

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERRI, Tizi-Ouzou



Faculté de Génie Electrique et d'Informatique
Département d'Automatique

Mémoire de Fin d'Etudes

En vue de l'obtention du diplôme

D'Ingénieur d'Etat en Automatique

Thème

**Commande par invariance
positive des systèmes linéaires
contraints.**

Proposé par : M^r KARA Redouane

Présenté par :

Dirigé par : M^r KARA Redouane

M^{elle} FODIL Rabéa

Soutenu le : 10/ 10/ 2011

Promotion 2011

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère maman

Mon cher papa et ma belle-mère Khadoudja

*Mes très chères sœurs : Fariza, Samia, Hind, Hafidha,
Saida et Mellissa.*

*Tous mes amis en particulier Ania et ses sœurs Tinkinan et
Katia*

A Samir

L'être le plus cher à mon cœur ...

Remerciement

*C*est avec un très grand plaisir que je fais part de ma reconnaissance envers M^r Redouane KARA, je le remercie d'abord de la confiance accordée à mon égard, en acceptant d'encadrer ce travail. Sa compétence, son esprit critique, ses remarques et son engagement ont sans aucun doute contribué de façon décisive à l'aboutissement de ce mémoire. D'autre part, la gentillesse, le respect dont il m'a honoré durant cette année de travail en commun.

*M*es remerciements s'adressent aussi aux membres du jury qui me font l'honneur de juger ce travail.

*J*e ne peux pas clôturer ces remerciements sans adresser mon respect à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

*E*nfin je voudrais dire un grand merci à mes parents.

SOMMAIRE

Introduction générale	(1)
Chapitre I Notions de base	
Introduction	(3)
I. Principe de la représentation d'état	(3)
I.1 Notion d'état	(3)
I.2 Variable d'état	(3)
I.3 Vecteur d'état	(4)
II. Etude des systèmes multivariables	(4)
II.1 : Représentation fréquentielle.....	(4)
II.2 : Représentation d'état.....	(5)
III. Définition d'une norme Euclidienne	(6)
IV. Définition d'une norme $\ H\ _2$	(6)
V. Définition de la norme $\ H\ _\infty$	(6)
VI. Robustesse et commande robuste	(7)
VI.1. Définition de la robustesse.....	(7)
VII - Notions de stabilité	(10)
VII.1.Stabilité au sens de Lyapunov	(10)
VII.2.Stabilité par la seconde méthode de Lyapunov	(12)
VII.3 Stabilité des systèmes linéaires	(15)
VII.3.1.Caractérisation à partir des valeurs propres de A.....	(16)
VII.3.2.Caractérisation à partir des fonctions de Lyapunov	(16)
VII.2.2.1.Fonction de Lyapunov quadratiques	(17)
VII.2.2.2.Fonction de Lyapunov polyédrales	(18)
VIII. Commande dans l'espace d'état	(18)
VIII.1 Principe de base pour le calcul de la de commande par retour d'état linéaire.....	(18)
VIII.2 Commande par retour d'état pour les systèmes continus	(19)
VIII.3 Commande par retour d'état pour les systèmes échantillonnés	(20)
VIII.4 La commande modale	(20)
VIII.4.1 But et définition	(21)

IV. Commandabilité	(21)
IV.1 Calcul de la commande dans le cas d'un système sous forme compagne pour la commande	(22)
IV.2. Calcul de la commande dans le cas général	(24)
Conclusion	(25)
Chapitre II : les systèmes linéaire à commande contrainte	
Introduction	(26)
I.1 Définition des contraintes	(26)
I.2 La différence entre la commande saturante et la commande contrainte	(26)
I.3 Invariance positive et commande sous contraintes	(29)
I.4 Domaine positivement invariants de systèmes linéaires	(30)
I.5 Invariance positive des polyèdres convexes	(31)
I.5.1 Relation d'invariance positive	(31)
I.5.2 Cas des systèmes en temps continu	(32)
I.6 Fonctions du lyapunov polyédriques	(34)
I.7 Commande par retour d'état linéaire de systèmes linéaires contraints	(34)
I.7.1 Problème de régulation linéaire sous contraintes	(35)
I.7 .2 Programmation linéaire	(36)
Conclusion	(39)
Chapitre III : exemples d'application	
I. Introduction	(40)
I.1. 1^{er} exemple : commande d'un système hydraulique	(40)
I.1.1. Définition du système	(40)
I.1.2. Equations d'état	(41)
I.1.3. Détails de calculs	(41)
I.2. Simulation du système	(49)

I.2.1. Synthèse du retour d'état K on appliquant l'approche par invariance positive	(49)
I.2.2. Simulation par un placement de pôle	(50)
I.3. Interprétation des résultats obtenus	(52)
II.1.2^{ème} exemple : commande d'un circuit électrique	(52)
II.1.1. Définition du système(2)	(52)
II.2. Simulation du système (2)	(60)
II.2.1. Simulation on appliquant l'approche d'invariance positive.	(60)
II.2.2. Simulation avec un placement de pôle	(61)
II.3. Interprétation des résultats pour l'exemple2	(62)
Conclusion	(62)

Référence bibliographique.

ANNEXE 1.

Résumé :

Le projet que nous avons réalisé a porté sur l'étude de l'invariance positive de systèmes linéaires soumis à des contraintes sur l'état et / ou sur la commande. L'idée de base de cette approche est de contraindre l'état du système à évoluer dans un domaine nommé domaine positivement invariants, inclus ou égale dans le domaine défini par les contraintes. Puisque ces contraintes sont de type linéaire, elles définissent des polyèdres convexes dans l'espace d'état.

Après avoir étudié les fondements de l'approche de commande par invariance positive, nous avons appliqué cette méthode sur deux exemples : hydraulique et électrique en utilisant la boîte à outils CVX de Matlab, basée sur la technique des inégalités matricielles (LMI).

L'invariance positive d'un polyèdre convexe est caractérisée par l'existence de solutions à deux relations matricielles linéaires. Le test d'existence et le calcul d'une loi de commande par retour d'état linéaire rendant positivement invariant un polyèdre donné peut alors se faire de façon simple, par résolution d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires.

Le chapitre I est dédié aux modèles mathématiques utilisés dans ce mémoire pour représenter les systèmes linéaires dynamique ainsi que la notion de stabilité des systèmes dynamiques. Nous avons aussi traité de la théorie de Lyapunov et son application aux systèmes linéaires.

Dans le chapitre II, nous étudions le problème de synthèse d'une loi de commande prenant en compte les contraintes sur l'état et /ou sur la commande.et l'application du lemme du Farkas pour la résolution du ce type de problème.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres brièvement décrits ci-dessous :

Dans le chapitre III, nous avons traité quelques exemples aux quels nous avons appliqués les résultats tirés des théorèmes afin de rendre ces dernier stables tout en respectant les contrainte.

INTRODUCTION

GENERAL

Introduction général :

Grâce à sa simplicité et son application assez large, la modélisation par équations différentielles ou récurrentes des systèmes dynamiques a toujours été très employée dans l'analyse et la synthèse de lois de commande pour ces derniers

La prise en compte de contrainte physique et technologique dans le processus de modélisation est récente. Auparavant, on concevait les asservissements sans prendre en compte les contraintes ce qui entraînait des pertes en performances, et était incapable de garantir la stabilité du système étudié.

C'est dans ce contexte qu'on a commencé à s'intéresser à des modélisations de systèmes linéaires soumis à des contraintes sur l'état et/ou sur la commande afin d'accomplir les spécifications de performance tout en respectant les contraintes.

Une approche alternative est celle basée sur le concept d'invariance positive d'un domaine fermé de l'espace d'état qui implique que toutes les trajectoires issues de ce domaine y restent. Etant donné que les contraintes définissent en général un domaine dont la trajectoire du système ne doit pas s'échapper, une façon de garantir le respect de ces contraintes et de forcer les états initiaux du système à appartenir à un domaine positivement invariant et inclus dans le domaine de contrainte.

Des domaines positivement invariants peuvent être déduits à partir d'une fonction de Lyapunov d'un système dynamique et la forme de ces domaines dépend évidemment de la fonction de Lyapunov choisie (quadratique ou polyédrique).

Les domaines quadratiques étant inappropriés au traitement de contrainte ou de saturation, c'est pour cela qu'il est plus intéressant d'étudier les domaines positivement invariants polyédriques.

Cette théorie s'applique tout simplement à la résolution de problèmes de commande sous contraintes afin de vérifier l'existence d'une loi de commande par retour d'état linéaire qui rende positivement invariant le polyèdre défini par les contraintes .

Ce mémoire est organisé en trois chapitres brièvement décrits ci-dessous :

Le chapitre I est dédié aux modèles mathématiques utilisés dans ce mémoire pour représenter les systèmes linéaires dynamique ainsi que la notion de stabilité des systèmes dynamiques. Nous avons aussi traité de la théorie de Lyapunov et son application aux systèmes linéaires.

