

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU
Faculté du Génie de la Construction
Département de Génie Civil

MEMOIRE DE MASTER ACADEMIQUE

EN GENIE CIVIL

Option: Structures

Présenté par : Tansaout Kahina

THEME :

Réponse dynamique en régime forcé des câbles de suspension:
Développements et analyses sous charges localisées transversales



Devant les membres du jury composé:

Dahmani Lahlou	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Président
Sadaoui Arezki	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Rapporteur
Illouli Said	Maitre de Conférence A	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur
Lattari Kamel	Maitre de Conférence A	U. Bouira	Invité

Soutenu, le

REMERCIEMENTS

A l'issue de cette présente étude, j'adresse mes remerciements à Dieu de m'avoir donné la chance et le courage d'aboutir au terme de ce travail.

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à **M. Sadaoui Arezki**, professeur à l'**UMMTO** pour la confiance qu'il m'a accordé en acceptant de rapporter ce travail .Son soutien constant, sa disponibilité et ces précieux conseils, m'ont permis de mener à bien ce travail, qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*Je tiens à remercier aussi les membres de jury, **M.Dahmani Lahlou** et **M.Illouli Said** pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail.*

*Mes remerciements s'adressent aussi à **M. Lattari Kamel** pour sa disponibilité ses conseils et son orientation qui m'ont permis de mener à bien ce travail.*

Enfin, Je tiens à remercier ma famille et mes amis(es) pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Dédicaces

« Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux »

J'ai le grand honneur de dédier ce mémoire :

À ma chère mère,

Elle qui a consacré sa vie à l'éducation de ses enfants

Elle qui m'a élevée avec amour et tendresse

Elle qui a toujours cru en moi

Que Dieu te Préserve et te Procure santé et longue vie.

À mon cher père,

Lui qui n'a jamais cessé de me soutenir

Celui qui ne m'a jamais manqué de rien.

Que Dieu te Préserve et te Procure santé et longue vie.

À mes chères sœurs WAHIBA , DIHIA ET TINHINANE ainsi qu'à ma chère amie et camarade NAWEL et sa famille,

A mes chers frères MOUHAND , JUGURTHA , TAREK ET KOUCIELLA

À mes grands-parents Ouardia ET MAKHLOUF

A mon cher oncle et bma tante RACHID ET ZAKIA

À tous mes proches et ceux qui me sont chers,

À toutes les personnes que je porte dans mon cœur,

*À tous mes amis en particulier **FEZZANI SAMIR** et à tous ceux que je connais,*

À tous mes enseignants durant mon cursus scolaire et universitaire,

Merci à toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1 : Introduction

1-1 Etat de la question	1
1-2 Etat de la problématique et cadre de ce travail	5
1-3 Cheminement du travail suivi	6
1-4 Comportement statique d'un câble sous charge horizontale ou transversale	8
1-4-1 Hypothèses principales de calcul admises	8
1-4-2 Forme initiale d'équilibre du câble sous son poids propre	9
1-4-3 Forme d'équilibre du câble sous surcharges	14
1-4-4 Exemple d'application	16

Chapitre 2 : Réponse dynamique en régime forcé: développements théoriques de base sous l'action des charges ponctuelles

2-1 Généralités	18
2-2 Développements théoriques	19
2-2-1 Forme géométrique initiale	19
2-2-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble	20
2-3 Mouvement transversal – cas particulier sous charges ponctuelles	22
2-3-1 Notions de la méthode de séparation de variables	23
2-3-2 Transformation de l'équation de mouvement - expressions générales	24
2-3-3 Cas d'un système non amorti	24
2-4 Réponse sous charges ponctuelles	25
2-4-1 Réponse à une charge ponctuelle d'amplitude constante, P	25
2-4-2 Réponse à une charge ponctuelle harmonique cosinusoidale, type $P \cos(\Omega t)$	29
2-5 Evaluation des pulsations propres	31

Chapitre 3: Expérimentations numériques et analyses

3-1 Généralités	36
-----------------------	----

3-2 Résultats numériques et validation	36
3-2-1 Sous l'action d'une charge ponctuelle d'amplitude constante P	37
3-2-2 Sous l'action charge ponctuelle harmonique cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$	40

Chapitre 4: Conclusions générales

4-1 Rétrospective	43
4-2 Organisation du travail	44
4-3 Résultats obtenus	45
4-4 Recommandations futures	46
Références	47

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1-1 Etat de la question

L'utilisation des câbles dans le domaine de la construction est connue depuis fort longtemps et constitue tant sur le plan architectural que technique une évolution conceptuelle importante dans l'art de construire. Leurs avantages permettant à la fois d'augmenter la portée et de réduire le poids propre, répondent d'une manière radicale au problème longtemps posé dans la réalisation des grandes portées. Les exemples pratiques sont très nombreux dans le domaine des constructions civiles et industrielles [1,2,3]. Songeons particulièrement aux ouvrages suivants :

- ponts suspendus (fig.1-1) ou haubanés (fig.1-2) indispensables pour franchir des vallées, des rivières ou des bras de mer d'une ampleur considérable.
- téléphériques fortement appréciés et notamment privilégiés ces derniers temps en Algérie comme mode de transport public aérien; c'est à l'image de celui actuellement en service depuis environ une année, dans la ville de Tizi-ouzou (fig.1-3), qui relie la gare modale de Bouhinoun à la cité administrative de la wilaya en passant par le stade du premier novembre. Ce mode de transport est généralement utilisé pour gravir un relief pentu et très accidenté ou franchir une dépression géographique (vallée, voie d'eau, montagne dans les stations de ski ou encore en milieu urbain pour la desserte d'un terrain communal au relief difficile) dans le but de se soustraire à des contraintes topographiques (fig. 1-4).
- passerelles piétonnières (fig. 1-5) qui sont des ouvrages très flexibles dont l'implantation est très intéressante dans des sites d'attraction.
- lignes aériennes de transport de l'énergie électrique (fig.1-6).

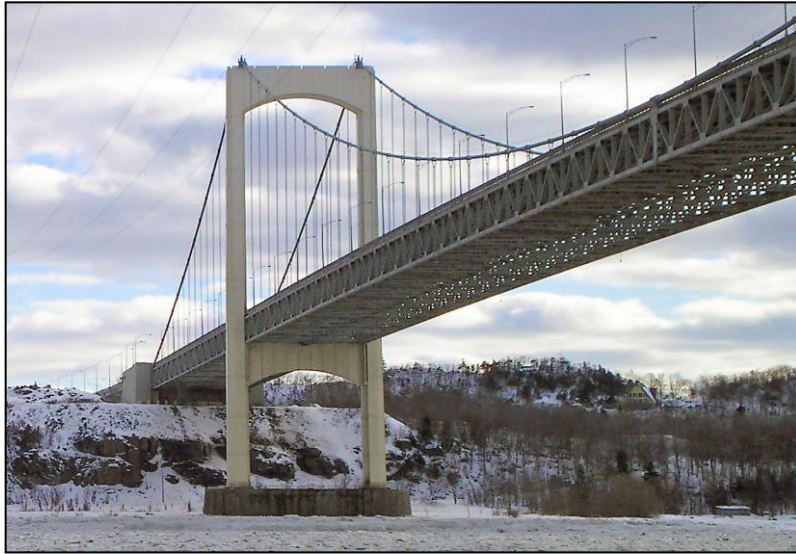


Figure 1-1 : Pont routier Pierre-Laporte, Québec city ; Longueur totale : 1041 m ; Portée principale: 668 m ; Hauteur totale: 116 m ; Année : 1966-1970

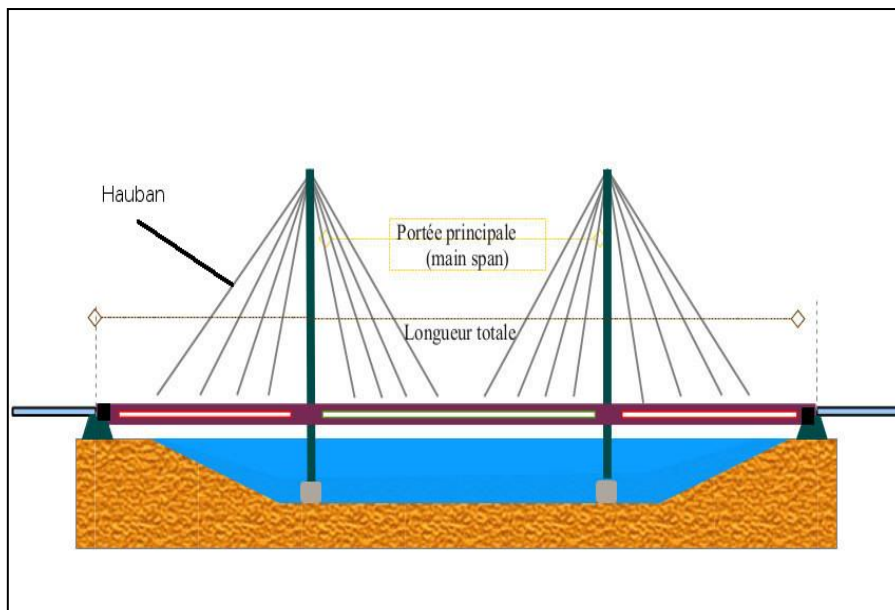


Figure 1-2: Pont type haubané comme celui de Sidi Merouane à Mila



Figure 1-3: Vue de télécabines surplombant le campus Hasnaoua



Figure 1-4 : Vue d'une télécabine entre Oued Koriche et Bouzaréah, Alger



Figure 1-5: Passerelle piétonnière suspendue rigidifiée par des câbles précontraints



Figure 1-6: Photo de ligne de transport d'énergie électrique

Les câbles les plus employés dans ce type d'ouvrages sont généralement des câbles de type toronné i.e constitués des fils d'acier enroulés hélicoïdalement autour d'un fil central appelé âme, en plusieurs couches de pas inversés (fig.1-7). Ils ont une très haute limite d'élasticité atteignant plusieurs fois celle de l'acier traditionnel de charpente métallique. Les torons dont sont ainsi formés les câbles peuvent contenir des centaines de fils et atteindre des limites de rupture de plusieurs centaines de tonnes. Leur module d'élasticité

intrinsèque est plus petit que celui du matériau en acier à cause de l'enroulement des fils en hélice ou une valeur de 170000MPa n'est pas rare. On parle ainsi de câbles à torons parallèles lorsque les câbles sont constitués d'un ensemble de torons alignés. Quand ils sont constitués d'un ensemble de torons enroulés autour d'une âme centrale métallique ou textile, on parle alors de cordages. Les cordages possèdent un module d'élasticité intrinsèque encore plus faible, qui peut être inférieur à 140000 MPa.

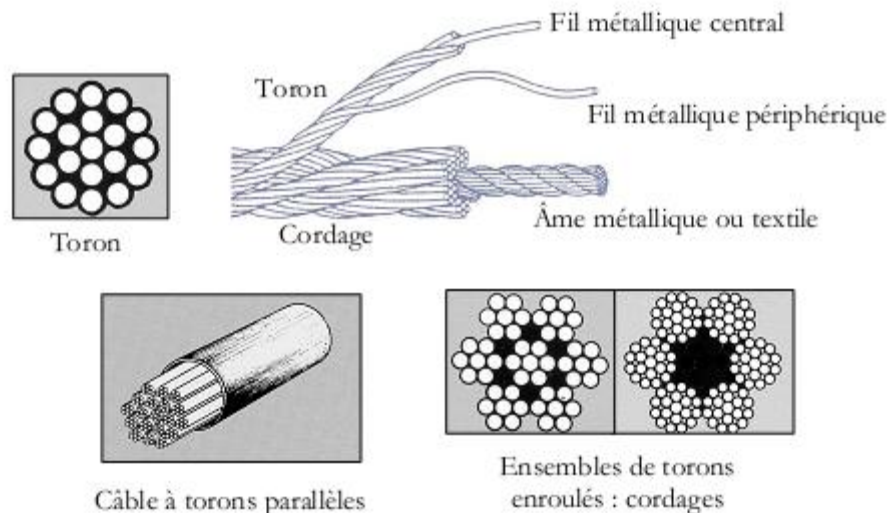


Figure 1-7: Câbles à torons parallèles et enroulés

1-2 Etat de la problématique et cadre de ce travail

La caractéristique essentielle des câbles suspendus est que ce sont des structures souples, dont l'analyse mécanique est fondamentalement non linéaire parce qu'ils sont susceptibles de subir des grands déplacements. Ils en subissent lors de la réalisation ou au cours de l'exécution de pose, quand on ajuste des flèches pour respecter des contraintes d'environnement. Par ailleurs, les systèmes à câbles qui sont réputés très légers employant comme principal élément le câble, l'équilibre des charges doit être réalisé uniquement par des efforts de traction pure, développés parallèlement à la fibre moyenne du câble. Cela signifie qu'aucune rigidité flexionnelle ou de compression n'est attribuée au système. De cette caractéristique découle la nécessité pratique de mise en tension préalable à toute utilisation, et dont l'effet joue un rôle extrêmement important dans la stabilité des structures correspondantes dont le poids propre demeure particulièrement faible. Cette pré-tension, également appelée précontrainte, représente la charge qu'il est nécessaire d'intégrer

initialement à une résille de câbles pour qu'en aucun cas de surcharge, l'un quelconque des éléments du système ou de la résille ne risque d'être virtuellement comprimé i.e tendu.

