



**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



**UNIVERSITE MOULOUD MAMMERI DE TIZI-OUZOU  
FACULTE DE GENIE DE LA CONSTRUCTION  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

## **THESE DE DOCTORAT ET SCIENCES**

**En Génie Mécanique  
Option : Mécanique Appliquée**

---

### **OPTIMISATION DES CONTRAINTES ET DES FORMES DANS LES PIÈCES MÉCANIQUES DE TRANSMISSION DE MOUVEMENT ANALYSE - EXPÉRIMENTALE ET NUMÉRIQUE**

---

**Présenté par  
TOUAHIR Kamel**

**Soutenue le : 18.01.2021 devant le jury composé de :**

<b>M. Farid Asma</b>	<b>Professeur</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Président</b>
<b>M. Ali Bilek</b>	<b>Professeur</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Directeur de Thèse</b>
<b>M. Hocine Hammoum</b>	<b>Professeur</b>	<b>U.M.M.T.O</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. <i>M<sup>d</sup></i>. Amokrane Bradai</b>	<b>Professeur</b>	<b>U. A. M. Béjaia</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Hamid Aknouche</b>	<b>Professeur</b>	<b>U.M.B.B Boumerdes</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. Abdelhamid Sad-eddine</b>	<b>M.C.A</b>	<b>U. A. M. Béjaia</b>	<b>Examineur</b>

## REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans cette thèse a commencé au LMFC de l'Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou. Il s'est ensuite poursuivi au LOPFA de l'Ecole de Technologie Supérieure, Université du Québec, Canada.

Monsieur le Professeur A. BILEK a assuré la direction de ce travail au LMFC. Qu'il trouve ici toute la gratitude et ma reconnaissance pour sa disponibilité sans limite et ses précieux conseils tout au long de la préparation de cette thèse.

Je voudrai exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur le professeur B. PHILIPPE, Directeur du LOPFA, pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche.

Je voudrai exprimer tous mes remerciements au Professeur F. ASMA, Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, en sa qualité de Président du Jury.

Je remercie également Professeur H. HAMMOUM pour avoir bien voulu accepter de faire partie du jury en qualité de rapporteur avec ses compétences dans le domaine des éléments finis.

Je remercie également Monsieur H. Aknouche professeur à l'université de Boumerdès pour nous avoir honorés de sa présence et avoir accepté d'être examinateur.

Je remercie aussi vivement Monsieur  $M^d$ . Amokrane Bradai professeur de l'université d'A. M. Béjaia pour avoir accepté d'être rapporteur pour ma soutenance de doctorat.

Je remercie aussi vivement Monsieur A. Sad-eddine M.C.A de l'université d'A. M. Béjaia pour avoir accepté d'être rapporteur pour ma soutenance de doctorat.

Monsieur Hamid Anaris, Ingénieur de laboratoire à l'UMMTO/GC, n'a pas négligé d'apporter sa contribution dans la touche finale du manuscrit, je la remercie pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Je n'oublierai pas de remercier également tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé et encouragé tout au long de la préparation de ce mémoire.

Enfin, je me dois d'exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude à mes grands parents, mes parents, mon frère qui n'ont cessé de manifester une grande patience et des encouragements soutenus.

A mes frères et sœurs mes neveux et mes nièces, je leur adresse toutes mes sympathies et mes pensées.

# *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*à toute ma famille, qui m'a été la source d'encouragement et d'assurance  
durant mon séjour à l'université*

*Mes chers parents*

*Mon frère: Amar*

*Tous mes amis (es).*

*Tous mes enseignants (tes) sans oublier les membres du laboratoire  
de mécanique, structures et énergétique.*

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>	<b>3</b>
<b>I.1 LE PROBLÈME DU CONTACT ENTRE SOLIDES.....</b>	<b>3</b>
<b>I.2 QUELQUES TRAVAUX REALISES DANS LE PROBLEME DE CONTACT.....</b>	<b>5</b>
<b>I.3 METHODE D'ANALYSE DES CONTRAINTES</b>	
<b>EN PHOTOELASTICIMETRIE 2D.....</b>	<b>09</b>
<b>I.3.1 Polariscopes par réflexion.....</b>	<b>09</b>
<b>I.3.2 Méthode des vernis craquelant.....</b>	<b>12</b>
<b>I.3.3 Méthodes utilisant plusieurs configurations de polariscopes.....</b>	<b>15</b>
<b>I.3.4 Méthodes utilisant plusieurs longueurs d'ondes.....</b>	<b>16</b>
<b>I.3.5 Méthode du tracé des isostatiques et calcul des isochromes.....</b>	<b>16</b>
<b>I.4 QUELQUES TRAVAUX REALISES A L'AIDE DE LA METHODE DE</b>	
<b>PHOTOELASTICIMETRIEBIDIMENSIONNEL.....</b>	<b>20</b>
<b>I.5 METHODES D'ANALYSE DES CONTRAINTES</b>	
<b>EN PHOTOELASTICIMETRIE 3D.....</b>	<b>28</b>
<b>I.5.1 La méthode des tranches incluses .....</b>	<b>29</b>
<b>I.5.2 Méthodes utilisant le phénomène de diffusion de la lumière.....</b>	<b>29</b>
<b>I.5.3 Méthode de Weller.....</b>	<b>30</b>
<b>I.5.4 Méthode de Cheng.....</b>	<b>31</b>
<b>I.5.5 Méthode de découpage otique.....</b>	<b>32</b>
<b>I.5.6 La méthode de figeage et découpage.....</b>	<b>35</b>
<b>I.6 QUELQUES TRAVAUX REALISES A L'AIDE DE LA METHODE DE</b>	
<b>PHOTOELASTICIMETRIETRIDIMENSIONNEL.....</b>	<b>37</b>
<b>I.7 DETERMINATION DU MODULE DE YOUNG DES MODELES A</b>	
<b>TEMPERATURE DE FIGEAG .....</b>	<b>48</b>



I.7.1 Dispositif expérimental.....	48
I.7.2 Méthode du suivi des marqueurs.....	50
I.8 LOIS DE SIMILITUDE PROTOTYPE MODELE.....	51
I.9 CONCLUSION.....	52
 <b>CHAPITRE II : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL .....</b>	<b>53</b>
II.1 INTRODUCTION.....	53
II.2 REPRÉSENTATION DU MODÈLE EXPÉRIMENTAL .....	54
II.3 SOLUTION ANALYTIQUE .....	55
Calcul de la flèche à la température ambiante.....	56
Calcul de la flèche à la température de fageage.....	56
II.4.1 Elaboration d’une poutre simplement encastrée et chargée à son extrémité .....	56
II.4.2 Résultat obtenu dans la phase expérimentale.....	57
II.4.3 Visualisation des franges isoclines dans le cas expérimentale.....	58
II.4.4 Variation de contraintes principales .....	59
II.4.5 Visualisation du réseau d’isochromes sur le champ clair .....	59
II.4.6 Calcul des valeurs de la différence des contraintes principales sur le segment [AB].....	60
II.5 SOLUTION NUMERIQUE – METHODES DES ELEMENTS FINIS .....	62
II.6 COMPARAISON DES RÉSULTATS.....	65
II.6.1 Comparaison des franges figées isochromes.....	66
II.6.2 Comparaison des isoclines.....	66
II.6.3 Superposition des courbes de la différence des contraintes principales.....	67
II.7 Condition aux limites (appuis simple, appuis encastré).....	68

<b>II.8 Conclusion.....</b>	<b>68</b>
<b>CHAPITRE III : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL .....</b>	<b>69</b>
<b>III .1 INTRODUCTION.....</b>	<b>69</b>
<b>III .2 PROCEDURE EXPERIMENTALE.....</b>	<b>70</b>
❖ Elimination des contraintes résiduelles .....	71
<b>III.3 CYLINDRE RIGIDE SUR UN CYLINDRE DEFORMABLE.....</b>	<b>73</b>
III.3.1 Visualisation des franges isoclines dans le cas expérimentale.....	74
III.3.2 Visualisation des franges isoclines dans le cas numérique.....	75
III.3.3 Comparaison de franges isoclines.....	75
<b>III.4 CYLINDRE RIGIDE SUR UN CYLINDRE CREUX DEFORMABLE.....</b>	<b>76</b>
III.4.1 Figeage des contraintes.....	77
III.4.2 Résultats expérimentaux .....	77
III.4.2.1 Analyse des contraintes figées de la tranche la plus sollicitée.....	78
III.4.3 Analyse par éléments finis.....	81
III.4.3.1 Répartition des contraintes le long de l'axe longitudinal du cylindre creux.....	83
III.4.4 Comparaison des résultats obtenus numériques et expérimentaux.....	84
<b>III.5 PARALLÉLÉPIPÈDE RIGIDE SUR UNE SPHERE DÉFORMABLE .....</b>	<b>85</b>
III.5.1 Analyse expérimentale .....	87
III.5.1.1 Calcul des valeurs de la différence des contraintes principales sur le segment [AB].....	88
III.5.1. Les franges isoclines.....	92
III.5.2 Analyse par éléments finis .....	93
III.5.2.1 Calcul des franges isochromes.....	93
III.5.2.2 Calcul des franges isocliniques.....	97
III.5.3 COMPARAISON DES RESULTATS .....	97
III.5.3.1 Comparaison des franges figées isochromes.....	97

III.5.3.2 Comparaison des franges figées isoclines.....	98
III.5.3.3 Superposition des courbes de la différence des contraintes principales au milieu du contact suivant l'axe de symétrie vertical.....	99
 III.6 CONCLUSION.....	100
CONCLUSION GENERALE.....	101
REFERENCESBIBLIOGRAPHIQUES.....	103

## ANNEXES

- A. Liste des programmes « CASTEM »
- B. Publication

## NOMENCLATURE ET SYMBOLES

### Lettres latines majuscules

$I(x, y)$	Intensité lumineuse
$R$	Rayon du cylindre
$R_{eq}$	Rayon de courbure équivalent
$N$	Ordre de frange du modèle
$E_f$	Module de Young à température de figeage
$E_r$	Module de Young à température ambiante
$P_0$	Pression à l'origine
$W/L$	Charge par unité de longueur
$E1, E2$	Modules de Young des deux cylindres en contact
$E_{eq}$	Modules de Young équivalent
$C$	Constantes optiques relatives du matériau biréfringent
$C_1, C_2$	Les Constantes photoélastiques absolues du matériau
$C_0$	La vitesse de la lumière dans le vide
$V_1, V_2$	Deux vibrations
$E1$	Module de Young du cylindre en aluminium
$E2$	Module de Young de l'époxy
$H$	Point de Hertz
$F_N$	Charge normale
$F_T$	Charge tangentiel
$T$	Période
$U$	Direction d'observation
$V$	Direction de propagation
$X$	Axe du polariseur
$Y$	Axe du l'analyseur
$P$	Charge appliquée sur le disque

$L$	Distance entre les appuis
$Y_{max}$	Flèche maximale
$L_n$	Charge normale par unité de longueur
$P(y)$	Répartition de pression sur l'aire de contact
$X, y$ et $z$	Axes principaux
$H$	Écrouissage
$E/Y$	Rapport
$I_0$	L'intensité de lumière dans le vide
$K$	Constante sans dimension, fonction du matériau
$F$	charge appliquée
2D	Deux dimension
3D	Trois dimension
$C$	Constante photoélastique du matériau considéré
CL	Conditions aux limites
$N$	Ordre de frange
$T$	Effort tranchant
$D$	Diamètre du disque
$T$	Température
$I$	moment d'inertie
$M_{fle}$	Moment fléchissant
$M_{max}$	Moment fléchissant maximal
$Q$	Charge tangentiel
$\underline{H}$	Champ magnétique
$\underline{E}$	Champ électrique

### **Lettres latines minuscules**

$f_f$	Constante de frange à température de figeage
-------	--

$f_r$	Constante de frange à température ambiante
$n_0$	Indice de réfraction du milieu au repos (sans contrainte)
$n_1, n_2, n_3$	Indice principaux de réfraction du milieu sous contraintes
$x$	Distance le long du diamètre du disque mesuré à partir du centre du disque
$r_{1,2}$	Les retards relatifs de l'onde
$e$	Epaisseur du modèle
$a$	Demi largeur de contact plan sur plan b
	Demi-largeur de contact cylindre sur plan $h_c$
Point de Hertz d	Diamètre
$c$	Vitesse de propagation de la
lumière $w$	Pulsation de la lumière $f$
	Fréquence de la lumière
$t$	Temps

### Lettres grecques

$\gamma$	Facteur de corrélation des deux champs de granularité
$\alpha, \varphi$	Paramètres caractéristiques
$\vartheta_1, \vartheta_2$	Coefficient de poisson
$\sigma_{1,2}, \sigma_3$	Contraintes principales dans le modèle
$\lambda$	Longueur d'onde
$\delta$	Biréfringence (Différence de chemin optique entre deux rayons)
$\phi$	Déphasage entre les deux rayons (biréfringence angulaire)
$\sigma_{xx}$	Contrainte normale sur la face xx
$\sigma_{zz}$	Contrainte normale sur la face zz
$\sigma_{xz}$	Contrainte normale sur la face xz
$\sigma_{yy}$	Contrainte normale sur la face yy
$\sigma_{rr}$	Contrainte normale sur la face rr
$\sigma_{\theta\theta}$	Contrainte normale sur la face $\theta\theta$
$\tau_{xy}$	Contrainte de cisaillement

$\tau_1, \tau_{max}$	Contraintes de cisaillement maximales
$\sigma_1, \sigma_2,$	Contraintes principales dans le modèle
$(\sigma_1 - \sigma_2)$	Différence des contraintes principales
$\epsilon_1, \epsilon_2$	Déformations principales
$\eta$	Indice de réfraction
$v_1$	Vitesse de la lumière dans le milieu considéré
$\sigma_1, \sigma_2$	Contraintes principales dans le modèle
$\mu$	Coefficient de frottement

## LISTE DES FIGURES

### CHAPITRE I : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Figure I.1 contact linéique.....	4
Figure I.2 : Maillage de la zone cylindre sur cylindre.....	6
Figure I.3 : Distribution de la contrainte normale suivant l'axe X.....	6
Figure I.4 : Géométrie du contact Cylindre sur plan.....	7
Figure I.5: Maillage de la zone de contact.....	7
Figure I.6: Distribution de la contrainte normale suivant l'axe y.....	8
Figure I.7: Distribution de la contrainte normale suivant l'axe x.....	8
Figure I.8 : Sphère déformable pressée par un plan rigide.....	8
Figure I.9 : Schéma simplifié du polariscope.....	9
Figure I.10 : principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion.....	10
Figure I.11 : Polariscopes par réflexion.....	10
Figure I.12 : revêtement minces collés sur un modèle.....	11
Figure I.13 : Recouvrement photoélastique sur un train d'atterrissage d'avion.....	11
Figure I.14 : pièce vernis.....	13
Figure I.15 : Étapes de calcul de $\alpha$ a) résolution de l'équation donnant $\alpha$ en fonction des différentes intensités de lumière b) interpolation linéaire pour combler les zones non analysables c) recalage du paramètre isocline.....	15
Figure I.16 : Tracé des lignes isostatiques.....	15
Figure I.17 : Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane.....	17
Figure. I.18 : Franges isochromes sur les deux couronnes.....	17
Figure I.19 : Image des deux couronnes traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D.....	18
Figure I.20 : Images des masques utilisées par le logiciel PHOTO2D pour effectuer les calculs sur les deux pièces.....	18
Figure I.21 : Représentation des isostatiques (trajectoires des directions principales).....	19



Figure I.22 : Images isochromes des deux couronnes obtenues à l'aide du logiciel PHOTOP2D.....	20
Figure I.23 : Maillage raffiné a u voisinage du contact.....	21
Figure I.24 : Frange numérique et expérimentales.....	21
Figure I.25 : Validation des franges : vis à billes une rangée.....	22
Figure I.26 : Tête de bielle de 4 parties en matériau PLM4 (époxy).....	22
Figure I.27 : Champs d'isochrome du palier.....	23
Figure I.28 : Emplacement de l'encoche circulaire dans le pénétrateur.....	24
Figure I.29 : Emplacement de l'encoche circulaire dans le demi-plan.....	24
Figure I.30 : Résultats numériques et expérimentaux pour les champs de contraintes sur le pignon et la roue dentée pour une combinaison 15/28.....	25
Figure I.31 : Simulations numériques et image expérimentale pour une plaque soumise à un essai de flexion.....	26
Figure I.32 : franges isochromatiques, simulées (à gauche) et expérimentales (à droite).....	27
Figure I.33 : Différence des contraintes principales le long de l'axe vertical de symétrie.....	27
Figure I.34 : Comparaison des franges isocliniques expérimentales (gauche) et simulées (droite) pour différents angles.....	28
Figure I.35 : Méthode des tranches incluses.....	29
Figure I.36 : Polarisation de la lumière diffusée.....	30
Figure I.37 : schéma de la méthode de Weller.....	30
Figure I.38 : Méthode de Cheng.....	31
Figure I. 39: Découpage optique à l'aide de deux plans lasers.....	33
Figure I.40 : Intensités lumineuses diffusées (a) avec le faisceau 1 seul, (b) avec le faisceau 2 seul et (c) avec les deux faisceaux simultanément.....	34
Figure I.41 : Graphe des intensités lumineuses.....	34
Figure I.42 : Méthode des sous tranches.....	36
Figure I.43 : Isochromes relevés expérimentalement.....	36

Figure I.44 : Isochromes simulés sous Castem et traitées avec PHOTOSHOP.....	37
Figure I.45 : Superposition des courbes expérimentales et numériques.....	37
Figure I.46 : Schémas des trois modèle utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan).....	38
Figure I.47 : Distribution du champ de contraintes dans le cas du contact cylindre sur plan avec chargement normal. a): contraintes de cisaillement maximal expérimentale b): contraintes de cisaillement maximale théorique c) : cisaillement $\tau_{xy}$ déterminé expérimentalement d) : Cisaillement $\tau_{xy}$ déterminé théoriquement.....	39
Figure I.48 : Distribution du champ de contraintes dans le cas du contact cylindre sur plan avec chargement normal et tangentiel. [35] a) : contraintes de cisaillement maximal expérimentale b): contraintes de cisaillement maximale théorique. c) : cisaillement $\tau_{xy}$ déterminé expérimentalement d) : cisaillement $\tau_{xy}$ déterminé théoriquement.....	40
Figure I.49 : Confrontation des schématisations 3D d'un feuillet photoélastique d'épaisseur 8 mm pour la simulation des franges sur un essai de torsion.....	41
Figure I.50 : Appui ponctuel sur un barreau de section carrée.....	41
Figure I.51 : Franges isochromatiques simulées pour différentes tranches le long de l'axe longitudinal.....	42
Figure I.52 : Variation de la différence de contraintes principales le long du segment AB pour différentes tranches.....	42
Figure I.53 : dispositif expérimental, (a) Le banc de mesure ; (B) Deux disques permettant le réglage de l'angle de croisement.....	43
Figure I.54 : Résistance de contact électrique en fonction de la force de compression (angle de croisement de 90 °) pour le cuivre (courant de mesure de 10 A, chute de tension nominale de 20 mV, diamètre du fil 2,06 mm, angle de croisement 90 °).....	44
Figure I.55 : Modèles des éléments finis d'un palier pour Accel (a) et Abaqus(b).....	45
Figure I.56 : Déformée du palier soumis un champ de pression a) Abaqus et b) Accel.....	45
Figure I.57 : Glissement circulaire relatif (a) et contrainte normale (b) au dos de coussinet...	45
Figure I.58 : Influence du coefficient de frottement (a) et du pré-serrage (b) sur le glissement circonférentiel.....	46

Figure I.59 : franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	46
Figure I.60 : Franges obtenus par éléments finis pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	47
Figure I.61 : Différences des contraintes principales le long de la ligne à 45° de la section située le long de la direction de la charge pour le cas du parallélépipède sur cylindre.....	47
Figure I.62 : franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	48
Figure I.63 : Dispositif expérimental utilisé pour déterminer les caractéristiques du modèle à température de figeage.....	49
Figure I.64 : Image du cylindre en compression.....	50
Figure I.65 : Schéma du principe de la méthode du suivi de taches.....	51

## **CHAPITRE II : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL**

Figure II.1 : Dispositif expérimental d'une poutre encasté simple.....	54
Figure II.2 : Cas d'étude d'une poutre droite simplement encastée et chargée à son extrémité.....	55
Figure II.3 : Le dispositif à l'intérieur de l'étuve.....	57
Figure II.4 : Traitement thermique pour figer des contraintes.....	57
Figure II.5 : Visualisation des contraintes figées sur le modèle en champ clair.....	58
Figure II. 6 : Réseau de franges isoclines obtenues expérimentalement.....	58
Figure II.7 : Réseau d'isochromes sur le modèle.....	59
Figure II.8 : Variation de la différence des contraintes principales.....	61
Figure II.9 : Représentation de la déformée.....	62
Figure II.10 : Simulations numériques et image expérimentale pour une plaque soumise à un essai de flexion.....	64
Figure II.11 : Variation de la différence des contraintes principales le long de AB.....	65

Figure II.12 : Isoclines obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM.....	65
Figure II.13 : Superposition de l'isocline obtenue numériquement et traitée avec Photoshop(A) avec sa correspondante obtenue expérimentalement(B).....	66
Figure II.14 : Superposition des isochromes obtenue numériquement avec sa correspondante obtenue expérimentalement.....	67
Figure II.15 : Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques de la différence des contraintes principales.....	68
Figure II.16 : Réseau d'isochromes sur le modèle (A. appuis simple ; B. appuis encastré).....	68

### **CHAPITRE III : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL**

Figure III.1 : Dispositif expérimental ; A. un cylindre rigide en acier sur un cylindre déformable ; B. un cylindre rigide en acier sur un cylindre creux déformable ; C. un parallélépipède rigide en aluminium sur une sphère déformable.....	70
Figure III.2 : Visualisation des contraintes résiduelles pour un cylindre en 3D (A Cylindre en Aluminium ; B Cylindre en Époxy).....	72
Figure III.3 : Cycle thermique pour le recuit.....	72
Figure III.4 : Visualisations du modèle sous le polariscope après élimination des contraintes résiduelles pour un cylindre en époxy.....	73
Figure III.5 : a- Franges photoélastiques pour une tranche située à $z = 0$ mm, B- Gros plan de la zone de contact, c-La bifurcation des franges.....	73
Figure III. 6 : Réseau de franges isoclines obtenues expérimentalement.....	74
Figure III. 7 : Modèle de franges isocline calculé pour $0^\circ$ (à gauche) et pour $45^\circ$ (à droite)....	75
Figure III. 8 : Comparaison du réseau de franges isoclines numériques et du réseau de franges isoclines expérimental.....	76
Figure III.9 : Vue détaillée du dispositif expérimental .....	76
Figure III.10 : Traitement thermique pour figer des contraintes.....	77
Figure III.11 : Frange obtenue expérimentalement le long du cylindre creux en isolant des tranches différentes d'épaisseurs.....	78

Figure III.12 : Franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	79
Figure III.13 : Réseau d'isochromes en champ clair.....	80
Figure III .14 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales.....	80
Figure III. 15 : Réseau de franges isoclines obtenues expérimentalement.....	81
Figure III.16 : Représentation du maillage pour le cas d'un cylindre rigide sur un cylindre creux déformable.....	81
Figure III.17 : Représentation de la surface totale maillée.....	82
Figure III.18 : Représentation de la déformée.....	82
Figure III.19 : Franges obtenues par éléments finis le long du cylindre creux en isolant une tranche d'épaisseur 8 mm.....	83
Figure III.20 : Franges obtenues par éléments finis pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	83
Figure III.21 : Évolution de la différence des contraintes principales suivant un segment situé le long de la direction de la charge.....	84
Figure III.22 : Franges obtenues expérimentalement et par éléments finis long du cylindre.....	85
Figure III. 23 : Comparaison du réseau de franges isoclines numériques et du réseau de franges isoclines expérimental.....	85
Figure III.24 : Différence des contraintes principales le long de la droite [AB] pour une tranche de 8mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge.....	85
Figure III.25 : Parallélépipède indéformable sur une sphère déformable.....	86
Figure III.26 : Frange obtenue expérimentalement le long de la sphère en isolant des tranches différentes d'épaisseurs.....	87
Figure III.27 : Franges expérimentale obtenues pour la tranche la plus sollicitée de 10 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge (la zone dangereuse).....	88
Figure III .28 : Courbe de variation de la différence des contraintes principales.....	92

Figure III .29 : Les franges isoclines expérimentales ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ et $90^\circ$ ).....	92
Figure III .30 : Isoclines et isostatiques pour le contact plan sur sphère.....	93
Figure III.31 : Représentation du maillage pour le cas d'un parallélépipède rigide sur une sphère déformable.....	93
Figure III.32 : Représentation de la Sphère déformée.....	94
Figure III.33 : Franges obtenues par éléments finis le long de la sphère en isolant une tranche d'épaisseur 8 mm.....	95
Figure III.34 : Franges isochromes relevées par éléments finis et traitées avec le logiciel Photoshop.....	96
Figure III.35 : Évolution de la différence des contraintes principales suivant un segment situé le long de la direction de la charge.....	96
Figure III.36 : Isoclines obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM.....	97
Figure III.37 : Franges obtenues expérimentalement et par éléments finis long de la sphère....	98
Figure III .38 : Superposition de l'isocline obtenue numériquement et traitée avec Photoshop avec sa correspondante obtenue expérimentalement.....	98
Figure III.39 : Différence des contraintes principales le long de la ligne [AB] pour une tranche de 8 mm situé le long de la direction de la charge.....	99

## LISTES DES TABLEUX

### **CHAPITRE II : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL**

Tableau II.1 : Valeurs de la différence de contraintes relevées expérimentalement .....61

### **CHAPITRE III : DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL**

Tableau III .1 : Valeurs de la différence des contraintes principales relvées sur le segment [AB].....91

## INTRODUCTION GENERALE

L'optimisation des contraintes et des formes dans les pièces mécaniques de transmission de mouvement nécessite la détermination de ces champs de contraintes particulièrement au voisinage des surfaces de contact.

L'étude des contacts mécaniques est donc très importante pour la bonne résolution de nombreux problèmes tels que les transmissions de mouvements, la mise en forme des matériaux et les simulations d'usures. Des sollicitations mécaniques sont alors imposées en surfaces et en subsurface. Celles ci peuvent donner lieu à des dégradations par fatigue, par formation de débris, l'amorçage et la propagation de fissure, il est donc très important d'évaluer le type et l'amplitude des sollicitations mécaniques imposées.

Le but de ce présent travail est d'analyser les champs des contraintes développées dans les différents modèles analysés. Ces problèmes de contact sont d'une très grande importance pour les industriels dans différents domaines tels que la production, l'automobile, l'aéronautique, le nucléaire ou encore le militaire.

Plusieurs méthodes aussi bien numériques qu'expérimentales ont été développées pour l'analyse des champs de contraintes dans les pièces en contact. La méthode des éléments finis permet de traiter de manière efficace ce type de problèmes. Il est clair toutefois que l'expérimental est plus que nécessaire pour valider les théories et les méthodes numériques. C'est dans ce but que plusieurs méthodes, profitant du développement de la technologie dans le domaine de l'informatique et du traitement de l'image et des vidéos par ordinateur, continuent de se développer. Les industriels investissent massivement dans ces nouveaux outils qui sont moins coûteux que des essais réels. Ceux-ci permettent de tester différents matériaux, différentes configurations et de nouveaux procédés.

Les principes de certaines de ces méthodes sont basés principalement sur le phénomène de diffusion de la lumière. Elles sont très importantes car elles permettent de visualiser complètement les différents champs de contraintes développés dans les modèles analysés. La photoélasticité, basée justement sur ce phénomène de biréfringence, est une des principales méthodes. L'exploitation des franges photoélastiques permet de retrouver les valeurs des contraintes ainsi que leurs directions principales.

Nous disposons au sein du département de Génie mécanique d'un polariscope qui permet d'analyser les champs de contraintes développées dans des modèles en matière biréfringente en bidimensionnel. Cependant, pour notre étude nous avons besoin de déterminer les champs de contraintes développés dans le volume des différents modèles analysés. Nous avons donc eu recours à la méthode de figeage découpage mécanique en photoélasticité tridimensionnelle pour analyser les champs de contraintes dans des modèles simulant les différentes situations rencontrés en mécanique principalement dans les transmissions de mouvements.

Les contraintes ont été déterminées dans différentes sections particulièrement au voisinage des surfaces de contact. Les zones de concentration des contraintes peuvent ainsi être visualisées clairement à l'aide des isochromes.

Parmi les logiciels commerciaux utilisés pour la résolution des problèmes de mécanique des solides, on retrouve ABAQUS, CASTEM, CATIA, MATLAB et ANSYS. Nous avons choisi d'utiliser



CASTEM qui offre la possibilité de créer le maillage et gérer le contact et les conditions aux limites. Le processus de résolution doit être réalisé en détail dans les différentes étapes de calcul dans le programme, ce qui est un avantage.

Après résolution, les franges photoélastiques et les valeurs des contraintes de cisaillement obtenues à l'aide de la simulation permettent de faire une comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus à l'aide de la photoélasticité.

Le travail effectué dans le cadre de cette thèse est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre est composé de deux parties. La première partie du chapitre porte sur les différents travaux réalisés sur l'analyse des contraintes dans le problème du contact en 2D et en 3D. Plusieurs cas sont présentés : contact cylindre sur plan, contact sphère sur plan et contact cylindre sur cylindre.

La deuxième partie du premier chapitre est consacrée aux différentes techniques développées pour l'analyse expérimentale des contraintes dans les modèles bidimensionnels et tridimensionnels. On passe en revue la plupart de ces méthodes en insistant sur la méthode de figeage découpage mécanique utilisé pour réaliser nos modèles.

Le deuxième chapitre nous permet de montrer un exemple d'analyse des champs de contraintes figées dans un cas bidimensionnel. Cet exemple est une analyse expérimentale et numérique des contraintes figées dans une poutre encastrée. Nous avons ainsi vérifié à l'aide d'un exemple en deux dimensions la fiabilité de l'analyse.

Dans le troisième chapitre, on décrit le dispositif expérimental et le découpage mécanique qui permet d'obtenir des tranches minces du modèle à analyser. Au fait on se ramène à l'analyse en deux dimensions après avoir découpé la tranche biréfringente dans la zone où l'on souhaite analyser les contraintes.

La méthode sera appliquée d'abord à l'étude du contact d'un cylindre rigide sur un cylindre déformable, ensuite à l'étude d'un cylindre rigide sur un cylindre creux déformable et enfin à un plan rigide sur une sphère déformable.

Les réseaux des isostatiques seront tracés manuellement sur toute la surface de la tranche la plus sollicitée. Les franges photoélastiques obtenues expérimentalement seront ensuite comparées à celles obtenues par calcul à l'aide de la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel CASTEM.

# **Chapitre I**

## **ETUDE**

### **BIBLIOGRAPHIQUE**

#### **I.1 LE PROBLÈME DU CONTACT ENTRE SOLIDES**

Les contacts entre deux corps, qu'ils soient statiques ou dynamiques, constituent la base de toutes les liaisons des mécanismes. Lorsque deux corps sont mis en contact, des sollicitations mécaniques sont imposées aux massifs et peuvent donner lieu à des dégradations. Il est donc essentiel d'évaluer le type et l'amplitude des contraintes mécaniques imposées.

La détérioration de la surface de contact peut prendre différentes formes : usure, fatigue de contact, déformation plastique...etc. Pour assurer une bonne fiabilité du contact et en améliorer les performances, il est nécessaire de déterminer la distribution des forces dans la zone de contact. La mécanique de contact est la première tentative sérieuse pour faire converger les formalismes du frottement et de l'usure.

La mécanique de contact débute en 1670 avec les travaux de Newton qui pressait des sphères de verre sur des plans métalliques. Ensuite, la progression a été constante tant sur le plan des modèles que sur celui des outils de calculs; plusieurs travaux ont été consacrés à l'analyse des problèmes de contact. Hertz, en 1882, est le premier à avoir formulé une analyse satisfaisante du problème de contact entre deux solides. Il a formulé les conditions qui doivent être satisfaites concernant le déplacement des surfaces. Il a posé comme hypothèse que chacun des deux corps peut être considéré comme un semi espace élastique chargé sur une surface elliptique relativement très faible devant les dimensions des solides en contact. Les contraintes sont analysées sur le modèle en se basant sur ces hypothèses.

Plusieurs cas intéressants ont été étudiés : contact sphère sur plan, contact plan sur plan, contact cylindre sur plan et contact cylindre sur cylindre. Hertz a proposé des solutions analytiques permettant de déterminer la pression de contact et plus important encore les valeurs des contraintes principales et de la contrainte de cisaillement maximale à l'intérieur des modèles.

Le but de la mécanique de contact élastique est de déterminer la forme de l'aire de contact, la distribution surfacique des contraintes normales et tangentielles dans le contact, en fonction de la charge et des caractéristiques géométriques et physiques des corps afin de calculer les contraintes et les déformations dans le corps.

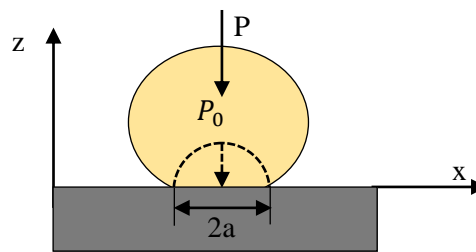
La solution apportée par Hertz pour le problème de contact entre deux solides est souvent utilisée comme référence dans le processus de validation de modèles numériques. La théorie de Hertz pour les contacts élastiques avec les hypothèses énumérées ci-dessous nous donne la relation de calcul de la pression, de la demi largeur de contact et des contraintes développées à l'intérieur des modèles en contact.

Les hypothèses posées par Hertz :

- Les surfaces sont sans frottement.
- La limite élastique des matériaux n'est pas dépassée.
- Les allongements sont petits.
- Les corps en contact peuvent être assimilés à des massifs semi-infinis, parfaitement élastiques, homogènes et isotropes.
- Les dimensions de la zone de contact sont petites par rapport aux dimensions des corps.
- Chacun des solides en contact peut être considéré comme un demi-espace élastique.

### Contact linéique

Sous l'action d'une charge  $P$ , les solides se déforment aux voisinage du contact, en créant une zone dont les dimensions restent très petites par rapport à celles des deux corps (Figure I.1).



**Figure I.1** contact linéique

La charge est distribuée sur une aire de contact circulaire de rayon  $a$  :

$$a = 2 \left( \frac{2PR^*}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.1)$$

$$P_0 = \frac{2P}{\pi a} = \left( \frac{PR^*}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.2)$$

$$P(x) = P_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (I.3)$$

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (I.4)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (I.5)$$

Avec :

P : la charge normale [N/mm]

p(x) : la distribution de pression dans le contact [MPa]

E\* : Le Module d'Young équivalent [MPa]

R\* : Le rayon équivalent [mm]

a : la demi-largeur de contact [mm]

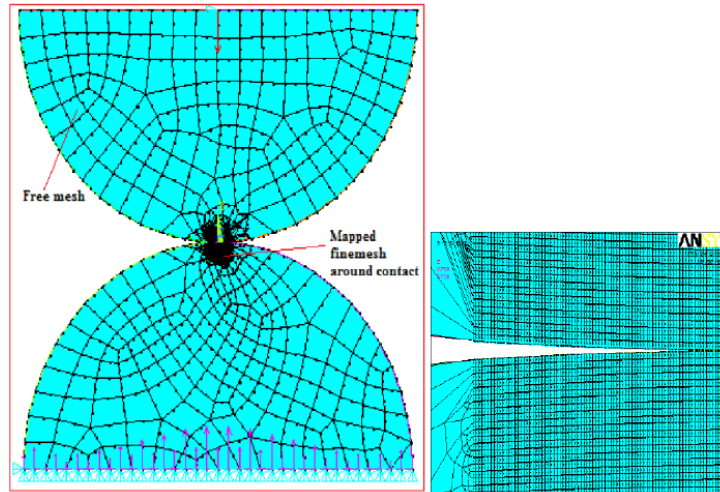
La contrainte de cisaillement atteint une valeur maximale  $\tau = 0.3p_0$  en sous couche à une profondeur  $z=0,78a$ .

## I.2 QUELQUES TRAVAUX REALISES DANS LE PROBLEME DE CONTACT

L'analyse des contraintes dans les structures mécaniques est d'une importance capitale dans la conception des composantes de machines. Plusieurs publications ont été dédiées à ce sujet.

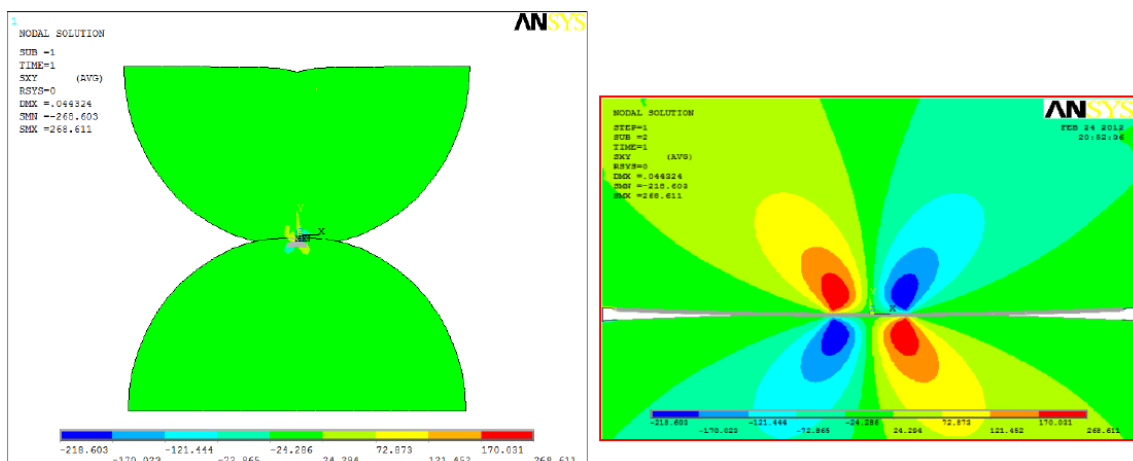
P. Puruchotman, P.Thankachan [1] ont présenté une procédure numérique pour le problème élastique bidimensionnel. Dans leur modèle numérique du contact de Hertz entre deux solides, en considérant l'état de contrainte plan, ils ont montré une bonne corrélation avec les résultats théoriques. Les contraintes de contact ont été calculées en utilisant des matériaux ayant les mêmes modules d'élasticité ; un demi-cylindre en acier sur un demi-cylindre en acier. Ils ont montré que pour obtenir des résultats corrects dans l'analyse par éléments finis, il faut choisir des éléments appropriés et affecter des contacts appropriés entre les éléments et fournir des conditions aux limites précises pour calculer les valeurs des contraintes de contact. La valeur de la contrainte de contact est très importante, car la valeur de contrainte change avec la zone de contact. Plus la surface de contact est élevée, plus la contrainte générée sera moindre.

Un maillage fin est nécessaire pour obtenir une meilleure simulation des résultats, cependant, l'utilisation d'un maillage fin dans toute la section augmente le temps de calcul. Afin de réduire le temps de calcul, une petite frontière est créée autour du contact et maillée à la taille de maillage de 0,1 mm, le reste de la pièce est maillé avec une taille d'élément plus grande (Figure I.2).



**Figure I.2 :** Maillage de la zone cylindre sur cylindre [1]

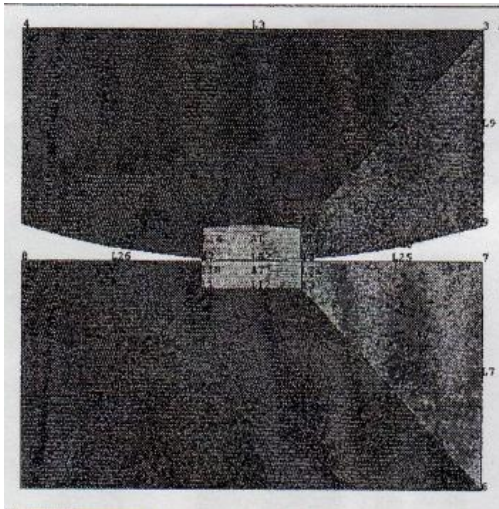
La figure I.3 montre que les contraintes se produisant sous un angle tel que représenté dans la région bleue et rouge. La contrainte maximale de cisaillement simulée obtenue en utilisant ANSYS est de 268,61 MPa, le résultat obtenu par la solution analytique est de 266,97 MPa, la différence entre les deux valeurs est faible, environ 0,61%.



**Figure I.3 :** Distribution de la contrainte normale suivant l'axe X [1]

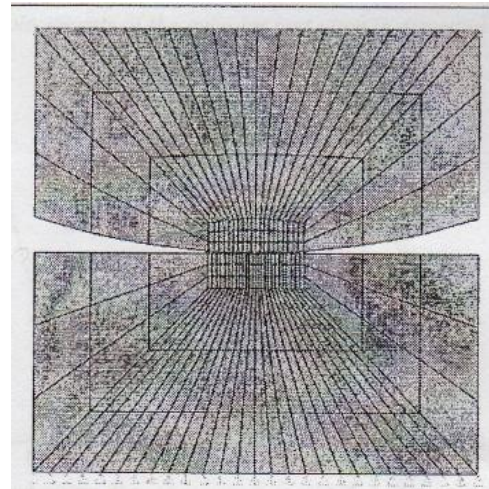
Budimir [2] a étudié une procédure numérique pour le problème élastique bidimensionnel. Il a montré une bonne corrélation avec les résultats théoriques. Les contraintes de contact ont été calculées en utilisant des matériaux ayant des modules d'élasticité différents : un cylindre en aluminium sur une plaque rectangulaire en acier. Il a montré que la contrainte normale maximale a lieu au centre de la surface de contact et qu'elle décroît invariablement vers zéro à l'extrémité. Il en résulte donc que les surfaces de contact sont fonction des modules de Young des deux solides en contact. Il a étudié aussi l'effet de la friction avec le même couple de matériaux. Il a aussi analysé les conditions d'adhérence et

de glissement pour des matériaux de modules de Young différents. La simulation de la géométrie de contact est représentée sur la (figure I.4). La figure I.5 représente le maillage de la zone de contact.



**Figure I.4 :** Géométrie du contact

Cylindre sur plan [2]



**Figure I.5:** Maillage de la zone

de contact [2]

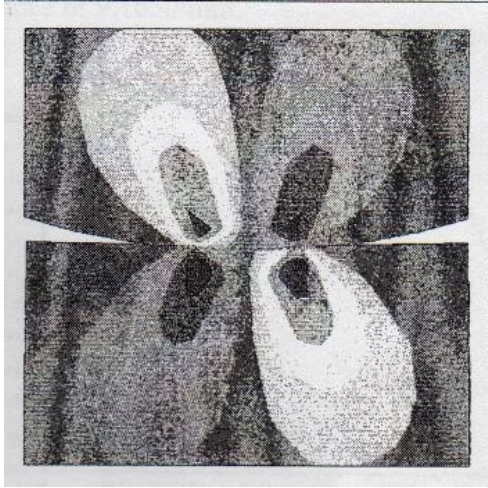
Il a étudié expérimentalement et numériquement le contact cylindre sur plan dans les deux cas du chargement normal et chargement tangentiel.

Sachdeva et Ramakrishnan [3] ont amélioré le modèle numérique précédent en introduisant les conditions aux limites sur les efforts appliqués.

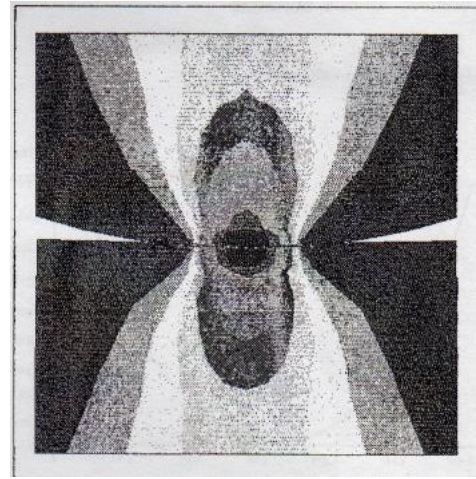
Ils appliquent deux méthodes de chargement différentes, la première est une application successive de petits chargements, la deuxième méthode est une application de la charge d'un seul coup. Il considère l'état de contact sans frottement, ainsi que l'état de contrainte avec différents coefficients de frottement. Une étude comparative des deux méthodes pour les différents états de contact est effectuée et plusieurs résultats y sont tirés.

La figure I.6 représente la contrainte normale dans la direction de l'axe y. On constate que la contrainte change considérablement durant le processus de contact.

La figure I.7 représente la variation de la contrainte normale suivant l'axe x.

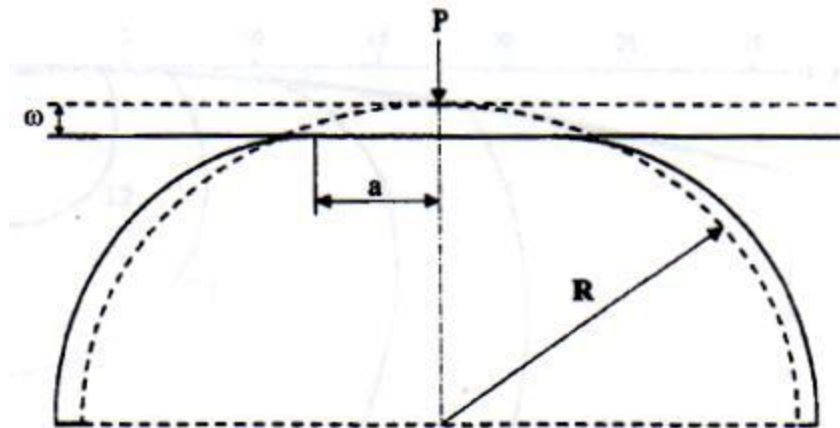


**Figure I.6:** Distribution de la contrainte normale suivant l'axe y [3]



**Figure I.7:** Distribution de la contrainte normale suivant l'axe x [3]

L. Kogut [4] a présenté dans son travail une analyse par éléments finis d'un contact élastique d'une sphère déformable comprimée par un parallélépipède rigide. Kogut utilise le critère de VON MISES pour détecter la transition locale entre les déformations élastiques et les déformations plastiques. Elle trouve son application dans l'étude des problèmes d'usure, de frottement et aussi dans la conductivité thermique et électrique entre des surfaces de contacts rugueuse. Il a montré une évolution du contact élastique plastique et finalement le contact purement plastique.