Dans le chapitre II, nous étudions le problème de synthèse d'une loi de commande prenant en compte les contraintes sur l'état et /ou sur la commande. et l'application du lemme du Farkas pour la résolution du ce type de problème.

Dans le chapitre III, nous avons traité quelques exemples aux quels nous avons appliqués les résultats tirés des théorèmes afin de rendre ces dernier stables tout en respectant les contrainte.

CHAPITRE I :

NOTIONS DE BASE POUR L'ETUDE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

I. Introduction :

La théorie de la commande par retour d'état permet d'élaborer des lois de commande qui apporte un certain nombre de performances au système à commander, tant en régime permanent (suivi de consigne et rejet de perturbations) qu'en régime transitoire. Elle permet aussi de simplifier la mise en œuvre de la commande.

La commande par variable d'état tient compte de la structure interne du système. Ce dernier est décrit dans le domaine temporel à l'aide d'un système d'équations différentielles du premier ordre pour les systèmes continus et par des équations récurrentes pour les systèmes discrets (échantillonnés) qui a pu être exploitée grâce au développement qu'a connu l'outil informatique.

Dans ce chapitre, on donne quelques notions nécessaires concernant la représentation d'état, ainsi que les techniques de calcul de la commande par retour d'état.

I. Principe de la représentation d'état :

I.1 Notion d'état :

La notion des variables d'état est très simple, c'est que l'état futur d'un système dépend principalement de son état présent et des signaux d'excitation ou d'entrée.

On peut définir alors, l'état d'un système à un instant t_0 comme étant l'information sur le présent nécessaire et suffisante pour déterminer l'évolution ultérieure du système pour $t > t_0$, connaissant les signaux d'entrée et l'équation du système.

I.2 Variable d'état :

On appelle variable d'état : un ensemble de fonctions du temps nécessaire et suffisante pour déterminer l'évolution de l'état du système pour $t > t_0$.

I.3 Vecteur d'état :

C'est un ensemble *minimal* de variables d'état, c'est-à-dire de grandeurs temporelles, nécessaires et suffisantes pour déterminer l'évolution future d'un système quand on connaît les équations qui décrivent le fonctionnement du système et les entrées de ce système. Dans ce qui suit, un vecteur d'état sera noté :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]^T$$

II. Etude des systèmes multivariables :

La première étape lors de la conception d'un système automatisé est la modélisation mathématique reproduisant aussi convenablement que possible le comportement du système à commander.

La classe des systèmes abordés dans ce mémoire est celle des systèmes linéaires à dimension finie, déterministe et multivariables. Cette classe de systèmes permet d'étudier un grand nombre de systèmes rencontrés en pratique. D'un autre côté, De nombreuses techniques de linéarisation et d'identification fournissent des modèles linéaires simplifiés qui nous permettent d'obtenir des résultats pratiques tout à fait satisfaisant.

La description du comportement d'un système dynamique linéaire se fait soit dans le domaine fréquentielle soit dans le domaine temporel. Ces approches sont brièvement exposées dans ce qui suit.

II.1 : Représentation fréquentielle :

La représentation fréquentielle a été introduite par Bode vers : (1940-1950) dans le cas des systèmes monovariables et étendue par la suite au cas multivariable vers la fin des années 70 du siècle dernier.

Cette représentation est basée sur la notion de la matrice de transfert ; cette dernière est une relation existant entre les signaux d'entrée et de sortie du système à l'aide de la transformé de Laplace.

Le modèle mathématique de cette représentation est le suivant :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{U}(s)$$

Avec:

- $\mathbf{Y}(s)$ représente la sortie du système.
- $\mathbf{U}(s)$ représente l'entrée du système.
- $\mathbf{G}(s)$ représente la matrice de transfert.
- s est la variable de Laplace.

II.2 : Représentation d'état :

Durant les années 1960, un autre type de modèle est introduit pour les systèmes linéaires invariants, il s'agit de décrire la dynamique du système de manière interne à partir de l'évolution d'un vecteur d'état ' \mathbf{X} ' représentatif des grandeurs intervenant dans le système.

Cette représentation se fait au travers d'une équation différentielle du 1^{er} ordre qui est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Pour un système linéaire invariant et continu, ou \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} sont des matrices à éléments constants. Dans le cas discret ou échantillonné, on a la représentation qui suit.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Avec :

- 'X' est le vecteur d'état.
- 'U' est le vecteur d'entrée ou de commande.
- 'Y' est le vecteur de sortie ou d'observation.
- 'A' est la matrice d'état ou matrice dynamique.
- 'B' est la matrice d'entrée ou de commande.
- 'C' est la matrice de sortie ou d'observation.
- 'D' est la matrice de transmission directe.

A partir d'une représentation d'état, nous pouvons retrouver la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = C (s I - A)^{-1} B + D$$

III. Définition d'une norme Euclidienne :

Soit le vecteur $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^n$ tel que : $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$

$$\Rightarrow \|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$$

IV. Définition d'une norme $\|H\|_2$:

Soit S un système stationnaire linéaire de fonction de transfert G(s). La norme H₂ de cette fonction de transfert est définie comme suit :

$$\|G\|_2 = \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G^*(j\omega)G(j\omega)) d\omega \right]^{1/2}$$

Avec G^* , la transposé conjugué de la matrice G

V. Définition de la norme $\|H\|_\infty$:

On définit la norme H_∞ de la matrice G(s) comme suit :

$$\|G\|_\infty = \sup_w |G(j\omega)|.$$

VI. Robustesse et commande robuste :

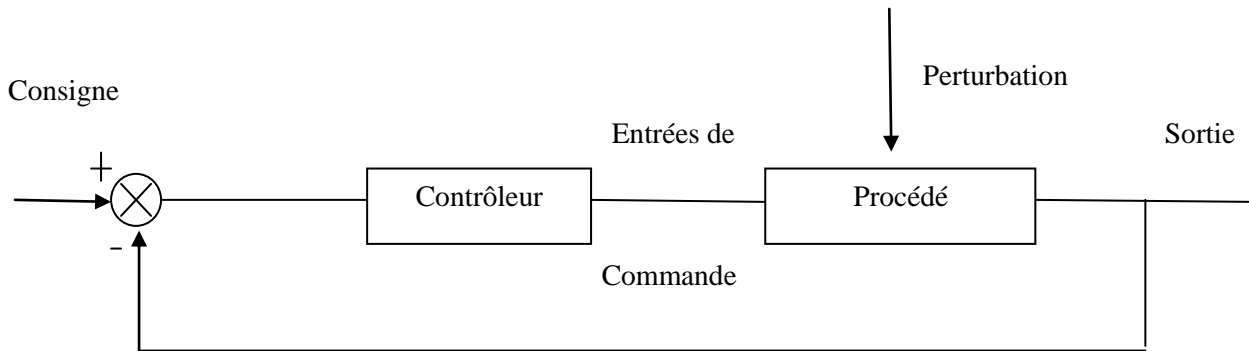


Figure I. 1 : schéma d'asservissement

Comme pour les asservissements monovariables, l'asservissement multivariable consiste à concevoir un contrôleur de telle manière que le système réponde aux objectifs fixés par le cahier des charges.

VI.1. Définition de la robustesse :

La robustesse est la capacité d'un système à maintenir ses performances, malgré des changements dans les conditions d'utilisation ou la présence de contraintes liée à ses paramètres. Autrement dit, c'est l'insensibilité ou la quasi-insensibilité de la commande aux variations paramétriques ou aux dynamiques non modélisées du procédé.

