 \text{ m} ; \alpha = 6 \text{ kg}^2 / \text{s}.$$

Pour l'entrée, on lance le pendule simple en appliquant initialement une force non nulle, puis on observe son évolution. On suppose initialement que le pendule simple est à la position :

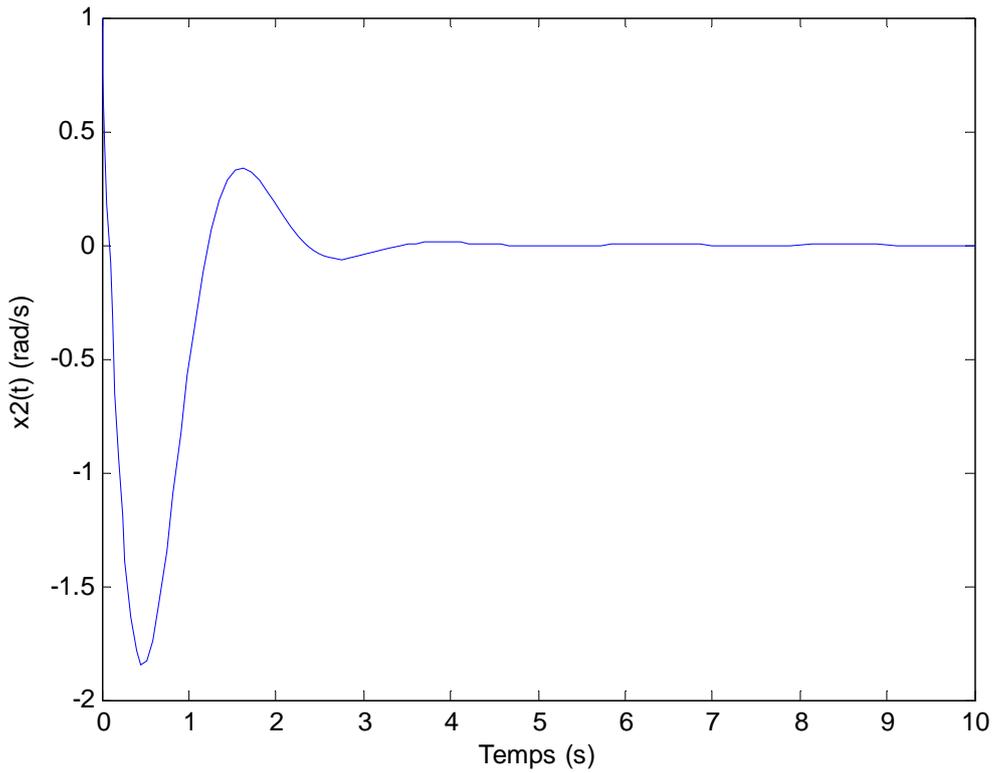
$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La courbe de la **Figure II.2** représente l'évolution de l'état de la position  $x_1(t)$  de la masse  $m$  en fonction du temps. On remarque que la masse  $m$  oscille autour de la position d'équilibre avant de se stabiliser à ce point.



**Figure II.2.** Evolution de la variable  $x_1(t)$

La courbe de la **Figure II.3** représente l'évolution de l'état de la vitesse angulaire  $x_2(t)$  de la masse  $m$  en fonction du temps. On remarque que la vitesse possède le même comportement dynamique que celle de l'angle.



**Figure II.3.** Evolution de la variable  $x_2(t)$

## II.5. Conclusion

Dans ce chapitre la modélisation d'un pendule simple en utilisant le formalisme de Lagrange a été présentée. Après avoir déterminé les énergies cinétique et potentielle du système, une équation différentielle ordinaire du second ordre a été obtenue en utilisant le formalisme de Lagrange. Cette équation a été mise par la suite sous forme d'état en considérant la position et la vitesse angulaire comme variables d'état.

Pour la simulation du comportement dynamique du système autour d'un point d'équilibre, un modèle d'état linéaire a été déterminé en utilisant la technique de linéarisation basée sur le développement de Taylor.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter une méthode de traitement d'image permettant de récupérer les positions de la masse du pendule à partir d'une séquence d'images en vue d'une identification de son modèle.

Chapitre

3

*Mesure des positions de la  
masse du pendule par  
vision artificielle*

### III.1. Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que pour identifier les paramètres d'un pendule (masse et longueur), nous devons disposer au préalable de toutes les coordonnées  $(x,y)$  de la masse à différents instants. Or pour acquérir cette information nous devons utiliser des capteurs de position. Le capteur le plus indiqué dans ce cas est sans doute le capteur d'images (caméra), car il permet d'acquérir des informations sans aucun contact physique avec le pendule.

La caméra est un dispositif électronique capable de transformer une information lumineuse en un signal électrique. Elle permet ainsi d'acquérir une image ou une suite d'images à différents instants. De nombreux type de caméras existent dans le domaine de l'industrie : caméras analogiques ou numériques, caméras linéaires ou matricielles, caméras multi-spectrales, etc.

Nous allons voir dans ce chapitre comment à partir d'une séquence d'images du pendule simple en mouvement, déterminer les coordonnées de la position de la masse en mouvement à tout instant.

### III.2. Acquisition d'une séquence d'image du pendule

#### *Définition d'une séquence d'images*

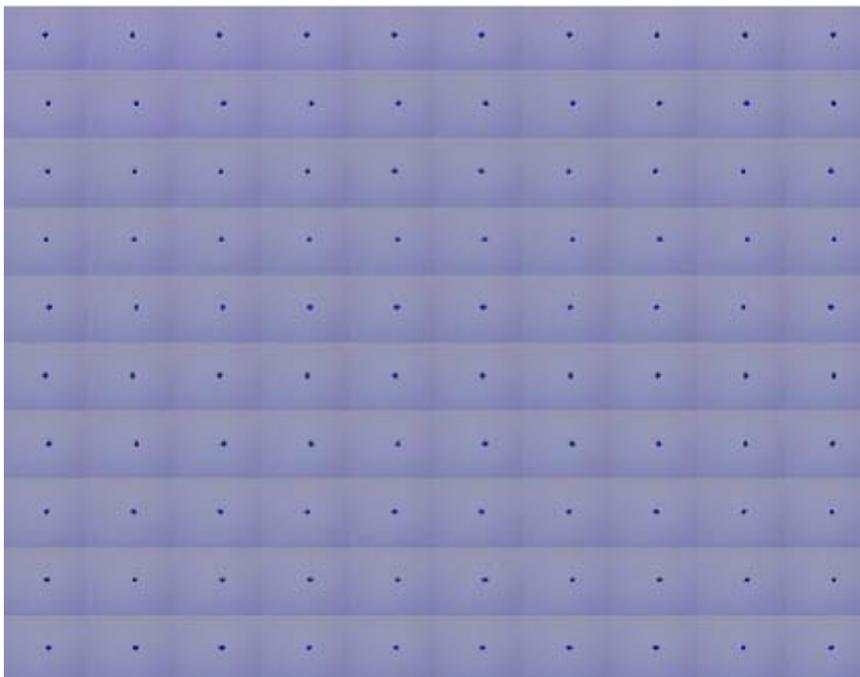
Une séquence d'images est une suite d'images fixes peu différentes les unes des autres, prises à des intervalles de temps régulièrement espacés. C'est un terme qui évoque souvent la notion de mouvement. En effet, la vue d'une scène d'un objet en mouvement se réduit en réalité à la vue de la séquence d'images de cet objet. Le problème consiste à étudier les transformations qui apparaissent entre les images successives en tenant compte du lieu temporel. On parle alors d'images dynamiques. Toutefois, pour avoir la sensation d'un mouvement, il faut que cette succession se fasse à une fréquence supérieure à 15 images par seconde ce qui correspond à la persistance rétinienne. Généralement, on adopte une fréquence de 25 à 30 images par seconde.