**Figure I.8 :** Sphère déformable pressée par un plan rigide [4]

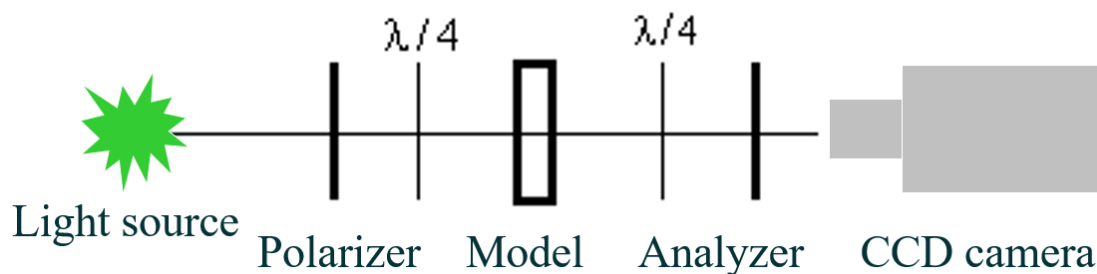
Le modèle donne les expressions de l'aire de contact ainsi que celle des pressions de contact. L'étude couvre un large domaine de valeur de chargement, permettant ainsi de déterminer, en utilisant le critère de Von Mises, la valeur critique  $w_c$  de la déformation de la sphère qui marque la transition de l'état élastique vers l'état élasto-plastique



Pendant les 100 dernières années plusieurs chercheurs ont développé des théories pour décrire la distribution des contraintes dans les solides en contact. Cependant pour beaucoup d'entre eux il était difficile de faire des expériences pour valider les théories. Il y a eu quelques exemples où la photoélasticité a été utilisée pour analyser la distribution des contraintes mais généralement ces études ont été limitées par le temps nécessaire pour leur mise en application et aussi pour l'exploitation des franges isochromes et isoclines obtenues. Le développement de la photoélasticimétrie automatique a permis d'améliorer ces analyses. La distribution des contraintes de cisaillement peut ainsi être obtenue très rapidement et les contraintes principales peuvent alors être séparées.

### I.3 METHODE D'ANALYSE DES CONTRAINTES EN PHOTOELASTICIMETRIE 2D

La photoélasticimétrie 2D peut s'appliquer uniquement dans le cas des matériaux transparents et biréfringents. En analysant une éprouvette fabriquée dans un matériau transparent biréfringent sur un polariscope à lumière monochromatique (Figure I.9), on observe des franges claires et sombres qui permettent de déterminer l'état de contraintes et de déformations du modèle analysé.



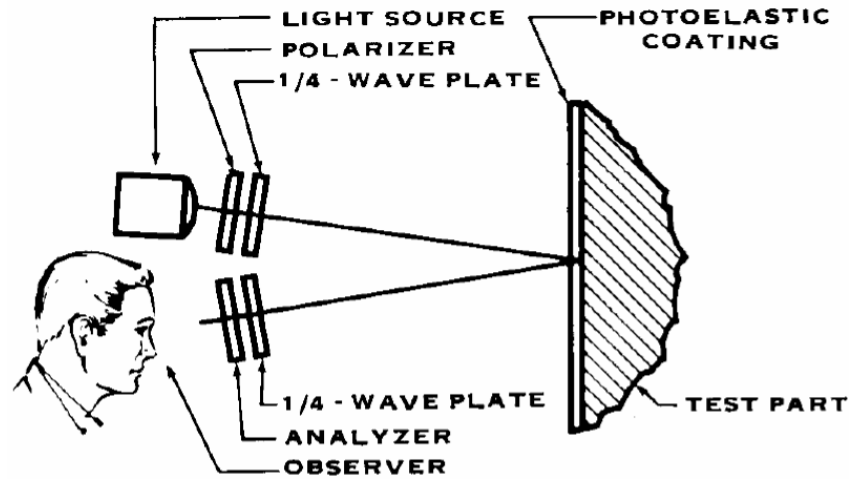
**Figure I.9 :** Schéma simplifié du polariscope

La photoélasticimétrie est une méthode largement utilisée dans l'analyse expérimentale des contraintes en deux et trois dimensions. La méthode classique de détermination des paramètres en photoélasticité, basée sur une méthode manuelle de détermination des positions des franges isoclines et isochromes, est souvent longue. De nouvelles méthodes d'acquisition de données voient le jour, de nouvelles techniques d'analyse de franges isoclines et isochromes se développent et l'automatisation de ces méthodes devient évidente.

#### I.3.1 Polariscopes par réflexion

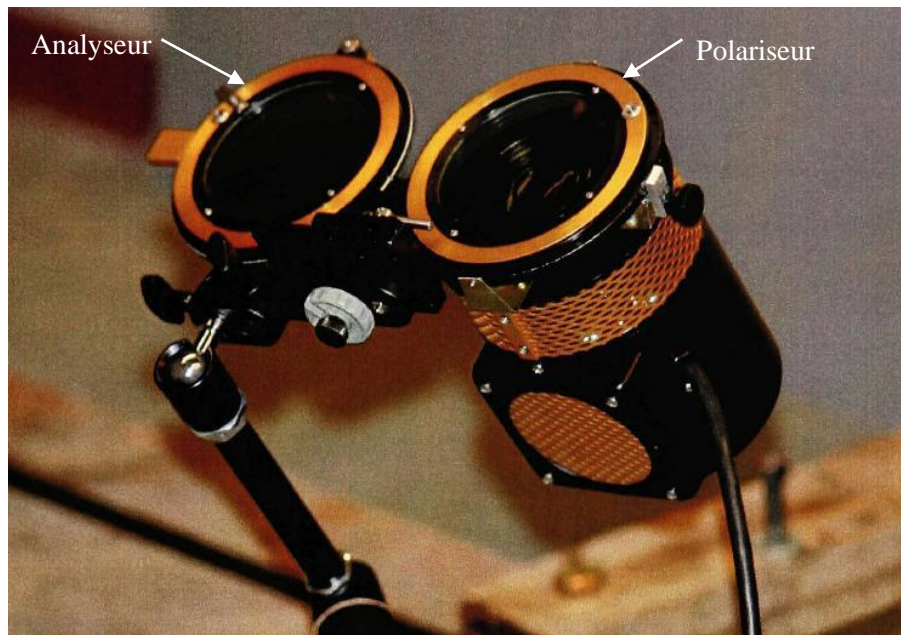
Le principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion et celui d'un polariscope par transmission est le même. Seule la disposition relative des éléments diffère. La source lumineuse et l'observateur se trouvent d'un même côté du corps photoélastiques (Figure I.10).





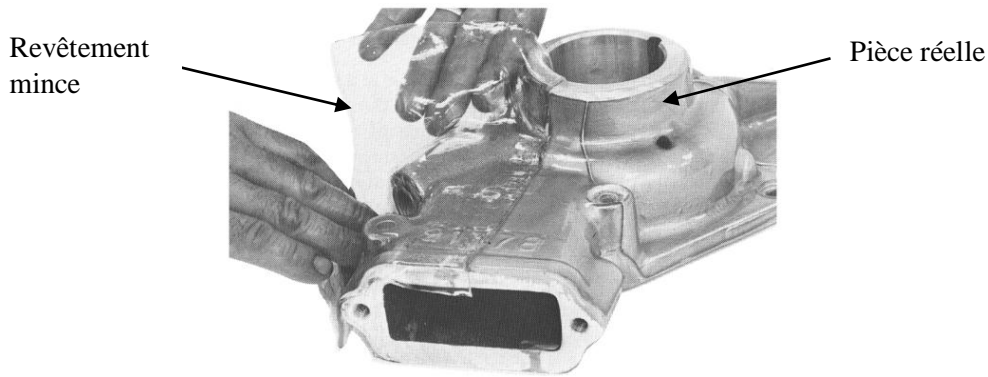
**Figure I.10 :** Principe de fonctionnement d'un polariscope par réflexion

Partant donc de la source, la lumière traverse d'abord le polariseur puis le modèle. Elle est ensuite réfléchi et traverse l'analyseur pour atteindre l'œil de l'observateur ou la caméra. Les polariscope par réflexion sont destinés à être utilisés près des structures réelles, ils sont polyvalents.



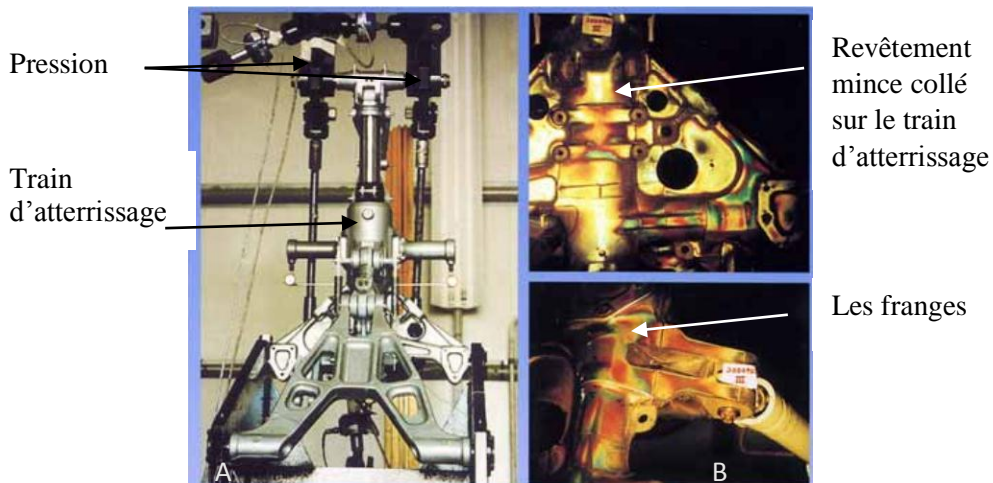
**Figure I.11 :** Polariscopes par réflexion

La photoélasticité par réflexion utilise des revêtements minces collés sur des structures réelles (Figure I.12). C'est la structure qui impose ses déformations au revêtement biréfringent. On mesure donc des déformations qui sont ensuite converties en contraintes.



**Figure I.12 :** Revêtement mince collé sur un modèle

De nos jours, la technique de recouvrement photoélastique (Photo Stress) est toujours utilisée pour mesurer directement les contraintes sur des prototypes ou des structures réelles.



**Figure I.13 :** Recouvrement photoélastique sur un train d'atterrissage d'avion

Les trains d'atterrissage des avions modernes ont été analysés par la photoélasticimétrie en couvrant toute la surface du modèle avec le revêtement photoélastique. Les trains d'atterrissage sont fabriqués à partir d'acier forgé et usiné. L'équipement est un ensemble complexe de pièces soumises à diverses charges statiques et des chocs. Parfois, certaines pièces sont exposées à six conditions de chargement différentes.

La sécurité est évidemment d'une importance primordiale ; de grands facteurs de sécurité doivent être employés à moins que la répartition des contraintes soit connue avec précision pour tous les modes de chargement importants.

Après une étude approfondie et une analyse de la répartition de la déformation superficielle sur tous les composants structurels, les modifications suggérées sont incorporées dans le prototype métallique initial. Une analyse supplémentaire de Photo stress est ensuite effectuée dans le but

d'établir les critères de la conception finale avant la fabrication et l'essai d'acceptation du train d'atterrissage réel. La figure I.13 ci-dessous montre le test du prototype final sur un train d'atterrissage d'un avion de combat à réaction militaire. Dans ce cas, toute la surface de l'engin a été revêtue pour analyse. La figure I.13.B montre le modèle de frange Photo Stress sur plusieurs tronçons du train d'atterrissage.

### **I.3.2 Méthode des vernis craquelant**

Une autre méthode expérimentale permettant d'obtenir les contraintes sur la surface d'un modèle sollicité : le vernis craquelant. Cette méthode peut aider un bureau d'études pour la conception de diverses pièces de systèmes mécaniques fonctionnels. Le vernis craquelant est un procédé très simple et économique d'évaluation des contraintes sur les structures réelles. La surface de la structure est recouverte d'une mince couche d'un vernis qui a la propriété de rompre pour un allongement relativement fixe. Le vernis est fabriqué pour résister à des contraintes faibles, l'élément à étudier n'est donc pas surchargé. Cette méthode est donc classifiée non destructive.

Avantages de la méthode :

- Ne nécessite pas la construction d'un model. Cette méthode peut être appliquée directement à l'élément réel de la machine étudiée.
- Du fait qu'on peut appliquer la méthode à l'élément réel il n'est pas nécessaire de faire une simulation des charges au même de les connaître.
- Donne un champ complet de contrainte avec possibilité de connaître la grandeur et la direction des contraintes principales.
- Les résultats obtenus peuvent être convertis en contraintes d'une façon très simple.

#### **Principe et réalisation**

On enduit les pièces à étudier de vernis puis on attend un certain temps pour laisser sécher. Un jour suffisant et souhaitable. On procède ensuite à l'application des contraintes. On charge la pièce progressivement, lorsque les craquelures apparaissent dans une région les contraintes locales correspondent à un allongement connu. Un accroissement des charges révèle successivement les régions moins contraintes. Généralement la couche de vernis très mince (0,05 à 0,20 mm) en comparaisant avec l'épaisseur de la pièce. On peut donc prendre comme hypothèse : -les

allongements sur la surface de la pièce sont transmis au vernis intégralement de la couche de vernis est uniforme le long de son épaisseur.

#### Résultats obtenues :

- La valeur limite de l'allongement pour laquelle le vernis se fissure est déterminée par étalonnage
- La contrainte principale dans la pièce perpendiculairement aux fissures sur le vernis peut être calculée en utilisant l'équation suivante

$$\sigma_p = E_p \cdot \varepsilon^* \quad (\text{I.6})$$

$\varepsilon^*$  : Valeur limite nécessaire pour fissurer le vernis

L'équation I.6 qui calcule la contrainte principale est très utilisée et acceptée comme suffisamment exacte cependant, elle a une insuffisance, cette formule néglige l'influence d'un état de contrainte biaxial sur la formation des fissures sur le vernis qui existe dans la pratique.

Pour examiner cet effet considérons un élément de surface (figure I.14), on fait que le vernis est mince comparativement au spécimen, les allongements développés sur la surface de l'élément sont transmis sans variations au vernis donc :

$$\varepsilon_{xx}^v = \varepsilon_{xx}^s \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yy}^v = \varepsilon_{yy}^s \quad (\text{I.7})$$

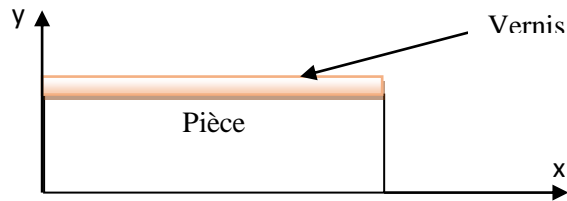


Figure I.14 : pièce vernis

Il est aussi raisonnable de prendre :  $\varepsilon_{zz}^v = \varepsilon_{zz}^s = 0$ , on a donc un état de contrainte plan qui nous donne :

$$\text{Pièce} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^s = \frac{1}{E^s} (\sigma_{xx}^s - \nu^s \sigma_{yy}^s) \\ \varepsilon_{yy}^s = \frac{1}{E^s} (\sigma_{yy}^s - \nu^s \sigma_{xx}^s) \end{cases}$$

Et (I.8)

$$\text{Vernis} \begin{cases} \varepsilon_{xx}^v = \frac{1}{E^v} (\sigma_{xx}^v - \nu^v \sigma_{yy}^v) \\ \varepsilon_{yy}^v = \frac{1}{E^v} (\sigma_{yy}^v - \nu^v \sigma_{xx}^v) \end{cases}$$

En remplaçant I.8 dans I.7 on obtient :

$$\frac{1}{E^s}(\sigma_{xx}^s - \nu^s \sigma_{yy}^s) = \varepsilon_{xx}^v = \frac{1}{E^v}(\sigma_{xx}^v - \nu^v \sigma_{yy}^v)$$

et (I.9)

$$\varepsilon_{yy}^s = \frac{1}{E^s}(\sigma_{yy}^s - \nu^s \sigma_{xx}^s) = \varepsilon_{yy}^v = \frac{1}{E^v}(\sigma_{yy}^v - \nu^v \sigma_{xx}^v)$$

Après transformation on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^v &= \frac{E^v}{E^s(1-\nu^v\nu^s)} [(1-\nu^v\nu^s)\sigma_{xx}^s + (\nu^v - \nu^s)\sigma_{yy}^s] \\ \sigma_{yy}^v &= \frac{E^v}{E^s(1-\nu^v\nu^s)} [(1-\nu^v\nu^s)\sigma_{yy}^s + (\nu^v - \nu^s)\sigma_{xx}^s] \end{aligned} \quad (I.10)$$

Ces deux équations représentent l'état de contrainte plan dans le vernis.

#### **Etalonnage du vernis :**

Le vernis craquelant peut être calculé en utilisant une lame d'acier induite de vernis à étalonner. La lame d'acier est donc le spécimen, les contraintes sont donc :

$$\sigma_{xx}^s = E^s \varepsilon_{xx}^s \quad \sigma_{yy}^s \approx 0 \quad (I.11)$$

On pose

$$\varepsilon_t^* = \varepsilon_{xx}^s \quad (I.12)$$

Pour obtenir la valeur limite d'allongement du vernis.

En remplaçant I.11 et I.12 dans I.10 on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^v &= \frac{E^v}{1-\nu^v\nu^s} (1-\nu^v\nu^s) \varepsilon_t^* = \frac{E^v}{E^s(1-\nu^v\nu^s)} (1-\nu^v\nu^s) \sigma_{xx}^s \\ \sigma_{yy}^v &= \frac{E^v}{1-\nu^v\nu^s} (1-\nu^v\nu^s) \varepsilon_t^* = \frac{E^v}{E^s(1-\nu^v\nu^s)} (1-\nu^v\nu^s) \sigma_{xx}^s \end{aligned} \quad (I.13)$$

Avec

$\nu^*$  : Coefficient de poisson de la lame

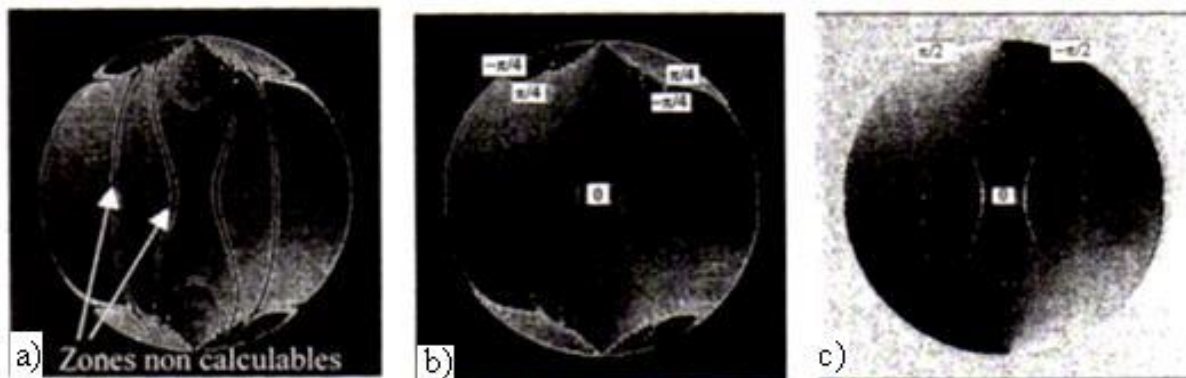
$\sigma^*$  : Contrainte uniaxiale nécessaire pour fissurer le vernis

$E^*$  : Module d'élasticité de la lame

### I.3.3 Méthodes utilisant plusieurs configurations de polariscope

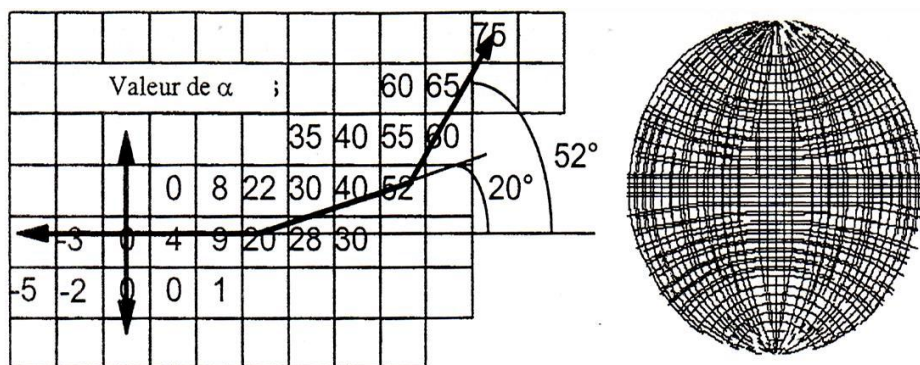
Des méthodes utilisant plusieurs configurations de polariscope, permettent de déterminer les paramètres isoclines  $\alpha$  et isochromes  $\varphi$  en exploitant la valeur de l'intensité lumineuse émergente. A chaque configuration correspond une forme particulière de l'expression générale de l'intensité. La combinaison de plusieurs de ces équations permet de calculer les paramètres isoclines  $\alpha$  et isochromes  $\varphi$ , en tout point du modèle.

Les différentes étapes expérimentales pour le calcul du paramètre isocline sont schématisées sur les (figures I.15).



**Figure I.15 :** Étapes de calcul de  $\alpha$  a) résolution de l'équation donnant  $\alpha$  en fonction des différentes intensités de lumière b) interpolation linéaire pour combler les zones non analysables c) recalage du paramètre isocline [5]

Les valeurs du paramètre isocline sont utilisées pour tracer automatiquement les isostatiques. Le tracé des isostatiques est directement issu de la définition des courbes isoclines qui donnent l'orientation de l'une des directions principales. Ainsi on peut dessiner de proche en proche à partir d'un point initial les courbes dont la pente est égale au paramètre isocline suivant le schéma simplifié de la (figure I.16). [5]



**Figure I.16 :** Tracé des lignes isostatiques [5]

### I.3.4 Méthodes utilisant plusieurs longueurs d'ondes

Les franges isochromes sont obtenues à partir d'une image du modèle placé dans un polariscope circulaire en champ sombre à plusieurs longueurs d'onde. Pour déterminer leurs ordres de franges, on étudie l'évolution des franges en fonction de la longueur d'onde. En effet, pour deux longueurs d'onde différentes ( $\lambda_1, \lambda_2$ ), les réseaux d'isochromes observés sont différents, puisque la valeur de la constante de frange est inversement proportionnelle à la longueur d'onde. La seule frange qui ne change pas avec la longueur d'onde est la frange d'ordre zéro, elle est donc facilement observable. Ils enregistrent donc deux réseaux d'isochromes obtenus pour deux longueurs d'ondes différentes. Ils les superposent pour identifier les franges d'ordre zéro, qui sont les seules à se superposer parfaitement. Ensuite, partant de ces franges, un programme numérique identifie les autres franges en comparant les deux réseaux entre eux.

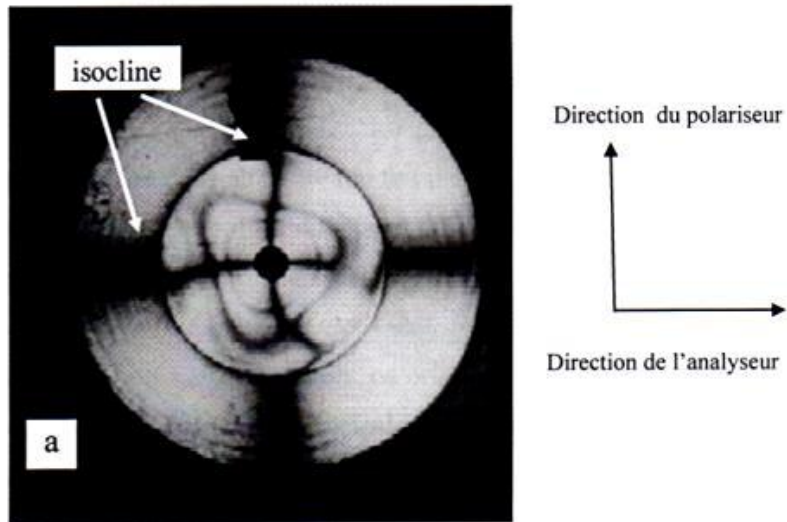
Cette méthode permet d'extraire les lignes centrales des franges de manière plus précise que la technique d'amincissement, dans le cas d'images non bruitées. Une fois les franges obtenues, à partir des isochromes ils déterminent automatiquement les ordres de franges en utilisant deux longueurs d'ondes, s'il y'a une frange d'ordre zéro. Autrement ils doivent intervenir directement dans le procédé pour donner l'ordre de frange le plus faible [6].

### I.3.5 Méthode du tracé des isostatiques et calcul des isochromes

A. Bilek [7] a utilisé une méthode d'analyse de contraintes développées dans deux pièces emmanchées en photoélasticimétrie en utilisant le traitement des images obtenues à l'aide d'une caméra CCD pour traiter un problème bidimensionnel. Les directions des contraintes principales sont tracées automatiquement sur les deux pièces en quelques secondes après traitement des images à l'aide du logiciel PHOTO2D. Le logiciel permet de calculer le paramètre isocline et le paramètre isochrome. La valeur de la différence des contraintes principales peut alors être déterminée automatiquement le long d'une ligne quelconque appartenant au modèle. Les réseaux des isostatiques sont tracés automatiquement par simple clique de la souris sur toute la surface du modèle.

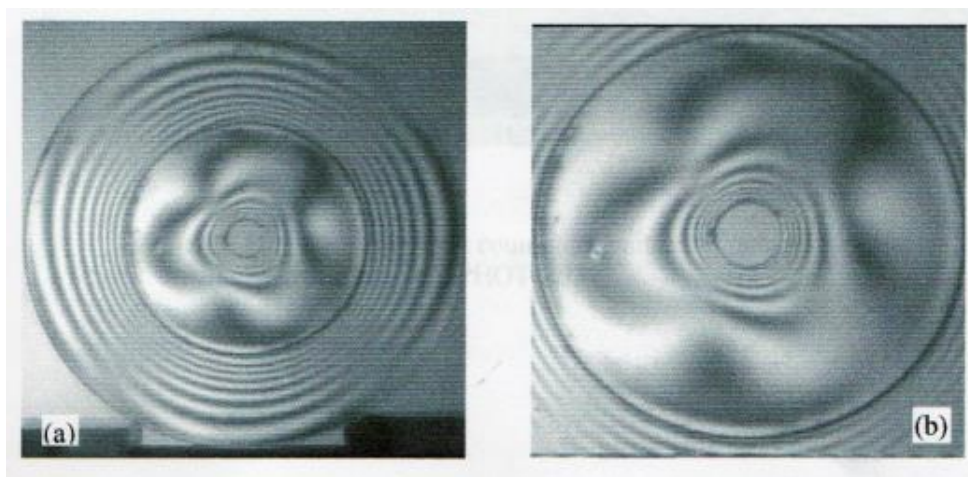
Le réseau d'isoclines obtenu sur le polariscope forme des franges noires. Tous les points appartenant à ces franges ont leurs directions principales des contraintes parallèles soit à l'axe du polariseur soit à l'axe de l'analyseur (Figure I.17).





**Figure I.17 :** Isoclines obtenues sur le polariscope en lumière plane [7]

L'enregistrement des images nécessaires pour le tracé automatique des isoclines est réalisé à l'aide d'une caméra CCD. On rappelle que les contraintes sont considérées constantes le long de l'épaisseur du modèle. Deux séries d'images sont enregistrées ; la première série (Figure I.18.a) servira à traiter la couronne extérieure et la deuxième série obtenue en zoomant sur le modèle (Figure I.18.b) servira à traiter la couronne intérieure. Les différentes images sont enregistrées pour des positions différentes des polaroids et des quarts d'ondes puis traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D.

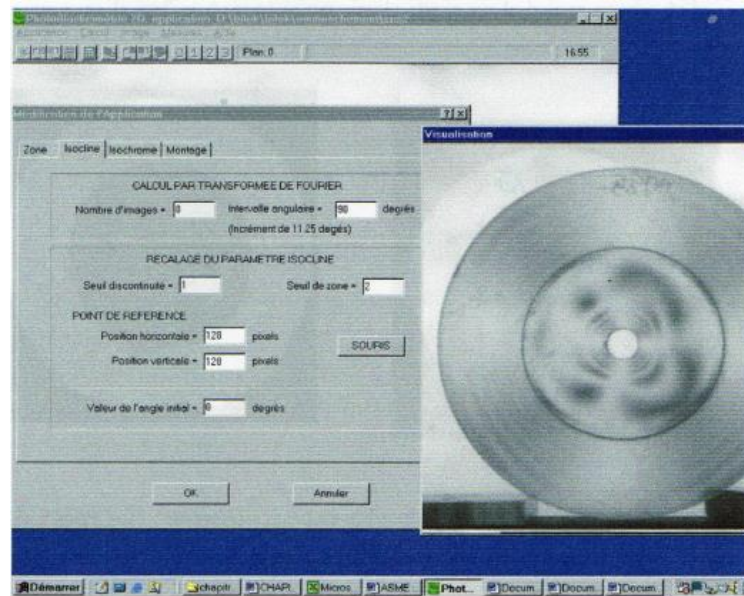


**Figure. I.18 :** Franges isochromes sur les deux couronnes [7]

Le principe de l'analyse des contraintes par la méthode PHOTO2D est basée sur les transformées de Fourier. Elle permet de retrouver le paramètre isochrome et le paramètre isocline et ainsi tracer les isostatiques qui sont les trajectoires des directions principales des contraintes sur toute la surface du modèle.



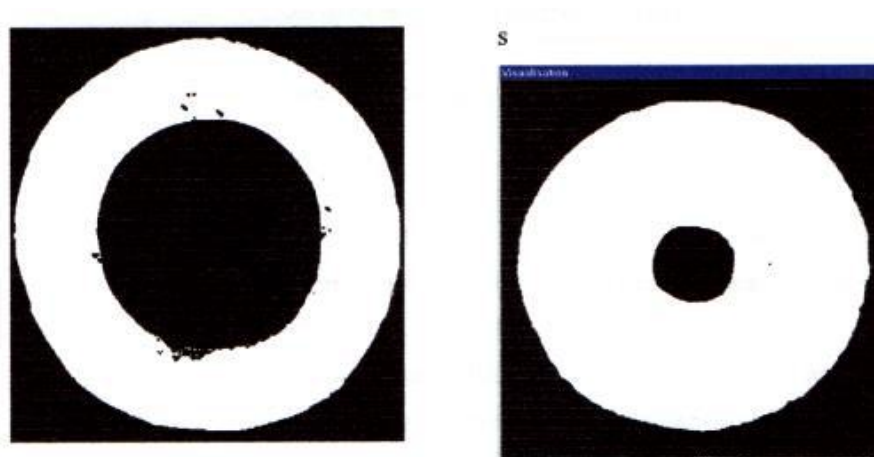
Le logiciel PHOTO2D (Figure I.19) nous offre la possibilité de régler tous les paramètres nécessaires pour le calcul. La longueur d'onde, la constante optique de la matière utilisée, la valeur de l'angle initial et la valeur de l'ordre dans un point choisi sur l'image du modèle étudié sont introduites dans le logiciel pour permettre le calcul.



**Figure I.19 :** Image des deux couronnes traitées à l'aide du logiciel PHOTO2D [7]

- **Mode opératoire**

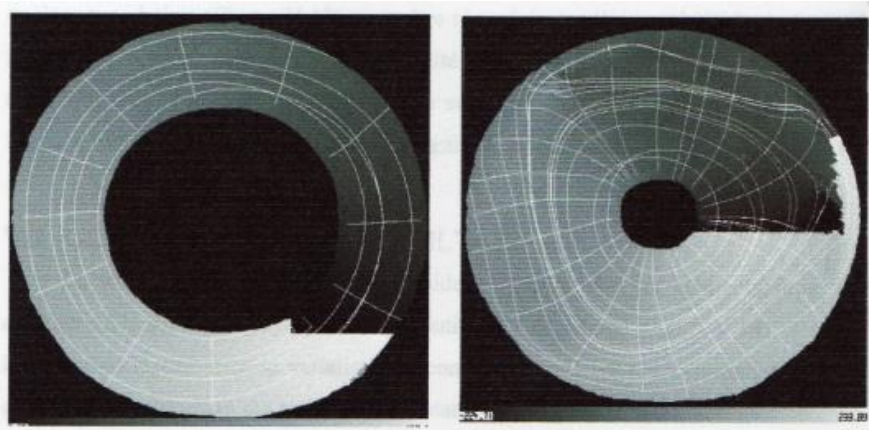
Une fois les huit images enregistrées, le logiciel PHOTO2D crée un masque objet (Figure I.20) pour définir la zone de l'image à traiter ; c'est à dire la zone à l'intérieur de laquelle les calculs seront effectués. Deux masques sont donc créés, un pour la couronne extérieure et un autre pour la couronne intérieure. Le logiciel ne procède donc au calcul que dans la partie claire de l'image qui représente le modèle analysé.



**Figure I.20 :** Images des masques utilisées par le logiciel PHOTO2D pour effectuer les calculs sur les deux pièces [7]

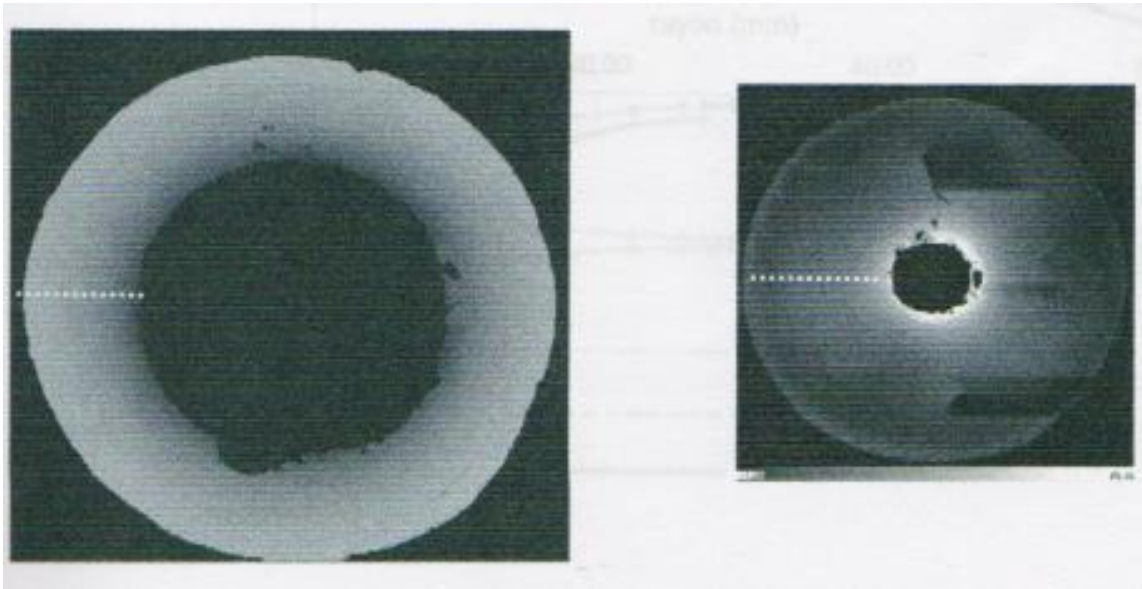
La première étape est le calcul du paramètre isocline. Le paramètre isocline est sauvegardé dans un fichier en niveaux de gris. Les isostatiques peuvent alors être tracées sur toute la surface du modèle par simple clique sur le bouton gauche de la souris.

Après traitement donc avec le logiciel PHOTO2D, les isostatiques représentant les trajectoires des directions principales sont tracés sur toute la surface des modèles. On constate qu'elles forment deux réseaux de courbes orthogonales entre elles (Figure I.21). Pour la couronne extérieure, les isostatiques ont des formes plus ou moins circulaires. Pour la couronne intérieure, les isostatiques sont perturbées. Ceci est dû au fait que le modèle a été usiné sur un tour. Après l'opération d'usinage, la surface intérieure de la couronne extérieure constituant le modèle ne présente pas une surface parfaitement cylindrique à cause du serrage sur le mandrin du tour qui induit des contraintes inconnues lors de l'usinage.



**Figure I.21 :** Représentation des isostatiques (trajectoires des directions principales) [7]

Une fois le paramètre isocline calculé, il est possible d'obtenir le paramètre isochrome (figure I.22) et ainsi donc retrouver la différence des contraintes principales sur toute la surface du modèle. Il suffit de définir une ligne sur l'image représentant les isochromes. Le logiciel calcule la différence des contraintes principales le long de cette ligne et sauvegarde les valeurs réelles des contraintes en MPa dans un fichier pour traitement ultérieur.



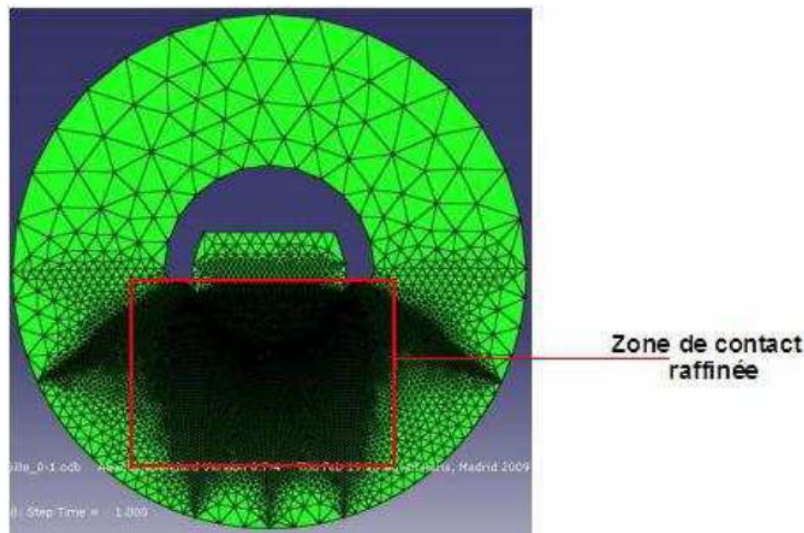
**Figure I.22 :** Images isochromes des deux couronnes obtenues  
à l'aide du logiciel PHOTOP2D [7]

La variation de la différence des contraintes principales le long d'une ligne quelconque choisie (Figure I.22) peut être récupérée sur l'image à l'aide du logiciel PHOTO2D. Ce logiciel offre la possibilité de tracer la variation de l'intensité en niveau gris le long de la ligne choisie sur le modèle et ensuite d'enregistrer un fichier contenant les vraies valeurs des contraintes le long de la ligne choisie.

#### **I.4 QUELQUES TRAVAUX REALISES A L'AIDE DE LA METHODE DE PHOTOELASTICIMETRIE BIDIMENSIONNEL**

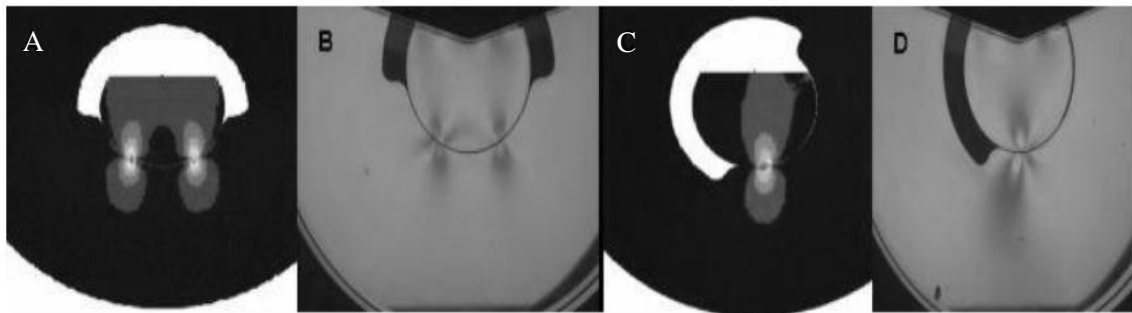
R. Bertolaso [8] a étudié la répartition des contraintes dans le montage bille/gorge en 2D. Ce montage a pour avantage d'être un zoom sur une bille en contact avec la vis. Les objectifs de ce montage sont l'estimation de la variation et de la répartition des charges, de l'angle de contact et de la pression de contact, suivant la direction de la charge. Il a utilisé la photoélasticimétrie bidimensionnelle et la méthode des éléments finis (ABAQUS). Les éprouvettes usinées sont en époxy. La réalisation des modèles montre une forte sensibilité du matériau à l'usinage. Ils observent des contraintes résiduelles importantes au niveau des zones usinées. Un traitement thermique du matériau s'est avéré nécessaire afin d'éliminer ces contraintes résiduelles.

Les conditions de contact sont sensibles à la géométrie des surfaces en contact, ce qui signifie que le maillage éléments finis à proximité de la zone de contact doit être hautement raffiné (Figure I.23). L'ensemble est maillé par 19571 éléments CPS3 triangulaires linéaires en contraintes planes.



**Figure I.23 :** Maillage raffiné au voisinage du contact [8]

Les images A et C représentent les franges numériques alors que les images B et D représentent les franges expérimentales. La comparaison des résultats expérimentaux et numériques a permis de valider les conditions aux limites. Il a mis en évidence l'influence de l'angle de contact sur cette même répartition de charges (Figure I.24).

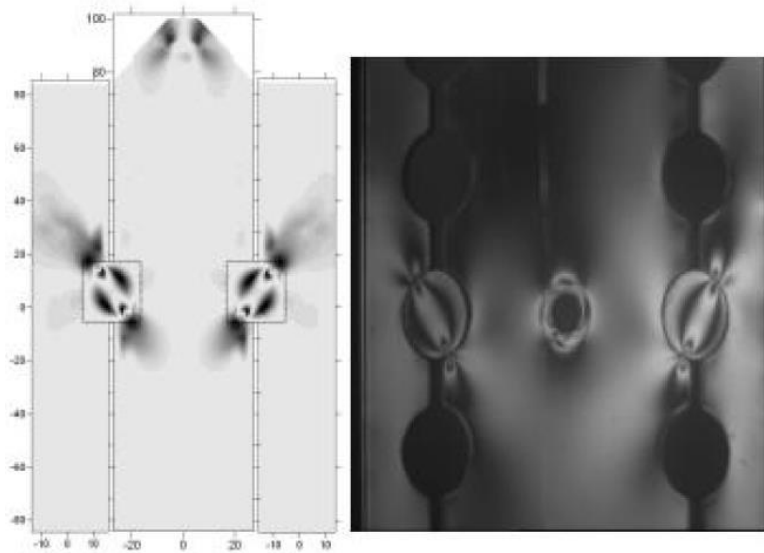


**Figure I.24 :** Frange numérique et expérimentales [8]

R. Bertolaso [9] a utilisé aussi la photoélasticimétrie bidimensionnelle et la méthode des éléments finis pour l'étude de la répartition des contraintes dans une vis à bille. Les matériaux des éprouvettes réalisées ont été choisis afin de reprendre correctement aux exigences optiques de la photoélasticimétrie.

Figure I.25 montre les franges isochromes relevées expérimentalement et les franges isochromes calculé avec ABAQUS. R. Bertolaso a pu conclure que la simulation est représentative du cas expérimental et que les conditions aux limites sont bien adaptées.





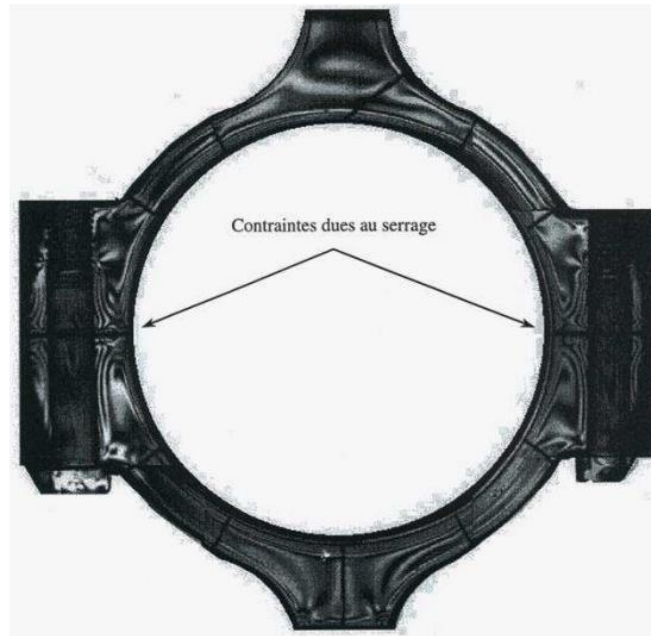
**Figure I.25** : Validation des franges : vis à billes une rangée [9]

Hoang [10] a présenté une modélisation expérimentale de la lubrification thermoélastohydrodynamique d'un palier maquette de tête de bielle. Ils ont comparé les résultats expérimentaux et les résultats numériques, ils ont utilisé un logiciel EHD.



**Figure I.26** : Tête de bielle de 4 parties en matériau PLM4 (époxy) [10]

La figure I.27 montre qu'il apparaît des contraintes de serrage sous l'influence des vis. Les champs des contraintes sous forme de franges d'isochrome ont été obtenus par photoélasticimétrie.



**Figure I.27 :** Champs d'isochrome du palier [10]

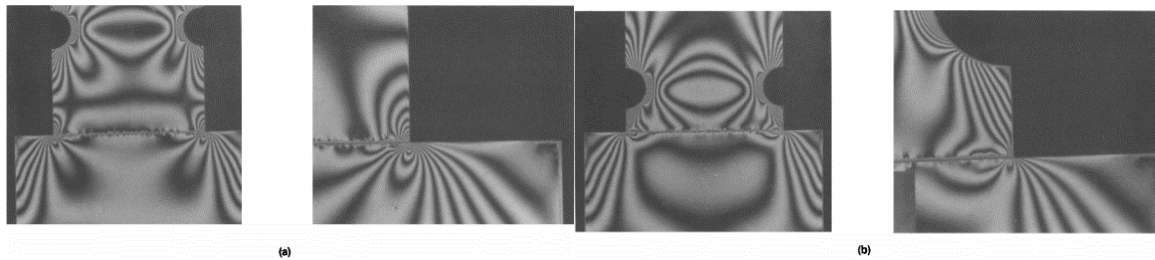
Sathish Gandhi [11] a présenté une étude en considérant une analyse de contact élasto-plastique, d'une sphère rigide sur un plat déformable, en utilisant l'analyse par éléments finis. L'effet du module tangent sur le comportement du matériau dû à un frottement minime de contact élasto-plastique adhésif a été analysé à l'aide d'un logiciel d'éléments finis appelé ANSYS. Le résultat obtenu dans [11] montre clairement que, pour différents modules tangents, le matériau subit différentes valeurs de contraintes. Lorsque ce module tangent augmente, la valeur de dureté du matériau augmente également. Avec l'augmentation du module tangent, l'écrouissage (résistance à la déformation d'un matériau) accroît et le matériau devient capable de supporter de grandes charges dans une zone de contact plus petite.

Y. Kadin, Y. Kligerman, I. Etsion [12] ont présenté aussi une étude par éléments finis d'un contact sphérique élastique-plastique, ils ont utilisé un logiciel ANSYS pour résoudre le problème de contact de chargement/déchargement. Le chargement-déchargement répété d'une sphère élastique-plastique en contact avec un plat rigide est un problème physique fondamental et compliqué. La sphère a été analysée pour une gamme de propriétés de matériau et de durcissement isotrope linéaire.