On ne peut cependant faire abstraction de la vulnérabilité de ce type de structures aux problèmes de stabilité liés principalement aux phénomènes de flottement et de résonance qui, à défaut de n'avoir pas reçu à priori une grande attention, risquent d'affecter à terme sérieusement la durabilité entière de la construction. En effet, à cause des effets dynamiques dus aux charges, les câbles peuvent être animés de mouvements de grandes amplitudes par exemple sous l'impulsion de la pression du vent, de la chute de manchons de givre ou, en cas d'incident dans les lignes de transport d'énergie électrique donnant lieu à des forces de Laplace résultantes des courants de court-circuit. Ces mouvements exercent sur les supports des câbles des efforts beaucoup plus élevés que les efforts statiques qu'il faut en tenir compte dans la conception des ouvrages. L'étude du comportement dynamique des câbles devient par conséquent importante à laquelle, en outre, il faut considérer la non linéarité géométrique qui joue un rôle significatif dans un système léger et aussi déformable qu'est le système à câble [1,2].

Le but principal de ce travail consiste de mettre au point une méthode de calcul analytique complète, simple et précise, capable d'analyser en régime vibratoire forcé, le comportement d'un câble de suspension, de forme parabolique, soumis à l'action de charges dynamiques transversales ou horizontales de type localisées ou ponctuelles. Ce type de charges peut être occasionné accidentellement par exemple par les effets de chocs de cabines téléphériques sous l'action d'une rafale de vent violente. Notons que ce travail fait suite au travail déjà réalisé précédemment par Hacherouf Mohamed Cherif [4] consacré particulièrement à l'analyse dynamique des câbles de suspension en régime vibratoire libre c'est-à-dire en l'absence de toute force extérieure.

1-3 Cheminement du travail suivi

Le travail présenté dans ce mémoire sera principalement organisé en quatre chapitres dont le présent premier chapitre en guise d'introduction est consacré essentiellement à la nature de la problématique et de la question des structures suspendues légères ainsi qu'à la description des objectifs fixés. La formulation statique d'un câble pesant et inextensible sera également revue suivie d'un exemple d'illustration détaillé ainsi que son implémentation dans le code

ANSYS. C'est surtout dans le but de comprendre les fondements mathématiques de base des méthodes de calcul liées aux câbles de suspension, qui sont parfois assez laborieuses à cause du problème des grands déplacements qui en résultent dans la formulation théorique.

Le deuxième chapitre sera consacré à la revue des fondements théoriques de base de calcul d'un câble de suspension sous l'action dynamique. La théorie linéaire en régime vibratoire forcé sera adoptée afin de dériver l'équation d'équilibre de mouvement transversal ou horizontal d'un élément différentiel de câble soumis à une excitation dynamique extérieure quelconque et préalablement à une précontrainte initiale de réglage due au poids propre de l'ouvrage. Les câbles sont principalement supposés ancrés solidement à des massifs d'ancrage et dont la géométrie est de la forme d'une parabole de deuxième degré. La solution de l'équation différentielle résultante est formulée en considérant deux types de charges ponctuelles à savoir sous l'action d'une charge ponctuelle d'amplitude constante et sous une charge ponctuelle harmonique cosinusoidale.

L'avant dernier chapitre sera consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats portant sur le câble principal du pont suspendu de Bosphore, en Turquie, lors de la phase de sa réalisation. Les charges sont horizontales ou transversales de nature ponctuelles, soit appliquées perpendiculairement au plan général du système. Pour jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul ainsi élaborées, les résultats obtenus seront discutés et comparés à ceux issus du code ANSYS, qui est un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis dont le principe consiste de traiter la structure comme telle par modèle discret.

Nous terminerons en guise de dernier chapitre par une conclusion générale suivie par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce travail.

1-4 Comportement statique d'un câble sous charge horizontale ou transversale

Dans cette section, nous allons passer en revue, d'une manière approfondie et commentée, l'analyse du comportement statique d'un câble suspendu soumis à l'action des charges transversales ou horizontales qui sont supposées appliquées lentement pour ne générer aucun effet dynamique i.e ne dépendant pas ici du temps. La charge quelconque répartie $q_z = q_z(x)$ est en d'autres termes appliquée perpendiculairement au plan propre (x-y) du câble comme montré sur la figure 1-8. Le câble est supposé accroché librement à ses extrémités et préalablement chargé par son poids propre. En outre par hypothèse, la géométrie du câble est fondamentalement admise de la forme d'une parabole de deuxième degré. Bien que l'étude soit principalement théorique, un exemple d'illustration sera apporté dans le but de comprendre les fondements théoriques des méthodes de calcul qui sont parfois assez laborieuses.

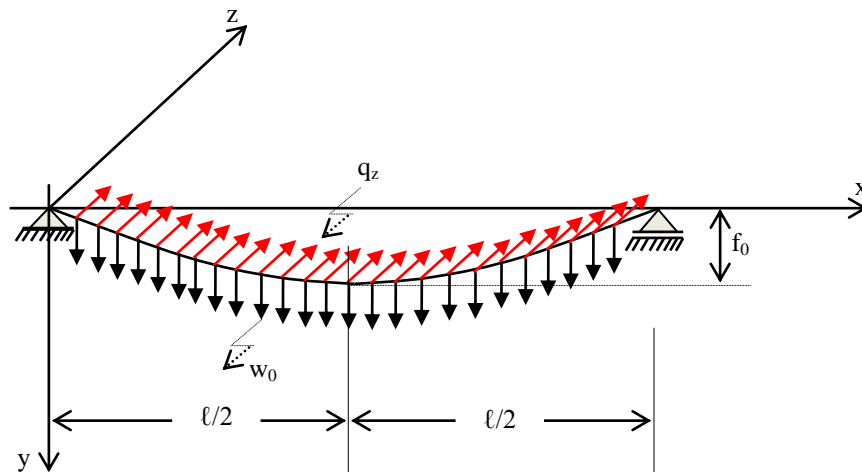


Figure 1-9 : Comportement d'un câble sous charges transversales ou horizontales

1-4-1 Hypothèses principales de calcul admises

Les hypothèses simplificatrices communément admises sont telles que le câble employé comme élément porteur principal possède une section transversale uniforme et fait d'un matériau hookien dont la densité est constante en n'importe quel point du câble. Les expansions et les contractions ainsi que les effets de Poisson qui se développent dans la section transversale sont supposés négligeables. On ignore également la rigidité flexionnelle du câble c'est-à-dire, en d'autre terme, d'admettre un comportement parfaitement flexible du câble ; ce qui revient en langage structural à énoncer que, tout au long d'un câble, que le

moment fléchissant est nul. Il s'ensuit que la résultante des efforts développés dans chaque point du câble est tangentielle au profil du câble et agit au centre de gravité de la section transversale au point considéré. En outre, pour des raisons de simplicité, chaque extrémité du câble est supposée ancrée dans des supports rigides et qui, dans la plupart du temps sauf indication contraire, sont tous supposés situés au même niveau i.e sans dénivellation d'appuis.

Par ailleurs, la géométrie d'un câble dont sa forme est assimilée initialement à une forme parabolique, plutôt que sa forme exacte dite chaînette ou caténaire, impose que le rapport flèche/travée soit relativement petit. Dans les développements théoriques qui vont suivre, le rapport flèche/travée doit être de l'ordre de $1/8$ ou moins correspondant à des câbles relativement tendus (ou peu profonds). C'est de sorte que les chaînettes soient fortement aplaties pour pouvoir les assimiler, dans l'état initial, réellement à des paraboles. A priori, un câble qui ne satisfait pas cette exigence, ne va décrire exactement une forme parabolique. En pratique, de tels câbles sont rarement conçus pour reprendre des charges transversales.

1-4-2 Forme initiale d'équilibre du câble sous son poids propre

Considérons d'abord le câble sous l'action seule de son poids propre w_0 dont la géométrie est représentée sur la figure 1-9 ; le câble étant de forme parabolique, uniforme et inextensible, suspendu librement à ses extrémités A et B, et sans présence d'aucune dénivellation d'appuis. En plus, à cause du rapport flèche/portée ($f_0/\ell=1/8$ ou moins), la charge w_0 peut être supposée uniformément répartie par mètre horizontal de la travée du câble.

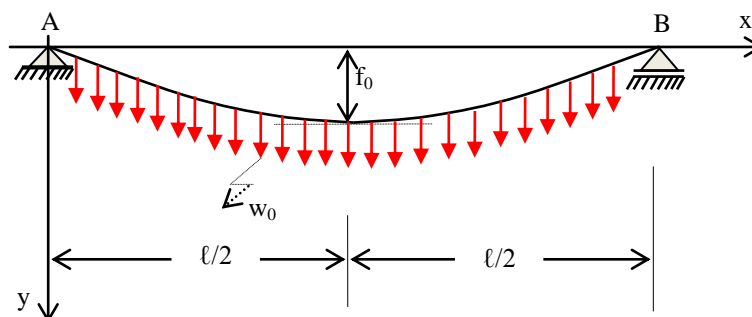


Figure 1-9 : Configuration du câble sous l'action de son poids propre

La figure 1-10 montre les forces appliquées sur un élément différentiel extrait du câble ayant une longueur ds , où T est la tension développée dans le câble, w_0 son poids propre par unité de longueur du câble, dy/ds le sinus de l'angle d'inclinaison que fait l'élément du câble avec l'axe des x et dx/ds le cosinus de l'angle d'inclinaison de l'élément du câble.

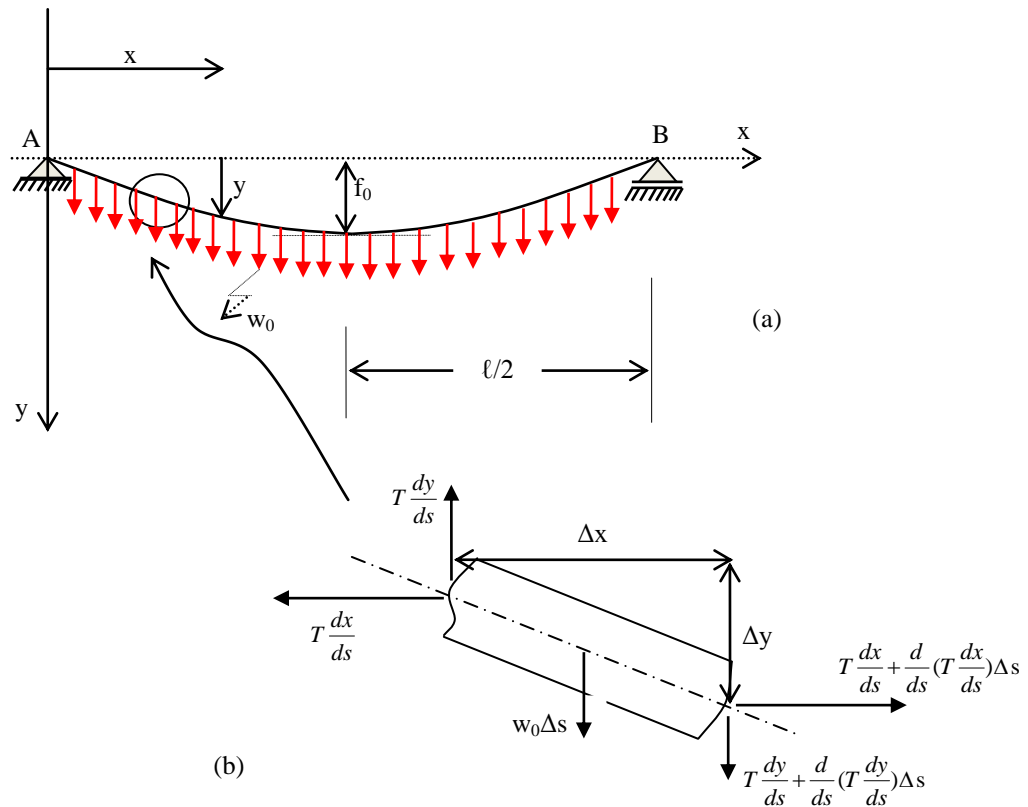


Figure 1-10: Equilibre différentiel d'un élément de câble pesant et inextensible

L'équation d'équilibre vertical selon y ($\sum F_y = 0$) de l'élément du câble (fig. 1-10b) permet d'obtenir d'une part soit après simplification du terme Δs qui représente la longueur de l'élément du câble:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = -w_0 \quad (1-1)$$

L'équilibre horizontal de l'élément selon l'axe des x , soit $\sum F_x = 0$, permet d'écrire d'autre part:

$$\frac{d}{ds} \left[T \frac{dx}{ds} \right] = 0 \quad (1-2)$$

Soit après intégration:

$$T \frac{dx}{ds} = \text{Cste } (=H) \quad (1-3)$$

où H est la composante horizontale de la tension T du câble, appelée communément poussée, qui caractérise les conditions initiales de réglage du câble avant toute application de surcharges. La poussée est constante partout en n'importe quel point du câble et dx/ds est le sinus de l'angle d'inclinaison que fait l'élément du câble avec l'axe des x; d étant une différentielle.