Une succession d'images décrivant ces oscillations du pendule est acquise sur un ordinateur par une caméra couleur. Le pendule est constitué d'un fil blanc d'une longueur  $l = 70\text{cm}$  et d'une masse ponctuelle en plastique  $m = 10.4\text{g}$  de couleur bleu tachetée de vert (**Figure III.1**). L'arrière plan de l'image du pendule est constitué d'un tableau blanc.



**Figure III.1** Le pendule simple.

Nous avons ainsi procédé à l'acquisition d'une séquence constituée de 100 images. Chaque image est acquise toutes les  $1/10$  s, c'est-à-dire  $\Delta t = 0.1s$ . La durée de la séquence est :  $T = 10s$ . La **Figure III.2** montre les images de cette séquence.



**Figure III.2** Séquence d'images décrivant un pendule en mouvement.

### III.3. Détection de la masse $m$ en mouvement

Pour détecter les positions de la masse, on doit calculer le centre de gravité de la masse présente dans chaque image de la séquence. La masse étant en mouvement, il convient, alors de l'isoler du reste de l'image. Cette opération d'extraction d'un objet en mouvement peut être réalisée en faisant appel à des techniques de détection d'objets en mouvement.

#### III.3.1. Méthodes de détection d'objets en mouvement

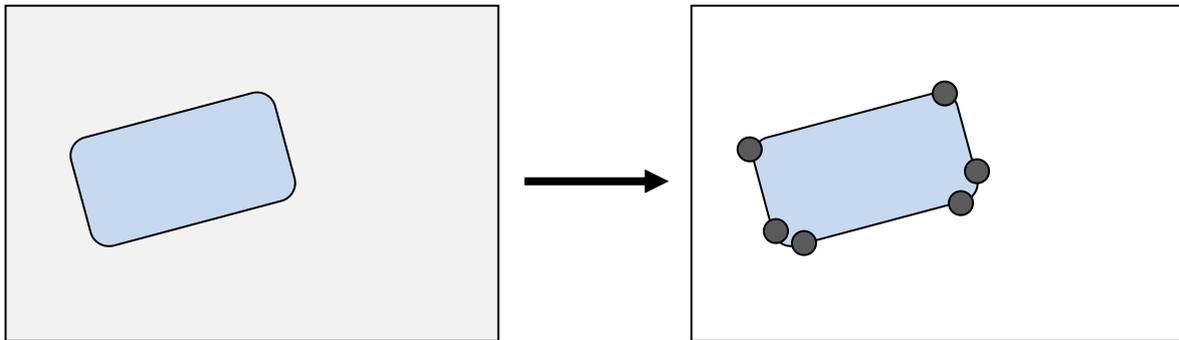
Le problème de la détection du mouvement dans une séquence d'images consiste à séparer, dans chaque image de la séquence, les zones mobiles des zones statiques. A chaque instant, chaque pixel doit ainsi être étiqueté par un identifiant binaire fixe/mobile. Lorsque la caméra est fixe, on peut effectuer une telle détection à partir des différences temporelles calculées pour chaque pixel. Plusieurs méthodes de détection ont été développées. Celles-ci diffèrent selon le niveau d'abstraction qu'elle utilise pour représenter l'information. Ce niveau d'abstraction peut être hiérarchisé en trois niveaux de complexité :

- **Bas niveau** : L'image est considérée comme un ensemble de pixels. Il fait appel à des techniques d'analyse des variations locales de l'intensité de chaque pixel de l'image, qualifiées de méthodes orientées mouvement (motion-based methods).
- **Haut niveau** : l'information contenue dans l'image est décrite en terme d'objets. Il regroupe principalement les approches qualifiées de méthodes structurelles, ou orientées objets (token-based-methods).
- **Niveau intermédiaire** : Il combine les deux représentations précédentes. Il englobe les méthodes basées sur l'analyse du champ des déplacements ou du flux optique.

##### 1) Méthodes structurelles (haut niveau)

Les méthodes structurelles sont basées sur l'étude de l'évolution temporelle de certaines caractéristiques d'objets présents dans les différentes images. Un ensemble d'éléments structurants dans une image est identifié et on cherche à les retrouver dans les images suivantes, d'où leur nom de (feature-based methods). Si l'information de départ se résume en une séquence d'images, une première phase obligatoire consiste à déterminer certains éléments significatifs des objets. Dans un

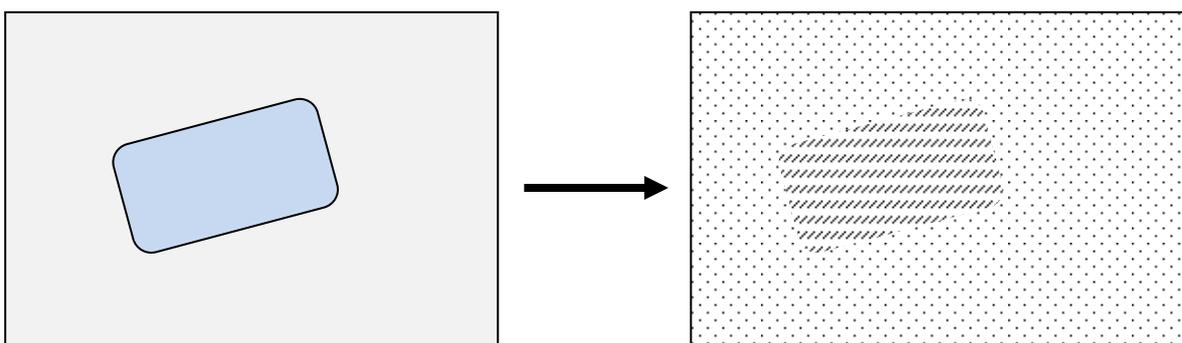
deuxième temps, la mise en correspondance de ces éléments d'une image à la suivante permet de caractériser le mouvement.



**Figure III.3** Extraction des éléments structuraux, exemple : points anguleux.

## 2) Analyse du flux optique (niveau intermédiaire)

La détection du mouvement peut être considérée en temps que moyen d'analyse du contenu informationnel d'une séquence d'images. L'analyse de l'image est effectuée au niveau du pixel, en associant à chaque pixel d'une image de la séquence, un vecteur déplacement permettant de le situer dans l'image suivante. Le champ de vecteurs obtenu est appelé champs des déplacements. En divisant chacun de ces vecteurs par l'intervalle de temps séparant deux acquisitions d'images successives, on obtient un nouveau champ de vecteurs, représentant cette fois-ci la vitesse de chaque point : c'est le flux optique.