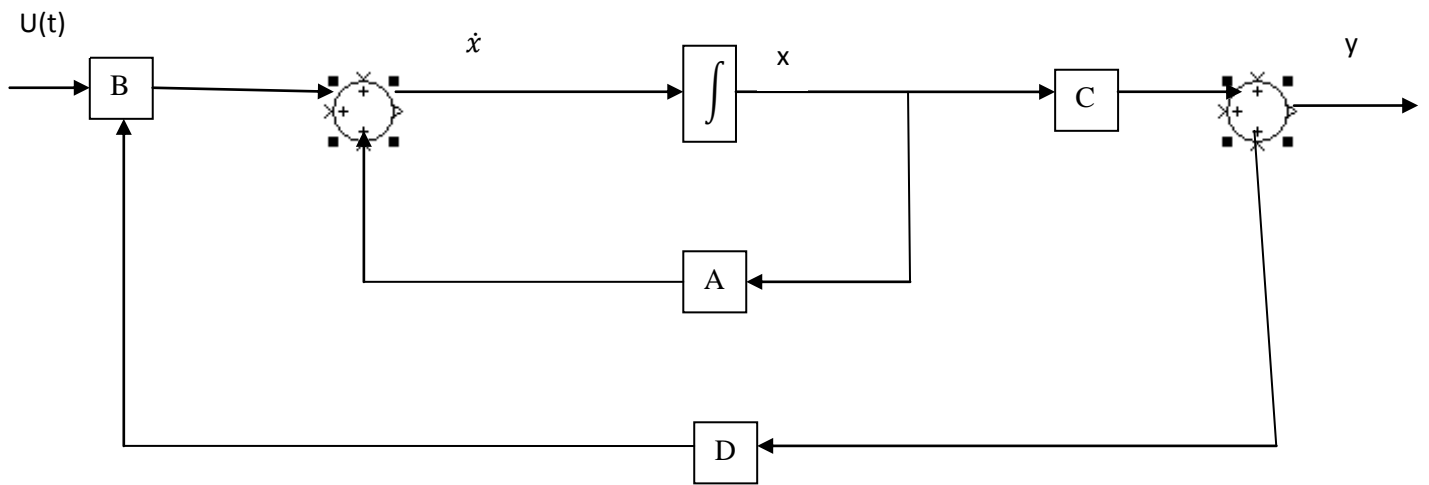


Figure I.2 : structure générale des systèmes continus

Avec :

- 'A' est la matrice d'évolution du système
- 'B' est la matrice d'application de commande
- 'D' est la matrice de transmission directe
- 'C' est la matrice d'observation
- ' $\mathbf{x}(t)$ ' est le vecteur d'état
- ' $\mathbf{u}(t)$ ' est le vecteur d'observation (sortie)

VII - Notions de stabilité : [3] [4]

Définition 1 :

Un état d'équilibre est un point X_e telle que : en l'absence de la commande et des perturbations on a :

$$X(t_0) = X_e \Leftrightarrow X(t) = X_e$$

Avec : $t \geq t_0$.

Pour un système continu :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t))$$

Les points d'équilibres sont les solutions de l'équations algébrique

$$F(x(t), u(t)) = 0$$

Un système linéaire stationnaire de la forme :

$$\dot{x}(t) = A x(t)$$

Peut avoir :

- Un point d'équilibre unique $x=0$ si 'A' est inversible
- Une infinité de points d'équilibres si 'A' n'est pas inversible

VII.1. Stabilité au sens de Lyapunov :

Considérant le système (I.2)

On dira que X_e est un point d'équilibre (ou point singulier) du système (I.2) s'il satisfait :

$$X_e = f(X_e)$$

Dans cette section et les suivantes, notre but est de caractériser et d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre X_e . Désormais, par simplicité et sans perte de généralité, nous considérons $X_e=0$ comme point d'équilibre. En effet, comme le système est autonome nous pouvons toujours translater le point d'équilibre à l'origine à partir d'un changement de variable du type :

$$\check{X}_e = X - X_e$$

Nous présentons maintenant ce qu'on appelle : la stabilité au sens du Lyapunov.

Définition 2: [4],

Le point $x=0$ pour le système **(I.2)** est :

Stable, si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(k)\| < \varepsilon, \forall k \geq 0 ; \text{ avec } \|x(0)\| \text{ est la norme euclidienne de } (x)$$

Asymptotiquement stable, s'il est stable et δ peut être choisi de façon à avoir

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

Instable, s'il n'est pas stable.

Ainsi, la notion de stabilité au sens du Lyapunov est basée sur le concept de voisinage d'un point. Rappelons que le voisinage $V(x)$ d'un point x est un ensemble contenant x dans son intérieur. Alors, d'après la Définition (2) l'origine ($x=0$) d'un système dynamique est stable si pour un voisinage quelconque de $x=0$, $V_1(0,\varepsilon)$, il existe un voisinage $V_2(0,\delta(\varepsilon))$ tel que pour toute condition initiale prise dans $V_2(0,\delta(\varepsilon))$ la trajectoire reste dans $V_1(0,\varepsilon)$. En plus, si dans le voisinage $V_1(0,\varepsilon)$ la trajectoire tend vers $x=0$, lorsque k tend vers l'infini, l'origine est dite asymptotiquement stable. D'autre part, dire que $x=0$ est instable signifie qu'il existe un

voisinage de l'origine $V_1(0, \varepsilon)$, tel que le voisinage $V_2(0, \delta(\varepsilon))$ n'est pas contenu dans $V_1(0, \varepsilon)$.

L'application directe de la définition (2) pour conclure sur la stabilité de l'origine par rapport aux trajectoires du système (I.2), suppose la connaissance explicite de celle – ci. Cependant, dans le cas général de systèmes non linéaires, la détermination des solutions analytiques du système (I.2) peut être difficile, voire impossible. Dans ce cas, on peut utiliser la notion de fonction de Lyapunov et appliquer ce que l'on appelle *la seconde méthode de Lyapunov*

VII.2. Stabilité par la seconde méthode de Lyapunov :

L'objectif de la seconde méthode de Lyapunov est d'étudier le comportement des solutions (trajectoires) au voisinage d'un point d'équilibre sans la connaissance explicite de ces dernières. Cette méthode est basée sur l'utilisation de fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés de positivité, et permet de conclure sur la stabilité d'un point équilibre par l'étude de l'évolution de telles fonctions le long des trajectoires du système.

Relativement aux systèmes du type (I.2), le théorème suivant donne des conditions pour la stabilité autour de l'origine.

Théorème I.1 : [stabilité locale] soit l'origine ($\mathbf{x}=0$) un point d'équilibre du système (I.2). Soit $V : U \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction continue et définie dans le voisinage $U \subset \mathfrak{R}^n$ de $\mathbf{x}=0$ et soit

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)).$$
 Si :

- (i) $V(0) = 0$ et $V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0, \mathbf{x} \in U$
- (ii) $\Delta V(\mathbf{x}(k)) \leq 0, \forall \mathbf{x}(k) \in U$, alors l'origine est stable.

Si de plus

(iii) $\Delta V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\}$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

Définition I.4:

Une fonction $V(x)$ définie positive satisfaisant les conditions (ii) ou (iii) du théorème (1) est appelée *fonction de Lyapunov*

Notons que le théorème (I.1) garantit la stabilité dans un sens *local*, c'est-à-dire la stabilité n'est assurée que dans un voisinage de l'origine contenu dans l'ensemble U pour lequel la fonction $V(x)$ vérifie les conditions (i) et (ii) ou (i) et (iii).

Supposons maintenant, qu'un système présente la propriété suivante : pour toute condition initiale dans l'espace d'état, i.e., $\forall x(0) \in \mathfrak{R}^n$, la convergence des trajectoires vers l'origine est garantie. Dans ce cas, la stabilité asymptotique du système est obtenue dans un sens *global*.

Définition 1.5 :

Si pour tout $x(0) \in \mathfrak{R}^n$, la trajectoire respective $\Phi(k, x(0))$ du système (I.2) converge vers l'origine quand $k \rightarrow \infty$, alors l'origine est dit *Globalement asymptotiquement stable*.

Il est donc intéressant d'établir sous quelles conditions on peut initialiser le système aussi loin que l'on veut et garantir que la trajectoire converge vers l'origine. L'idée immédiate serait d'utiliser le Théorème (1) en considérant $U \triangleq \mathfrak{R}^n$. Cependant, cela n'est pas suffisant. En fait, il est nécessaire aussi que $V(x)$ soit une fonction radialement non bornée ((ii) ci- après). Ces conditions sont exprimées dans le théorème suivant :

Théorème 2:

Soit l'origine ($x=0$) un point d'équilibre du système (I.2) et soit,

$V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction continue dans \mathfrak{R}^n . Si :

- (i) $V(0)$ et $V(x) > 0, \forall x \neq 0$,
- (ii) $\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty$,
- (iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in \mathfrak{R}^n, x(k) \neq 0$,

Alors l'origine est *globalement asymptotiquement stable*

Définition 1.6 :

Une fonction de Lyapunov $V(x)$ définie dans l'espace d'état, la surface donnée par :

$$\{x \in \mathfrak{R}^n; V(x) \leq c\}.$$

Autrement dit, la trajectoire du système (I.2) évolue vers une surface de Lyapunov intérieure $V(x) = c_1, c_1 < c$. ainsi, à mesure que le temps progresse, la surface sur laquelle est $x(k)$ se contracte vers l'origine, ce qui montre que l'état du système s'approche asymptotiquement de l'origine. Ce raisonnement est illustré par la figure suivante :

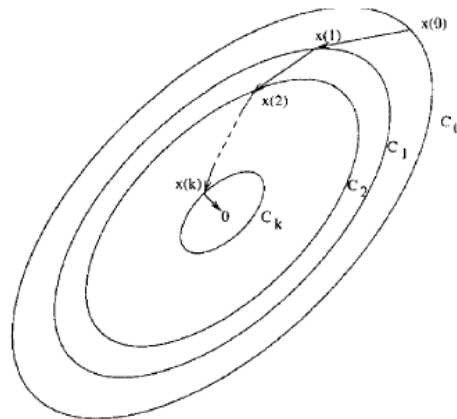


Figure I.4: Contractivité des trajectoires.