L'expression de la composante verticale de la tension, soit $\sum F_y$, peut être alors transformée par la façon suivante en tenant compte de la relation 1-3:

$$\frac{d}{ds} \left[T \frac{dy}{ds} \right] = \frac{d}{ds} \left[T \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} \right] = \frac{d}{ds} \left[H \frac{dy}{dx} \right] \quad (1-4)$$

Le DCL des forces appliquées sur l'élément du câble peut être ainsi simplifié comme indiqué sur la figure 1-11:

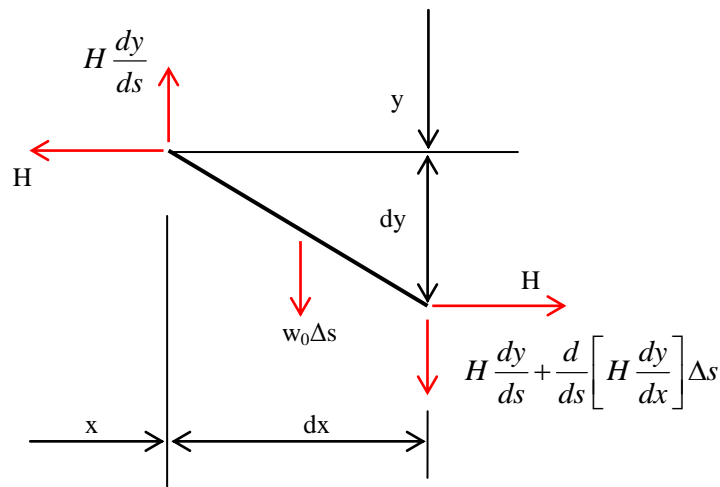


Figure 1-11 : DCL des forces appliquées sur un élément différentiel du câble

En appliquant la règle de transformation d'une fonction différentielle $\frac{d(\dots)}{ds} = \frac{d(\dots)}{dx} \frac{dx}{ds}$, l'équation d'équilibre (1-1) peut être transformée comme suit :

$$\frac{d}{dx} \left(H \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{ds} = -w_0 \quad (1-4)$$

Soit en utilisant la notion de la dérivée seconde, la poussée ou la force de précontrainte H étant constante en n'importe quel point du câble, l'équation précédente se réduit à:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w_0 \frac{ds}{dx} \quad (1-5a)$$

En tenant compte du fait que $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, il est possible d'écrire finalement l'équation (1-5a) sous la forme:

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w_0 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1-5b)$$

Notons que lorsque w_0 est constante, la solution de l'équation (1-5b) est bien connue sous le nom de chaînette ou caténaire [5]. En effet, la modélisation la plus fine d'un câble pesant tendu entre ses deux ancrages ayant un poids linéique uniforme est ainsi naturellement assimilable à une chaînette ou caténaire. Cependant, d'un point de vue strictement théorique, le poids linéique w_0 d'un câble en place n'est pas tout à fait uniforme, puisque sa tension varie avec l'altitude et que le câble présente donc une certaine variation de section, due à une variation d'allongement. Toutefois, cet effet est tout à fait négligeable, et l'on peut utiliser avec confiance les formules analytiques classiques données ci-après pour évaluer de façon rigoureuse les caractéristiques du profil comme la flèche maximale, inclinaison des tangentes aux extrémités, longueur développée, etc. La modélisation en chaînette permet surtout d'apprécier l'effet de grands déplacements sur la rigidité axiale effective d'un câble.

Lorsqu'on suppose de plus dans la formule (1-5a) que $w_0 ds/dx$ est constante, le profil du câble prend une forme d'une parabole qui constitue le résultat fondamental trouvée par Fuss. Cependant, pour un câble aplati (f_0/ℓ très petit) dont le poids propre est par unité de longueur, la pente du profil du câble est petite et, par suite $ds \approx dx$. L'équilibre d'un tel élément de câble est exactement donné par la relation :

$$H \frac{d^2 y}{dx^2} = -w_0 \quad (1-6)$$

Tel que le système de coordonnées montré sur la figure 1-8, en moyennant les conditions aux limites du câble soit $y=0$ pour $x=0$ et $x=\ell$, la solution de cette équation différentielle est une parabole dont la déflexion peut se mettre sous la forme :

$$y = \frac{w_0 \ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (1-7)$$

La valeur de la déflexion à $x = \ell/2$ représente la flèche f_0 , et ainsi la composante horizontale de la tension du câble s'écrit :

$$H = \frac{w_0 \ell^2}{8f_0} \quad (1-8)$$

De ce fait, la tension au n'importe point du câble est donnée par la relation :

$$T = H \frac{ds}{dx} = H \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1-9)$$

qui est au fait peu différente de sa composante horizontale H . Par ailleurs, à l'aide des équations (1-7) et (1-8), on convient souvent d'écrire l'équation de la déflexion sous la forme :

$$y = \frac{4f_0}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (1-10)$$

Cependant, la solution n'est pas complète. Par exemple, si seulement w_0 et ℓ sont connues, H ne peut pas être déterminée sauf si f_0 est connue. Dans de telles situations, la longueur L du câble doit être préalablement connue, et alors la flèche peut-être trouvée. La longueur du câble peut-être évaluée.

Soit avec : $L = \int_0^\ell ds$; $ds = dx \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{4f_0}{\ell^2}(\ell - 2x)$, il s'ensuit :

$$L = \int_0^\ell \left[1 + \left\{ \frac{4f_0}{\ell^2}(\ell - 2x)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] dx \quad (1-11)$$

L'intégrale peut-être évaluée exactement mais il convient avec une précision assez suffisante de développer en série binomiale la relation (1-11) et ensuite intégrer terme par terme, conduisant à :

$$L = \ell \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f_0}{\ell} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{f_0}{\ell} \right)^4 + \dots \right\} \quad (1-12)$$

C'est une équation du second degré en fonction de f_0/ℓ et sa résolution conduit à :

$$\left(\frac{f_0}{\ell} \right)^2 \simeq \frac{5}{24} \left\{ \left(1 + \frac{18}{5} \left(\frac{L-\ell}{\ell} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right\} \quad (1-12)$$

Ainsi, en général, si w_0 et ℓ sont connues, il est nécessaire de spécifier uniquement une des trois variables (H, f_0, L) dans le but d'obtenir la solution complète.

1-4-3 Forme d'équilibre du câble sous surcharges

Appliquons maintenant suivant l'axe des z , comme dans la figure 1-8, une surcharge transversale q que nous supposons uniformément répartie ($q = q_z$) et admettons en outre négligeable la poussée additionnelle engendrée dans le câble. Par suite, la tension T dans le câble peut se décomposer en trois composantes ainsi récapitulée dans la figure (1-11) à savoir la poussée H dirigée selon x , la force verticale $H \frac{dy}{dx}$ dirigée selon y comme dans la figure 1-

12 et la force verticale $H \frac{dz}{dx}$ dirigée selon l'axe z due à la déformation du câble dans le plan x-z.

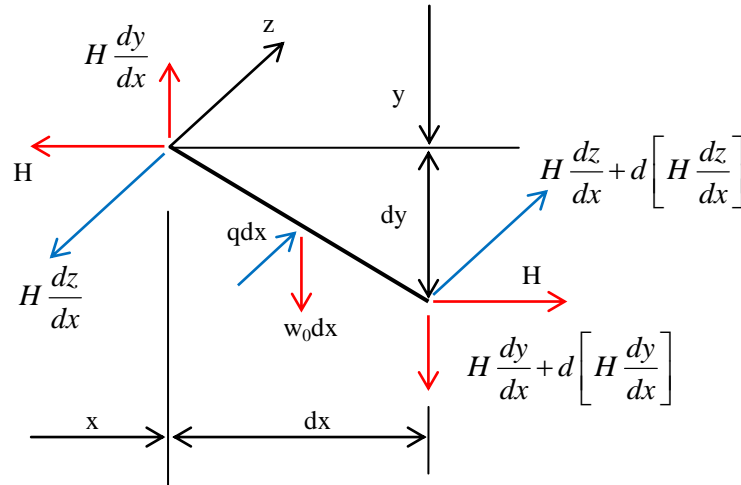


Figure 1-12 Equilibre de l'élément du câble selon z

L'équilibre de l'élément du câble selon l'axe des z nous conduira à une équation analogue à l'équation (1-6) que nous écrivons sous la forme :

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} = -q \quad (1-13)$$

qui, après intégration à l'aide des conditions aux limites $z=0$ pour $x=0$ et $x=\ell$, donne l'équation suivante de la déformée recherchée du câble sous l'action des charges transversales :

$$z(x) = \frac{q\ell}{2H} x - \frac{q \cdot x^2}{2H} \quad (1-14)$$

Remarque : Il est possible d'obtenir l'équation (1-14) en considérant l'équilibre vertical du tronçon du câble à une distance x de l'appui gauche (fig. 1-13).

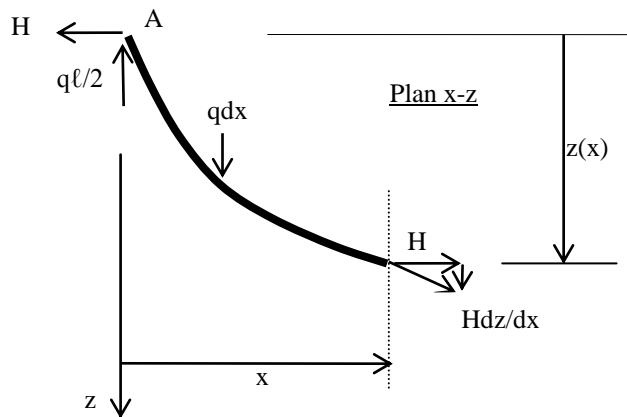
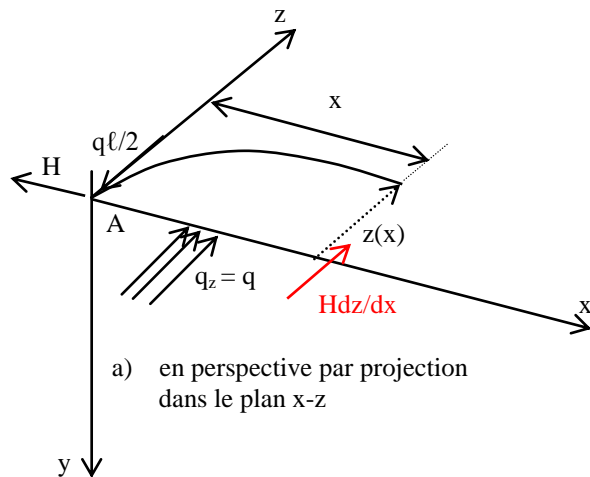


Figure 1-13: DCL de la vue horizontale d'une fraction du câble en projection dans le plan x-z

1-4-4 Exemple d'application

Considérons le câble suspendu représenté à la figure 1-8 et proposons de calculer la valeur de la déflexion au milieu de la travée et les réactions à l'appui ainsi induits sous l'action d'une charge transversale q appliquée suivant l'axe z et comparons les résultats à ceux obtenus par le code ANSYS [6]. Les propriétés du câble dans sa position libre suspendu sont: $\ell=915 \text{ m}$; $w_0 = 4.4 \text{ kN/m}$; $E_C = 180 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$; $A_C = 0.161 \text{ m}^2$; f_0/ℓ (géométrie initiale) = $1/12$; $q=0,1 \text{ kN/m}$.

Les résultats obtenus sont récapitulés dans le tableau suivant :

	Analytique	ANSYS	% Erreur
Réaction verticale à l'appui	$R_v = \frac{w_0 \ell}{2} = 2013kN$	1962,70kN	2,49
Réaction horizontale à l'appui	$H = \frac{w_0 \ell^2}{8d} = 6039kN$	6040,60 kN	0,02
Réaction transversale à l'appui	$R_T = \frac{q\ell}{2} = 45,75kN$	44,61kN	2,5
Flèche à mi-travée	$z\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{H} \left(\frac{q\ell}{2} \frac{\ell}{2} - \frac{q \cdot \ell}{2} \frac{\ell}{4} \right)^2 = 1,7329m$	1,7325m	0,02

Les déformées transversales du câble obtenues respectivement par la méthode analytique et par le code ANSYS sont représentées sur la figure suivante où nous constatons une parfaite concordance des résultats. Il est à noter en outre que la charge transversale q n'a pratiquement aucun effet sur l'erreur relative enregistrée sous la réaction verticale (2,49%) qui est peut être due à la discrétisation du poids propre w_0 par le code ANSYS.