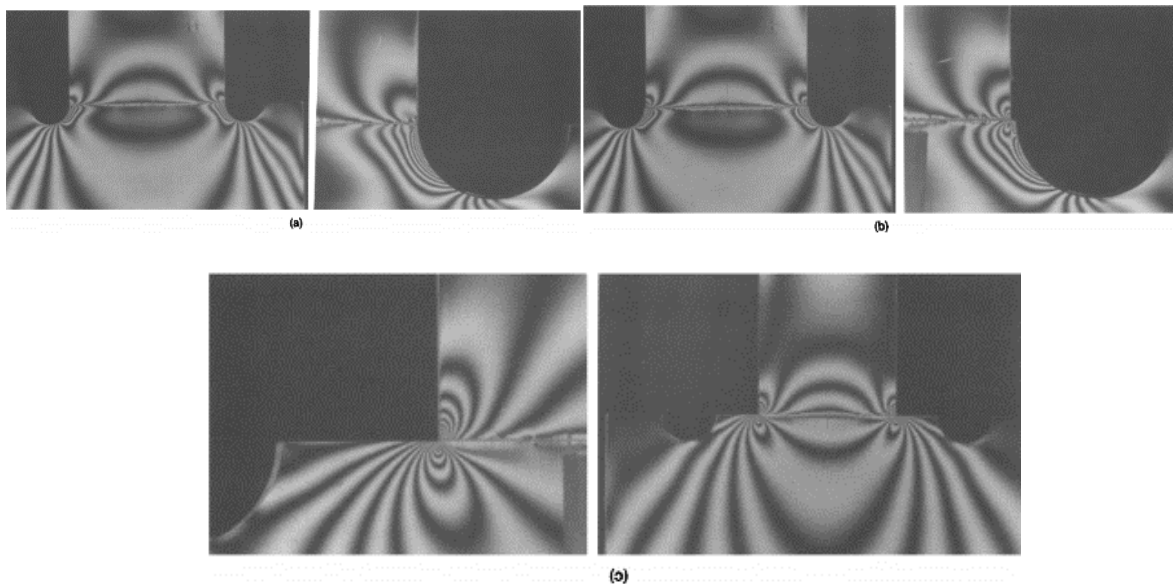
Y. Kadin, Y. Kligerman, I. Etsion utilisent le critère de rendement de Von Mises pour détecter la transition local entre les déformations élastiques et plastiques. Ils sont montrés que la majeure partie de la déformation plastique se produit pendant le premier chargement, un écoulement plastique secondaire peut évoluer pendant le premier déchargement. Ils ont constaté que la contrainte équivalente résiduelle de VM dans une région circonférentielle proche du bord de la zone de contact augmente pendant le premier déchargement. Ils ont constaté aussi que l'interférence naissante pour le

flux plastique secondaire était indépendante du rapport  $\frac{E}{Y_0}$  mais sensiblement affectée à la fois par le rapport de Poisson et le taux de durcissement exprimé par le rapport de module tangentiel  $\frac{E_T}{E}$ .

Bijak-Zochowski [13] a appliqué la méthode photoélastique afin de mesurer les contraintes locales qui se développent dans les coins d'un pénétrateur à angles droits comprimant un corps semi infini. La méthode consiste à introduire des changements géométriques sur la configuration du pénétrateur ou du corps semi infini en réalisant une entaille circulaire, dans un premier temps le long du bord libre du pénétrateur, ou bien dans le corps semi infini (Figure I.28, I.29).



**Figure I.28 :** Emplacement de l'encoche circulaire dans le pénétrateur [13]

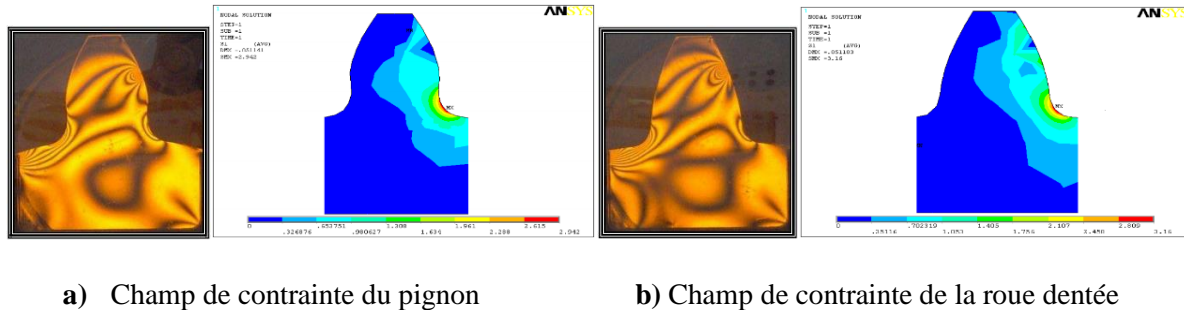


**Figure I.29 :** Emplacement de l'encoche circulaire dans le demi-plan[13]

Bijak-Zochowski a montré que les contraintes singulières dans le bord d'angle droit d'un pénétrateur comprimant un corps semi-infini peuvent être contrôlés ou éliminés totalement par des gorges de dégagement (encoche circulaire). Cependant, la concentration de contraintes est un plan semi-infini ; les contraintes peuvent être diminuées mais jamais éliminées.

Konstandinos G. Raptis [14] a présenté dans son travail une analyse expérimentale à l'aide de la photoélasticimétrie et une analyse numérique par les éléments finis à l'aide d'un logiciel ANSYS

d'un contact d'engrenages. Il a utilisé quatre échantillons d'engrenages de différents nombre de dents. Cette étude a examiné le calcul de la contrainte maximal au pied de la dent. Pour chaque cas, il a étudié la variation du nombre de dents de la roue et du pignon. La figure I.30 illustre les contraintes pour une combinaison correspondant au nombre de dent 15/28 relevées expérimentalement et celles simulées numériquement à l'aide du logiciel ANSYS.



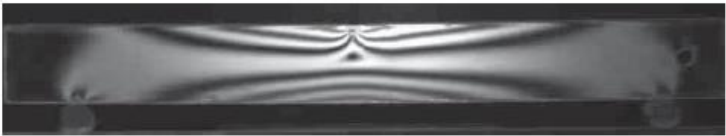




**Figure I.30 :** Résultats numériques et expérimentaux pour les champs de contraintes sur le pignon et la roue dentée pour une combinaison 15/28 [14]

Konstandinos G. Raptis a montré que la méthode photoélasticimétrie est une méthode optique largement appliquée pour étudier le champ de contraintes dans les engrenages. La comparaison des résultats des deux méthodes appliquées a prouvé que les écarts sont acceptables.

Budimir [15] a analysé une étude numérique pour le problème élastique bidimensionnel. Dans son modèle numérique du contact de Hertz entre deux solides il a considéré l'état de contrainte plan. Les contraintes de contact ont été calculées en utilisant des matériaux ayant des modules d'élasticité différents : un cylindre en aluminium sur une plaque rectangulaire en acier. Il a montré une bonne corrélation avec les résultats théoriques. Il a montré aussi que la contrainte normale maximale a lieu au centre de la surface de contact et qu'elle décroît invariablement vers zéro à l'extrémité. Il en résulte donc que les surfaces de contact sont fonction des modules de Young des deux solides en contact. Il a étudié aussi l'effet de la friction avec le même couple de matériaux. Il a aussi analysé les conditions d'adhérence et de glissement pour des matériaux de modules de Young différents.

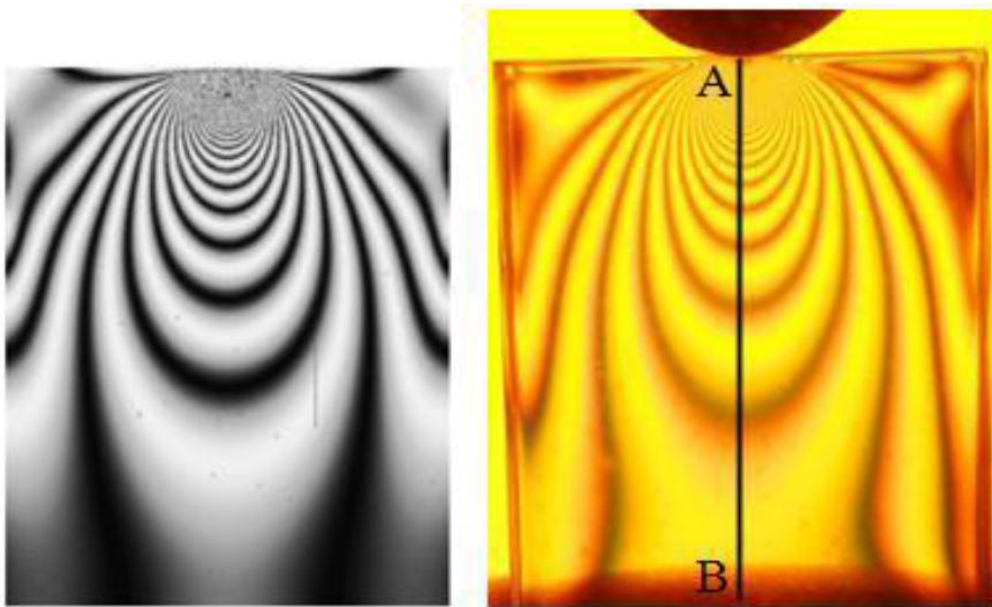
A. Zénina [16] a montré que pour un essai de flexion trois points, des différences très nettes peuvent apparaître dans les figures de franges selon le type de maillage et les conditions aux limites posées dans la simulation numérique.



Franges expérimentales	
Franges simulées avec un maillage rectangulaire (100×40nœuds)	1 
Franges simulées avec un maillage triangulaire (100×40nœuds)	2 
Franges simulées avec un maillage rectangulaire (30×8nœuds)	3 
Franges simulées avec maillage rectangulaire (100×40nœuds) et autres CL	4 

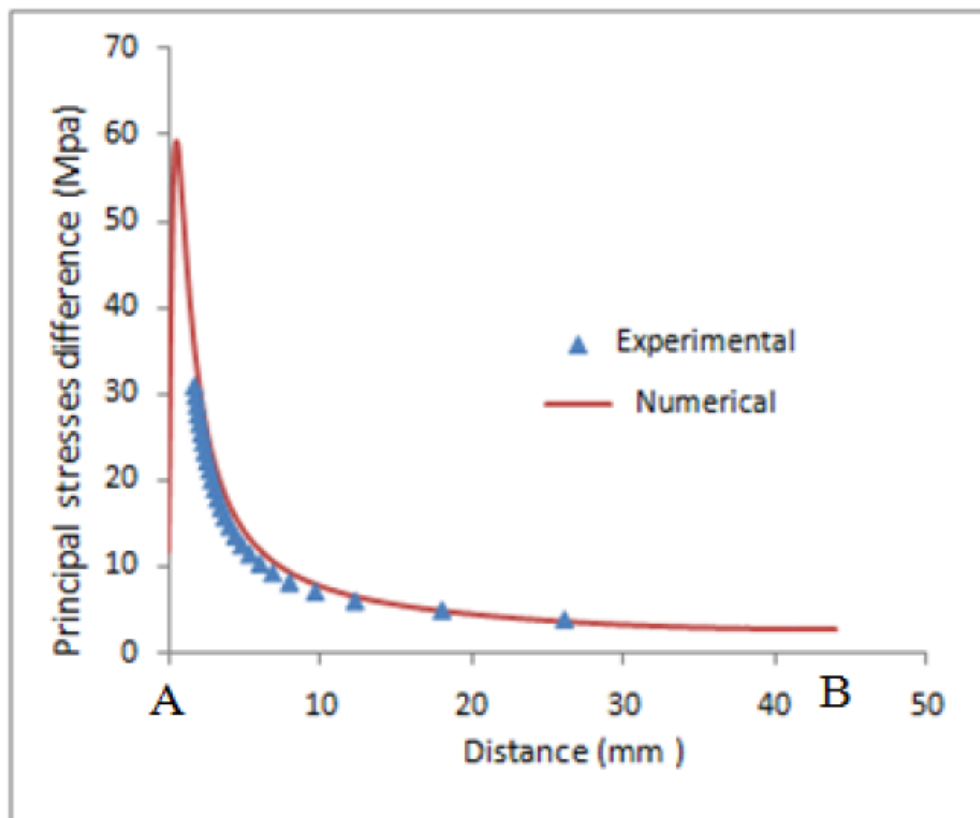
**Figure I.31 :** Simulations numériques et image expérimentale pour une plaque soumise à un essai de flexion [16]

A. Bilek [17] a utilisé la photoélasticimétrie et la méthode des éléments finis pour étude du contact cylindre sur plan et plan sur plan [18] à température ambiante. Il a étudié le champ des contraintes, de la variation de la différence de contraintes principales, des franges isochromes et isoclines porte sur le contact d'un cylindre rigide sur un plan déformable, en époxy sous une charge appliquée de 1000Newton. Il a constaté que l'image expérimentale obtenue par photoélasticimétrie se superpose largement avec l'image donnée par CASTEM et traité avec le logiciel SURFER (Figure I.32).



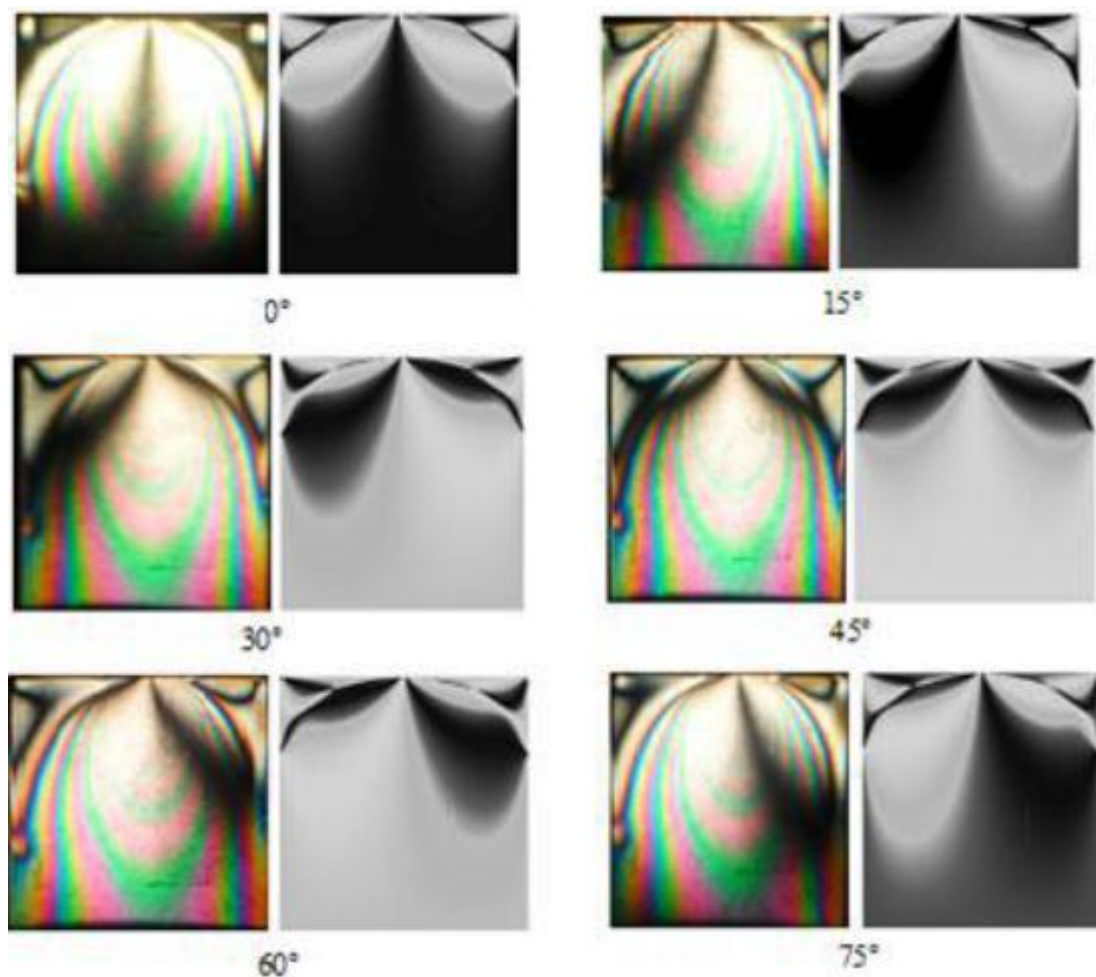
**Figure I.32 :** Franges isochromatiques, simulées (à gauche) et expérimentales (à droite) [17]

La figure I.33 montre qu'il y'a une bonne concordance des résultats ; Les valeurs des contraintes obtenues expérimentalement sont proches des valeurs obtenues par la simulation.



**Figure I.33 :** Différence des contraintes principales le long de l'axe vertical de symétrie [17]

Pour la comparaison des isoclines obtenues numériquement et expérimentalement pour les différentes rotations de l'angle  $\alpha$ , la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle à l'un des axes des polaroids. La figure I.34 représente la comparaison des isoclines obtenues numériquement et traitées avec le logiciel Surfer (images en noir et blanc); les isochromes ne sont pas représentées sur ces simulées. Cependant, expérimentalement nous observons aussi les images des isochromes; c'est les images en couleur placées à gauche. Nous observons une bonne concordance des franges isoclines simulées avec les franges expérimentales.



**Figure I.34 :** Comparaison des franges isoclines expérimentales (gauche) et simulées (droite) pour différents angles [17]

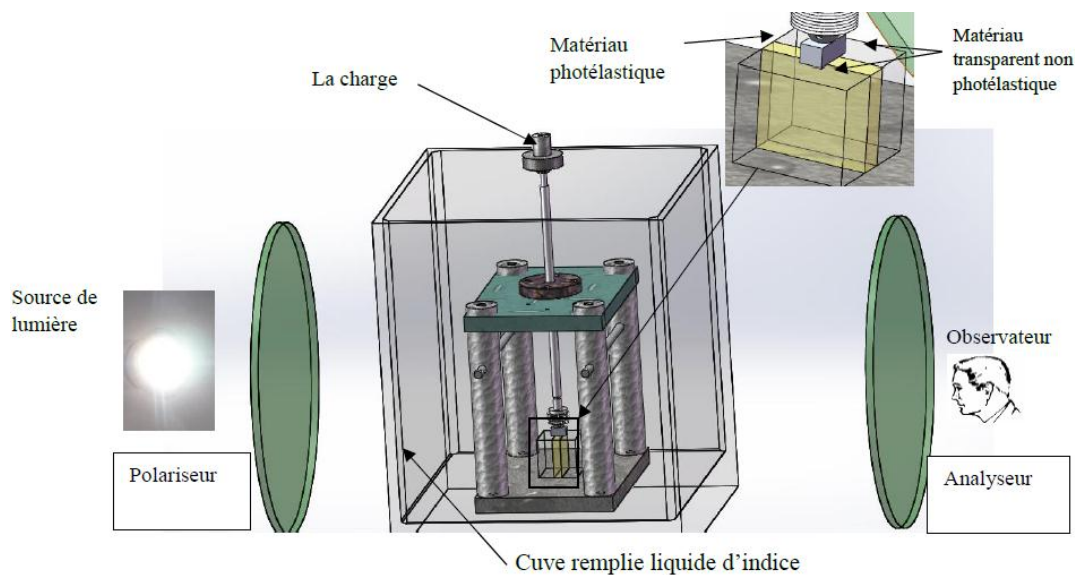
## I.5 METHODES D'ANALYSE DES CONTRAINTES EN PHOTOELASTICIMETRIE 3D

Après avoir exposé quelques travaux sur l'analyse des contraintes en 2D de quelques auteurs, nous passons à présent à la présentation de l'analyse des contraintes en 3D.

### I.5.1 La méthode des tranches incluses

Cette méthode [19] consiste à incorporer par collage une tranche plane d'un matériau photoélastique de quelques millimètres d'épaisseur entre deux parties d'un autre matériau transparent très peu photoélastique. Ces deux matériaux qui constituent donc le modèle tridimensionnel doivent avoir des caractéristiques mécaniques voisines. Le modèle chargé est placé dans un polariscope classique.

Pour éviter la réfraction, le modèle est immergé dans un liquide de même indice de réfraction (figure I.35). Cette méthode est très simple d'utilisation mais elle présente de nombreux inconvénients comme la difficulté d'obtenir deux matériaux ayant les mêmes caractéristiques mécaniques. Aussi, il est nécessaire d'utiliser un modèle par tranche étudiée. Plusieurs modèles sont donc nécessaires pour réaliser une étude complète d'un problème donné.



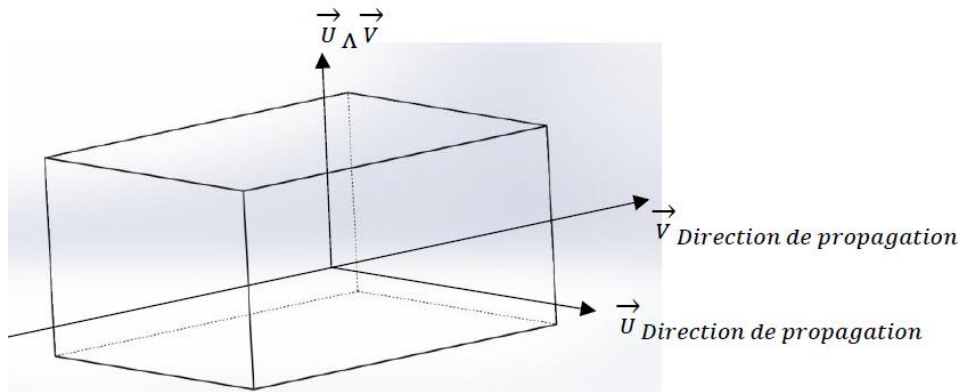
**Figure I.35** : Méthode des tranches incluses

La méthode présentée a comme principal inconvénient d'être destructive contrairement aux méthodes suivantes qui font appel aux propriétés de diffusion de la lumière. Un seul modèle est alors suffisant pour une étude complète.

### I.5.2 Méthodes utilisant le phénomène de diffusion de la lumière

Ces méthodes utilisant le phénomène de diffusion de la lumière par le milieu photoélastique. Lorsqu'un faisceau lumineux de polarisation quelconque passe à travers un milieu transparent, une partie de l'énergie est diffusée par chaque point le long de son chemin et suivant une direction perpendiculaire à la direction de propagation de la lumière. Si ce faisceau se propage le long de la

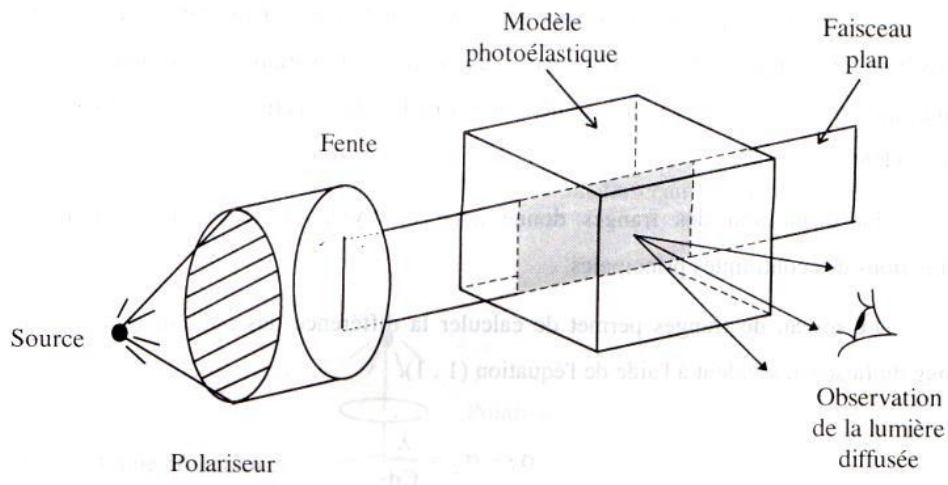
direction  $V$ , suivant la direction  $U$  normale à  $V$ , l'intensité lumineuse diffusée est polarisée rectiligne suivant la direction  $\vec{U} \wedge \vec{V}$  (Figure I.36). L'idée de l'utilisation de la lumière diffusée dans la photoélasticimétrie pour résoudre les problèmes bidimensionnels revient à Weller en 1939.



**Figure I.36 :** Polarisation de la lumière diffusée

### I.5.3 Méthode de Weller

La technique proposée par Weller [20] consiste à éclairer une section plane du modèle photoélastique par un faisceau lumineux plan polarisé rectiligne, et à observer dans diverses directions normales au faisceau incident. Cette méthode, utilisant la diffusion comme analyseur, suppose que les directions principales ne changent pas d'orientation le long du faisceau lumineux incident. C'est-à-dire que l'action du pouvoir rotatoire est négligeable. Pour éviter les problèmes de réfraction, le modèle est placé dans une cuve à liquide d'indice.



**Figure I.37 :** schéma de la méthode de Weller

Les franges observées sur l'ensemble du champ n'ont pas partout le même contraste. Ce contraste est maximum quand les directions de polarisation incidentes et d'observation sont à  $\frac{\pi}{4}$  des



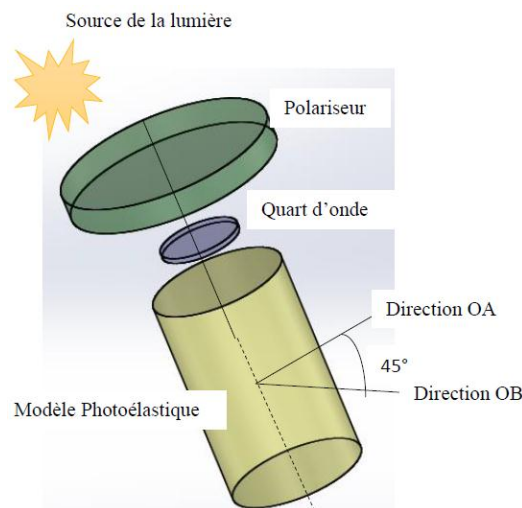
directions principales secondaires. Par contre, les franges disparaissent lorsque la polarisation incidente est parallèle aux axes à l'entrée du modèle. Elles disparaissent également dans les zones où l'observation est effectuée suivant l'un des axes principaux secondaires. Dans le cas d'une lumière incidente circulaire l'intensité du rayonnement diffusé est uniforme. La disparition des franges permet de déterminer l'orientation des axes principaux secondaires. La mesure de l'interfrange  $d$ , dans le réseau de franges, fournit la différence des contraintes principales secondaires (direction principale dans un plan perpendiculaire à une direction donnée, par exemple la direction du faisceau lumineux d'entrée à l'aide de l'équation suivante :

$$\sigma' - \sigma'' = \frac{\lambda}{Cd}$$

Où  $(\sigma', \sigma'')$  sont les contraintes principales,  $C$  représente la constante photoélastique du matériau et  $\lambda$  est la longueur d'onde. Cette méthode reste simple, mais il faut cependant vérifier que les axes principaux conservent la même direction en tout point de la section éclairée.

### I.5.5 Méthode de Cheng

Cette technique utilise le phénomène de diffusion comme analyseur [21]. Le modèle est éclairé par un faisceau lumineux polarisé circulaire. L'observation est effectuée simultanément suivant deux directions OA et OB à  $\frac{\pi}{4}$  l'une de l'autre et située dans un plan orthogonal au faisceau incident. Cheng enregistre les intensités diffusées suivant la direction OA et la direction OB lorsque le modèle est chargé ( $I_A, I_B$ ) et déchargé ( $I'_A, I'_B$ ).



**Figure I.38 : Méthode de Cheng**

Lorsque le model est chargé, les expressions des intensités sont :

$$I_A = \frac{I_0}{2}(1 + \cos 2\alpha \sin \varphi); I_B = \frac{I_0}{2}(1 + \sin 2\alpha \sin \varphi)$$

Où  $\alpha$  est l'orientation des contraintes principales par rapport aux axes de la lame quart d'onde et  $\varphi$  le déphasage.

Quand le model est déchargé,  $\varphi = 0$ , l'équation (1.2) précédente devient :

$$I'_A = I'_B = \frac{I_0}{2}$$

Au point O, les valeurs de  $\alpha$  et  $\varphi$  sont calculées à l'aide des équations (1.4) :

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{Y}{X} \right);$$

$$\varphi = \arcsin \pm \left( \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{I_0} \right)$$

$$\text{Avec } X = I_A - \frac{I_0}{2} \quad \text{et } Y = I_B - \frac{I_0}{2}$$

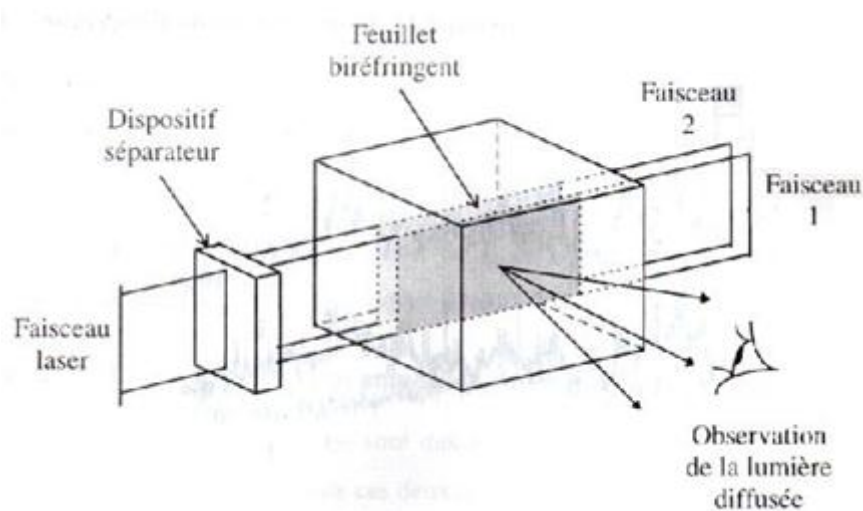
Le modèle étant disposé sur une plateforme, il peut être déplacé pas à pas parallèlement ou perpendiculairement au faisceau lumineux de manière à étudier tous les points du modèle. La méthode est simple et facilement automatisable car les relevés avant et après le chargement sont directement traités à l'aide d'un ordinateur. Cependant cette méthode analogue dans son principe à celle de Weller ne peut pas être utilisée s'il y a rotation des directions principales.

### I.5.6 Méthode de découpage optique

La photoélasticimétrie 3D par découpage optique est une méthode à champ complet non destructive basée sur le principe du découpage optique développé par R. Desailly [22]. Cette technique consiste à isoler une tranche biréfringente à l'intérieur d'un modèle photoélastique par deux faisceaux lumineux plans (figure I.39). Lorsqu'un faisceau plan de lumière cohérente traverse un milieu diffusant, chaque point de la section éclairée se comporte comme une source lumineuse. Ces sources étant cohérentes entre elles, elles interfèrent et donnent naissance à des régions d'intensité maximale ou minimale. Les possibilités d'interférence des rayonnements des deux sections éclairées dépendent de la différence de chemin optique et donc de la biréfringence du feuillet isolé. Cependant, la visualisation directe de la biréfringence est impossible expérimentalement. Pour extraire ces informations il est nécessaire d'étudier les caractéristiques de la lumière diffusée.

Perpendiculairement aux faisceaux plans. On observe donc un champ de granularité provenant de l'interférence des rayonnements diffusés par chacune des deux sections éclairées. Ce phénomène a été étudié par R. Desailly [22]. Il a développé une méthode qui permet d'obtenir d'une manière globale,

les paramètres isocline et isochrome d'un feuillet plan isolé optiquement à l'intérieur d'un modèle photoélastique chargé. Il enregistre le champ résultant diffusé sur film holographique. Après développement, il obtient le contraste du champ de granularité par filtrage optique et visualise ainsi les franges. Le contraste de franges photoélastiques obtenues avec un rayonnement monochromatique étant faible, Desailly améliore le contraste en proposant une deuxième méthode en utilisant un rayonnement polychromatique. Il met en évidence les franges liées aux facteurs de corrélation par un filtrage optique. Les franges isochromes et isoclines du feuillet isolé optiquement ont meilleur contraste. Cette méthode offre donc la possibilité d'isoler optiquement un feuillet biréfringent à l'intérieur d'un modèle tridimensionnel. Les franges isoclines et isochromes peuvent être obtenues pour toute tranche isolée du modèle, néanmoins la méthode est très complexe et très longue à mettre en œuvre. Avec le développement du rayon Laser et des moyens informatiques de traitement d'images, une nouvelle technique de découpage optique a été développée au laboratoire de Poitiers [22]. La nouvelle technique consiste à remplacer l'enregistrement holographique par une acquisition par caméra CCD et le filtrage optique par un traitement numérique pour calculer le facteur de corrélation. Ce facteur de corrélation sera utilisé par le logiciel PHOTO3D pour calculer les isoclines et les isochromes. Les champs des contraintes développées dans le modèle pourront ainsi être analysés.



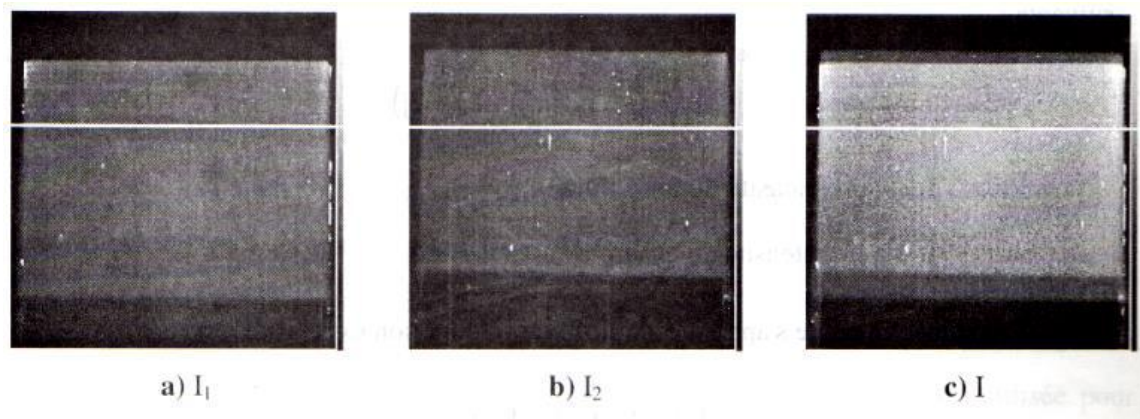
**Figure I. 39:** Découpage optique à l'aide de deux plans lasers [22]

- **Expression de la lumière diffusée**

Le modèle photoélastique est éclairé par le faisceau 1 puis par le faisceau 2 et finalement par les deux faisceaux simultanément (Figure I.39). On observe respectivement les intensités lumineuses diffusées  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Les trois intensités sont enregistrées à l'aide d'une camera CCD. Les images de la figure I.40 montrent un exemple des intensités enregistrées. Le profil de chacune de ces

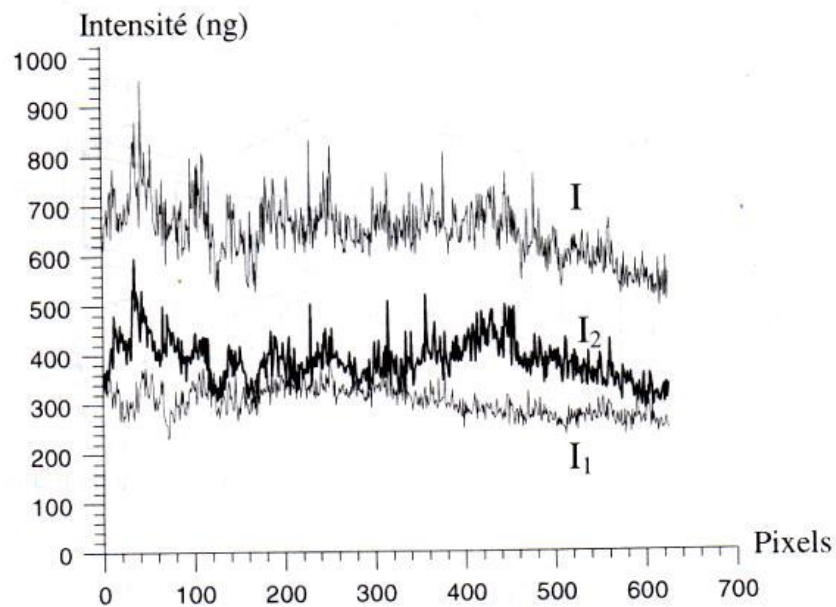


intensités lumineuses est relevé pour chaque image le long d'une ligne horizontale quelconque (ligne blanche sur la figure I. 40) en relevant leurs valeurs en niveau de gris (ng) le graphe de ces intensités est représenté sur la figure I.41.



**Figure I.40 :** Intensités lumineuses diffusées (a) avec le faisceau 1 seul,

(b) avec le faisceau 2 seul et (c) avec les deux faisceaux simultanément [23]



**Figure I.41 :** Graphe des intensités lumineuses [23]

L'expression de l'intensité diffusée  $I_i$  en un point  $(i, j)$  s'écrit de la façon suivante :

$$I_i(i, j) = I_{1F}(i, j) + I_{1g}(i, j)$$

avec :  $I_{1F}$  l'intensité du fond continu et  $I_{1g}$  l'intensité du champ de granularité. De même pour le profil  $I_2$  on aura :

$$I_2(i, j) = I_{2F}(i, j) + I_{2g}(i, j)$$

avec :  $I_{2F}$  l'intensité du fond continu et  $I_{2g}$  l'intensité du champ de granularité.

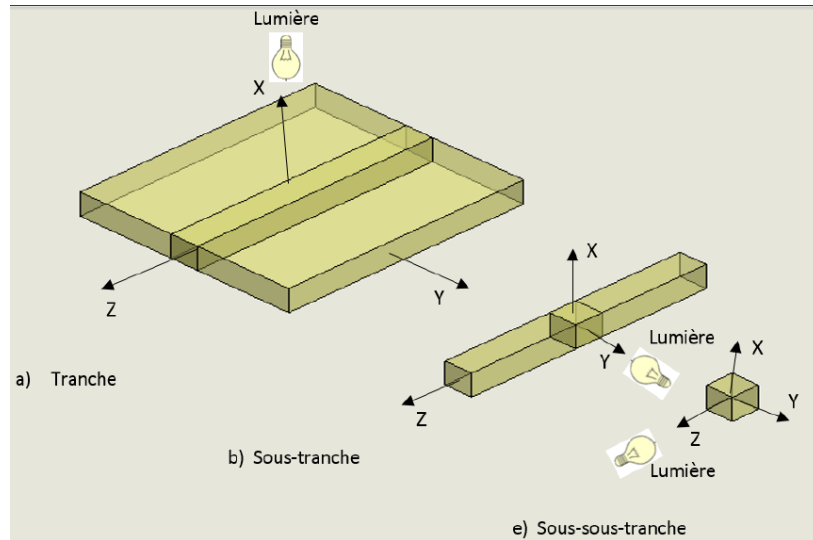
### I.5.7 La méthode de figeage et découpage mécanique

Cette méthode consiste à figer les contraintes dans le volume du modèle en utilisant les propriétés des chaînes moléculaires de certains polymères. G. Oppel [24] 1936 est l'un des premiers à décrire ces propriétés intéressantes. Lorsque le modèle est chargé dans l'état hautement élastique, puis refroidi lentement jusqu'à la température ambiante, il conserve presque en totalité la biréfringence acquise dans l'état hautement élastique.

Cette technique de figeage des contraintes est basée sur le comportement diphasique de certains matériaux lorsqu'ils sont chauffés à une température critique. Ces polymères sont composés de deux types de chaînes reliant les molécules entre elles : les chaînes principales et les chaînes secondaires. A température ambiante les deux types de chaînes résistent aux charges appliquées au modèle. Lorsque la température du polymère augmente jusqu'à la température de transition vitreuse (environ 130°C pour l'époxy), les chaînes secondaires cèdent et les chaînes principales supportent alors seules les contraintes. La charge étant maintenue, en diminuant lentement la température du polymère jusqu'à la température ambiante, les chaînes secondaires se reforment entre les chaînes principales fortement déformées. Quand la charge est retirée, les chaînes principales se détendent légèrement, mais une proportion considérable de la déformation est conservée. Les déformations élastiques des chaînes principales sont alors figées dans le volume du modèle de manière permanente grâce aux chaînes secondaires reformées. Cette propriété est utilisée pour l'étude des contraintes dans les pièces tridimensionnelles. Nous utiliserons cette méthode pour réaliser l'essentiel de nos expériences.

### Découpage mécanique

Une fois le modèle refroidi et les contraintes figées, il est découpé en tranches de faibles épaisseurs de sorte que les contraintes soient relativement constantes le long de l'épaisseur de la tranche découpée. Si possible, les tranches sont découpées suivant des plans particuliers, tels que les plans de symétries, les plans méridiens... etc. Elles sont ensuite analysées en utilisant la photoélasticimétrie bidimensionnelle, sans oublier de considérer que les contraintes normales à leurs plans ne sont pas nulles. Ces contraintes normales sont obtenues à partir d'autres coupes, par exemple, perpendiculaires aux précédentes, ou en découpant la tranche en « sous tranches », pour pouvoir l'observer dans les directions perpendiculaires (Figure I.42).



**Figure I.42** : Méthode des sous tranches

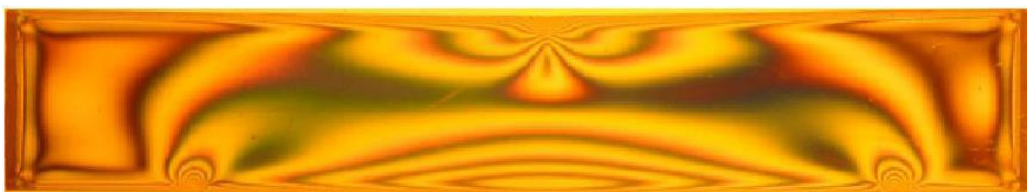
Cependant cette méthode présente les inconvénients suivants :

- Le découpage mécanique peut perturber les mesures
- Elle nécessite deux à trois maquettes pour l'étude d'un cas général.

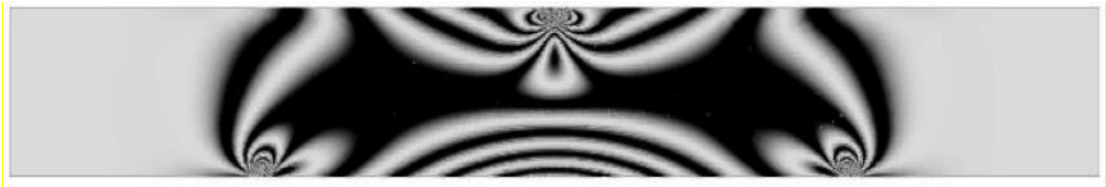
Malgré ces inconvénients cette méthode reste très utilisée car la faible erreur introduite est acceptable, les coefficients de sécurité adoptés pendant le dimensionnement des différents éléments constituant un ensemble fonctionnel permettent d'y remédier.

L'analyse du réseau de franges est effectuée manuellement par mesure ponctuelle, ce qui nécessite beaucoup de temps. Cependant, avec le développement de l'informatique et des techniques d'acquisition et de traitement d'images plusieurs méthodes ont été développées [25,29]

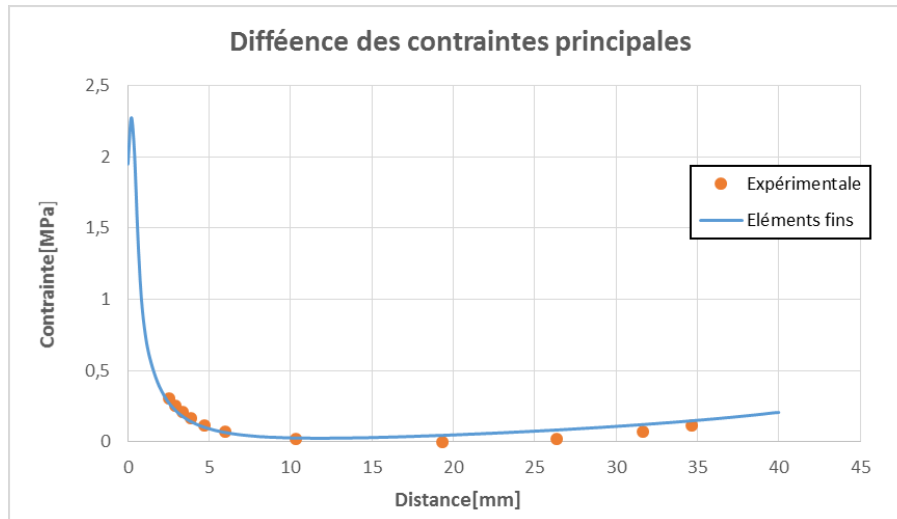
K. Touahir [30] a utilisé la photoélasticimétrie bidimensionnelle pour analyser les contraintes figées dans une poutre en flexion trois points. Il a réussi à figer les contraintes développées dans le modèle et éliminer les contraintes résiduelles dans l'éprouvette (Figure I.43). Il a montré que les franges isoclines et isochromes sont similaires aux réseaux des franges obtenus numériquement (Figure I.44). Une autre comparaison a été faite entre la différence de contrainte principale le long d'une droite [AB] (Figure I.45). Les résultats obtenus ont révélé relativement une bonne concordance entre les valeurs numérique et expérimentales.



**Figure I.43** : Isochromes relevés expérimentalement [30]



**Figure I.44 :** Isochromes simulés sous Castem et traitées avec PHOTOSHOP [30]



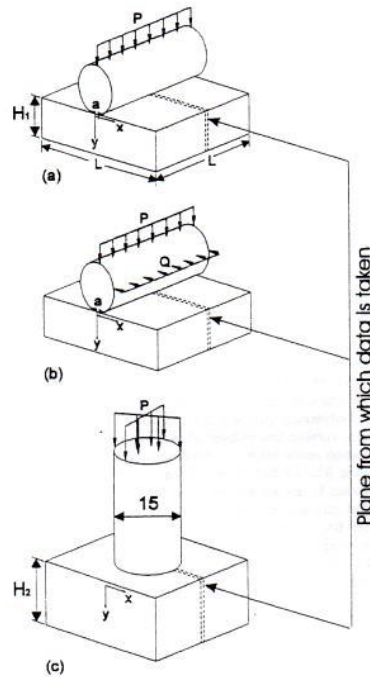
**Figure I.45 :** Superposition des courbes expérimentales et numériques [30]

## I.6 QUELQUES TRAVAUX REALISES A L'AIDE DE LA METHODE DE PHOTOELASTICIMETRIE TRIDIMENSIONNEL

Burguete et E.A. Paterson [31] ont présenté une étude tridimensionnelle d'un cylindre en contact avec un demi-espace en utilisant la méthode de figeage découpage couplé avec un polariscope automatique utilisant une caméra CCD monochromatique pour les prises de vue. Les isoclines et les isochromes peuvent ainsi être obtenues sur toute la surface de la tranche à analyser. Les deux modèles analysés ont été fabriqués en résine époxy. Trois cas de chargement ont été étudiés (Figure I.46) : un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan, un cylindre reposant le long de sa génératrice supportant une charge perpendiculaire au plan et une charge tangentielle et finalement un cylindre reposant sur son extrémité sur un plan soumis à une charge de compression normale similaire donc à un poinçon.