La fonction de Lyapunov est associée à une distance généralisée entre l'état du système **(I.2)** à l'instant k et l'origine. Si cette distance n'augmente pas à l'instant $k+1$ alors le système est stable. De plus, si elle diminue alors le système est asymptotiquement stable.

Il est important de remarquer que le théorème **(I.1)** fournit une condition suffisante pour la stabilité. Par conséquent, si nous ne sommes pas capables de trouver une fonction de Lyapunov nous ne pouvons rien conclure sur la stabilité de l'origine par rapport aux trajectoires du système.

La difficulté majeure de la deuxième méthode de Lyapunov réside dans le choix de la **bonne** fonction. Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour la détermination de la fonction de Lyapunov.

Dans ce cas, si l'énergie est dissipée le long des trajectoires du système, la fonction sera potentiellement une fonction de Lyapunov [4].

VII.3 Stabilité des systèmes linéaires :

Considérons maintenant un système linéaire à temps discret décrit par l'équation :

$$x(k+1) = A x(k) \tag{I.3}$$

Les états d'équilibre de ce système sont les points X_e vérifiant :

$$X_e = A X_e$$

Remarquons que l'origine est toujours un point d'équilibre du système **(I.3)**, mais ce point d'équilibre n'est pas forcément unique.

La stabilité de l'origine du système (I.3), ou tout simplement la stabilité de ce système, peut être caractérisée de deux manières :

1. A partir des valeurs propres de la matrice A.
2. A partir de l'application de la deuxième méthode de Lyapunov.

VII.3.1. Caractérisation à partir des valeurs propres de A :

Il est bien connu que la stabilité du système (I.3) est caractérisée par le spectre de la matrice A selon la définition suivante :

Définition 1.6 : le point d'équilibre $x=0$ du système (I.3) est :

- (i) **Asymptotiquement stable** si $|\lambda_i(A)| < 1, \forall i=1, \dots, n.$
- (ii) **Critiquement stable** si $|\lambda_i(A)| \leq 1 \forall i=1, \dots, n.$
- (iii) **Critiquement instable** si $|\lambda_i(A)| \geq 1 \forall i=1, \dots, n.$

Où : $\lambda_i(A)$ représente la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de A.

Remarque :

A partir de cette définition, la stabilité d'un système linéaire se caractérise par la localisation des valeurs propres de A par rapport au cercle de rayon unité du plan complexe : si toutes les valeurs propres sont sur le cercle unité, le système sera critiquement stable ou critiquement instable ; l'existence d'au moins une valeur propre en dehors du cercle caractérise l'instabilité.

VII.3.2. Caractérisation à partir des fonctions de Lyapunov :

Etant donné le système (I.3), on peut utiliser des fonctions de Lyapunov afin de caractériser sa stabilité.

Nous avons remarqué dans la section III.2 que d'une part, la détermination d'une 'bonne' fonction de Lyapunov n'est pas toujours évidente et, que d'autre part,

les conditions données par l'application des théorèmes de Lyapunov ne sont pas suffisantes. Néanmoins, dans le cas des systèmes linéaires, la stabilité implique obligatoirement l'existence d'une fonction de Lyapunov. Autrement dit, si le système est stable, il est toujours possible de déterminer des fonctions de Lyapunov particulière, à savoir : *fonctions quadratique et fonction polyédrales*.

VII.3.2.1.Fonction de Lyapunov quadratiques :

Le théorème suivant garantit l'existence de fonction de Lyapunov quadratiques pour tout système linéaire asymptotiquement stable.

Théorème :

Le point d'équilibre $x=0$ du système (1.3) est asymptotiquement stable, i.e., $|\lambda_i(A)| < 1 \forall i=1, \dots, n$, si et seulement si, pour toute matrice symétrique et définie positive Q , il existe une matrice symétrique et définie positive P solution unique de l'équation de Lyapunov :

$$A^T P A - P = -Q$$

A partir de ce théorème la fonction quadratique définie par,

$$V(x) = -x^T P x,$$

satisfait les conditions du théorème **I.1** avec

$$\Delta V(x(k)) = -x(k)^T Q x(k) < 0, \forall x(k) \in \mathcal{R}^n, x(k) \neq 0$$

Ce type de fonction est associé à des domaines de Lyapunov de type ellipsoïdal. En fait, si $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (I.3) alors les ellipsoïde

$$\varepsilon(c) = \{x \in \mathcal{R}^n; x^T P x \leq c\}, \quad c > 0,$$

sont des domaines contractifs pour ce système (la notion de contractivité sera définie au chapitre II définition(I.3.2)).

VII.3.2.2.Fonction de Lyapunov polyédrales :

Ces fonctions sont étudiées dans le chapitre II.

VIII. Commande dans l'espace d'état :

VIII.1 Principe de base pour le calcul de la de commande par retour d'état linéaire :

Le principe de la commande par retour d'état consiste à déterminer une commande U qui permet de résoudre tel ou tel problème de commande (régulation, asservissement, rejet de perturbation,.....etc.).

Lorsque cette commande est tout simplement calculée puis appliquée directement au système sans tenir compte de son état, on parle de commande en boucle ouverte.

Or, la représentation d'état permet d'utiliser non seulement la sortie du système, mais aussi des états internes de celui-ci (états mesurables et/ou observables). On parle alors de commande en boucle fermée.

La commande U permet, sous certaines conditions, de placer convenablement les pôles de la fonction de transfert du système bouclé dans le plan complexe et satisfassent des spécifications d'amortissement et de rapidité.

Les pôles de la fonction de transfert étant les valeurs propres de la matrice d'état, le but est donc de réaliser un asservissement modifiant convenablement la matrice d'état du système.

La structure générale de la commande par retour d'état statique est donnée sous la forme :

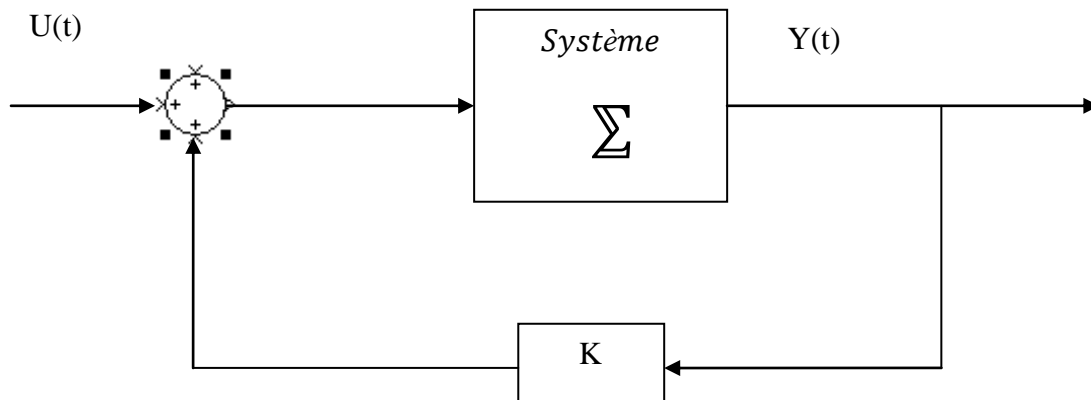


Figure I.5 : structure générale de la commande par retour d'état.

VIII.2. Commande par retour d'état pour les systèmes continus :

Soit un système linéaire continu représenté par l'équation d'état différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B U(t) \\ Y(t) = Cx(t) + D U(t) \end{cases}$$

Il est évident que pour pouvoir déplacer les pôles du système ceux-ci doivent impérativement être commandable. Comme ces pôles correspondent aux valeurs propres de la matrice système 'A', il suffit de modifier celles-ci pour déplacer les pôles du système en boucle fermée. On utilise pour cela la loi de commande :

$$U = Kx$$

Les nouveaux pôles du système sont maintenant les valeurs propres de la matrice $(A+BK)$ qui dépend de la matrice de retour d'état K .

L'objectif à atteindre est d'imposer des valeurs données aux valeurs propres de $(A+BK)$ après quoi, on calcul la matrice K .

Conclusion :

Avec le retour d'état, il est possible de modifier la dynamique du système en déplaçant simplement ses pôles. Si on veut obtenir un système rapide par exemple, il suffit de fixer les pôles aussi loin que possible de l'axe imaginaire, cela se répercute sur les valeurs propre de la matrice d'état en boucle fermée (plus on s'éloigne de l'origine plus les coefficients de retour d'état seront grands). Cela se traduit par une augmentation de l'énergie à fournir pour obtenir ce déplacement.

VIII.3. Commande par retour d'état pour les systèmes échantillonnés :

Soit le système régi par l'équation récurant suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ Y(k) = C x(k) \end{cases}$$

Si le système est commandable (la paire (A,B) est de rang plein). Tout les résultat peuvent être calculés comme pour le cas continu.