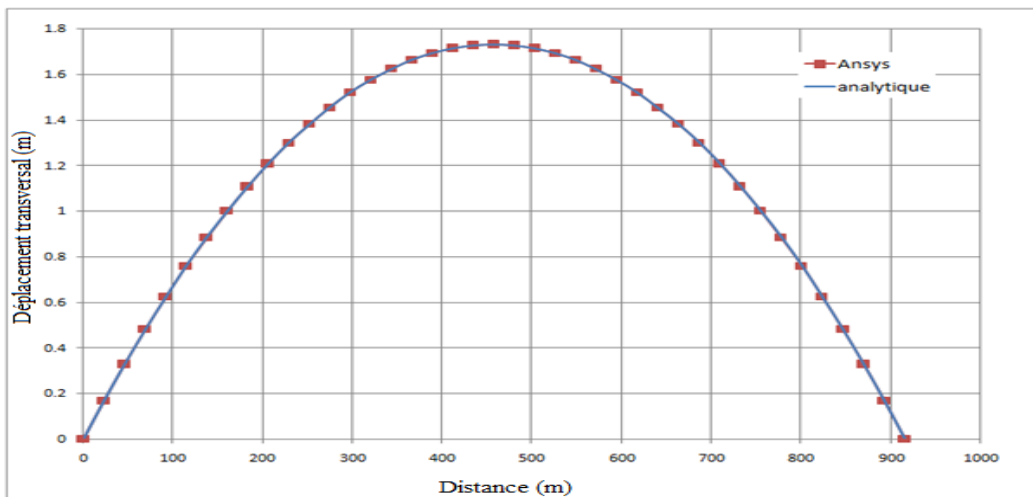


Figure 1-14 : Déformée du câble

CHAPITRE 2

REPONSE DYNAMIQUE EN REGIME FORCE: DEVELOPPEMENTS THEORIQUES DE BASE SOUS CHARGES PONCTUELLES

2-1 Généralités

Ce chapitre a pour but d'exposer les développements théoriques de base de la méthode de calcul permettant d'analyser la réponse dynamique, en régime forcé, le comportement d'un câble précontraint de suspension soumis à l'action de charges extérieures transversales ou horizontales de type localisées ou ponctuelles. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte est obtenue en utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou la deuxième loi de Newton) selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exerce sur un corps solide. La dérivée de la quantité de mouvement (par rapport au temps) n'est rien d'autre que la force d'inertie qui est le produit de la masse du corps par son accélération, et qu'elle s'oppose toujours à la direction du mouvement.

Les hypothèses principales qui délimitent les conditions de validité de la méthode peuvent être énumérées comme suit:

- câble parfaitement flexible : cela revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- câbles relativement tendus (peu profonds) correspondant à un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/10 ou moins de sorte que les chaînettes fortement aplaties sont assimilables, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés; il en découle que les efforts de tension engendrés dans le câble sont uniformes sur l'horizontale, au moment du réglage;
- variations de températures éventuelles uniformes et constantes partout dans la structure ;
- poussées additionnelles induits dans le câble sous l'effet des surcharges transversales appliquées sont négligeables.

2-2 Développements théoriques

Considérons de nouveau comme indiqué dans le chapitre précédent au paragraphe 1-4, un câble parabolique uniforme chargé seul sous l'action de son poids propre (w_0) dont sa position d'équilibre comme montré dans la figure 2-1 demeure dans son propre plan vertical (x - y) ; le câble étant librement appuyé à ses extrémités et ne présentant pas de dénivellation d'appuis.

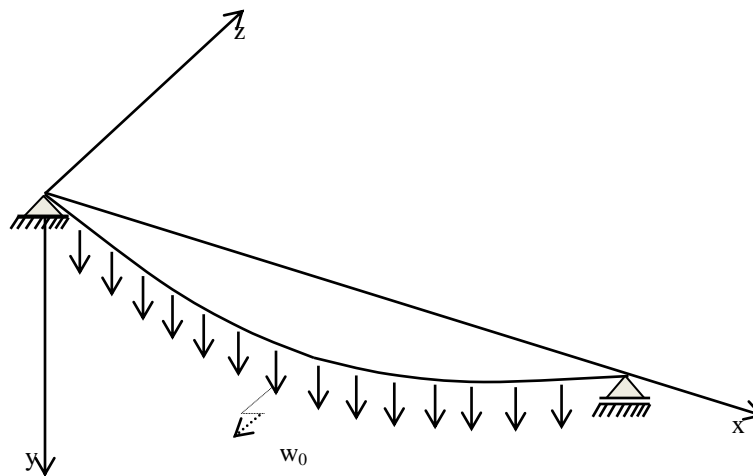


Figure 2-1: Position géométrique lors du réglage initial

2-2-1 Forme géométrique initiale

Le profil géométrique du câble lors du réglage initial est décrit par l'équation (1-5), que nous réécrivons sous la forme :

$$y = \frac{m_0 g \ell^2}{2H} \left\{ \frac{x}{\ell} - \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right\} \quad (2-1)$$

où $m_0 (=w_0/g)$ est la masse par unité de longueur du câble et g représente l'accélération due à la pesanteur ($=9.81 \text{ m/s}^2$). Quant à la poussée H qui représente la force de précontrainte initiale de réglage engendrée dans le câble, est donnée par la formule (1-8) soit :

$$H = \frac{w_0 \ell^2}{8f_0} \quad (2-2)$$

2-2-2 Equations générales de mouvements d'un élément de câble

Soumettons maintenant le câble à des forces dynamiques arbitraires $F_x(x,t)$, $F_y(x,t)$ et $F_z(x,t)$ qui engendrent en chaque point $P(x,y,z)$ du câble respectivement des déplacements u , v et w selon les axes x , y et z ainsi schématisé dans la figure 2-2. Alors, les vibrations qui en résultent se décomposent généralement en trois composantes à savoir un mouvement longitudinal (u), un mouvement transversal vertical (v) et mouvement transversal horizontal (w).

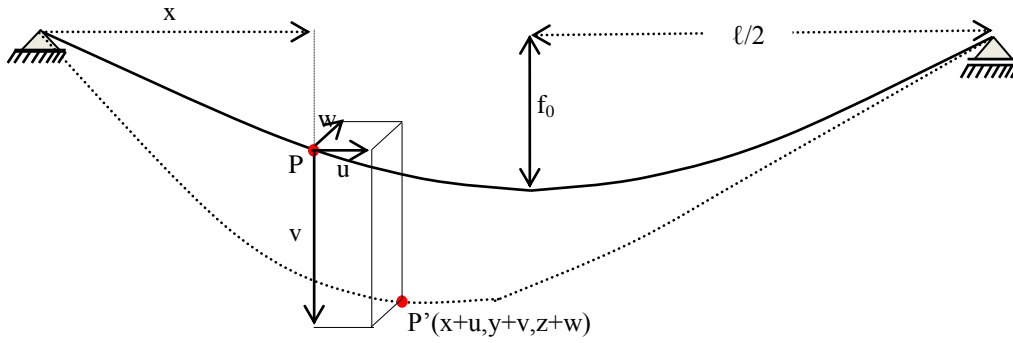


Figure 2-2 : Configuration du câble après déformation

En appliquant le principe fondamental de la dynamique ou la deuxième loi de Newton, l'équilibre dynamique d'un élément de câble permet d'écrire les conditions suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial s} \right) \right\} + F_x(x, t) = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2-3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \left(\frac{dy}{ds} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) \right\} + F_y(x, t) = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - m_0 g \quad (2-3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ (T + \tau) \frac{\partial w}{\partial s} \right\} + F_z(x, t) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-3c)$$

où τ est la tension supplémentaire engendrée par le mouvement du câble en passant du point $P(x,y,z)$ au point $P'(x+u,y+v,z+w)$. Les composantes du mouvement u , v et w ainsi que la tension τ sont des fonctions dépendantes simultanément des coordonnées et du temps ; les forces $F_x(x,t)$, $F_y(x,t)$ et $F_z(x,t)$ étant exprimées par unité de longueur du câble.

Les équations (2-3) peuvent être simplifiées pour des problèmes manuels en développant chaque équation tenant compte des conditions liées à la position d'équilibre initiale et en négligeant les termes de second ordre. En plus, puisque l'analyse est valable uniquement pour des câbles avec un rapport flèche/travée de l'ordre de 1/8 ou moins, la composante longitudinale du mouvement de ces équations s'avère d'une moindre importance et peut donc être négligée. Par conséquent, les équations d'équilibre de mouvement d'un élément infinitésimal de câble de longueur dx se réduisent à :

$$H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_y(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2-4a)$$

$$H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F_z(x,t) = m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2-4b)$$

où h étant la composante additionnelle de la tension induite dans le câble et qui est une fonction dépendante du temps seul. Notons que le mouvement transversal horizontal est complètement découplé du mouvement dans le plan vu qu'il n'y a pas, au premier ordre, de force de tension additionnelle dans le câble [7]. Ce qui, selon Irvine [5], est en accord avec l'expérience où dans une chaînette ou une caténaire le seul mode de vibration facile à obtenir est le premier mode d'oscillation. Par suite, au premier ordre, une excitation dynamique ne possédant pas de composante dans le plan entrainera seulement un mouvement transversal horizontal, et vice versa.

Par ailleurs, vu les restrictions adoptées sur la géométrie du câble, c'est bien la composante verticale du mouvement qui est la plus déterminante quand le câble vibre dans le mode plan. L'amplitude qui correspond à la composante longitudinale est toujours substantiellement inférieure par rapport à celle du mouvement vertical. Dans beaucoup de situations pratiques, les composantes longitudinales modales sont d'une moindre importance et par conséquent, les composantes verticales modales peuvent être désignées comme modes plans. Cependant, dans ce qui suit à cause de la simplicité d'analyse qu'il procure et qui est

d'ailleurs l'objectif fixé dans ce travail, nous allons nous limiter seulement au mouvement transversal ou horizontal i.e au mouvement qui se produit dans le plan perpendiculaire au câble.

2-3 Mouvement transversal – cas particulier sous charges ponctuelles

Soit à résoudre l'équation différentielle du mouvement transversal d'un élément de câble (2-4b) que nous réécrivons sous la forme générale suivante pour un milieu non conservatif (présence de l'amortissement):

$$m_0 \cdot \ddot{w} + c\dot{w} - H \cdot w'' = F_z(x, t) \quad (2-5)$$

où:

- $w(x, t)$: déplacement transversal du câble suivant l'axe z ; \ddot{w} et \dot{w} désignent la deuxième dérivée de la fonction $w = w(x, t)$ respectivement par rapport au temps et à la coordonnée spatiale x i.e $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ et $w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$;
- H : composante horizontale de la tension du câble ou poussée définie par l'équation (2-2);
- m_0 : masse linéique (par mètre linéaire du câble $=w_0/g$);
- c : constante d'amortissement du câble;
- $F_z(x, t)$: Force extérieure appliquée sur le câble (suivant l'axe z), pouvant être de nature dynamique.

NB: l'équation de mouvement (2-5) peut être directement obtenue en considérant respectivement l'équilibre vertical selon y (sous poids propre linéique; w_0) et l'équilibre transversal selon z (sous charges $F_z(x, t)$, selon z) comme indiqué dans les figures 2-3 et 2-4.

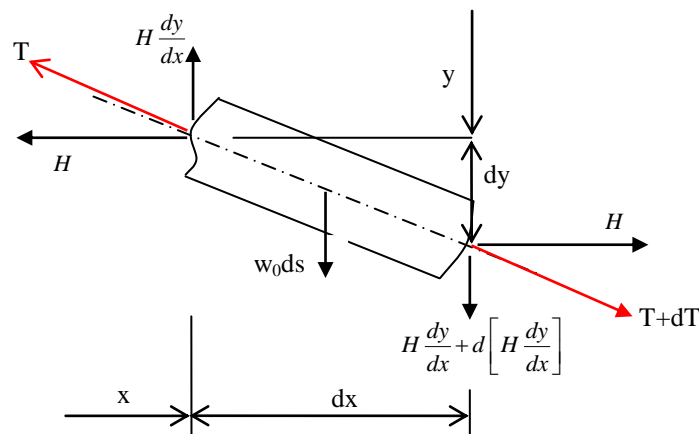


Figure 2-3 : Equilibre vertical, selon y

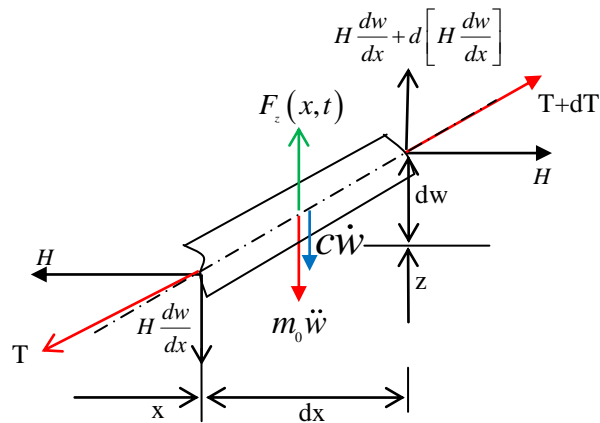


Figure 2-4 : Equilibre transversal, selon z

2-3-1 Notions de la méthode de séparation de variables

Afin de résoudre l'équation générale de mouvement (équ.2-5) et ainsi déterminer le déplacement transversal $w(x,t)$ en n'importe quel point du câble, nous allons considérer la méthode de séparation de variable [8] qui nous permet d'écrire:

$$w(x,t) = \tilde{w}(x) \cdot f(t) \quad (2-6)$$

où $\tilde{w}(x)$ est une fonction dite de forme qui ne dépend que de la coordonnée spatiale (x) et $f(t)$ une fonction dite d'amplitude qui ne dépendant que de la variable du temps (t).

