*N°d'ordre*: ........


République Algerienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Laboratoire LMPA


# Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Mathématiques appliquées à la gestion

Par


Chaouche hayet
khalfouni nora


# La programmation mathématique convexe, applications et implémentations

Soutenue le Septembre 2022 devant le jury :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pr. | MEHIRI Mohamed | UMMTO | Président du jury |
| Dr. | GOUBI Mouloud | UMMTO | Examinateur |
| Dr. | Chabbah Mohammed | UMMTO | Encadreur |

Année Universitaire : 2021/2022

# Remerciements

Nous remercions Dieu tout puissant d'avoir guidé nos pas vers les portes du savoir tout en illuminant notre chemin, et nous avoir donné suffisamment de courage et de persévérance pour mener notre travail à terme.

Nous tenons à adresser nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur Chebbah Mohammed qui a su nous guider et nous orienter. Et nous tenons à lui exprimer notre profonde reconnaissance pour son très bon encadrement, sa patience, sa disponibilité, nous le remercions pour le temps qu'il a consacré à notre mémoire, sa confiance de nous proposer un thème très intéressant.

Nous remercions aussi les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'en faire partie et qui ont eu la patience de nous écouter.

Nous ne saurons oublier le grand mérite des enseignants qui ont contribué à notre cursus particulièrement ceux du département de "mathématiques" et qu'ils trouvent ici le témoignage de notre profonde reconnaissance.

Enfin, nous remercions tous ceux qui nous ont encouragé tout au long de notre parcours universitaire et ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# dedicaces

Je dédie ce modeste travail :
À mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leurs dois, pour leur bienveillance, leur affection et leur soutien... Trésors de bonté, de générosité et de tendresse, en témoignage de mon profond amour et ma grande reconnaissance" Que Dieu vous garde ".

À ma grande mère et à toute ma famille.
Je remercie très chaleureusement mon binôme pour sa gentillesse, et sa compréhension, , à mes cher frères Mourad , Djamel , Toufik , Lounes. Mes chères sœurs Hayet et Nawel ainsi que toute ma famille.

Et tous mes amis : kamilia , hassina , hakima , et tous mes proches

À tous ceux qui m'aiment.

À toute la promotion de mathématiques appliquées à la gestion 2021/2022.

NORA

# dedicaces

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents et mon directeur Monsieur Bessalah qui m'ont toujours comblée de leur amour, leur bonté et leur grande affection. Pour tout leur soutien et les sacrifices dont ils m'ont fait preuve à mon égard qu'Allah les protèges.

À mes chers frères Mohamed , Massinissa et à ma soeur Iméne .

À ma confidente , ma seule amie et ma moitié Lydia , ma binôme et sa famille.

À toute personne qui m'a aidée par un mot, une idée, ou par un encouragement.

HAYET

# Table des matières

# Table des figures

# Liste des tableaux

# Introduction générale

La programmation mathématique est une branche des mathématiques appliquées ayant pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation, ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution. En effet, la programmation mathématique monocritères se résume à rechercher un n-uple x 2 Rn qui maximise (où minimise) une fonction scalaire ( fonction dite fonction « objectif » ) sous des contraintes linéaires ou non linéaires et de type inégalités et (où) égalités.
Suivant la nature de la fonction objectif, et celles des fonctions intervenant dans les contraintes, on tombe dans une catégorie particulière de programmation mathématique ; par exemple : lorsque la fonction objectif est linéaire et les contraintes sont linéaires, on obtient un problème de programmation linéaire. Si la fonction objectif et les fonctions des contraintes sont quadratiques , on a affaire à un problème de programmation quadratique ; en dehors de ces cas, on parle de programmation non linéaire dont la programmation quadratique sujet de notre travail qui n'est qu'un cas particulier.
Le but de ce travail est d'établir une synthèse sur la programmation mathématique convexe , de présenter quelques méthodes de résolution et de faire des implémentations des algorithmes traités. Ce travail commence par une introduction et s'articule autour de cinq chapitres :
Le chapitre 1, nous présentons quelques rappels algébriques, certains résultats classiques ainsi que la notion de la convexité.
Le chapitre 2, est consacré à des généralités sur la programmation linéaire.
Le chapitre 3, présente l'algorithme de la méthode de Wolf et adaptée de support
pour la résolution d'un programme quadratique convexe. Au chapitre 4, on parlera de la programmation non linéaire.

Le chapitre 5, traite la partie implémentation et description générale du logiciel (MATLAB) ainsi que la présentation des résultats obtenus.
Enfin, nous terminons notre travail par une conclusion générale et une bibliographie utilisée .

# Chapitre 1

# Notion fondamentales

## 1.1 Bases de l'algèbre linéaire.

### 1.1.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons donner quelques notions sur l'algèbre linéaire et la programmation mathématique.
Et les propriétés des formes quadratiques, ainsi que la notion des ensembles et fonctions convexes.

### 1.1.2 Espaces vectoriels et vecteurs

On note R $^{n}$ l'espace vectoriel de dimension $n$.
La base canonique de R$^n$ est $(e_1, \ . \ . \ . \ ,e_n)$' e$_i = (0, ...1, ...0)'$.
Un vecteur $x\in R^n$ de composantes $x_1, \ . \ . \ . \ . \ , x_n$, est noté $x = (x_i)$ , $1 \leq i \leq n$.

Les vecteurs sont notés verticalement : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

### 1.1.3 Matrices et vecteurs

$soient\ n, m \in N^*$. Une matrice d'ordre m$\times n$ à $coefficient\ dans\ R^n\ est\ un\ tableau\ a\ deux\ dimensions$ $ayant$ m $lignes\ et$ n $colonnes$ , $represent$é $sous\ la\ forme\ suivante$ :

$$A = A(I,J) = \{a_{ij}, \qquad i \in I, j \in J\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

*Ou* $I = \{1,2,\ldots,m\}$ *et* $J = \{1,2,\ldots,n\}$ *représentent respectivement l'ensemble des indices des lignes et colonns se A.pour des calculs*
*Pratiques, la matrice A se note aussi*

$$A = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_j, \ldots\ldots\ldots a_n) = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ . \\ . \\ . \\ A'_j \\ . \\ . \\ A'_m \end{pmatrix}, \qquad a_j = A(I,j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Tel que $a_j$ est un vecteur-colonne de dimension$m$.

$A'_j$=A(i,J)=($a_{i1}$,$a_{i2}$,.........,$a_{im}$) *est un vecteur ligne de dimension n.*

*la matrice A est dite carée si on a* $n = m$ *; de plus , si* $A = A'$ *, la matrice est dite symetrique . La matrice identité d'ordre n sera notée* $I_n$

### 1.1.4 Matrices carrées et matrices particulières.

Une matrice $A \in R^{n\times n}$ est carrée d'ordre $n$ , s'écrit sous forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_R^{nn} \end{pmatrix}$$

Avec $a_{ij} \in R; i = 1 \ldots n; j = 1 \ldots n$

On a $n$ lignes et $n$ colonnes

La trace d'une matrice carrées $A$ d'ordre $n$ est la somme des valeurs sur sa diagonale principale :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Exemple : $tr \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = 5 + 1 + 7 = 13$

Le déterminant d'une matrice carrée $A$ d'ordre $n$ est noté *det(A).*

la matrice identité d'ordre $n$, dans $^{n\times n}$, vaut $I_n = (e_1 \ldots e_n)$.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice carrée $D$ est diagonale si les seules éléments non nuls sont sur la diagonale ; elle est notée $D = diag\ (d_i)$, ou $d_i)$ est le vecteur formé par les éléments diagonaux.

Une matrice carrée $M$ triangulaire inférieur si les seuls éléments non nuls sont dans le triangle inferieur.

**Exemple 1 :**

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieur.

Une matrice carrée $M$ triangulaire supérieur si les seuls éléments non nuls sont dans le triangle supérieur.

**Exemple 2 :**

$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieur.

### 1.1.5 Matrices symétriques

La transposée $A^{'}$ d'une matrice $A$ est la matrice obtenue en interchangeant les lingnes et les colonnes. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = A^{'} = (b_{ij})$, on a donc $b_{ij} = a_{ji}$.
Une matrice carrée $A$ est symetrique si $A = A^{'}$.
Les matrices $A^{'}\ A$ et $A\ A^{'}$ sont symétriques.
On a $(A^{'})^{'} = A$ et $(AB)^{'} = B^{'}A^{'}$.
Soit $M$ une matrice carrée symétrique d'ordre $n$.

1. $M$ est dite définie positive si : $x'Mx > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad x \in R^n$.
2. $M$ est dite semi définie positive si : $x'Mx \geq 0$ , $\quad x \in R^n$.
3. $M$ est dite définie négative si : $x'Mx < 0 \quad \forall x \neq 0, \quad x \in R^n$.
4. $M$ est dite semi définie négative si : $x'Mx \leq 0$ , $\quad x \in R^n$.

### 1.1.6 Critère de Sylvester

Soit $M$ une matrice carre symetrique $(n \times n)$ , *on dit que M est* :

1. definie positive si $det\ M_k > 0, \forall\ k = 1, \ldots, n$ .
2. definie negative si det (-1)$^k$ $M_k \quad 0, \forall k = 1, \ldots, n$

Où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$det\ A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

**Remarque :** *( $A_k$ )* est aussi appelé mineur principal successif.

### 1.1.7 Critère des valeurs propres

Soit $M$ une matrice carrée symétrique.

1. $M$ est dite définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives
2. $M$ est dite semi définie positive si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles dont l'une au moins est nulle.
3. $M$ est dite définie négative si toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.
4. $M$ est dite semi définie négative si toutes ses valeurs propres sont négatives ou nulles dont l'une au moins est nulle.

### 1.1.8 Produit scalaire et normes vectorielles

Le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ est $\quad x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \quad x, y \in R^n$.
Soit $x = (x_i)$, on a $x_i = e_i' x$.
Soit $A = (a_{ij})$, on a $a_{ij} = e_i' A e_j$.
Dans le cas de vecteurs complexes, le produit scalaire hermitien est défini par

$$(x,y) \in Cc^n \times^n \quad \longrightarrow x^* y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

Où le sur-lignage d'une grandeur indique qu'on en considère le conjugué.
Il est donc possible de définir plusieurs normes dans l'espace vectoriel $\Re^n$ .

### 1.1.9 Normes vectorielles et normes matricielles.

Soit $V$ *un espace vectoriel réel ou complexe. On appelle norme sur* $V$,

*toute application* $\|.\|$ , à *valeurs dans* $R^+$, *et satisfaisant les axiomes suivants* :

(a) $\forall v \in V$, $0 \leq \|v\| < \infty$ , $\forall v \in V$, *(positivité)*

(b) $\forall v \in V$ , $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, *(la séparation)*

(c) $\forall \lambda \in R$, $v \in V$ , $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$ , (homogénéité)

(d) $\forall v; w \in V$ , $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ ,$\forall v, w \in V$. *(Inégalité triangulaire)*

**Exemple**

1. $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ $,v = (v_1,v_2,\ldots,v_n)'$
2. $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i)^2}$ , *norme euclidienne*
3. $\|v\|_3 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|$
4. $\|v\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \quad |v_i|$

Une norme matricielle est une application $\|.\| : M_n\ (K) \rightarrow\ R^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\|A\| = 0$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\ \|A\|\ , \forall\ \alpha\quad K$
3. $\|A +\ B\| \leq\ \|A\| +\ \|B\|\ , \forall A, B \in\ M_n\ (K)$
4. $\|A.\ B\| \leq\ \|A\|\ .\ \|B\|\ , \forall A, B \in\ M_n\ (K)$
5. $\|A.\ x\| \leq\ \|A\|\ .\ \|x\|\ ,$ $\qquad x \in R^n.$

**Exemple :** les trois normes usuelles sont :

1. $\|A\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \quad \sum_{i=1}^{n} \quad |a_{ij}|$
2. $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^2)}\ .\ \rho\,(A^2)$ : rayon spectral de $A^2 = \max_{1\leq i\leq m} (|\lambda_i|)$ ,
   valeur propre de $A^2$
3. $\|A\|_\infty = \max_{\mathrm{i}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} |a_{ij}|$

# 1.2 Fonction de plusieurs variables

## 1.2.1 Convergence des suites dans $\Re^n oudans \Re$

On définit une suite dans $\Re^n$ par : $\left(S^k\right)_{k>0}$ avec :

$S^k$= ($S_1^k$, $S_2^k$,. . ., $S_n^k$) et S∈ $R$, $i$ =1,2,. . .,$n$.

**Exemple :** $S^k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{2k}{1+k^2}\right)$ une suite dans $\Re^2$.

Soit $\left(S^k\right)_{k>0}$ une suite de points (ou vecteurs) de $R^n$. On dit que cette suite converge vers une limite $S$

$$\Re^n \ sietseulementsipourtout$$

$\varepsilon > 0$, il existe $k_0$ tel que

$k \geq k_0 \ \left\|S^k - \ S\right\| \leq \ \varepsilon.$

On note alors $\lim_{k\to\infty} S^k = \ S$ ou encore parfois $S^k \longrightarrow \ S$. Dans le cas contraire on dit que la suite diverge.

Dans le cas $n = 1$, on a $\left\|S^k - S\right\| = \ \left|S^k - S\right|$ et on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

**Remarque :** Si $\left(S^k\right)$ converge, sa limite est unique.

Une suite $\left(S^k\right)_{k>0}$ est dite "*de Cauchy*" si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0$ tel que

$k,l \geq k_0 \Longrightarrow \left\|S^k - \ S^l\right\| \leq \varepsilon. \ \ ?? > l$

**Remarque** : Dans $R^n$ $\left(S^k\right)$ *suite de Cauchy* $\Longleftrightarrow$ $\left(S^k\right)$ *convergente.*

## 1.2.2 Fonctions continues

Une fonction $f$ :⟶ $R$ *tel que* ⊆ $R^n$ est continue au point $x_0$ *si* :

$$\forall \ \varepsilon \ > 0 \ tel \ que \ \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow |f\,(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

On écrit $\lim f\,(x) \ = f(x_0)$

x⟶ $x_0$

$f$ est continue sur si elle est continue en tout point de .

## 1.3 Différentiabilité et dérivées partielles

### 1.3.1 Différentiabilité : le premier ordre

**(Dérivée partielle)** On définit la dérivée partielle par rapport à $x_i$ de la fonction $f$ au point $x = (x_1, \ldots, x_n)'$ par la limite :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_1\ , \ldots, x_i\ + h, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

Quand elle existe et elle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

**Remarque**

On définit la dérivée partielle par rapport à $x_i$ de $f$ *en dérivant* $f$ par rapport à $x_i$en supposant les autres variables constantes .

Si les dérivées partielles $\partial f(x)/\partial x_i$ existent pour tout $i$, le gradient de $f$ est defini de la façon suivante.

**(gradient)** Soit $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction continue. La fonction notée $\nabla f(x) : R^n \longrightarrow R^n$, également notée $\partial f(x)/\partial x_i$ est appelée le gradient de $f$ et est definie par

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

elle peut ne pas exister pour certains $x \in R^n$.

**Remarque :** Le gradient joue un rôle essentiel dans le développement et l'analyse des algorithmes d'optimisation.

**Exemple : (gradient)**

Soit $f(x, y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 20$. Le gradient de $f$ est donné par

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + 3y^2 \end{pmatrix}$$

**(Dérivée directionnelle)** On appelle dérivée directionnelle de $f$ dans la direction $d \in R^n$ au point $x$, notée $\delta f(x, d)$ ,

La limite (éventuellement $\pm\infty$) du rapport :

$$\frac{f(x + hd) - f(x)}{h}$$

Lorsque $h$ tend vers 0

Autrement dit :

$$\delta f(x, d) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x + hd) - f(x)}{h}$$

De plus, lorsque le gradient existe , la dérivée directionnelle est le produit scalaire entre le gradient de $f$ et la direction $d$, $i, e$ :

$$\delta f(x, d) = \nabla' f(x)\, d$$

**Remarque :**

Si $\|d\|$=1 la dérivée directionnelle est le taux d'accroissement de $f$ dans la direction $d$ au point $x$.

1. Le taux d'accroissement est maximal dans la direction du gradient .
2. Le gradient indique la direction de la plus grande pente .

**Exemple :**
Soit $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$
Et soit $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$
La dérivée directionnelle de $f$ dans la direction $d$ est :

$$(d_1 d_2)\, \nabla f(x_1, x_2) = d_1 - 400\left(x_{2-} x_1^2\right) x_1 - 2(1 - x_1)) + 200 d_2 (x_2 - x_1^2),$$

Où $\nabla f(x_1, x_2)$ est donné par :

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} (-400(x_2 - x_1^2)\, x_1 - 2\,(1 - x_1)) \\ -200(x_2 - x_1^2)x_1 \end{pmatrix}$$

**(fonction différentiable)** Soit $f : R^n \longrightarrow R$ une fonction continue. Si, pour tout $d \in R^n$, la dérivé directionnelle de $f$ dans la direction $d$ existe, alors la fonction $f$ est dite différentiable.,

**(matrice gradient)** Soit $f : R^n \longrightarrow R^m$ telle que Soit $f_i : R^n \longrightarrow R$ est différentiable, pour $i = 1, \ldots, m$. dans ce cas, $f$ est différentiable, et la fonction $\nabla f(x) : R^n \longrightarrow R^{n\times m}$ est appelée matrice gradient et est définie par

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \nabla f_1 f(x) & \cdots & \nabla f_m(x) \\ | & & | \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La matrice gradient est souvent utilisée dans sa forme transposée et est appelée *matrice jacobienne* de $f$

**(matrice jacobienne)** Soit $f : R^n \longrightarrow R^m$. La fonction $J(x) : R^n \longrightarrow R^{m\times n}$ est appelée *matrice jacobienne* et

est définie par $J(x) = \nabla f(x)' = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)' \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$

### 1.3.2 Differentiabilité : le second ordre

Nous pouvons effectuer la même analyse de differentiabilité faite sur la fonction $f$dans la section (1.3.1) pour chacune des fonctions $\nabla_i f(x)$ de la définition (1.3.1). La $j^{\text{ième}}$ dérivée partielle de $\nabla_i f(x)$ est la dérivée seconde de $f$ par rapport aux composantes $i$ et $j$, car

$$\frac{\partial\, \nabla_i f(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial\,(\partial\, f(x)/\partial x_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial^2\, f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Il est courant d'organiser ces dérivées secondes dans une matrice $n\times n$ dont l'élément de la ligne $i$ et la colonnes $j$ soit $\partial^2\, f(x)/\partial x_i \partial x_j$. Cette matrice est appelée *matrice hessienne* ou *hessien*.

(***matrice hessienne***)

Soit $f \ : \ R^n \longrightarrow \ R$ une fonction deux fois différentiable.

La fonction notée $\nabla^2 f(x) : \ R^n \longrightarrow \ R^{n\times n}$ est appelée *matrice hessienne* ou *hessien* de $f$ et est définie par

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

**Remarque :** La *matrice hessienne* est toujours symétrique.

Notons que le *hessien* de $f$ est la matrice gradient de la *matrice jacobienne* de $\nabla f$.