On note la différence suivante : dans le cas continu le système est stable si ses modes (valeurs propres) possèdent une partie réelle négative. Dans le cas échantillonné le système est stable si ses mode sont à l'intérieur de cercle unité.

VIII.4. La commande modale :

Elle est réalisable soit dans l'espace d'état, soit sous forme algébrique à partir des fonctions de transfert.

VIII.4.1. But et définition

On appelle commande modale la commande qui consiste à déterminer une matrice de retour d'état K telle que les valeurs propres de la matrice $(A - BK)$ soient placées en des positions préfixées $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ (valeurs complexes). L'existence d'une solution est étudiée à travers la notion de commandabilité.

IX. Commandabilité [6] [7] :

Un système est commandable si et seulement si, pour toute contrainte modale, $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ il existe un retour d'état linéaire K qui satisfait cette contrainte modale. Dans le cas d'un système monovisible (une entrée, une sortie), si le retour d'état K existe, il est unique.

Il est souvent intéressant de s'assurer de la commandabilité d'un système avant de chercher à mettre en œuvre la commande proprement dite. En d'autres termes, on demande de disposer d'une condition nécessaire et suffisante de commandabilité.

Considérons un système représenté par un vecteur d'état x , et une équation d'évolution de l'état : $\dot{x}(t) = A x(t) + B U(t)$. La question que l'on se pose est la suivante: peut-on déterminer une commande admissible transférant le système d'un état donné vers un autre ? En d'autres termes, il s'agit ici de trouver une commande U telle que le système passe d'un état initial $x(0)$ à un état final $x(t)$.

Nous avons vu que l'évolution de l'état est décrite par :

$$x(t) = e^{At} [x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau].$$

Donc :
$$e^{-At} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B U(\tau) d\tau$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, pour un système d'ordre n , $e^{-A\tau}$ ne fait intervenir que les $(n - 1)$ premières puissances de A :

$$e^{-A\tau} = v_0(t)I + v_1(t)A + v_2(t)A^2 + \dots + v_{n-1}(t)A^{n-1}$$

A et B étant fixées, le système est commandable si on peut trouver $U(\tau)$ telle que la relation soit vraie quelque soit les états initiaux et finaux $x(0)$ et $x(t)$, c'est-à-dire si aucun des termes $A^k B$ n'est lié à un autre, ce qui s'écrit :

$$Comm = [A^{n-1} B, A^{n-2} B \dots AB, B] \text{ de rang } n$$

$Comm$ est appelée matrice de commandabilité. Un système est commandable si

$$Rang(Comm) = n.$$

On définit plus généralement le degré de commandabilité d'un système comme le rang de la matrice de commandabilité. Si $rang(Comm) < n$, alors le système est partiellement commandable.

Dans le cas d'un système partiellement commandable, l'idée consiste à rendre la partie non commandable du système inopérante afin de le contrôler entièrement via sa partie commandable.

IX.1. Calcul de la commande dans le cas d'un système sous forme compagne pour la commande

Sous la forme compagne pour la commande, les matrices A et B ont des formes très particulières:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où le système de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_0 + l_0 = a'_0 \\ a_1 + l_1 = a'_1 \\ \dots \\ a_{n-1} + l_{n-1} = a'_{n-1} \end{cases}$$

qui permet de déduire très simplement le retour d'état $K = [l_0 \ l_1 \ l_2 \ \dots \ l_{n-1}]$

IX.2. Calcul de la commande dans le cas général :

Dans le cas général, le retour d'état peut modifier notablement la forme de la matrice d'état et le calcul n'est pas aussi simple que dans le cas de la forme compagne pour la commande. Les étapes du calcul de la commande sont alors les suivantes :

1. Calcul de la matrice $(A - BK)$
2. Calcul du polynôme caractéristique de $(A - BK)$. Il vaut $\det(pI - (A - BK))$.
3. Identification du polynôme caractéristique de $(A - BK)$ avec le dénominateur de la fonction de transfert de la boucle fermée : $\det(pI - (A - BK)) = (p - \lambda_0)(p - \lambda_1) \dots (p - \lambda_{n-1})$, où $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ sont les pôles que l'on veut imposer.

Par rapport au cas de la forme compagne pour la commande, il a été ajouté une étape de calcul du polynôme caractéristique de la matrice d'état du système bouclé $\det(pI - (A - BK))$.

Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons exposé un rapide aperçu des résultats relatifs à la stabilité des systèmes dynamiques linéaires.

Dans un premier temps nous avons rappelé les différentes notions concernant la représentation d'états, ainsi que la théorie du Lyapunov concernant la stabilité, ensuite nous avons présenté quelques résultats classiques relatifs à la stabilité des systèmes linéaires. En particulier quand un système linéaire est stable il est toujours possible de déterminer une fonction de Lyapunov soit quadratique, soit polyédrale.

Ces résultats et définitions serviront ainsi de base, directement ou indirectement, pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires soumis à des contraintes sur la commande et/ou sur le vecteur d'état qui sera menée dans le chapitre II.

CHAPITRE II :

**LES SYSTEMES LINEAIRES
A COMMANDE
CONTRAINTE**

I. Introduction :

Dans ce chapitre, nous faisons un tour d'horizon des principaux résultats concernant l'approche par invariance positive des problèmes de commande de systèmes linéaires sous contraintes. Les relations d'invariances positives sont ainsi présentées pour le cas discret et continu. Nous présentons ensuite quelques approches développées pour la commande de systèmes contraints, ayant les relations d'invariance positive comme base. Une étude plus approfondie est alors menée sur la propriété d'invariance positive de polyèdres. Nous obtenons en particulier des conditions structurelles pour l'existence de loi de commande par retour d'état linéaire rendant positivement invariant un polyèdre borné par rapport aux évolutions d'un système linéaire donnée.

I.1 Définition des contraintes :

Les contraintes correspondent en général à des limitations physiques du domaine de variation de certaines variables. Ainsi, les contraintes font partie intégrante du modèle du système.

I.2. La différence entre la commande saturante et la commande contrainte : [1],[3]

Nous devons faire la distinction entre commande saturante et commande contrainte. Nous allons essayer de les spécifier en prenant par exemple un système linéaire continu ($\dot{X}=AX+BU$) que nous supposons commandé par retour d'état

$$U=K X$$

Où K est une matrice de retour d'état donnée si aucune contrainte d'amplitude n'affecte les états et/ou la commande, le système en boucle fermé prend la forme classique :

$$\dot{X} = (A+BK) \tag{II.1}$$

La stabilité de ce système est alors caractérisée de façon classique par les valeurs propres de la matrice $(A + BK)$

Supposant maintenant que chaque composante U_i de la commande U est soumise à des contraintes d'amplitude.

$$U_{i \min} \leq U_i \leq U_{i \max}$$

La loi de commande effectivement appliquée au système en boucle fermée est alors :

$$U = \text{sat}(KX) = \text{sat} \begin{bmatrix} K_1 X \\ \vdots \\ K_m X \end{bmatrix}$$

Le système en boucle fermée s'écrit (régulateur saturé).

$$\dot{X} = AX + B \text{sat}(KX) \tag{II.2}$$

La nature non linéaire de la fonction de saturation implique que le système obtenu est non linéaire.

Si nous définissons *la région de linéarité* de ce système comme l'ensemble des états pour les quels les commandes ne sont pas saturées c'est-à-dire l'ensemble :

$$\left\{ X : U_{i \min} \leq K_i x \leq U_{i \max} \quad i=1, \dots, m \right\}$$

Alors nous pouvons dire que le système non linéaire (II.2) admet localement dans cette région le modèle linéaire (II.1).

Nous pouvons alors distinguer deux cas :

☑ La loi de commande est conçu de telle sorte que l'état du système ne quitte jamais la région de linéarité par conséquent la commande du système ne sature jamais et le modèle linéaire (II.1) reste valide localement pour le système (II.2) ;
On parle alors de loi de *commande contrainte*

☑ La loi de commande n'est pas conçue de telle sorte que l'état du système reste dans la région de linéarité ; donc la commande du système peut saturer et seul le modèle non linéaire (II.2) est valide.
On parle alors de la loi de *commande saturante*.