Pour que la fonction de forme puisse être la solution du problème, elle doit vérifier non seulement l'équation différentielle d'équilibre (équ.2-5) mais aussi les deux conditions aux limites aux extrémités du câble, c'est-à-dire:

$$\tilde{w}(x=0) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{w}(x=\ell) = 0 \quad (2-7)$$

La fonction trigonométrique suivante peut être ainsi la solution du problème puisqu'elle satisfait les conditions (2-7):

$$\tilde{w}(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (2-8)$$

2-3-2 Transformation de l'équation de mouvement - expressions générales

Admettons qu'en un point quelconque du câble d'abscisse x , au temps t , le déplacement transversal $w(x,t)$ donné est formé par la somme de n contributions modales ; ce qui nous permet ainsi d'écrire l'expression suivante en utilisant la notion de la méthode de séparation de variables au niveau du chaque mode:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot \tilde{w}_n(x) \quad (2-9)$$

où $\tilde{w}_n(x)$ et $f_n(t)$ représentent respectivement la forme propre et l'amplitude dans un mode donné de vibration (n).

En choisissant une allure trigonométrique pour la fonction de la forme propre, celle-ci s'écrira par analogie à la relation (2-8) dans le mode n :

$$\tilde{w}_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (2-10)$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle du mouvement (2-5) est de la forme suivante:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t) \quad (2-11)$$

En substituant cette dernière relation dans l'équation (2-5), cela va nous permettre de transformer l'équation aux dérivées partielles en une équation différentielle ordinaire. Nous allons ainsi obtenir successivement:

$$\dot{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \dot{f}_n(t)$$

$$\ddot{w}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \ddot{f}_n(t)$$

$$w''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t)$$

$$m_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \ddot{f}_n(t) + H \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot f_n(t) + c \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \dot{f}_n(t) = F_z(x, t)$$

En multipliant cette dernière expression par $\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ et en intégrant ensuite par rapport à la variable x de 0 à ℓ , nous obtenons :

$$m_0 \cdot \ddot{f}_n(t) + H \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 f_n(t) + c \dot{f}_n(t) = \frac{2}{\ell} Q_n(t) \quad (2-12)$$

où:

$$Q_n(t) = \int_0^{\ell} F_z(x, t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) dx \quad (2-13)$$

2-3-3 Cas d'un système non amorti

Quant l'amortissement est nul ($c=0$), l'équation (2-11) se réduit à:

$$m_0 \cdot \ddot{f}_n(t) + k_n \cdot f_n(t) = \frac{2}{\ell} Q_n(t) \quad (2-14)$$

avec:

$$k_n = m_0 \omega_n^2 \quad (2-15)$$

$$\omega_n = \frac{n \cdot \pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m_0}} \quad (2-16)$$

Les paramètres ω_n et k_n désignent respectivement la pulsation et la force de rappel des câbles dans le mode vibration n.

La solution générale de l'équation différentielle (2-14) correspondant à un système non amorti pour une excitation appliquée quelconque est donnée par la somme de la solution homogène et de la solution particulière, et elle est de la forme :

$$f_n(t) = A_n \cos(\omega_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) + \frac{2}{m_0 \cdot \ell \cdot \omega_n} \cdot \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2-17)$$

Par conséquent, la solution complète de l'équation de mouvement transversal (2-5), dans le cas d'un système non amorti, s'obtient en substituant l'expression (2-17) dans la relation (2-11), soit:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m_0 \cdot \ell \cdot \omega_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \quad (2-18)$$

où le dernier terme est l'intégrale de Duhamel et les paramètres A_n et B_n seront définis à l'aide des conditions initiales du câble.

2-4 Réponse sous charges ponctuelles

Dans cette section, nous allons développer la réponse du câble en considérant deux types de charges ponctuelles à savoir i) une charge ponctuelle d'amplitude constante, P ii) une charge ponctuelle harmonique cosinusoidale de la forme $P \cos(\Omega t)$.

2-4-1 Réponse à une charge ponctuelle d'amplitude constante, P

Une charge ponctuelle P peut être considérée comme un cas particulier d'une charge répartie (fig.2-5), soit:

$$P = F_z(x, t) dx = 2F_z(x, t) \varepsilon \quad (2-19)$$

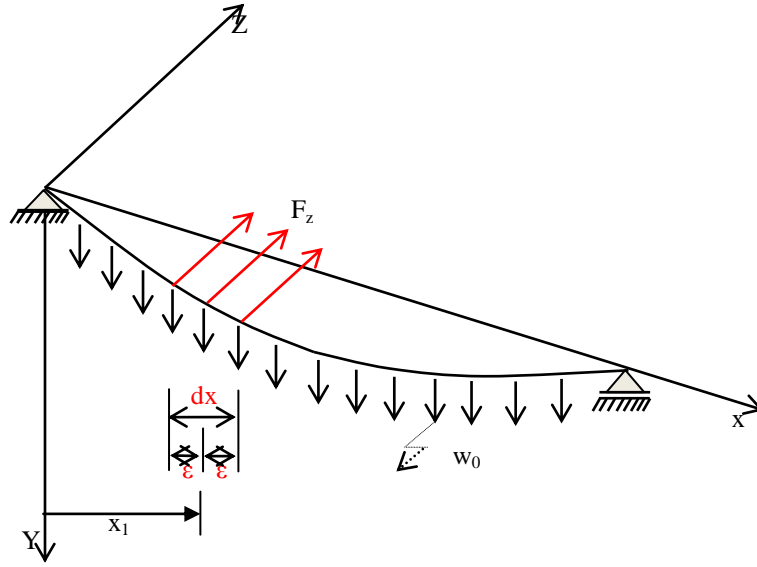


Figure 2-5: Câble sous une charge ponctuelle

Commençons tout d'abord par l'évaluation du terme de charge $Q_n(t)$ comme défini à l'expression (2-12) ; ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}
 Q_n(t) &= \int_0^l F_z(x,t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = F_z(x,t) \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = F_z(x,t) \frac{-l}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} \\
 &= F_z(x,t) \frac{-l}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi(x_1+\epsilon)}{l}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(x_1-\epsilon)}{l}\right) \right] \\
 &= F_z(x,t) \frac{-l}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi\epsilon}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\epsilon}{l}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \cos\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \cos\left(\frac{-n\pi\epsilon}{l}\right) + \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{-n\pi\epsilon}{l}\right) \right]
 \end{aligned}$$

En sachant que $\cos\left(\frac{-n\pi\epsilon}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi\epsilon}{l}\right)$ et $\sin\left(\frac{-n\pi\epsilon}{l}\right) = -\sin\left(\frac{n\pi\epsilon}{l}\right)$, l'expression précédente devient :

$$Q_n(t) = F_z(x,t) \frac{-l}{n\pi} \left[-2 \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\epsilon}{l}\right) \right]$$

Comme le terme $\frac{n\pi\varepsilon}{\ell} \ll 1$, on peut écrire : $\sin\left(\frac{n\pi\varepsilon}{\ell}\right) = \frac{n\pi\varepsilon}{\ell}$, l'expression de $Q_n(t)$

devient finalement:

$$Q_n(t) = F_z(x, t) \frac{2\ell}{n\pi} \frac{n\pi\varepsilon}{\ell} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) = P \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) \quad (2-20)$$

où P est l'amplitude de la charge ponctuelle appliquée à une distance x_1 à partir de l'appui gauche.

Evaluons maintenant l'intégrale de Duhamel comme définie à équation (2-18) en tenant compte de l'expression (2-20) ; celle-ci donne:

$$I = \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau = P \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) \int_0^t \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

$$I = \frac{P}{\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) (1 - \cos \omega_n t) \quad \forall n \quad (2-21)$$

En substituant cette dernière dans la relation (2-18), nous aurons :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{\ell \cdot k_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) (1 - \cos \omega_n t) \quad \forall n \quad (2-22)$$

Dans le cas d'un système initialement au repos c'est-à-dire pour lequel $w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0$, on montre aisément que les constantes A_n et B_n sont nulles. La réponse du câble sous la charge ponctuelle P appliquée à une distance x_1 de l'appui gauche, donnée par la relation (2-21) devient par conséquent :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{\ell \cdot k_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) (1 - \cos \omega_n t) \quad \forall n \quad (2-23a)$$

Lorsque la charge P est particulièrement appliquée au centre du câble ($x_1 = \ell/2$), en tenant compte des relations (2-15) et (2-16), l'expression (2-23) pour $x = \ell/2$ (à mi-travée) conduit à l'expression suivante formulée initialement par Volterra [9]:

$$w\left(\frac{\ell}{2}, t\right) = \frac{2P\ell}{\pi^2 H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos \omega_n t) \quad n : 1,3,5,\dots, (\text{impairs}) \quad (2-23b)$$

puisque $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = 1$ si n est impair et $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = 0$ si n est pair. Si nous désignons par

$\beta^2 = \frac{H}{m_0}$, alors les valeurs maximales que prend la fonction $w\left(\frac{\ell}{2}, t\right)$ vont se produire à des

instants successifs $t = \frac{\ell}{\beta}; \frac{3\ell}{\beta}; \frac{5\ell}{\beta}; \dots$ à partir desquels nous tirons:

$$\max\left(w\left(\frac{\ell}{2}, t\right)\right) = \frac{4P\ell}{\pi^2 H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{P\ell}{2H} \quad (a)$$

puisque $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Une mesure commode de l'influence du caractère dynamique de la charge appliquée est fournie par le facteur de réponse R_t qui est par définition le rapport de la réponse dynamique $w(x,t)$ à un instant t (éq. 2-23a ou 2-23b) et du déplacement w_{\max}^{stat} qui résulterait d'une application statique de la même sollicitation ; en d'autres termes, la réponse dynamique est égale au produit du gain statique (w_{\max}^{stat}) par le facteur de réponse R_t . C'est le facteur variant dans la terminologie anglo-saxon. Par exemple à $x=\ell/2$, on écrit:

$$R_t = \frac{w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right)}{w_{\max}^{stat}} \quad (b)$$

Déterminons par suite le déplacement transversal maximal noté w_{\max}^{stat} du câble sous l'action d'une charge ponctuelle P au milieu du câble lorsque celle-ci est appliquée statiquement i.e de la valeur 0 jusqu'à sa valeur finale P sans générer aucun effet dynamique notoire. De ce fait, considérons l'équilibre statique sous la charge P du câble comme montré dans la figure 2-6. Nous obtenons d'une part à partir de la condition d'équilibre selon z ($\sum F_z = 0$) :

$$2H \tan \alpha = P \quad (c)$$

mais puisque d'autre part :

$$\tan \alpha = \frac{w_{\max}}{\frac{\ell}{2}} \quad (\text{d})$$

Il s'en suit :

$$w_{\max}^{\text{stat}} = \frac{P\ell}{4H} \quad (\text{e})$$

Par suite, en tenant compte de cette dernière relation, le facteur de réponse est donné par la fonction suivante :

$$R_t = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos \omega_n t) \quad (\text{f})$$

où $\max R_t$ est égal à 2 en sachant que $0 \leq (1 - \cos \omega_n t) \leq 2$ et $\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$. En comparant les deux relations (a) et (f), nous déduisons:

$$\max(w(x = \frac{\ell}{2}, t)) = 2 w_{\max}^{\text{stat}} \quad (\text{g})$$

Par conséquent, la réponse dynamique à un échelon a une maximale qui est le double du gain statique. Nous concluons de ce fait qu'une charge ponctuelle d'intensité P appliquée brusquement au milieu du câble produit un déplacement transversal égal à deux fois celui qu'aurait produit une charge ayant la même intensité P mais appliquée statique autrement dit d'une charge qui augmente très lentement depuis la valeur 0 jusqu'à sa valeur finale P . Cette observation est également observée dans les systèmes élémentaires conservatifs ou non amortis, ce qui explique le facteur de sécurité égal à deux traditionnellement utilisé dans le dimensionnement des structures soumises à des charges dynamiques [9].