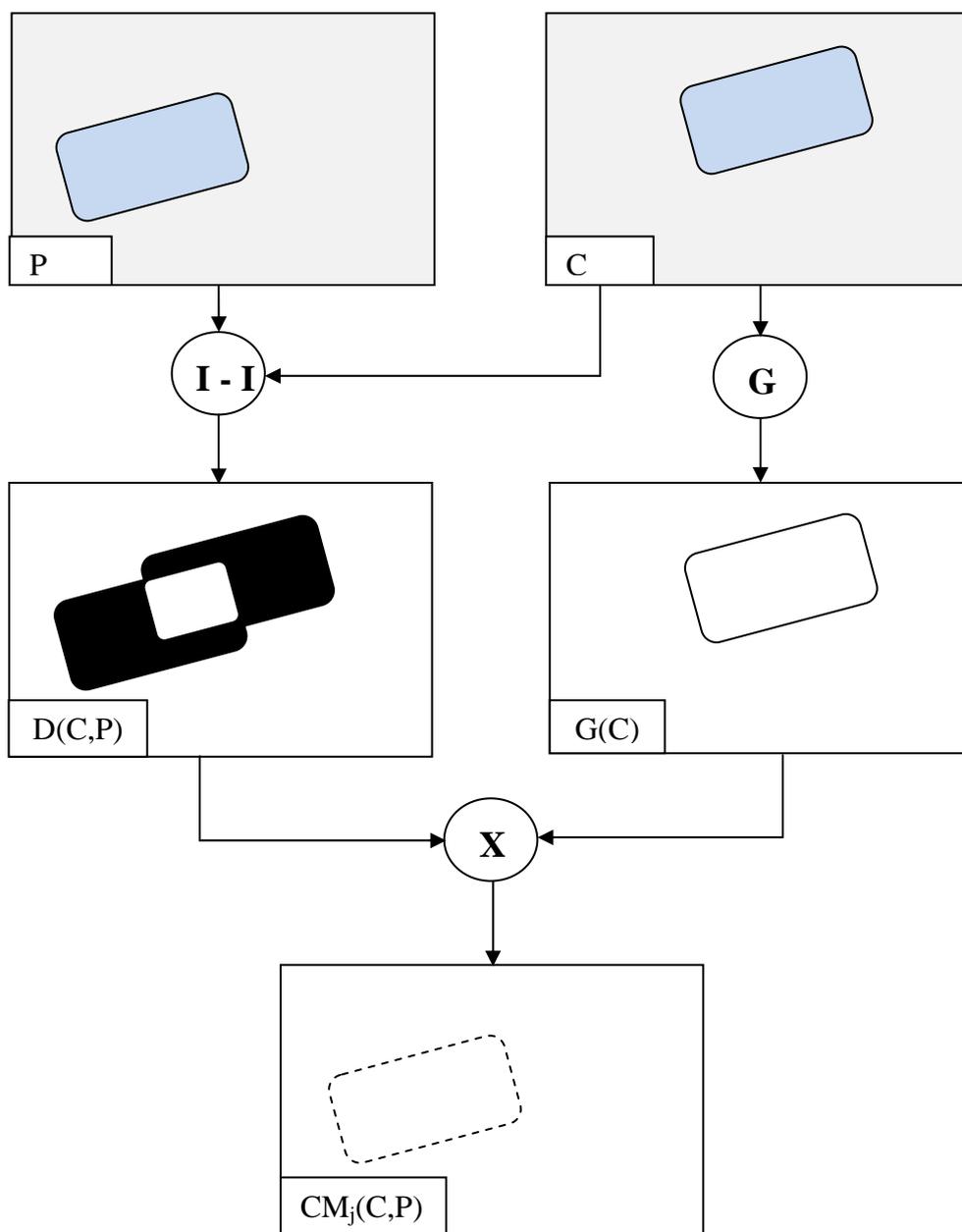


**Figure III.4** Champs des déplacements.

## 3) Méthodes orientées mouvement (bas niveau)

Une comparaison entre deux images successives montre, dans le cas d'une caméra immobile, que les régions qui diffèrent sont celles affectées par le mouvement. Cette constatation est la base

de la technique d'utilisation de la différence d'images pour détecter le mouvement. Le principe de ces méthodes dites de bas niveau consiste à éliminer de l'image des zones restant immobile durant la séquence. Cette approche permet d'analyser des scènes complexes, sous des conditions d'éclairage non contrôlées et sans aucune connaissance à priori sur le nombre, la forme et l'aspect des objets mobiles, ni sur leur environnement, ce qui autorise son adaptation à toute analyse de mouvement. Toutefois, la détection du mouvement peut se faire de deux approches différentes : certains algorithmes fournissent une image résultat contenant des régions représentatives des objets mobiles, d'autres permettent d'en extraire les contours. La **Figure III.5** illustre le principe d'une méthode de détection des contours d'objets en mouvement.