Le graphe représenté ci-dessous interprète la notion cité précédemment :

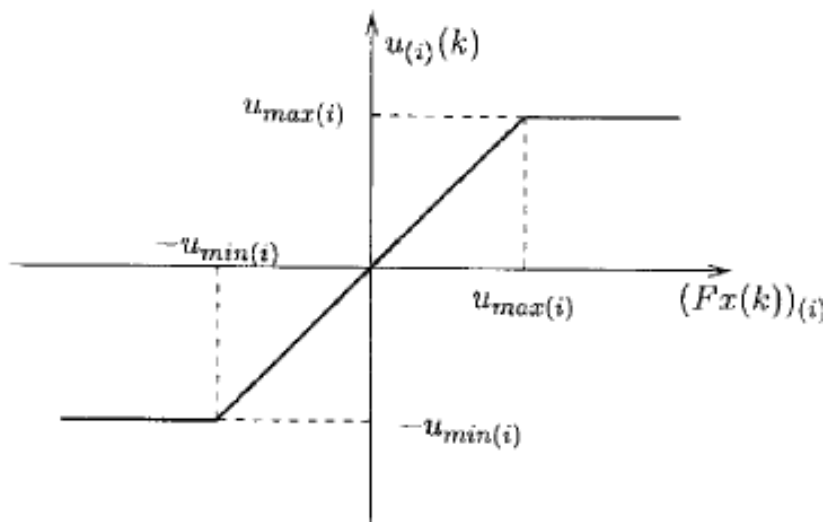


Figure II.1 : Saturation de la commande

I.3 Invariance positive et commande sous contraintes [4],[5],[10],[11]:

Avant d'introduire le concept d'invariance positive, rappelant quelques notions de base sur les ensembles

Soit un système dynamique, en temps discret, décrit par :

$$X_{k+1} = f(x_k) \quad (II.3)$$

Où $k \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état.

L'invariance positive d'un domaine non vide fermé Ω , relativement à (II.3) est définie ainsi :

I.3.1 Définition :

Un domaine non vide fermé $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un domaine **positivement invariant** du système (II.3) si pour tout état initial $x_0 \in \Omega$, la trajectoire du vecteur de variables d'état reste dans Ω .

L'invariance positive de Ω équivaut à la condition :

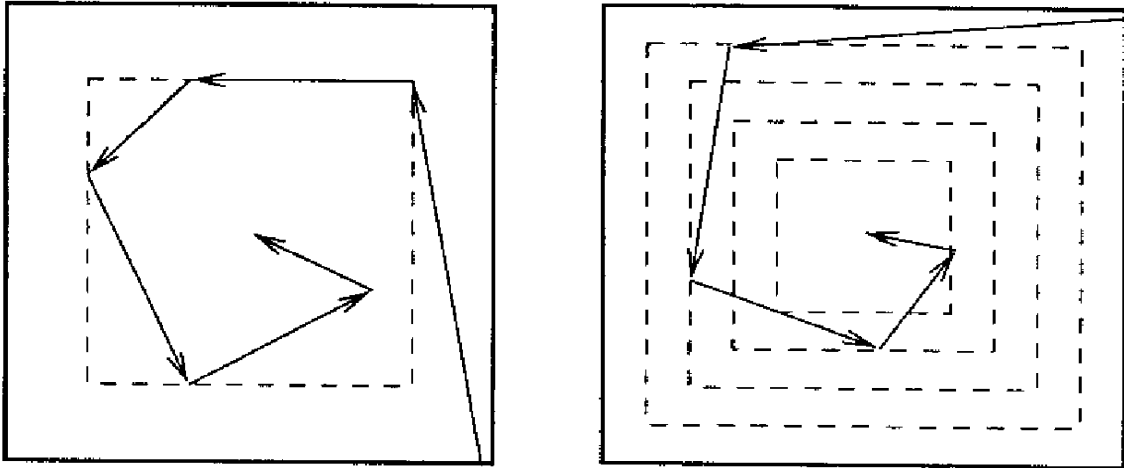
$$X_k \in \Omega \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x_0 \in \Omega$$

Soit $\lambda\Omega$ l'ensemble de tous les vecteurs λx , $x \in \Omega$. Une propriété plus forte que l'invariance positive, définie uniquement pour les ensembles compacts, est définie comme suit :

I.3.2 Définition :

L'ensemble est dit contractif pour le système s'il existe un réel positif $\lambda < 1$ tel que si $x(k) \in \Omega$ alors $x(k+1) \in \lambda\Omega$.

Les concepts d'ensemble positivement invariant et contractif sont liés au concept de *domaines de stabilité* d'un système dynamique comme le montre la figure suivante :



Figure(II.2) : (a) Invariance positive

(b): contractivité

I.4 Domaine positivement invariants de systèmes linéaires :

Soit le système linéaire, en temps discret, invariant dans le temps, décrit par :

$$X_{k+1} = A x_k \quad (II.4)$$

Où $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$

Le concept d'invariance positive est fortement lié à celui de *fonction de Lyapunov*, définie précédemment (définition (I.4) du chapitre 1) c'est-à-dire : si on considère le domaine de l'espace d'état $F(V, \alpha)$, associé à la fonction du Lyapunov $V(x)$, défini par :

$$F(V, \alpha) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n ; V(x) \leq \alpha, \alpha > 0\}$$

Alors, à partir de la définition de la fonction de Lyapunov, on peut voir que pour toute valeur $\alpha > 0$, $F(V, \alpha)$ est un domaine positivement invariant par rapport à (II.4)

I.4.2 Définition :

Un polyèdre est dit convexe si tout point de tout segment joignant deux points quelconques du polyèdre appartient au polyèdre. Autrement dit, un polyèdre est convexe si toutes ses diagonales sont entièrement contenues dans son intérieur.

I.5 Invariance positive des polyèdres convexes : [11], [4], [5]

I.5.1 Relation d'invariance positive :

Nous allons nous intéresser à commander des systèmes soumis à des contraintes linéaire sur le vecteur d'état, décrites par :

$$Qx \leq \mu, \text{ avec } Q \in \mathbb{R}^{g \times n}. \text{ et } \mu \in \mathbb{R}^g$$

Ces conditions définissent dans l'espace d'état le polyèdre convexe suivant :

$$R [Q, \mu] = \{x \in \mathbb{R}^n ; Qx \leq \mu\} \quad (II.5)$$

Si $\mu \geq 0$ alors le polyèdre $R [Q, \mu]$ contient l'origine. L'invariance positive de $R [Q, \mu]$ relativement à (II.4) peut être caractérisée comme suit :

I.5.1.1 Proposition :

Le polyèdre $R [Q, \mu]$ est un domaine positivement invariant du système (II.4) si et seulement s'il existe une matrice à éléments non négative $H (H_{ij} \geq 0)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} HQ = QA \\ H\mu \leq \mu \end{array} \right. \quad (II.6)$$

$$(II.7)$$

Preuve : La preuve de cette proposition s'obtient en appliquant directement le Lemme de Farkas étendu.(Annexe 2).

I.5.1.2 Définition :

Une matrice non négative est une matrice dont tous les éléments sont positifs ou nuls.

Supposons à présent que la trajectoire du vecteur d'état soit soumise aux contraintes symétriques par rapport à l'origine : $|Qx| \leq \mu$, avec $\mu \geq 0$. Ces contraintes définissent le polyèdre convexe symétrique :

$$S(Q, \mu) = \{x ; |Qx| \leq \mu\}.$$

I.5.1.3. Corollaire :

Le polyèdre $S(Q, \mu)$ est positivement invariant par rapport au système (II.4) si et seulement s'il existe une matrice H telle que :

$$HQ = QA \tag{II.8}$$

$$|H|\mu \leq \mu \tag{II.9}$$

Avec $|H|$ est la matrice des valeurs absolues des éléments de la matrice H

I.5.2 Cas des systèmes en temps continu :

Soit le système linéaire, en temps continu, invariant dans le temps, décrit par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{II.14}$$

Où $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de variable d'état.

Un domaine positivement invariant pour ce type de système est défini de la même façon que pour le cas discret. Des conditions pour qu'un polyèdre convexe R $[Q, \mu]$ soit positivement invariant sont maintenant données par le résultat suivant :

I.5.2.Proposition :

Le polyèdre $R [Q, \mu]$ est un domaine positivement invariant du système (II.14) si et seulement s'il existe une matrice H telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} HQ = QA \quad (II.15) \\ H\mu \leq 0 \quad (II.16) \\ H_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j \quad (II.17) \end{array} \right.$$

Une matrice qui vérifie la condition (II.17) est appelé *matrice essentiellement non négative*.

Des relations d'invariance positive spécialisées à des polyèdres symétriques $S(Q, \mu)$ peuvent également être obtenues dans le cas continu.

I.5.2.Corolaire :

Le polyèdre $S(Q, \mu)$ est positivement invariant par rapport au système (II.14) si et seulement s'il existe des matrice H^+ , H^- telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (H^+ - H^-)Q = QA \quad (II.22) \\ (H^+ - H^-)\mu \leq 0 \quad (II.23) \\ H_{ij}^+ \geq 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (II.24) \\ H^- \geq 0 \quad (II.25) \end{array} \right.$$

I.6 Fonctions de Lyapunov polyédriques [5] :

L'invariance positive du polyèdre $R [Q, \mu]$ est équivalente à la non croissance au long des trajectoires du système (II.4), ou (II.14), de la fonction scalaire :

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{Q_i}{\mu_i} x(k) \right\}.$$

L'invariance positive de $R [Q, \mu]$, implique, dans le cas d'un polyèdre compact, que $\Psi(x)$ est une fonction de Lyapunov polyédrique du système (II.4) ou (II.14).