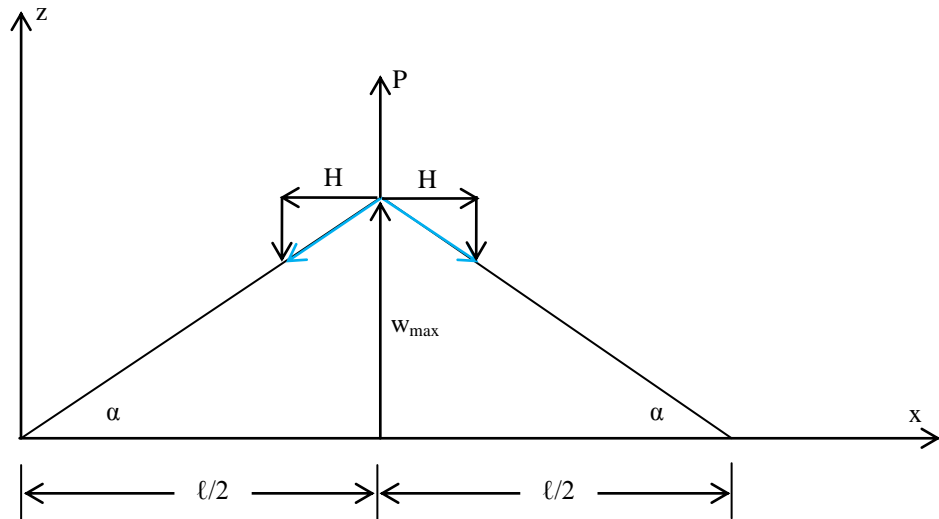


Fig. 2-6 Equilibre sous charge statique

2-4-3 Réponse à une charge ponctuelle harmonique, type $P \cos(\Omega t)$

Soit une charge transversale ponctuelle P harmonique cosinusoidale pure de la forme $P \cos(\Omega t)$; la fonction de force s'écrit:

$$F_z(x, t).dx = P \cos(\Omega t) \quad (2-24)$$

Après évaluation du terme de charge $Q_n(t)$ défini à l'équation (2-12), nous aurons:

$$Q_n(t) = P \cos(\Omega t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \quad \forall n \quad (2-25)$$

où P est l'amplitude de la charge ponctuelle harmonique appliquée à une distance x_1 de l'appui gauche. Evaluons maintenant l'intégrale de Duhamel définie à la relation (2-17) en tenant compte de l'expression (2-24) ; cela nous conduira à:

$$I = \int_0^t Q_n(\tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau = P \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \int_0^t \cos(\Omega \tau) \cdot \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

$$I = P \omega_n \sin\left(\frac{n\pi x_1}{l}\right) \frac{(\cos \Omega t - \cos \omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad \forall n \quad (2-26)$$

En substituant cette dernière dans l'équation (2-18), nous aurons :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{m_0 \cdot \ell} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) \frac{(\cos \Omega t - \cos \omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad \forall n \quad (2-27)$$

L'introduction des conditions initiales $w(x,0) = \dot{w}(x,0) = 0$ donne $A_n = B_n = 0$. Par conséquent, la réponse du câble sous l'action d'une charge ponctuelle harmonique de type $P \cos(\Omega t)$, appliquée à une distance x_1 de l'appui gauche, est donnée par :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{m_0 \cdot \ell} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) \frac{(\cos \Omega t - \cos \omega_n t)}{\omega_n^2 - \Omega^2} \quad \forall n \quad (2-28)$$

La réponse dynamique est parfois plus commode de l'exprimer en fonction du rapport des fréquences i.e le rapport de la fréquence du chargement harmonique appliqué et de la fréquence propre d'oscillation libre au mode n, soit :

$$\gamma_n = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (2-29)$$

Si nous désignons de plus par $k_n = m_0 \omega_n^2$, la réponse du câble donnée par la relation (2-28) devient alors :

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{\ell k_n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x_1}{\ell}\right) \cdot \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega_n t) \quad \forall n \quad (2-30)$$

Particulièrement, au centre de la travée soit à $x = \ell/2$, l'expression (2-30) peut s'écrire:

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2P}{\ell k_n} \cdot \frac{1}{(1 - \gamma_n^2)} \cdot (\cos \Omega t - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-31)$$

C'est puisque $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = 1$ si n est impair et $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = 0$ si n est pair. En tenant compte de la relation (2-16), l'expression (2-31) peut encore s'écrire explicitement:

$$w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right) = \frac{P\ell}{4H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{(1-\gamma_n^2)} \cdot (\cos \Omega t - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-32)$$

où nous avons :

- $\frac{P\ell}{4H} = w_{\max}^{stat}$ étant le maximum du déplacement statique comme déjà défini par la relation (e)

de la section 2-4-1; c'est le déplacement qui serait produit par la charge P appliquée statiquement, la charge est appliquée très lentement de la valeur 0 jusqu'à sa valeur finale P sans générer aucune accélération sensible.

- $\frac{1}{1-\gamma_n^2} = D_n$ est le facteur d'amplification représentant l'effet d'amplification dynamique de

la charge harmonique;

- $\cos \Omega t$ est la composante permanente de la réponse ayant la fréquence de la charge appliquée ; elle représente la réponse en oscillation permanente, directement liée à la charge appliquée ;

- $\cos \omega_n t$ est la composante de la réponse transitoire ayant la fréquence propre du câble; elle représente l'effet d'oscillations libres qui dépend des conditions initiales.

Par suite le facteur de réponse R_t ainsi défini dans la relation (f) de la section précédente i.e le rapport de la réponse dynamique et du déplacement qui serait produit par l'application statique de la même charge harmonique cosinusoidale est donné par la relation suivante :

$$R_t = \frac{w\left(x = \frac{\ell}{2}, t\right)}{w_{\max}^{stat}} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 n^2} \cdot \frac{1}{(1-\gamma_n^2)} \cdot (\cos \Omega t - \cos \omega_n t) \quad n=1,3,5,\dots \quad (2-33)$$

A travers cette relation, nous pressentons le pic de la réponse lorsque la valeur du rapport des fréquences γ_n tend vers 1 ou à travers la relation générale de la réponse (2-28) lorsque la fréquence Ω du chargement harmonique s'approche de la fréquence propre de vibration ω_n , autrement dit, les déplacements dans le câble deviennent beaucoup dangereusement plus importants. En approchant encore davantage les deux fréquences, les déplacements seront encore plus grands qui théoriquement vont tendre vers l'infini. Dans ce cas, il se produira le phénomène dit de résonance [9]. Cela explique pourquoi par exemple il est interdit à une

troupe (militaire) entière de marcher au pas cadencé (qui favorise une fréquence précise) pour éviter la destruction éventuelle d'un pont suspendu qui peut se produire si la fréquence du pas se trouve être celle de la résonance de l'ouvrage. Le pont est un système continu mais en première approximation il est doté d'un mouvement propre global associé à sa masse et son élasticité à l'image de l'exemple du mouvement transversal d'une poutre encastrée à ses deux extrémités. L'exemple le plus connu de ce phénomène est celui de l'effondrement du pont suspendu de Takoma Narrows en 1940 dans l'état de Washington aux USA (fig. 2-7, [10]). En toute première approximation, la masse et le moment d'inertie de l'ouvrage sont ceux associés au tablier, l'élasticité étant donnée ici par les câbles. Le pont était entré en résonance par l'effet des forces dues au vent sur le profil du tablier; le mouvement étant forcé. Une fois que le pont a commencé à se tordre (en mode de torsion) avec une fréquence environ égale à 1.4 HZ, l'amplitude a augmenté considérablement, conduisant à la destruction inévitable de l'ouvrage. Une solution au problème est d'optimiser le profil du tablier pour que l'effet du vent ne se traduise pas par une force qui entretient le mouvement oscillatoire.

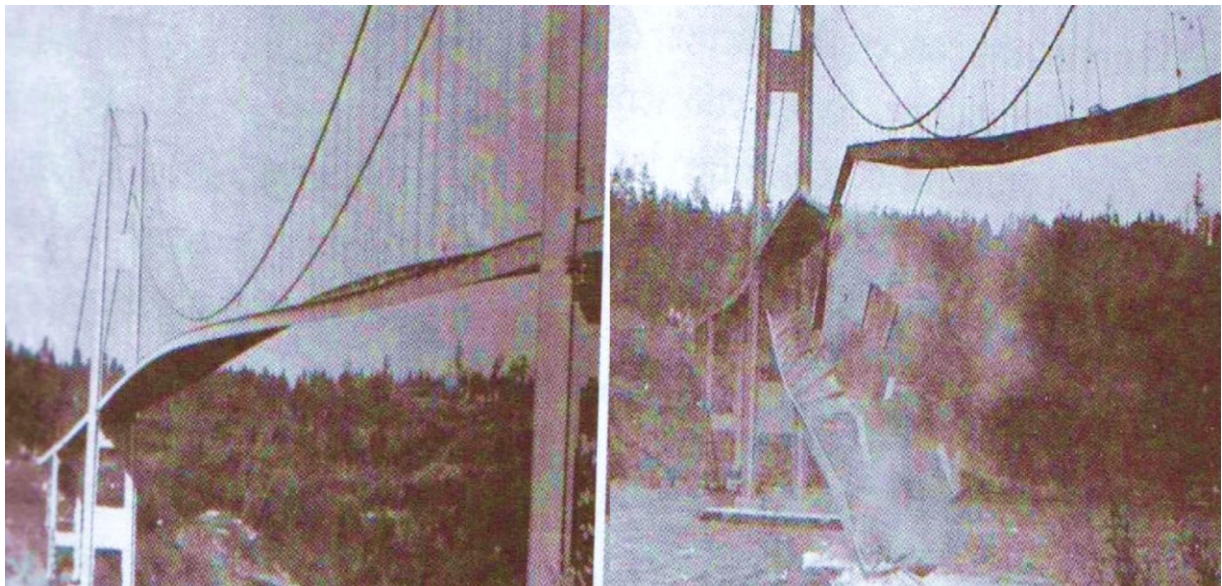


Figure 2-7: Destruction du pont de Takoma Narrows [10]

2-5 Evaluation des pulsations propres

Soit sans le second membre, l'équation différentielle de mouvement (2-4b) devient:

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} \quad (2-34)$$

Cherchons la solution en posant $w(x,t) = \tilde{w}(x)e^{i\omega t}$. Sachant que $i^2 = -1$, l'équation peut se mettre sous la forme :

$$H \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + m_0 \omega^2 \tilde{w} = 0 \quad (2-35)$$

où ω représente la fréquence circulaire naturelle de vibration. La solution générale de l'équation différentielle (2-35) est de la forme [4]:

$$\tilde{w} = A \sin \beta x + B \cos \beta x \quad \text{où } \beta^2 = \frac{m_0 \omega^2}{H}; \quad A \text{ et } B \text{ étant des constantes.}$$

A l'aide des conditions de frontière soit $\tilde{w}(x=0) = 0 = \tilde{w}(x=\ell)$, le coefficient B étant alors égal à zéro, il est possible de trouver les fréquences naturelles de vibration données par :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{H}{m_0}} \quad n=1,2,3 \dots \quad (2-36)$$

où $n=1,2,3 \dots$ signifie respectivement le premier, deuxième, troisième mode etc.. de vibration.

Les modes sont données par la relation :

$$\tilde{w}_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad n=1,2,3 \dots \quad (2-37)$$

La fréquence du premier mode transversal horizontal (i.e $n=1$) constitue la plus faible fréquence naturelle pour un quelconque câble ayant une forme parabolique.

CHAPITRE 3

EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES ET ANALYSES

3-1 Généralités

Nous allons illustrer, dans le cadre de ce chapitre, la méthode analytique de calcul exposée au chapitre précédent, par des applications numériques portant sur l'analyse d'un câble de suspension pouvant être le cas de celui d'une cabine téléphérique ou de celui d'un pont suspendu lors de sa phase de réalisation. Les charges appliquées sont ponctuelles et agissent transversalement ou horizontalement soit perpendiculairement au plan général de l'ouvrage. Les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique et seront comparés à ceux obtenus par le code ANSYS.

3-2 Résultats numériques et validation

Afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul, nous proposons d'analyser un exemple d'un câble d'une structure suspendue rapportée en détail dans les références [4,5] dont les résultats nous serviront principalement d'étalon de référence théorique. L'exemple porte sur le câble principal du pont suspendu de Bosphore, en Turquie, comme indiqué sur la figure 3-1 qui illustre l'emplacement du premier élément du tablier du pont lors de la phase de réalisation de l'ouvrage. Les propriétés géométrique et mécanique du câble dans sa position libre suspendue sont: $\ell=915$ m ; $w = 4.4$ kN/m ; $E_C = 180 \times 10^6$ kN/m² ; $S_C = 0.161$ m² ; f/ℓ (géométrie initiale) = 1/12.

Il s'agit d'analyser la réponse dynamique de l'ouvrage en envisageant deux types de charges ponctuelles transversales à savoir i) une charge ponctuelle d'amplitude constante ou échelon, P ii) une charge ponctuelle harmonique cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$. Les charges sont considérées dans chacun des cas appliquées au centre de la travée.

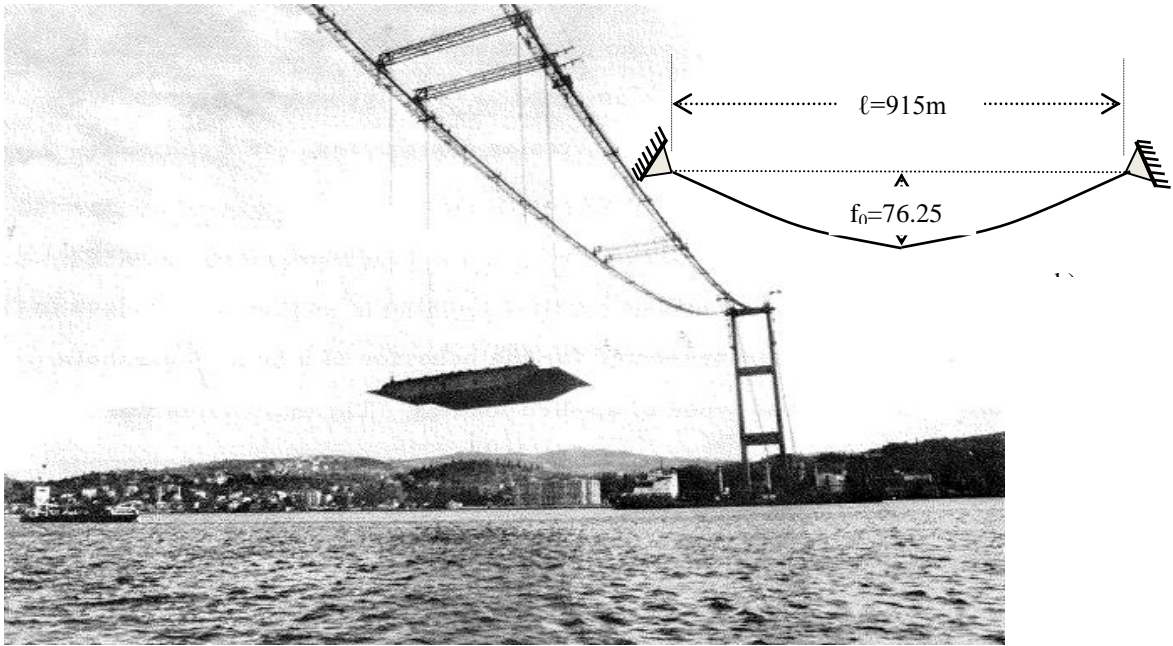


Figure 3-1: Emplacement du premier élément du tablier du pont de Bosphore [5]

3-2-1 Sous l'action d'une charge ponctuelle d'amplitude constante P

Les résultats des déplacements obtenus à l'aide de la relation (2-23b) sont récapitulés dans le tableau 3-1 où nous calculons en fonction du temps les déplacements horizontaux à mi-travée ($x=l/2$) du câble; l'unité des déplacements est en m. Signalons que l'erreur relative (e), exprimée en pourcentage, est calculée en prenant comme référence la solution dérivée par la méthode analytique. Une valeur négative de l'erreur éventuelle signifie donc que la valeur calculée pour le modèle discrétisé par éléments finis (ANSYS) est inférieure à celle à laquelle on la compare.