Après figeage des contraintes une tranche de 0,5 mm d'épaisseur est découpée dans chacun des modèles le long de la direction d'application de la charge et ensuite analysée sur le polariscope automatique. La distribution des contraintes de cisaillement maximales est obtenue en utilisant la méthode de figeage. Les résultats ont montré une confirmation par l'expérience des résultats obtenus

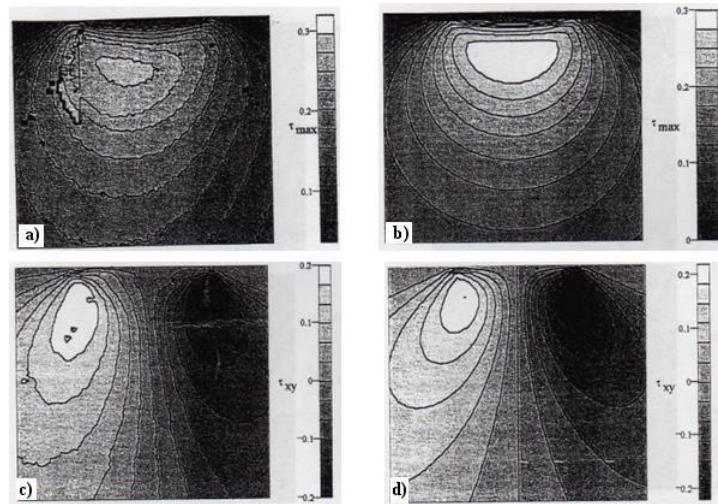
par d'autres chercheurs. Les auteurs ont montré l'efficacité avec laquelle peuvent être étudiés les problèmes de contact à l'aide de la méthode de figeage découpage en photoélasticité tridimensionnelle. Cependant, la méthode prend beaucoup de temps du fait qu'il est nécessaire de découper plusieurs tranches pour pouvoir faire une analyse complète.



**Figure I.46 :** Schémas des trois modèles utilisés (a) charge normale (cylindre sur demi espace), (b) charge normale et tangentielle, (c) charge axiale (poinçon cylindre sur plan) [31]

La figure I.47 représente la distribution du champ des contraintes dans le cas du contact cylindre/plan chargé normalement le long de sa génératrice.

La figure I.47.a montre la distribution de la contrainte maximum de cisaillement obtenue expérimentalement évalué directement du schéma des franges isochromes.



**Figure I.47 :** Distribution du champ de contraintes dans le cas du contact cylindre sur plan avec chargement normal. [31] a): contraintes de cisaillement maximal expérimentale b): contraintes de cisaillement maximale théorique c): cisaillement  $\tau_{xy}$  déterminé expérimentalement d): cisaillement  $\tau_{xy}$  déterminé théoriquement

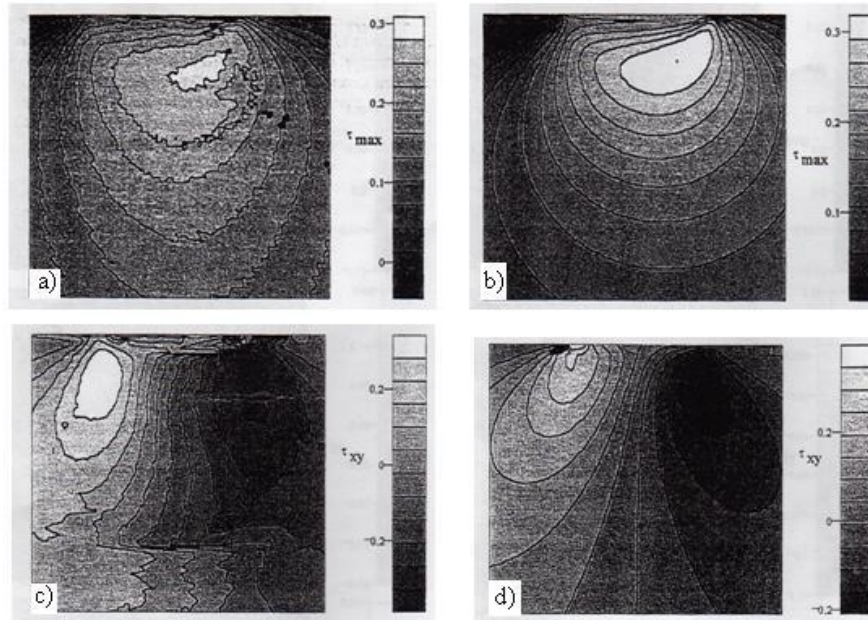
La figure I.47.b montre la distribution de la contrainte maximale de cisaillement obtenue théoriquement par combinaison des équations analytiques et en utilisant le cercle de Mohr.

Ces deux figures (a) et (b) montrent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques. Les chargements (a) et (b) sont réalisés avec un coefficient de frottement entre les surfaces en contact (interface) d'une valeur relativement faible (0,2). Une légère excentricité est observée sur la figure I.49.a, comparée avec la figure I.46.b. L'auteur présume que c'est probablement dû à un désalignement durant le chargement causé par la non adhérence des surfaces de contact. La figure I.46.c montre les contraintes de cisaillements cartésiennes  $\tau_{xy}$  obtenues expérimentalement. La figure I.46.d représente les contraintes théoriques correspondantes.

Les chargements (c) et (d) étant fait sous coefficient de frottement élevé de valeur 0,9 permettent une bonne adhésion des surfaces de contact, c'est pour cela que la concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux est très frappante.

La figure I.48 montre la distribution du champ des contraintes, pour le contact cylindre sur plan chargé normalement et tangentiellement.





**Figure I.48 :** Distribution du champ de contraintes dans le cas du contact cylindre sur plan avec chargement normal et tangentiel. [31] a) : contraintes de cisaillement maximal expérimentale  
b): contraintes de cisaillement maximale théorique. c) : cisaillement  $\tau_{xy}$  déterminé expérimentalement d) : cisaillement  $\tau_{xy}$  déterminé théoriquement

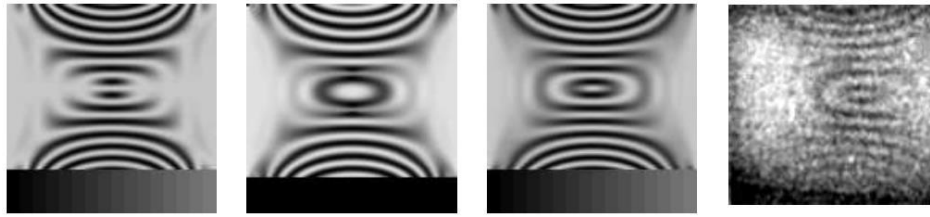
La figure I.48.a représente le champ des contraintes maximales de cisaillement obtenu expérimentalement par la méthode de photoélasticimétrie dans le cas d'un faible coefficient de frottement. La représentation analytique est donnée par la figure I. 48.b.

La figure I.48.c représente la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  pour le chargement dans le cas d'un coefficient de frottement élevé (0,9) et un rapport  $Q/P = 0,2$  ( $Q$  et  $P$  représentent respectivement la charge tangentielle et la charge normale appliquée).

Les représentations analytiques et expérimentales, dans les deux cas de frottement, présentent une bonne concordance. La présence de force de frottement rend le dispositif expérimental plus stable que pour le cas de la charge normale seule. Les figure I.48.a et I.48.b sont très ressemblantes, cela veut dire que le coefficient de frottement calculé précédemment et introduit dans les équations analytiques a une valeur exacte.

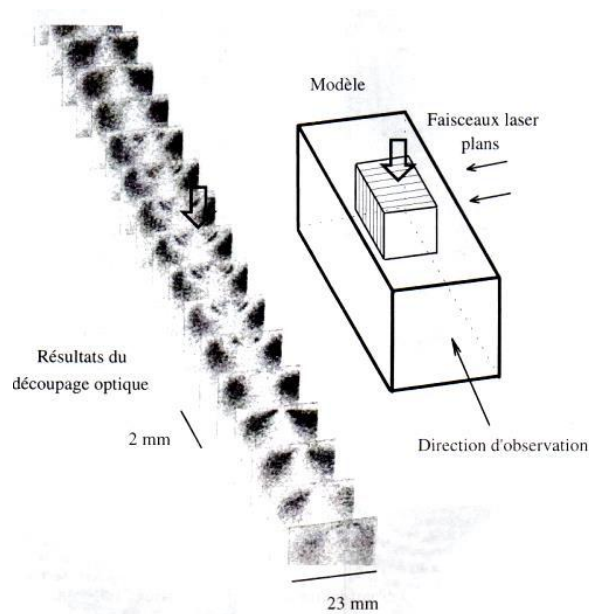
A. Zénina [32] a présenté une étude 3D d'un essai de torsion sur un barreau prismatique en utilisant la méthode par découpage optique utilisant une caméra CCD monochromatique pour les prises de vue. Le modèle à analyser est découpé optiquement à l'aide de deux faisceaux lasers, le feuillet étudié est isolé entre deux plans laser inclinés à  $45^\circ$  par rapport à l'axe du barreau. Zenina montre ici les résultats obtenus sur un feuillet d'épaisseur 8 mm et représente les franges simulées à l'aide des trois approches qu'il compare avec les franges expérimentales (Figure I.49). Couplée avec une caméra CCD et un ordinateur, la méthode de découpage optique nécessite quelques secondes pour

obtenir les mêmes résultats que la méthode de figeage découpage mécanique qui nécessite plusieurs heures.



**Figure I.49 :** Confrontation des schématisations 3D d'un feuillet photoélastique d'épaisseur 8 mm pour la simulation des franges sur un essai de torsion [32]

J.C. Dupré et A. Lagarde [33] ont étudié une méthode de visualisation des franges isochromes et isoclines développées dans les solides en contact en utilisant le phénomène de diffusion et les propriétés de superposition de ces champs lumineux. Le champ de contraintes peut être ainsi analysé dans tout le volume des solides en contact. Pour illustrer la méthode, une application a été faite sur un parallélépipède chargé par une force centrée en son milieu. L'évolution des franges le long de l'axe longitudinal (Figure I.50) montre la variation des contraintes dans le volume de la pièce. On voit bien que les contraintes sont concentrées au voisinage immédiat de la zone de contact.

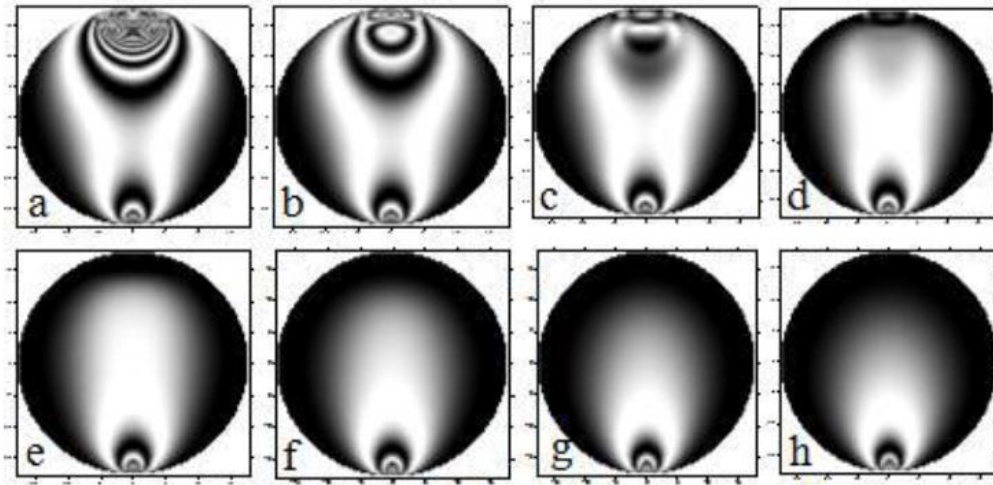


**Figure I.50 :** Appui ponctuel sur un barreau de section carrée [33]

A. Bilek [17] a utilisé la méthode des éléments finis en 3D à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM pour déterminer le champ des contraintes dans un contact entre deux cylindres orthogonaux à température ambiante. La figure I.51 montre que dans la partie supérieure du cylindre, loin de la zone de l'application de la charge, les contraintes sont nulles. Elle augmente ensuite pour atteindre une

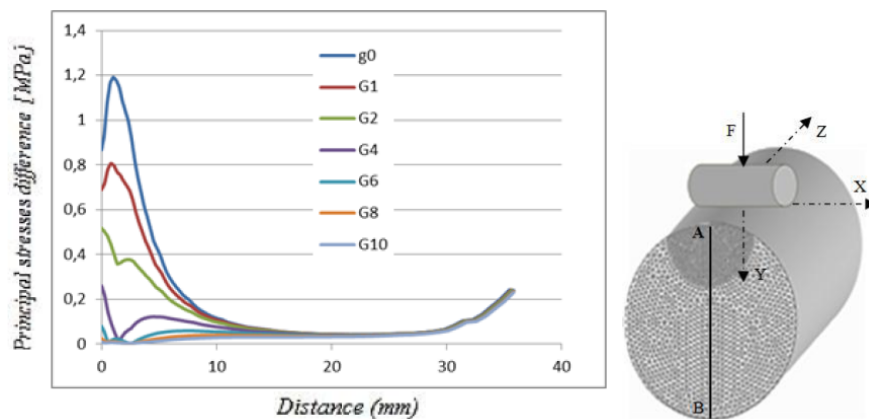


valeur maximale au niveau du point d'application de la charge. Dans le côté opposé à la charge appliquée, on remarque que les isochromes sont relativement constantes le long du cylindre. Il a obtenu les mêmes franges quel que soit la position de la tranche isolée.



**Figure I.51 :** Franges isochromatiques simulées pour différentes tranches le long de l'axe longitudinal [17]

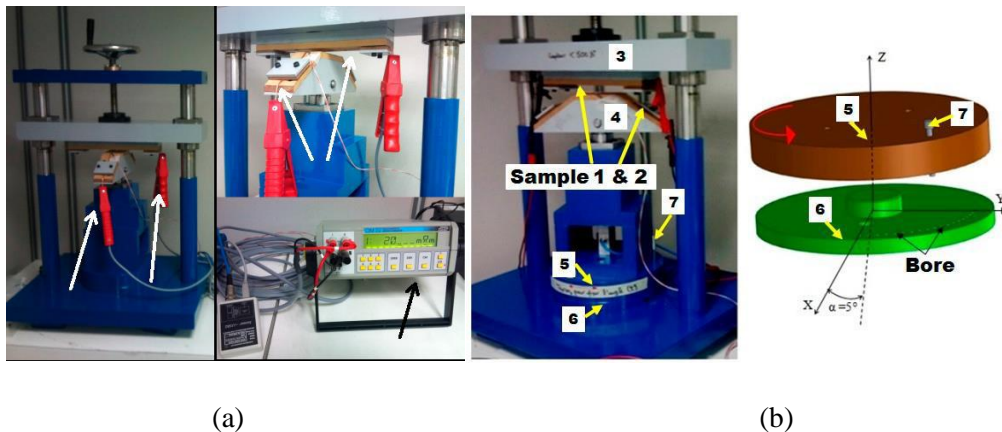
La figure I.52 montre clairement la variation de la différence de contraintes principales le long du segment AB pour différentes tranches. La différence de contraintes principales diminue de façon significative à mesure que l'on descend à partir de la zone de contact supérieure, verticalement le long de la direction y, à la même valeur de contrainte d'environ 0,03 MPa. Lorsque nous descendons vers la partie inférieure, les contraintes augmentent encore à une valeur d'environ 0,22 MPa. Cette valeur reste la même pour les différentes tranches situées à différentes valeurs z, de  $Z = 0\text{mm}$ , ce qui correspond à la direction de la charge appliquée, à  $z = 10\text{mm}$  qui correspond à un Plan situé à 10 mm le long de l'axe longitudinal z du cylindre.



**Figure I.52 :** Variation de la différence de contraintes principales le long du segment AB pour différentes tranches [17]

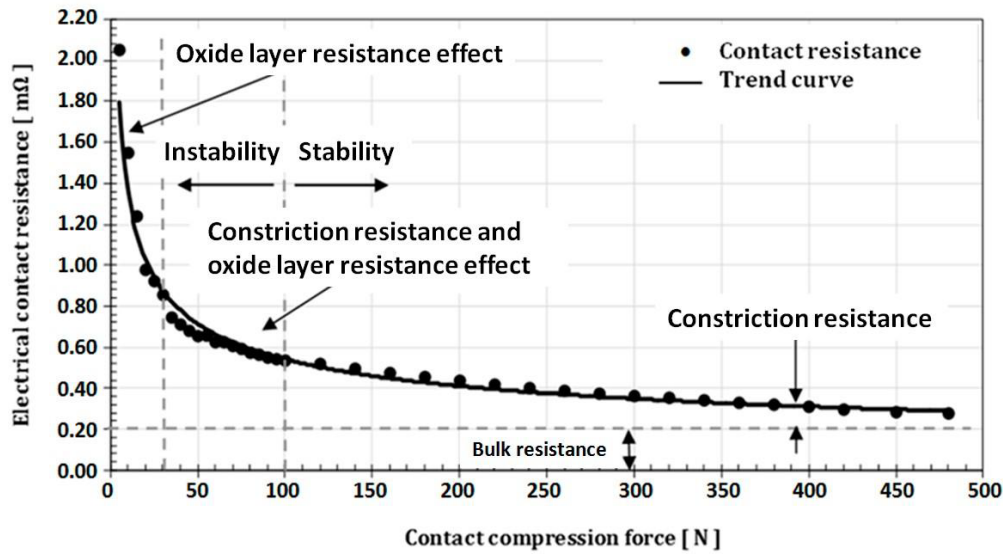
Youcef ZEROUKI et Ewa NAPIERALSKA [34] ont présenté une méthode d'analyse par éléments finis 3D d'un contact élastique plastique des fils déformables, ils ont déterminé la forme et les forces de pression dans les interfaces de contact, la résistance électrique du conducteur déformé, ils ont pris en compte la résistance de contact tangentielle et radiale. Ils comportent également un système de fixation de l'angle d'intersection des conducteurs. Les déformations élasto-plastiques entre deux cylindres en contact est d'une grande importance dans la mécanique de contact. Ils trouvent leur application dans l'étude des problèmes d'écrouissage (les contraintes et les déformations plastiques), de frottement et ainsi dans l'impact sur la conductivité électrique du matériau. Ils ont présenté une nouvelle méthode pour prédire le comportement mécanique et électrique d'un conducteur concentrique selon des paramètres de processus de tréfilage et de compactage. Dans la méthode expérimentale, ils ont montré que la plage de résistance électrique dépend de trois paramètres principaux, la force de compression à laquelle le conducteur est soumis, la taille des deux surfaces de contact, qui sont directement liées à la force appliquée, et l'angle d'intersection entre les brins du câble. Ils ont comparé les résultats obtenus par la méthode des éléments finis 3D à la mesure expérimentale, ils ont pris en compte trois paramètres principaux, déformation conducteur, le poids du conducteur et la résistance électrique.

La figure I.53 montre un dispositif expérimental, Le banc d'essai comporte deux éléments reliés entre eux et, constitué de deux parties distinctes : une pièce mécanique utilisée comme outil de compression ; une autre, comme moyen électrique utilisant la méthode de Kelvin pour mesurer la résistance de contact résultante. Le banc comporte une plaque tournante pour permettre la mesure de la résistance de contact à un angle variable entre les fils de croisement (Figure I.53 b).



**Figure I.53 :** Dispositif expérimental, (a) Le banc de mesure ; (B) Deux disques permettant le réglage de l'angle de croisement [34]

La figure I.54 montre la résistance moyenne de contact obtenue à partir de 10 essais. D'après les expériences faites par Youcef ZEROUKI et Ewa NAPIERALSKA, pour chaque mesure, le conducteur se trouve examiné au microscope. Pour une force de moins de 30 N, l'empreinte est invisible. Cela prouve que la déformation est élastique. Pour des forces supérieures à 30 N, l'empreinte est visible, ce qui signifie que la déformation est plastique, donc irréversible. Youcef ZEROUKI et Ewa NAPIERALSKA ont étudié l'impact de la force de compression sur la résistance de contact électrique. Ils ont déterminé la variation de la résistance de contact en fonction de la force.

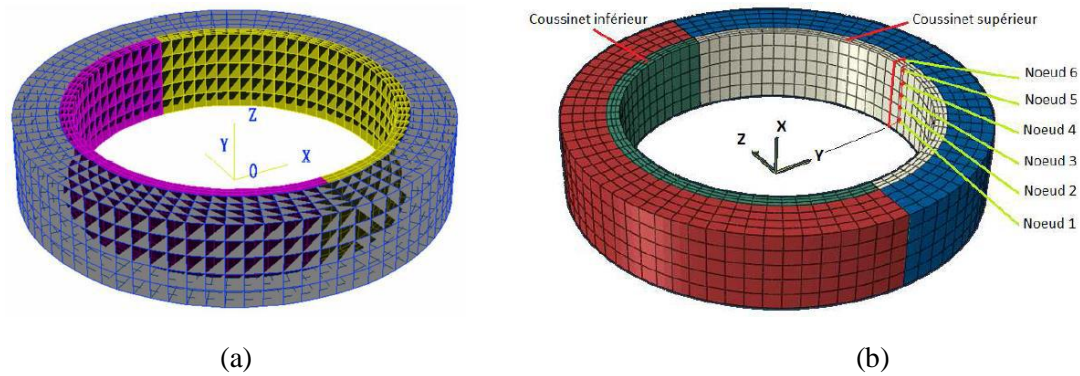


**Figure I.54 :** Résistance de contact électrique en fonction de la force de compression (angle de croisement de 90 °) pour le cuivre (courant de mesure de 10 A, chute de tension nominale de 20 mV, diamètre du fil 2,06 mm, angle de croisement 90 °)[34]

T.L.Nguyen, A.Fatu, D.Souchet [35] ont présenté un phénomène de contact entre le coussinet et le logement d'un palier, soumis à des champs de pression hydrodynamique qui sont produit dans un palier lubrifié. Ils ont utilisé deux logiciels pour résoudre ce phénomène de contact. Les champs de pression hydrodynamique de la lubrification du palier sont calculés par le logiciel ACCEL, et le comportement du contact entre le dos du coussinet et le logement soumis à des champs de pression est calculé par le logiciel ABAQUS. T.L.Nguyen, A. Fatu, D. Souchet utilisent le problème de traitement de l'équation de Reynolds pour analyser la lubrification hydrodynamique dans le contact. Ils ont montré une évolution du comportement du contact entre le coussinet et le logement. Ils ont pu observer que les valeurs du glissement dépendent de la position géométrique à l'intérieur du palier, le coefficient de frottement et du serrage initial coussinet / logement.

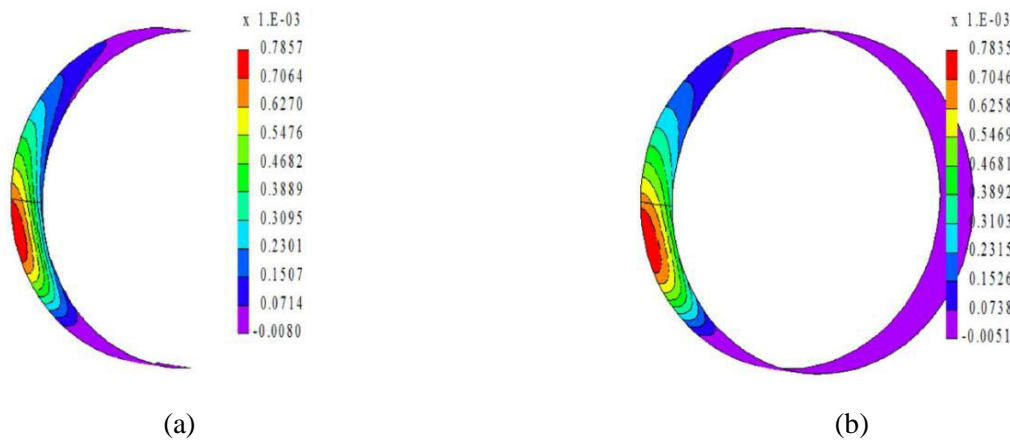
La Figure I.55 (a), (b) illustre un modèle mono-corps pour Accel (figure I.55 a) et l'autre, multi-corps, dans ABAQUS (Figure I.54 b). Les résultats du calcul Accel sont les champs de pression, l'épaisseur du film d'huile, la déformée du palier, le débit de fluide...les champs de pression existants

dans le film lubrifiant sont récupérés au modèle ABAQUS pour calculer l'interaction entre le dos du coussinet et le logement.



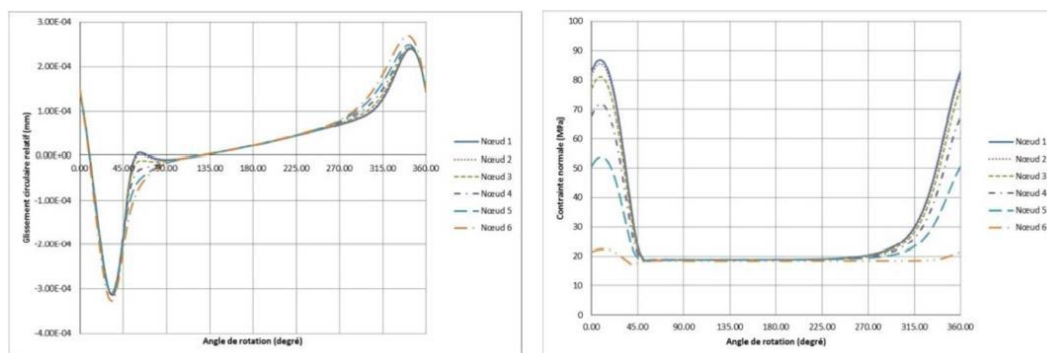
**Figure I.55 :** Modèles des éléments finis d'un palier pour Accel (a) et Abaqus(b) [35]

La figure I.56 illustre que la déformée du logement calculée par Abacus est identique à celle calculée par Accel.



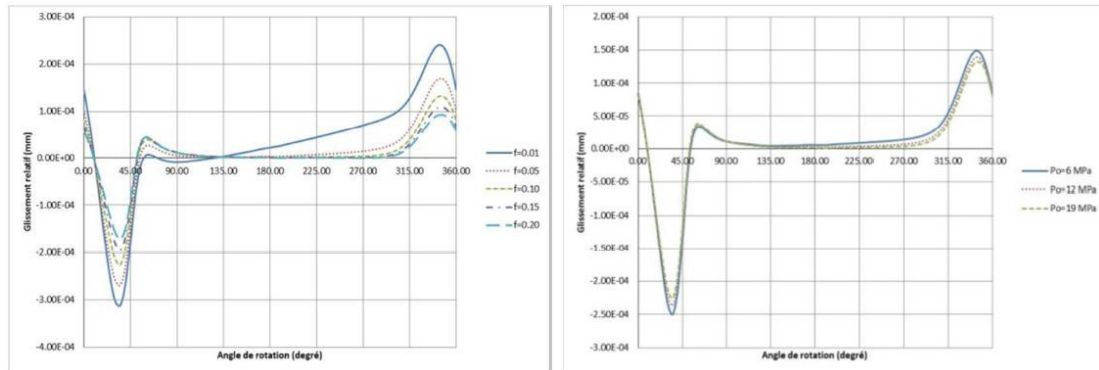
**Figure I.56 :** Déformée du palier soumis un champ de pression a) Abaqus et b) Accel [35]

La figure I.56 illustre le glissement relatif circonférentiel et la contrainte normale aux nœuds au dos du coussinet supérieur, appartenant au plan Oxy (figure I.57).



**Figure I.57 :** Glissement circulaire relatif (a) et contrainte normale (b) au dos de coussinet [35]

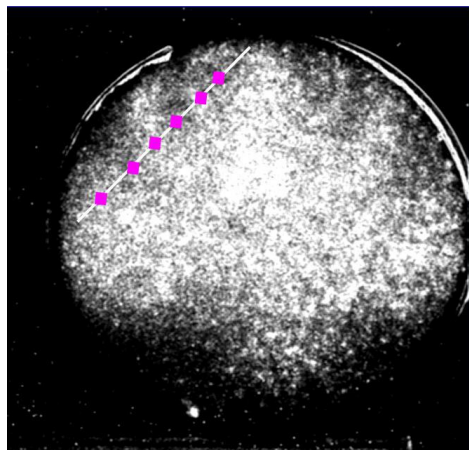
La figure I.58 illustre l'influence du coefficient de frottement ( $f$ ) et du pré-serrage ( $p_0$ ) sur le glissement circonférentiel au nœud 1 (figure I.55), ils ont observé que le glissement circonférentiel augmente si le coefficient de frottement ou le pré-serrage diminue.



**Figure I.58 :** Influence du coefficient de frottement (a) et du pré-serrage (b) sur le glissement circonférentiel [35]

A.Bilek [36] a étudié trois cas sur le phénomène de contact, le premier étant un cylindre rigide en aluminium sur un parallélépipède en époxy à température ambiante [37], le deuxième cas un parallélépipède rigide en aluminium sur un modèle cylindrique déformable en époxy à température de figeage et finalement un cylindre rigide en aluminium sur un modèle cylindrique déformable. Dans son travail, il a montré les possibilités de la méthode expérimentale de découpage optique dans l'étude du problème de contact entre un modèle rigide et un modèle déformable. Il a utilisé trois méthodes pour obtenir les contraintes au voisinage de la zone de contact. La solution analytique utilisant la théorie de Hertz, l'analyse expérimentale et finalement la méthode des éléments finis. Avant de comparer les résultats expérimentaux, numériques et analytiques.

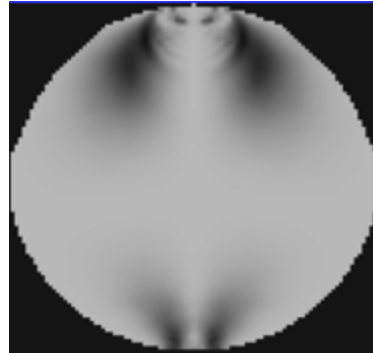
Les franges expérimentales sont représentées sur la (figure I.59). Une droite à 45 degrés est tracée sur l'image pour faciliter le relevé des ordres de franges.



**Figure I.59 :** Franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge [37]

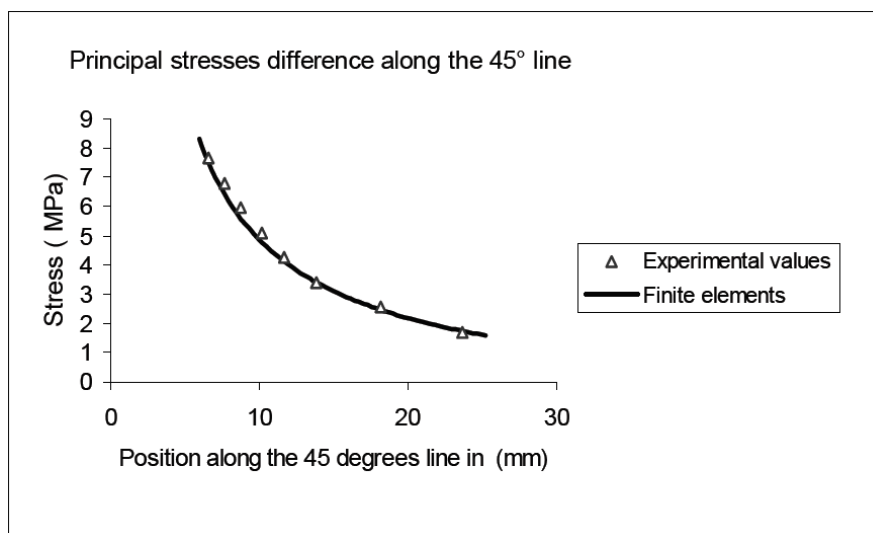


Les franges expérimentales (Figure I.60) sont relativement comparables aux franges simulées (Figure I.61). A. Bilek a observé que les contraintes dans la partie inférieure du modèle (Figure I.60) sont beaucoup moins importantes que celles développées dans la partie supérieure. Ceci est dû au fait que la charge est uniformément répartie le long de la surface de contact inférieure du modèle alors que sur la partie supérieure seulement une position de la génératrice du modèle supporte la charge appliquée. Ce qui se traduit naturellement par des contraintes plus importantes. Il a montré que les franges obtenues expérimentalement sont similaires aux réseaux des franges obtenues numériquement.



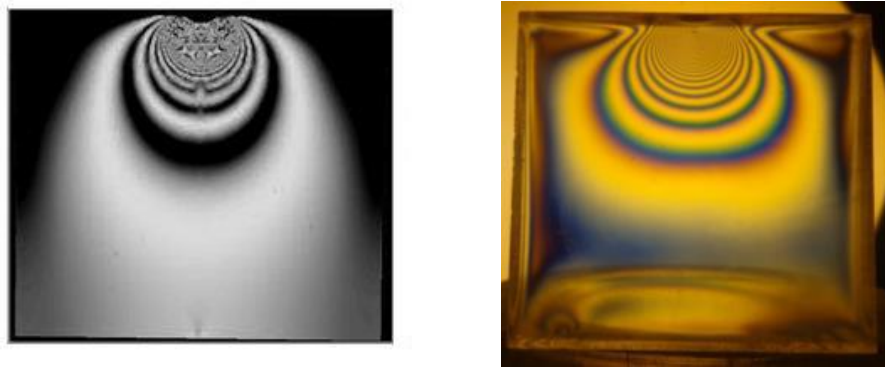
**Figure I.60 :** Franges obtenus par éléments finis pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge [37]

Le graphe de la différence des contraintes principales le long de la ligne à 45° montre, relativement, une bonne concordance entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux (Figure I.61). Au voisinage de la zone de contact, les valeurs expérimentales sont inférieures à celles obtenues par la méthode des éléments finis.



**Figure I.61 :** Différences des contraintes principales le long de la ligne à 45° de la section située le long de la direction de la charge pour le cas du parallélépipède sur cylindre [37]

R. Haciane, A bilek [38] ont présenté une étude tridimensionnelle d'une sphère rigide en contact avec un plan déformable en utilisant la méthode de figeage découpage mécanique et la méthode des éléments finis. Les isochromes et les isoclines peuvent ainsi être obtenues sur toute la surface de la tranche à analyser. Le modèle analysé a été fabriquée en résine époxy. Ils ont montré que les franges obtenues expérimentalement sont similaires aux réseaux des franges obtenues numériquement figure I.62.



**Figure I.62 :** Franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge [38]

## **I.7 DETERMINATION DU MODULE DE YOUNG DES MODELES A TEMPERATURE DE FIGEAGE**

Les caractéristiques mécaniques et optiques des modèles utilisés ; notamment la constante de frange, le module de Young et le coefficient de poisson à température ambiante et à température de figeage sont nécessaires pour le calcul analytique des contraintes en utilisant la théorie de Hertz et aussi pour le calcul numérique en utilisant le logiciel CASTEM.

### **I.7.1 Dispositif expérimental**

Pour ne pas surcharger l'éprouvette au-delà de la limite d'élasticité, il faut déterminer la valeur de l'effort à appliquer sur l'éprouvette à l'intérieur de l'étuve pour avoir la même déformation que celle obtenue à température ambiante dans le domaine élastique.

La valeur de l'effort appliquée est calculée en prenant comme base de calcul la déformation maximale atteinte lors de l'essai de compression effectué à température ambiante. Ceci, dans le souci de ne pas dépasser le domaine élastique et donc de ne pas endommager le model.

Le dispositif expérimental (Figure I.63) est composé d'une source laser, d'une source de lumière blanche (pour illuminer le modèle à l'intérieur de l'étuve), d'une caméra CCD, d'un polariseur et d'un analyseur.

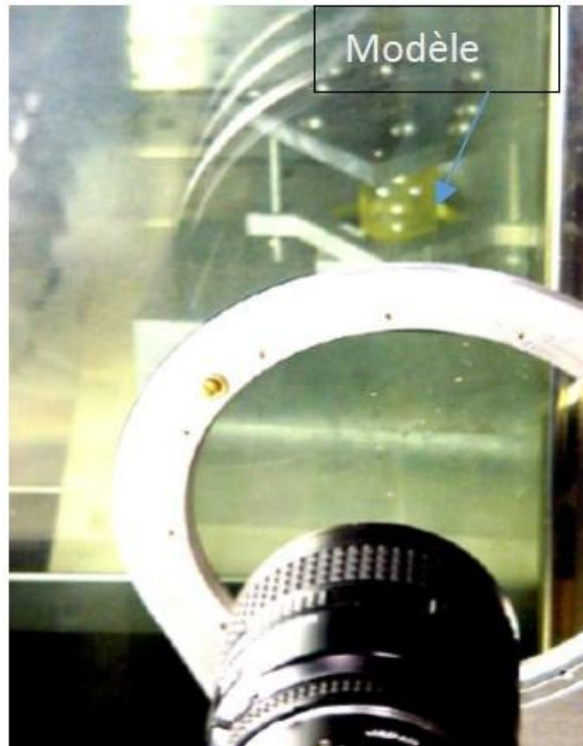


**Figure I.63 :** Dispositif expérimental utilisé pour déterminer les caractéristiques du modèle à température de figeage [17]

Plusieurs taches blanches disposées le long de la génératrice de l'éprouvette permettent de suivre sa déformation lors de l'application de la charge et ainsi de retrouver le module de Young.

Le cylindre en époxy est introduit à l'intérieur de l'étuve dans un système de chargement simple (Figure I.64) ; des disques de 1 N sont utilisés pour appliquer les différentes charges. Avant d'appliquer les charges la température de l'étuve est portée à la température de figeage ( $120^{\circ}$ ) à une vitesse de 3 degrés par heure. Une fois la température atteinte, elle est maintenue pendant la durée du test. Les charges de 1 N sont ajoutées une à une sur le cylindre. Après chaque charge ajoutée la caméra CCD enregistre les positions relatives des taches blanches ainsi que l'intensité lumineuse de la tache laser sortant de l'analyseur de la même manière que pour le test effectué à température ambiante.





**Figure I.64 :** Image du cylindre en compression [17]

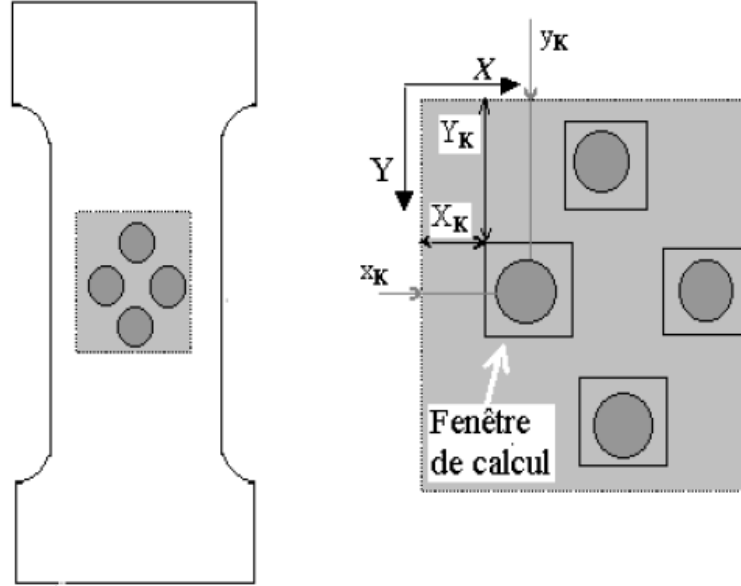
Le logiciel DEFTAC, développé à l'université de Poitiers lui a permis d'enregistrer les valeurs de la charge en fonction de la déformation. Il a pu donc ainsi tracer le graphe de la contrainte de compression du cylindre en fonction de la déformation.

### I.7.2 Méthode du suivi des marqueurs

Une méthode de mesure de déformations dans le volume est proposée par Nielsen et al<sup>1</sup> qui correspond à l'extension en 3D de la méthode du suivi de marqueurs habituellement utilisé en 2D. Selon cette méthode, on réalise manuellement quatre marqueurs disposés sur la surface latérale de l'éprouvette étudiée (figure I.65). Pour chaque état de charge, ils sont enregistrés à l'aide d'une caméra CCD et transformées ensuite en niveau de gris de 0 à 255. Un logiciel associé DEFTAC repère alors pour chaque état de charge les positions  $(X_k, Y_k)$ , ( $k=1\dots 4$ ) des taches. la base des mesures est délimitée par ces taches et vaut en pratique 5mm x 5mm. Notons que l'endroit étudié importe peu mais qu'en revanche la déformation est considérée homogène sur la base de mesure. Les déformations  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$  associées sont calculées à partir de la théorie des grandes déformations appliquées à un parallélogramme élémentaire ; le logiciel **DEFTAC** offre pour cela à l'utilisateur la possibilité d'entourer initialement chacune des taches d'une petite fenêtre de calcul (qui se déplace avec elle) de dimension  $n_{xK}$  et  $n_{yK}$  donnée en nombre de pixels. En considérant le barycentre des intensités lumineuses  $I(X_i, Y_i)$  (exprimé en niveau de gris) prises en chacun des pixels  $(X_i, Y_i)$  d'une fenêtre de calcul, on a :

$$y_K = Y_K + \frac{\sum_{i=1}^{n_{XK}} \sum_{j=1}^{n_{YK}} Y_j (I(X_i, Y_j) - I_s)}{\sum_{i=1}^{n_{XK}} \sum_{j=1}^{n_{YK}} (I(X_i, Y_j) - I_s)}, x_K = X_K + \frac{\sum_{i=1}^{n_{XK}} \sum_{j=1}^{n_{YK}} X_j (I(X_i, Y_j) - I_s)}{\sum_{i=1}^{n_{XK}} \sum_{j=1}^{n_{YK}} (I(X_i, Y_j) - I_s)}$$

Où  $I_s$  est un seuil d'intensité permettant d'éliminer le bruit de fond.  $X_K$  et  $Y_K$  représentent les positions supérieures gauches des fenêtres de calcul.



**Figure I.65** : Schéma du principe de la méthode du suivi de taches [17]

Facile à mettre en œuvre et s'accommodant de n'importe quel état de surface, cette méthode donne une précision sur les déformations de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-4}$ . Elle conduit à la courbe contrainte déformation [17].

## I.8 LOIS DE SIMILITUDE PROTOTYPE MODELE

Lors de l'analyse d'un modèle photoélastique fabriqué à partir d'un matériau photoélastique la question d'applicabilité des résultats est soulevée, car le prototype est très souvent fabriqué en métal. Les constantes photoélastiques du modèle photoélastiques sont très différentes du prototype métallique. Dans le cas d'une plaque dans laquelle les contraintes remplissent les conditions de la contrainte plane généralisée, les distributions des contraintes moyenne est généralement indépendante des contraintes élastiques du matériau pourvue que la limite de l'élasticité linéaire ne soit dépassée. Une exception à cette règle se produit dans le cas où la plaque est multiplement connexe. Dans un tel cas, la distribution des contraintes dans le modèle varie suivant le coefficient de poisson du matériau. La valeur de cette variation est cependant faible et donc les résultats obtenus sur un modèle photoélastique plan peuvent être transposés au cas d'une structure réelle. L'indépendance de la constante élastique n'est pas applicable en général à un système de contraintes à trois dimensions mais tant que le coefficient de poisson n'est pas sérieusement différent pour les deux matériaux la

différence dans les contraintes reste faible. Les contraintes dans le prototype peuvent être alors obtenus à l'aide de la relation suivante ; les indices M et P correspondant respectivement au modèle et au prototype.

$$\sigma_P = \sigma_M \frac{F_P}{F_M} \frac{L_M}{L_P} \frac{e_M}{e_P}$$

Avec  $\sigma$  : la contrainte

F : l'effort appliqué

e : l'épaisseur

## I.9 CONCLUSION

Dans ce premier chapitre nous avons passé en revue les différentes méthodes permettant de déterminer les contraintes développées dans plusieurs types de contact rencontrés dans les ensembles fonctionnels mécaniques principalement au voisinage des zones de contact.

Plusieurs méthodes d'analyses des contraintes en photoélasticimétrie 2D et en photoélasticimétrie 3D sont expliquées à travers les travaux de plusieurs chercheurs dans le domaine du contact entre solides.

Pour l'étude expérimentale du problème de contact, nous disposons principalement de deux types de méthodes : non destructive et destructive. Concernant l'analyse en 3D, de nouvelles méthodes non destructives de découpage optique par plan laser en tranches minces des modèles photoélastiques peuvent être utilisées pour analyser les contraintes développées dans les problèmes de contact mécaniques entre modèles rigides et modèles déformables. La méthode destructive de figeage découpage est cependant très largement utilisée malgré quelques inconvénients que cette méthode présente.

La théorie de Hertz permet de déterminer la pression de contact et les dimensions de l'aire de contact. À travers les différents travaux cités ci-dessus, le problème de contact peut être traité de trois façons différentes : une étude analytique, une étude numérique et une étude expérimentale. Hertz a établi les relations analytiques de la plupart des modèles de contact moyennant certaines hypothèses.

Grace au progrès de l'informatique et au développement des logiciels de simulation, le problème de contact mécanique peut être analysé numériquement. Cependant, les résultats des simulations doivent être validés par l'expérimental

Dans notre étude on utilisera la photoélasticimétrie avec figeage des champs de contraintes dans les modèles suivi du découpage mécanique et d'une analyse sur un polariscope.



## **CHAPITRE III**

### **DÉTERMINATION DES CHAMPS DE CONTRAINTES FIGEES DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL**

#### **III.1 INTRODUCTION**

L'étude expérimentale du contact entre deux solides dans les modèles tridimensionnels sous sollicitation reste encore un problème. Plusieurs méthodes expérimentales et numériques [39-42] ont été utilisées pour obtenir la distribution expérimentale des contraintes à l'intérieur des modèles, principalement aux voisinages des zones de contact.

Pour réaliser nos expériences on appliquera la méthode expérimentale la plus utilisée appelée le figage des contraintes associée à un découpage mécanique en tranches. Dans ce présent travail nous montrons les possibilités de cette méthode expérimentale de découpage mécanique dans l'étude du problème de contact entre un modèle rigide et un modèle déformable. Les champs de contraintes seront figés dans les différents modèles à l'aide de traitements thermiques. Les modèles seront ensuite découpés suivant des plans choisis pour étudier la répartition des contraintes et déterminer ainsi les zones les plus sollicitées. Cependant cette procédure doit être conduite avec beaucoup de soin car elle peut introduire des contraintes résiduelles lors du découpage et plusieurs modèles peuvent être nécessaires pour une étude complète. On comparera ensuite les résultats expérimentaux aux résultats numériques.

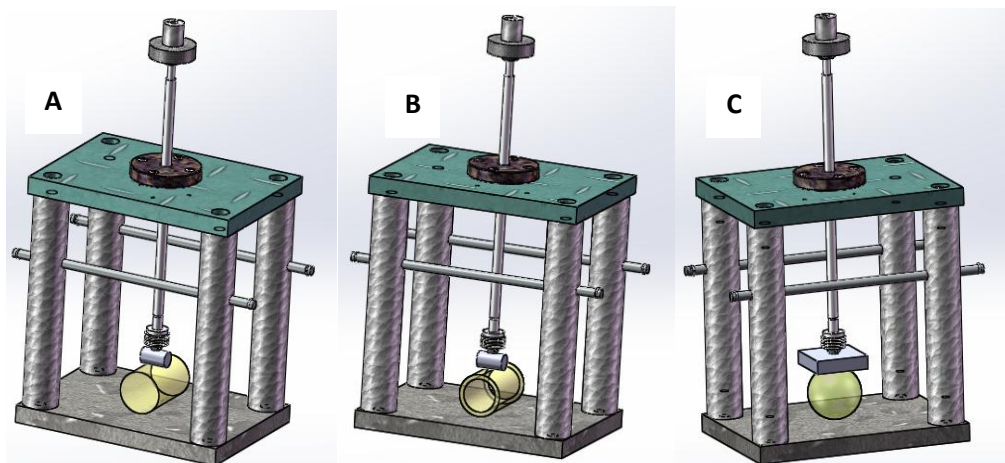
Cette méthode photoélastique permet d'obtenir les franges isoclines et isochrones qui peuvent ensuite être exploitées pour déterminer l'orientation et les valeurs des contraintes. Des études ont été réalisées pour séparer les contraintes et obtenir leurs orientations (intégration des équations de l'équilibre) [29] pour les comparer ensuite avec des résultats simulés. Cependant une grande précision de mesure est nécessaire. Une autre comparaison peut être faite entre les valeurs des différences des contraintes principales relevées le long d'une droite quelconque dans une section donnée du modèle étudié.