I.7 Commande par retour d'état linéaire de systèmes linéaires contraints :

Considérons un système modélisé par le système d'équations linéaires aux différences suivantes,

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) \quad (II.26)$$

Dans un premier temps nous considérons que seule le vecteur des variables d'état est soumis à des contraintes linéaires du type : $x_k \in R [Q, \mu]$.

La paire (A, B) est supposée commandable. Rappelant que dans notre cas le critère du rang de la matrice de commandabilité est juste nécessaire.

Si l'on utilise une loi linéaire de commande par retour d'état statique :

$$U(k) = K.X(k),$$

Le système en boucle fermée est donné par

$$X(k+1) = (A + BK) X(k) \quad (II.27)$$

I.7.1 Problème de régulation linéaire sous contraintes :

Le problème à étudier ici est le suivant :

Etant donné un domaine d'état initiaux admissibles, X_0 , calculer une matrice K telle que pour tout état initial $x_0 \in X_0$, la trajectoire du vecteur d'état soit amenée asymptotiquement à l'origine, tout en respectant la contrainte $X_k \in R[Q, \mu], \forall k \in \mathbb{N}$.

Le problème de régulation linéaire sous contrainte peut être résolu en imposant l'invariance positive en boucle fermée de $R[Q, \mu]$ et la stabilité asymptotique du système (II.27).

Dans le cas de système linéaire et invariant, le problème est résolu par un choix de fonction de Lyapunov non quadratique. En outre, il est bien connu dans la théorie de la commande que la stabilité d'un système revient à vérifier l'invariance positive de l'ensemble défini par la fonction de Lyapunov. De plus, il a été montré que la stabilité asymptotique revient à vérifier la contractivité de l'ensemble choisi par rapport au modèle décrivant le système.

Lorsqu'on cherche à stabiliser un système, les fonctions de Lyapunov qu'on choisit sont généralement de type ellipsoïdal, or les contraintes sur l'état et/ou sur la commande sont généralement définies par des ensembles de type polyédriques. Le choix d'une fonction de Lyapunov polyédral pour des systèmes soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande s'avère ainsi judicieux.

Il est en outre important pour la performance du système commandé que la vitesse de convergence de l'état vers l'équilibre soit aussi grande que possible. Une mesure de cette vitesse peut alors être utilisée comme fonction objectif à optimiser. La solution du problème de régulation linéaire sous contrainte peut être obtenue à partir du programme linéaire (PL)

$$\min_{K,H} \lambda$$

$$\text{Sous } HQ = Q(A + BK) \quad (II.29)$$

$$H\mu - \lambda\mu \leq 0 \quad (II.30)$$

$$H \geq 0$$

Alors, si la solution à ce Problème Linéaire est telle que $\lambda < 1$, le polyèdre symétrique compact $S(Q, \mu)$ est positivement invariant et le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

En revanche, lorsque $\text{rang}(Q) < n$, le polyèdre $R(Q, \mu)$ possède des directions infinies.

Dans ce cas, l'invariance positive n'implique pas la stabilité en boucle fermée. D'autre part, la condition (II.29) ne peut pas être vérifiée ni pour toute paire (A, B) ni pour tout domaine $R(Q, \mu)$.

I.7.2 Programmation linéaire :

Un autre type de problème traité, est de considérer $D_0 = R(Q, \mu)$. dans ce cas il s'agit de déterminer une matrice K telle que la matrice $(A+BK)$ soit stable et admet $R(Q, \mu)$ comme polyèdre invariant. Puisque les relations (II.29) et (II.30) sont linéaires en H et K si Q est donné, on peut les considérer comme contraintes dans un programme linéaire. Dans ce cas il suffit d'ajouter aussi une contrainte, qui s'écrit sous une forme linéaire, garantissant l'inclusion de

$$R(Q, \mu) \subseteq R(K, U_{min}, U_{max})$$

D'une manière générale le problème de programmation linéaire se pose de la façon suivante :

Min λ

Sous

(i) $H \cdot Q = Q \cdot (A+BK)$

(ii) $H\mu \leq \lambda \mu$

(iii) $\begin{bmatrix} K \\ -K \end{bmatrix} = V \cdot Q$

(iv) $V \cdot \mu \leq \begin{bmatrix} U_{max} \\ U_{min} \end{bmatrix}$

(v) $0 < \lambda \leq 1$

Avec H et $V=[D \ D']^t$ étant des matrices à éléments non-négatifs. Les contraintes (iii)-(iv) représente l'inclusion $R(Q, \mu) \subseteq R(K, U_{\min}, U_{\max})$. Cette formulation a été proposée à partir de l'application directe du lemme de Farkas étendu, proposé prochainement (dans l'annexe); la minimisation de ε implique la minimisation de rayon spectral de $(A+BK)$ et, par conséquent, la maximisation de la vitesse de convergence des trajectoires du système (II.27) vers l'origine.

En conclusion, tout ce qui a été défini dans ce chapitre peut être résumé comme :

Le système est soumis à des contraintes sur l'état données par le polyèdre

$$R(Q, \mu) = \{X / QX \leq \mu\}.$$

Le vecteur de commande est soumis aux contraintes,

$$U_{\min} \leq u(k) \leq U_{\max}:$$

En remplaçant $u(k)$ par sa valeur, on obtient

$$U_{\min} \leq K.X(k) \leq U_{\max}$$

Qui équivaut à :

$$\begin{cases} K.X(k) \leq U_{\max} \\ -K.X(k) \leq -U_{\min} \end{cases}$$

Les contraintes sur la commande définissent ainsi un domaine polyédral $P(L, v)$ tel que

$$P(L, v) = \{X, LX \leq v\}$$

Avec :

$$L = \begin{pmatrix} K \\ -K \end{pmatrix}$$

Et

$$v = \begin{pmatrix} Umax \\ -Umin \end{pmatrix}$$

I.8 Proposition [2] : Le polyèdre $R(Q, \mu)$ est positivement invariant pour le système (II.27)

si et seulement si, il existe une matrice H , avec des éléments non-négatifs, tel que les conditions suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} H.Q = Q.(A + BK) \\ H.\mu \leq \mu \end{cases}$$

I.9 Proposition :

Les contraintes sur le vecteur de commande sont satisfaites si et seulement si, il existe deux matrices D et D' , avec des éléments non-négatifs, tel que les relations suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} D.Q = K \\ D.\mu \leq Umax \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D'.Q = -K \\ D'.\mu \leq -Umin \end{cases}$$

Conclusion :

L'idée de ce chapitre consiste à définir les différents travaux portant sur l'invariance positive de polyèdres convexes et son application à la commande de systèmes linéaire sous contraintes,

Notre objectif dans ce chapitre est d'explorer la possibilité de rendre positivement invariant, par un retour d'état linéaire, un polyèdre en tenant compte des contraintes, puis étendre ces différents résultats à l'étude des ensembles de type $R(Q,\mu)$, construits à partir des contraintes associées au système, après avoir déterminé les conditions d'invariance et de stabilité pour les ensembles de type $R(Q,\mu)$, nous nous sommes intéressés à des propriétés plus particulières, c'est-à-dire sa contractivité.

CHAPITRE III
EXEMPLES
D'APPLICATION

I. Introduction :

Dans ce chapitre nous allons traiter quelques exemples dans lesquels nous allons appliquer les différents résultats et théorèmes trouvés auparavant afin de montrer leur utilité lors de la commande d'un système linéaire dynamique soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande, puis grâce au logiciel MATLAB, simuler et interpréter les différents résultats obtenus.