**Figure III.5** Opérateur de HAYENS et JAIN.

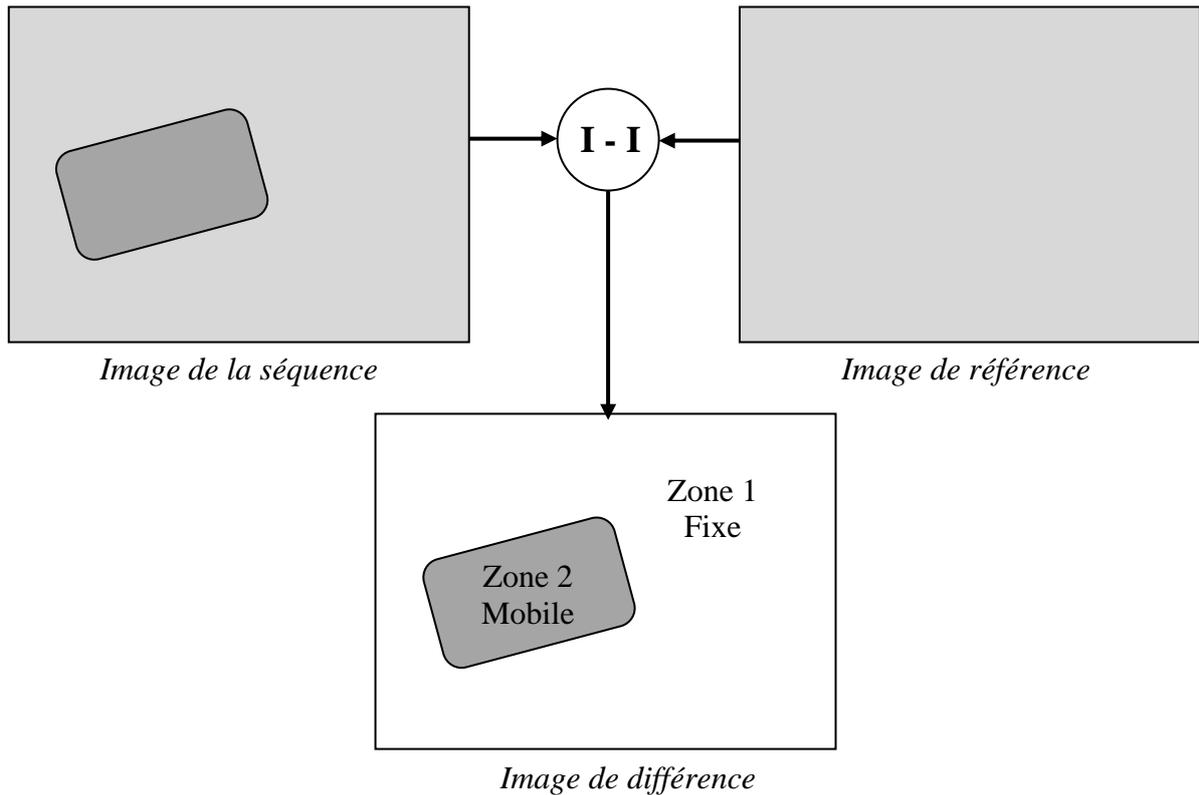
### III.3.2. Méthode adoptée

Notre choix s'est porté sur une méthode orientée mouvement car elle est simple, rapide et facile à implémenter. Elle est basée sur la différence entre une image de référence et chaque image de la séquence. Une telle approche permet une réduction importante des données à traiter, en ce sens que seuls les objets présentant un mouvement sont détectés, le fond et les objets stationnaires sont éliminés et la connaissance à priori d'informations concernant les objets présents dans la scène n'est pas nécessaire.

Cette méthode peut s'avérer efficace lorsque les conditions d'acquisitions, en l'occurrence la luminosité de la séquence, ne varient pas d'une image à l'autre. Comme c'est le cas dans notre application. En effet, la séquence d'images du pendule a été acquise dans une salle close avec un fond fixe ce qui permet de minimiser l'effet de la luminosité ambiante.

Nous considérons une image de départ de la scène observée qui ne contient aucun objet mobile comme étant l'image de référence (**Figure III.7**). La différence pixel à pixel de celle-ci avec une image contenant un ou plusieurs objets mobiles donne naissance à une image comportant deux régions (zones) différentes (**Figure III.6**).

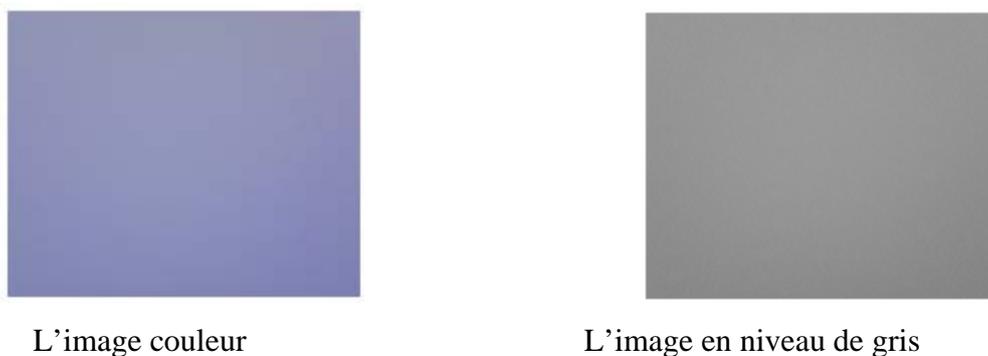
- **Zone 1** : est formée de la différence des points stationnaires (non affectés par le mouvement) présents dans les deux images. Elle constitue le fond de l'image de différence. Son niveau de gris est généralement très faible.
- **Zone 2** : est constituée de points correspondant aux objets mobiles détectés. Son niveau de gris est élevé.



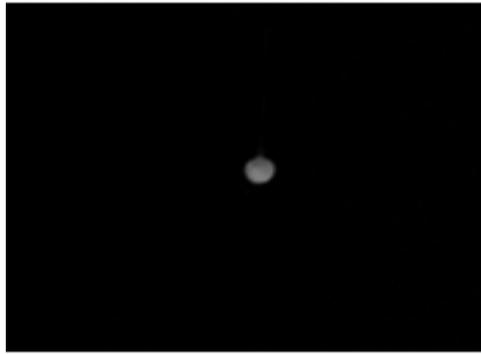
**Figure III.6** Détection de mouvement par utilisation d’une image de référence.

La distinction entre les deux classes de pixels ne peut se faire de façon simple. En effet, dans les zones stationnaires de l’image, il existe toujours une faible variation du niveau de gris des pixels, due soit au bruit présent dans la scène, soit à de légères modifications des conditions de luminosité de la scène entre les deux acquisitions de vue.

La soustraction de cette image de celle de la **Figure III.1** qui contient le pendule, nous donne l’image de différence qui est illustré par la **Figure III.8**. Cette soustraction est effectuée en niveau de gris.



**Figure III.7** L’image de référence.



**Figure III.8** L'image de différence.

L'image de différence, représentée par la **Figure III.7**, laisse apparaître la masse du pendule en gris. Le fond de la scène (zone immobile) apparaît en noir. Notons que le fil qui est normalement en mouvement n'a pas été détecté car sa couleur qui est blanche, se confond avec le fond du tableau qui est lui aussi blanc.

Dans le cas où le fil serait détecté comme un objet en mouvement des opérations de filtrage (Erosion) supplémentaires auraient été nécessaires afin d'éliminer le fil.

### III.4. Binarisation des images de la séquence

A fin d'extraire complètement l'objet (masse) du fond, une opération de binarisation est nécessaire.

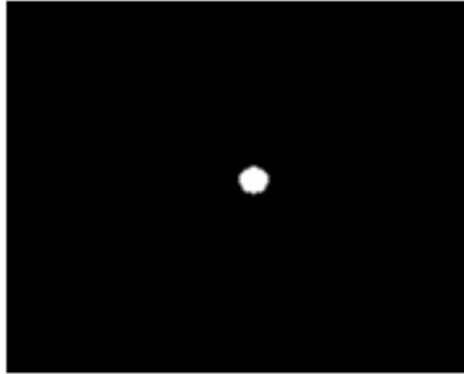
La binarisation est un cas particulier de la segmentation. Elle consiste à partitionner une image en deux zones homogènes (objet-fond). Ceci s'effectue en déterminant un seuil de binarisation  $S$  permettant de passer d'une image en niveaux de gris en une image binaire, c'est-à-dire à deux niveaux de gris (noir et blanc), selon la règle suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{Si } I(x,y) < S & \text{alors } I(x,y) = 0 \\ \text{Sinon} & I(x,y) = 255 \end{array} \quad \text{(III.1)}$$

$I(x,y)$  étant le niveau de gris du pixel de coordonnées  $(x,y)$ .

Tous les pixels dont le niveau de gris est inférieur au seuil reçoivent la valeur 0 qui correspond au noir (fond), les autres recevant la valeur 255 correspondant au blanc (objet).