### III.2 PROCEDURE EXPERIMENTALE

Les éprouvettes ont été réalisées par usinage dans des blocs en résine époxy biréfringente. Une fois les pièces finies et contrôlées sur le polariscope, il s'avère que des franges isochromes apparaissent sans aucun chargement, donc les modèles présentent à ce stade des contraintes résiduelles qu'il faut éliminer par un traitement thermique de relaxation. Pour obtenir un bon état de surface désirée, nous avons effectué un polissage sur une polisseuse, nous avons effectué les différents polissages avec du papier abrasif. Après le polissage, nous avons observé sur le polariscope, le réseau des franges isochromes en champ clair.

Le dispositif expérimental est composé d'un système de chargement dans un contact entre deux modèles à axes orthogonaux (Figure III.1). Le modèle est monté dans le dispositif de chargement. Un dispositif est utilisé pour appliquer la charge de compression sur chaque modèle analysé. On récupérera les résultats sur le polariscope après le figeage des contraintes et le découpage mécanique, sous forme d'images, à l'aide d'un appareil photo numérique, les isochromes et les isoclines. Ainsi les franges isochromes et les franges isoclines obtenues permettront d'analyser le champ des contraintes développées dans chacun des modèles.

Trois cas sont étudiés, le premier étant un cylindre rigide en acier sur un cylindre déformable en époxy à température de figeage, le deuxième cas un cylindre rigide en acier sur un cylindre creux déformable en époxy à température de figeage et finalement un parallélépipède rigide en aluminium sur une sphère déformable en époxy.



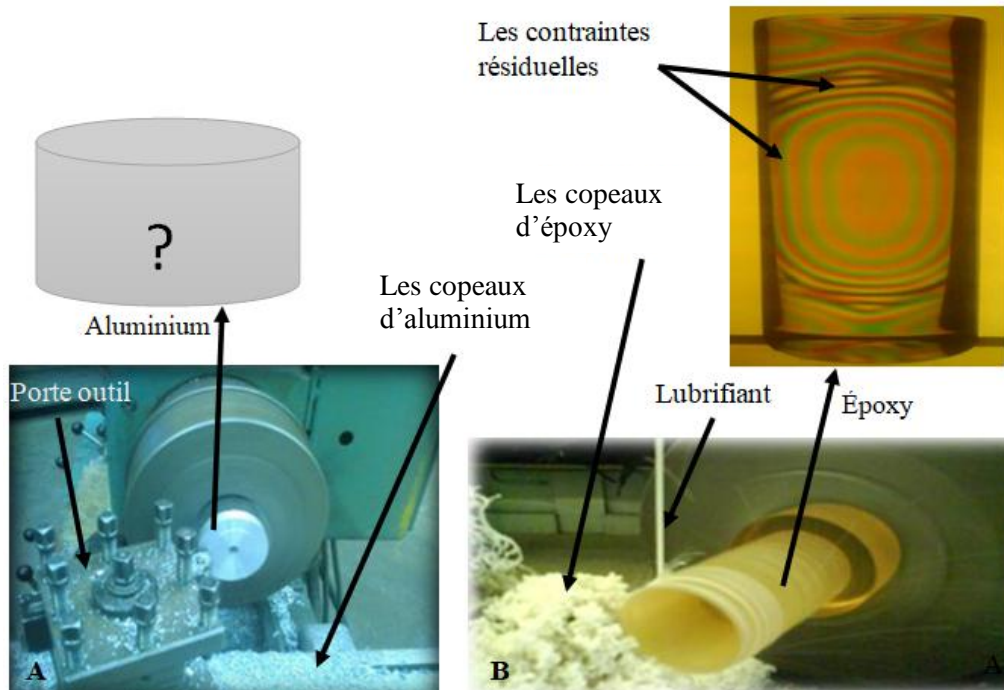
**Figure III.1 :** Dispositif expérimental; A: un cylindre rigide en acier sur un cylindre déformable; B: un cylindre rigide en acier sur un cylindre creux déformable; C: un parallélépipède rigide en aluminium sur une sphère déformable

### ❖ Elimination des contraintes résiduelles

Les contraintes résiduelles sont des contraintes qui modifient les propriétés mécaniques des matériaux telles que la dureté et la résilience. Pour les métaux (acier, aluminium, fonte,...), les contraintes sont dues à l'orientation des plans (perturbation du réseau cristallin). Ce n'est pas une tâche facile pour les chercheurs et les concepteurs d'éliminer les contraintes résiduelles.

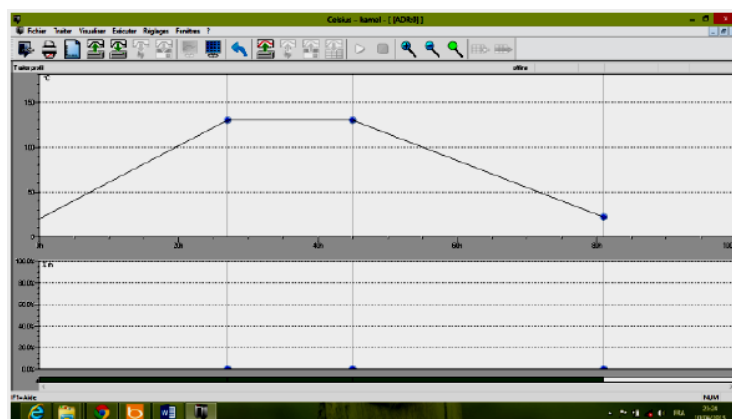
Avant d'analyser les contraintes développées dans les différents modèles biréfringents transparents après chargement, il est nécessaire de vérifier la présence de contraintes résiduelles. Ils peuvent être analysés facilement sur un polariscope, mais pour ce qui est des métaux, on ne peut pas observer les contraintes résiduelles. Même si l'on faisait des traitements thermiques (recuit), Il restera toujours des questions à se poser (Figure III.2). Il existe plusieurs contraintes telles que les contraintes mécaniques, les contraintes thermiques, les contraintes chimiques ..., etc. ; celles-ci sont des contraintes qui doivent être validées par les méthodes expérimentales, numériques et analytiques.

L'époxy, utilisé dans notre étude, est un matériau polymère à résine thermoplastique (TD) à structure amorphe avec une température de transition vitreuse  $T_g$  d'environ 120°C. C'est une macromolécule à base de carbone, formée par la réticulation de plusieurs monomères  $(CH_2 - O - CH)_n$  ; les contraintes résiduelles sont dues à la structure de la résine (TD) et à l'élévation de la température qui est de l'ordre de  $T_g$ . Dans ce cas les contraintes résiduelles visualisées sous le polariscope (Figure III.2) sont dues à l'usinage.



**Figure III.2 :** Visualisation des contraintes résiduelles pour un cylindre en 3D  
(A Cylindre en Aluminium ; B Cylindre en Époxy)

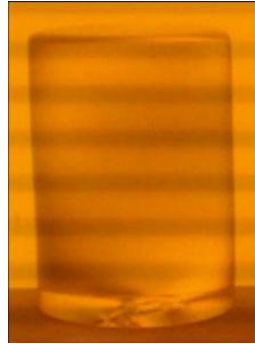
Pour éliminer les contraintes résiduelles, le modèle doit être réintroduit dans l'étuve. La température est ensuite augmentée à 120°C à raison de 5°C par heure (Figure III.3). Le modèle reste dans l'étuve de 3 à 12 heures en fonction du volume de la pièce pour homogénéisation de la température. Le modèle est ensuite refroidi lentement avant d'être retiré de l'étuve. La température de refroidissement d'un modèle comportant des sections variables est déterminée par l'épaisseur la plus importante des sections variables et par l'épaisseur la plus importante de la pièce. Un tableau généralement fourni par le fabricant du PLM-4R permet de choisir la vitesse de refroidissement en fonction de l'épaisseur de la pièce.



**Figure III.3 :** Cycle thermique pour le recuit



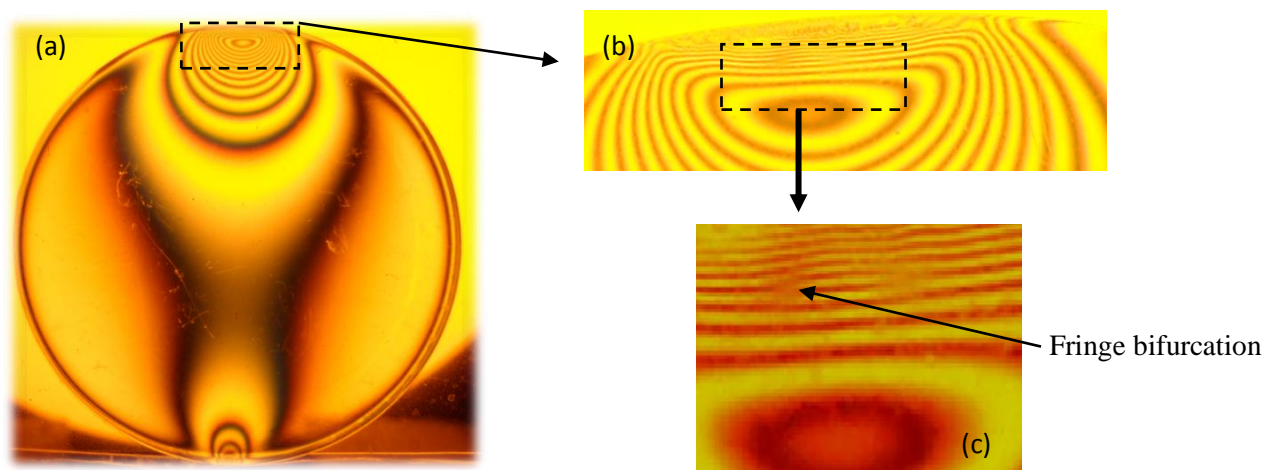
Le modèle (Figure III.4) est alors près à être utilisé, tel quel, à température ambiante ou bien subir le processus de figeage des contraintes lors de l'utilisation de la méthode de figeage découpage mécanique ou de la méthode de découpage optique en photoélasticimétrie tridimensionnelle pour la détermination des contraintes dans le volume d'un modèle.



**Figure III.4 :** Visualisations du modèle sous le polariscope après élimination des contraintes résiduelles pour un cylindre en époxy

### III.3 CYLINDRE RIGIDE SUR UN CYLINDRE DEFORMABLE

Dans ce premier cas, nous avons étudié le champ de contraintes figées à l'intérieur du volume du cylindre en époxy. Les axes des deux cylindres sont orthogonaux (Figure III.1.A). Les contraintes ont été figées à l'intérieur du volume du cylindre en époxy en utilisant le processus de figeage décrit dans les travaux précédents [2]. La suite de cette partie du travail est d'appliquer la méthode photoélastique pour obtenir les franges isochromes qui peuvent ensuite être exploitées pour déterminer l'orientation et les valeurs des contraintes qui sont d'une très grande importance pour l'industrie mécanique.



**Figure III.5 :** a- Franges photoélastiques pour une tranche située à  $z = 0$  mm, b- Gros plan de la zone de contact, c- La bifurcation des franges

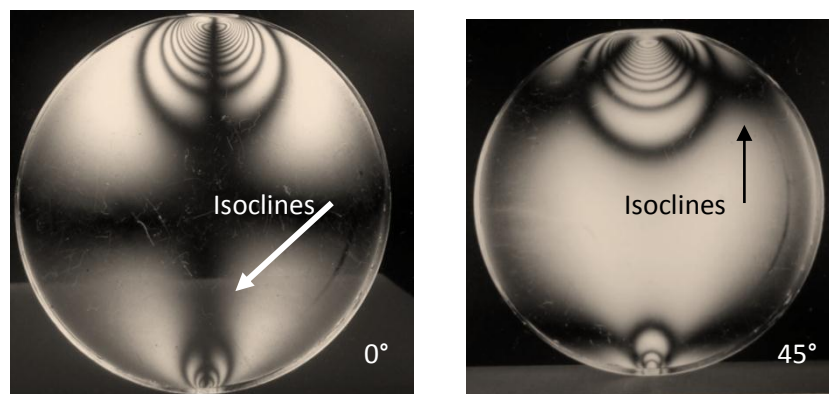
La figure III.5.(a) montre le point d'application de la charge, la tranche la plus sollicitée permet d'obtenir facilement et précisément les ordres de franges près de la zone de contact (Figure III.5.b) afin de déterminer avec précision la différence de contraintes principales.

Un zoom de la zone de contact (Figure III.5-a) obtenu pour la première tranche permet d'obtenir facilement et précisément les ordres de frange près de la zone de contact (Figure III.5-b) afin de déterminer avec précision la différence de contraintes principales dans le but de faire une comparaison avec la simulation numérique pour validation. Un autre zoom de la zone sélectionnée (Figure III.5-c) a révélé une bifurcation de la frange isochromatique.

### III.3.1 Visualisation des franges isoclines dans le cas expérimentale

Une isocline est une frange telle qu'en chacun de ses points les directions des contraintes principales sont parallèles aux directions des axes du polariseur et de l'analyseur du polariscope utilisé.

Les franges isoclines sont indépendantes de l'intensité de la charge appliquée et de la longueur d'onde de la lumière utilisée. Dans un polariscope rectiligne, en faisant tourner les deux polaroids simultanément, on visualise les franges isoclines (Figure III. 6) qui apparaissent une à une suivant l'angle de rotation. On remarque qu'en faisant tourner les deux polaroids simultanément, les franges isoclines apparaissent sous formes de franges obscures très visibles sur les images ; elles changent de position suivant l'angle de rotation. On rappelle que les isoclines ne dépendent pas de l'intensité du chargement, donc l'étude relative aux isoclines se fera pour un seul cas de chargement.

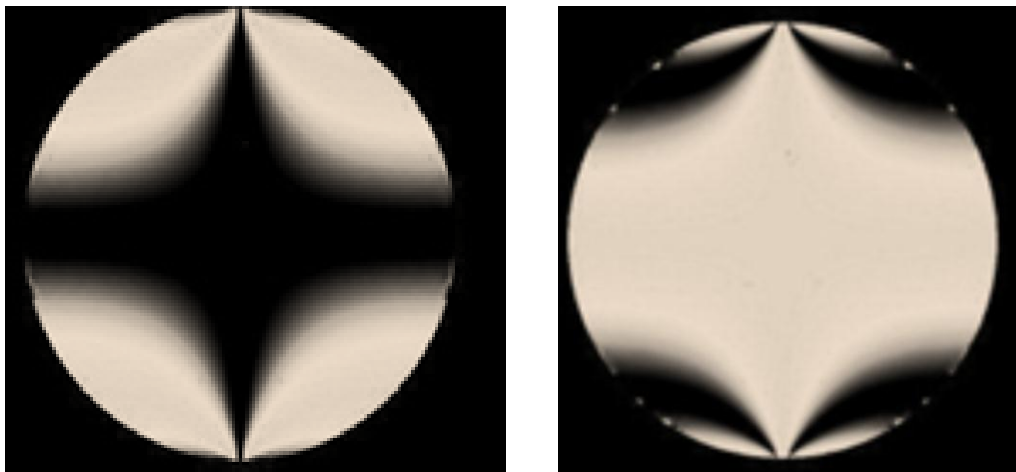


**Figure III. 6 :** Réseau de franges isoclines obtenues expérimentalement

### III.3.2 Visualisation des franges isoclines dans le cas numérique

Le programme calcule la valeur du terme  $\sin^2 2\alpha$  représentant l'intensité de la lumière recueillie au niveau de l'analyseur du polariscope en chaque point du modèle. Le programme permet alors de représenter sous forme d'une image les différentes valeurs de ce terme. Les valeurs nulles du terme  $\sin^2 2\alpha$  vont représenter les isoclines, obtenues expérimentalement sur un polariscope linéaire à champ obscur, sous forme de franges obscures.

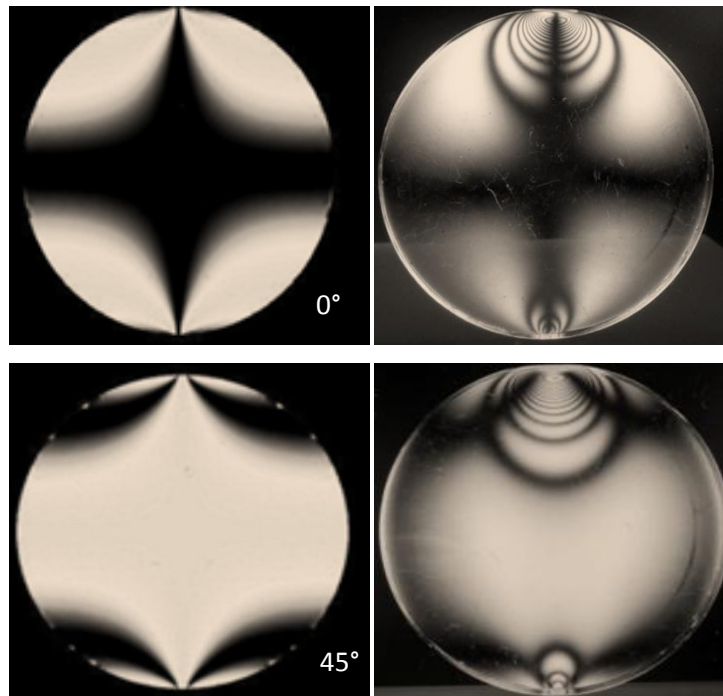
Nous représentons sur la Figure III. 7 ci-dessous les franges isoclines obtenues pour deux positions différentes du polariseur et de l'analyseur du polariscope utilisé pour l'analyse du modèle birefringent. On simule la rotation des polaroids en augmentant l'angle isocline  $\alpha$  de 45 degrés.



**Figure III. 7 :** Modèle de franges isocline calculé pour 0° (à gauche) et pour 45° (à droite)

### III.3.3 Comparaison des franges isoclines

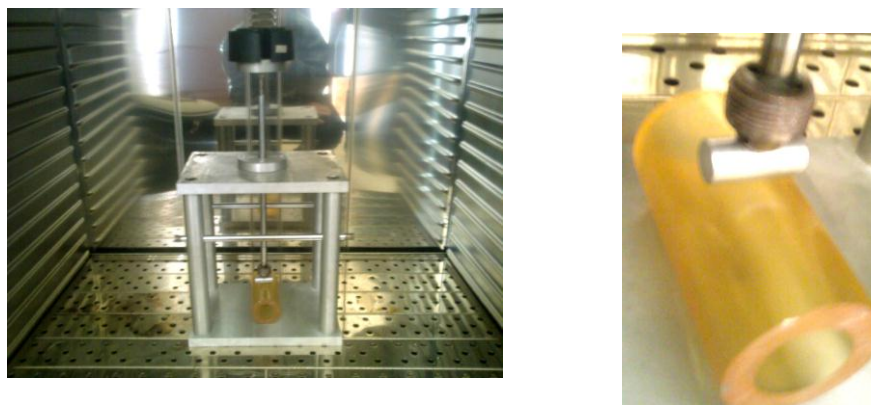
Les franges isoclines simulées (à gauche) sont comparables aux franges isoclines expérimentales (à droite); les franges isochromes simulées sont représentées sur les images (à gauche).



**Figure III. 8 :** Comparaison du réseau de franges isoclines numériques et du réseau de franges isoclines expérimental

#### III.4 CYLINDRE RIGIDE SUR UN CYLINDRE CREUX DEFORMABLE

Un cylindre rigide en acier de 18 mm de diamètre est utilisé pour appliquer une charge de compression de 38.2N sur le cylindre creux en époxy déformable (Figure III.9). Les axes des deux cylindres sont orthogonaux. Les contraintes ont été figées à l'intérieur du volume du cylindre en utilisant le processus de figeage (Figure III.10). Le cylindre est ensuite introduit dans la cuve puis découpé suivant des tranches minces.

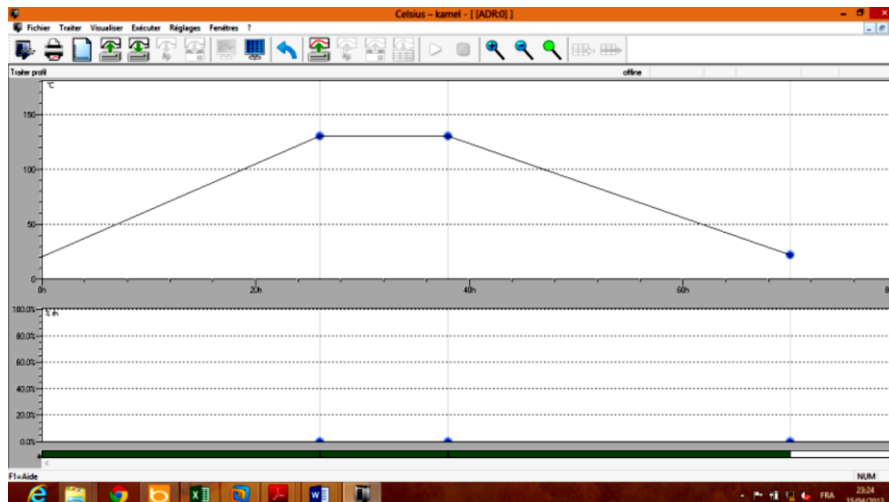


**Figure III.9 :** Vue détaillée du dispositif expérimental

### III.4.1 Figeage des contraintes

Le figeage des contraintes est réalisé à l'aide d'un traitement thermique effectué à l'intérieur d'une étuve. Une fois que le modèle est bien positionné dans son système de chargement à l'intérieur de l'étuve, la température de l'étuve augmente avec une vitesse de 5 degrés par heure jusqu'à atteindre la température de figeage des contraintes qui correspond à la température de transition vitreuse de l'époxy (120 degrés). La durée du traitement thermique est fonction des dimensions du modèle.

La température de l'étuve est ensuite ramenée à la température ambiante avec une vitesse de 5 degrés par heure, la charge sur la modèle étant maintenue jusqu'au refroidissement total de l'étuve.

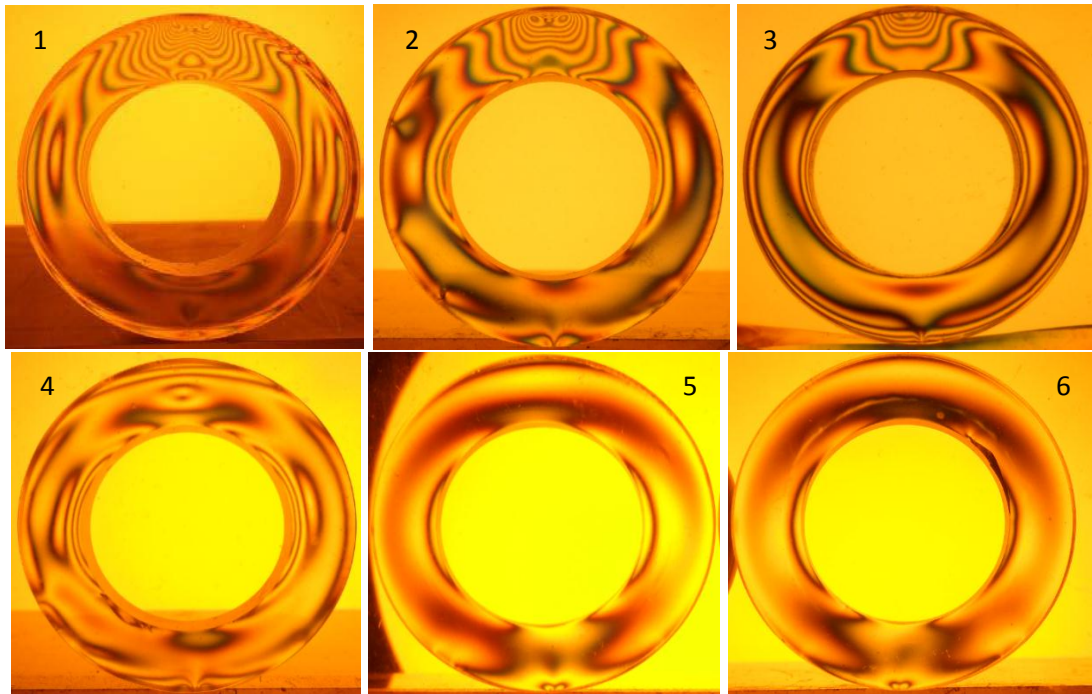


**Figure III.10 :** Traitement thermique pour figer des contraintes

### III.4.2 Résultats expérimentaux

Les différentes images des franges représentées sur la (Figure III.11) ont été obtenues expérimentalement. Les franges obtenues correspondent aux contraintes développées dans les tranches successives isolées le long de l'axe du cylindre. Après le polissage, on observe sur le polariscopes, le réseau des franges isochromes en champ clair.





**Figure III.11** : Franges obtenues expérimentalement le long du cylindre creux en isolant des tranches de différentes d'épaisseurs

On constate que les contraintes apparaissant dans les différentes tranches diminuent en s'éloignant de la direction d'application de la charge. Les franges photoélastiques sont visibles et sont relativement les mêmes sur la partie inférieure du modèle. Ceci s'explique par le fait que la charge est uniformément répartie sur la longueur du cylindre. Le cylindre creux est en contact sur toute sa longueur. Ce qui n'est pas le cas pour la partie supérieure pour laquelle la surface de contact est un cercle de rayon très faible.

Sur la partie supérieure du cylindre creux on constate donc que loin du point d'application de la charge, il y a absence de franges; les contraintes sont nulles.

L'image 1 de la Figure III.11 correspond au point d'application de la charge donc la tranche la plus sollicitée. On remarque que l'ordre des franges est maximal à cet endroit.

#### III.4.2.1 Analyse des contraintes figées de la tranche la plus sollicitée

La figure III.12 ci-dessous représente le réseau de franges isochromes obtenu sur l'analyseur d'un polariscope à champ clair.



**Figure III.12 :** Franges expérimentales pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge

L'observation des franges n'étant pas très aisée, on a « zoomé » sur la zone de contact pour pouvoir observer les franges correctement. Les franges photoélastiques expérimentales sont représentées sur la (Figure III 13). Ces franges peuvent être utilisées pour le calcul de la différence des contraintes principales le long de la ligne [AB] Figure III.13). Elles peuvent aussi être comparées aux franges simulées obtenues par la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel CASTEM. Une droite est tracée sur l'image pour faciliter le relevé des ordres de franges. On pourra aussi faire une comparaison entre les graphes de la différence des contraintes principales calculées par les deux méthodes expérimentale et numérique ; (le détail du calcul numérique de la différence des contraintes à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM est donnée dans l'annexe A).

On définit le segment [AB] au niveau de la zone dangereuse du modèle donné avec les isochromes visualisés où B désigne le point de traction et A un point de compression.

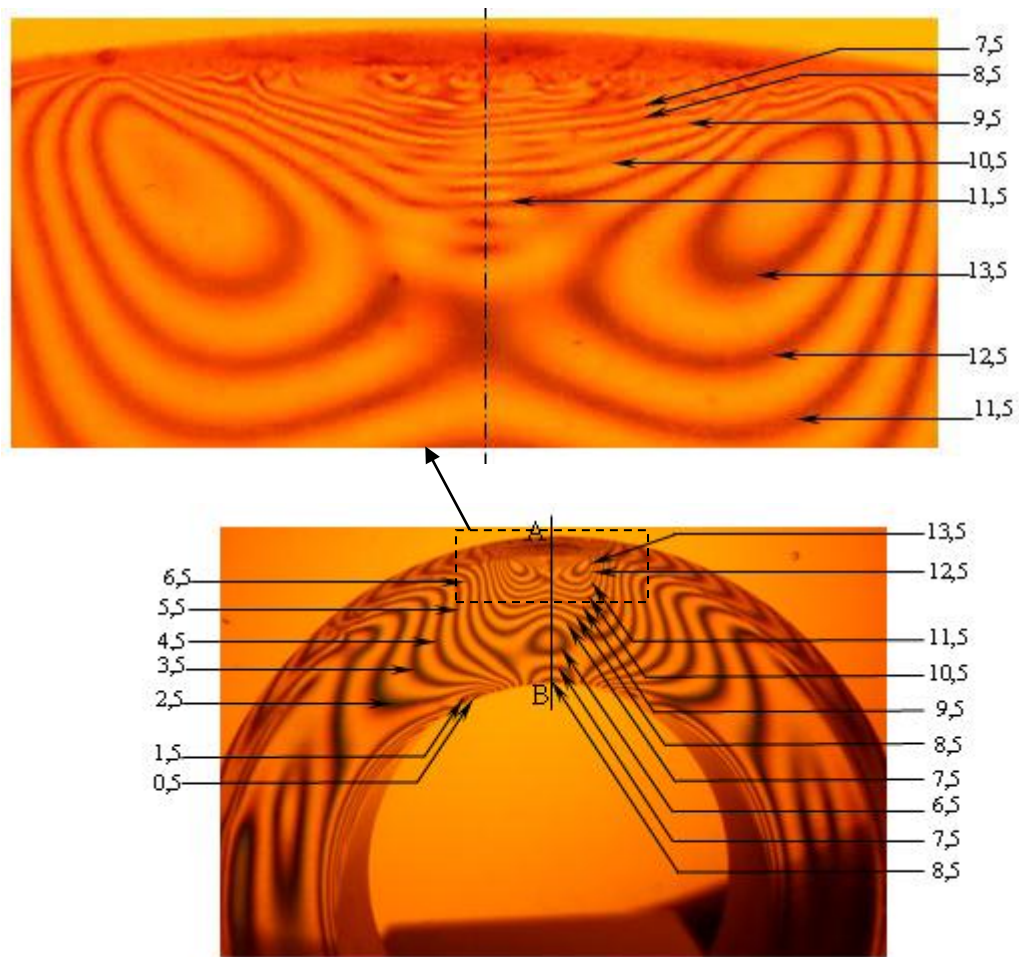
La différence des contraintes suivant le segment [AB] est obtenue par la relation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$$

$N$  : Ordre de frange

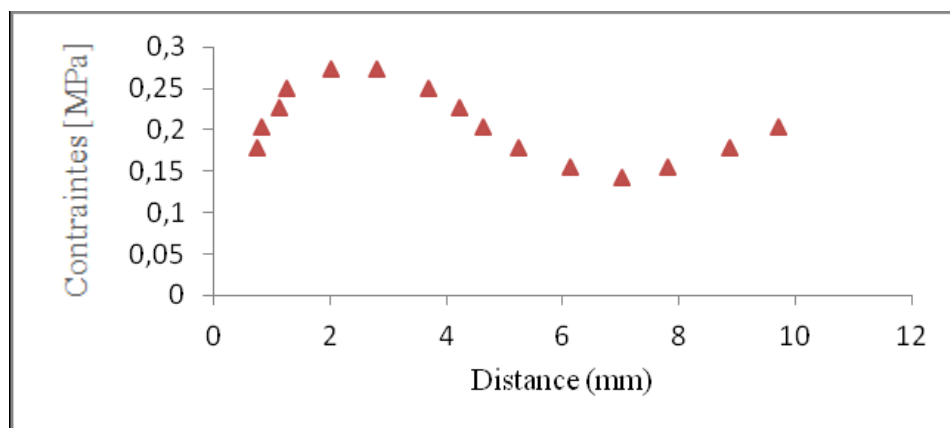
$f$  : Valeur de frange

$e$  : Épaisseur du modèle



**Figure III.13** : Réseau d'isochromes obtenu en champ clair

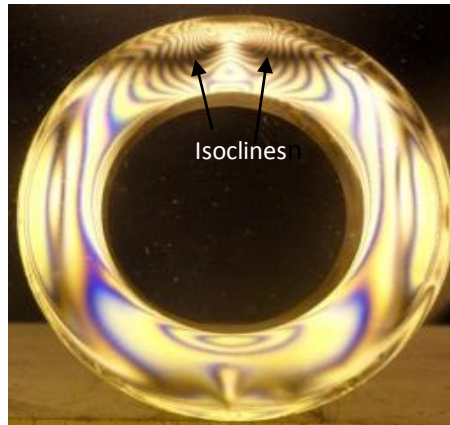
Nous pouvons voir que les contraintes maximales sont observées à une distance d'environ 2 mm sous le point A (Figure III.14), à l'intérieur du volume du cylindre. Cette contrainte atteint approximativement la valeur de 0,28 MPa.



**Figure III.14** : Courbe de variation de la différence des contraintes principales



En faisant tourner les deux polaroids simultanément on visualise les franges isoclines (Figure III. 15) qui apparaissent une à une suivant l'angle de rotation. On remarque qu'en faisant tourner les deux polaroids, les franges isoclines apparaissent en zones sombres très visibles sur les images et qui changent de position suivant l'angle de rotation.

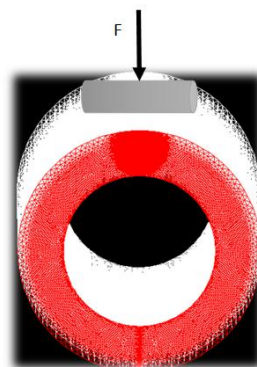


**Figure III. 15 :** Franges isoclines obtenues expérimentalement

#### III.4.3 Analyse par éléments finis

La méthode éléments finis est une méthode très utilisée dans le secteur de l'industrie et de la recherche. L'idée principale de la méthode des éléments finis consiste à discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel en éléments de formes géométriques simples.

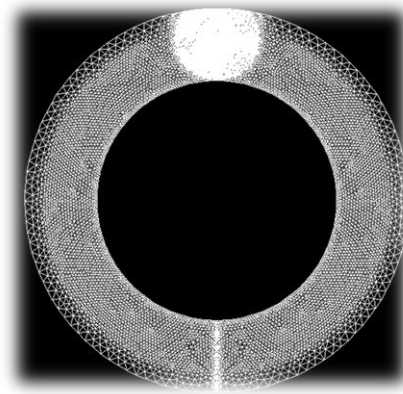
Une analyse par éléments finis conduite avec le logiciel CASTEM est utilisée pour obtenir le champ des contraintes développées à l'intérieur du modèle. Dans les calculs par éléments finis, on a considéré le comportement du modèle isotrope et élastique. Le maillage du modèle pour le calcul numérique (Figure III.16) a été raffiné au voisinage de la zone de contact pour avoir une meilleure représentation des franges



**Figure III.16 :** Représentation du maillage pour le cas d'un cylindre rigide sur un cylindre creux déformable

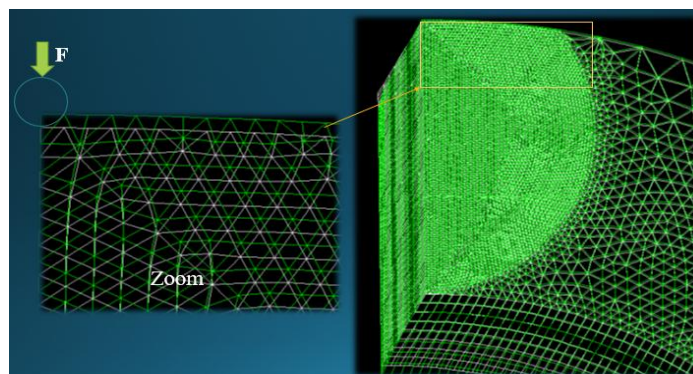
Dans le cas d'un corps rigide indéformable, le chargement est donné par les conditions aux limites qui sont simplement le déplacement imposé. La valeur de la charge appliquée correspondant à un déplacement imposé est extraite des nœuds en contact. Le module de Young et le coefficient de Poisson pour les deux corps en contact sont introduits dans le programme (Annexe A).

La (Figure III.17) représente la surface totale maillée qui montre un affinage du maillage au niveau de la partie mise en contact.



**Figure III.17 :** Représentation de la surface totale maillée

L'opérateur DEFOR(ME) construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement. On peut aussi préciser certaines options comme la couleur. Ici le maillage initial en couleur blanche et la déformée en couleur verte (Figure III.18).

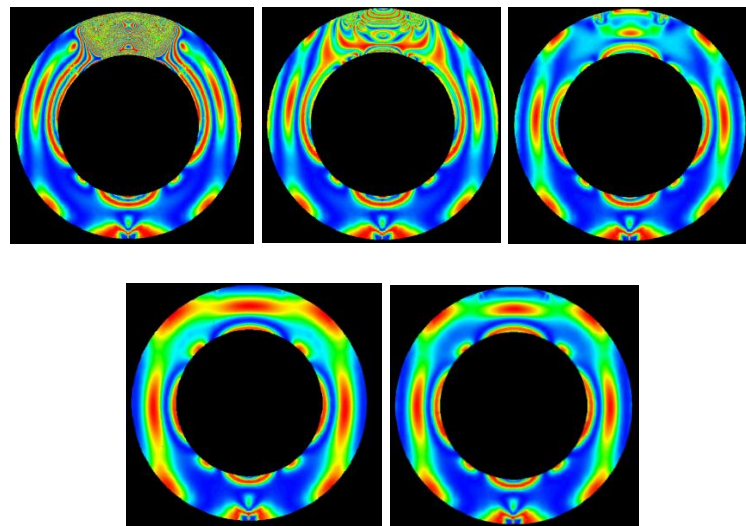


**Figure III.18 :** Représentation de la déformée

Représentation du maillage pour le cas d'un cylindre rigide sur un cylindre creux déformable.

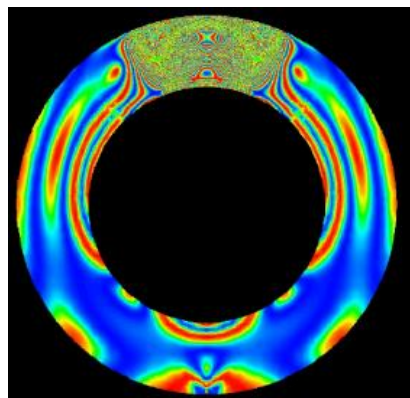
### III.4.3.1 Répartition des contraintes le long de l'axe longitudinal du cylindre creux

On n'observe que les contraintes dans la partie inférieure du modèle (Figure III.19) sont beaucoup moins importantes que celles développées dans la partie supérieure. Ceci est dû au fait que la charge est uniformément répartie le long de la surface de contact inférieure du modèle alors que sur la partie supérieure seulement une portion de la génératrice du modèle supporte la charge appliquée. Ce qui se traduit naturellement par des contraintes plus importantes.



**Figure III.19 :** Franges obtenues par éléments finis le long du cylindre creux en isolant une tranche d'épaisseur 8 mm

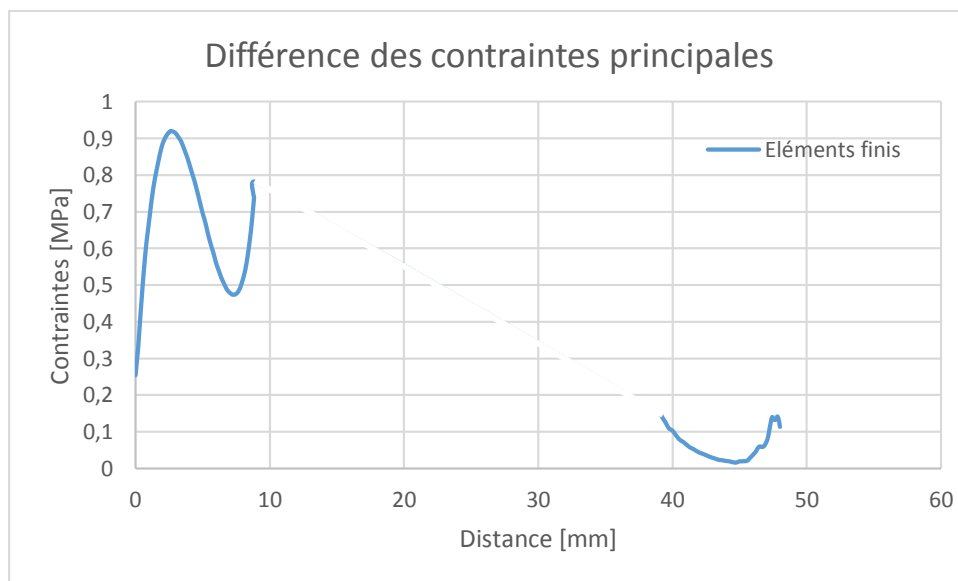
Les franges expérimentales (Figure III.13) sont relativement comparables aux franges simulées (Figure III.20).



**Figure III.20 :** Franges obtenues par éléments finis pour une tranche de 8 mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge

Une autre comparaison peut être faite en exploitant les franges expérimentales. L'ordre des franges isochromes est relevé sur l'image des franges de la même façon que sur un polariscope à champ clair ; la première frange obscure correspond à l'ordre 0,5. Les ordres de franges sont ainsi utilisés pour obtenir la différence des contraintes principales le long de la ligne droite [AB] de la tranche isolée le long de la direction de la charge (Figure III.13).

Le graphe (Figure III.21) montre clairement l'évolution de la différence des contraintes principales le long d'une droite verticale située le long de la direction de la charge appliquée.



**Figure III.21 :** Évolution de la différence des contraintes principales suivant un segment situé le long de la direction de la charge

#### III.4.4 Comparaison des résultats obtenus numériques et expérimentaux

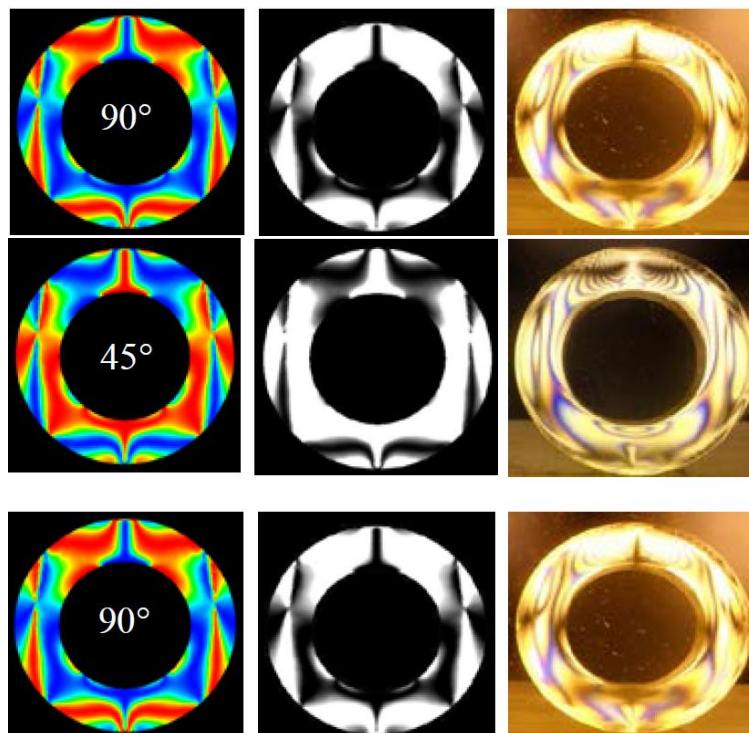
La (Figure III.22) représente les isochromes relevées expérimentalement et les isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec Photoshop. Les franges numériques sont comparables aux franges expérimentales dans les parties inférieures et supérieures du modèle. Loin de la zone de contact la plus sollicitée, les contraintes diminuent.



**Figure III.22 :** Franges obtenues expérimentalement et par éléments finis long du cylindre

Pour la comparaison des franges isoclines obtenues numériquement et expérimentalement pour les différentes rotations de l'angle, la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle à l'un des axes des polaroids.

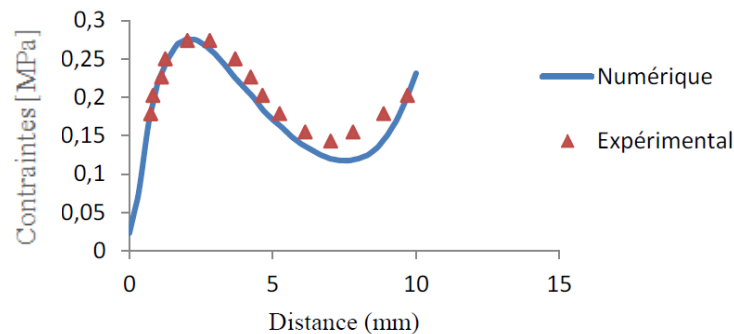
La figure III .23 montre les isoclines obtenues numériquement et traitées avec le logiciel PHOTOSHOP (à gauche de chaque image) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (à droite de chaque image). On remarque que les isoclines sur la partie gauche et la partie droite de chaque image sont semblables et concordent.



**Figure III. 23 :** Comparaison du réseau de franges isoclines numériques et du réseau de franges isoclines expérimental



Pour une meilleure comparaison des différents résultats obtenus par les deux méthodes expérimentale et numérique, une deuxième comparaison est faite en utilisant les graphes de la différence des contraintes principales le long de la droite [AB] (Figure III.24). On constate relativement une bonne concordance entre les valeurs expérimentales et la solution par éléments finis loin de la zone de contact.

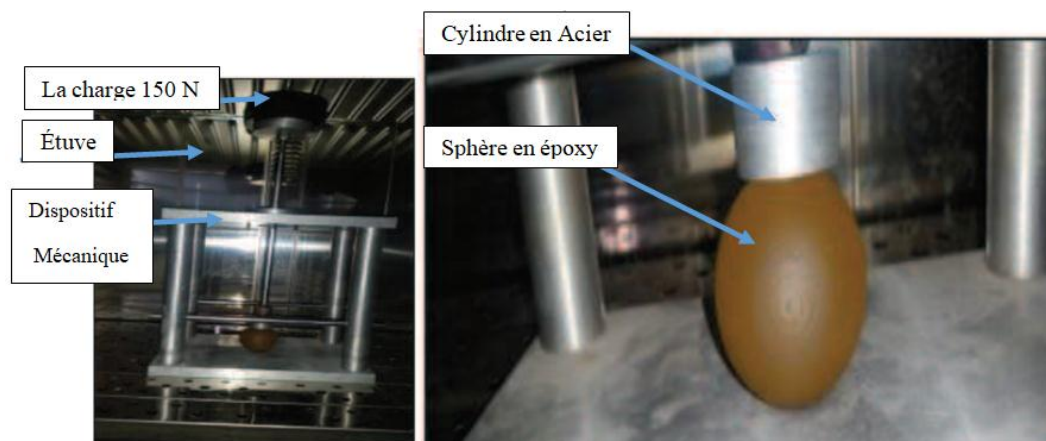


**Figure III.24 :** Différence des contraintes principales le long de la droite [AB] pour une tranche de 8mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge

### III.5 PARALLÉLÉPIPÈDE RIGIDE SUR UNE SPHERE DÉFORMABLE

Pour ce deuxième cas, un parallélépipède rigide en aluminium de 20x20 mm de section est utilisé pour appliquer une charge de compression de 150 N sur une sphère déformable (Figure III.25). Les contraintes ont été figées à l'intérieur du volume de la sphère en utilisant le processus de figeage. La sphère est ensuite découpée mécaniquement en tranches suivant une direction choisie.