**Exemple (*hessien*)**

Ecrire la hessien de $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 2zx$

$$\mathrm{H}_{\boldsymbol{f}} = J(4x + 2y + 2z,\ 2y + 2x + 4z, 2x + 4y + 2x)$$

$$=[\nabla^2 f(x) = H_f = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Ensembles et fonctions convexes.

### 1.4.1 Introduction :

Pour étudier les problèmes d'optimisation, il est nécessaire de recourir 'à des outils scientifiques dont l'´étude est basée sur l'analyse convexe. En effet, l'hypothèse de convexité va jouer un rôle très important pour la plupart des algorithmes que nous d´écrirons, la convergencevers l'optimum ne pourra être démontrée qu'avec cette hypothèse.

Nous allons ici rappeler quelques notions de convexité importantes auxquelles nous ferons appel par la suite, ainsi que quelques propriétés.

### 1.4.2 Ensembles convexes

Un ensemble $S \subseteq R^n$ est dit convexe si et seulement si :

$$\left.\begin{array}{c} \forall x \in S \\ \forall y \in S \\ \forall \lambda \in [0, 1] \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in S.$$

D'une façon équivalente, on peut dire que $S$ est convexe si et seulement si, pour deux points quelconques $x\ et\ y$ pris dans $S$, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans $S$.

**Exemple 4.2.1.**

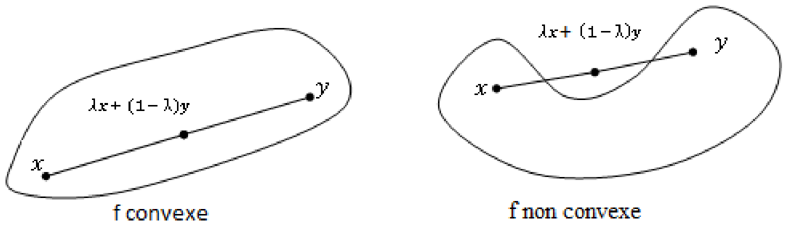



Figure 1.1 – Interprétation géométrique d'ensembles convexe et non convexe

### 1.4.3 Enveloppe convexe :

Soit $S \subset R^n$. On appelle enveloppe convexe de $S$, et on note $conv(S)$, le plus petit ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant $S$.

Il ya deux manière de construire $convS$ :

$conv(S)$ = Intersection de tous les convexes contenants $S$.

$conv\ (S)$ = Ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de $S$.

### 1.4.4 Fonction convexe :

Soit $\in R^n$ un ensemble convexe et $f$ une fonction de dans $R$

$f$ est dite convexe si ,

$$\forall\ x, y\ \in, \forall\ t \in [0,1]$$

$$f\left((1-t)\,x+ty\right) \leq \left((1-t)\,f\,(x)+tf(y)\right)$$

### 1.4.5 Fonction strictement convexe

Une fonction $f : R^n \longrightarrow R$ est dite strictement convexe si, pour tout $x$ et $y \in R^n, x \neq y$, et pour tout $t \in \,]0,1[$ , on a

$$f\,(ty+(1-t)\,x) < tf\,(y)+(1-t)\,f\,(x)\,.$$

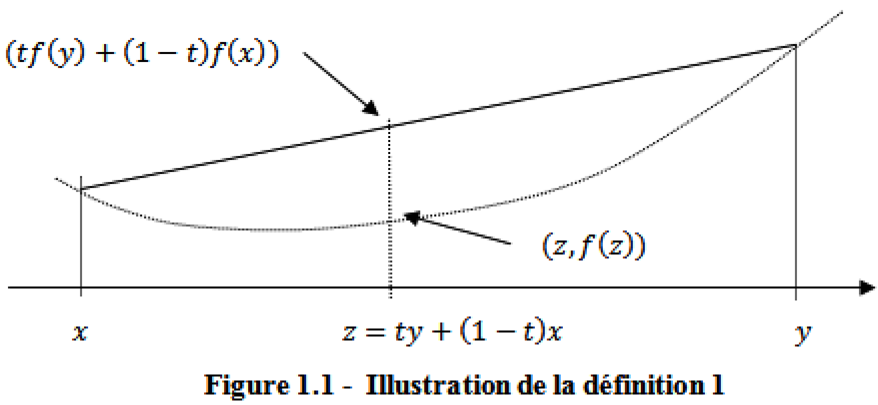



FIGURE 1.2 – Illustration de la definition convexité

### 1.4.6 Fonction concave

Une fonction $f : R^n \longrightarrow R$ est dite concave si $-f$ est une fonction convexe, c'est-à-dire si pour tout $x$,$y \in R^n$ et pour tout $t \in [0,1]$ , on a

$$f\left(ty + (1-t)\,x\right) \geq tf\left(y\right) + (1-t)\,f\left(x\right).$$

**Remarque**

La convexité et la concavité ne sont pas des propriétés complémentaires. Une fonction peut n'être ni convexe ni concave. C'est le cas de la fonction représentée dans la figure suivante

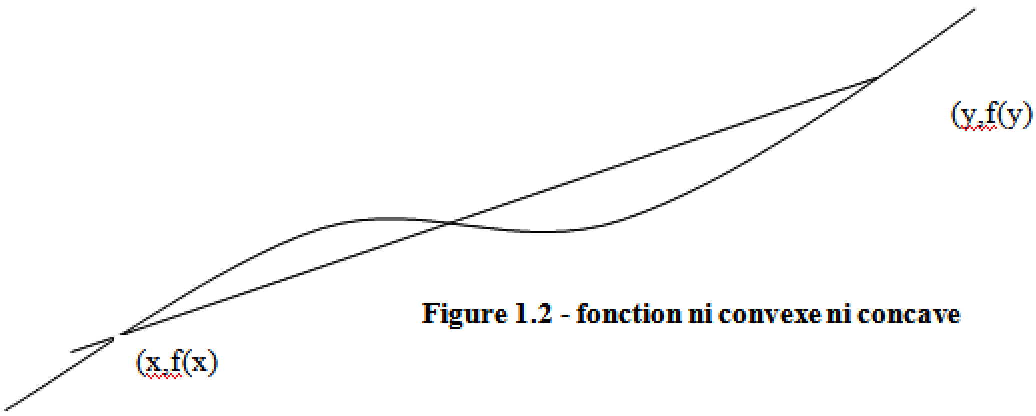



FIGURE 1.3 – fonction ni convexe ni concave

Chapitre 2

# La programmation linéaire

## 2.1 Introduction

La programmation linéaire ($PL$) est une branche de la programmation mathématique (résolution de programmes économiques ou autres à l'aide des mathématiques). Trois types de problèmes relèvent de la programmation mathématique :

– La programmation linéaire, Où les fonctions données sont linéaires.

– La programmation quadratique.

– La programmation non linéaire, Où une partie des fonctions données sont représentées sous la forme de fonctions non linéaires.

Quelques rappels :

Tout problème de la programmation linéaire peut se formuler de la manière suivante :

Trouver les valeurs des variables $x = (x_j \ , \ j = \overline{1, n} \ )$ qui maximisent ou minimisent la fonction linéaire suivante :

$$Z = Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + +c_jx_j + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} \to c_jx_j \to (max/min) \tag{2.1}$$

Les sous contraintes suivantes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots. \\ \ldots \quad \ldots. \quad \ldots.. \quad \ldots.. \quad \ldots.. \quad \ldots. \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots. \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x = (x_j,\ j = 1, \ldots, n\ )$$

$$x_j \geq 0\ ,\ j = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

Où $c_j$ , $j = \overline{1,n}$ représentent les coûts ou profits unitaires des différents produits.

Les coefficients $c_j$ et $a_{ij}$ ( $i = \overline{1,m}$ , $j = \overline{1,n}$ ) sont supposés etre des nombres réels, en plus on considère que l'entier $m$est infèrieur ou ègal à $n$ , tous les nombres $b_i$ $(i = \overline{1,m})$ sont positifs ou nuls et le rang du système **2.2** est infèrieur ou ègal à $m$.

— La fonction $Z$ est appelée fonction objectif.

— Les contraintes **2.2** sont appelées, contraintes principales, ou essentielles.

— Les contraintes **2.3** sont dites directes (de non négativité)

**Remarque**

Si l'objectif consiste à minimiser une fonction linéaire :

$$Z = Z\ (\ x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n\ .$$

Alors on maximisera la fonction linéaire opposée :

$$\overline{Z} = -\ Z\ (\ x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_jx_j - \dots - c_nx_n\ .$$

**Ecriture matricielle d'un problème de programmation linéaire**

Pour écrire le problème de programmation linéaire 2.1 -2.2 -2.3 sous forme compacte, on utilise la forme matricielle (vectorielle). Pour ce faire on introduit les notations suivantes : Soient $I = \{1, 2, \dots, m\ \}$ l'ensemble des indices de lignes et $j = \{1, 2, \dots, n\ \}$ l'ensemble des indices des colonnes.
Ainsi l'ensemble des variables $x_1, x_2, x_j, \dots, x_n$ s'écrira sous la forme vectorielle :

$$x = x(J) = (x_j, j \in J).$$

De manière analogue on aura :

$$c = c(J) = (c_j, j \in J), b = b(I) = (b_i, i \in I)$$

L'ensemble des coefficients $a_{ij}$ , $i \in I$, $j \in J$, sera représenté sous forme d'une matrice $A$ d'ordre ( m × n )

$$A = A\,(I\ , J) = (a_{ij}, \text{i} \epsilon\ I\ ,\ j\ \epsilon\ J\ ) = \begin{pmatrix} & a_{11}\ a_{12} \dots a_{1j} & \dots & a_{1n} & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & a_{m1}\ a_{m2}\ \cdots a_{mj} & \dots & a_{mn} & \end{pmatrix}$$

On écrit souvent A de la manière suivante :

$A$=( $a_1$ , $a_2, \ldots$ , $a_j$ , $\ldots, a_n$) , Où $a_j$ est un vecteur colonne :

$$a_j = At(I, j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Avec ces nouvelles notations, le problème (2.1) -(2.3) peut etre écrit sous forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} Z = Z(x) = c'x \to (max/min). \\ Ax = b \\ x \geq 0, \\ x \in \Re^n \end{cases}$$

Ici $c\prime$ est le transposé de $c$, la matrice $A$ est la matrice de condition du problème et $b$ *vecteur* (second membre).

## 2.2 Forme d'un Programme linèaire [2]

Un programme linéaire peut être écrit sous une :

**Forme générale**

$$(P.L) = \begin{cases} (max/min)Z(x) = \sum_j^n c_j x_j. \\ S.C \\ \sum_j^n a_{ij}x_j(\leq, \geq ou =)b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n} \end{cases}$$

**Forme canonique**

$$(P.L) = \begin{cases} (max/min)Z(x) = c^{'}x. \\ S.C \\ Ax \leq (resp \geq)b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

**Forme standard**

$$(P.L) = \begin{cases} (max/min)Z(x) = c^{'}x. \\ S.C \\ Ax = b \\ x \geq b \\ b \geq 0, \end{cases}$$

**Remarque**

Les problèmes de minimisation et de maximisation sont en fait èquivalents puisque $minZ = -max(-Z)$ et $maxZ = -min(-Z)$.

## 2.3 Méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode itèrative. Elle démarre d'un point extrême (sommet de départ) et passe au sommet voisin, et ceci constitue une itération de l'algorithme du simplexe. Pour cela, on doit définir le point extrême de départ et le test d'arrêt.
Soit le problème standard de programmation linéaire (avec maximisation) suivant :

$$Z\ (x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_jx_j + \cdots + c_nx_n \rightarrow max\ . \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots. \quad \cdots. \quad \cdots \quad \cdots. \\ \cdots \quad \cdots. \quad \cdots.. \quad \cdots.. \quad \cdots.. \quad \cdots. \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots. \quad \cdots. \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_1\ \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ , \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{2.6}$$

Ici on suppose $b_1,\, b_2\ ,\ \ldots,\ b_m\ \ \geq 0$ , et rang $A = m \leq n$
Le problème (2.4)-(2.6) peut être écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{cases} \mathrm{c}^{'}x \rightarrow max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

ou $A = A(I, J)$ est la matrice des conditions ; $a_{ij}= A(I, J)$ les colonnes de $A$.
$c^{'=c^{'(J)}}$ Le vecteur des profits, $b = b(I)$ le vecteur des contraintes (second Membre),
$x = x(J) = (x_j,\, j \in J)$ le vecteur des variables.
$I = \{1, 2, \ldots, m\ \}$ , $j = \{1, 2, \ldots, n\ \}$ les ensembles d'indices des lignes et des colonnes de sa matrice $A$.

**Problème standard et solution de base :[2]**

Tout vecteur $x$ vérifiant les contraintes (2.4)et (2.6) est appelé solution réalisable (admissible) du problème (2.4) $\rightarrow$ (2.6)

Une solution réalisable $x$ est dite de base si ( n-m ) de ses composantes sont nulles, et aux autres $(x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jm})$ correspondent m vecteurs $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jm}$ de la matrice de condition A linéairement indépendants.

L'ensemble $J_B$= $j_1,\ j_2\ , \ldots, j_m\ estappelensembledesindicesdebase,$

$J_H$ =J$\backslash J_B$ Ensemble des indices hors base.

Autrement :

Une solution réalisable $x$ =x(J) est solution de base si $x_H$= $x(J_H) = 0$ ,

$detA_B \neq 0$ , ou $A_B = A(I\ ,\ J_B)$ , $x$ ( $J_B$ ) $\geq 0$.

La matrice $A_B$ est appelée la matrice de base , $x_j$ , $j \in J_B$ les composantes de base , $x_j$ , $j\ \epsilon J_H$ les composantes hors base .

Une solution réalisable de base $x^0$ de (2.4) - (2.6)est optimale si $c^{'}\ x^0$= max ( $c^{'}$ x), pour toute solution réalisable.

Une solution réalisable de base $x$ est dite non dégénérée si $x_j > 0$ , $j \in J_B$.

L'accroissement de la fonction objectif Z est égale à :

$\Delta Z = Z\ (\overline{x})$ - Z(x) $= c'\ \overline{x} - c'x = c'\Delta x.$

Construisons le m-vecteur $y = y(I)$ vecteur de potentiels :

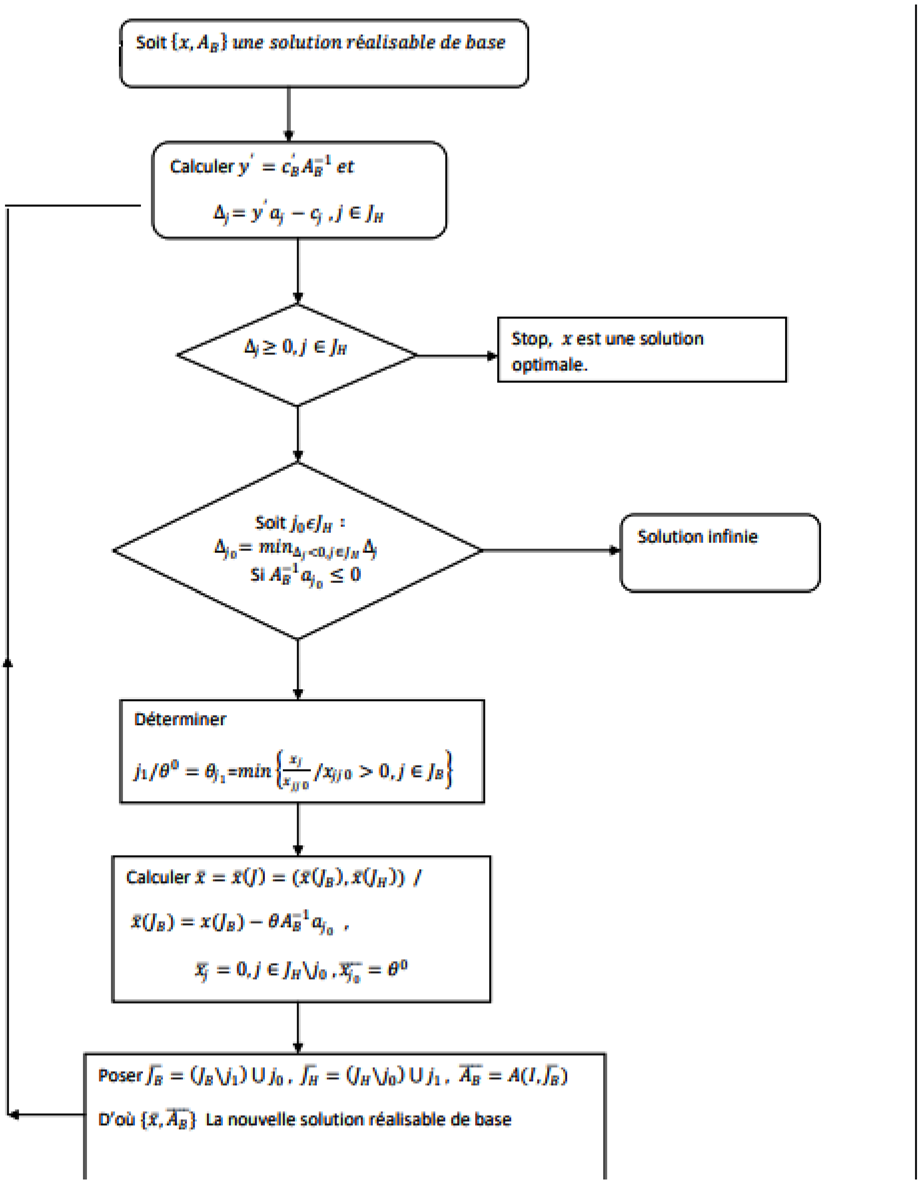
$y'$=$c'_B A_B^{-1}$, et le vecteur $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j,\ j \in J)$ ; le vecteur estimations :

$$\begin{cases} \Delta' = y'A - c' \\ \Delta j = y'a_j - c_j, j \in J \end{cases}$$

### 2.3.1 Critère d'optimalité [2]

Soit $\{x \ , \ A_B\}$ une solution réalisable de base de départ.
L'inégalité $\Delta_H = \Delta \ (J_H) \geq 0$ est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité de $\{x \ , \ A_B\}$ .

**L'organigramme de l'algorithme de simplexe- maximisation [2]**



### 2.3.2 Algorithme du simplexe [2]

1. Soit $\{x, A_B\}$, une solution réalisable de base de départ.
2. Calculer $y' = c'_B\ A^{-1}_B$ et $\Delta_j = y'\ a_j - c_j$, $j \in J_H$.

Si $\Delta_j \geq 0, j \in J_H$

Stop, $x$ est solution optimale.

Sinon :

Soit $j_0 \in J_H$ :$\Delta_{j0} = (\min\ \Delta_j / \Delta_j < 0), j \in J_H$.