Tableau 3-1 : Sous charge ponctuelle d'amplitude constante, P=10 kN

t (s)	n=1	n=3	n=5	n=7	n=9	$\sum_{n=1,2,3,4,5} w_{s,n}(x = \frac{L}{2}, t)$	ANSYS	erreur relative (%)
5	0.433	0.002	0.023	0.005	0.001	0.464	0.474	2
10	0.511	0.006	0.006	0.012	0.005	0.541	0.599	6
20	0.341	0.0227	0.019	0.002	0.007	0.392	0.409	4
30	0.056	0.043	0.025	0.009	0.001	0.134	0.152	14
40	0.606	0.061	0.017	0.006	0.002	0.692	0.719	4
50	0.160	0.068	0.005	0.004	0.007	0.244	0.272	11
60	0.204	0.063	0.000	0.011	0.004	0.282	0.273	3
90	0.390	0.009	0.024	0.000	0.006	0.430	0.405	6
120	0.545	0.018	0.000	0.007	0.008	0.578	0.623	8

Aux figures 3-2 et 3-4, nous illustrons les résultats obtenus par le code ANSYS comparés à ceux du tableau 3-1 donnés par la méthode de calcul analytique. Le maillage utilisé par le code ANSYS est représenté dans la figure 3-3 où la valeur du pas de temps utilisé est de 0.05 s. Nous remarquons une relative concordance des résultats dont l'erreur relative maximale enregistrée à $t = 30$ s est de l'ordre de 14 % ; ce qui démontre néanmoins la fiabilité de la méthode de la méthode analytique de calcul ainsi proposée. Cette erreur jugée d'emblée relativement non négligeable pourra être attribuée non pas plutôt à la méthode analytique elle-même mais à d'autres facteurs liés au choix de certains paramètres utilisés lors des calculs. A cet effet, cela nécessite sans aucun doute, afin d'améliorer la précision des calculs, il faut prendre en considération i) un nombre élevé de termes (n) dans la série trigonométrique lors de l'application la relation (2-23b) ii) diminuer la valeur du pas de temps (Δt) utilisé lors des simulations comme le montre les résultats donnés dans la figure 3-5 qui démontrent clairement l'influence de la valeur choisie pour le pas de temps dans ANSYS ; le nœud 21 indiqué sur la figure correspond au centre du câble iii) augmenter la finesse du maillage ; les 20 éléments utilisés ne sont sans aucun doute pas suffisants vue l'intensité élevée de la charge ponctuelle considérée ($P=10$ kN).

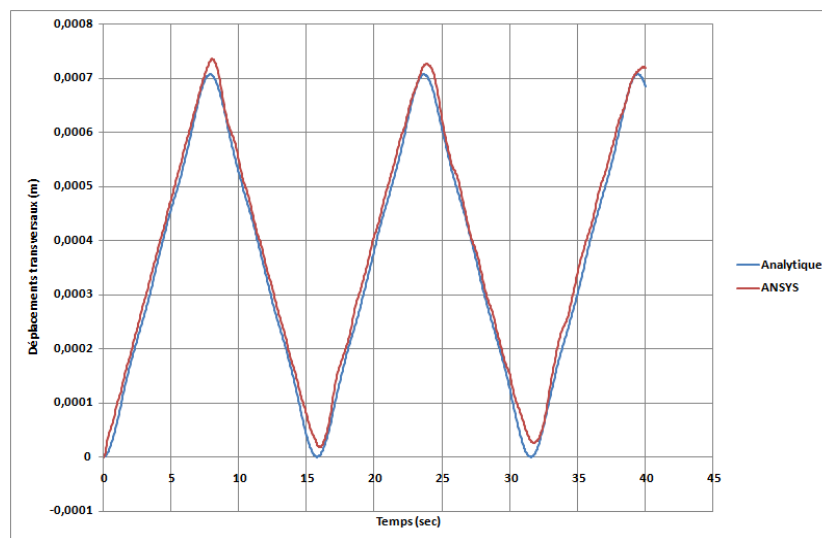


Figure 3-2: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble;

$$P=10 \text{ kN}, x_1 = \ell/2$$

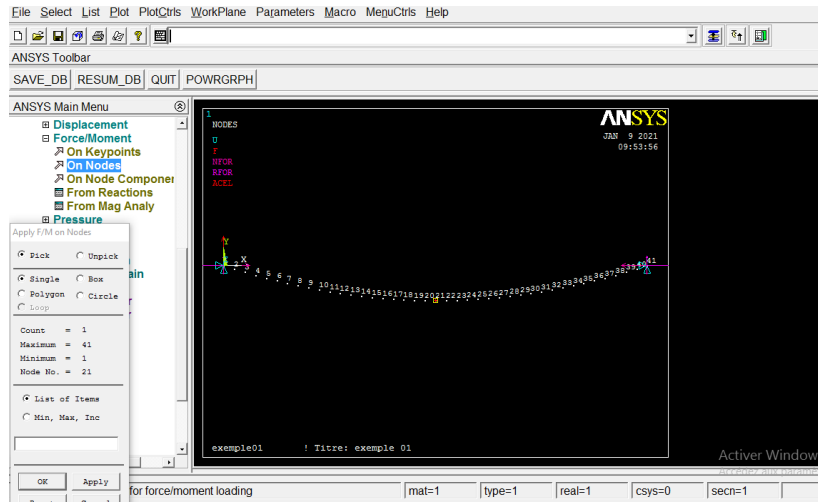


Figure 3-3 : Maillage utilisé lors de la simulation avec ANSYS

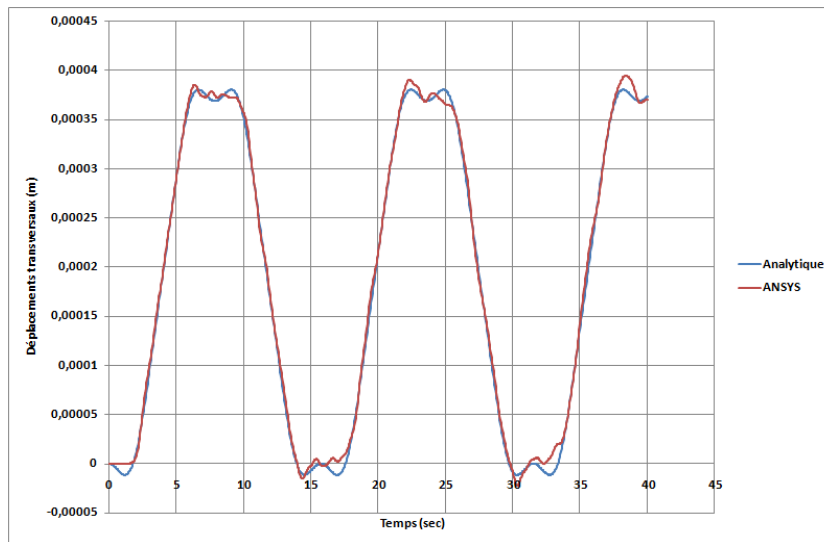


Figure 3-4: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal au centre du câble; $P=10 \text{ kN}$, $x_1 = \ell/4$

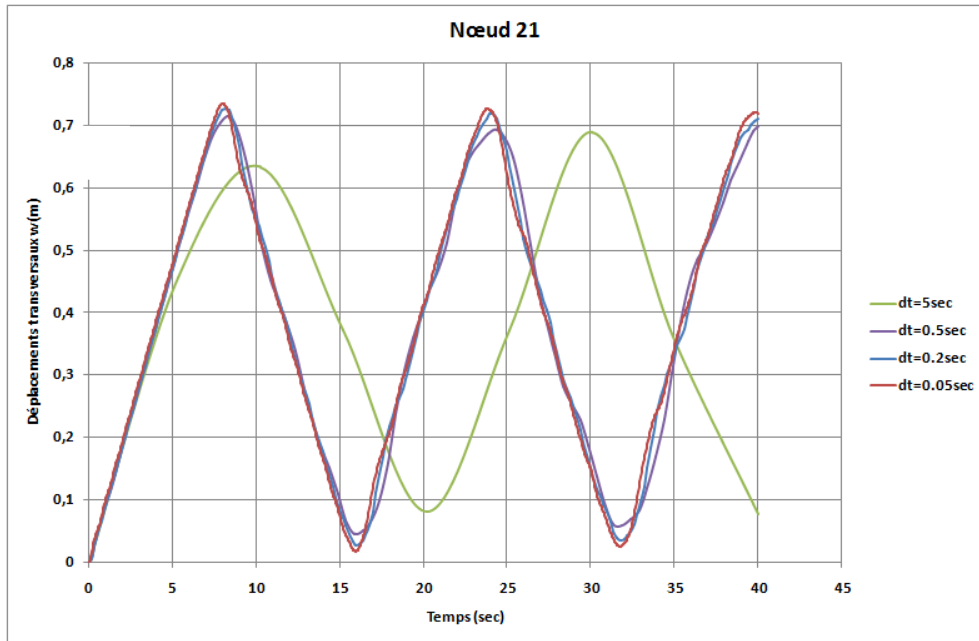


Figure 3-5: Effet du pas de temps sur la précision des résultats dans la simulation avec ANSYS

3-2-2 Sous l'action charge ponctuelle harmonique cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$

Les résultats des déplacements obtenus à l'aide de la relation (2-32) sont récapitulés explicitement au tableau 3-2 où sont calculés en fonction du temps les déplacements horizontaux à mi-travée ($x=\ell/2$) du câble; l'unité des déplacements étant en m. La charge appliquée est ponctuelle cosinusoidale de la forme $P \cos(\Omega t)$ appliquée au milieu du câble ($x = \ell/2$). L'amplitude maximale P et la fréquence Ω ainsi que le pas de temps dans la simulation avec ANSYS sont : $P = 10 \text{ kN}$; $\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$ et $\Delta t = 0.05 \text{ s}$.

Tableau 3-2 : Sous charge ponctuelle $P \cos(\Omega t)$, $P=10 \text{ kN}$, $\Omega = 0.2 \text{ rad/s}$, $x = x_1 = \ell/2$

t (s)	n=1	n=3	n=5	$\sum_{n=1,2,3,4,5} w_{*,n}(x = \frac{L}{2}, t)$	ANSYS	erreur relative (%)
5	0.390	-0.014	0.018	0.392	0.398	2
10	0.102	-0.045	-0.011	0.048	0.043	1
20	-0.022	-0.035	-0.001	-0.258	-0.265	3
30	0.059	0.043	0.024	0.126	0.153	3
40	0.340	0.022	0.003	0.366	0.374	2

Aux figures 3-6 et 3-7, nous représentons graphiquement à $x = \ell/2$ et $x = \ell/4$, les résultats obtenus par la relation (2-32) en confrontation à ceux donnés par le code ANSYS ; A titre comparatif, les valeurs maximale et minimale des déplacements obtenus au centre et au quart de la travée sont rapportées dans le tableau 3-3. Le maillage utilisé par le code ANSYS est représenté dans la figure 3-3 où la valeur du pas de temps utilisé est de 0.05 s. En outre, nous illustrons l'influence du pas de temps dans la figure 3-8.

Nous remarquons une quasi-parfaite des résultats dont l'erreur relative maximale enregistrée n'excède guère 3% démontrant par conséquent une nouvelle fois la fiabilité de la méthode analytique sous l'action des charges harmoniques.