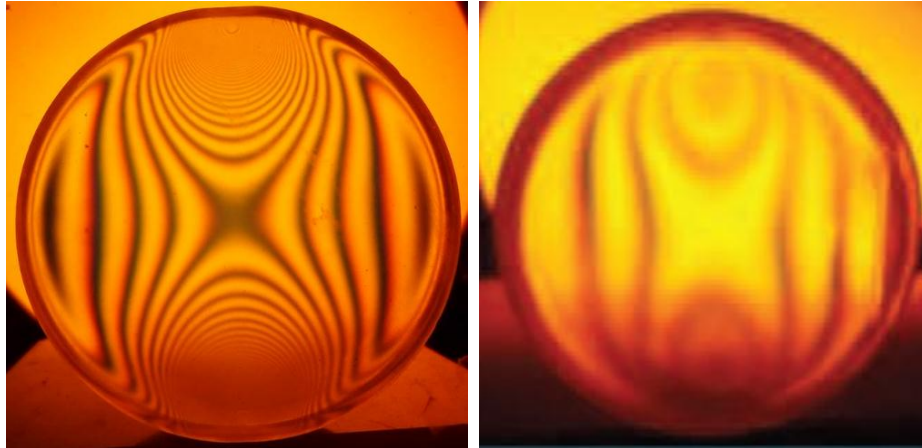
Les hypothèses posées : Les surfaces sont continues et non-conformes ; Les surfaces sont sans frottement ; les deux surfaces de contacts sur la sphère sont parallélépipède.



**Figure III.25 :** Parallélépipède indéformable sur une sphère déformable

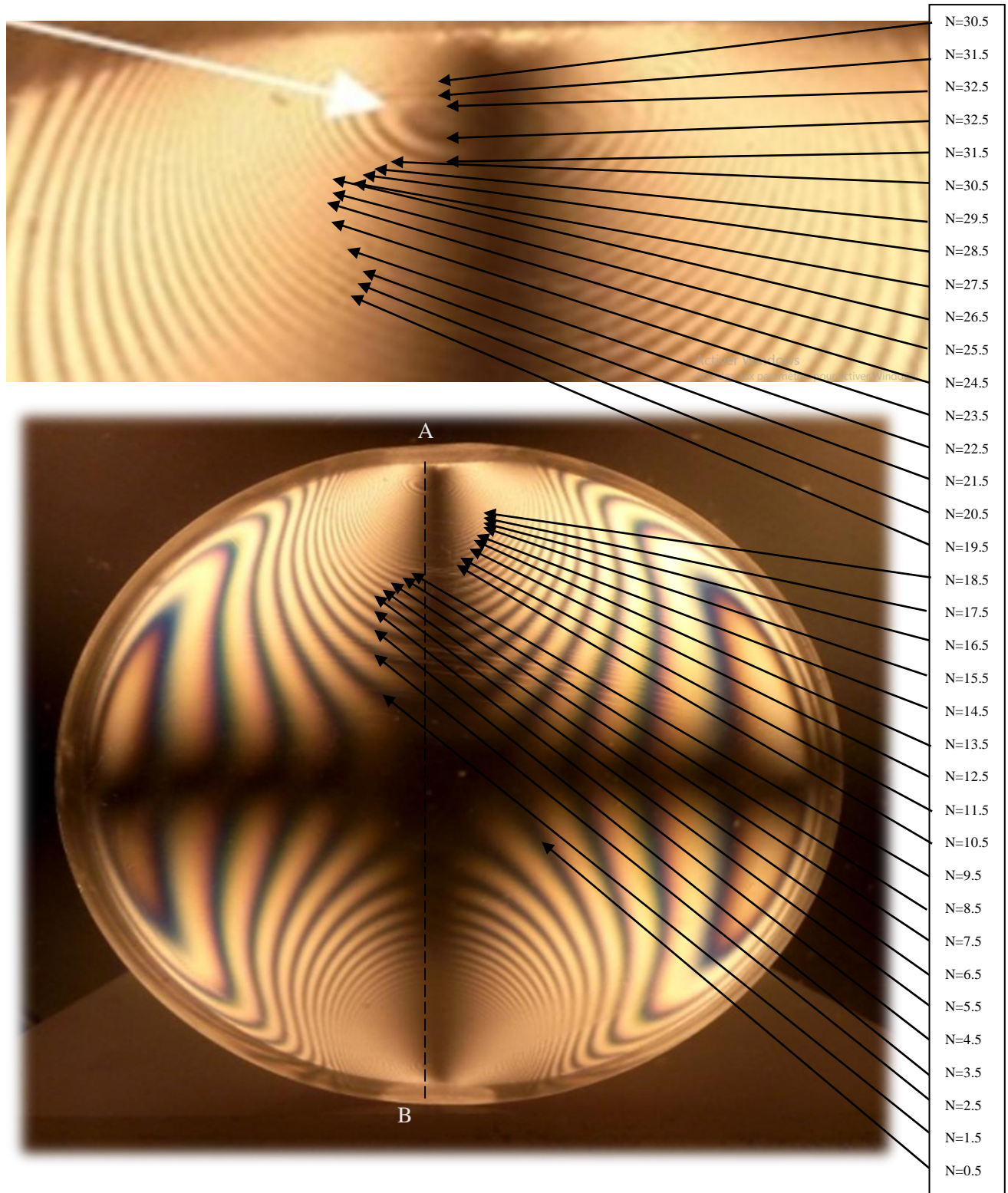
### III.5.1 Analyse expérimentale

Nous avons choisi une tranche d'épaisseur relativement importante (10mm) de manière à obtenir plusieurs franges. Pour obtenir les franges expérimentales, il était nécessaire d'utiliser un zoom. On distingue les franges et on remarque bien que leur nombre augmente en s'approchant de la zone de contact. Elles diminuent ensuite pour s'annuler loin de la zone de contact. Les franges obtenues sont représentées sur la (Figure III.26).



**Figure III.26 :** Frange obtenue expérimentalement le long de la sphère en isolant des tranches différentes d'épaisseurs

### III.5.1.1 Calcul des valeurs de la différence des contraintes principales sur le segment [AB]



**Figure III.27 :** Franges expérimentale obtenues pour la tranche la plus sollicitée de 10mm d'épaisseur située le long de la direction de la charge (la zone dangereuse)



On constate que les contraintes sont localisées aux voisinages de la zone de contact, on constate aussi que les contraintes développées dans les différentes tranches diminuent en s'éloignant de la direction d'application de la charge. Sur les deux parties de contact de la sphère, on constate donc loin du point d'application de la charge il y'a absence de franges. Les contraintes sont négligeables. On remarque que plus on se rapproche de la ligne d'action de la charge plus les franges apparaissent (Figure III.26, 27). La comparaison peut donc être faite entre les franges obtenues expérimentalement et les franges obtenus numériquement.

La différence des contraintes suivant le segment [AB] est donnée par la relation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N.f}{e}$$

Les résultats obtenus sont données sur le tableau suivant :

f=0,36 N/mm/frange ; e= 8mm.

N/Ordre de frange	Distance réelle (mm)	Différences des contraintes (MPa)
21,5	0,25	0,774
22,5	0,3333	0,81
23,5	0,45833	0,846
24,5	0,58333	0,882
25,5	0,66666	0,918
26,5	0,79166	0,954
27,5	0,91666	0,99
28,5	1,04166	1,026
29,5	1,20833	1,062
30,5	1,3333	1,098
31,5	1,54166	1,134
32,5	1,8333	1,17
32,5	3,3333	1,17
31,5	3,70833	1,134
30,5	4,125	1,098
29,5	4,4583	1,062
28,5	4,75	1,026

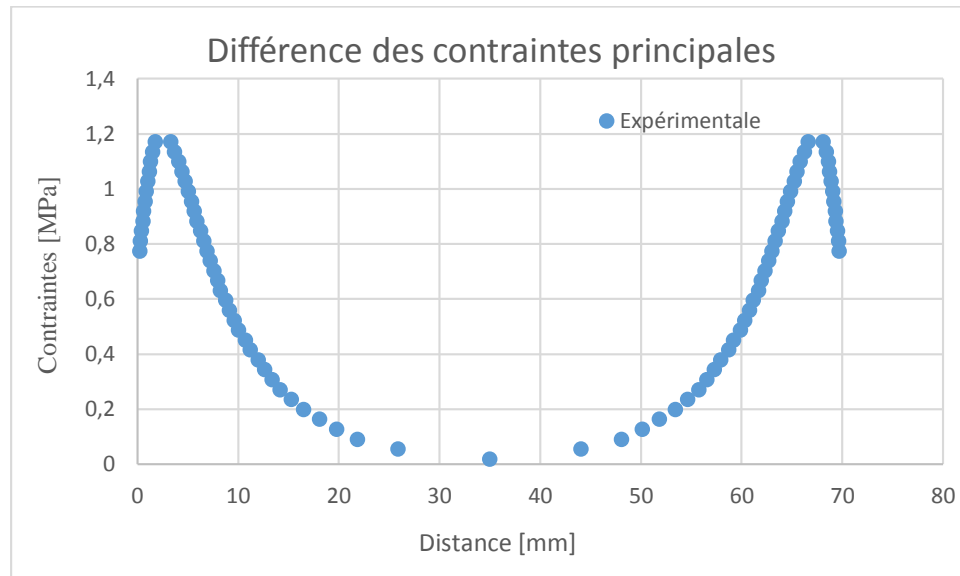
---

27,5	5,08333	0,99
26,5	5,4166	0,954
25,5	5,6666	0,918
24,5	5,95833	0,882
23,5	6,291	0,846
22,5	6,625	0,81
21,5	6,9583	0,774
20,5	7,25	0,738
19,5	7,625	0,702
18,5	8	0,666
17,5	8,25	0,63
16,5	8,7916	0,594
15,5	9,1666	0,558
14,5	9,625	0,522
13,5	10,0833	0,486
12,5	10,78125	0,45
11,5	11,25	0,414
10,5	12,03125	0,378
9,5	12,65625	0,342
8,5	13,4375	0,306
7,5	14,2187	0,27
6,5	15,3125	0,234
5,5	16,5625	0,198
4,5	18,125	0,162
3,5	19,84375	0,126
2,5	21,875	0,09
1,5	25,9375	0,054
0,5	35	0,018
1,5	44,0625	0,054
2,5	48,125	0,09
3,5	50,15625	0,126
4,5	51,875	0,162
5,5	53,4375	0,198

6,5	54,6875	0,234
7,5	55,7813	0,27
8,5	56,5625	0,306
9,5	57,34375	0,342
10,5	57,96875	0,378
11,5	58,75	0,414
12,5	59,21875	0,45
13,5	59,91	0,486
14,5	60,37	0,522
15,5	60,83	0,558
16,5	61,2	0,594
17,5	61,75	0,63
18,5	62	0,666
19,5	62,37	0,702
20,5	62,75	0,738
21,5	63,04	0,774
22,5	63,37	0,81
23,5	63,7	0,846
24,5	64,04	0,882
25,5	64,33	0,918
26,5	64,58	0,954
27,5	64,91	0,99
28,5	65,25	1,026
29,5	65,54	1,062
30,5	65,875	1,098
31,5	66,29	1,134
32,5	66,66	1,17
32,5	68,16	1,17
31,5	68,45	1,134
30,5	68,66	1,098
29,5	68,79	1,062
28,5	68,95	1,026

**Tableau III .1 :** Valeurs de la différence des contraintes principales relevées sur le segment [AB]

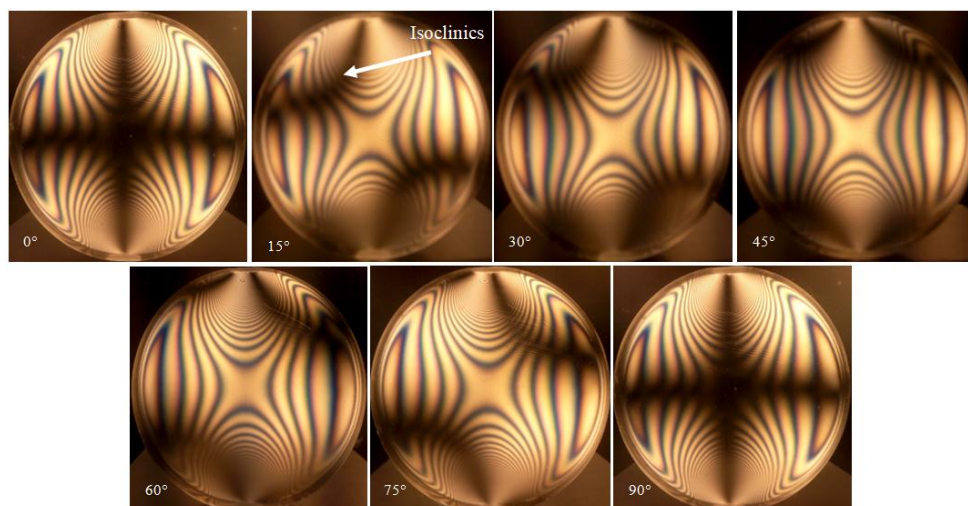
Les variations de la différence des contraintes principales sont données par la courbe suivant (Figure III.28).



**Figure III.28 :** Courbe de variation de la différence des contraintes principales

### III.5.1.2 Les franges isoclines

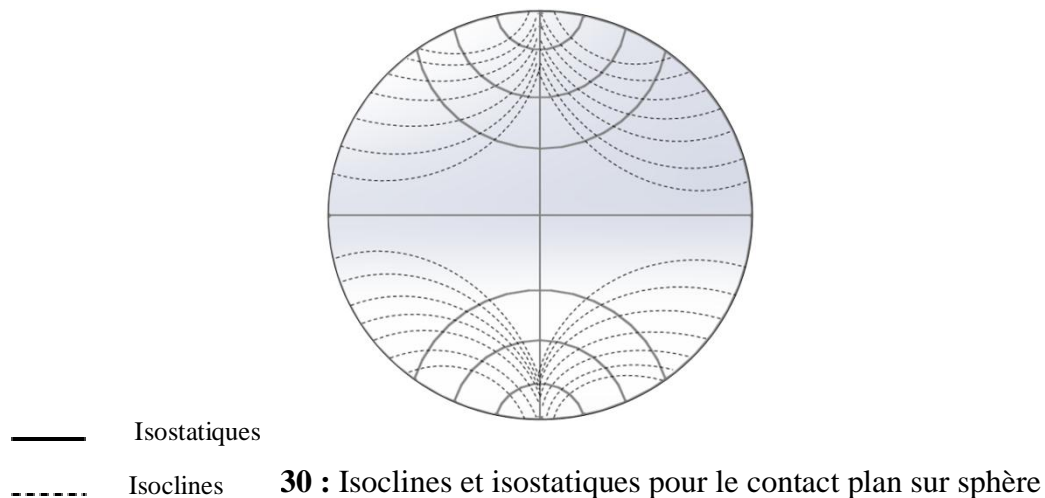
En faisant tourner les deux polaroids simultanément, on visualise les franges isoclines (Figure III.29) qui apparaissent une à une suivant l'angle de rotation. On remarque qu'en faisant tourner les deux polaroids, les franges isoclines apparaissent sur les images, elles changent de position suivant l'angle de rotation. On rappelle que les isoclines ne dépendent pas de l'intensité du chargement, donc l'étude relative aux isoclines se fera pour un seul cas de chargement.



**Figure III.29 :** Les franges isoclines expérimentales (0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° and 90°).

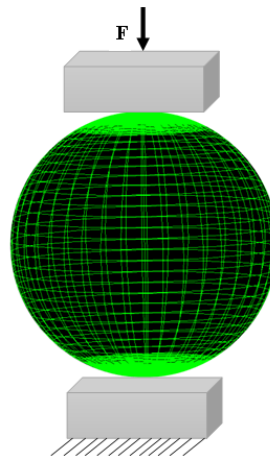
L'exploitation des isoclines permet de déterminer les directions principales des contraintes. On peut tracer les trajectoires des contraintes principales appelées aussi isostatiques à partir de la connaissance des isoclines.

La figure III .30 représente les isoclines et les isostatiques pour le cas de la sphère repérées expérimentalement et tracées manuellement.



## III.5.2 Analyse par éléments finis

### III.5.2.1 Calcul des franges isochromes

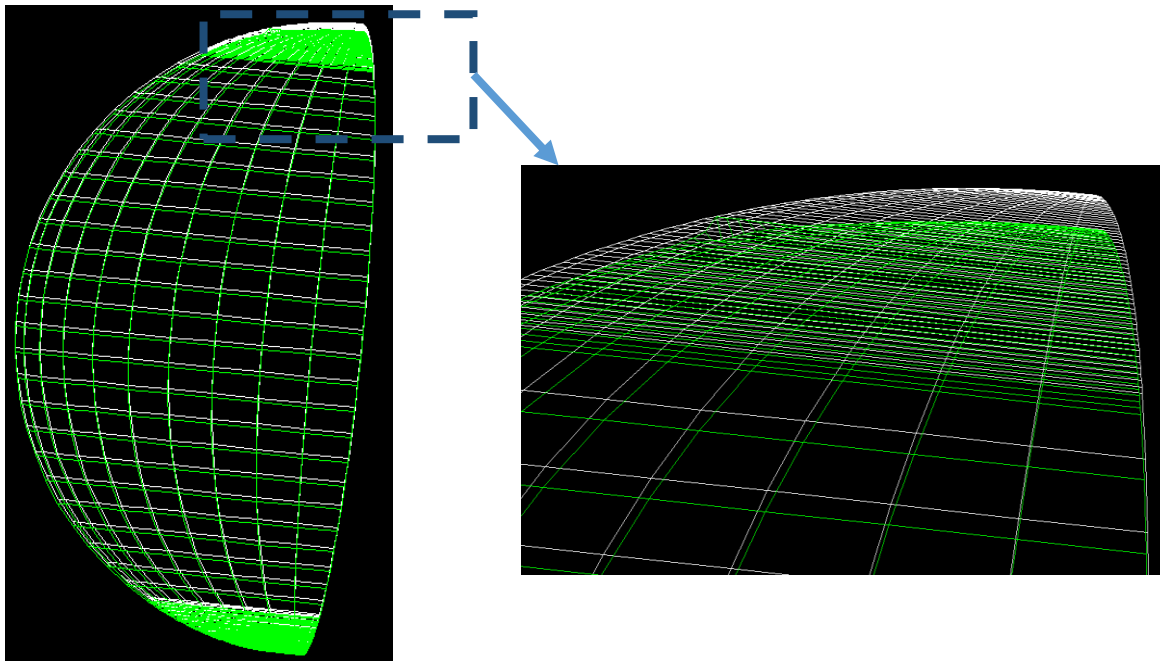


**Figure III.31** : Représentation du maillage pour le cas d'un parallélépipède rigide sur une sphère déformable

Une analyse par éléments finis conduite avec le logiciel CASTEM est utilisée pour obtenir le champ des contraintes développées à l'intérieur du Modèle. Dans les calculs par éléments finis, on a considéré le comportement du modèle isotrope et élastique.

Le maillage a été raffiné au voisinage du contact (Figure III.31) pour obtenir une meilleure approximation.

L'opérateur DEFOR(ME) construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement. On peut aussi préciser certaines options comme la couleur. Ici le maillage initial en couleur blanche et la déformée en couleur verte (Figure III.32).



**Figure III.32 :** Représentation de la Sphère déformée

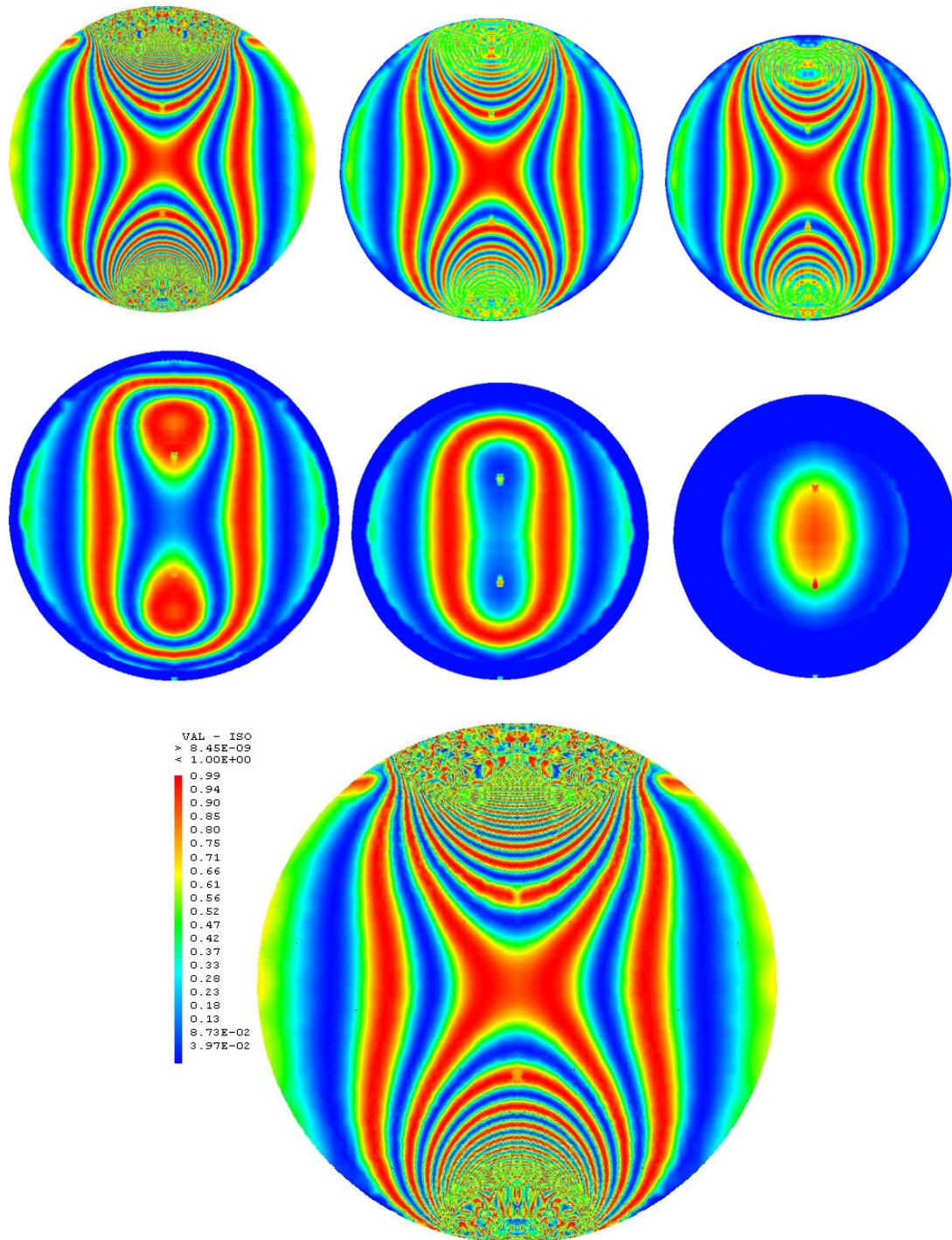
Les isochromes et les isoclines (Figure III.33), calculées pour chaque tranche à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM (Annexe D), montrent clairement que dans la partie supérieure et inférieure de la sphère, loin de la zone d'application de la charge, les contraintes sont nulles (absences totales de franges). Elles augmentent ensuite pour atteindre une valeur maximale au niveau du point d'application de la charge (le nombre de frange visibles est maximum à cet endroit). CASTEM utilise une échelle de couleur pour afficher les contraintes. Pour CASTEM c'est juste une couleur ; une intensité de lumière dans un point, c'est une matrice qu'il fait correspondre à la valeur de l'intensité.

Si par exemple l'intensité de lumière est nulle, CASTEM la représente en bleu.

Si l'intensité de lumière est maximale, CASTEM la représente en rouge.

CASTEM possède quatre couleurs bleu, vert, jaune et rouge.

L'intensité de lumière est variable entre 0 et 1.

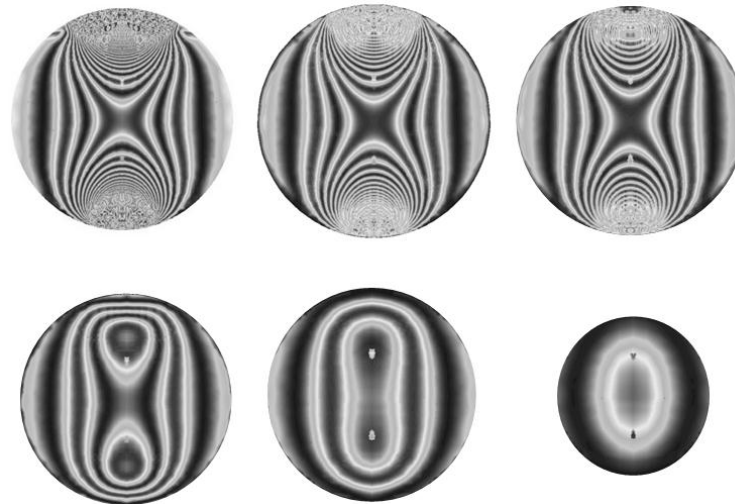


**Figure III.33 :** Franges obtenues par éléments finis le long de la sphère en isolant une tranche d'épaisseur 8 mm

Les images obtenues à l'aide de CASTEM sont traitées à l'aide du logiciel Photoshop pour obtenir les franges en noir et blanc (Figure III.34). Pour pouvoir comparer les résultats numériques et expérimentaux, comme pour le cas expérimental, les calculs ont été faits avec des tranches de 7 mm d'épaisseur en déplaçant les sections après chaque analyse d'une valeur de 2 mm. Les franges obtenues correspondent donc aux contraintes développées

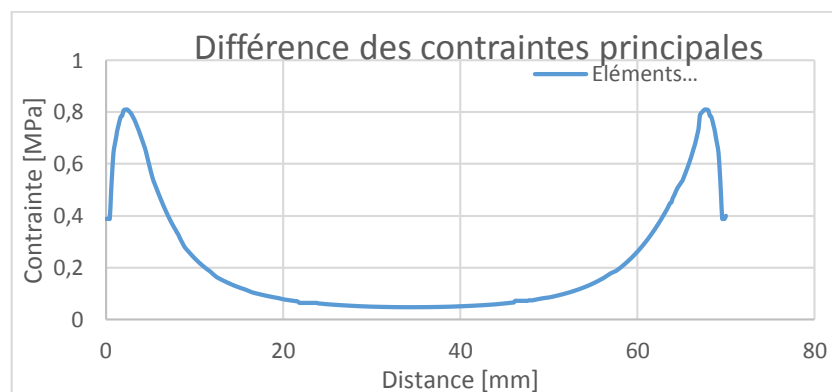


dans les tranches successives isolées le long de l'axe de la sphère. Elles sont comparables aux franges expérimentales (Figure III.26).



**Figure III.34** : Franges isochromes relevées par éléments finis et traitées avec le logiciel Photoshop

Le graphe (Figure III.35) montre clairement l'évolution de la différence des contraintes principales le long d'une droite verticale située le long de la direction de la charge appliquée.



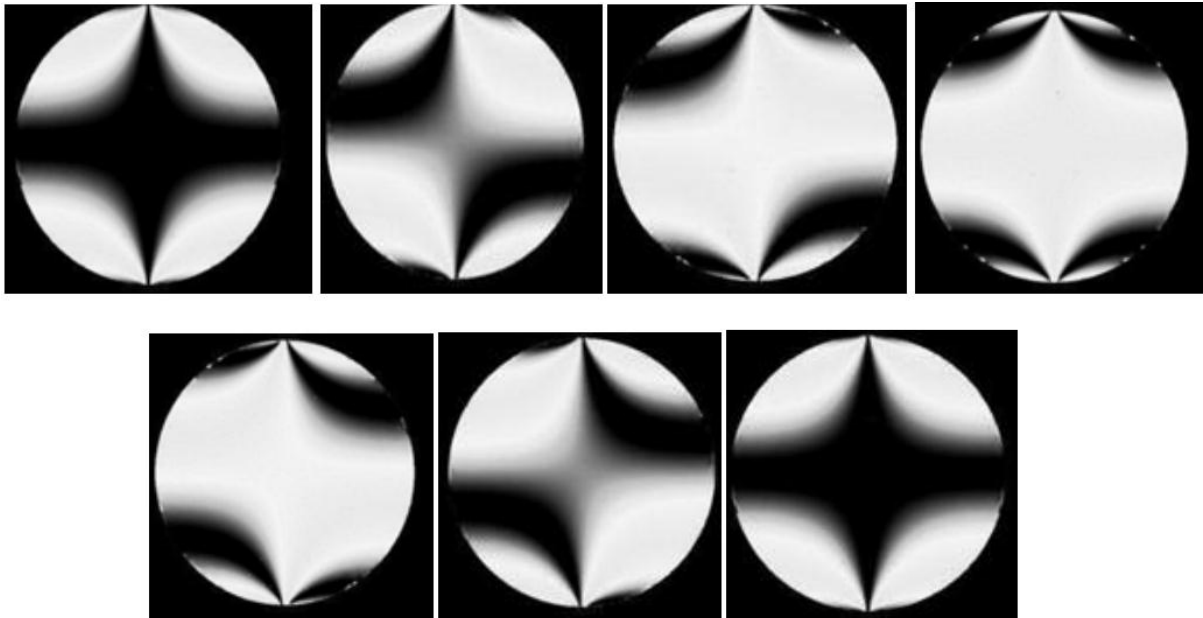
**Figure III.35** : Évolution de la différence des contraintes principales suivant un segment situé le long de la direction de la charge

La différence des contraintes principales augmente d'une valeur environ égale à 0,84 MPa à l'origine vers une valeur d'environ 0,39 MPa à une distance de 3,33 mm. Elle diminue progressivement pour prendre une valeur de 0,018 MPa à 35 mm et ensuite elle augmente pour atteindre une valeur de 0,84 MPa à une distance 68 mm.



### III.5.2.2 Calcul des franges isocliniques

Les trajectoires des directions principales des contraintes peuvent être alors obtenues en relevant le tracé des isoclines sur la tranche de la sphère. Le programme nous donne la valeur de  $\sin^2(2\alpha)$  en chaque point du modèle, ce qui permet de tracer les isoclines qui correspondent à  $\sin^2(2\alpha)=0$ . La figure III.36 représente les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs de l'angle isocline.



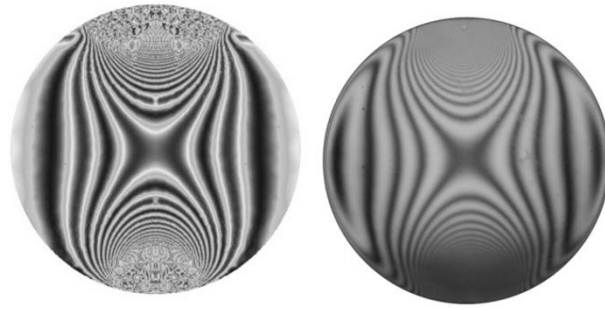
**Figure III.36 :** Isoclines obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM

### III.5.3 COMPARAISON DES RESULTATS

Pour une meilleure comparaison des différents résultats obtenus par les deux méthodes expérimentale et numérique, une troisième comparaison est faite en utilisant les graphes de la différence des contraintes principales le long de la droite [AB]. On constate relativement une bonne concordance (Figure III.38) entre les valeurs expérimentales et la solution par élément finis. Les contraintes diminuent rapidement en s'éloignant de la zone de contact.

#### III.5.3.1 Comparaison des franges figées isochromes

La (Figure III.37) représente la superposition des isochromes relevées expérimentalement et des isochromes calculées avec CASTEM et traitées avec Photoshop.

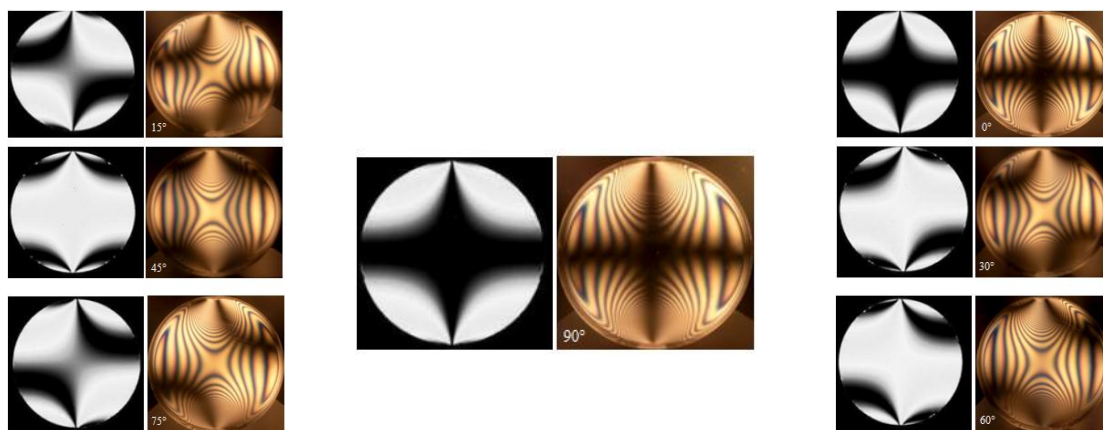


**Figure III.37 :** Franges simulées (à gauche) et franges expérimentales pour la tranche la plus chargée de la sphère

Les franges numériques sont comparables aux franges expérimentales dans les parties inférieures et supérieures du modèle (Figure III.37). Loin de la zone de contact la plus sollicitée, les contraintes diminuent rapidement. Nous constatons que l'image expérimentale obtenue par photoélasticimétrie est comparable avec l'image à l'aide de CASTEM et traité avec le logiciel Photoshop.

### III.5.3.2 Comparaison des franges isoclines

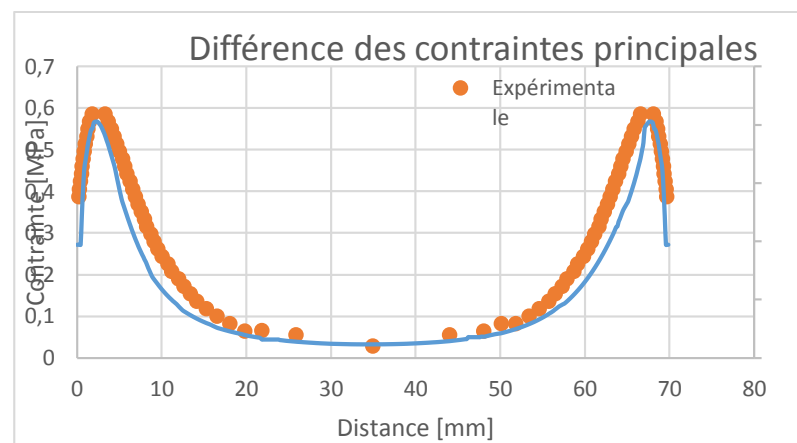
Pour la comparaison des franges isoclines obtenues numériquement et expérimentalement pour les différentes rotations de l'angle, la partie sombre de chaque image correspond à l'isocline, zone où l'une des directions principales est parallèle à l'un des axes des polaroids. La figure III.38 permet de faire une comparaison entre les isoclines placées à gauche obtenues numériquement et traitées avec le logiciel PHOTOSHOP (complètement en couleur noire sur les images) avec les isoclines à droite obtenues expérimentalement.



**Figure III.38 :** Comparaison des isoclines obtenues numériquement et traitée avec Photoshop et des franges isoclines obtenues expérimentalement

### III.5.3.3 Superposition des courbes de la différence des contraintes principales au milieu du contact suivant l'axe de symétrie vertical

La (Figure III.39) représente la superposition des courbes expérimentale et numérique de la différence des contraintes principales. Ce graphe obtenu le long de la droite [AB] montre, relativement, une bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux.



**Figure III.39 :** Différence des contraintes principales le long de la ligne [AB] pour une tranche de 8 mm situé le long de la direction de la charge

En utilisant le calcul numérique il est possible de déterminer les valeurs des contraintes dans toutes les sections du modèle étudié. Cependant, ce n'est le cas pour l'analyse expérimentale à l'aide de la photoélasticimétrie, il est parfois difficile d'obtenir l'ordre de frange et donc les contraintes dans le voisinage immédiat de la zone de contact.

Plusieurs auteurs, M. Ramji [43] et D.K.Tamraker [44], ont montré que de nombreuses sources d'erreurs pourraient affecter l'exactitude des mesures en photoélasticité numérique. Trois raisons principales peuvent expliquer les erreurs observées dans notre cas :

a) Pour l'analyse par éléments finis, on a considéré que le comportement du modèle est purement élastique et on ignore les déformations plastiques localisées dues aux concentrations des contraintes dans la zone du contact. Le champ des contraintes n'est donc plus le même que celui obtenu pour le cas isotrope purement élastique. La zone de plastification normalement diminue l'intensité des contraintes et donc le fait de considérer un

comportement isotrope purement élastique dans la zone de contact induit des contraintes plus importantes qu'elles ne le sont réellement.

- b) Le type de maillage utilisé dans le processus de calcul par éléments finis spécialement dans la zone de contact.
- c) L'exactitude des mesures expérimentales, principalement l'évaluation de l'ordre de frange qui est plus difficile et moins précis au voisinage de la zone de contact.

### III.6 Conclusion

Dans ce travail nous avons montré que la méthode de figage découpage peut être utilisée pour l'analyse du contact entre solides pour déterminer le champ de contraintes développées au voisinage des zones de contact.

Nous avons utilisé la méthode de figage découpage mécanique pour étudier le problème de contact entre un modèle rigide et un modèle déformable.

Pour valider les résultats expérimentaux on a étudié le problème de contact entre deux modèles numériquement à l'aide du logiciel CASTEM. Principalement on a montré que les franges obtenues expérimentalement sont similaires aux réseaux de franges obtenus numériquement.

Une autre comparaison a été faite entre les différences des contraintes principales le long d'une droite [AB]. Les résultats obtenus ont révélé relativement une bonne concordance entre les valeurs numériques et expérimentales.

Avec l'aide de ces tests, nous pouvons voir que la méthode de figage découpage mécanique peut être utilisée pour valider une approche numérique (conditions aux limites, maillages).

La détermination des valeurs et des directions des contraintes principales dans un élément d'un ensemble fonction mécanique est d'une très grande importance pour le bureau d'étude responsable de la conception. Une fois toutes les grandeurs connues, il devient aisé de procéder à l'optimisation des formes des différentes pièces de ces ensembles en jouant sur les sections des différents éléments. Les zones les moins sollicitées des ces différentes pièces peuvent être redimensionné. On pourra aussi procéder la diminution des sections sans porter préjudice à la rigidité des pièces. On pourra ainsi réduire le poids et les prix de revient des différents éléments.

## CONCLUSION GENERALE

Dans les pièces mécaniques de transmission de mouvement il y'a contact entre les différents éléments pour assurer la transmission des mouvements et des couples. Différents types de contact peuvent être rencontrés dans les transmissions par engrenages, les roulements et les paliers lisses. Nous avons donc choisie les plus représentatives des différentes situations rencontrées à savoir cylindre sur plan, plan sur sphère, cylindre sur cylindre. L'analyse numérique et expérimentale des champs de contraintes, particulièrement au voisinage des surfaces de contact, permet de choisir la matière adéquate pour la réalisation des différents éléments. Cette analyse permet aussi d'optimiser les formes des éléments car les champs de contraintes sont alors connus dans tout le volume du modèle étudié. Les parties de l'élément non sollicitées peuvent ainsi être allégées en diminuant leurs dimensions.

Le but de ce travail a été l'analyse des champs de contraintes figées dans différents modèles en contact principalement à l'aide de la méthode de figage découpage mécanique et à l'aide de la méthode des éléments finis. Les différentes comparaisons des résultats expérimentaux et des résultats numériques ont montré la complémentarité des deux solutions dans l'analyse de problèmes de contact qui sont de très grande importance dans l'industrie mécanique. Les champs de contraintes développées, particulièrement au voisinage des surfaces de contact, doivent être déterminés avec le maximum de précision possible afin de dimensionner correctement les éléments d'ensemble fonctionnels.

On a traité dans le cadre de notre travail plusieurs exemples que l'on rencontre fréquemment dans l'industrie. Nous avons commencé par un exemple d'analyse des contraintes en bidimensionnel.

Une poutre encastree et chargée à son extrémité a été analysée à l'aide de la méthode de figage des contraintes. Un programme écrit sous castem, un logiciel éléments finis, nous a permis de déterminer le champ de contraintes développées. Les franges isochromes et les franges isoclines représentant les contraintes et leurs directions ont été reconstituées numériquement. Une bonne concordance des résultats expérimentaux et des résultats numériques a été observée.

Avant de traiter des exemples de contacts tridimensionnels, nous avons commencé par traiter un problème de contact avec frottement en utilisant la méthode des éléments finis des frontières. Nous avons obtenu des résultats satisfaisants. La méthode des éléments finis de frontière est une méthode de calcul très efficace.

Pour l'analyse des champs de contraintes en tridimensionnel, nous avons choisis trois cas différents représentatifs de plusieurs situations rencontrées dans les problèmes de contact : un cylindre rigide en acier sur un cylindre en époxy biréfringent et déformable, un cylindre rigide en acier sur un cylindre creux en époxy biréfringent et déformable et finalement un parallélépipède rigide en aluminium sur une sphère biréfringente déformable. Nous avons utilisé la méthode de figage découpage et la photoélasticité pour analyser les différents modèles. Un dispositif expérimental nous a permis de figer les contraintes à l'intérieur d'une étuve réglée à température de figage pour les différents modèles.

Cependant avant de procéder au figage des contraintes dans les différents modèles à analyser, il est nécessaire d'abord d'éliminer les contraintes résiduelles qu'ils peuvent présenter par un traitement thermique de relaxation à l'intérieur d'une étuve. Après vérification de l'élimination des contraintes résiduelles, les modèles sont ensuite remis dans le dispositif de chargement à l'intérieur de

l'étuve pour procéder au figeage des contraintes. Après refroidissement, les modèles sont découpés en plusieurs tranches de faible épaisseur pour analyse sur un polariscope en lumière plane et en lumière circulaire.

Ainsi donc, nous avons étudié à travers plusieurs cas de contact entre solides les champs de contraintes figées tridimensionnels développés dans les modèles. Les franges isoclines et les franges isochromes sont déterminées expérimentalement pour différentes positions des tranches le long des modèles. Les franges ainsi obtenues sont comparées aux franges obtenues numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis. Les franges figées sont ensuite exploitées pour déterminer les valeurs des contraintes de cisaillement le long de lignes droites. On dispose ainsi d'une autre possibilité de comparer les résultats expérimentaux et les résultats numériques.

Une analyse par éléments finis, à l'aide de programmes écrits sous CASTEM, nous a permis de calculer et de reconstituer les franges photoélastiques sur les tranches successives isolées dans les différents modèles. De même que pour la partie expérimentale, les valeurs des contraintes de cisaillements sont obtenues le long de lignes droites.

Une comparaison à l'aide des franges figées est faite entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques. Les résultats ont montrés une bonne concordance. Pour une meilleure comparaison des différents résultats obtenus par les deux méthodes expérimentale et numérique, une troisième comparaison est faite en utilisant les graphes de la différence des contraintes principales. On constate relativement une bonne concordance entre les valeurs expérimentales et la solution par élément finis. Les écarts sont dus probablement au fait que les conditions aux limites sont différentes des conditions réelles. Il est possible que le chargement ne soit pas parfaitement symétrique. On doit signaler aussi qu'on a considéré un comportement élastique et que la résolution spatiale dans le voisinage de la zone de contact est limitée.

Cette étude implique des prolongements que l'on peut considérer dans le cadre de perspectives. En effet, nous nous sommes intéressés ici à la situation où un modèle rigide est en contact avec un modèle déformable. Dans le cas par contre où les deux modèles en contact sont les deux déformables, le problème est plus complexe et reste donc à étudier.

## Annexe A

Pour raison de double Symétrie, afin de diminuer le temps de calcul, l'analyse des contraintes par la méthode des éléments finis se fait sur un quart du modèle.

Dans les programmes suivant écrits sous CASTEM, pour les différents cas de contact étudiés, on impose un déplacement vertical vers le bas. Après déroulement du programme, l'effort correspondant au déplacement imposé est obtenu en sommant les efforts élémentaires extraits aux niveaux des points de contact.

Une fois les différences des contraintes calculées, on trace les franges isochromes et les franges isoclines dans les différentes sections du modèle pour les comparer aux franges expérimentales. Le calcul de ces franges se fait dans la section située le long de l'application de la charge, ce qui correspond évidemment à la tranche la plus sollicitée du modèle.

Expérimentalement, la tranche est découpée à l'aide d'un outil à gorge et d'un disque diamanté.

L'analyse des tranches ainsi découpées représente des valeurs approchées des contraintes le long de l'épaisseur des tranches car les contraintes varient le long de l'épaisseur de chacune des tranches isolées.