Si $A_a^{-1}{}_{j0} \leq 0$, $j \in J_H$

Stop le maximum de la fonction objective tend vers l'infini

Sinon :

Déterminer : $= j_1/\theta^0 = \theta_{j1} = min\{\frac{x_j}{x_{jj0}}/x_{jj0} > 0, j \in J_B$

Calculer

$\overline{x} = \overline{x}(J) = (\overline{x}(J_B), \overline{x}(J_H))$

$$\overline{x}\,(J_B) = x\,(J_B) - \theta^0 A_B^{-1} a_{j_0}, \overline{x_j} = 0\ ,\ j \epsilon J_H \backslash j_0\ ,\ \overline{x_{j_0}} = \theta^0$$

Poser $\overline{J_B} = (\ J_B - j_1) \cup j_0$ , $\overline{j_H} = (J_H - j_0) \cup j_1$ , $\overline{A_B} = A\left(I, \overline{J_B}\right)$, $d'o$ù $\left\{\ \overline{x}, \overline{A_B}\right\}$ , la nouvelle solution réalisable de base puis aller en 2.2

**Tableau du Simplexe [2]**

Les différents calculs qu'on aura à effectuer et les différentes étapes de résolution seront disposés dans le tableau suivant :

| C | | | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_m$ | $c_{m+1}$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_n$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $\cdots$ | $a_m$ | $a_{m+1}$ | $\cdots$ | $a_j$ | $\cdots$ | $a_n$ | $\theta_j$ |
| $c_1$ | $a_1$ | $b_1 = x_1$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 | $x_{1,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{1j}$ | $\cdots$ | $x_{1n}$ | $\theta_1$ |
| $c_2$ | $a_2$ | $b_2 = x_2$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 | $x_{2,m+1}$ | $\cdots$ | $x_{2j}$ | $\cdots$ | $x_{2n}$ | $\theta_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $c_m$ | $a_m$ | $b_m = x_m$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 1 | $x_{m,m+1}$ | $\cdots$ | $x_mj$ | $\cdots$ | $x_{mn}$ | $\theta$ |
| | Z | $\Delta$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\cdots$ | $\Delta_m$ | $\Delta_{m+1}$ | $\cdots$ | $\Delta_j$ | $\cdots$ | $\Delta_n$ | |

**Exemple**

Nous allons résoudre le problème de programmation linéaire suivant, par la méthode du simplexe :

$$\begin{cases} Z = 3x_1 + 2x_2 \to max \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_j \geq 0 \ , \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

On a $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $J_B = \{3, 4, 5\}$, $J_H = \{1, 2\}$, avec $A_B = I_3$ donc solution réalisable de base est $x = (0, 0, 5, 1, 3)$, dressons alors le premier tableau du simplexe.

| C | | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ |
| 0 | $a_3$ | 5 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | $5/2$ |
| 0 | $a_4$ | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | $a_5$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| | Z=0 | $\Delta_j$ | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | |

On remarque que la relation $\Delta_j \geq 0, \forall j \in J_H$ n'est pas vérifiée, donc la solution réalisable de base initiale n'est pas optimale, on doit alors changer la base de la manière suivante :

$$min_{j \in J_H} \Delta_j = \Delta_1 = -3, \, donc \ j_0 = 1$$

le vecteur $a_1$ va rentrer dans la nouvelle base .

Et calculons $\theta^0 = min_{j \in J_B} \theta_j$ :

$$\theta_3 = \frac{5}{2}, \theta_4 = \frac{1}{1} = 1, \theta_5 = \frac{3}{1} = 3 \ , \ d'ou \ \theta^0 = \theta_{j1} = min_{j \in J_B} \theta_j = \theta_4 = 1$$

De là, le vecteur $a_4$ va sortir de la base, et la nouvelle solution $\overline{x}$ .

Dressons le $2^{eme}$ tableau du simplexe :

| C | | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ |
| 0 | $a_3$ | 3 | 0 | 3 | 1 | -2 | 0 | 1 |
| 3 | $a_1$ | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | / |
| 0 | $a_5$ | 2 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| | $\overline{Z} = 3$ | $\overline{\Delta_j}$ | 0 | -4 | 0 | 3 | 0 | |

La nouvelle solution de base est donc $x = (1, 0, 3, 0, 2)$ de plus elle , n'est pas optimale car $\overline{\Delta_2} = -4 < 0$.

On doit alors changer la base une autre fois :

$$min_{j \in J_H} \overline{\Delta_J} = \overline{\Delta_2} = -4$$

,donc le vecteur $a_2$ entrura $a_5$ sortira de la base .

Comme $\theta^0 = min_{j \in J_B} \theta_j = \theta_3 = \theta_5$ ,donc le vecteur $a_2$ entrura $a_5$ sortira de la base .

Le tableau du simplexe :

| C | | | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ |
| 0 | $a_3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | -1/2 | -3/2 | / |
| 3 | $a_1$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 1/2 | / |
| 2 | $a_2$ | 1 | 0 | 1 | 0 | -1/2 | 1/2 | / |
| | $\overline{Z} = 8$ | $\overline{\Delta_j}$ | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 5/2 | |

La nouvelle solution de base est donc $\overline{\overline{x}} = \{\ 2, 1, 0, 0\}$ , *comme* $\overline{\overline{\Delta_j}} \geq 0$ , $\forall\ j\ \epsilon\ \overline{\overline{J_H}}$ L'algorithme s'arrête et la solution obtenue est optimal , avec $\overline{\overline{z}} = 8$ .

## 2.4 La M-Méthode [2]

Le mathématicien américain Tcharness a proposé cette méthode pour résoudre les programmes linéaires.

Soit le problème :

$$\begin{cases} Z = c'x \to max \\ Ax = b \\ x_j \geq 0 \ , j = \overline{1,n} \end{cases} \quad \textbf{(P)}$$

On constitue le problème (PM) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \overline{Z} = c'x - M\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to max \\ [\mathrm{Ax}]_i + x_{n+i} = b_i \ , \ \mathrm{i}=\overline{1,m} \\ x_j \geq 0 \ , j = \overline{1,n+m} \end{cases} \quad \textbf{(PM)}$$

ou $M \gg 0$ (*un nombre positif très grand* )

Le vecteur $X = (0, b)' = (x = 0\ ,\ x_{n+i} =\ b_i\ ,\ i = \overline{1, m}$ est une solution de base réalisable pour (PM).

On résout le problème (PM) par la méthode du simplexe avec une solution réalisable de base de départ $\{(0{,}b)\ ,\ A_B\}$ .

### 2.4.1 Principe de la M-méthode [2]

Après la transformation de (P) en (PM), à l'optimum nous avons les cas suivants :

1. Si toutes les variables artificielles sont nulles alors la solution est optimale.

   De plus si $\Delta_{j0}= 0\ /\ j_0\ \in\ J_H$ alors on aura une infinité de solutions optimales.

2. Au moins une variable artificielle de la base strictement positive $\Longrightarrow$ contraintes contradictoires.

3. A un certain moment on ne peut pas améliorer, par manque de pivot.

   On distingue deux cas :

   -Toutes les variables artificielles sont nulles $\Longrightarrow$ solution infinie

   - Au moins une variable artificielle strictement positive $\Longrightarrow$ contraintes contradictoires.

**Exemple :**

résoudre le problème suivant :

$$
(\mathrm{P})\begin{cases}
\max Z\ = -2x_1 + x_2 + 4x_3 \\
x_1 -\ x_2\ +\ x_3 =\ 2 \\
-5x_2 + 2x_3 = 4 \\
-2x_2 + x_3 = 1 \\
xj \geq 0, j = \overline{1,3}
\end{cases}
$$

Pour déterminer une solution de base initiale, on doit ajouter deux variables artificielles $x_4$ *et* $x_5$ , d'ou on obtient le M-problème suivant :

$$(\text{PM})\begin{cases} \max Z_M = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - Mx_4 - Mx_5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -5x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ xj \geq 0, j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Il admet une solution de base de départ $\overline{x} = (2, 0, 0, 4, 1)$ *avec* $\overline{J_B} = \{1, 4, 5\}$ *et* $\overline{J_H} = \{2, 3\}$

Calculons le potentiel $\overline{y}$ *et* le vecteur des estimations $\overline{\Delta_j}$ , $j \in J$ :

$$\overline{y}=\overline{c'_B A_B^{-1}}=(-2,\ -M,\ -M)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(-2,\ -M,-M)\,.$$

$$\overline{\Delta_j}=0,\ j\ \in\ \overline{J_B}$$

$$\overline{\Delta_2}=\overline{y'a_2-c_2}=(-2,-M\ ,\ -M)\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}-1=7M+1$$

$$\overline{\Delta_3}=\overline{y'a_3-c_3}=(-2,-M\ ,\ -M)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}-4=-3M-6$$

**Dressons le premier tableau du simplexe :**

| C | | | -2 | 1 | 4 | $-M$ | $-M$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{c_B}$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\overline{\theta_j}$ |
| -2 | $a_1$ | 2 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $-M$ | $a_4$ | 4 | 0 | -5 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 4 | $a_5$ | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | $\overline{Z}=-5M-4$ | $\overline{\Delta_j}$ | 0 | $7M+1$ | $-3M-6$ | 0 | 0 | |

La solution de dèpart n'est pas optimale car $\overline{\Delta_3}$ <0, donc on doit faire rentrer $a_3$ dans la base et faire sortir $a_5$ , ainsi on obtient le nouveau tableau suivant :

| C | | | -2 | 1 | 4 | $-M$ | $-M$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\overline{c_B}}$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\overline{\overline{\theta_j}}$ |
| -2 | $a_1$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | |
| $-M$ | $a_4$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | -2 | |
| 4 | $a_3$ | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 1 | |
| | $\overline{\overline{Z}} = -5M - 4$ | $\overline{\overline{\Delta_j}}$ | 0 | $M - 11$ | 0 | 0 | $-3M - 6$ | |

Le critère d'optimalité est vérifié, donc la solution du M-problème est $\overline{x}$

= (1,0,1,2,0 )
Comme la variable artificielle $\overline{\overline{x_4}} = 2 > 0$,donc le problème (P) n'admet pas de solution optimale (les contraintes de (P) sont contradictoires).

## 2.5 Méthode duale du simplexe [2]

Etant donné le problème primal de programmation linéaire :

$$\begin{cases} c'x \to max \\ Ax = b \quad (P) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Et son dual

$$\begin{cases} b'y \to min \\ A'y \geq c \quad (D) \\ y \in R^m \end{cases}$$

[2] De l'ensemble $J$, choisissons un sous ensemble $J_B \in J$ et soit $A_B = (I, J_B)$ une sous matrice inversible de $A$

En utilisant la matrice $A_B$ , on construit le vecteur $y$ :

$y' = c'_B A_B^{-1}$ (2.8)

Le vecteur $y$ est dit plan dual basique de $(D)$ et $A_B$ la matrice de base si

$A'_H y \geq C_H$ (2.9)

Ou $A'_H = (I, J_H)$, $J_H = J \backslash J_B$

[2] Un plan dual basique $y$ est dit non dégénéré si $A'_H y > C_H$.

En utilisant un plan dual basique de départ $y$ , on construit les vecteurs suivants :

$\delta(j) = A'y - c$, $x(J)$=$(x(J_B), x(J_H))$, $x(J_B) = x_B = A_B^{-b}$, $x(J_H) = x_H = 0$

Appelés Coplan et pseudo plan respectivement du problème (P) .

**Remarque**

Par construction $\delta(\mathrm{J}_B)$= $0\, et\, \delta(\mathrm{J}_H) \geq\ 0\, est\, un\, plan\, dual\, basique\, alors\, \theta$ et 0 sont dits basiques.

## 2.6 Algorithme dual du simplexe [2]

Considérant un plan dual basique $y$ avec sa matrice de base $A_B$.

En utilisant $A_B$ , on calcule le pseudo plan $x = (x_B = A_B^{-1}\ b\ ,\ x_H = 0\ )$ .

Si $x_B \geq 0$ Alors $x$ est optimale pour le problème (P), et $y$ optimal du dual (D)

Sinon , on calcule $x_{j0}{=}minx_j,\ (x_j < 0, j \in J_B)$ de la l'indice $j_0$ doit sortir de la base et la colonne $a_{j0}$ doit sortir de $A_B$ , c'est à dire, on change de base $(A_B \rightarrow \overline{A_B}\ )$ .

Le changement de base entraine le changement du plan dual $y$ $(y \rightarrow \overline{y})$ qui entraine aussi le changement du coplan $\delta$ $(\ \delta \rightarrow \overline{\delta}\ )$ .

Ce changement de coplan se fera de la manière suivante : $\overline{\delta} = \delta + \Delta\delta$ , où :

$$\Delta\ \delta_j = \begin{cases} \sigma\ , & j = j_0 \\ 0\ , & j\ \in\ j_B\ \backslash j_0 \end{cases}$$

Où $\sigma$ est le pas dual positif ou nul.

$\Delta\ \delta_j = \delta x_{jj_0}$ , $j \in j_H$ ou $x_{jj_0}$ est la $j^{eme}$ composante du vecteur $A_B^{-1} a_{j0}$.

Pour que $\overline{\delta}$ soit un coplan, il faut avoir un pas maximal $\delta^0 == \min_{xjj_0 < 0, j \in J_H} \left\{ \frac{-\delta_j}{x_{jj0}} \right\} = \frac{-\delta_{j1}}{x_{j0j1}}$

La nouvelle base sera $\overline{J_B} = (J_B \backslash j_0)\ \cup j_1$ , et $\overline{A_B} = A(I\ ,\ \overline{J_B}\ )$ , la nouvelle itération débutera avec

$\overline{x} = (\overline{x_B}\ ,\overline{x_H}\ ) = (\overline{A_B^{-1}}\text{b}\ ,\ \overline{x_H} = 0)$ .

**Remarque 2**

Les problèmes du type :

$$\begin{cases} Z = c'x \rightarrow \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0\ , c \geq 0 \end{cases}$$

Sont résolus dans la plupart des cas par la méthode duale du simplexe, car en ajoutant des variables d'écart, on obtient facilement la solution de base de départ. Par contre si on utilise la méthode du simplexe, on ajoute des variables d'écart et des variables artificielles et ceci, augmente la dimension du problème.

**Exemple.1.3**

Résoudre le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} minZ = 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \ et \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Sous forme standard , on aura

$$\begin{cases} maxZ = -2x_1 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -5 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 - 8 \\ x_1 \geq 0 \ , \quad i = \overline{1.5} \end{cases}$$

D'où $x = (0, 0, 0, -5, -8\ ) \quad et\ Z(x) = 0$

Soit $A_B = (a_4 \ , \ \ a_5 \ ) = \ \ I_2$ , *une telle matrice inversible avec* $J_B = \{4,5\ \}$ , $J_H = \{1,2,3\}$

En utilisant $A_B$ , *on calcule le vecteur des potentiels* $y$ :

$y' = c'_B A_B^{-1} = (0,0)$ , *car* $c'_B = (0,0,)$ ,

*de l*à y'A$_H$=(0,0,0) $\geq c'_H = (-2,0,-1)$ , donc $y$ est un plan dual , ce qui veut dire que la matrice $A_B$ est de base .

Le coplan basique initial est donc égale à $\delta = \ A'\ y - c = \ -c = (2,0,1,0,0)$ .

| C | | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $x_4$ | -5 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 |
| $x_5$ | -8 | -1 | 2 | -4 | 0 | 1 |
| | $\delta$ | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | $\sigma$ | 2 | / | 1/4 | / | / |

↑

Les composantes du pseudo plan $x_B$ ne sont pas toutes positives, donc le critère d'optimalité n'est pas vérifié.

On a $x_5 = -8 = min_{x_j\ <\ 0\ ,\ j\in\ J_B} x_j$ , donc $a_5$ sort de la base.

De plus

$$\sigma_1 = \left(\frac{-\sigma_1}{x_{j11}}\right) = \frac{-2}{-1} = 2$$
$$\sigma_3 = \frac{-\sigma_3}{x_{j13}} = \frac{-1}{-4} = 1/4$$

$$min_{x_{j11<0}\ ;j\in J_H} (\sigma_j) \ = 1/4$$

Donc le vecteur $a_3$ va rentrer dans la nouvelle base à la place de $a_5$ et on passe à la nouvelle itération :

| C | | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $x_4$ | -7 | -5/4 | -1/2 | 0 | 1 | 1/4 |
| $x_3$ | 2 | $\frac{1}{4}$ | -1/2 | 1 | 0 | -1/4 |
| | $\delta$ | 7/4 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | $\sigma$ | 7/5 | 1 | / | / | / |

↑

On a $x_4 = -7 < 0$, donc $a_4$ sort de la base et sera remplacé par $a_2$, qui correspond au pas maximun $\sigma_2$= 1 , par suite on passe à l'autre itération :

| C | | -2 | 0 | -1 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $x_2$ | 14 | 5/2 | 1 | 0 | -2 | -1/2 |
| $x_3$ | 9 | 3/2 | 0 | 1 | -1 | -2/5 |
| | $\delta$ | | | 0 | | |
| | $\sigma$ | | | | | |

On a les $x_j \geq 0$ , *donc la solution est optimal .*

D'où $\overline{x^*}$ = (0,14,9,0,0,) et $z(\overline{x^*})$=9.

## 2.7 La méthode des deux phases [2]

1. **Première phase :**

La première phase de résolution du problème (P) consiste à déterminer une solution de base réalisable de (P). Pour cela, on construit le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i-1}^{m} x_{n+i} \longrightarrow max; \\ [Ax]_i + x_{n+i} = b_i \quad ; i = \overline{1;m}; \\ x_j \geq 0; j = \overline{1;n+m}; \end{cases} \qquad (P1)$$

Où les $x_{n+i}$ sont appelés des variables artificielles.

Le problème (P1) possède $n+m$ variables X=$(x_1;\ldots x_2;\ldots x_{n+1};\ldots;x_{n+m})$ et $m$ équations. Le vecteur X=(0 ;. . .0 ;$b_1;\ldots;b_m$) est réalisable pour (P1) donc l'ensemble des solutions admissibles de (P1) est non vide. D'un autre côté la fonction objectif est bornée supérieurement :

-$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \leq 0$, donc le problème (P1) admet une solution optimale $X^0 = (\ x^0, x_a^0)$ .

Si $x_a^0$ est différent de zéro alors les contraintes du problème de départ (P) sont contradictoires.

Supposons que $x_a^0 \neq 0$ et les contraintes de (P) ne sont pas contradictoires, donc $\exists x^1/Ax^1 = b$ et ceci implique que $(x^1; x_a^1 = 0)$est une solution admissible de (P1)

Et ($x^0$, $x_a^0$) est optimale de (P1), donc -$\sum_{i=1}^{m} x_{ai}^1 \leq -\sum_{i=1}^{m} x_{ai}^0$ , et comme $x_a^0 > 0$, ce qui est impossible, donc il n'existe pas de $x^1/Ax^1 = b$.