La binarisation de l'image de différence est illustrée sur la **Figure III.9**. Elle permet d'extraire complètement les points de la masse et de les différencier des autres points constituant l'arrière plan.



**Figure III.9** Image binaire.

Donc toute la problématique se situe au niveau du calcul du seuil  $S$ . Pour notre application, nous avons utilisée la méthode d'OTSU, pour son efficacité.

L'opération de seuillage est vue comme une séparation (un partitionnement) des pixels d'une image en deux classes  $C_0, C_1$  (objet et fond) à partir s'un seuil  $s$ . Ces deux classes sont désignées en fonction du seuil  $s$ .

$$C_0 = \{0,1,\dots,s\} \quad \text{et} \quad C_1 = \{s+1,\dots,L-1\} \tag{III.2}$$

Soient  $\sigma_w^2$  la variance d'une classe,  $\sigma_b^2$  la variance interclasse et  $\sigma_s^2$  la variance totale de l'image. Le seuil optimum  $s^*$  peut être déterminé en maximisant un des trois critères suivant :

$$\lambda(t) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_w^2} \quad \eta(t) = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2} \quad \kappa(t) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_w^2} \tag{III.3}$$

Avec:

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=0}^{L-1} (i - \mu_t)^2 p_i \quad \mu_t = \sum_{i=0}^{L-1} ip_i \tag{III.4}$$

$$\sigma_b^2 = p_t q (\mu_1 - \mu_2)^2 \quad p_t = \sum_{i=0}^s \frac{h(i)}{N} \quad q = 1 - p_t \tag{III.5}$$

$$\mu_1 = \frac{\mu_t - \mu_s}{1 - p_t} \quad \mu_2 = \frac{\mu_s}{p_t} \quad \mu_2 = \sum_{i=0}^s ip_i \tag{III.6}$$

Et  $p_i = \frac{h(i)}{N}$  : correspond à la probabilité d'apparition du niveau du gris  $i$ .

Les trois critères sont équivalents, mais le plus simple à utiliser est  $\eta(t)$ .

Les seuils optimums  $s^*$  est défini comme suit :

$$s^* = \text{Arg max}_{s \in L} \eta(s) \quad (\text{III.7})$$

### III.5. Calcul des centres de gravité de la masse

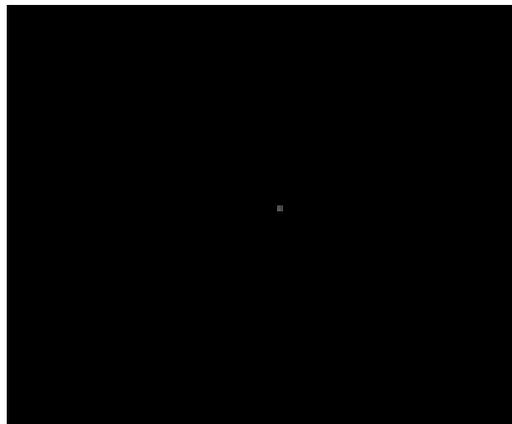
Le centre de gravité est défini comme étant un point de la masse  $m$  soumis aux lois de la mécanique. A partir de l'image binaire, on peut aisément déterminer les centres de gravité de la masse. On note par  $X_j(i)$  et  $Y_j(i)$ . Les  $j^{\text{ème}}$  coordonnées des pixels de la masse  $m$  de la  $i^{\text{ème}}$  image de la séquence.

Le calcul du centre de gravité de la masse  $m$  correspondant à l'image  $(X_g(i), Y_g(i))$  s'effectue par la formule suivante :

$$\begin{aligned} X_g(i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j(i) \\ Y_g(i) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j(i) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$n$  : représente le nombre de pixels de la masse  $m$  du pendule.

La **Figure III.10** montre le centre de gravité de la masse  $m$  représentée sur la **Figure III.9** :



**Figure III.10** Centre de gravité de l'image (i) de la séquence présentée sur la Figure III.2.

Le **tableau III.1** ci-dessous regroupe les valeurs des coordonnées du centre de gravité de la masse du pendule détectée dans chaque image de la séquence de la **Figure III.2** :

<b>Xg</b>	<b>Yg</b>	<b>Xg</b>	<b>Yg</b>	<b>Xg</b>	<b>Yg</b>	<b>Xg</b>	<b>Yg</b>
69.6588	92.5176	69.6047	92.5000	69.5930	92.5233	69.5930	92.7558
69.5506	91.9213	69.6292	92.2022	69.6588	92.5176	69.7841	93.0000
69.5632	91.7011	69.6136	92.2614	69.6588	92.7529	69.5402	93.5057
69.5747	91.8161	69.6588	92.5176	69.5747	93.3218	69.7416	94.0449
69.5747	92.3218	69.7416	93.0449	69.7841	94.0000	69.8778	94.8889
69.6292	92.9213	69.6778	93.9556	69.7841	94.8409	69.8539	95.7303
69.7416	93.9551	69.7614	94.8977	69.8889	95.7778	69.8539	96.7303
69.8427	95.0000	69.9000	95.9889	69.9231	96.9341	69.8409	97.5000
69.9213	96.0449	69.9560	97.0000	69.9213	97.9326	69.9432	98.4432
69.8791	97.3077	69.9341	98.0989	70.0000	98.7717	70.0000	99.1099
69.9432	98.4432	70.0000	99.1099	69.8966	99.4828	70.1000	99.8000
69.8966	99.4828	69.9560	100.0000	69.9560	100.0000	69.9560	100.0000
69.8791	100.3077	69.9432	100.4432	69.8889	100.3667	70.0000	100.1099
69.9778	100.9444	70.0108	100.8280	69.8876	100.4270	69.9783	99.9457
69.9565	101.1522	70.0108	100.8280	69.9247	100.2043	69.8966	99.4828
70.0000	101.1099	69.9432	100.4432	70.1099	99.8571	70.0109	98.9783
70.0000	100.7717	69.9560	100.0000	69.9778	99.0556	69.9565	98.1522
70.0000	100.1099	69.9778	99.0556	69.9565	98.1522	69.8913	97.2500
69.9565	99.1522	69.9341	98.0989	69.8913	97.2500	69.8966	96.4828
69.9341	98.0989	69.9247	97.2043	69.9130	96.2609	69.8372	95.5000
69.9000	96.9889	69.9000	95.9889	69.8295	95.4432	69.7209	94.7442
69.8667	95.7889	69.8571	95.0330	69.7765	94.4941	69.6279	93.3023
69.6860	94.6977	69.6742	94.1461	69.6860	93.6977	69.7471	93.1609
69.6207	93.7011	69.6047	93.5000	69.6279	93.3023	69.6047	93.5000
69.6778	92.9556	69.6588	92.7529	69.6292	92.9213	69.8427	94.0000

**Tableau III.1** Coordonnées du centre de gravité de la masse m du pendule.

### III.6. Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment détecter les positions de la masse d'un pendule à tout instant grâce à des techniques de la vision artificielle. Il montre également l'avantage d'utiliser un système de vision sans contact physique avec le système à identifier, dans le cas considéré le pendule simple.