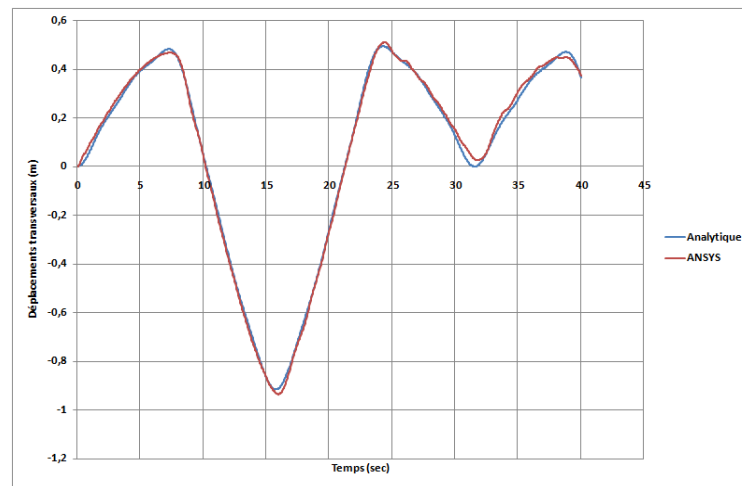


Figure 3-6: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal sous une charge ponctuelle cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$ avec $x = \ell/2 = x_1$

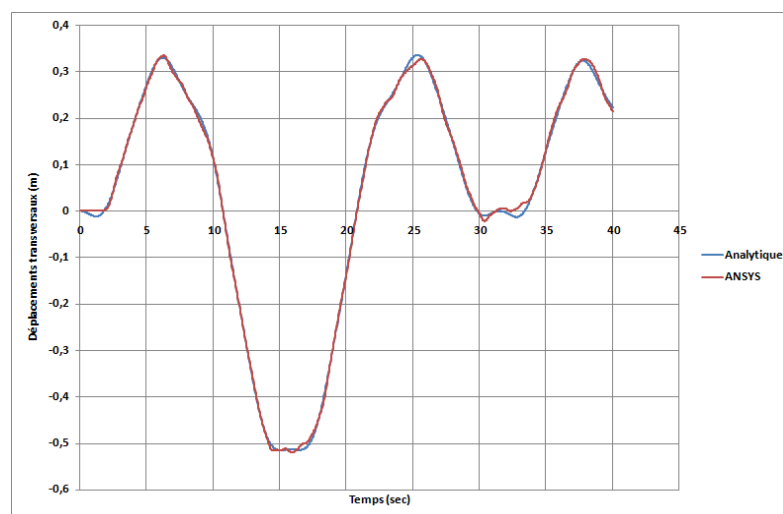


Figure 3-7: Evolution en fonction du temps du déplacement transversal sous une charge ponctuelle cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$ avec $x = \ell/2$ et $x_1 = \ell/4$

Tableau 3-3 : Valeurs maximale et minimale des déplacements sous la charge cosinusoidale

		Analytique (m)	ANSYS (m)	Erreur relative (%)
Nœud 21	Maximal	0.28	0.27	1.9
	Minimal	-0.48	-0.46	1.4
Nœud 11	Maximal	0.20	0.20	0.5
	Minimal	-0.35	-0.34	1.2

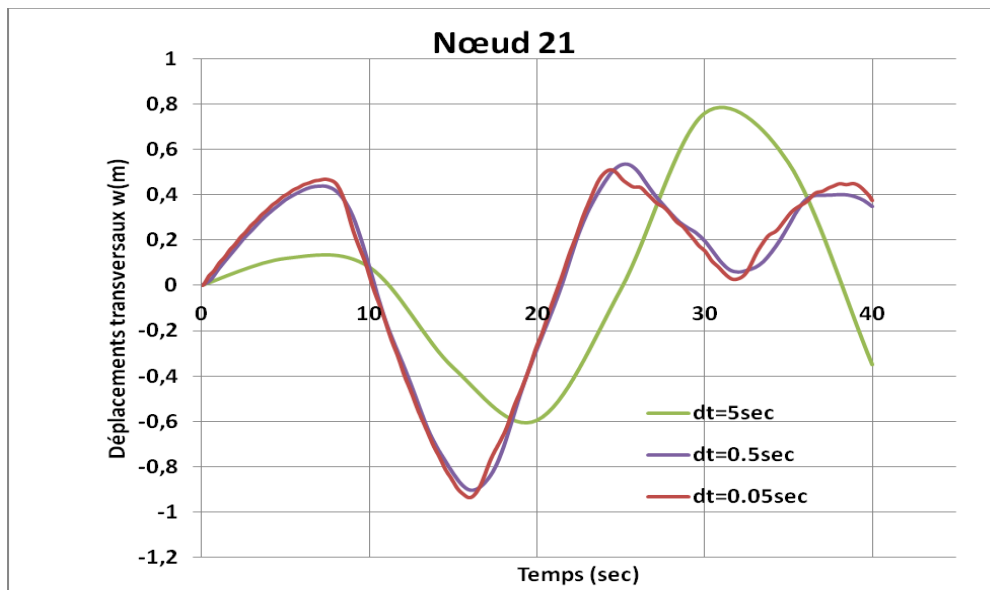


Figure 3-8: Influence du pas de temps sur la précision des résultats dans la simulation avec ANSYS ; sous la charge ponctuelle cosinusoidale, $P \cos(\Omega t)$ avec $x = \ell/2 = x_1$

CHAPITRE 4

CONCLUSIONS GENERALES

4-1 Rétrospective

Le but principal de ce travail consistait essentiellement de mettre au point une méthode de calcul simple, mais suffisamment précise et fiable, permettant d'aborder le calcul dynamique des câbles suspendus, ayant une forme parabolique, soumis à l'action des charges harmoniques transversales ponctuelles. De tels câbles peuvent supporter des cabines de transport publiques aériens comme dans le cas de téléphérique ou éventuellement un tablier léger supposé dépourvu d'aucune rigidité propre appréciable pouvant dans le cas pratique être l'exemple d'une passerelle piétonnière ou tout simplement dans le cas d'un pont suspendu en phase de réalisation. Les charges peut être occasionnées accidentellement par exemple par les effets de chocs entre cabines téléphériques sous l'action d'une rafale de vent violente ou en cas d'incident dans les lignes de transport d'énergie électrique à la suite des forces de Laplace qui en résultent des courants de court-circuit.

Les fondements théoriques de la méthode de calcul ont été présentés d'une manière succincte où la théorie linéaire en régime vibratoire forcé a été développée. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte est obtenue en utilisant la deuxième loi de Newton ou le principe fondamental de la dynamique qui selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur un élément de câble. La résolution de l'équation différentielle ainsi obtenue a été effectuée en utilisant la méthode de séparation de variables qui consiste d'écrire la réponse en un produit de fonctions spatiale et temporelles. En moyennant les conditions aux limites du câble, l'expression du déplacement transversal ou horizontal est finalement obtenue en développant l'intégrale de Duhamel selon la nature de la charge dynamique considérée.

Les hypothèses admises qui délimitent les conditions de validité de la méthode de calcul sont principalement les suivantes:

- Câble parfaitement flexible qui revient à énoncer en langage structural que, tout au long d'un câble en équilibre, le moment fléchissant est nul;
- Câbles relativement peu profonds correspondant à un rapport flèche/travée ne dépassant pas l'ordre de 1/10 afin d'assimiler les chaînettes fortement aplaties, dans l'état initial, à des paraboles de 2^{ème} degrés;
- Lors du réglage initial, le câble porteur reprend la totalité des charges uniformément réparties dues au poids propre de l'ouvrage y compris le poids des autres éléments accessoires, engendrant une force de pré-tension constante dans le câble.
- Surtensions négligeables dans le cas des modes propres antisymétriques.

La méthode a été ensuite appliquée d'abord à différents aspects de l'analyse dynamique d'un câble supportant une charge ponctuelle transversale comme dans le cas d'un tablier de pont suspendu lors de sa phase de réalisation ou d'une cabine téléphérique. La réponse dynamique de l'ouvrage a été évaluée selon que la charge est d'amplitude constante ou harmonique. Les résultats sont confrontés avec succès à ceux issus du code ANSYS, fortement connu internationalement, qui est un code essentiellement numérique basé sur la méthode des éléments finis.

4-2 Organisation du travail

Le travail présenté dans ce mémoire a été organisé en 4 chapitres dont ce présent chapitre récapitulant l'ensemble des tâches effectuées et les principaux résultats obtenus suivis par quelques recommandations pour l'amélioration et la poursuite de ce thème de travail.

Le premier chapitre en guise d'introduction a été consacré essentiellement à la nature de la problématique et à la question des structures suspendues ainsi qu'à la description des objectifs fixés. La formulation statique d'un câble pesant et inextensible a été également revue d'une manière succincte suivie d'un exemple d'illustration détaillé ainsi que son implémentation dans le code ANSYS. C'est surtout dans le but de comprendre la philosophie

des méthodes de calcul des câbles de suspension parfois assez laborieuses vu le problème des grands déplacements qui en résultent dans la formulation théorique.

Le deuxième chapitre a trait à la présentation des développements théoriques de base de la méthode de calcul permettant d'analyser la réponse dynamique, en régime forcé, d'un câble précontraint de suspension soumis à l'action de charges extérieures transversales ou horizontales de type localisées ou ponctuelles. L'équation différentielle de mouvement qui en résulte a été obtenue en exploitant le principe fondamental de la dynamique (ou la deuxième loi de Newton) selon lequel la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures qui s'exerce sur un corps solide. Les câbles sont principalement supposés simplement appuyés à leurs extrémités et ancrés solidement à des massifs d'ancrage et dont la géométrie des câbles est de la forme d'une parabole de deuxième degré. La solution de l'équation différentielle résultante est formulée en considérant deux types de charges ponctuelles à savoir une charge ponctuelle d'amplitude constante et une charge ponctuelle harmonique cosinusoidale.

L'avant dernier chapitre a été consacré à l'implémentation numérique et à l'analyse des résultats portant sur les câbles principaux du pont suspendu de Bosphore, en Turquie, lors de la phase de sa réalisation. Les charges sont horizontales ou transversales de nature ponctuelle, soit en d'autres termes appliquées perpendiculairement au plan général du système. En outre, afin de jauger la fiabilité et la précision de la méthode analytique de calcul ainsi établie, les résultats obtenus ont été discutés et comparés à ceux issus du code ANSYS, qui est un outil numérique basé sur la méthode des éléments finis.

4-3 Résultats obtenus

La méthode analytique de calcul ainsi établie, nous permet de procéder aisément à l'analyse du comportement dynamique, en vibration forcée, d'un câble suspendu librement appuyé à ses deux extrémités dont la configuration initiale est de la forme d'une parabole de deuxième degré. Son fondement théorique est simple. Appliquée à un système pouvant être le siège d'une cabine d'un téléphérique ou de pont suspendu lors de sa phase de réalisation, la méthode semble fiable et efficace. La comparaison des résultats obtenus révèle une bonne précision que l'on peut obtenir avec la modélisation numérique basée sur le principe de discrétisation par éléments finis où l'erreur n'excède guère en moyenne 11%. Cette erreur

pourra être imputée non pas plutôt à la méthode analytique elle-même mais à d'autres facteurs liés au choix de certains paramètres utilisés dans les calculs à l'instar du nombre de termes pris en considération dans la série trigonométrique ou à la valeur du pas de temps utilisé lors des simulations avec ANSYS.

4-4 Recommandations futures

Ce qu'on pourrait enfin suggérer comme études futures pour l'amélioration de ce thème de travail sont les suivantes :

- Etendre et raffiner la méthode de calcul en régime dynamique forcé sous charges vibratoires horizontales en considérant les dénivellations d'appuis et généraliser la méthode à la présence de plusieurs appuis.

- Entreprendre une analyse paramétrique afin de montrer l'effet de certains paramètres sur la stabilité des cabines téléphériques comme sa cambrure, la pré-tension de réglage, l'intensité et la disposition des charges ainsi que ses pulsations propres.

Références

- [1] Juozpaitis A. and al., 2010. Non linear analysis of suspension bridges with flexible and rigid cables, *Journal of Civil Eng. and Mang.*, 16:1, pp.149-151.
- [2] Desai Y.M. and al., 1989. Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures, *Computers & Structures*, V. 29, N° 6, pp. 1001, 1009.
- [3] Goremikins V. and al., 2013. Simplified method of determination of natural-vibration frequencies of prestressed suspension bridges, *Procedia Engineering*, 57, pp. 343-352.
- [4] Hacherouf Mohamed Cherif, Analyse statique et dynamique d'un câble de suspension d'une cabine téléphérique, Master académique, Option Structure, Département de Génie Civil, Université Mouloud Mammeri, Tizi-ouzou, Mémoire soutenu, le 10-07-2019.
- [5] Irvine, M., 1994. Studies in the statics and dynamics of simple cable systems, PhD Thesis, Dynamics laboratory, California institute of technology, DYNL-108.
- [6] ANSYS® Academic Research, Release 15.0 <http://www.ansys.com/>.
- [7] Illouli S., Sadaoui A. and Khennane A. Application of the theory statically indeterminate structures of infinite degree to a cable-truss footbridge under lateral forces, *Engineering Structures*, 188 (2019), Pages 665-676. <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.03.0063>.
- [8] Voltera E. and Zachmanoglu E.C. Dynamics of vibrations, Charles E. Merrill Books, Inc., Columbus, Ohio, 1965.
- [9] Clough R.W. and Penzien J. Dynamique des structures, Tome 1, Principes fondamentaux, Ed. Pluralis, 1980.
- [10] Hemon P., 2006, Vibrations des structures couplées avec le vent, Editions de l'école polytechnique,