2. **Deuxième phase :**

Soit $(x^0; x_a^0)$ , une solution optimale de (P1) avec des variables artificielles nulles.
Alors on utilise la solution $x_0$ avec sa matrice $A_B^0$, comme solution de base de départ du problème (P), et ceci constitue la deuxième phase.
Si $x_{n+i}^0 = 0; \forall\ iet\ \exists$ un indice $i_0/a_{\mathrm{i}0} \in A_B$ , alors pour revenir a la deuxième phase , il faut exclure cette colonne de $A_B$ .

**Exemple 1 :**

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \ \rightarrow max \\ \quad -\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - x_3 = 10 \qquad (\boldsymbol{P}) \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

Du problème (P) on construit le problème suivant :

$$\begin{cases} \quad F = -x_4 - x_5 \rightarrow max \\ \quad -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 10 \quad (\boldsymbol{P}_1) \\ \quad 2x_1 - x_2 + x_{3+} x_5 = 5 \end{cases}$$

X = (0, 0, 0, 10, 5) est une solution réalisable de base de $(P_1)$, Avec $A_B = (a_4; a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dressons **le premier tableau du simplexe :**

| C | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ | |
| -1 | $a_4$ | 10 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | / | $L_1^1$ |
| -1 | $a_5$ | 5 | 2 | -1 | 1 | 0 | 1 | 5/2 | $\rightarrow$ $L_2^1$ |
| F=-15 | | $\Delta_j$ | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| | | | $\uparrow$ | | | | | | |
| | | | | | | | | | |

$\Delta_{j0} = \min_{j \in J_H} \Delta_1 = -1$ , donc la solution de départ n'est pas optimale, et $j_0$=1 va rentrer dans la nouvelle base.

De plus $\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j \ = \theta_5$=5/2, donc j1=5 va sortir de la base, de là on obtient la nouvelle base $\overline{j_B}$= {4, 1} , $\overline{J_H}$= {5, 2, 3}.

Dressons **le 2ème tableau du simplexe :**

| C | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ | |
| -1 | $a_4$ | 25/2 | 0 | 1/2 | -1/2 | 1 | 1/ 2 | 25 | $\rightarrow L_1^2 = L_1^1 + \frac{1}{2}$L |
| 0 | $a_1$ | 5/2 | 1 | -1/2 | 1/ 2 | 0 | 1/ 2 | / | $L_2^2$= $\frac{1}{2}$ $L_2^1$ |
| | | $\overline{\Delta_j}$ | 0 | -1/2 | 1/2 | 0 | 1/ 2 | | |

La nouvelle solution est $\overline{x} = (\frac{5}{2}\ ; 0; 0; \frac{25}{2}; 0)$, elle n'est pas optimale, car $\overline{\Delta_2}$= -1/2< 0.

$\overline{\Delta_{J0}} = \min_{j \in J_H} \overline{\Delta_J}$ =$\overline{\Delta_2}$ =-1/2 ,donc $j_0 = 2$ , va rentrer dans la base et $\theta_{j1}$=$\min_{j \in J_H} \theta_J$ = $\theta_4$, de la $J_1 = 4$ va sortir de la base .

D'où $\overline{\overline{j}}_B$={2, 1}, $\overline{\overline{j}}_H$={5, 4, 3}.

**Dressons le $3^{eme}$ tableau du simplexe :**

| C | | | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $\theta_j$ |
| 0 | $a_2$ | 25 | 0 | 1 | -1 | 2 | 1 | |
| 0 | $a_1$ | 15 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| $\overline{\overline{F}}$=0 | | $\overline{\overline{\Delta_j}}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |

$\overline{\overline{\Delta_J}} \geq$ , $x = (15, 25, 0, 0, 0) est solution optimale de (P1), comme$

$x_4 = x_5 = 0$ , donc $x_0 = (15,\ 25,\ 0)$ est une solution de base admissible du problème (P), avec

$A_B = (a_2\ ,\ \ a_1\ )$ .

On passe à la deuxième phase en utilisant cette dernière solution basique, pour résoudre le problème (P). Ici on utilise le dernier tableau obtenu à la 1ère phase avec une solution optimale dont les variables artificielles sont nulles.

| C | | | 1 | 2 | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_B$ | Base | B | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\theta_j$ |
| 2 | $a_1$ | 25 | 0 | 1 | -1 | |
| 1 | $a_2$ | 15 | 1 | 0 | 0 | |
| Z=65 | | $\Delta_j$ | 0 | 0 | -3 | |

Le vecteur $A_B^{-1}a_{j0} = A_B^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc la solution du problème (P) est infinie ,

Chapitre 3

# Programmation quadratique.

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, On rappelle tout d'abord les propriétés essentielles des formes quadratiques Par la suite, on résume les problèmes quadratiques en général, à la fin on expose une variante de la méthode de Wolfe.

## 3.2 Propriétés des formes quadratiques semi-définies positives [3]

Une fonction réelle de la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} = a_{ij} x_i x_j. \tag{3.1}$$

Est dite forme quadratique de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En posant $x$'= $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et $A = (a_{ij}, 1 \leq$ i, j $\leq$ n) , la formule (3.1) s'écrit sous la forme suivante : $F(x) = x^{'}\ Ax$.

**Exemple :**

Soit une fonction à trois variables :

$$F(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2. \tag{3.2}$$

$$= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + x_3(a_{31}x_1a_{32}x_2 + a_{33}x_3). \tag{3.3}$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+ & a_{22}x_2+ & a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+ & a_{32}x_2+ & a_{33}x_3 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

D'où $F(x)$ =x'Ax.

En tenant compte de la commutativité de la multiplication dans $\Re$, on peut écrire $F(x)$ de la manière suivante, avec i≤j :

$F(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3.$

Pour $i \neq j$, le coefficient devant le produit $x_i\ x_j$ est égal à $(a_{ij} + a_{ji})$. En vertu de cela, la matrice $A$ est toujours supposée symétrique.

### 3.2.1 Formes quadratiques définies et non définies

Soit la forme quadratique $F(x) = x^{'}$ Dx. (D symétrique).

Une matrice symétrique $D$ est dite matrice definie positive (non négative) et se note $D > 0$ $(D \geq 0)$, si elle est associee à une forme quadratique definie positive (non négative). Une forme quadratique $F(x)$ est dite non definie si $F(x)$ est positive pour certaines valeurs de $x$ et negative pour d'autres.

### 3.2.2 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies.

L'intérêt du critère de Sylvester est de caractériser une forme quadratique définie ou semi-définie. Pour cela, considérons la matrice symétrique suivante

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Le mineur de la matrice $D$, formé des lignes $i_1, i_2, \ldots, i_p$, et des colonne $j_1, j_2, \ldots, j_p$, sera noté comme suit :

$$D = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ j_2 & j_2 & \cdots & j_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d_{i_1j_1} & \cdots & d_{i_1j_p} \\ d_{i_2j_1} & \cdots & d_{i_2j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_pj_1} & \cdots & d_{i_pj_p} \end{bmatrix}$$

Ce mineur est principal si $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_p = j_p$, c'est-à-dire s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numeros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

Sont appelés mineurs principaux successifs. Nous avons alors le critère de Sylvester : (Critère de Sylvester)

1. Pour qu'une matrice $D$ soit définie positive ($D > 0$), il est nécessaire et suffisant que les mineurs principaux successifs de $D$ soient positifs :

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \cdots, D_n > 0; \tag{3.6}$$

2. Pour qu'une matrice $D$ soit semi-definie positive D$\geq$0, il est necessaire et suffisant que les mineurs principaux de $D$ soient non negatifs :

$$D\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_p \end{pmatrix} \geq 0; 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p, p = 1, 2, \cdots, n \tag{3.7}$$

**Remarque : La condition**

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \cdots, D_n > 0$$

N'est pas suffisante pour que la matrice $D$ soit définie non negative. En effet, pour la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 0, D_2 = 0.$$

La forme quadratique associée à $D$ s'ecrit alors :

$$F(x) = d_{11}x_1^2 + 2d_{12}x_1x_2 + d_{22}x_2^2 = -x_2^2.$$

Cette forme n'est pas comme on le voudrait définie non négative (elle est définie non positive). La raison est que le mineur principal

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

**Remarque**

Pour qu'une matrice $D$ soit definie negative ou non positive, la condition 3.6 et 3.7 se formulent ainsi :

1. D $< 0 \Leftrightarrow (-1)^p D_p > 0$, $p = 1, \ldots, n$;
2. D $\leq 0 \Leftrightarrow (-1)^p D \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \cdots, & i_p \\ j_1, & j_2, & \cdots, & j_p \end{pmatrix} \geq 0$; $p = 1, 2, \cdots, n$

En effet, on a :

$$D < 0 \Leftrightarrow H = -D > 0 \Leftrightarrow H_p > 0, p = 1, \ldots, n \Leftrightarrow (-1)^p D_p > 0, p = 1, \ldots, n.$$

**Remarque**

Le critère de Sylvester n'est valable que pour les matrices symétriques.

En effet, pour la matrice

$$\text{D}= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le critère de négativité de Sylvester est vérifié :

$$D_1 = -1, D_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0, D_3 = |D| = -4 < 0.$$

Néanmoins, la matrice $D$ n'est pas definie negative puisque pour

$x = (1, 0, -1) \neq 0$ , on a :

$$Fx = x'Dx = (1, 0, -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

### 3.2.3 Propriétés des matrices définies positives et- non négatives [3]

Les matrices symétriques définies ont des propriétés très intéressantes. En voici quelques unes :

**Propriété 01**

Soit une matrice symétrique $D = d_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n$. Si $D$ est définie positive (non négative), alors
on a :

$$d_{ii} > 0 (d_{ii} \geq 0), \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Propriété 02**

Soit la matrice $D$ partitionnée de la manière suivante :

$$\mathrm{D} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \end{array} , m + k = n$$

Si $D > 0$ ($D \geq 0$), alors les sous-matrices principales $D_{11}$ et $D_{22}$ sont aussi définies positives (non négatives). D'une manière générale, toute sous-matrice principale d'une matrice définie positive (non négative) est définie positive (non négative).

**Propriété 03**

Un élément diagonal d'une matrice symétrique $D$ définie non négative ne peut s'annuler que si les autres éléments de la même ligne et colonne s'annulent aussi.

**Propriété 04**

Soit $D$ une matrice symetrique definie non negative .Si $x$ est un point quelconque mais fixé de $\Re^n$ tel que $x'Dx = 0$, on a alors $Dx = 0$.

## 3.3 Problèmes quadratiques

Un problème d'optimisation avec une fonction quadratique et des contraintes linéaires est appelé un programme quadratique. Un problème quadratique général peut s'écrire comme suit :

$$\text{minimiser}_(x \in \Re^n) f(x) = 1/2x'Dx + c'x + g$$
$$\text{Ax} = \text{b}$$
$$\text{Qx} \leq h$$
$$\text{x} \in \Re^n, \qquad (3.8)$$

Où $D$ est une $(n, n)$ matrice symétrique, $c, x$ sont des n-vecteurs, $A$ est une$(p, n)$ matrice avec $rang(A) = p$, $Q$ est une $(m * n)$ matrice ; $rang(Q) = m$,$b$ est un p-vecteur, et $h$ est un m-vecteur, g$\in \Re$.

**Remarque**

Si la matrice $D$ est semi definie positive, on dit que le problème 3.8 est un problème quadratique convexe (le problème est dit strictement convexe si $D$ est définie positive).

### 3.3.1 Conditions d'optimalité

**Problème sans contraintes**

Considérons le problème

$$min_{x \in \Re^n} f(x) = 1/2x'Dx + c'x + g. \tag{3.9}$$

Où $D$ est une matrice symetrique n×n, c$\in \Re^n etg \in \Re$.

Si D n'est pas semi-définie positive, alors le problème 3.9 ne possède pas de solution, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun $x \in \Re^n$ qui soit un minimum local de 3.9

Si $D$ est définie positive, , alors

$$x^* = -D^{-1}c. \tag{3.10}$$

Est l'unique minimum global de 3.9.

### Problème avec contraintes

Soit le problème d'optimisation quadratique avec contraintes d'égalité :

$$min_{x\in\Re^n} f(x) = 1/2x'Dx + c'x. \tag{3.11}$$

Sous contrainte

$$Ax = b \tag{3.12}$$

Où $D$ une matrice symétrique $\in \Re^{nn}, c \in \Re^n, A \in \Re^{mn} et\, b \in \Re^m$.

La fonction lagrangienne est

$$L(x, \lambda) = 1/2x'Dx + c'x + \lambda'(b - Ax),$$

Avec $\lambda \in \Re^m$ . En appliquant directement la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre s'écrit

$$\nabla_x L(x, \lambda) = Dx + c - A'\lambda = 0 \tag{3.13}$$

En combinant 3.12 et 3.13 , on obtient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} D & -A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ b \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Montrons dans quel cas ce système possède une solution unique.

Soit le problème quadratique 3.11- 3.12, avec $A$ de rang plein. Soit $Z \in \Re^{n(n-m)}$ une matrice dont les colonnes forment une base de l'espace nul de $A$, c'est-à-dire $AZ = 0$, et$Z$ de rang plein. Si la matrice hessienne réduite $Z'DZ$ est definie positive, alors le système 3.14 est non singulier et possède une solution $(x^*, \lambda^*)$ unique.  Soit $x$ et $\lambda$ tels que

$$\begin{pmatrix} D & -A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire $Dx = A'$ et $Ax = 0$. montrons que $x$ et $\lambda$ sont nuls pour prouver que la matrice est non singulière. Comme $Ax = 0$, on a

$$0 = (x'\lambda') \begin{pmatrix} D & -A' \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = x'Dx$$

Comme $Z$ est de rang plein, il existe $y$ tel que $x = Zy$ Dés lors,

$$y'Z'DZy = 0.$$

Puisque $Z'DZ$ est definie positive, alors$y = 0$ en consequence, $x = Zy = 0$ et la première équation s'écrit

$$Dx - A'\lambda = -A'\lambda = 0.$$

Comme $A$ est de rang plein, alors

$$\lambda = 0$$

.

## 3.4 Résolution de problème quadratique [4]

### 3.4.1 Résolution de problème quadratique sans contraintes (cas convexe)

Dans ce qui suit nous allons résoudre le problème :

$$min_{x\in\Re^n} f(x) = 1/2x'Dx + c'x + g. \tag{3.15}$$

Où $D$ est une matrice symétrique $n * n$, définie positive, $c \in \Re^n$ et $g \in \Re$ d'après le théorème 3.3.1, si $D$ n'est pas semi-définie positive, le problème n'a pas de solution. Notons que la valeur de $g$ n'a aucun impact sur la solution du problème 3.16.nous allons nous concentrer sur le problème

$$min_{x\in\Re^n} f(x) = 1/2x'Dx + c'x. \tag{3.16}$$

La valeur de $g$ sera rajoutée à la valeur optimale de la fonction objectif de 3.16 pour obtenir la valeur optimale de la fonction objectif de 3.15.

En utilisant le théorème 3.3.1, l'unique minimum global de 3.16 peut être facilement obtenu en résolvant le système d'équation linéaire

$$Dx = -c. \tag{3.17}$$

### 3.4.2 Résolution d'un problème quadratique convexe.[4]

**Méthode quadratique de Wolfe (1959)**

**Introduction**

Beaucoup d'algorithmes ont été développés pour la résolution du problème de programmation quadratique convexe, mais il serait intéressant de connaître la méthode la plus classique de Wolfe, qui n'est autre que la méthode du simplexe légèrement modifiée.

Le principe de cette méthode est la résolution du système de Kuhn-tucher et consiste à trouver une solution réalisable pour un système linéaire avec une condition supplémentaire du type $x_j\delta_j = 0$,

Ou $x$ et $\delta$ sont des vecteurs de même dimension. En d'autre terms c'est trouver une solution réalisable basique en résolvant un problème de programmation linéaire, assujetti à la nouvelle condition.

**Cas d'un problème quadratique standard**

Formulons le théorème de K.K.T pour le problème suivant :

$$F(x) = 1/2x'Dx + c'x \to min,$$

Ax=b,

x$\geq$ 0, (3.18)

D'= D$\geq 0, c \in \Re^n, b \in \Re^m, rangA = m < n.$

Ce problème peut encore s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$F(x) = 1/2x'Dx + c'x \rightarrow min,$$

Ax-b$\leq 0,$

-Ax+b$\leq 0,$

-x$\leq 0, (3.19)$

Le point de minimum $x*$ est alors caractérisé par les équations et les inégalités suivantes :

Il existe deux m-vecteurs $\lambda_1^* \geq 0,\ \lambda_2^* \geq 0, ainsiqu'unn - vecteur\delta^* \geq 0$ tels que

$$\begin{cases} \partial L/\partial x(x^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \delta^*) = 0, \\ \\ \\ \delta^{*'} x^* = 0, \\ Ax^* - b = 0, \\ x^* 0, \\ \delta^* 0. \end{cases}$$

Où

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2, \delta) = 1/2x'Dx + c'x + \lambda_1'(Ax - b) + \lambda_2'(-Ax + b) - \delta' x,$$

$\partial L/\partial x(x, \lambda_1, \lambda_2, \delta) = Dx + c + A'\lambda_1 - A'\lambda_2 - \delta.$

En posant $\lambda = \lambda_1 - \lambda 2, \lambda \in \Re^m, le\, point$x$^*$ est defini par le système suivant :

$$\begin{cases} Dx * + A'\lambda^* - \delta^* = -c, & (L_1) \\ Ax^* = b, & (L_2) \\ & (L_3) \\ \lambda^{*\prime}(Ax^* - b) = 0, & (L_4) \\ x^* \geq 0, \lambda^* \in \Re^m, \delta^* \geq 0, \end{cases}$$

Comme l'équation $(L_4)$ est tout le temps vérifiée, le système se réduit ainsi :

$$\begin{cases} Dx * + \text{A'}\lambda^* - \delta^* = -c, & (L_1) \\ Ax^* = b, & (L_2) \\ & (L_3) \\ x^* \geq 0, \lambda^* \in \Re^m, \delta^* \geq 0, \end{cases}$$

Un tel système n'est pas linéaire par rapport au multivecteur $(x^*, \lambda^*, \delta^*)$ à cause de l'équation $(L_3)$. On obtient donc un système linéaire de (n+m) equations à $(n+m+n)$ inconnues, constitué des equations $(L_1)$ et $(L_2)$, avec en plus n équations non linéaires $\delta_j x_j = 0, j = \overline{1,n}$. Pour trouver une solution telle que $\delta_j x_j = 0 \quad j = \overline{1,n}$ , il suffit d'obtenir une solution réalisable basique du système linéaire, avec $x_j$ basique et $\delta_j$ non basique ou vice-versa. Pour cela, on appliquera la premiere phase du simplexe et on choisira l'indice $j_0$ du vecteur qui entre dans la base de telle sorte que les vecteurs-colonnes correspondant à $x_{j0}$ et$\delta_{j0}$ ne se retouvent pas en meme temps dans la base. Pour appliquer la methode du simplexe, il faut alors écrire le système $(L_1)$, $(L_2)$ sous forme standard, à savoir que le second membre doit être positif ou nul, ainsi que le vecteur $\lambda^*$ qui doit être réécrit sous la forme :

$$\lambda_i^* = \alpha_i^* - \alpha_{m+i'}^* \alpha_{m+i'}^* \geq 0, \alpha_i^* \geq 0,$$

i=$\overline{1,m}$

**Algorithme**

**Exemple numérique**

Soit le problème quadratique suivant :

f(x)=$x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow min.$

$$\textbf{S.c}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \quad (3.20) \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Le problème se formule ainsi :