### Introduction au code de calculs par élément finis CASTEM

#### Maillage d'une poutre encastrée soumise à la flexion à son extrémité

\* On définit d'abord les dimensions du modèle

h = 40.;  
e = 10.;  
L = 260.;  
L1 = 75.;  
L2 = 75.;  
L3 = 220.;  
R = 15.;  
L4 = (L1 - R).;  
L5 = (L1 + R).;  
L6 = (L2 - R).;  
L7 = (L2 + R).;  
DENSF = 0.2;  
DENSB = 0.6;

#### \* Description de la Géométrie - Maillage

##### \* Définition des différents points

P1 = 0. h.;  
P2 = L. h.;  
P3 = L. 0.;  
P4 = 0. 0.;  
P5 = L2. h.;  
P6 = L3. 0.;  
P7 = L1. 0.;  
P8 = L5. 0.;  
P9 = L1. R.;

P10=L4. 0.;  
 p11=L5. 0.;  
 p13=L6. h.;  
 p14=L2. 25.;  
 p15=L7. h.;  
 p16=(L3-R). 0.;  
 p17=(L3+R). 0.;  
 p18=L3. R.;  
 P19=130. 0.;

**\* Définition des lignes**

LIG1=DROITE P1 P13 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG13=CER3 P13 P14 P15 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG2=DROITE P15 P2 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG3=DROITE P2 P3 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG4=DROITE P3 P17 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG17=CER3 P17 P18 P16 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG5=DROITE P16 P19 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG05=DROITE P8 P19 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG6=CER3 P8 P9 P10 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG8=DROITE P10 P4 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG9=DROITE P4 P1 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 CONTOUR1=LIG1 ET LIG13 ET LIG2 ET LIG3 ET LIG4 ET LIG17 ET LIG5  
 ET LIG05 ET LIG6 ET LIG8 ET LIG9;  
 trac CONTOUR1;  
 LIG7=DROITE P10 P7 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG10=DROITE P7 P8 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG11=CER3 P8 P9 P10 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 CONTOUR2=LIG7 ET LIG10 ET LIG11;  
 trac CONTOUR2;  
 LIG14=DROITE P15 P5 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG15=DROITE P5 P13 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG16=CER3 P13 P14 P15 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 CONTOUR3=LIG14 ET LIG15 ET LIG16;  
 trac CONTOUR3;  
 LIG18=DROITE P16 P6 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG19=DROITE P6 P17 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 LIG20=CER3 P17 P18 P16 DINI DENSF DFIN DENSF;  
 CONTOUR4=LIG18 ET LIG19 ET LIG20;  
 trac CONTOUR4;  
 CONTOUR5= CONTOUR1 et CONTOUR2 et CONTOUR3 et CONTOUR4;  
 trac CONTOUR5;  
 sur1 = SURF CONTOUR1 PLANE;  
 sur2 = SURF CONTOUR2 'PLANE';  
 sur3 = SURF CONTOUR3 'PLANE';  
 sur4 = SURF CONTOUR4 'PLANE';  
 SURFACE=ELIM 0.001 (SUR1 ET SUR2 ET SUR3 ET SUR4);  
 TRAC SURFACE;  
 lig88=DROI 10 P5 P7;  
 mm= lig88 et contour1;  
 trac mm;

**\* Maillage des surfaces**

\*SURFACE1=CONTOUR1 SURFACE1 ;  
 \*TRAC SURFACE1;



```

*SURFACE2=CONTOUR2 SURFACE2 ;
*TRAC SURFACE2;
*SURFACE3=CONTOUR3 SURFACE3 ;
*TRAC SURFACE3;
*SURFACE4=CONTOUR4 SURFACE4 ;
*TRAC SURFACE21;
*SURFACE=SURFACE1 ET SURFACE2 ET SURFACE3 ET SURFACE4;
*TRAC SURFACE;
* Description du matériau / création de la rigidité / chargement
* Choix du comportement
MODELE=MODL SURFACE MECANIQUE ELASTIQUE;
f=0.36;

```

**\* Données matériau**

```

MATERIAU=MATR MODELE YOUN 15.9 NU 0.45 ;
* Conditions aux limites
APP1=BLOQU UY LIG9;
APP2=BLOQU UY LIG8;
APP3=BLOQU UY LIG15;
APP4=BLOQU UY LIG7;
* (Forces/déplacements) imposés
CHARGE=FORC (0. -0.66) P2;
RIGID=RIGI MODELE MATERIAU;
RIGIDTOT=RIGID ET APP1 ET APP2 ET APP3 ET APP4 ;
* Calculs et résolution
* Calcul des déformations
DEPL1=RESO RIGIDTOT CHARGE ;
DEF0=DEFO 0. DEPL1 SURFACE;
DEF1=DEFO 1. DEPL1 SURFACE ROUGE;
TRAC SURFACE (DEF0 ET DEF1);
* calcul des contraintes
CHACONTR=SIGM MODELE MATERIAU DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MODELE CHACONTR;
CHANPOIN=CHAN CHPO MODELE CHANOEUD;
* extraction des contraintes (SX,SY,SXY)
SY=EXCO CHANPOIN SMYY;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY;
DIFCONTR=((((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2))))**0.5;
* Calcul du rapport I/O et traçage des isochromes
* Calcul de la phase
PHASE=360*e.*DIFCONTR/f;
* Calcul du rapport
RAPPORT=cos(PHASE/2.);
*RAPPORT=sin(PHASE/2.);
isoch=RAPPORT*RAPPORT;
isoch=isoch;
* Tracé des isochromes
TRAC ECLA 0.0001 isoch SURFACE ;
intens1 = isoch;
option SORT 'c:\kameltou\isoch.res';
sort intens1 AVS ASCII;

```

**\*Tracer les Isoclines**

```

term1= (2. * SXY);
term2= (SX- SY);
term3= (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
trac ECLA .0001 isocl SURFACE ;
intens2= isocl;
option SORT 'c:\surfer\isocl.res';
sort intens2 AVS ASCII;
ALPHA1= (ALPHA+10.);
ISOCL1= sin(2. * ALPHA1);
ISOCL1= (ISOCL1 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl1 SURFACE ;
intens3= isocl1;
option SORT 'c:\surfer\isocl1.res';
sort intens3 AVS ASCII;
ALPHA2 = (ALPHA+20.);
ISOCL2= sin(2. * ALPHA2);
ISOCL2= (ISOCL2 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl2 SURFACE ;
intens4= isocl2;
option SORT 'c:\surfer\isocl2.res';
sort intens4 AVS ASCII;
ALPHA3 = (ALPHA+30.);
ISOCL3= sin(2. * ALPHA3);
ISOCL3= (ISOCL3 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl3 SURFACE ;
intens5= isocl3;
option SORT 'c:\surfer\isocl3.res';
sort intens5 AVS ASCII;
ALPHA4 = (ALPHA+40.);
ISOCL4= sin(2. * ALPHA4);
ISOCL4= (ISOCL4 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl4 SURFACE ;
intens6= isocl4;
option SORT 'c:\surfer\isocl4.res';
sort intens6 AVS ASCII;
ALPHA5 = (ALPHA+50.);
ISOCL5= sin(2. * ALPHA5);
ISOCL5= (ISOCL5 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl5 SURFACE ;
intens7= isocl5;
option SORT 'c:\surfer\isocl5.res';
sort intens7 AVS ASCII;
ALPHA6 = (ALPHA+60.);
ISOCL6= sin(2. * ALPHA6);
ISOCL6= (ISOCL6 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl6 SURFACE ;
intens8= isocl6;
option SORT 'c:\surfer\isocl6.res';
sort intens8 AVS ASCII;
ALPHA7 = (ALPHA+70.);
ISOCL7= sin(2. * ALPHA7);
ISOCL7= (ISOCL7 ** 2);

```

```

trac ECLA .0001 isocl7 SURFACE ;
intens9= isocl7;
option SORT 'c:\surfer\isocl7.res';
sort intens9 AVS ASCII;
ALPHA8 = (ALPHA+80);
ISOCL8= sin(2. * ALPHA8);
ISOCL8= (ISOCL8 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl8 SURFACE ;
intens10= isocl8;
option SORT 'c:\surfer\isocl8.res';
sort intens10 AVS ASCII;
ALPHA9 = (ALPHA+90);
ISOCL9= sin(2. * ALPHA9);
ISOCL9= (ISOCL9 ** 2);
trac ECLA .0001 isocl9 SURFACE ;
intens11= isocl9;
option SORT 'c:\surfer\isocl9.res';
sort intens11 AVS ASCII;
* Evolutions des contraintes Sx Sy suivant LIG10
TOM=DIFCONTR/2 ;
LIG10=DROITE P5 P7 DINI DENSF DFIN DENSF;
COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LIG10;
EVOL11=EVOL ROUGE 'CHPO' LIG10 COMPTOM;
DESS EVOL11;
*option SORT 'c:\kameltou\isocltot10.res';
*sort intens5 AVS ASCII;
*INTENS=RAPPORT2*100;
*OPTION SORT 'EPROUVETTE3.RES';
*SORT INTENS AVS ASCII;
TOM=DIFCONTR/2 ;
P30=L1 h;
LIG10=DROITE P7 P30 DINI DENSF DFIN DENSF;
COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LIG10;
EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LIG10 COMPTOM;
*DESS EVOL1;
TOM=DIFCONTR/2 ;
P31=L3 h;
LIG10=DROITE P6 P31 DINI DENSF DFIN DENSF;
COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LIG10;
EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LIG10 COMPTOM;
*DESS EVOL1;
TOM=DIFCONTR/2 ;
LIG10=DROITE P14 P15 DINI DENSF DFIN DENSF;
COMPTOM=INT_COMP SURFACE TOM LIG10;
EVOL1=EVOL ROUGE 'CHPO' LIG10 COMPTOM;
*DESS EVOL1;
* transférer les valeurs de ev1...ev5 *
*dans les fichiers cubcyl1....cubcyl5 *
@excel1 EVOL11 'c:\kamel castem\cyl-cyl1';
*list depl1;
*ZZZ = EXTR depl1 COMP;
*list ZZZ;
LIST Seff;

```

### CYLINDRE RIGIDE EN ACIER SUR CYLINDRE CREUX DEFORMABLE EN EPOXY

**\* TEST cylindrique indéformable sur cylindre creux déformable \***

```

OPTI DIME 3 ELEM SEG2;
OPTI ECHO 1;
*OPTI 'ISOV' LIGNE;
GRAPH='0';
* CONSTANTES DE CALCUL *
Ray1 = 6.5; COMM 'rayon du cylindre supérieur';
LONGP = 30.;
PROF = 1.0318; COMM 'profondeur d enfoncement sur y';
RAY = 24.; COMM 'rayon du cylindre';
LONG = 106.; COMM 'longueur du cylindre sur z';
pm = 0. 0. 10.;
* maillage du cylindre
PO = 0. 0. 0.;
PA = RAY 0. 0.;
PB = 0. RAY 0.;
PC = 0. ((-1)*RAY) 0.;
PM =(RAY * 0.7071) (RAY * 0.7071) 0.;
PN =(RAY * 0.7071) (-0.7071 * RAY) 0.;
BO = D 10 PB PO;
OC = D 10 PO PC;
CN = C 10 PC PO PN;
NA = C 4 PN PO PA;
AM = C 4 PA PO PM;
MB = C 10 PM PO PB;
L = (CN et NA et AM et MB et BO et OC);
Option DIME 2 ELEM SEG2;
R=24.;
alpha = 30.;
*P1= (R * (sin (-1*alpha))) (R * (cos (-1*alpha)));
P2= (R * (sin 45)) (R * (cos 45));
P222= (15 * (sin 45)) (15 * (cos 45));

P3= 0. 15;
p33=0. -15;
p333=15. 0;
P4= 0. (-1*R);
P5= 0. R;
C1= 0. (R * (cos alpha));
Dr1= DROI 45 P5 P3;
arc1=CERC 60 P3 po P222;
arc11=CERC 25 P222 po P333;
arc111=CERC 35 P333 po P33;
Dr2= DROI 60 P33 P4;
trac (Dr1 et arc1 et arc11 et arc111 et Dr2);
C2= 0. 0.;
Dr3= DROI 10 P2 P222;
arc2=CERC 289 p2 C2 P5;
arc3=CERC 45 P2 C2 P4;
Cont1 = ELIM 0.001 ( Dr1 et Dr3 et arc2 et arc1);
Trac cont1;
Cont2 = ELIM 0.001 ( Dr2 et arc11 et arc111 et Dr3 et arc3);
Trac cont2;
Trac (cont1 et cont2 );

```

```

SUR2= Dr2 et arc11 et arc111 et arc2 et Dr3;
OPTI ELEM TRI3;
sur1 = SURF cont1 'PLANE';
sur2 = SURF cont2 'PLANE';
sect0 = ELIM 0.001 (sur1 et sur2);
TRAC sect0;
sect0s = sect0 SYME 'DROIT' P5 P4 ;
TRAC (sect0s et sect0);
OPTI DIME 3 ELEM CUB8;
cyl = sect0 volu 8 TRAN (0. 0. (long/2.));
cyl0s = sect0s volu 8 TRAN (0. 0. (long/2.));
*TRAC (cyl0s et cyl);
*TRAC cyl;
sect0 = sect0 coule rouge;
sect0s = sect0s coule rouge;
*trac ( sect0 et sect0s et cyl et cyl0s);
* Modèle mécanique
MOD = MODL cyl MECANIQUE ELASTIQUE;
MAT = MATR MOD YOUN 15.9 NU 0.45;
* EXTRACTION DES NOEUDS EN CONTACT AVEC LE POINCON *
sur1 = face 3 cyl;
sur11 = face 3 cyl0s;
*Trac (sur1 et sur11);
*Trac (sur1 et sur11 et cyl et cyl0s);
su1z = CHAN CHAM (COOR 3 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur z';
su1x = CHAN CHAM (COOR 1 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur x';
su1y = CHAN CHAM (COOR 2 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur y';
sur2 = (su1x POINT COMPRIS (-0.01) (0.01));
sur2 = coul sur2 vert;
*trac (sur2 et cyl);
base1 = (su1z point COMPRIS 0. ray1)
      INTE
      (su1x point COMPRIS 0.01 (longp/2))
      INTE
      (su1y point COMPRIS 0. ray);
base1 = COUL base1 ROUGE;
*trac (base1 et cyl);
su2z = CHAN CHAM (COOR 3 sur2) sur2; COMM 'champ par éléments sur z';
su2x = CHAN CHAM (COOR 1 sur2) sur2; COMM 'champ par éléments sur x';
su2y = CHAN CHAM (COOR 2 sur2) sur2; COMM 'champ par éléments sur y';
base1 = base1 et ((su2z POINT COMPRIS (0.) (longp/2))
      INTE
      (su2y POINT COMPRIS (ray - 0.01) (ray + 0.01)));
base1 = COUL base1 ROUGE;
*trac (base1 et cyl);
n1 = nbel base1;
mess 'n1=' n1;
base1 = MANU CHPO base1 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base1 = EXTR base1 'MAIL';
i = 0; To = TABLE;
REPETER BlocV (NBNO base1);
i = i + 1;
To.i = base1 POIN i;
FIN BlocV;
list to;

```

```

* EXTRACTION DES NOEUDS DE LA FACE INFERIEURE *
base2 = (su1x point COMPRIS (0.01) (ray))
      INTE
      (su1y point COMPRIS ((-1)*ray) 0.);
base2 = base2 et
      (su2y point COMPRIS ((-1)*ray - 0.01) ((-1)*ray + 0.01));
base2 = COUL base2 vert;
*trac (base2 et cyl et base1);
* TRAC (1000. 0. -10000.) cyl1 CACH;
base2 = MANU CHPO base2 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
n2 = nbel base2;
mess 'n2=' n2;
*trac base2;
* CONDITIONS AUX LIMITES face inférieure *
T2=table;
Y2=table;
CL2 = BLOQU UY PC;
I=0;
k=0;
REPETER BLOC2 N2;
I=I+1;
T2.I = POIN base2 I;
Y2.I = COOR T2.I 2;
val = (-1.)*RAy - Y2.I;
CLI = (BLOQU MINI UY T2.I);
CL2 = CL2 et CLI;
si (k < 1);
  CHA2 = (depi CLI val);
  k=2;
sinon;
  CHA2 = CHA2 et (depi CLI val);
fini;
FIN BLOC2;
* CONDITIONS AUX LIMITES de symétrie *
CL3 = BLOQ UZ sect0;
CL4 = BLOQ UX sur2;
* DEPLACEMENT du cylindre superieur *
CL1 = BLOQ ux Pb;

I=0;T1 = TABLE; val = table; Duy = TABLE;
k=0; ALPHA = TABLE; Z1 = TABLE;
REPETER BLOC1 (NBNO base1);
I = I+1;
T1.I = POIN base1 I;
Y1I = COOR T1.I 2;
Z1.I = COOR T1.I 3;
valX = (Z1.i + 0.00001) / Ray1 ;
term1 = 1 - (valX ** 2);
term2 = (term1 ** 0.5);
term3 = term2 / valX;
ALPHA.i = ATG term3;
Duy.i = Ray * (1 - (SIN ALPHA.i));
*LIST ALPHA;
LIST duy;

```

```

val.i = Ray - Y1I - prof + Duy.i;
si (val.i < 0.);
  CLI = (BLOQU UY T1.I);
  CL1 = CL1 et CLI;
  si (k < 1);
    CHA1 = (depi CLI val.i);
    k=2;
  sinon;
    CHA1 = CHA1 et (depi CLI val.i);
  finsi;
  finsi;
FIN BLOC1;
* RIGIDITE ET CONDITIONS AUX LIMITES *
*   INITIALES
RIG1 = RIGI MOD MAT;
RIG2 = RIG1 ET CL1 et CL2 et cl3 et cl4;
* RESOLUTION ET POST-TRAITEMENT *
DEPL1 = RESOU RIG2 (CHA1 et cha2);
DEFO = DEFO cyl DEPL1 0. BLANC;
DEF1 = DEFO cyl DEPL1 1. VERT;
*TRAC cach (def0 ET def1);
*TRAC cach (0. 0. -10000.) (DEF0 ET DEF1);
*extrait de depl1 les composantes suivant Y;
Yyy = EXCO DEPL1 UY;
base2 = MANU CHPO base2 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
i = 0; m = 0; n = 0;
PeC = TABLE; Poil = TABLE; Poill = TABLE;
* Extrait de base2 les points qui ont leur coordonnées *
* Y égale à (-RAY) ce qui correspond aux points de *
* base2 en contact avec le plan après chargement *
REPETER BlocVn (NBNO base2);
i = i + 1;
PeC.i = base2 POIN i;
yPeC = COOR 2 PeC.i;
Gr = yPeC + (EXTR DEPL1 UY PeC.i);
SI (Gr < EG (-1. * ray));
m = m + 1;
*points de base2 en contact avec le plan;
Poil.m = PeC.i;
SINON;
n = n + 1;
*points de base2 non en contact avec le plan;
Poill.n = PeC.i;
FINSI;
Fin BlocVn;
LIST Poil;
OBTENIR Nint*ENTIER;
TRAC cach (DEF0 ET DEF1);
CHACONTR= SIGM MOD MAT DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MOD CHACONTR;
CHANPOIN= CHAN CHPO MOD CHANOEUD;
* Extraction de la force appliquée *
* La boucle permet d'extraire toutes *
* les forces élémentaires *

```



```

FORC1=BSIGMA MOD CHACONTR;
i = 0; EffY = TABLE;
REPETER BlocFor Nint;
i = i + 1;
EffY.i = EXTR FORC1 FY Poil.i;
FIN BlocFor;
Seff = TABLE; Seff.1 = EffY.1;
PoilT = TABLE; PoilT.1 = Poil.1;
i = 1;
REPETER BlocSef ( Nint - 1);
i = i + 1;
Seff.i = Seff.1 + EffY.i;
Seff.1 = Seff.i;
PoilT.i = PoilT.1 ET Poil.i;
PoilT.1 = PoilT.i;
FIN BlocSef;
LIST Seff;
*LIST ZZS;
*LIST ZZY;
*Extraction des composantes des contraintes *
SY=EXCO CHANPOIN SMYY ;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX ;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY ;
DIFCONTR=((((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2))))**0.5;
CONT3=360*(1./0.36)*5*DIFCONTR;
CONT3=cos(CONT3/2.);
CONT3=CONT3*CONT3;
**DIFCONTR = CONT3;
ISOC= CONT3;
isoch00 = INT_COMP cyl ISOC sect0;
*trac ECLA 0.0001 isoch00 sect0 ;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=0.;
sect1 = SECT0 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP cyl ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 et cyl ;
* Tracer par symetrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
TRAC ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isocht0t = isoch1 et isoch1s;
*trac ECLA 0.0001 isocht0t sect1s ;
intens1 = isocht0t;
option SORT 'c:\castemkamel\isoch0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;

```

**\*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section \***

```

term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP cyl ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
TRAC ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
*trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castemkamel\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect2 à Z = 0. mm et interpolation de difcontr;
d=10.;
sect2 = SECT0 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect2s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch2 = INT_COMP cyl ISOC sect2;
trac ECLA 0.0001 isoch2 sect2 ;
* Tracer par symétrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect2s isoch2s = sect2 isoch2 SYME 'DROIT' Pc Pb;
TRAC ECLA 0.001 isoch2s sect2s;
trac ecla 0.0001 (isoch2 et isoch2s) (sect2 et sect2s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect2 et sect2s);
isochtot = (isoch2 et isoch2s);
*trac ECLA 0.0001 isochtot sectOt ;
intens2 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isochtot1.res';
sort intens2 AVS ASCII;
*Tracer de l'isocline à Z=4mm *
isocl2 = INT_COMP cyl ISOCL sect2;
*trac ECLA 0.0001 isocl2 sect2 ;
sect2s isocl2s = sect2 isocl2 SYME 'DROIT' Pc Pb;
TRAC ECLA 0.001 isocl2s sect2s;
trac ecla 0.0001 (isocl2 et isocl2s) (sect2 et sect2s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl2 et isocl2s);
intens2 = isocltot;
option SORT 'c:\castemkamel\isocltot1.res';
sort intens2 AVS ASCII;
* tracer des valeurs des contraintes le long de *
* la droite pour différentes sections *
DOIT1= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);

```

```

DOIT11= (0. ray 1.) DROI 500 (0. (-1*ray) 1.);
DOIT2= (0. ray 2.) DROI 500 (0. (-1*ray) 2.);
DOIT3= (0. ray 4.) DROI 500 (0. (-1*ray) 4.);
DOIT4= (0. ray 6.) DROI 500 (0. (-1*ray) 6.);
DOIT5= (0. ray 8.) DROI 500 (0. (-1*ray) 8.);
DOIT6= (0. ray 10.) DROI 500 (0. (-1*ray) 10.);
Pii = DOIT1 POIN 'INITIAL';
Pff = DOIT1 POIN 'FINAL';
int1 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT1;
int11 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT11;
int2 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT2;
int3 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT3;
int4 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT4;
int5 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT5;
int6 = INT_COMP cyl DIFCONTR DOIT6;
ev1 = EVOL CHPO DOIT1 int1;
ev11=EVOL CHPO DOIT11 int11;
ev2 = EVOL CHPO DOIT2 int2;
ev3 = EVOL CHPO DOIT3 int3;
ev4 = EVOL CHPO DOIT4 int4;
ev5 = EVOL CHPO DOIT5 int5;
ev6 = EVOL CHPO DOIT6 int6;
dess (ev1 );
dess (ev11 );
dess (ev2 );
dess (ev3 );
dess (ev4 );
dess (ev5 );
dess (ev6 );
Valpi = EXTR int4 'SCAL' Pii;
Valpf = EXTR int4 'SCAL' Pff;
MESS 'ValPii =' Valpi 'ValPff =' Valpf;
dess ((ev1 COUL jaune) et
(ev2 COUL vert) et (ev3 COUL bleu) et
(ev4 COUL rouge) et (ev5 COUL blanc) et (ev6 COUL jaune)
et (ev11 COUL rouge));
* transfer des valeurs de ev1...ev5 *
*dans les fichiers cubcyl1....cubcyl5 *
@excel1 ev1 'c:\castem\cyl-cyl1';
@excel1 ev11 'c:\castem\cyl-cyl11';
@excel1 ev2 'c:\castem\cyl-cyl2';
@excel1 ev3 'c:\castem\cyl-cyl3';
@excel1 ev4 'c:\castem\cyl-cyl4';
@excel1 ev5 'c:\castem\cyl-cyl5';
@excel1 ev6 'c:\castem\cyl-cyl6';
*list depl1;
*ZZZ = EXTR depl1 COMP;
*list ZZZ;
LIST Seff;

```

## PARALLÉLÉPIPÈDE RIGIDE SUR UNE SPHERE DÉFORMABLE

**\* TEST plan indéformable sur Sphère déformable \***

OPTI DIME 3 ELEM SEG2;

OPTI ECHO 1;

\*OPTI 'ISOV' LIGNE;

GRAPH='0';

\* CONSTANTES DE CALCUL \*

LONGP = 50.;

PROF = 1.530; COMM 'profondeur d enfoncement sur y';

RAY = 35.; COMM 'rayon de la sphère';

pm = 0. 0. 10.;

\* maillage de la sphère

PO = 0. 0. 0.;

PA = RAY 0. 0.;

PB = 0. RAY 0.;

PC = 0. ((-1)\*RAY) 0.;

PM =(RAY \* 0.7071) (RAY \* 0.7071) 0.;

PN =(RAY \* 0.7071) (-0.7071 \* RAY) 0.;

BO = D 10 PB PO;

OC = D 10 PO PC;

CN = C 10 PC PO PN;

NA = C 4 PN PO PA;

AM = C 4 PA PO PM;

MB = C 10 PM PO PB;

L = (CN et NA et AM et MB et BO et OC);

\*trac L;

\*section mesure

Option DIME 2 ELEM SEG2;

R=35.;

alpha = 30.;

\*P1= (R \* (sin (-1\*alpha))) (R \* (cos (-1\*alpha)));

P2= (R \* (sin alpha)) (R \* (cos alpha));

P22= (R \* (sin alpha)) ((-1\*R) \* (cos alpha));

P3= 0. (R \* ((cos alpha) - (sin alpha)));

P33= 0. ((-1\*R) \* ((cos alpha) - (sin alpha)));

P4= 0. (-1\*R);

P5= 0. R;

C1= 0. (R \* (cos alpha));

C3= 0. ((-1\*R) \* (cos alpha));

Dr1= DROI 68 P5 P3;

Dr2= DROI 20 P3 P33;

Dr3=DROI 55 P33 P4;

\*trac (Dr1 et Dr2);

C2= 0. 0.;

arc1=CERC 70 P3 C1 P2;

arc2=CERC 60 p2 C2 P5;

arc3=CERC 25 P2 C2 P22;

arc4=CERC 60 P22 C2 P4;

arc5=CERC 70 P22 C3 P33;

Cont1 = ELIM 0.001 ( Dr1 et arc1 et arc2);

\*Trac cont1;

Cont2 = ELIM 0.001 ( Dr2 et arc1 et arc3 et arc5);

Trac (cont1 et cont2 );

cont3 = ELIM 0.001 ( Dr3 et arc4 et arc5);

```

Trac (cont1 et cont2 et cont3);
OPTI ELEM TRI3;
sur1 = SURF cont1 'PLANE';
sur2 = SURF cont2 'PLANE';
sur3 = SURF cont3 'PLANE';
sect00 = ELIM 0.001 (sur1 et sur2 et sur3);
TRAC sect00;
OPTI DIME 3 ELEM CUB8;
VOLUME1 = SECT00 VOLUME10 ROTA 90. P4 P5;
*trac VOLUME1;
VOLUME2 = SECT00 VOLUME10 ROTA -90. P4 P5;
*trac VOLUME2;
SPHER1=VOLUME1;
TRAC SPHER1;
* Modèle mécanique *
MOD = MODL SPHER1 MECANIQUE ELASTIQUE;
MAT = MATR MOD YOUN 15.9 NU 0.45;
* DEFINITION DES PLANS *
suP11 = face 2 VOLUME1 COULE VERT;
*Trac surr11;
surr2 = face 2 VOLUME2 COULE BLEU;
*Trac surr2;
SURP=SUP11;
sect00=sect00 coule rouge;
SPHER2=VOLUME1 ET VOLUME2 ET sect00 ET SUP11 ET SURr2;
TRAC SPHER2;
su2z = CHAN CHAM (COORD 3 suP11) suP11; COMM 'champ par éléments sur z';
su2x = CHAN CHAM (COORD 1 suP11) suP11; COMM 'champ par éléments sur x';
su2y = CHAN CHAM (COORD 2 suP11) suP11; COMM 'champ par éléments sur y';
sur11 = face 3 VOLUME1;
*Trac sur11;
sur2 = face 3 VOLUME2;
*Trac sur2;
sur1=sur11;
sur1= sur1 coule vert;
trac sur1;
Trac (sur1 et SPHER1);
su1z = CHAN CHAM (COORD 3 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur z';
su1x = CHAN CHAM (COORD 1 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur x';
su1y = CHAN CHAM (COORD 2 sur1) sur1; COMM 'champ par éléments sur y';
sur2 = (su1x POINT COMPRIS (-0.01) (0.01));
sur2 = coul sur2 vert;
* EXTRACTION DES NOEUDS EN CONTACT AVEC LE PLAN *
base1 = (su1z point COMPRIS (0.) (longp/2))
      INTE
      (su1x point COMPRIS (0.01) (longp/2))
      INTE
      (su1y point COMPRIS (0.) ray);
base1 = base1 et ((su2z POINT COMPRIS (0.) (longp/2))
      INTE
      (su2y POINT COMPRIS (ray - 0.01) (ray + 0.01)));
base1 = COUL base1 ROUGE;
trac (base1 et SPHER1);
n1 = nbel base1;
mess 'n1=' n1;

```

```

base1 = MANU CHPO base1 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base1 = EXTR base1 'MAIL';
i = 0; To = TABLE;
REPETER BlocV (NBNO base1);
i = i + 1;
To.i = base1 POIN i;
FIN BlocV;
list to;
* EXTRACTION DES NOEUDS DE LA FACE INFERIEURE *
y2=ray-ray;
base2 = (su1x point COMPRIS (0.01) (ray))
      INTE (su1y point COMPRIS ((-1)*ray) 0.);
base2 = base2 et
      (su2y point COMPRIS ((-1)*ray - 0.01) ((-1)*ray + 0.01));
base2 = COUL base2 vert;
trac (base2 et SPHER1 et base1);
trac (1000. 0. -10000.) SPHER1 CACH;
base2 = MANU CHPO base2 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
n2 = nbel base2;
mess 'n2=' n2;
trac base2;
* CONDITIONS AUX LIMITES face inférieure *
T2=table;
Y2=table;
CL2 = BLOQU UY P4;
I=0;
k=0;
REPETER BLOC2 N2;
I=I+1;
T2.I = POIN base2 I;
Y2.I = COOR T2.I 2;
val = (-1.)*RAy - Y2.I;
*list val;
CLI = (BLOQU MINI UY T2.I);
CL2 = CL2 et CLI;
si (k < 1);
  CHA2 = (depi CLI val);
  k=2;
sinon;
  CHA2 = CHA2 et (depi CLI val);
finsi;
FIN BLOC2;
* CONDITIONS AUX LIMITES de symétrie *
CL3 = BLOQ UZ sect00;
CL4 = BLOQ UX SURP;
CL5 = BLOQ UX sect00;
CL6= BLOQ UZ SURP;
* DEPLACEMENT du PLAN superieur *
CL1 = BLOQ ux P5;
I=0;T1 = TABLE; val = table;
k=0; Z1 = TABLE;
REPETER BLOC1 (NBNO base1);
I = I+1;
T1.I = POIN base1 I;

```

```

Y1I = COOR T1.I 2;
val.i = Ray - Y1I - prof;
si (val.i < 0.);
  CLI = (BLOQU UY T1.I);
  CL1 = CL1 et CLI;
  si (k < 1);
    CHA1 = (depi CLI val.i);
    k=2;
  sinon;
    CHA1 = CHA1 et (depi CLI val.i);
finsi;
finsi;
FIN BLOC1;
* RIGIDITE ET CONDITIONS AUX LIMITES *
*      INITIALES      *
RIG1 = RIGI MOD MAT;
RIG2 = RIG1 ET CL1 et CL2 et cl3 et cl4
* RESOLUTION ET POST-TRAITEMENT *
DEPL1 = RESOU RIG2 (CHA1 ET CHA2);
DEFO = DEFO SPHER1 DEPL1 0. BLANC;
DEF1 = DEFO SPHER1 DEPL1 1. VERT;
trac cach (def0 ET def1);
trac cach (0. 0. -100.) (DEF0 ET DEF1);
*extrait de depl1 les composantes suivant Y;
Yyy = EXCO DEPL1 UY;
base2 = MANU CHPO base2 3 UX 0 UY 0 UZ 0;
base2 = EXTR base2 'MAIL';
i = 0; m = 0; n = 0;
PeC = TABLE; Poil = TABLE; Poill = TABLE;
* Extrait de base2 les points qui ont leur coordonné *
* Y égale à (-RAY) ce qui correspond aux points de *
* base2 en contact avec le plan après chargement *
REPETER BlocVn (NBNO base2);
i = i + 1;
PeC.i = base2 POIN i;
yPeC = COOR 2 PeC.i;
Gr = yPeC + (EXTR DEPL1 UY PeC.i);
SI (Gr < EG (-1. * ray));
m = m + 1;
*points de base2 en contact avec le plan;
Poil.m = PeC.i;
SINON;
n = n + 1;
*points de base2 non en contact avec le plan;
Poill.n = PeC.i;
FINSI;
Fin BlocVn;
LIST Poil;
OBTENIR Nint*ENTIER;
TRAC cach (DEF0 ET DEF1);
CHACONTR= SIGM MOD MAT DEPL1;
CHANOEUD=CHAN NOEUD MOD CHACONTR;
CHANPOIN= CHAN CHPO MOD CHANOEUD;
* Extraction de la force appliquée *
* La boucle permet d'extraire toutes *

```



```

* les forces elementaires *
FORC1=BSIGMA MOD CHACONTR;
i = 0; EffY = TABLE;
REPETER BlocFor Nint;
i = i + 1;
EffY.i = EXTR FORC1 FY Poil.i;
FIN BlocFor;
Seff = TABLE; Seff.1 = EffY.1;
PoilT = TABLE; PoilT.1 = Poil.1;
i = 1;
REPETER BlocSef ( Nint - 1);
i = i + 1;
Seff.i = Seff.1 + EffY.i;
Seff.1 = Seff.i;
PoilT.i = PoilT.1 ET Poil.i;
PoilT.1 = PoilT.i;
FIN BlocSef;
LIST Seff;
*LIST ZZS;
*LIST ZZY;
*Extraction des composantes des contraintes *
SY=EXCO CHANPOIN SMYY ;
SX=EXCO CHANPOIN SMXX ;
SXY=EXCO CHANPOIN SMXY ;
DIFCONTR=((((SX-SY)**2)+(4*(SXY**2)))*0.5;
*CONT3=2*3.14*0.1*DIFCONTR;
CONT3=360*(1./0.36)*10*DIFCONTR;
CONT3=cos(CONT3/2.);
CONT3=CONT3*CONT3;
**DIFCONTR = CONT3;
ISOC= CONT3;
isoch00 = INT_COMP SPHER1 ISOC SECT00;
trac ECLA 0.0001 isoch00 SECT00 ;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=0.;
sect1 = sect00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;
* Tracer par symetrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;

```

```

trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+10);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des isoclines sur la section totale *

```

```

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+20);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+30);

```

```

ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+50);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+60);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);

```

```

term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+70);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+80);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+90);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s)
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;

```

```

*Tracer des isoclines  dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+100);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines  dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+120);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines  dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+130);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);

```

```

intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+140);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+150);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+160);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);

```

```

* Sortir les valeurs necessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+170);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA+180);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *

isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;

```



```

sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=-4.;
sect1 = sect00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;
* Tracer par symétrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isochtot = isoch1 et isoch1s;
****trac ECLA 0.0001 isochtot sect1s ;
intens1 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isoch0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
*trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
*trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=-6;
sect1 = sect00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;

```

```

isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;
* Tracer par symétrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isochtot = isoch1 et isoch1s;
*trac ECLA 0.0001 isochtot sect1s ;
intens1 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isoch0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
*trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
*trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=-12.;
sect1 = SECT00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;
* Tracer par symétrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isochtot = isoch1 et isoch1s;
*trac ECLA 0.0001 isochtot sect1s ;
intens1 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isoch2v0.res';
sort intens1 AVS ASCII;

```

```

* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
*TRAC ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
*trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *
isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot2V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=-16;
sect1 = sect00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;
* Tracer par symétrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isochtot = isoch1 et isoch1s;
*trac ECLA 0.0001 isochtot sect1s ;
intens1 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isoch0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
*création d'une section sect1 à Z = 0. mm et *interpolation de difcontr *
d=-26;
sect1 = sect00 PLUS (0. 0. d);
pb = 0. RAY (0. + d) ;
pc = 0. ((-1)*RAY) (0. + d);
sect1s = sect1 SYME 'DROIT' Pc Pb ;
isoch1 = INT_COMP SPHER1 ISOC sect1;
trac ECLA 0.0001 isoch1 sect1 ;

* Tracer par symetrie par rapport à la droite pc pb les *
* isochromes sur l'autre moitié de la section *
sect1s isoch1s = sect1 isoch1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isoch1s sect1s;
trac ecla 0.0001 (isoch1 et isoch1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isochromes avec SURFER *
sectOt = (sect1 et sect1s);
isochtot = isoch1 et isoch1s;
*trac ECLA 0.0001 isochtot sect1s ;
intens1 = isochtot;
option SORT 'c:\castem\isoch0V0.res';

```

```

sort intens1 AVS ASCII;
*Tracer des isoclines dans une nouvelle position de la section *
term1= (2. * SXY);
term2= (SX - SY);
term3= ABS (term1/term2);
ALPHA = (0.5) * (ATG term3);
ISOCL= sin(2. * ALPHA);
ISOCL= (ISOCL ** 2);
* interpolation et tracer des ISOCL sur la section totale *
isocl1 = INT_COMP SPHER1 ISOCL sect1;
trac ECLA 0.0001 isocl1 sect1 ;
sect1s isocl1s = sect1 isocl1 SYME 'DROIT' Pc Pb;
trac ECLA 0.001 isocl1s sect1s;
*trac ecla 0.0001 (isocl1 et isocl1s) (sect1 et sect1s);
* Sortir les valeurs nécessaires en ASCII pour *
* tracer les isoclines avec SURFER *

isocltot = (isocl1 et isocl1s);
intens1 = isocltot;
option SORT 'c:\castem\isocltot0V0.res';
sort intens1 AVS ASCII;
* tracer des valeurs des contraintes le long de *
* la droite pour différentes sections *
DOIT1= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT11= (0. ray 1.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT2= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT3= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT4= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT5= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
DOIT6= (0. ray 0.) DROI 500 (0. (-1*ray) 0.);
Pii = DOIT1 POIN 'INITIAL';
Pff = DOIT1 POIN 'FINAL';
int1 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT1;
int11 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT11;
int2 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT2;
int3 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT3;
int4 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT4;
int5 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT5;
int6 = INT_COMP SPHER1 DIFCONTR DOIT6;
ev1 = EVOL CHPO DOIT1 int1;
ev11=EVOL CHPO DOIT11 int11;
ev2 = EVOL CHPO DOIT2 int2;
ev3 = EVOL CHPO DOIT3 int3;
ev4 = EVOL CHPO DOIT4 int4;
ev5 = EVOL CHPO DOIT5 int5;
ev6 = EVOL CHPO DOIT6 int6;
dess (ev1 );
dess (ev11 );
dess (ev2 );
dess (ev3 );
dess (ev4 );
dess (ev5 );
dess (ev6 );
Valpi = EXTR int4 'SCAL' Pii;
Valpf = EXTR int4 'SCAL' Pff;

```

```
MESS 'ValPii =' Valpi 'ValPff =' Valpf;  
dess ((ev1 COUL jaune) et  
(ev2 COUL vert) et (ev3 COUL bleu) et  
(ev4 COUL rouge) et (ev5 COUL blanc) et (ev6 COUL jaune)  
et (ev11 COUL rouge));  
* transfer des valeurs de ev1...ev5 *  
*dans les fichiers cubSPHER11....cubSPHER15 *  
@excell ev1 'c:\castem\SPHER1-SPHER11';  
@excell ev11 'c:\castem\SPHER1-SPHER111';  
@excell ev2 'c:\castem\SPHER1-SPHER12';  
@excell ev3 'c:\castem\SPHER1-SPHER13';  
@excell ev4 'c:\castem\SPHER1-SPHER14';  
@excell ev5 'c:\castem\SPHER1-SPHER15';  
@excell ev6 'c:\castem\SPHER1-SPHER16';  
*list depl1;  
*ZZZ = EXTR depl1 COMP;  
*list ZZZ;  
LIST Seff;
```

## **CHAPITRE II**

### **ANALYSE DES CHAMPS DE CONTRAINTES DANS LE CAS BIDIMENSIONNEL**

#### **II.1 INTRODUCTION**

Il est bien évident que les pièces mécaniques sont tridimensionnelles; cependant dans les cas où les contraintes ne changent pas le long de l'épaisseur du modèle analysé, on parlera d'état de contraintes planes. Dans ce cas on utilisera la photoélasticimétrie bidimensionnelle pour analyser les contraintes. Généralement, on aura besoin de déterminer les valeurs des contraintes principales ainsi que leurs directions. Ces résultats sont très importants en ingénierie pour la conception et le dimensionnement d'éléments de machines. Les zones de concentration des contraintes sont très vite repérées; les valeurs maximales des contraintes sont obtenues assez aisément par l'exploitation des franges photoélastiques obtenues sur l'analyseur d'un polariscope.

Dans les cas où les contraintes changent le long de l'épaisseur, on utilisera la méthode de figeage découpage. On parlera alors de photoélasticimétrie tridimensionnelle par découpage mécanique. Il s'agit d'une méthode développée par G. Oppel [24].

Pour illustrer l'utilisation de cette méthode expérimentale et son importance dans l'analyse des champs de contraintes nous avons utilisé une poutre en porte à faux chargée à son extrémité. Les contraintes sont figées dans le modèle en le chargeant à la température de figeage de 120°C à l'intérieur d'une étuve. Un cycle thermique est utilisé pour arriver à figer les contraintes dans le volume du modèle à analyser. Une fois que les contraintes ont été figées dans la poutre encastree, on procédera à l'analyse sur un polariscope. On utilisera la lumière circulaire et la lumière rectiligne pour déterminer facilement les franges isochromes et les franges isoclines qui seront utilisées pour retrouver les valeurs et les directions des contraintes principales.

Une analyse par la méthode des éléments finis est utilisée pour analyser le modèle. Les champs de contraintes sont déterminés à l'aide de programmes écrits sous CASTEM, un logiciel éléments finis. Les valeurs des contraintes et les directions des contraintes peuvent être obtenues aisément. Les

franges photoélastiques, aussi bien les isochromes que les isoclines peuvent être calculées et comparées avec les franges expérimentales pour validation.

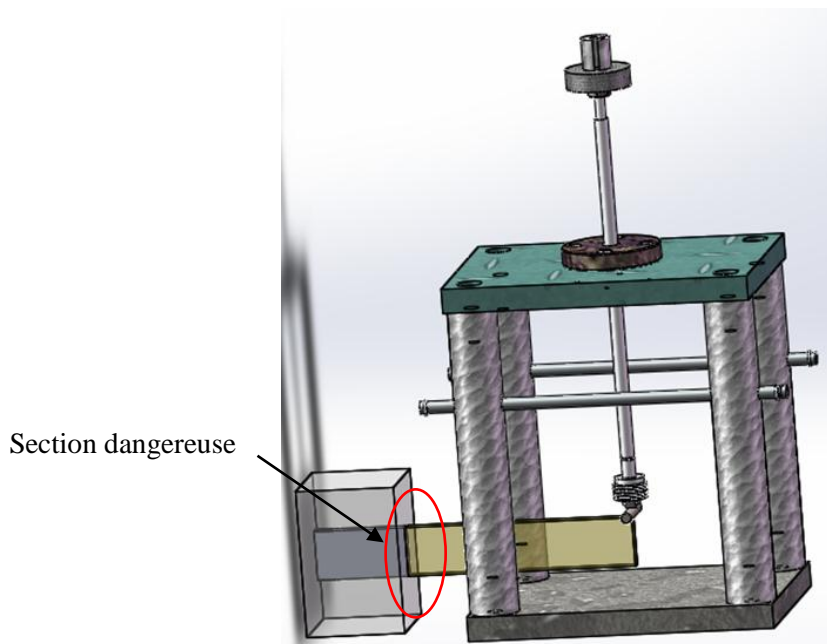
A travers cet exemple intéressant pour le mécanicien, on montrera les possibilités de la méthode des éléments finis pour déterminer les champs de contraintes développés dans les structures mécaniques. On appréciera la complémentarité des méthodes expérimentales et des méthodes numériques dans l'analyse des contraintes.

La comparaison des résultats se fera, d'une part par la superposition des courbes de la variation des contraintes, suivant l'axe vertical passant par la zone la plus chargée qui est le point de contact, obtenues par les deux méthodes, et d'autre part en analysant les images des isochromes relevées sur le polariscope et les images obtenues numériquement avec le logiciel CASTEM et traitées avec le logiciel Photoshop.

## II.2 REPRÉSENTATION DU MODÈLE EXPÉRIMENTAL

Le modèle expérimental réalisé en matière biréfringente est représenté sur la figure III.2. L'objet de ce travail est d'analyser une poutre en flexion en comportement élastique; la poutre de 10 mm de largeur, 40 mm de hauteur et 260 mm de longueur est encastree à une de ses extrémités. L'autre extrémité de la poutre est chargée par une force de 1.5 N.

Ce type du modèle est très fréquent dans l'industrie mécanique et en génie civil. L'essai a été réalisé dans une étuve à température de figeage dans le but de figer le champ de contraintes dans le volume du modèle pour une analyse ultérieure.



**Figure II.1 :** Dispositif expérimental d'une poutre simplement encastree

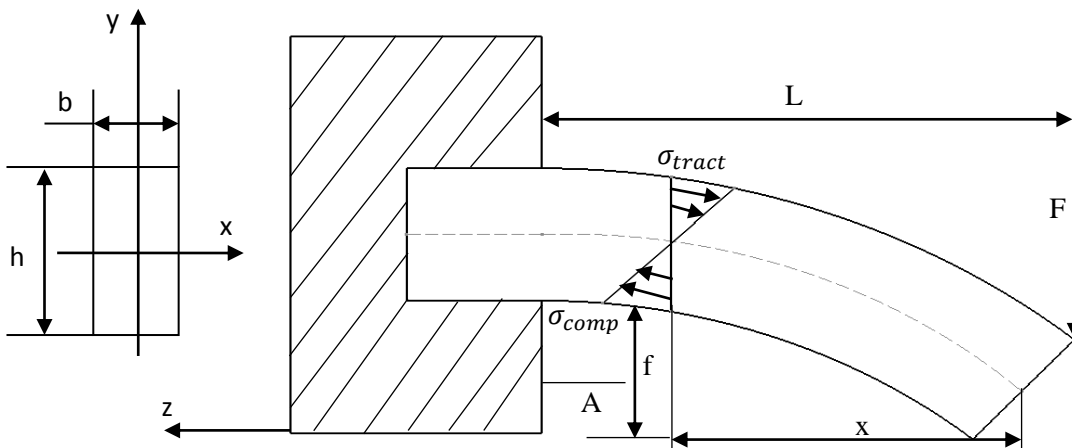


Ce travail consiste à déterminer les champs de contraintes développées dans la poutre encastrée sous l'application de la charge. Les deux méthodes mentionnées précédemment sont utilisées pour retrouver les valeurs des contraintes.

### II.3 SOLUTION ANALYTIQUE

Nous commencerons par la solution analytique de la flexion simple d'une poutre encastrée et chargée en son extrémité.

Moment de flexion  $M_b = \sum F \cdot x$  = somme de tous les moments à droite et à gauche de la section considérée. Les moments vers la droite (dans le sens des aiguilles d'une montre) sont considérés comme positifs ; ceux vers la gauche (sens inverse des aiguilles d'une montre) comme négatifs (Figure II.2). La surface limite entre les deux types de charge est dite « fibre neutre », dont la section avec une surface constitue la « ligne neutre ». (NL dans les sections).