Dans le chapitre suivant nous utiliserons les coordonnées du centre de gravité calculées par vision artificielle pour l'identification des paramètres d'un pendule.

Chapitre

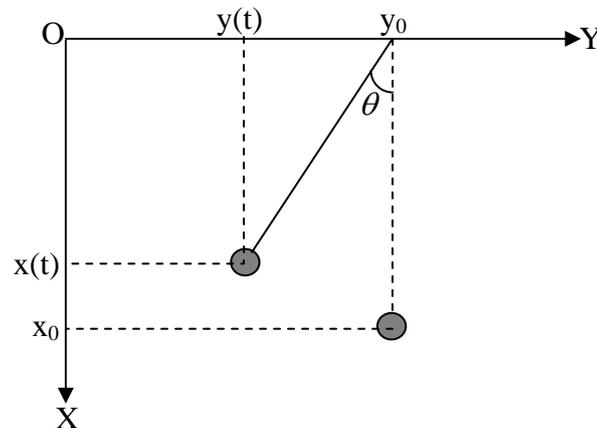
**4**

*Simulation et  
interprétation des  
résultats*

## IV.1. Introduction

Ce chapitre aborde l'identification du modèle du pendule simple en utilisant comme mesures les positions du centre de gravité de la masse obtenues à partir d'une séquence vidéo. Pour l'identification des paramètres du pendule simple, un problème d'optimisation est formulé. Ce dernier traduit le principe de la méthode du modèle adoptée pour l'identification.

## IV.2. Mesures de la variable caractéristique



**Figure IV.1** Coordonnées de la masse du pendule simple

Pour identifier le pendule simple, la variable caractéristique ou la sortie mesurée est l'angle  $\theta$ . D'après la Figure IV.1, pour récupérer les valeurs de cet angle, on utilise la formule suivante :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_0 - y(t)}{x(t)} \quad (\text{IV.1})$$

Par la suite, on a :

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{y_0 - y(t)}{x(t)} \right) \quad (\text{IV.2})$$

où  $x(t)$  et  $y(t)$  représentent les coordonnées du centre de gravité de la masse (**Figure IV.1**).

Etant donné le modèle non linéaire pour atteindre l'objectif d'identification, on considère que les dernières trames dans la séquence vidéo, c'est-à-dire avant que la masse ne

se stabilise au point  $(x_0, y_0)$ . Ceci permet de travailler dans la zone où le modèle peut être considéré linéaire. Ainsi, l'évolution de l'angle  $\theta(t)$  est donnée par la **Figure IV.2**. On constate que la boucle oscille autour d'un point qui représente la valeur moyenne de la variable  $\theta(t)$ . Ce problème a été constaté dans la prise de séquences puisque la boucle ne se stabilise pas, exactement au point  $(x_0, y_0)$ , dû aux conditions de l'expérience de la prise de séquences, mais se stabilise d'une manière inclinée par rapport à la verticale. Ce problème n'a pas une grande influence sur l'identification, mais peut être assimilé à un bruit. Néanmoins, comme pour l'identification des paramètres du pendule, on considère un modèle linéaire, alors on doit ramener la variable mesurée à osciller autour de zéro, en prenant :

$$\hat{\theta}(t) = \theta_m(t) - \theta_{\text{moy}}(t) \quad (\text{IV.3})$$

et de mettre la condition initiale  $\theta_m(0) = 0$  en éliminant toutes les mesures non nulles jusqu'à la rencontre de la première mesure nulle  $\theta(t_0)$ . Par conséquent, le temps doit être normalisé entre 0 et la valeur finale moins  $t_0$ , c'est-à-dire pour le temps normal, on a :

$$t = [t_0 \quad t_f] \quad (\text{IV.4})$$

et pour le temps mesuré, on a :

$$t_m = [0 \quad (t_f - t_0)] \quad (\text{IV.5})$$

Cette procédure est illustrée par les **Figures IV.2, IV.3, et IV.4**.

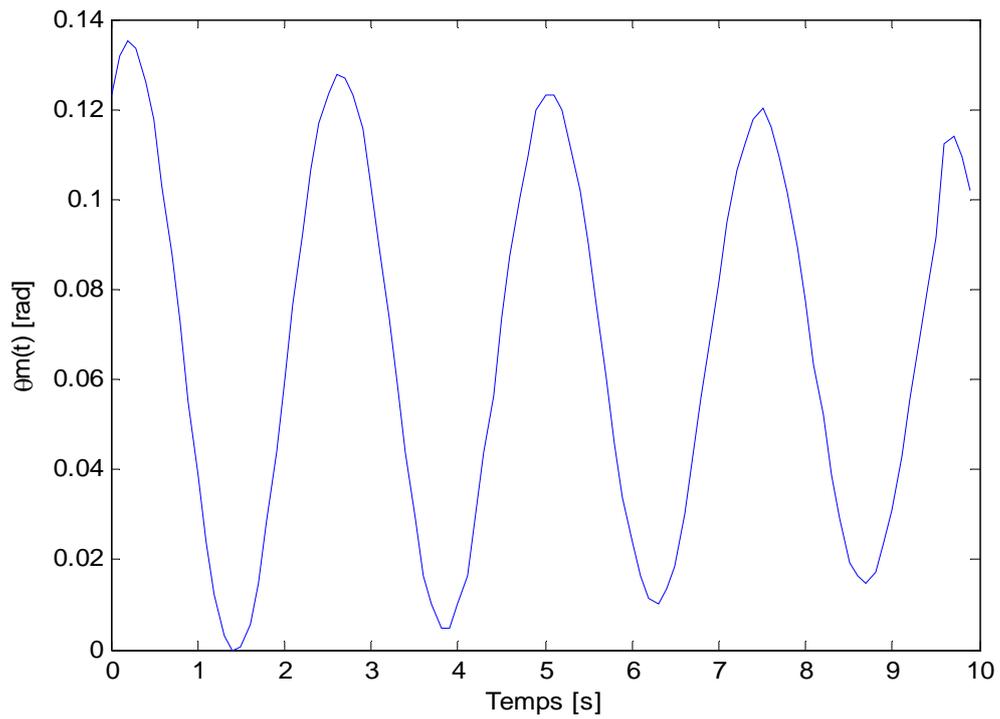


Figure IV.2 Mesure expérimentale.