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow min.$$

$$\textbf{S.c} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{cases}$$

Si $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est un point de minimum de la fonction $F(x)$, alors $\exists\, \lambda \in \Re^2$ ; $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \geq 0$ tels que :

**Algorithm 1**

```
Début
  Introduire les donnes, D,A,b,c ;
  Appliquer les conditions de K.K.T au problème ;
  Déterminer les équations de K.K.T ;
  Détermination des paramètres du programme linéaire ;
  Introduire les variables artificielle v_i;
  Construire la matrice des contraintes A
  Construire le vecteur du second membre b
  Construire le vecteur des coûts c ;
  Initialiser le vecteur solution (x,λ, δ, v);
    Déterminer l'ensemble des indices J_B et J_N ;
    Extraire les éléments de base x_B ,c_B ,A_B ;
    Calculer le vecteur des potentiels u' = c'_B A_B^{-1} ;
    Calculer le vecteur des estimations E'_N = u' A_N − c'_N ;
    Si E_N ≥ 0 Alors
```

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 \ (\mathrm{x},\lambda,\delta) = 0, \\ \partial L/\partial x_2 \ (\mathrm{x},\lambda,\delta) = 0, \\ \partial L/\partial x_3 \ (\mathrm{x},\lambda,\delta) = 0, \\ \partial L/\partial x_4 \ (\mathrm{x},\lambda,\delta) = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \tag{3.21}$$

Ou

$$L(x,\lambda,\delta) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 +$$

$\lambda_1(\mathrm{x}_1 + 2x_2 + x_3 - 4) + \lambda_2(2\mathrm{x}_1 + x_2 + 5x_4) - \partial_1\mathrm{x}_1 - \partial_2\mathrm{x}_2 - \partial_3\mathrm{x}_3 - \partial_4\mathrm{x}_4.$

Alors on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 = 2\mathrm{x}_1 + x_2 - 2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \delta_1 = 0, \\ \partial L/\partial x_2 = \mathrm{x}_1 + 12x_2 + 8 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - \delta_2 = 0, \\ \partial L/\partial x_3 = \lambda_1 - \delta_3 = 0 \leftrightarrow \lambda_1 = \delta_3, \\ \partial L/\partial x_4 = \lambda_2 - \delta_4 = 0 \leftrightarrow \lambda_2 = \delta_4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \tag{3.22}$$

C'est à dire :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \delta_3 + 2\delta_4 - \delta_1 = 2, & (L_1) \\ x_1 + 12x_2 + 2\delta_3 + \delta_4 - \delta_2 = -8, & (L_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, & (L_3) \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, & (L_4) \\ & (L_5) \end{cases}$$

En multipliant $(L_2)$ par $(-1)$ le système 3.22 c'écrit donc :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \delta_3 + 2\delta_4 - \delta_1 = 2, \\ -x_1 - 12x_2 - 2\delta_3 - \delta_4 - \delta_2 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Nous avons obtenu un système linéaire de 4 équations avec 8 inconnues et 4 équations non linéaire. Pour trouver une solution telle que $\delta_j x_j = 0$ avec j=$\overline{1,4}$,, il suffit d'obtenir une solution réalisable basique$(x, \delta)$ du système linéaire avec $x_j$ basique et $\delta_j$ hors base ou vice-versa. Pour cela, il faut choisir l'indice $j_0$ entrant dans la base de telle sorte que les vecteurs-colonnes correspondant à $x_{j0}$ et $\delta_{j0}$ ne se trouve pas en même temps dans la base.

Appliquons la première phase du simplexe en considérant le problème de programmation linéaire suivante :

$$Z = -v_1 \rightarrow max$$

$$\textbf{S. c}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \delta_3 + 2\delta_4 - \delta_1 + v_1 = 2, \\ -x_1 - 12x_2 - 2\delta_3 - \delta_4 - \delta_2 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ \\ x_j \geq 0, \delta_j \geq 0,\ \text{j}=\overline{1,4},\ \text{v}_1 \geq 0, \end{cases} \qquad (3.23)$$

Le vecteur $x = (x, \delta, v_1) = (0, 0, 4, 5, 0, 8, 0, 0, 2)$ est une solution réalisable initiale basique de problème (3.23) , avec $A_B = (a_9, a_6, a_3, a_4)$. Dressons alors les tableaux des simplexes suivants :

| | | $\overline{x}$<br>c | $x_1$<br>0 | $x_2$<br>0 | $x_3$<br>0 | $x_4$<br>0 | $\delta_1$<br>0 | $\delta_2$<br>0 | $\delta_3$<br>0 | $\delta_4$<br>0 | $v_1$<br>-1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_B$ | Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $\theta$ | |
| -1 | $a_9$ | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| 0 | $a_6$ | 8 | -1 | -12 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 | -1 | 0 | $\infty$ | |
| 0 | $a_3$ | 4 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | $\rightarrow j_1 = 9$ |
| 0 | $a_4$ | 5 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 5/2 | |
| Z=-2 | | $\Delta$ | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | -2 | 0 | | |
| | | | $\uparrow j_0 = 1$ | | | | | | - | | | | |

TABLE 3.1 – Phase 1 du simplexe.

Remarquons que $j_0 = 1$ est l'indice qui rentre dans la base tendis que l'indice $j_1 = 9$ sort, car l'indice j=8 ne peut pas être choisi à cause à la présence de $a_4$ dans la base, et ce, afin que la condition $x_4\delta_4 = 0$ soit assurées.

| | | $\overline{x}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ | $v_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | c | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | |
| $c_B$ | Base | b | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $\theta$ |
| 0 | $a_1$ | 1 | 1 | 1/2 | 0 | 0 | -1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 1/2 | |
| 0 | $a_6$ | 9 | 0 | - | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 0 | 1/2 | |
| 0 | $a_3$ | 3 | 0 | 23/12 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | -1/2 | -1 | -1/2 | |
| 0 | $a_4$ | 3 | 0 | 3/2 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -2 | -1 | |
| | | | | 0 | | | | | - | | | |
| Z=0 | | $\Delta$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | |

TABLE 3.2 – Phase 1 du simplexe suit.

Le critère d'optimalité étant vérifié ,il s'ensuit que le vecteur $\overline{x} = (1, 0, 3, 3, 0, 9, 0, 0, 0)$est une solution optimale du problème linéaire . Par conséquent la solution réalisable basique du système d'optimalité du problème quadratique est le vecteur $(\hat{x}, \hat{\delta})$ tels que :

$\hat{x} = (\hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3}, \hat{x_4}) = (1, 0, 3, 3)$

$\hat{\delta} = (\hat{\delta_1}, \hat{\delta_2}, \hat{\delta_3}, \hat{\delta_4}) = (0, 9, 0; 0)$

Donc le point de minimum du problème 3.20 set le vecteur $x^0 = (1, 0)$ , avec $F(\bar{x}) = -1$

### 3.4.3 Système d'optimalité pour un P.Q.C à variables bornées [5]

Soit le problème de programmation quadratique

$$\begin{gathered} f(x) = 1/2\mathrm{x}' \ \mathrm{Dx} + c'^{x} \to min \\ Ax = b \end{gathered} \tag{3.24}$$

Ou $D'$=D $\geq 0, c \in \Re^n, b \in \Re^m$, $\mathrm{d}^-, d^+ \in \Re^n, rangA = m < n.$

Ce problème peut encore s'écrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{gathered} f(x) = 1/2\mathrm{x}' \ \mathrm{Dx} + c'\mathrm{x} \to min \\ Ax - b \leq 0 \\ -Ax + b \leq 0 \\ -x + \mathrm{d}^- \leq 0 \\ x - \mathrm{d}^+ \leq 0 \end{gathered}$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour ce problème s'établissent comme suite : le vecteur $x^0 \in \Re$ est un point de minimum pour le problème 3.24 , aussi il existe des vecteurs $\lambda_1^0 \geq 0, \lambda_2^0 \geq 0, \delta_1^0 \geq 0, \delta_2^0 \geq 0$, tels que

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}(x^0 \ , \lambda^0, \delta^0) = \\ \frac{\partial}{\partial x}[\frac{1}{2}x^{0'}Dx^0 + c'x^0 + \ \lambda_1^{0'}\left(Ax^0 - \ b\right) + \lambda_2^{0'}\left(-Ax^0 + \ b\right) + \delta_1^{0'}(-x^0 + d^-) + \delta_2^{0'}(x^0 - d^+)] = 0 \\ \lambda_1^{0'}\left(Ax^0 + \ b\right) = 0, \\ \lambda_2^{0'}\left(-Ax^0 - \ b\right) = 0, \\ \delta_1^{0'}(-x^0 + d^-) = 0, \\ \delta_2^{0'}(x^0 - d^+) = 0, \\ Ax^0 - \ b = 0, d^- \leq x^0 \ \leq d^+, \end{gathered}$$

$$\delta_1^0, \delta_2^0 \geq 0 \ , \quad \lambda_1^0 \ , \lambda_2^0 \geq 0.$$

En posant $\lambda^0 = \lambda_1^0 — \lambda_2^0$ , $\lambda^0 \in R^m$ , le point $x^0$ est défini par le système d'optimalité suivant :

$$\begin{cases} & (L_1) \\ Ax^0 = b, & (L_2) \\ \delta_1^{0\prime}(-x^0 + d^-) = 0, & (L_3) \\ \delta_2^{0\prime}(x^0 - d^+) = 0, & (L_5) \\ \lambda^0 \in R^m, \ \delta_1^0, \delta_2^0 \geq \ 0 \ , d^- \leq x^0 \ \leq d^+, & \end{cases}$$

## 3.5 Méthode directe de support pour la résolution d'un P.Q.C standard (méthode adaptée )

### 3.5.1 Introduction

La méthode de simplexe quadratique de Wolfe est la méthode la plus classique pour la résolution d'un P.Q.C. Dans ce chapitre, on applique la Méthode Directe du Support, pour la construction d'un algorithme de résolution d'un problème de programmation quadratique convexe, donné sous forme standard.

Le principe de cette méthode est le suivant : partant d'un plan support initial, formé d'une solution réalisable et de deux matrices non dégénérées correspondant respectivement aux contraintes est à la fonction objectif, chaque itération consiste a trouver une direction d'amélioration et un pas maximal le long de cette direction de façon à améliorer la valeur de la fonction objectif, tout en s'assurant de ne pas sortir de domaine admissible déterminé par les contraintes du problème

### 3.5.2 Position du problème et définitions[6]

Le problème de la programmation quadratique convexe se présente sous la forme standard suivante :

$$\mathrm{F}(x) = \tfrac{1}{2}\, x'\mathrm{D}\, x + c'x \rightarrow \min, \ (3.25)$$

$$Ax = b \tag{3.26}$$

$$x \geq 0 \tag{3.27}$$

Ou $D' = \mathrm{D} \geq 0$ , c et $x$ sont des n-vecteurs , b est un m-vecteur ,A une matrice d'ordre $m \times n$ ,avec rang A $= m < n$ ;$I = \{1, 2 \ldots\ldots, m\}$ : l'ensemble des indices des lignes da A .

$J = \{1.2 \ldots\ldots\ldots, n\}$ : est l'ensemble des indices des colonnes de A.

Soit une partition de l'ensemble $J$ telle que $J = \{1.2\ldots\ldots\ldots,n\} = J_B \sqcup J_N$, avec $J_B \cap J_N = \emptyset$ ,

$$|J_B| = m.$$

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :

$$x = x(J) = (x_j \ , \ j \in J) ,$$

$$x = \begin{pmatrix} \frac{x_B}{x_N} \end{pmatrix} , x_B = x(J_B) = (x_j \ , \ j \in J_B) \ , \ x_N = x(J_N) = (x_j \ , \ j \in J_N$$

$$c = \begin{pmatrix} \frac{c_B}{c_N} \end{pmatrix} , \ c_B = c(J_B) = (c_j \ , \ j \in J_B) \ , \ c_N = c(J_N) = (c_j \ , \ j \in J_N) ,$$

$$A = A(I,J) = (a_{ij} \ , \ 1 \leq i \leq m \ , \ 1 \leq j \leq n) \ ; A = (a_j \ , \ j \in J) , \ a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$A = \ (A_B/A_N)\ \ ,\ A_B = A\,(I, J_B)\,,\ A_N = (I, J_N\ \ ]$$

Un vecteur $x$ vérifiant les contraintes 3.26 et 3.27 est appelé plan ou solution réalisable du problème (3.25) - (3.27). Un plan $x^0$ est dit optimal si

$$F\left(x^0\right) = \frac{1}{2}x^{0'}Dx^0 + c^T x^0 = min(\frac{1}{2}\ x'\ Dx + c'x)$$

Ou $x$ est pris parmi tous les plans du problème (3.25) - (3.27).

Un plan $x^\varepsilon$ est appelé $\varepsilon$- optimal ou suboptimal si

$$F\left(x^\varepsilon\right) - F\left(x^0\right) = \frac{1}{2}(x^\varepsilon)'Dx^\varepsilon + c'x^\varepsilon - \frac{1}{2}(x^0)'Dx^0 - c'x^0 \leq \varepsilon$$

Ou $x^0$ est une solution du problème (3.25) - (3.27) et $\varepsilon$ est un nombre positif ou nul, donné à l'avance.

L'ensemble $J_B \subset J$, $|J_B| = m$ est appelé support des contraintes si

$$\det A_B\ = detA(I, J_B) \neq 0$$

Le couple $(x, J_B)$, formé du plan $x$ et du support $J_B$ ,est appelé plan de support des contraintes .

Le plan du support est dit non dégénéré si

$$x_j > 0\ , \forall j \in J_B \tag{3.28}$$

### 3.5.3 Formule d'Accroissements de la Fonction Objectif

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.25) - (3.27) .Considérons un autre plan quelconque $\overline{x} = x + \Delta x$ .

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$F\left(\overline{x}\right) - F\left(x\right) = \frac{1}{2}\overline{x}'D\overline{x} + c'\overline{x} - \frac{1}{2}x'Dx - c'x$$

$$= \frac{1}{2}(x + \Delta x)'D\left(x + \Delta x\right) + c'\left(x + \Delta x\right) - \frac{1}{2}x'Dx - c'x$$

$$= \left(\Delta x\right)'\left(Dx + c\right) + \frac{1}{2}(\Delta x)'\ D\Delta x,$$

$$F\left(\overline{x}\right) - F\left(x\right) = g'\left(x\right)\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)'\ D\Delta x \tag{3.29}$$

Où $g(x) = Dx + c$ est le gradient de la fonction 3.25, avec $g(x) = \ g(J) = (g_j, j \in J)$

$$g_B = g(J_B) \quad , \; g_N = g(J_N) \, .$$

Par ailleurs, on a :

$$\left[\begin{array}{l} Ax = b \\ A\overline{x} = b \end{array}\right. \Leftrightarrow A\overline{x} = A(x + \Delta x) = Ax + A\Delta x \Rightarrow A\Delta x = 0,$$

En posant $\Delta x = \binom{\Delta x_B}{\Delta X_N}$ , $\Delta x_B = \Delta x(J_B)$ ,$\Delta x_N = \Delta x(J_N)$

L'égalité $Ax = 0$ peut s'écrire $A_B \Delta x_B + \; A_N \Delta x_N = 0;$

D'où

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} \; A_N A x_N \text{ (3.30)}$$

La formule 3.28 devient alors :

$F(\overline{x}) - F(x) = g'_B \Delta x_B + g'_N \Delta x_N + 1/2(\Delta x_B, \Delta x_N)' D(\Delta x_B, \Delta x_N).$

En vertu de 3.29 , on obtient donc

$$F\left(\overline{x}\right) - F\left(x\right) = g'_B \left(-A_B^{-1} \; A_N \Delta x_N\right) + g'_N \Delta x_N$$

$$+\frac{1}{2}((-A_B^{-1} \; A_N \Delta x_N, \Delta x_N)' D(-A_B^{-1} \; A_N \Delta x_N, \Delta x_N)$$

$$= \left[-g'_B A_B^{-1} \; A_N + g'_N\right] \Delta x_N + \frac{1}{2} \Delta x_N \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}' D \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} \Delta x_N$$

Ou $I_N = I_N(J_N, J_N)$ est la matrice identité d'ordre $(n-m)$.

Posons

$$Z = Z\left(J, J_N\right) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix}, M = M(J_N, J_N) = Z' D Z \qquad (3.31)$$

On définit le vecteur des potentiels $u$ ainsi que le vecteur des estimations $E$ comme suite :

$$u' = g'_B A_B^{-1}, E'\left(J\right) = g' - u' A = \left(E'_B, E'_N\right),$$

$$E'_B = 0, E'_N = g'_N - u' A_N$$

Finalement l'accroissement 3.29 aura la forme suivante :

$$F\left(\overline{x}\right) - F\left(x\right) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} (\Delta x_N)' Z' D Z \Delta x_N$$

$$F\left(\overline{x}\right) - F\left(x\right) = E'_N \Delta x_N + \frac{1}{2} (\Delta x_N)' M \Delta x_N \qquad (3.32)$$

Soit $J_{N0}$ et $J_{N+}$ deux sous ensemble de $J_N$ tels que

$$J_{N0} = \left\{j \in J_N / \; x_j = \; 0\right\}, J_{N+} = \left\{j \in J_N / \; x_j > \; 0\right\}.$$

Les sous vecteurs $x_N$ et $E_N$ peuvent être fractionnés sous la forme suivante :

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N0} \\ x_{N+} \end{pmatrix}, x_{N0} = (x_j, j \in J_{N0}), x_{N+} = (x_j, j \in J_{N+}).$$

$$E_N = \begin{pmatrix} E_{N0} \\ E_{N+} \end{pmatrix}, E_{N0} = (E_j, j \in J_{N0}), \ E_{N+} = (E_j, j \in J_{N+}).$$

La formule d'accroissement 3.32 peut s'écrire :

$$F(\overline{x}) - F(x) = E'_{N0}\Delta x_{N0} + E'_N + \Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_N)' M \Delta x_N \tag{3.33}$$

## 3.6 Critère d'optimalité

Critere d'optimalité Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (3.25) (3.27).*Alors les relations suivantes* : $\left[ \quad (3.34) \right.$

Sont suffisantes pour l'optimalité du plan $x$.

Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes est non-dégénéré.