**Figure II.2 :** Cas d'étude d'une poutre droite simplement encastrée et chargée à son extrémité

A : Section dangereuse

Moment fléchissant maximum.

$$M_{f.max} = F \cdot L \quad (II.1)$$

Force portante.

$$F = \frac{2 \cdot \sigma'_{zul} \cdot W}{L} \quad (II.2)$$

Moment résistant exigé W

$$M_{r.W} = \frac{F \cdot L}{2 \cdot \sigma'_{zul}} \quad (II.3)$$

Flèche  $f$

$$f = \frac{F.L^3}{8.E.J} \quad (\text{II.4})$$

Avec :

Moment d'inertie  $J$  :

$$J = \frac{b.h^3}{12} \quad (\text{II.5})$$

Moment résistant  $W$  :

$$W = \frac{b.h^2}{6} \quad (\text{II.6})$$

#### ❖ Calcul de la flèche à la température ambiante

À partir de l'équation (II.4), on peut calculer la flèche à température ambiante

$$f = \frac{3.F.L^3}{2.E.b.h^3} \quad (\text{II.7})$$

$$f = \frac{3.1,5.260^3}{2.2425.10.40^3} = 0,0254 \text{ mm}$$

#### ❖ Calcul de la flèche à la température de figeage

À partir de l'équation (II.4), on peut calculer la flèche à température de figeage

$$f = \frac{3.F.L^3}{2.E.b.h^3}$$

$$f = \frac{3.1,5.260^3}{2.15,9.10.40^3} = 3,886 \text{ mm}$$

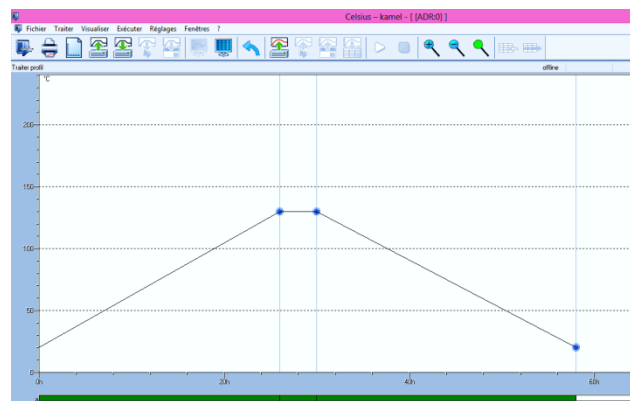
### II.4.1 Elaboration d'une poutre simplement encastree et chargée à son extrémité

Le système époxy résine (PLM4 PLMH) a été spécialement conçu pour la fabrication des modèles pour le figeage des contraintes en photoélasticimétrie bidimensionnelle et tridimensionnelle. Cette résine est caractérisée par sa faible réaction exothermique souhaitable donc pour des modèles d'épaisseurs relativement importantes. Cette matière présente une excellente transparence lorsqu'elle est bien moulée et recuite. Elle présente aussi une grande sensibilité optique. Les deux produits se présentent sous forme d'une combinaison d'une résine liquide et d'un durcisseur qui peuvent être mélangés puis coulés pour réaliser des éprouvettes. La poutre simplement encastree et chargée à son extrémité a été fabriquée avec un matériau birefringent. Nous avons utilisé du ciment blanc pour encastree la poutre à son extrémité gauche (Figure II.3).



**Figure II.3 :** Le dispositif à l'intérieur de l'étuve

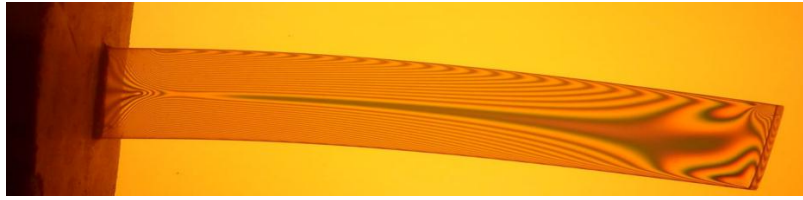
La figure II.3 montre le dispositif de chargement à l'intérieur de l'étuve pour un essai d'une poutre en flexion encastrée. Les contraintes sont figées dans le modèle en utilisant la méthode de figeage des contraintes. Le cycle thermique est donné dans la figure 4 ci-dessous; élévation de la température de l'étuve jusqu'à la température de figeage de 120 degrés avec une vitesse de 5 degrés par heure suivie d'un maintien en température pendant deux heures suivie d'un refroidissement lent de cinq degrés par heure jusqu'à température ambiante en maintenant la charge fixe.



**Figure II.4 :** Traitement thermique pour figer des contraintes

## II.4.2 Résultat obtenu dans la phase expérimentale

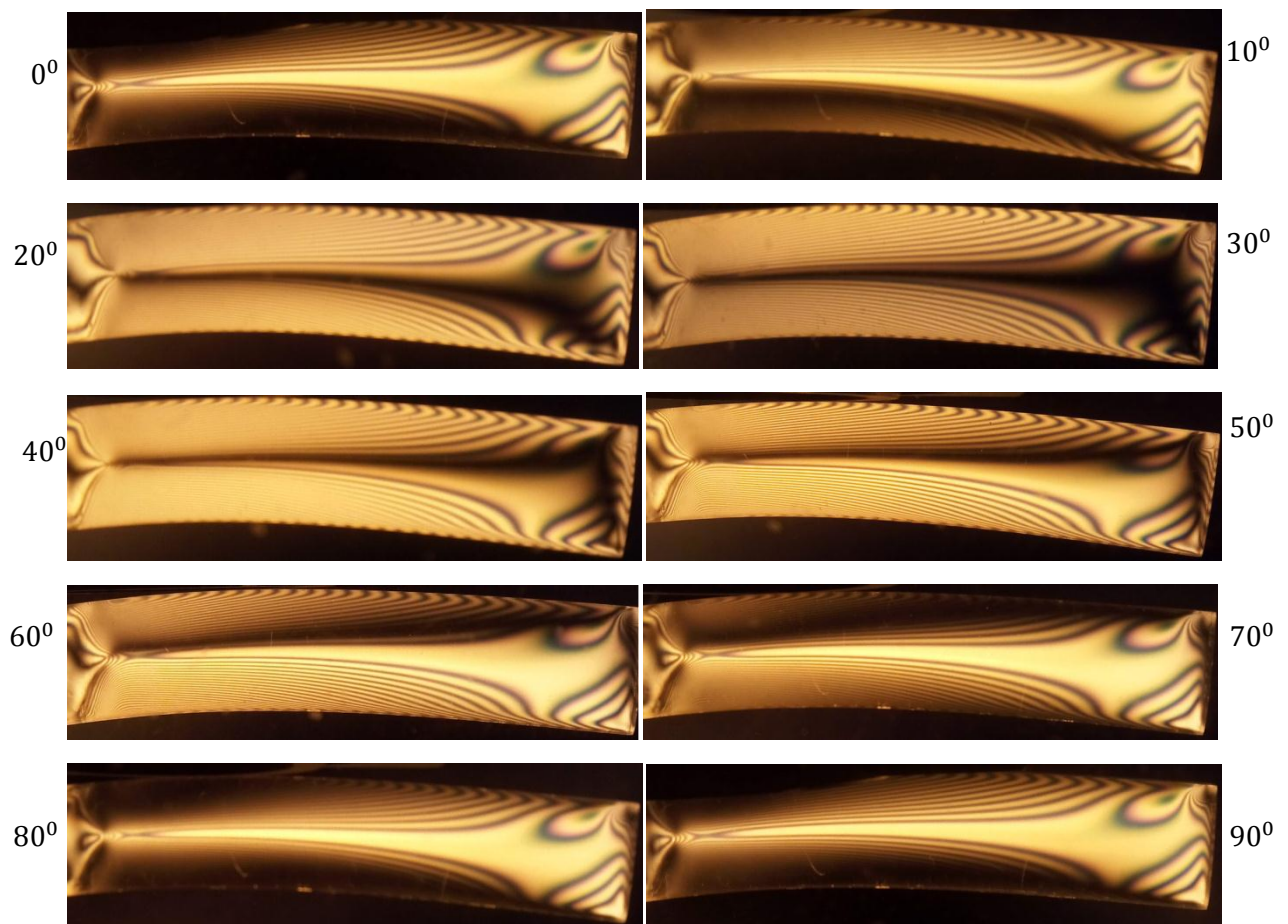
Une fois le cycle thermique est terminé, on a positionné l'éprouvette entre l'analyseur et le polariseur du polariscope. Nous avons observé les franges photoélastiques (Figure II.5). L'éprouvette reste déformée de manière permanente. L'exploitation des franges permettra de retrouver le champ des contraintes sur toute la surface du modèle.



**Figure II.5 :** Visualisation des contraintes figées sur le modèle en champ clair

### II.4.3 Visualisation des franges isoclines dans le cas expérimentale

En faisant tourner les deux polaroïds simultanément, on visualise les différentes positions des franges isoclines (Figure II. 6) qui apparaissent en fonction de l'angle de rotation. Leur exploitation permet de retrouver les directions principales des contraintes sur toute la surface du modèle analysé.



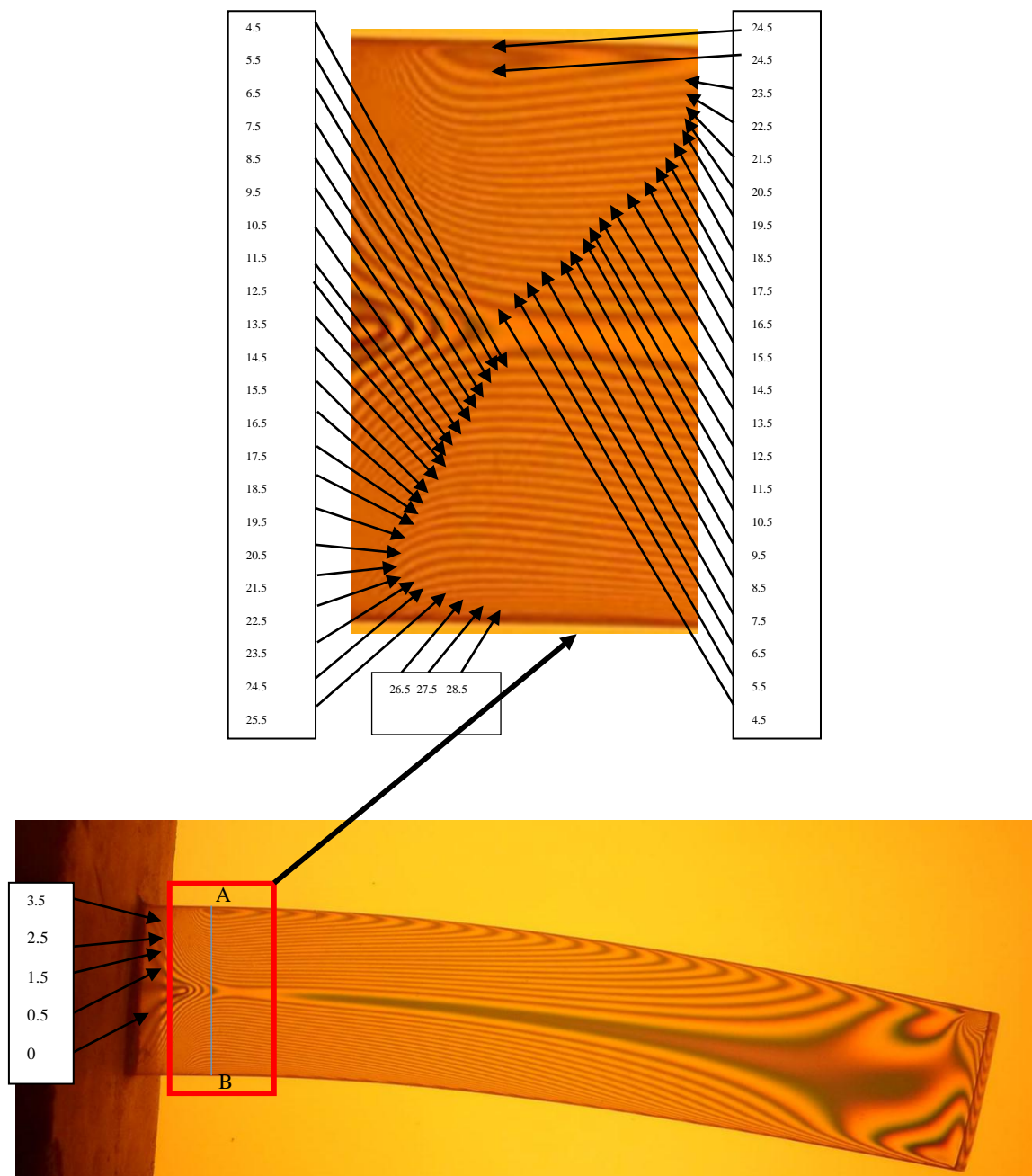
**Figure II. 6 :** Réseau de franges isoclines obtenues expérimentalement

### II.4.4 Variation de contraintes principales

Pour la détermination de la variation des contraintes principales, on doit d'abord visualiser le réseau d'isochromes sur le polariscope, ici en lumière monochromatique et en champ clair. Puis, repérer chaque frange avec son ordre correspondant. Les contraintes sont ensuite calculées à l'aide des relations découlant de la loi de Maxwell.

### II.4.5 Visualisation du réseau d'isochromes sur le champ clair

On définit le segment [AB] au niveau de la zone dangereuse du modèle donné avec les isochromes visualisés où A désigne le point de traction et B un point de compression.



**Figure II.7** : Réseau d'isochromes sur le modèle

La différence des contraintes suivant le segment [AB] est calculée par la relation de Maxwell :

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N \cdot f}{e}$$

Avec :

N : Ordre de frange

f: Constante de frange

e : Épaisseur du modèle

A l'intersection du segment [AB] avec les franges isochromes, on relève les distances correspondantes par rapport au niveau de la zone dangereuse. Sachant qu'on a utilisé un champ clair, la première frange en partant du bord libre supérieur (Figure II.7) correspond à une valeur d'ordre de frange N=0. Les autres franges peuvent ensuite être repérées sur toute la surface du modèle. Ces valeurs sont portées sur un tableau à partir duquel on trace le graphe de l'évolution de la différence des contraintes principales.

#### II.4.6 Calcul des valeurs de la différence des contraintes principales sur le segment [AB]

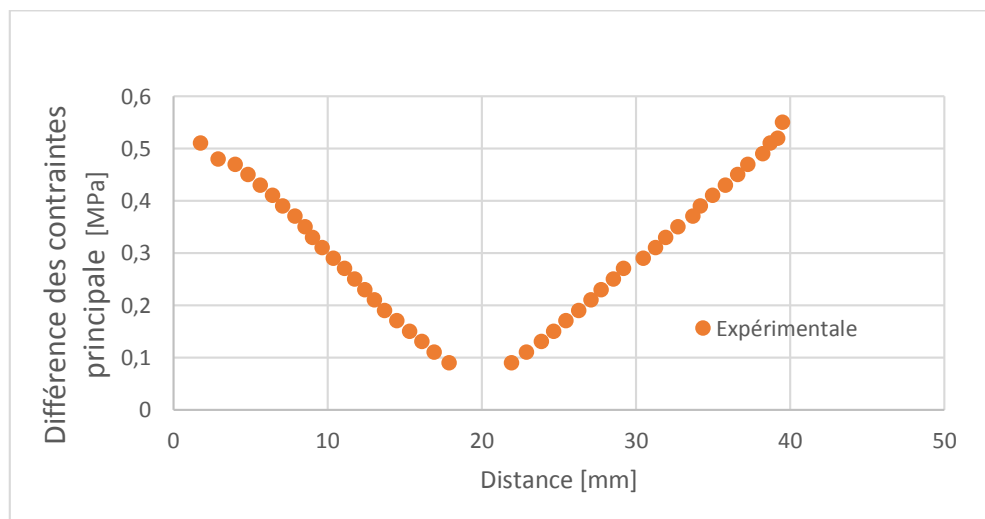
Sachant que les contraintes ont été figées à température de figeage, nous avons utilisé la valeur de frange a temperature de figeage pour exploiter le réseau des isochromes en utilisant la loi de Maxwell (valeur de frange : f=0,36 N/mm/frange, épaisseur du modèle : e=9mm). Les résultats obtenus sont donnés sur le tableau suivant :

N : Ordre de frange	La distance sur l'image (mm)	Distance réelle (mm)	Différence des contraintes (MPa)
25.5	2	1.77	0.51
24.5	5.5	2.9	0.48
23.5	9	4.03	0.47
22.5	12.5	4.84	0.45
21.5	15	5.64	0.43
20.5	17.5	6.45	0.41
19.5	20	7.09	0.39
18.5	22	7.90	0.37
17.5	24.5	8.55	0.35
16.5	26.5	9.03	0.33
15.5	28	9.68	0.31
14.5	30	10.4	0.29
13.5	32.5	11.13	0.27
12.5	34.5	11.77	0.25
11.5	36.5	12.42	0.23

10.5	38.5	13.06	0.21
9.5	40.5	13.71	0.19
8.5	42.5	14.51	0.17
7.5	45	15.32	0.15
6.5	47.5	16.13	0.13
5.5	50	16.93	0.11
4.5	52.5	17.90	0.09
4.5	68	21.93	0.09
5.5	71	22.90	0.11
6.5	74	23.87	0.13
7.5	76.5	24.68	0.15
8.5	79	25.48	0.17
9.5	81.5	26.29	0.19
10.5	84	27.09	0.21
11.5	86	27.74	0.23
12.5	88.5	28.55	0.25
13.5	90.5	29.19	0.27
14.5	92.5	30.48	0.29
15.5	94.5	31.29	0.31
16.5	97	31.93	0.33
17.5	99	32.74	0.35
18.5	101.5	33.71	0.37
19.5	104.5	34.19	0.39
20.5	106	35	0.41
21.5	108.5	35.80	0.43
22.5	111	36.61	0.45
23.5	113.5	37.26	0.47
24.5	115.5	38.22	0.49
25.5	117.5	38.71	0.51
26.5	118.5	39.19	0.52
27.5	120	39.51	0.55

**Tableau II.1** : Valeurs de la différence de contraintes relevées expérimentalement

Les variations de la différence des contraintes principales sont représentées sur la figure II.8 ci-dessous.



**Figure II.8** : Variation de la différence des contraintes principales

### II.5 SOLUTION NUMERIQUE – METHODES DES ELEMENTS FINIS

Une analyse par éléments finis conduite avec le logiciel CASTEM est utilisée pour obtenir le champ des contraintes développées à l'intérieur du modèle. Dans les calculs par éléments finis, on a considéré le comportement du modèle isotrope et élastique. Le module de Young et le coefficient de Poisson pour les deux corps en contact sont introduits dans le programme (Annexe B).

Le déphasage  $\varphi$  permettant de calculer les franges isochromes (voir annexe) est calculé à l'aide de la relation ci-dessous :

$$\varphi = \frac{2.\pi.e.(\sigma_1 - \sigma_2)}{f}$$

Avec :

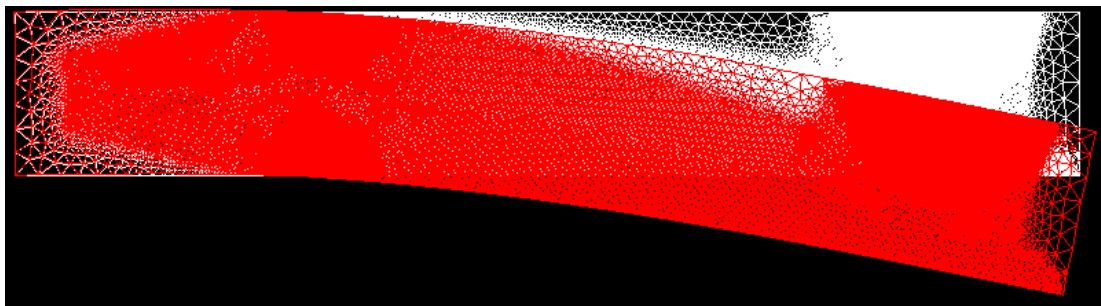
$e$  : Épaisseur du modèle

$\sigma_1 - \sigma_2$  : La différence des contraintes principales

$f$  : La valeur de frange

Une fois que le programme est exécuté nous pouvons extraire les différents résultats concernant la déformée, les valeurs des contraintes ainsi que les franges photoélastiques isochromes et isoclines après reconstitution.

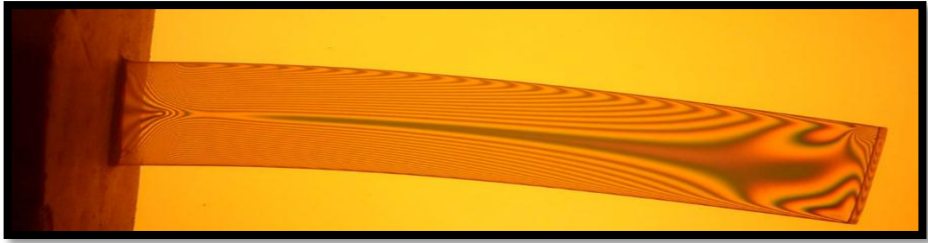
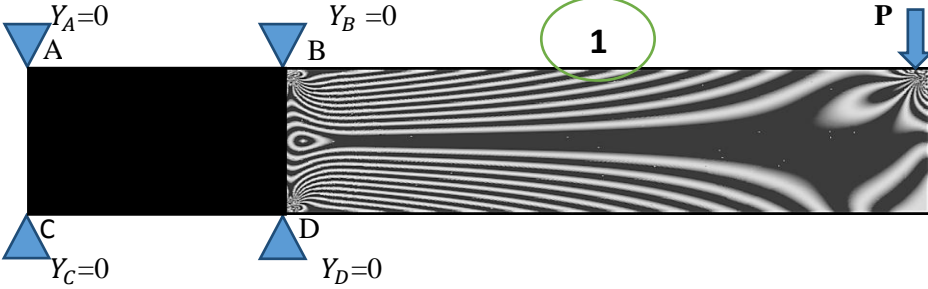
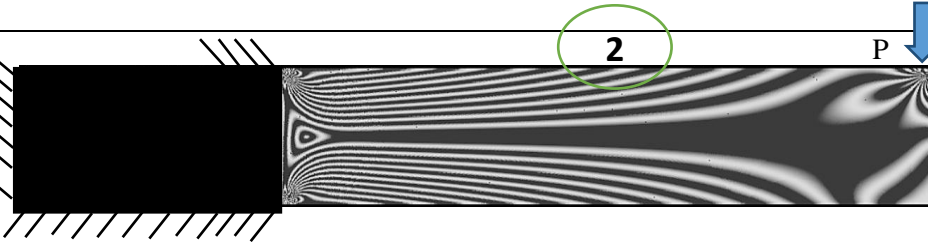
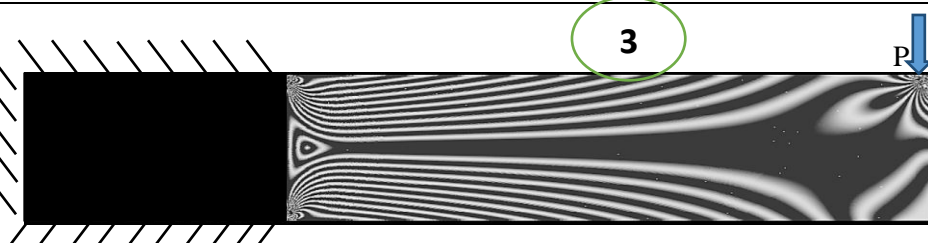
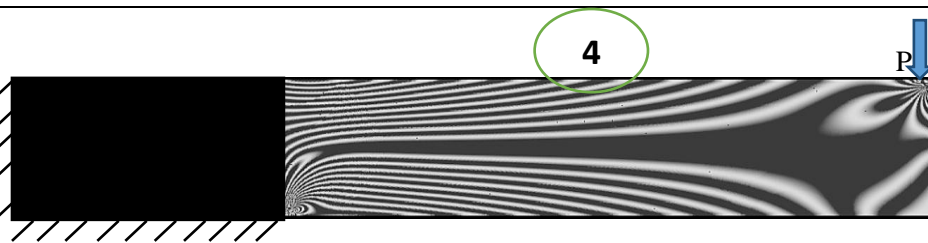
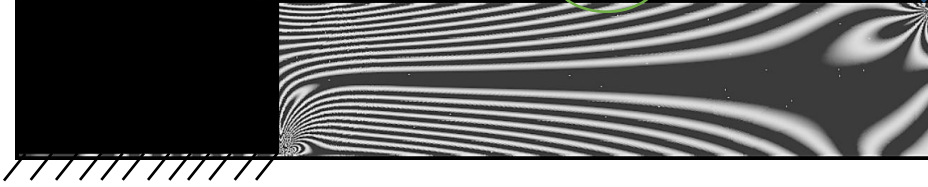

L'opérateur DEFOR(ME) construit la déformée de la structure à partir de la géométrie initiale et du champ de déplacement.

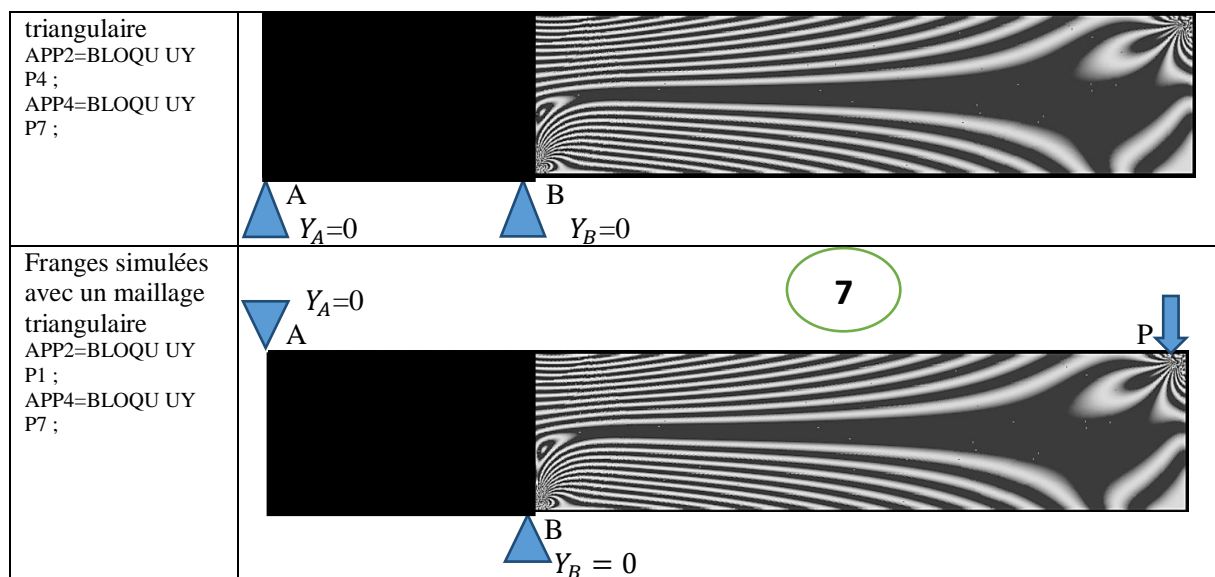


**Figure II.9** : Représentation de la déformée

Selon les conditions aux limites posées dans la simulation numérique (Figure II.10), des différences très nettes peuvent apparaître dans les figures de franges photoélastiques.



Franges expérimentales	
Franges simulées avec un maillage triangulaire APP1=BLOQU UY P5 ; APP2=BLOQU UY P7 ; APP3=BLOQU UY P4 ; APP4=BLOQU UY P1 ;	 <p>1</p>
Franges simulées avec un maillage triangulaire APP1=BLOQU UY LIG9 ; APP2=BLOQU UY LIG8 ; APP3=BLOQU UY LIG15 ; APP4=BLOQU UY LIG7 ;	 <p>2</p>
Franges simulées avec un maillage triangulaire APP5=BLOQU UY LIG1 ; APP1=BLOQU UY LIG9 ; APP2=BLOQU UY LIG8 ; APP3=BLOQU UY LIG15 ; APP4=BLOQU UY LIG7 ;	 <p>3</p>
Franges simulées avec un maillage triangulaire APP1=BLOQU UY LIG9 ; APP2=BLOQU UY LIG8 ; APP4=BLOQU UY LIG7 ;	 <p>4</p>
Franges simulées avec un maillage triangulaire APP2=BLOQU UY LIG8 ; APP4=BLOQU UY LIG7 ;	 <p>5</p>
Franges simulées avec un maillage	 <p>6</p>

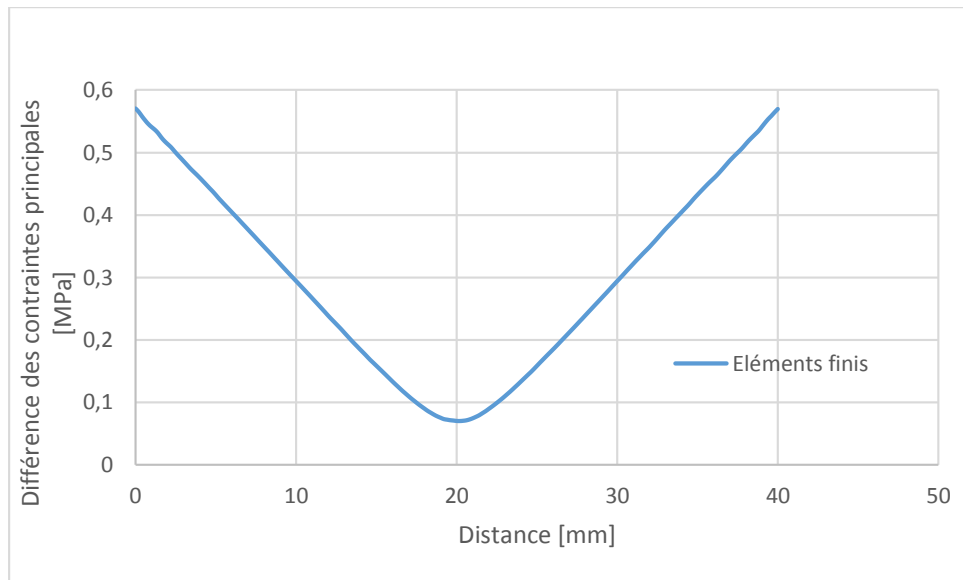


**Figure II.10** : Simulations numériques et images expérimentales pour un modèle soumis à un essai de flexion

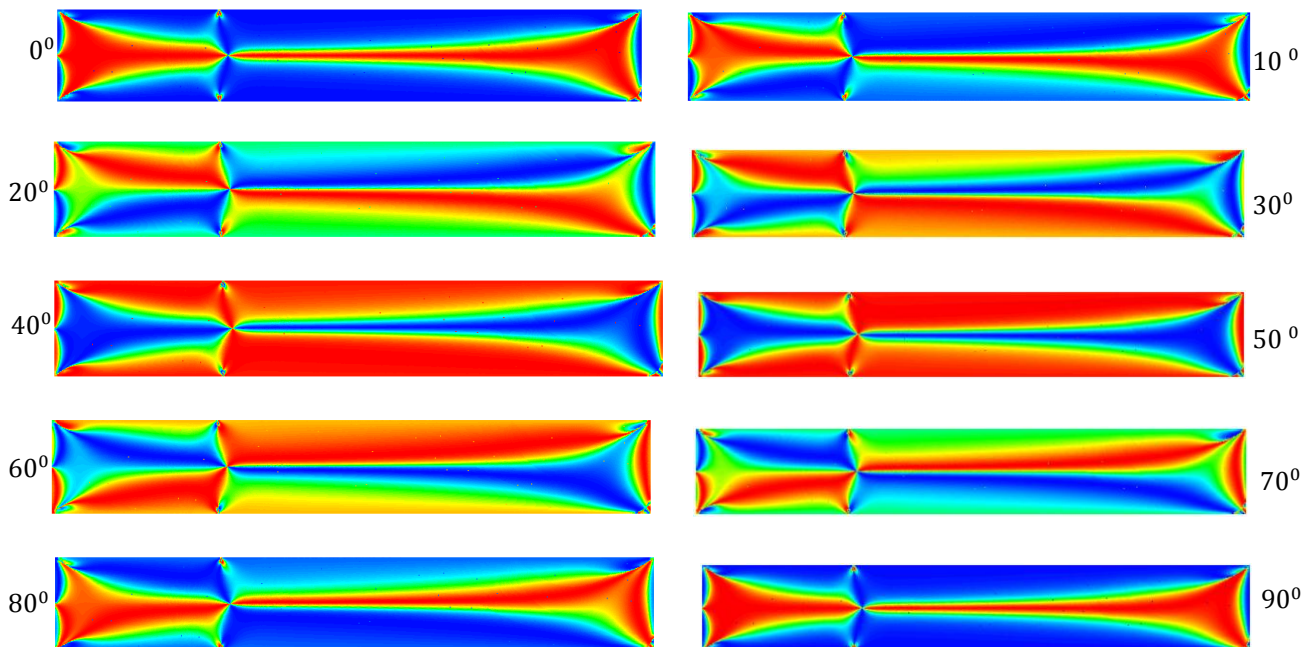
Après avoir analysé un modèle numérique correspondant au cas réel, il est possible de visualiser en chaque point du maillage l'intensité lumineuse. En effet, à partir des contraintes obtenues en chaque nœud, donnant ainsi les variations des franges au sein de la zone que l'on souhaite étudier. Une étude expérimentale est menée, faisant apparaître à son tour les franges photoélastiques. Celles-ci sont alors comparées à celles obtenues numériquement avec l'une des sept schématisations. Cette procédure de comparaison est appliquée par exemple, pour valider un modèle numérique (ses conditions aux limites, la loi de comportement utilisée, son maillage, etc). On observe bien une différence entre les franges simulées dans l'image (4, 5, 6 et 7) et les franges expérimentales; ce qui a nécessité un recalage des conditions aux limites pour avoir ensuite des franges dans l'image en (1, 2,3) plus proches du cas réel.

Les valeurs de la différence des contraintes principales suivant l'axe [A B] sont obtenues numériquement. La variation de la différence des contraintes principales obtenues numériquement est donnée par la figure II.11.

Sachant que les isoclines simulées sont obtenues par le calcul de  $\sin^2(2\alpha)$ , le programme calcule la valeur en chaque point du modèle et l'affiche sur l'image, ceci permet de calculer et d'afficher les isoclines sur toute la surface du modèle. La figure II.12 représente les différentes franges isoclines obtenues pour les différentes valeurs du paramètre isocline. Dans l'échelle des couleurs utilisée par CASTEM, la couleur bleu représente la valeur zéro du terme  $\sin^2(2\alpha)$  représentant l'intensité de la lumière recueillie expérimentalement au niveau de l'analyseur du polariscope; la couleur rouge représente la valeur 1.



**Figure II.11 :** Variation de la différence des contraintes principales le long de AB

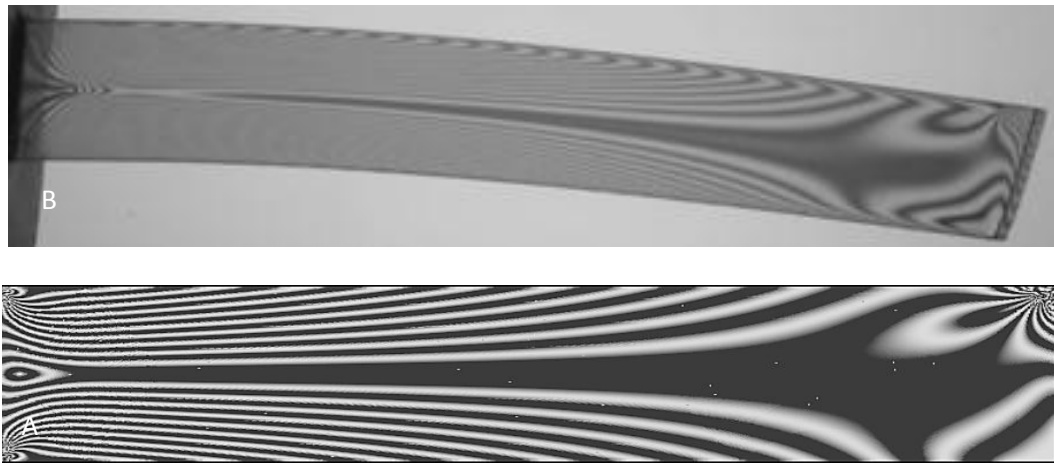


**Figure II.12 :** Isoclines obtenues à l'aide d'un programme écrit sous CASTEM

## II.6 COMPARAISON DES RÉSULTATS

### II.6.1 Comparaison des franges figées isochromes

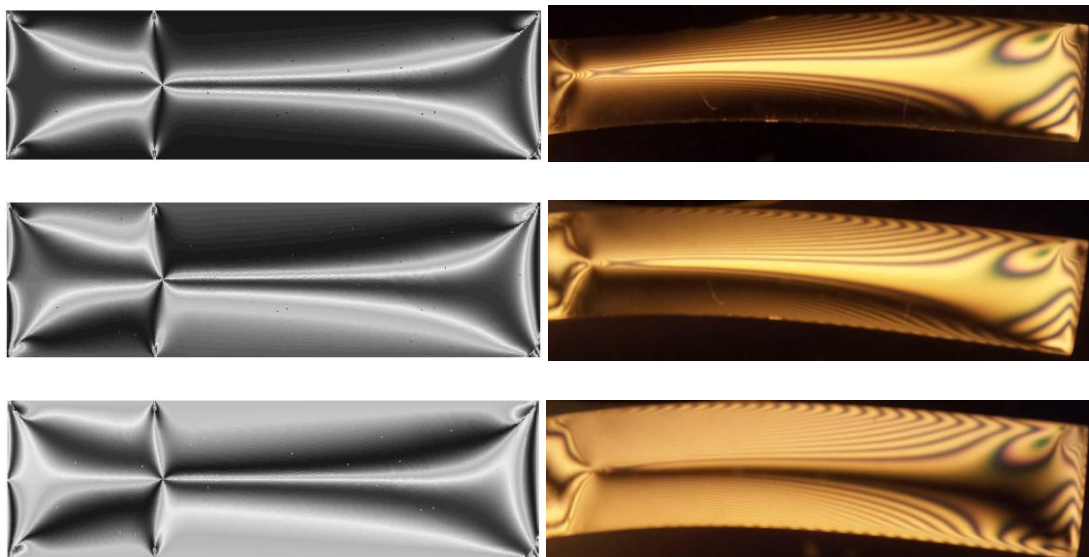
La démarche consiste à comparer les franges photoélastiques expérimentales avec les franges photoélastiques calculées à partir d'un champ de contraintes numériques. Cette procédure est très performante pour valider par exemple les conditions aux limites et le maillage utilisé pour modéliser une pièce.



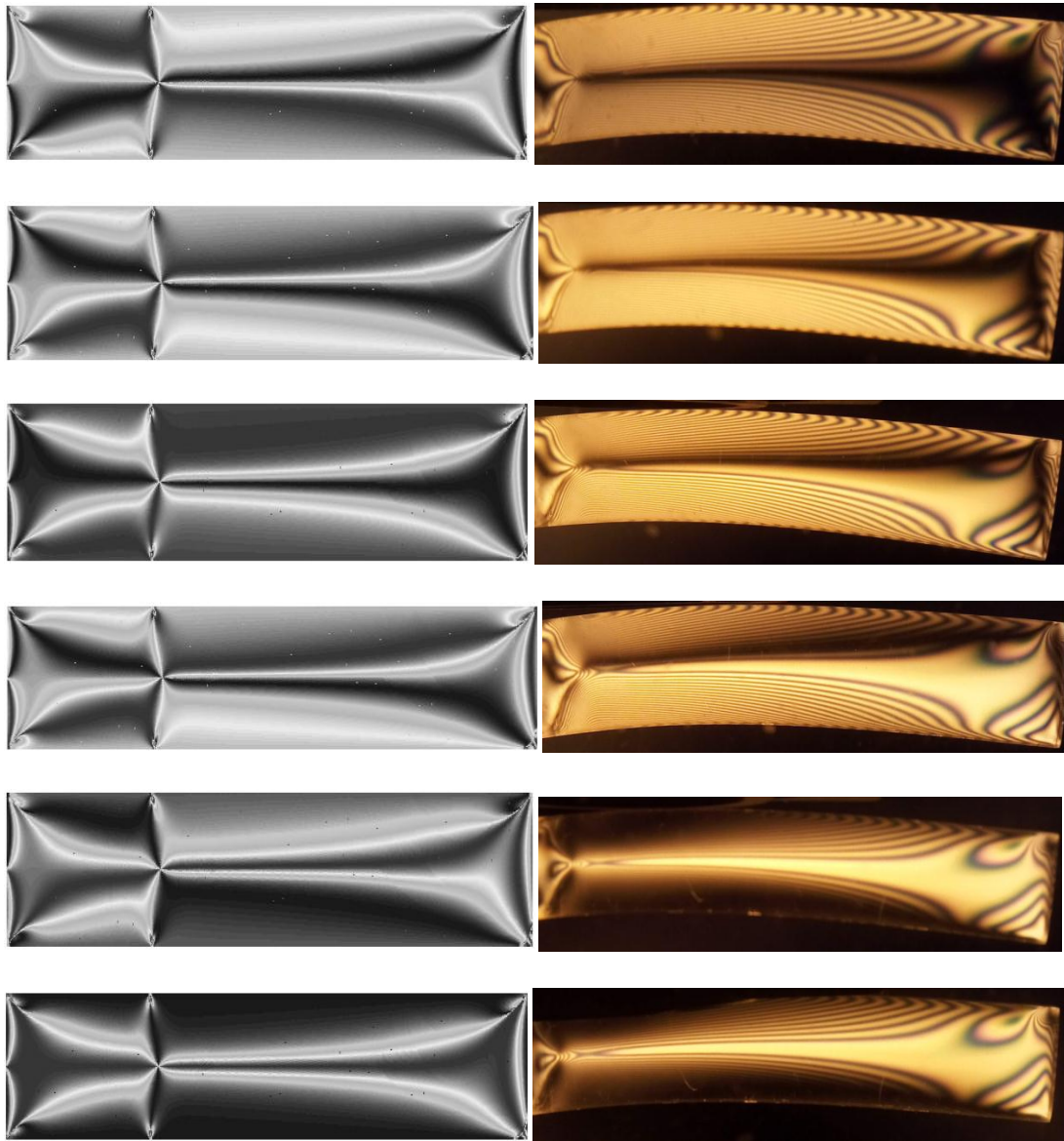
**Figure II.13:** Superposition des isochromes obtenue numériquement et traitée avec Photoshop(A) avec sa correspondante obtenue expérimentalement(B)

### II.6.2 Comparaison des isoclines

La figure II.14 représente la superposition des isoclines obtenues numériquement et traitées avec le logiciel PHOTOSHOP (à droite de chaque image) avec les isoclines correspondantes obtenues expérimentalement (à gauche de chaque image). Il est impossible de séparer le réseau isochrome du réseau isocline dans les images obtenues expérimentalement. On remarque que les isoclines sur la partie gauche et la partie droite de chaque image sont semblables et concordent.



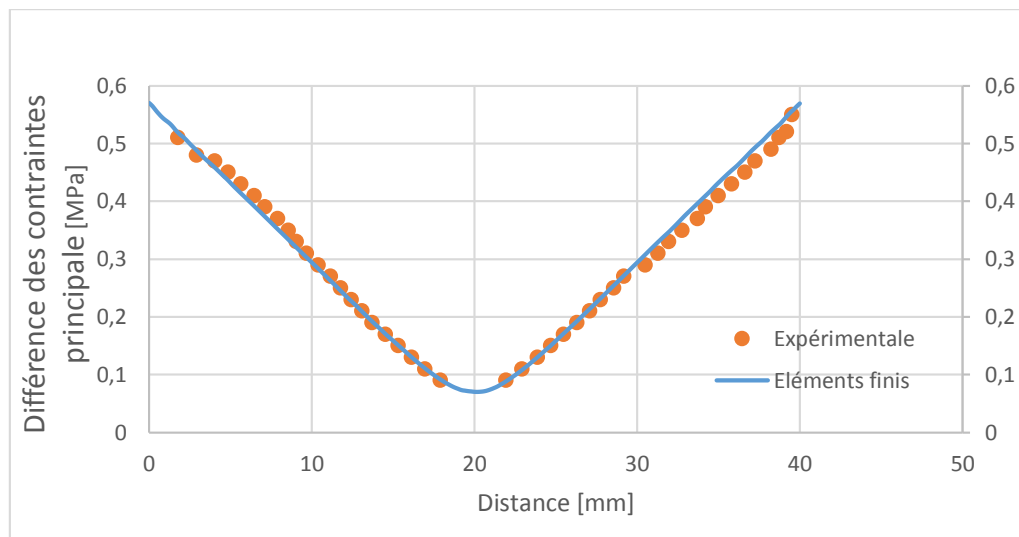




**Figure II.14 :** Superposition de l'isocline obtenue numériquement et traitée avec Photoshop avec sa correspondante obtenue expérimentalement

### II.6.3 Superposition des courbes de la différence des contraintes principales

La solution numérique obtenue à l'aide du programme par éléments finis est comparée à la solution expérimentale (Figure II.15). On constate relativement une bonne concordance entre les valeurs expérimentales et la solution par éléments finis.



**Figure II.15 :** Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques de la différence des contraintes principales

## II.7 CONDITION AUX LIMITES (APPUIS SIMPLE, APPUIS ENCASTRE)

Afin d'observer l'influence des conditions aux limites sur les champs de contraintes développés sur les modèles nous avons comparé les liaisons de type d'appuis : l'appui simple et l'encastrement (Figure II.16).



**Figure II.16 :** Réseau d'isochromes sur le modèle (A. appuis simple ; B. appuis encastré)

La liaison de type appui simple résulte du simple contact entre deux solides (un seul degré de liberté). Elle peut être assimilée à une liaison parfaite : ponctuelle, linéique ou surfacique (Figure. II .16 A) [30].

L'encastrement ne permet aucun mouvement ou degré de liberté. Il y a donc l'apparition d'une réaction d'appuis et d'un moment dit d'encastrement bloquant la rotation (Figure II.16 B).

## II.8 Conclusion

Cette partie de notre travail nous a permis d'une part de nous familiariser avec la méthode de figeage découpage pour l'analyse des champs de contraintes développés dans les éléments d'ensembles fonctionnels et d'autre part d'écrire un programme sous CASTEM pour simuler les contraintes et tracer les franges photoélastiques simulées sur le même modèle analysé expérimentalement pour une validation.

**RESUME:** Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'analyse des champs de contraintes développées dans les ensembles fonctionnels mécaniques particulièrement dans les transmissions de mouvements et de puissances. La connaissance des champs de contraintes développés au voisinage des zones de contact sont d'une très grande importance pour le dimensionnement et l'optimisation des formes des pièces constituant les ensembles fonctionnels. Nous avons utilisé la photoélasticimétrie, une méthode basée sur la biréfringence de la lumière, pour analyser les champs de contraintes dans différents contacts mécaniques. Nous avons exploité les franges photoélastiques pour déterminer les valeurs et les directions des contraintes principales. Des programmes écrits sous CASTEM, un logiciel éléments finis, nous ont permis de faire une simulation. Les franges photoélastiques, aussi bien les franges isochromes que les franges isoclines, sont obtenues par la simulation. Une comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques ont permis de faire une comparaison pour la validation des résultats.

**ABSTRACT:** This thesis is part of the analysis of stress fields developed in mechanical functional assemblies, particularly in the transmission of movements and powers. The knowledge of the stress fields developed in the vicinity of the contact zones are of great importance for the dimensioning and the optimization of the shapes of the parts constituting the functional assemblies. We used photoelasticity, a method based on the birefringence of light, to analyze stress fields in different mechanical contacts. We exploited the photoelastic fringes to determine the values and directions of the principal stresses. Programs written under CASTEM, finite element software, allowed us to make a simulation. The photoelastic fringes, both the isochrome fringes and the isoclinic fringes, are obtained by the simulation. A comparison between the experimental results and the numerical results made it possible to make a comparison for the validation of the results.