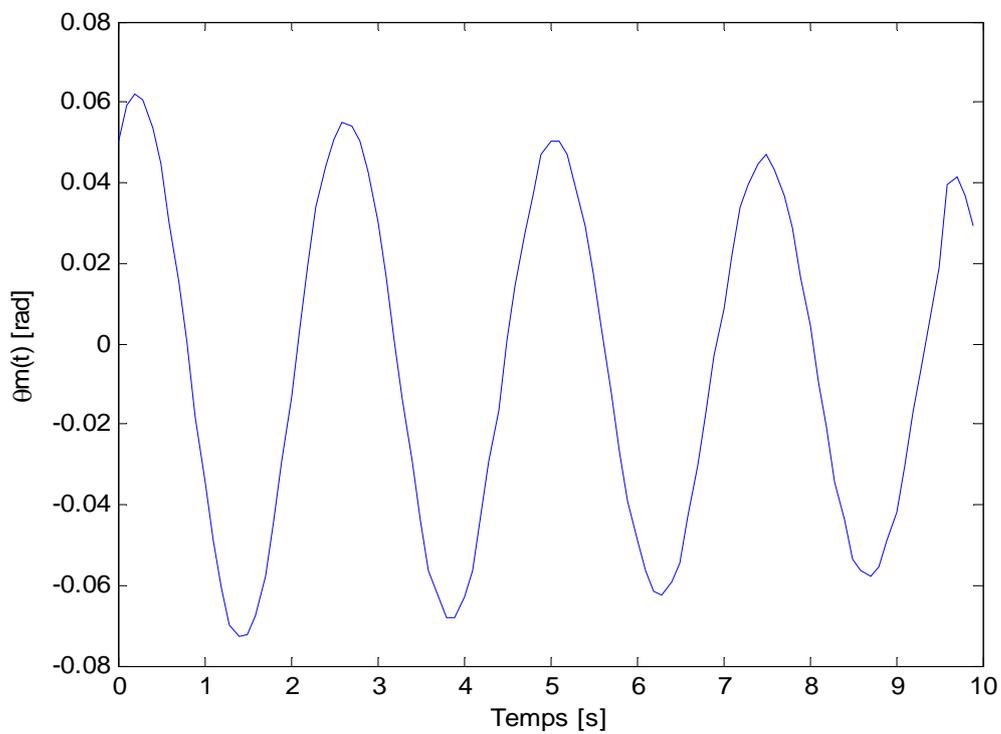
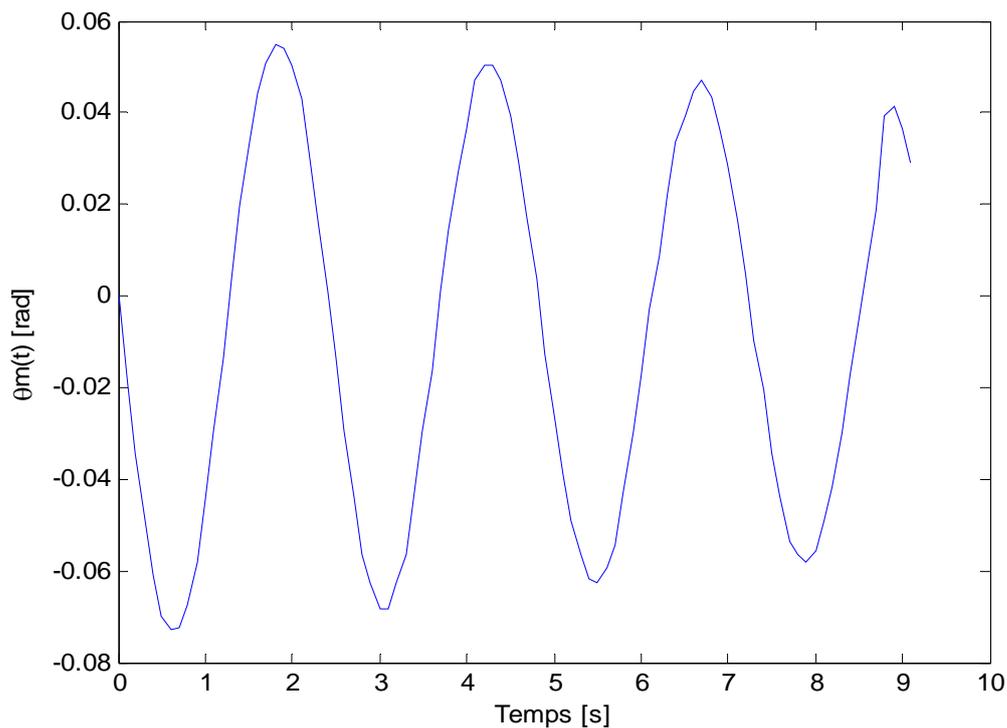


Figure IV.3 Evolution de  $\theta_m(t)$  autour d'une valeur moyenne nulle.



**Figure IV.4** Obtention d'une condition initiale nulle pour  $\theta_m(t)$ .

Une fois les mesures déterminées, on passe au problème de l'identification.

### IV.3. Identification des paramètres du pendule

Dans le cas d'un modèle linéaire du pendule, la sortie du système pour une entrée du type impulsion d'amplitude  $F$  est donnée par l'expression suivante (voir chapitre II) :

$$\theta(t) = \frac{2F}{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}} e^{-\frac{\alpha}{2m}t} \sin \frac{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}}{2ml} t \quad (\text{IV.6})$$

On remarque bien que cette variable dépend des paramètres du pendule, de la valeur de l'impulsion, et de la variable  $t$ . Pour identifier les paramètres du pendule, on propose de minimiser l'écart entre les valeurs mesurées et celles prédites par le modèle données par la relation (6), c'est-à-dire :

$$e(t) = \theta_m(t) - \theta(t) \quad (\text{IV.7})$$

L'optimisation de cet écart revient à considérer la fonction objective à minimiser suivante :

$$\begin{aligned}
 J(m, l, \alpha, F) &= \int_0^{t_f - t_0} e^2(t) dt \\
 J(m, l, \alpha, F) &= \int_0^{t_f - t_0} [\theta_m(t) - \theta(t)]^2 dt \quad (\text{IV.8}) \\
 J(m, l, \alpha, F) &= \int_0^{t_f - t_0} \left[ \theta_m(t) - \frac{2F}{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}} e^{-\frac{\alpha}{2m} t} \sin \frac{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}}{2ml} \right]^2 dt
 \end{aligned}$$

Pour cette application, on remarque que la valeur de l'impulsion est considérée comme paramètre à déterminer. Cette dernière représente la force appliquée sur la masse initialement. Cette dernière ne peut pas être mesurée vu les conditions de l'expérience. C'est pour cette raison qu'elle a été intégrée comme paramètre à rechercher.