**Démonstration. Condition suffisante :**

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes vérifiant les relations 3.34. Pour tout plan $\overline{x}$ du problème (3.25) - (3.27), la formule d'accroissement 3.33 nous permet d'écrire :

$$\Delta F = F(\overline{x}) - F(x) \geq E'_{N0}\Delta x_{N0} + E'_{N+}\Delta x_{N+},$$

Car la matrice $M$ est semi-définie positive. D'où

$$F(\overline{x}) - \ F(x) \geq \sum_{j \in J_{N0}} E_j(\overline{x}_j - x_j) + \sum_{j \in J_{N+}} E_j(\overline{x}_j - x_j)$$

En vertu des relations 3.34, on aura :

$$F(\overline{x}) - \ F(x) \geq \sum_{j \in J_{N0}} E_j \overline{x}_j \geq 0.$$

Car $\overline{x}$ est un plan du problème (3.25) - (3.27). D'où$F(\overline{x}) \geq \ F(x)$.

Le vecteur $x$ est par conséquent une solution optimale du problème (3.25) - (3.27).

**Condition nécessaire :** Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support optimal non-dégénéré du problème (3.25) - (3.27) et supposons que les relations 3.34 ne sont pas vérifiées, c-à-d, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_N$ , tel que

$$\mathrm{E}_{j0} < 0 \text{ , Pour } j_0 \in J_{N0} \text{ ou bien } E_{j0} \neq 0, \text{ pour } j_0 \in J_{N+}$$

On construit un autre plan $\overline{x} = x + \theta l$, ou $\theta$ est un nombre réel positif, et $l = l(J)$ est un vecteur de direction que l'on construit comme suite :

$$\left[\begin{array}{c} l_{j0} = signE_{j0} \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N \end{array}\right.$$

D'autre part, on doit avoir

$$A\overline{x} = Ax + \theta Al = b \Leftrightarrow Al = A_B l_B + A_N l_N = 0$$

D'où

$$l_B = -A_B^{-1} A_N l_N = A_B^{-1} a_{j0} signE_{j0}.$$

On a donc

$$\left[\begin{array}{c} l_B = -signE_{j0} \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_N, \\ l_B = -A_B^{-1} a_{j0} signE_{j0} \end{array}\right.$$

Le vecteur $\overline{x}$ vérifie la contrainte principale $A\overline{x} = b$ . Pour que $\overline{x}$ soit un plan du problème (3.25) - (3.27), il doit en plus vérifier l'inégalité

$$\overline{x} \geq 0 \Leftrightarrow x + \theta l \geq 0$$

Soit, en écrivant composante par composante :

$$\left[\begin{array}{c} \theta l_j \geq x_j, j \in J_B \\ l_B = -A_B^{-1} a_{j0} signE_{j0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \theta l_j \in [-x_j, +\infty[, \\ \theta signE_{j0} \leq x_{j0} \end{array}\right.$$

Pour $j_0 \in J_{N0}$ , on a $E_{j0} < 0$ et $x_{j0} = 0 \Rightarrow \theta \geq 0$.

Pour $j_0 \in J_{N+}$ , $E_{j0} \neq 0 \Rightarrow E_{j0} > 0$ *ou* $E_{j0} < 0$.

Si $E_{j0} > 0$, comme $x_{j0} > 0$, *on a* $signE_{j0} \leq x_{j0} \Rightarrow \theta \leq x_{j0}$.

Si $E_{j0} < 0$, comme $x_{j0} > 0$, *on a alors* $signE_{j0} \leq x_{j0} \Rightarrow \theta \geq -x_{j0}$.

Comme $x_j > 0, j \in J_B$, le vecteur $\overline{x}$ sera alors un plan du problème (3.25) - (3.27) pour un nombre $\theta$ positif assez petit.

La formule d'accroissement 3.33 nous donne

$$F(\overline{x}) - F(x) = E_N' \Delta x_N + \frac{1}{2}(\Delta x_N)' M \Delta x_N$$

$$= \theta E_N' l_N + \frac{1}{2}\theta^2 l_N' M l_N$$

$$= \theta \left( -E_{j0} signE_{j0} + \frac{1}{2}\theta l_N' M l_N \right)$$

$$= \theta \left( - |E_{j0}| + \frac{1}{2} \theta l'_N M l_N \right) = \varphi(\theta) . \qquad (3.35)$$

Pour $\theta$ et $l$ ainsi choisi on aura $- |E_{j0}| + \frac{1}{2} \theta l'_N M l_N < 0$. D'où $F(\overline{x}) - F(x) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de $x$ .

Par conséquent, les relations 3.34 sont suffisantes, et aussi nécessaire pour l'optimalité du plan $x$ dans le cas ou $x$ est non dégénéré.

## 3.7 Critère de Suboptimalité

Pour estimer l'écart qui existe entre la valeur optimale $F(x^0)$ et une autre valeur $F(x)$ d'un plan de support des contraintes quelconque $\{x, J_B\}$ , il suffit de remplacer dans la formule d'accroissement 3.33 le vecteur $\overline{x}$ par $x^0$ et de minorer l'expression .On aura donc :

$$F\left(x^0\right) - \ F(x) \geq \sum_{j\in J_N} E_j\left(x_j^0 - x_j\right)$$

D'ou :

$$F(x) - \ F\left(x^0\right) \geq \sum_{j\in J_N} E_j\left(x_j - x_j^0\right)$$

Puisque la solution optimale $x^0$ est admissible et en supposant que $E_N \geq 0$, nous aurons

$$\left\langle x_j^0 \geq 0, j \in J\right\rangle \Rightarrow \left\langle x_j - x_j^0 \leq x_j - 0\right\rangle \Rightarrow \left\langle E_j(x_j - x_j^0) \leq E_j x_j\right\rangle.$$

Par conséquent, on obtient la majoration suivante :

$$F(x) - \ F\left(x^0\right) \leq \sum_{j\in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B) \tag{3.36}$$

Le nombre $\beta(x, J_B)$ est appelé estimation de suboptimalité. On alors le théorème suivant :

(condition suffisante de suboptimalité) soit $(x, J_B)$ un plan de support des contraintes du probleme (3.25) - (3.27) et $\varepsilon$ un nombre positif ou nul arbitraire .

Si $E_N \geq 0$ ET $si\, \beta(x, J_B) \neq \varepsilon$ ,alors le plan$x$ est $\varepsilon - optimal$.

**Démonstration :**

En vertu de 3.36, nous avons

$F(x) - \ F(x^0) \leq \sum_{j\in J_N} E_j x_j = \beta(x, J_B) \leq \varepsilon \ \Rightarrow F(x) - \ F(x^0) \leq \varepsilon$

Alors le plan $x$ est donc $\varepsilon - optimal$

## 3.8 Méthode de résolution :

Avant d'entamer la méthode de résolution donnons quelques définitions essentielles,

On appelle support de fonction objectif (3.25) l'ensemble des indices

$J_s \subset J_N$ Tel que $detM_S = detM(J_S, J_N) \neq 0$,ou $M$ est la matrice 3.31, on posera $J_{NN} = J_N / J_S$

1. On appelle support du problème (3.25)-(3.27) l'ensemble $J_P = \{J_B, J_S\}$ formé du support des contraintes $J_B$ et de celui de la fonction objectif $J_S$.
2. On appelle plan de support du problème (3.25)-(3.27) la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan $x$ et du support $J_P$ ; il est dit accordé si $E(J_S) = 0$.
3. La direction $l$ est dite admissible si $Al = 0$.

Elle est dite d'amélioration si en outre $E^T l < 0, (\varphi(\theta) \leq 0)$.

### 3.8.1 Algorithme de résolution :

Etant donné un nombre réel positif ou nul quelconque $\varepsilon$ et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ ,le but de l'algorithme est alors de construire un plan $\epsilon - optimal\ x^{\varepsilon}$ ou carrément un plan optimal $x^0$.

L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$, vers $\left\{\overline{x, J_B}\right\}$ , tel que $F(\overline{x}) \leq F(x)$. Pour cela, construisons le nouveau plan $\overline{x}$ de la manière suivante :

$\overline{x} = x + \theta l$ Ou $l$ est un $n$-vecteur appelé direction d'amélioration ; $\theta$ est le pas le long de cette direction.

Dans cet algorithme, on choisira la métrique du simplexe. On ne fera donc varier qu'une seule composante parmi celles qui ne vérifient pas les relations 3.34.

Pour que l'accroissement soit maximal, il faut choisir l'indice $J_0$ tel que :

$$|E_{j0}| = \max(|E_j| \ , j \in J_{NN0}),$$

Ou $J_{NN0} \subset J_N$ est l'ensemble des indices non optimaux. On calcule $l_{NN}$ de manière a assurer $E'l < 0$, On posera alors :

$$l_{j0} = -signE_{j0} \ , l_j = 0, j \neq j_0, \ j \in J_{NN}.$$

On calculera la composante $l_s$ de manière à assurer $\overline{E}_j = E_j(x + \theta l) = 0, j \in J_S$. En vertu de 3.31 nous avons :

$$\text{E'}_N = (g'_B, g'_N) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_N \\ I_N \end{pmatrix} = g'(x) Z$$

Comme $l = Zl_N$ on aura donc

$$\overline{E}'_N = g'\left(x + \theta^0 l\right) Z = E'_N + \theta^0 l'_N Z' D Z = E'_N + \theta^0 l'_N M.$$

Finalement, on a

$$\overline{E}_N = E_N + \theta^0 M l_N.$$

Puisque

$E\left(J_S\right) = 0$,alors l'équation $\overline{E}\left(J_S\right) = 0$ est équivalente à $M\left(J_S, J_S\right) l\left(J_S\right) + M\left(J_S, J_{NN}\right) l\left(J_{NN}\right) = 0$.

D'où $l\left(J_S\right) = -M_S^{-1}\left(J_S, J_{NN}\right) l\left(J_{NN}\right).$

Ensuite on calcule $l_B$ de manière à avoir $Al = 0$ :

$$l_B = \ l\left(J_B\right) = -A_S^{-1} M\left(A_S l_S + A_{NN} l_{NN}\right).$$

Alors pour l'indice $j_0$, nous avons les formules suivantes pour la construction de la direction de $x$ l'amélioration $l = \left(l_j, j \in J\right) = \left(l\left(J_B\right),\ l\left(J_S\right), l\left(J_{NN}\right)\right.$ :

$$\left[\begin{array}{c} l_{j0} = -signE_{j0}, \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_{NN}, \\ l\left(J_S\right) = -M_S^{-1} M\left(J_S, J_0\right) signE_{j0}, \\ l\left(J_B\right) = A_B^{-1}[A\left(I, J_S\right) l\left(J_S\right) - A\left(I, I_{j0}\right) signE_{j0}]. \end{array}\right. \qquad (3.37)$$

D'autre part, le pas $\theta$ doit vérifier les relations suivantes :

1. $-\theta l \leq x_j, j \in J_B$.
2. $-\theta l_j \leq x_j, j \in J_S$.
3. $\theta sign\ E_{j0} \leq x_{j0}$.

En calculons les différentes valeurs maximales que peut prendre le pas $\theta$ dans ces relations,on aura :

$$\theta_{j1} = min_{j \in J_B}(\theta_j), ou\ \theta_j = \left[ \begin{array}{c} -x_j/l_j \ \text{ si } l_j < 0 \\ \infty\text{,si}l_j \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\theta_{js} = min_{j \in J_S}(\theta_j) \quad , ou\ \theta_j = \left[ \begin{array}{c} -x_j/l_j \text{ Si } l_j < 0 \\ \infty, si\ l_j \geq 0. \end{array} \right.$$

$$\theta_{js} = \left[ \begin{array}{l} x_{j0} \ \ si\ E_{j0} > 0 \\ \infty, si\ E_{j0} < 0. \end{array} \right.$$

Ensuite, déterminons le pas $\theta$ pour lequel le passage de $x$ à $\overline{x}$ doit assurer une diminution maximale de la fonction objectif, i , e ,d'après 3.35 nous devons avoir :

$$\frac{\partial_\theta(\theta)}{\partial\theta} = 0 \Leftrightarrow |E_{j0}| + \theta l_N M l_N = 0.$$

On en déduit que la valeur de $\theta_F$ est égale à : $\frac{|E_{j0}|}{l_N^T M l_N}$ , si $l_N^T M l_N > 0$.
$\theta_F = \infty$ , si $l_N^T M l_N = 0$.
Par conséquent, le pas maximal $\theta^0$ le long de la direction $l$ vaut :

$$\theta^0 = \min(\theta_{j0}, \theta_{j1}, \theta_{jS}, \theta_F).$$

Le nouveau plan s'écrit $\overline{x} = x + \theta^0 l$. Si $\overline{E}_N \geq 0\ et\ \beta(\overline{x}, J_B) \leq \epsilon$ , alors que le plan $\overline{x}$ est $\epsilon$-optimal et on peut arrêter l'algorithme .
Sinon, on changera $J_P$ de la manière suivante :

1. Si $\theta^0 = \theta_{j0}$ , alors $\overline{J}_B = J_B,\ \overline{J}_S = J_S,\ \overline{J}_P = J_P$ ;
2. Si $\theta^0 = \theta_{j1}$ , alors $\overline{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0, \acute{\overline{J}}_s = J_s\ , \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_s\right\}$ ;
3. Si $\theta^0 = \theta_{js}$ , alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_s = J_s/j_s\ , \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_s\right\}$ ;
4. Si $\theta^0 = \theta_F$ , alors $\overline{J}_B = J_B, \overline{J}_s = J_s \cup j_0, \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_s\right\}$ ;

On recommencera alors une nouvelle itération avec le nouveau plan de support accordé $\left\{\overline{x}, \overline{J}_P\right\}$ .

**Remarque**Le passage de $\{x, J_P\} \to \left\{\overline{x}, \overline{J}_P\right\}$ assure les conditions

$det\overline{A}_B \neq 0, det\overline{M}_s \neq 0, et\ \overline{E}(\overline{J}_s)$= 0.

### 3.8.2 Finitude de la méthode

La finitude de la méthode de résolution présentée ci-dessus est garantie pour peu qu'une certaine réglé soit observée, à savoir qu'il faut commencer par changer en premier lieu les composantes non optimales, ne correspondant pas aux composantes critiques du plan courant $x$ .

Soit $J_{NN0}$ l'ensemble des indices non optimaux, formés des sous-ensembles suivants :

$$J_{NN0} = J_E \cup J_{cr}$$

Avec $J_E = \{j \in J_{NN}/x_j > 0, E_j \neq 0\}$ et $J_{cr} = \{j \in J_{NN}/x_j = 0, E_j < 0\}$.

Tant que $J_E \neq \emptyset$ l'indice $j_0$ est toujours choisi dans $J_E$.

Pour la démonstration de ce théorème, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes :[7,8.9].

## 3.9 Algorithme de la méthode

La méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

***Algorithme***

***Début***

Soit un nombre réel positif ou nul quelconque $\epsilon$ et un plan du support initial $\{x, J_B\}$ tel que $J_P = \{J_B,\ J_s\}$, avec $J_s = \emptyset$ pour plus de facilité :

test d'optimalité du plan de support $\{x, J_B\}$ ;

— ***Si*** $E_N \geq 0$ alors

Calculer la valeur de suboptimalité $\beta\{x, J_B\}$ ;

•***Si*** $\beta\{x, J_B\} = 0$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{x, J_B\}$ plan de support optimal ;

***FinSi***

***Si*** $\beta\{x, J_B\} \leq \epsilon$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{x, J_P\}$ plan de support $\epsilon$-optimal ;

***FinSi***

***Si*** $\beta\{x, J_B\} > \epsilon$ alors ***aller en (3) ;***

***FinSi***

— ***Sinon*** $E_N 0$ aller directement en 3 ;

***FinSi***

Changement du plan $x$ en $\overline{x}$ : $\overline{x} = x + \theta^0 l$.

— Choisir l'indice $j_0$ tel que $|E_{j0}| = \max(|E_j|, j \in J_{NN0})$, ou $J_{NN0}$ est l'ensemble des indices non optimaux.

— calculer le pas $\theta^0 = \min\{\theta_{j1}, \theta_{j0}, \theta_{jS}, \theta_F\}$ ;

— Calculer $\overline{x} = x + \theta^0 l;$

Test d'optimalité du nouveau plan $\overline{x}$ ;

— ***Si*** $\overline{\mathrm{E}}_{\boldsymbol{N}} \geq 0$ alors

•***Si*** $\beta\{\overline{x}, J_B\} \leq \epsilon$ alors le processus de résolution s'arrête avec $\{\overline{x}, J_P\}$ plan de support $\epsilon$-optimal ;

***Sinon*** **aller en 5**

***FinSi***

— ***Sinon*** $(E_N 0)$ ***aller directement en 5 ;***

***FinSi***

Changement du support $J_P$ en $\overline{J}_P$ ***Si*** $\theta^0 = \theta_{j0}$ alors

$$\overline{J}_P = J_B; \overline{J}_s = J_S \ , \ \overline{J}_P = J_P;$$

***FinSi***

***Si*** $\theta^0 = \theta_1$ alors

$$\overline{J}_B = (J_B/j_1) \cup j_0, \overline{J}_S = J_S; \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_s\right\};$$

***FinSi***

***Si*** $\theta^0 = \theta_S$ alors

$$\overline{J}_B = J_B \ \overline{J}_S = J_S \ /j_S, \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_S\right\} \ ;$$

***FinSi***

***Si*** $\theta^0 = \theta_F$ alors

$$\overline{J}_B = J_B \ \overline{J}_S = J_S \ \cup j_0, \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_S\right\} \ ;$$

***FinSi***

***Aller en 1*** avec le nouveau plan de support $\{\overline{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{J_P}\}$.

## 3.10 Exemple numérique :

Soit le problème de programmation quadratique suivant :

$$F(x) = x_1^2 + x_1x_2 + 6x_2^2 - 2x_1 + 8x_2 \rightarrow min,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

On a :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $x = (0, 0, 4, 5)$ un plan initial du problème. Posons $J_B \ = \{3, 4\}$, $J_N = \{1, 2\}$ *.nous avons alors* $\mathrm{A}_B$ = $(a_3 \ , a_4 \ ) = I_2$ et$A_N \ = (a_1 \ , a_2 \ ) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_B^{-1}A_N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons la matrice $M = Z'DZ$,avec

$$Z = Z\left(J, J_N\right) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_N \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$M = Z'DZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Calculons le vecteur gradient $g(x) = (g_B, g_N)$ :

$$g(x) = Dx + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Et } g_N = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

D'où le vecteur des estimations :

$$E_N = g_N - (g' A_B^{-1} A_N)' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Posons $J_S = \emptyset$ , $J_{NN} = J_N / J_S = \{1, 2\}$ , la paire $\{x, J_P\}$ est alors le plan de support du problème considéré.

**Itération :**

Le critère d'optimalité n'étant pas vérifier pour l'indice $j_0 = 1$,

— Calculons alors la direction d'amélioration $l$ :

$$l_{j0} = l_1 = -sigNE_1 = 1 \qquad car\ E_1 < 0$$
$$l_j = 0 \qquad si\ j \neq j_0\ ,$$

$$l(J_{NN}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$l(J_S) = (l_j, j \in J_S) = 0, car\ \ (J_S = \emptyset)$$

$$l(J_B) = (l_j, j \in J_B) = -A_B^{-1} A(I, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

— Calculons le pas $\theta^0$ le long de cette direction :

$$\theta_{j0} = \theta_1 = \infty\ ,\ car\ E_1 < 0,$$

$$\theta_{j1} = min_{j \in J_B}\ \theta_j = min\{\theta_3, \theta_4\}\ \ , avec \quad \begin{matrix} \theta_3 = 4 \\ \theta_4 = 5/2 \end{matrix}$$

$$\theta_{j1} = \theta_4 = 5/2 \Rightarrow j_1 = 4$$

$$\theta_{jS} = \infty,\ car\ J_S = \emptyset,$$

$$\theta_F = \frac{|E_1|}{\alpha}, avec\ \alpha = l'_N\ Ml_N = 2$$

$$\theta_F = 2/2 = 1.$$

Donc $\theta^0 = min\left\{\theta_{j0}, \theta_{j1}, \theta_{jS}, \theta_F\right\} = \theta_F = 1$. on a alors le nouveau plan :

$$\overline{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overline{J}_B = J_B = \{3,4\} \quad ; \overline{J}_S = \{1\} \quad ; \overline{J}_{NN} = \{2\} \quad ; \overline{J}_P = \left\{\overline{J}_B, \overline{J}_S\right\}$.

On commence alors une nouvelle itération avec le plan de support $\left\{\overline{x}, \overline{J}_P\right\}$ ;

Calculons alors le nouveau vecteur d'estimation ;

$$g\left(\overline{x}\right) = D\overline{x}+c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{E}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Le critère d'optimalité 3.34 étant vérifié, le vecteur $x^0 = (1, 0, 3, 3)$ est alors un plan optimal avec $F\left(x^0\right) = -1$.

Chapitre 4

# La programmation non linéaire convexe

## Introduction

Le concept de convexité est très important en programmation mathématique. Cette classe de problèmes, appelée optimisation convexe, concerne les problèmes d'optimisation non linéaire, où la fonction objectif f(x) est convexe et l'ensemble des solutions réalisables X est aussi convexe. Pour cette catégorie, on distingue les problèmes de programmation linéaire, certains problèmes de programmation quadratique et quelques problèmes non linéaires, surtout avec des contraintes linéaires. Pour les problèmes de minimisation convexe, les conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre deviennent suffisantes et tout le résultat acquiert un caractère global.

## Définition :

D'une manière générale un problème convexe non linéaire est présenté comme suit :

$$\begin{cases} min_x f(x) \\ g_i(x) = a\prime_i x - b_i = 0 \quad , i \ \in \epsilon \\ g_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{cases}$$

**(4.1)**

$f$ $et$ $g_i$ sont convexes.

où : $a_i \in R^n$ $et$ $b_i \in R$.

Ainsi, l'ensemble des solutions réalisables X du problème précédent est convexe.Le résultat principal est que tout minimum local est un minimum global et l'ensemble S des minimums globaux est convexe. Aussi, sous l'hypothèse de la stricte convexité de $f$, le minimum global est unique .

**Théorème 1 :**

Tout minimum local $x^*$ du problème convexe (4.1) est un minimum global, et l'ensemble des minimums globaux S est convexe.

**Preuve :**

Supposons que $x^* \in X$ est un minimum local, mais n'est pas un minimum global.

Alors, il existe $\hat{x} \in X$ vérifiant $f(\hat{x}) \leq f(x^*)$.
En prenant $x_\theta = \theta\hat{x} + (1-\theta)x^* = \hat{x} + \theta(\hat{x} - x^*)$ pour $0 < \theta < 1$ , alors par la convexité de X, $x_\theta \in X$ . Aussi, par la convexité de $f(x)$ , on aura :

$$\begin{aligned} f(x_\theta) &\leq \theta f(\hat{x}) + (1-\theta)f(x^*) \qquad \textbf{(4.2)} \\ &\leq f(x^*) + \theta(f(\hat{x}) - f(x^*)) \\ &\leq f(x^*) \end{aligned}$$

pour $\theta$ suffisamment petit, $x_\theta \in v(x^*, \epsilon)$. Donc la relation (4.2) contredit le fait que $x^*$ est un minimum local. Par conséquent, toutes les solutions locales sont globales. Pour le deuxième résultat, soient $x_1, x_2 \in S$
Et posons $x_\theta = \theta_{x1} + (1-\theta)x_2$ pour $0 < \theta < 1$. Par la propriété de la solution globale, on a $f(x_\theta) \geq f(x_1) = f(x_2)$. Aussi, par la convexité de$f(x)$, on aura :
$f(x_\theta) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2) = f(x_2)$.

Par conséquent, on déduit que $f(x_\theta) = f(x_1) = f(x_2)$ et donc $x_\theta \in S$, ce qui signifie que S est convexe.

**Corollaire :**

Si de plus $f(x)$ est strictement convexe sur X, alors la solution globale est unique pour le problème convexe (4.1).

**Preuve :**

Supposons que S contient deux solutions globales distinctes $x_1, x_2 \in S$ et considérons un autre point $\theta x_1 + (1-\theta)\, x_2$ pour $0 < \theta < 1$. Puisque $x_1 \neq x_2$ et $0 < \theta < 1$, alors on a $x_1 \neq x_.$

Par la stricte convexité de $f(x)$, on conclut que $f(x_\theta) < \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2) = f(x_1)$ et cela contredit la supposition $x_1 \in S$. Par conséquent, le minimum global est unique.

Le deuxième résultat important sous l'hypothèse de convexité est que les conditions de KKT sont suffisantes pour la solution globale.

**Théorème 2 :**

Pour le problème convexe (4.1), si les conditions de KKT sont satisfaites au point $x^*$ , alors $x^*$ est un minimum global.

**Preuve :**

Soit $(x^*, \omega^*)$ une paire de KKT du problème convexe. Clairement, la fonction de Lagrange $\mathcal{L}(x, \omega^*) = f(x) + \sum_{i\in\epsilon} \omega_i^* \; g_i(x)$ est convexe pour $x$. Soit $x$ est un point réalisable quelconque et $\omega_i^* \neq 0 \in I$ , donc on aura :

$$\omega_i^* \; g_i(x) = 0, \quad i \in \epsilon \; , \quad \omega_i^* \; g_i(x) \leq 0$$

D'où

$$\mathcal{L}(x, \omega^*) \leq f(x) \qquad \textbf{(4,3)}$$

En utilisant les propriétés des fonctions convexes et les conditions de KKT , alors pour un point réalisable arbitraire on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x, \omega^*) &\geq \mathcal{L}(x^*, \omega^*) + (x - x^*)' \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \omega^*) \\
&\geq \mathcal{L}(x^*, \omega^*) \\
&\geq f(x^*) + \textstyle\sum_i^m \; \omega_i^* g_i(x^*) \\
&\geq f(x^*)
\end{aligned}$$

**Problèmes pratiques :**

La programmation quadratique est naturellement utilisée dans la modélisation d'une variété d'applications, telles que la gestion de portefeuille [10, 11], l'analyse structurelle et le control optimal [12], ainsi que les machines à vecteurs supports . une bonne estimation de la solution finale peut être connue d'avance.

Du point de vue théorique, la programmation quadratique est très importante, car elle est intermédiaire entre l'optimisation linéaire et non linéaire. En effet, les méthodes développées pour l'optimisation quadratique sont une extension directe de celles conçues pour le cas linéaire. De plus, les modèles quadratiques sont utilisés comme des sous-problèmes à résoudre à chaque itération pour le calcul d'une direction réalisable dans les méthodes dites de programmation quadratique séquentielle [13, 14].

Dans ce qui suit, on présentera quelques modèles classiques de la programmation quadratique.

## 4.1 Gestion de portefeuille :

Hary Markowitz en 1990 a eu le prix Nobel en économie pour ses travaux sur la gestion de portefeuille [10, 11]. Cette théorie permet de trouver un compromis entre un ensemble de n investissements potentiels (actifs ou projets) ayant chacun un rendement $r_i, i = 1, 2.\dots\dots.n$. Les rendements ne sont pas généralement connus d'avance et ils sont souvent supposés être des variables aléatoires suivant la loi normale. Chaque variable aléatoire $r_i$ est caractérisée par sa moyenne (espérance mathématique) $\mu_i = E(r_i)$ et sa variance $\sigma_i^2 = E[(r_i - u_i)^2]$. La variance mesure les fluctuations de la variable $r_i$ autour de sa moyenne. En effet, une grande valeur de  indique un risque d'investissement.

Un investisseur construit son portefeuille en attribuant une proportion $x_i$ des fonds disponibles (capital à investir) et on suppose que les rentes courtes ne sont pas permises. Donc les contraintes du problème sont alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x \geq 0$$

La rentabilité du portefeuille est donné par

$$R = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \qquad \textbf{(4.2)}$$

Afin de mesurer la désirabilité du portefeuille, on a besoin d'obtenir des mesures du rendement espéré et de la variance. Le rendement espéré est tout simplement

$$ER = [\sum_{i=1}^{n} r_i x_i] = \sum_{i=1}^{n} E(r_i) x_i = \mu' x.$$

La variance, aussi, peut être calculée à partir des lois élémentaires de la statistique. Elle dépend de la covariance entre chaque paire d'investissements (projets) et qui est définie comme suit :

$$\rho_{ij} = \frac{E\ [\ (r_i - \mu_i)\ ]}{\sigma_i\ \sigma_j} \qquad \text{pour i, j=1,2,.......,n} \qquad \textbf{(4.3)}$$

La corrélation mesure la tendance des rendements des investissements i et j à évoluer dans la même direction. Par conséquent, deux investissements dont les recettes tendent à augmenter et à baisser ensemble ont une covariance positive ; pour un $\rho_{ij}$ proche de 1, les deux investissements sont fortement liés. Par contre, les investissements dont les recettes tendent à varier dans des directions opposées ont une covariance négative. La variance du portefeuille total R est alors donnée par :

$$E(R - ER)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} x_i x_j = x' D x \qquad \textbf{(4.4)}$$

où la matrice de variance-covariance D est carrée d'ordre n, symétrique, définie positive et chaque élément est égale à :

$$d_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \quad i, j = 1, 2.\dots\dots\dots n \qquad \textbf{(4.5)}$$

Nous nous sommes intéressés aux portefeuilles pour lesquels le rendement espéré $\mu'x$ est grand et la variance du portefeuille $x'Dx$ est petite. Dans le modèle proposé par Markowitz [10], on a combiné les objectifs en un seul critère en pondérant la variance par un paramètre $\lambda$, appelé paramètre de tolérance de risque. Pour déterminer le portefeuille optimal, on résout alors le problème de programmation quadratique convexe suivant :

$$\begin{cases} min\ \lambda x'\ Dx - \mu' x \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.6)}$$

Le paramètre $\lambda$ varie dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et sa valeur dépend des préférences de l'investisseur. En effet, les investisseurs conservateurs placeraient plus de poids en minimisant le risque dans leurs portefeuilles et donc choisissent une grande valeur de  pour augmenter le poids de la variance dans la fonction objectif. Les investisseurs audacieux prennent plus de risque dans l'espoir d'une grande recette, d'où la valeur de $\lambda$ est proche de zéro.

Les difficultés rencontrées dans l'application de cette technique d'optimisation du portefeuille aux investissements de la vie courante résident dans la définition des rendements espérés, les variances et les covariances des investissements en question. L'une des possibilités est d'utiliser un échantillon des données des cinq dernières années pour estimer les quantités $\mu_i, \sigma_i\ et\ \rho_{ij}$. Malheureusement, les données historiques ne sont pas toujours disponibles pour beaucoup de projets d'investissements intéressants (cas de nouvelles compagnies basées sur les nouvelles technologies). Les professionnels de la finance combinent souvent les données historiques avec leurs propres attentes pour produire des valeurs des paramètres en question.

## 4.2 Gestion de production

Admettons qu'un entrepreneur veut maximiser son profit de vente de n denrées qu'il produit. Supposons que $p_j$ , le prix par unité du j ème produit, décroît linéairement avec la quantité produite $x_j$.

Donc, on aura :

$p_j = \alpha_j - \beta_j x_j, \quad j = 1, 2 \ldots\ldots.., n$

Où $\alpha_j > 0$ *et* $\beta_j > 0$

Avec les contraintes linéaires habituelles concernant la disponibilité des ressources employées, le problème est alors modélisé par le PQ suivant :

$max f(x) \sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - \beta_j x_j)x_j$

$\sum_{i=j}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2. \ldots\ldots\ldots.., n$

$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

Chapitre 5

# Définition et implémentation en logiciel MATLAB

## 5.1 Définition du logiciel MATLAB

Le logiciel MATLAB (MATrix LABoratory) est spécialisé dans le domaine du calcul matriciel numérique .Tous les objets définis dans le MATLAB sont donc au moyen des vecteurs des matrices /tableaux de nombres .
Un ensemble important d'opérateurs et de fonction MATLAB de base facilitent leur manipulation et des opérations comme par exemple le produit et l'inversion matricielles (inv), la transposition (') ou encore le calcul des valeurs propres , font partie de la bibliothèque standard . D'autres fonctions servent à la création et à la manipulation de matrices et de tableaux (diag ,rand,ones,zeros,linspace) sont également disponibles en nombre.
L'environnement MATLAB se présente sous la forme d'un espace de travail (Workspace) , ou un interpréteur de commandes exécute des opérations et des fonctions de MATLAB . Les sources de celle-ci sont disponibles , écrites en ''langage ''MATLAB , voir en C ou en fortran . L'utilisateur peut les modifier , mais en s'en inspirant , il peut surtout créer et rajouter ses propres fonctions.
Le ''langage" MATLAB contient un minimum de structures de programmation (structure , itérative , structure conditionnelle , sous-routine) mais reste très rudimentaire . L'avantage est qu'il est très simple et très rapide à programmer, offrant une grande tolérance (syntaxe simple, pas de définition des types, etc.), ce qui permet un gain appréciable en temps de mise au point.

L'ingénieur peut par ce moyen être plus efficace dans l'analyse d'un problème ,en concentrant ses efforts sur celui-ci et non pas sur l'outil servant à le résoudre.

## 5.2 PRÉSENTATION DU LOGICIEL

MATLAB est un solveur de calcul scientifique basé sur le type de variable matricielle. Il a été conçu pour fournir un environnement de calcul numérique de haut niveau grâce à sa structure de données interne et ses grandes capacités graphiques pour la visualisation d'objets mathématiques complexes.

# 5.3 DÉSCRIPTION DE LA FENETRE MATLAB

## 5.3.1 1. La barre de titre

La fenêtre MATLAB est surmontée par une barre de titre, concernant à sa gauche une icône et sa droite les trois boutons :

- Mise en icône.
- Minimisation /maximisation.
- Fermeture.

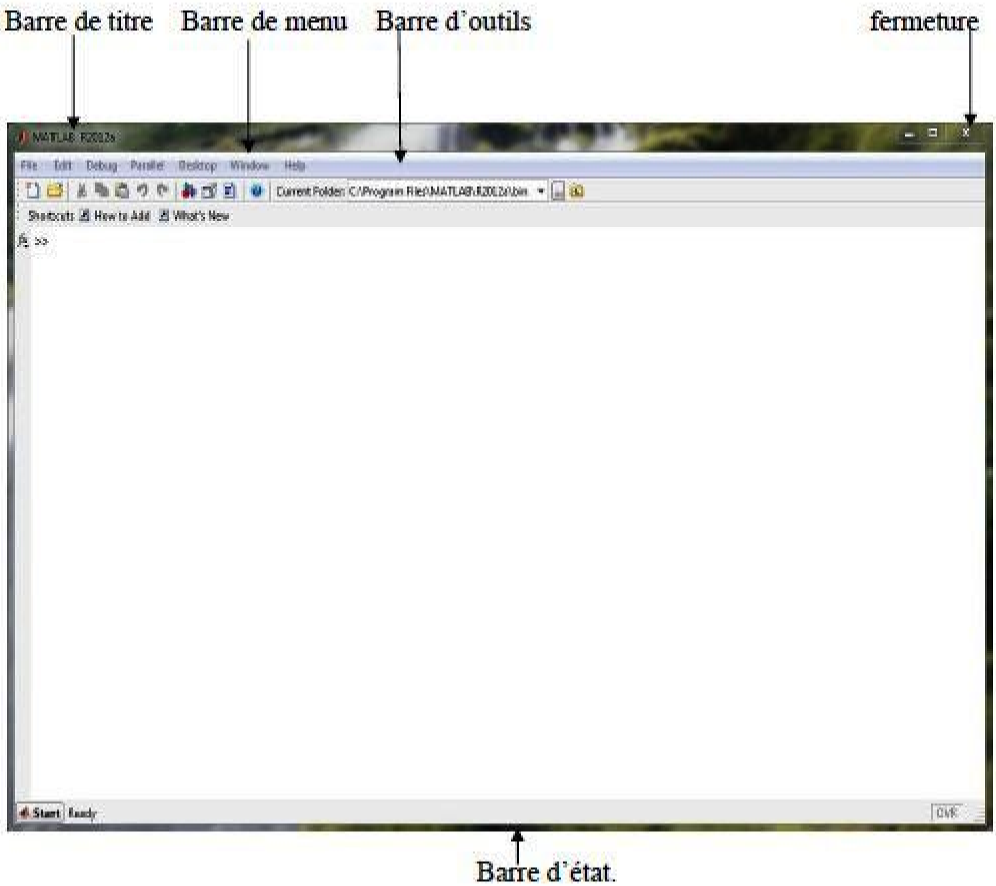



FIGURE 5.1 – La fenetre principale du logiciel MATLAB

La barre du menu La barre du menu contient en général 5 fenêtres :

- File (fichier) permet d'obtenir l'éditeur de programme ;
- Edit (Edition) permet de couper /coller dans la ligne de commande et autres ;
- Debug permet l'exécution d'un programme et autres ; - Window (fenêtre) permet le passage aux différentes fenêtres du logiciel ;

-Help (Aide) accède au menu d'aide

### 5.3.2 La barre d'outils

La barre d'outils est souvent des raccourcis de fonctions contenue dans les menus :
-Ouvrir un nouveau fichier dans l'éditeur ;
-Rappeler un ancien fichier dans l'éditeur ;
-Couper ;
-Coller ;
-Annuler ;
-Appeler l'aide.

### 5.3.3 La Fenêtre de Commande

Elle se divise en deux zones :
-La zone historique : dont on peut copier des parties .
-La zone de commande éditable : permet de taper une commande qui sera validée à l'aide la touche : « Return » ou « entrée »

## 5.4 MÉTHODE DE TRAVAIL

### 5.4.1 Édition et sauvegarde MATLAB des fichiers

Dans un premier temps, on peut se contenter d'introduire ces commandes une à une au niveau de l'espace de travail ou elles sont interprétées directement. Cependants par la suite , il est beaucoup plus pratique d'écrire sa séquence de commandes complétée au moyen d'un éditeur, puis de sauvegarder le tout dans un fichier avec l'extension « m » . Cette séquence pourra alors être exécutée dans MATLAB par simple introduction du nom de fichier.