En résumé, pour identifier les paramètres du pendule simple, on a à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{m, l, \alpha, F} J(m, l, \alpha, F) = \min_{m, l, \alpha, F} \int_0^{t_f - t_0} [\theta_m(t) - \theta(t)]^2 dt \quad (\text{IV.9})$$

Comme les mesures sont obtenues à des instants équidistants bien déterminés, alors la forme discrète du problème d'optimisation (10) a été considérée. Le problème d'optimisation final prend la forme suivante :

$$\min_{m, l, \alpha, F} J(m, l, \alpha, F) = \min_{m, l, \alpha, F} \Delta t \sum_{k=0}^N \left[ \theta_m(k) - \frac{2F}{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}} e^{-\frac{\alpha}{2m} k \Delta t} \sin \frac{\sqrt{l(\alpha^2 l - 4m^2 g)}}{2ml} k \Delta t \right]^2 \quad (\text{IV.10})$$

Avec :

$$N = \frac{t_f - t_0}{\Delta t} \quad (\text{IV.11})$$

#### IV.4. Résolution du problème d'optimisation

Pour résoudre ce problème d'optimisation, on a utilisé l'algorithme de BFGS qui est une version de la méthode de quasi-newton intégrée dans Matlab qui surmonte le problème de l'inversion de la matrice Hessien qui consomme du temps pour la recherche de la solution. L'algorithme BFGS tient son nom des initiales des mathématiciens C. G. Broyden, R. Fletcher, D. Goldfarb et D. F. Shannon, qui l'ont développée indépendamment à la fin des années 1960. L'algorithme de la méthode BFGS est résumé comme suit :

**Objectif :** Trouver une approximation d'un minimum local du problème

$$\min_{x \in \mathfrak{R}} f(x)$$

**Entrées :**

- La fonction :  $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . continûment différentiable.
- Le gradient de la fonction  $\nabla f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ .
- Une première approximation de la solution  $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ .
- Une première approximation de l'inverse du Hessien  $H_o^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  symétrique définie positive. Par défaut,  $H_o^{-1} = I$  (matrice identité).
- La précision demandée  $\varepsilon \in \mathfrak{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

**Sortie :** Une approximation de la solution  $x^* \in \mathfrak{R}$ .

**Initialisation :**  $k = 0$

**Itérations :**

- 1) Calculer  $d_k = -H_k^{-1} \nabla f(x_k)$ .
- 2) Déterminer  $\alpha_k$  en appliquant la recherche linéaire avec  $\alpha_o = 1$ .
- 3)  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ .
- 4)  $k = k + 1$ .
- 5) Mettre à jour  $H_k^{-1}$

$$H_k^{-1} = \left( I - \frac{\bar{d}_{k-1} y_{k-1}^T}{\bar{d}_{k-1}^T y_{k-1}} \right) H_k^{-1} \left( I - \frac{\bar{d}_{k-1} y_{k-1}^T}{\bar{d}_{k-1}^T y_{k-1}} \right) + \frac{\bar{d}_{k-1} \bar{d}_{k-1}^T}{\bar{d}_{k-1}^T y_{k-1}}$$

Avec  $\bar{d}_{k-1} = \alpha_{k-1} d_{k-1} = x_k - x_{k-1}$  et  $y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$ .

**Critère d'arrêt** si  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$ , alors  $x^* = x_k$ .

Pour rechercher la solution, une estimée de départ doit être choisie. Comme la fonction objectif à minimiser est fortement non linéaire, alors la solution finale est très sensible à cette estimée de départ. Ainsi, pour le choix de cette dernière, on a considéré des valeurs voisines des valeurs réelles de la masse et de la longueur. Les autres paramètres, c'est-à-dire le coefficient de frottement et l'amplitude de l'impulsion, ont été fixé arbitrairement.

Le déroulement du programme a conduit aux résultats résumés dans le tableau suivant :

Paramètre ou grandeur	Valeurs réelles	Valeurs estimées
Masse de la boule + le fil	10.40 g	11.20 g
Longueur du fil	0.70 m	0.75 m
Coefficient de frottement	Non mesurable	0.0133 kg <sup>2</sup> /s
Amplitude de l'impulsion	Non mesurable	1 N

**Tableau IV.1.** Résultats de simulation.

D'après les résultats obtenus, on remarque que les valeurs estimées sont proches des valeurs réelles. La différence peut être expliquée par les bruits de mesures, et les hypothèses simplificatrices adoptées lors de la modélisation du pendule simple.

## IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a procédé à l'identification des paramètres du pendule simple, en considérant les mesures obtenues par la technique de traitement d'images présentée dans le chapitre précédent. L'identification est faite par la méthode du modèle dont le principe consiste à minimiser l'écart observé entre les mesures et les valeurs prédites par le modèle.

A la lumière des résultats obtenus, on a montré l'apport de la vision artificielle dans l'identification des systèmes sans contact. La démarche suivie est très intéressante puisque elle a permis d'estimer des valeurs acceptables aux paramètres du pendule. Ce résultat bien sûr peut être raffiné en améliorant les conditions expérimentales par minimisation de l'effet des perturbations, et en considérant des techniques d'optimisation globale.

*Conclusion  
Générale*

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'identification des systèmes dynamiques en utilisant des mesures obtenues moyennant la vision artificielle et le traitement d'images. L'objectif consiste à identifier un modèle d'un pendule simple à partir d'une séquence vidéo. L'idée consiste à utiliser une méthode de traitement d'images pour récupérer les positions du centre de gravité de la masse, puis on utilise la méthode du modèle pour identifier les paramètres du pendule, en l'occurrence la longueur du fil, le poids de la masse, le facteur de frottement.

Ainsi, après avoir donné des généralités sur la modélisation et l'identification des systèmes, on a présenté la modélisation d'un pendule simple par principe de Lagrange. Puis, une méthode de traitement d'images (détection d'objets en mouvement par image référence) permettant de récupérer les positions du centre de gravité de la masse à partir d'une séquence d'images a été présentée. Ces coordonnées sont utilisées par la suite pour déterminer la variable caractéristique (angle) ou la mesure à utiliser pour le processus d'identification basée sur la méthode du modèle, c'est-à-dire utilisation d'une méthode de programmation non linéaire.

Les résultats obtenus montrent la convergence de l'approche d'identification basée sur la vision artificielle. Quoiqu'une erreur soit présente entre les valeurs réelles et celles identifiées, qui peut être justifiée par l'effet du bruit, et le non respect de certaines règles qualitatives, sans conséquences majeures, dans le processus d'identification, c'est-à-dire de la prise de la séquence d'images jusqu'à la résolution du problème d'optimisation formulé.

Le travail présenté donne un exemple de coordination entre deux domaines, en l'occurrence le traitement d'images et l'optimisation, pour aboutir à identifier un système physique. Les résultats obtenus montrent que le traitement d'images peut apporter d'autres solutions à des problèmes d'automatique, par exemple l'asservissement visuel, c'est-à-dire utiliser une caméra pour asservir un système.

# *Bibliographie*

# *Bibliographie*

- [1] **L. Povy**  
" Identification des processus". Dunod université, Bodas Paris, 1975.
- [2] **Collection dirigée par Pierre Borne**  
"Modélisation et identification des processus", Tome 1. TECHNIP, France 1991
- [3] **Jacques Richalet**  
"Modélisation et identification des processus". Technique de l'ingénieur, traité Informatique industrielle.
- [4] **Collection dirigée par Pierre Borne**  
"Modélisation structurée des systèmes avec les Bond Graphs". TECHNIP, Paris 2004.
- [5] **Sonia Izri**  
"Détection d'objets en mouvement par analyse de séquence d'images". Thèse d'ingénieur en Informatique, Université de Tizi-Ouzou, 1998.
- [6] **A. A Belkacem & A. Abdelhamid**  
Etude comparative des méthodes de binarisation. Thèse d'ingénieur en Electronique, Université de Tizi-Ouzou, 1994.
- [7] [www.lag.ensieg.inpg.fr](http://www.lag.ensieg.inpg.fr), visité le 28-03-2009.