### 5.4.2 Aide en ligne

En plus de l'aide Windows une aide en ligne est disponible pour chaque commande de MATLAB. Il suffit d'introduire « help nom de la commande ».

### 5.4.3 Création de fichiers de commandes et de fonctions utilisateurs

-Fichier de commande « Script files » :
Un fichier de commande (Script file) est un fichier ASCII d'extension « m » contenant une suite de commandes MATLAB .Il peut être exécuté directement en tapant simplement son nom dans l'espace de travail MATLAB (commande – window) .
-Fonctions :
De nouvelles fonctions peuvent être ajoutées à MATLAB par l'utilisateur. Il suffit de créer un fichier de nom « nom-de-fonction.m » contenant les commandes à exécuter et dont l'entête a le format :
Function [liste des arguments de sortie]=nom de fonction (liste des arguments d'entrée).
Contrairement aux fichiers de commande, les variables intervenants dans les fonctions sont locales.

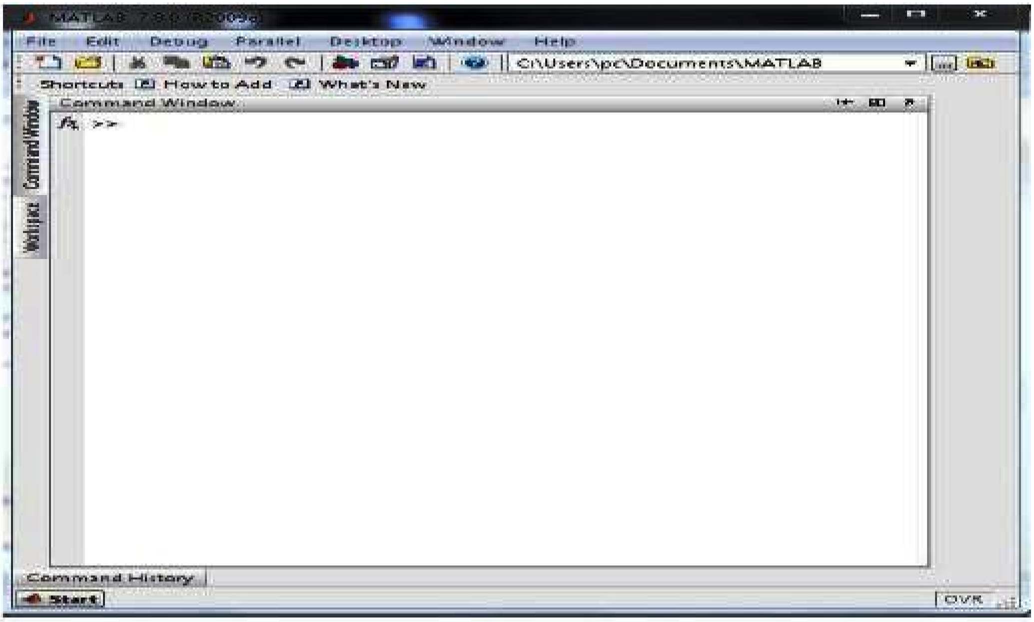



FIGURE 5.2 – La fenetre (commande -window)

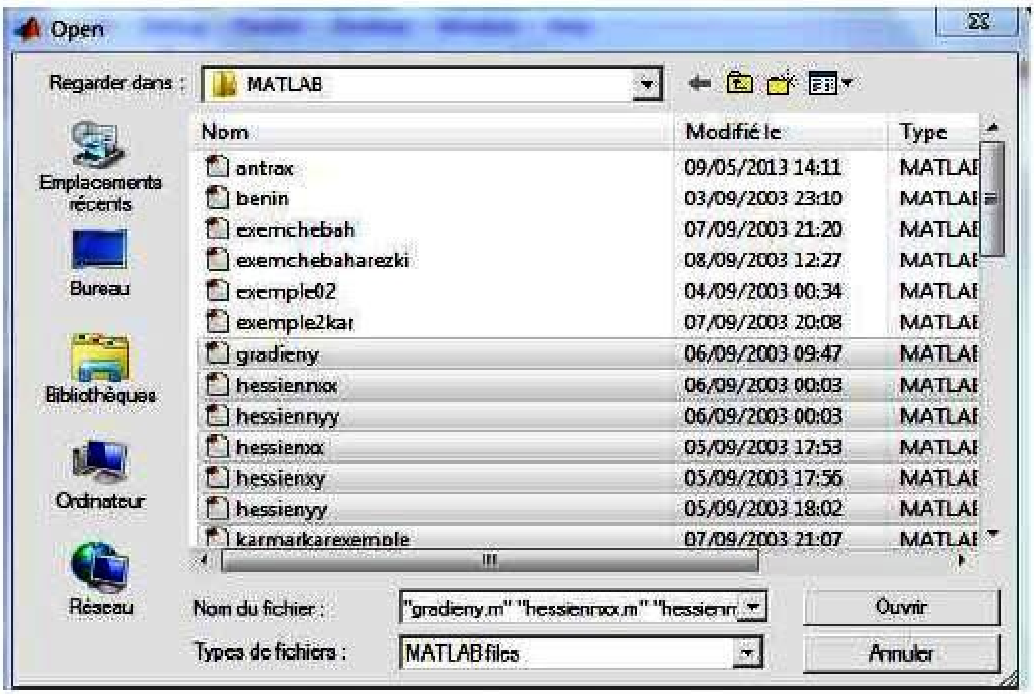



FIGURE 5.3 – La boite de dialogue d'ouverture de fichiers

## 5.5 RÉSOLUTION DES EXEMPLES ÉTUDIÉS SOUS MATLAB

### 5.5.1 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE AVEC LA MÉTHODE DE SIMPLEXE

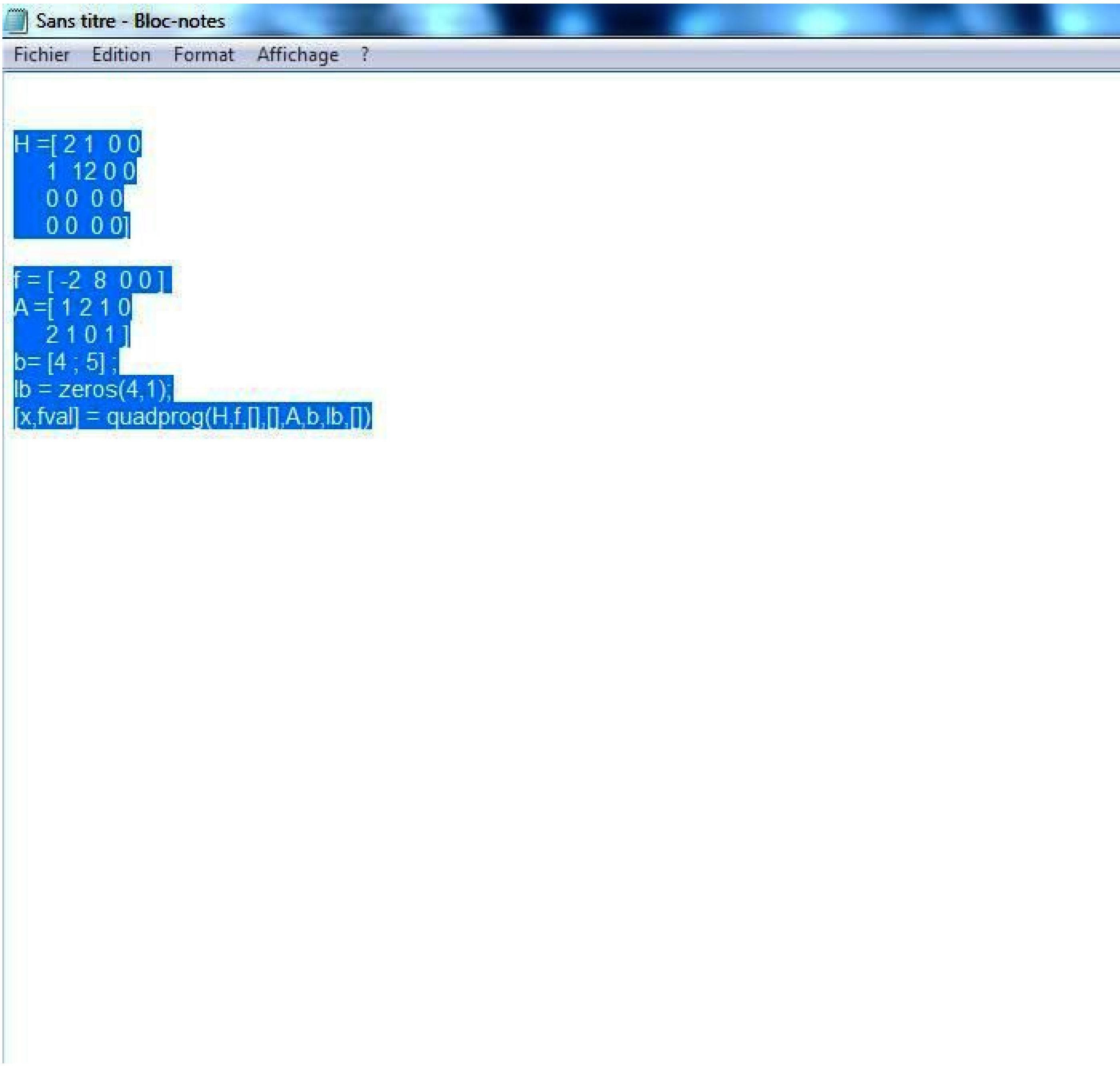
Pour l'exemple numérique précédent résolu dans le deuxième chapitre, en utilisant MATLAB nous avons trouvé la solution optimale de la manière suivante :

```
Command Window
File  Edit  Debug  Desktop  Window  Help

>> f = [-3; -2; 0 ; 0 ;0]
A = [2  1  1  0  0
       1  -1  0 1   0
        1  1   0   0  1];
b = [5 ;  1  ; 3];
lb = zeros(5,1);

[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,[],[], A,b , lb)
f =
    -3
    -2
     0
     0
     0
Optimization terminated.
x =
    2.0000
    1.0000
    0.0000
    0.0000
    0.0000
fval =
   -8.0000
exitflag =
     1
output =
      iterations: 7
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
lambda =
    ineqlin: [0x1 double]
      eqlin: [3x1 double]
      upper: [5x1 double]
      lower: [5x1 double]
fx >>
```

FIGURE 5.4 – résolution exemple1 sous-MATLAB

### 5.5.2 RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION QUADRATIQUE AVEC LA MÉTHODE DE WOLF

Pour l'exemple numérique précédent résolu dans le troisième chapitre, en utilisant MATLAB nous avons trouvé la solution optimale de la manière suivante :




```
H =[ 2 1  0 0
   1  12 0 0
   0 0  0 0
   0 0  0 0]

f = [ -2  8  0 0 ]
A =[ 1 2 1 0
   2 1 0 1 ]
b= [4 ; 5] ;
lb = zeros(4,1);
[x,fval] = quadprog(H,f,[],[],A,b,lb,[])
```

Figure 5.5 – résolution exemple2 sous-MATLAB

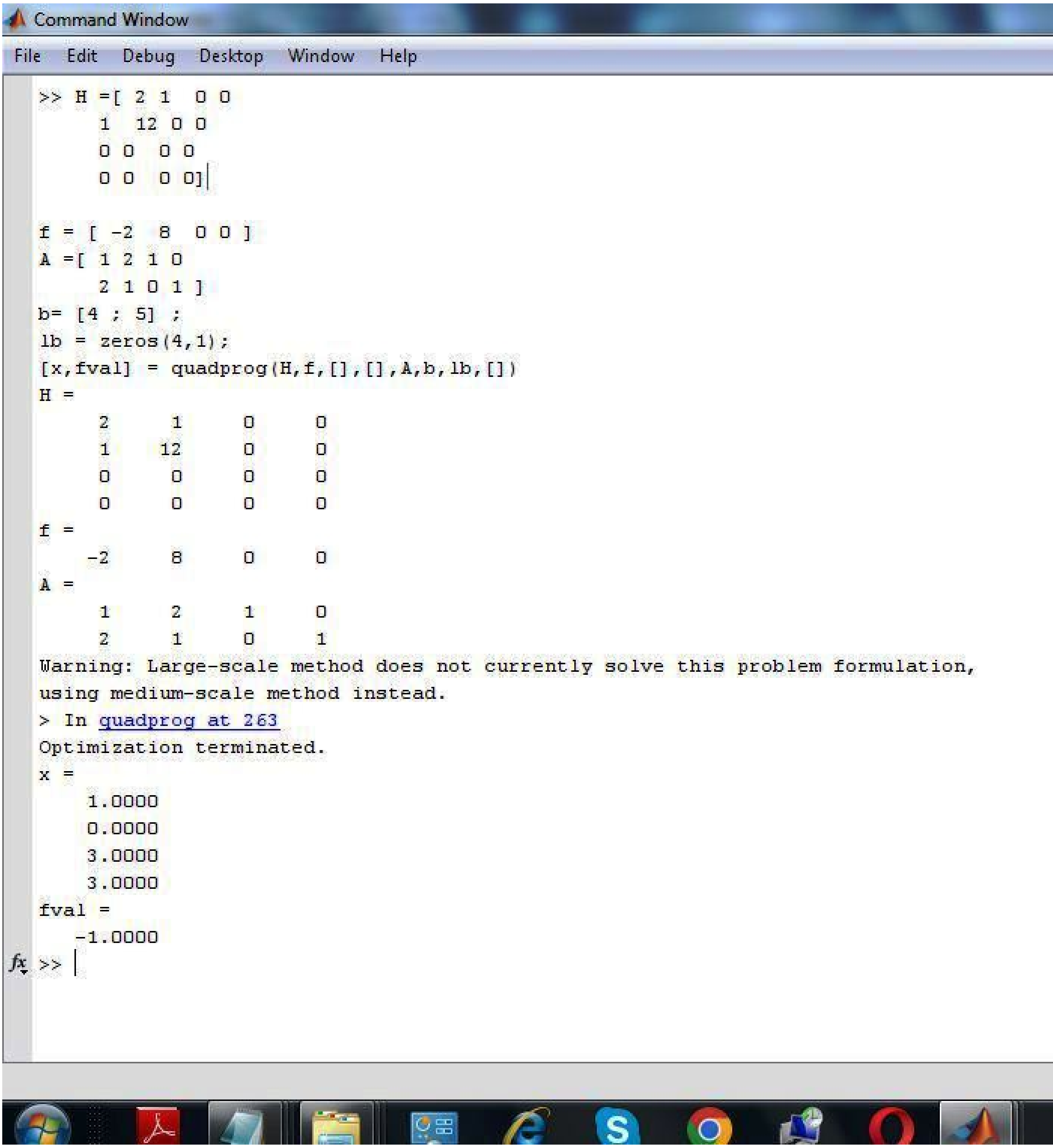



FIGURE 5.6 – résolution exemple2 sous-MATLAB

# Conclusion générale

Nous nous sommes intéressé dans notre modeste travail à une classe particulière des problèmes d'optimisation nommés problèmes convexes (linéaires, non linéaires et quadratique)

A savoir :

Les problèmes linéaires en utilisant quelques techniques de résolution par la méthode du simplexe

Ensuite, on a présenté le problème quadratique convexe résolu par la méthode de Wolf et adapté

Par la suite, on a traité deux problèmes pratiques sur la programmation non linéaire convexe : gestion de portefeuille et gestion de production.

Nous nous sommes interessé vers la fin a la prtesentation de logiciel MATLAB ainsi que la résolution des problèmes étudies sous MATLAB avec la methode du simplexe et la methode de WOLF.

# Bibliographie


[1] **J.stoer and C,** witzgall.convexity and Optimization in Finite Dimension .Spinger-verlag, .1970.

[2] **Aiden M.Oukacha B.** « les manuels de l'étudiant Recherche Opérationnelle Programmation linéaire ».Copyright Eurl Pages Bleues internationales,Maison d'édition pour l'enseignement et la formation,2005

[3] **R. Gabasov and F.M. Kirillova and Raketskii V.M.** On methods for solving the generalproblem of convex quadratic programming. Soviet Math. Dokl., 23 :653-657, 1981.

[4] **Gabasov and F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova and V.M,** On methods for solvingthe general problem of convex quadratic programming. Soviet Math. dokl., 23 :653-657,1981.

[5] **Xia You-sheng.ODE ,** methods for solving convex programming problems with boundedvariables. Chinese J. Num. Math. and Appl., 18(1) :46-52, 1996.

[6] **M.O. Bibi,** Support method for solving a linear quadratic problem with polyhedral-constraints on control. Optimization, 37 :139-149, 1996.

[7] **R. Gabasov and F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova and V.M,** On methods for solving the general problem of convex quadratic programming. Soviet Math. dokl., 23 :653-657, 1981.

[8] **. Gabassov, F.M. Kirillova and O.I. Kostyukova and V.M. Raketskii ,** Méthodes constructives d''Optimization, volume 4 : problèmes convexes. University de Minsk, 1987.

[9] **M.O. Bibi. And N. Ikheneche ,** Optimization par la méthode adaptée d'un problème linéaire-qudratique convexe à variables bornées. Résumés des communications du Colloque International MSS'4, U.S.T.H.B. alger, pages 1-6, 17-18-19 Avril 2004

[10] **H. M. Markowitz ,** Portfolio selection. Journal of Finance, 7(1) :77–91, 1952.

[11] **H. M. Markowitz. ,** Portfolio Selection : Efficient Diversification in Investments. John Wily and Sons, New York, 1959.

[12] **H. J. Ferreau.** An online active set strategy for fast solution of parametric quadratic programs with applications to predictive engine control. PhD thesis, university of Heidelberg, 2006

[13] **Singiresu S. Rao** Engineering Optimization : Theory and Practice. John Wiley And Sons, New York, third edition, 1996.

[14] **J. Nocedal and S. J. Wright.** Numerical Optimization. Springer-Verlag, New York, 1999

## ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بحل المشاكل ينيش في البرمجة الخطية بالطريقة البسيطة الأولية و الثنائيات. ثم إلى حل المشكلات التربيعية المحدبة مع م طريقة وولف المتوافقة مع طريقة وولف ، وبعد ذلك عرضنا المشاكل غير الخطي : إدارة المحافظ والإنتاج. في النهاية لدينا قدم برنامج ماتلاب وتطبيقات الكمبيوتر

## Résumé

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à résoudre des problèmes Min-Max en programmation linéaire par la méthode de simplexe primales et duals .Ensuite a la resolution des problèmes quadratiques convexes avec la méthode adaptée et la methode de Wolf.Par la suite on a presenté des problèmes non linéaires : la gestion de portfeuille et de production. Au finale nous avons présentée le logiciel MATLAB et applications informatiques.

english

## Abstract

In this work we are interested in solving problems Min-Max in linear programming by the primal simplex method and duals. Then to the resolution of convex quadratic problems with the me- adapted method and the method of Wolf. Thereafter we presented problems non-linear : portfolio and production management. In the end we have presented MATLAB software and computer applications.