I.1.1^{er} exemple : commande d'un système hydraulique :

I.1.1. Définition du système(1) :

On considère un système hydraulique constitué de trois réservoirs cylindriques notés R1, R2 et R3, de sections respectives S1, S2 et S3. On appelle h1, h2 et h3 les hauteurs de liquide dans chacun des réservoirs R1, R2 et R3. Trois vannes de remplissage de débit alimentent les réservoirs R1, R2, R3, il existe une fuite dont le débit V_i est proportionnel à la hauteur de liquide dans le réservoir :

$$V_i = a_i h_i \quad (i = 1, 2 \text{ ou } 3).$$

Les réservoirs sont reliés entre eux comme l'indique la figure III.1. Le débit dans le tuyau reliant Ri à Rj est proportionnel à la différence des hauteurs de liquide :

$$W_{i j} = b_{i j} (h_i - h_j) \text{ de } R_i \text{ vers } R_j \text{ si } h_i > h_j.$$

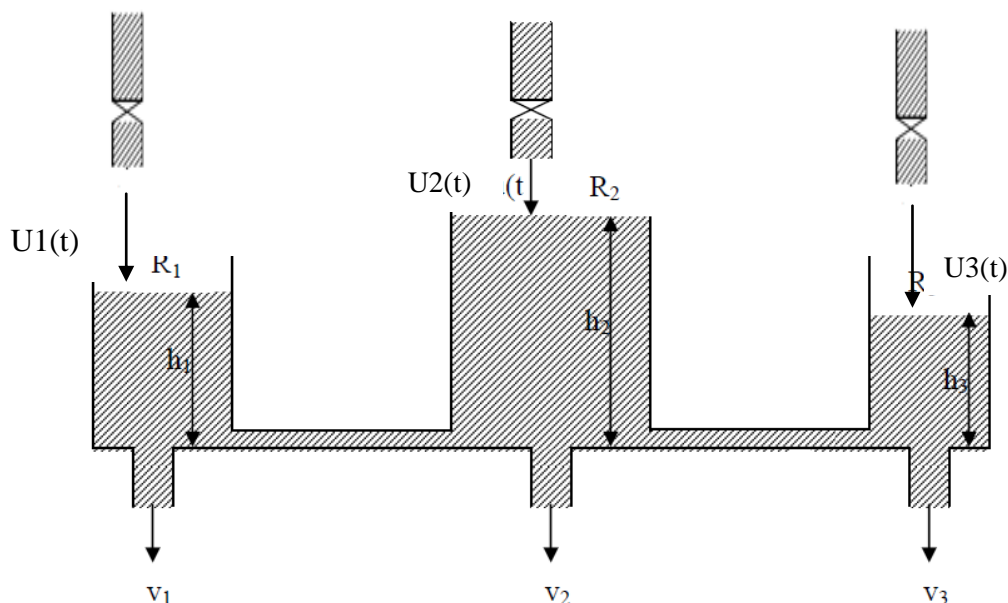


Figure III.1 : le système hydraulique

I.1.2. Equations d'état :

Pour l'étude dynamique, le système est mis en équation liant toutes les trajectoires, et représenté par les équations d'état suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases}$$

Avec :

$$x = [h_1(t) \quad h_2(t) \quad h_3(t)]^T$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

I.1.3. Détails de calculs :

Afin d'appliquer les résultats sur le système, il faut transformer ces équations d'états continues en équations échantillonnées.

La transformation par MATLAB pour une période d'échantillonnage $T=1s$ a donné les résultats suivants :

`sysc=ss(A,B,C,0);`

`sysd=c2d(sysc,0.001);`

`[Ae Be Ce De]=dssdata(sysd);`

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.1185 & 0.0903 & 0.0688 \\ 0.1806 & 0.1873 & 0.1806 \\ 0.0688 & 0.0903 & 0.1185 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

`Ce=[0 1 0];`

Les contraintes à imposer sur l'état du système sont :

$$0 \leq h_1(t) \leq 10$$

$$0 \leq h_2(t) \leq 10$$

$$0 \leq h_3(t) \leq 10$$

La contrainte sur la commande est tel que :

$$0 \leq U_1 \leq 5$$

$$0 \leq U_2 \leq 5$$

$$0 \leq U_3 \leq 5$$

D'où nous déduisons la matrice Q et μ tel que :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 149.0000 \\ 148.5000 \\ 148.0000 \\ 1.0000 \\ 1.5000 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$$

Dans un premier temps nous devons traiter le problème d'invariance positive du polyèdre défini par la contrainte appliquée sur l'état afin de déterminer la matrice de retour d'état K ; ce qui revient à trouver une matrice H (non négative) et une matrice de retour d'état F , tel que les conditions suivantes soient vérifiées.

$$\begin{cases} HQ = QA + QBF \\ H\mu \leq \mu \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Après exécution de l'algorithme par MATLAB, nous avons obtenu :

$$H = \begin{pmatrix} 0.3144 & 0.2862 & 0.2665 & 0.1692 & 0.1778 & 0.1857 \\ 0.2927 & 0.2909 & 0.2786 & 0.0916 & 0.0917 & 0.0928 \\ 0.2495 & 0.2572 & 0.2705 & 0.1545 & 0.1518 & 0.1479 \\ 0.0127 & 0.0128 & 0.0132 & 0.1579 & 0.1212 & 0.0940 \\ 0.0149 & 0.0147 & 0.0146 & 0.2160 & 0.2139 & 0.2004 \\ 0.0422 & 0.0413 & 0.0402 & 0.1371 & 0.1467 & 0.1628 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.0267 & 0.0181 & 0.0120 \\ 0.0205 & 0.0119 & 0.0052 \\ 0.0262 & 0.0151 & 0.0041 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.1484 & 0.1430 & 0.1394 & 0.1217 & 0.1249 & 0.1274 \\ 0.1449 & 0.1398 & 0.1361 & 0.1244 & 0.1280 & 0.1310 \\ 0.1183 & 0.1114 & 0.1051 & 0.0921 & 0.0963 & 0.1011 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0.0142 & 0.0154 & 0.0167 & 0.0409 & 0.0335 & 0.0286 \\ 0.0165 & 0.0185 & 0.0207 & 0.0370 & 0.0304 & 0.0259 \\ 0.0426 & 0.0459 & 0.0503 & 0.0687 & 0.0610 & 0.0543 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Pour résoudre nos équations matricielle linéaire(LMI) déduites du Lemme de Farkas, nous avons installé sur MATLAB un outil de calcul appelé CVX : Le cvx est un outil de résolution de programmes convexes.

Le cvx peut résoudre des problèmes standards tels que les programmes linéaires (PL), programmes quadratiques (PQ).

Vérification du résultat :

H.Q = Q.A+Q.B.K :

$$H.Q = \begin{pmatrix} 0.1452 & 0.1084 & 0.0808 \\ 0.2011 & 0.1992 & 0.1858 \\ 0.0950 & 0.1054 & 0.1226 \\ -0.1452 & -0.1084 & -0.0808 \\ -0.2011 & -0.1992 & -0.1858 \\ -0.0950 & -0.1054 & -0.1226 \end{pmatrix}$$

$$Q.A+Q.B.K = \begin{pmatrix} 0.1452 & 0.1084 & 0.0808 \\ 0.2011 & 0.1992 & 0.1858 \\ 0.0950 & 0.1054 & 0.1226 \\ -0.1452 & -0.1084 & -0.0808 \\ -0.2011 & -0.1992 & -0.1858 \\ -0.0950 & -0.1054 & -0.1226 \end{pmatrix}$$

$$H.\mu = \begin{pmatrix} 8.2009 \\ 7.7506 \\ 7.2735 \\ 0.8566 \\ 1.3137 \\ 1.7351 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 9.0000 \\ 8.5000 \\ 8.0000 \\ 1.0000 \\ 1.5000 \\ 2.0000 \end{pmatrix}$$

Les conditions $H.Q = Q.A+Q.B.K =$ et $H.\mu \leq \mu$ sont vérifiées. Alors K est une solution au problème

Mais il faut que la contrainte sur la commande soit toujours respectée c'est-à-dire il faut que la commande soit toujours dans l'intervalle $[5 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0]^t$. Pour cela, nous devons vérifier ce qui suit.

$$\begin{cases} D.Q+D'.Q=0; \\ U.\mu \leq b \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Vérification si $D.Q+D'.Q=0$;

$$D.Q = \begin{pmatrix} 0.0267 & 0.0181 & 0.0120 \\ 0.0205 & 0.0119 & 0.0052 \\ 0.0262 & 0.0151 & 0.0041 \end{pmatrix}$$

$$D'.Q = \begin{pmatrix} -0.0267 & -0.0181 & -0.0120 \\ -0.0205 & -0.0119 & -0.0052 \\ -0.0262 & -0.0151 & -0.0041 \end{pmatrix}$$

$$U.\mu = \begin{pmatrix} 4.2303 \\ 4.1601 \\ 3.2911 \\ 0.5407 \\ 0.6063 \\ 1.4443 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4.3916 \\ 4.3228 \end{pmatrix}$$

$b =$ 3.4413
 0.6084
 0.6772
 1.5587

Les conditions sont vérifiées ce qui implique le respect de la contrainte sur la commande.

La dernière chose à vérifier est la *stabilité asymptotique* du système :

Il a été prouvé auparavant dans l'étude théorique que la stabilité asymptotique d'un système évoluant dans un polyèdre est garantie si et seulement si le polyèdre est contractif par rapport aux évolutions du système (définition (?) du chapitre 1) .cela revient à trouver un λ , $0 \leq \lambda < 1$, tel que

$$\begin{cases} H.Q = Q.(A+BK) \\ H.\mu - \lambda .\mu \leq 0 \end{cases} \quad (III.3)$$

Vérification si $H.\mu - \lambda .\mu \leq 0$

$$H.\mu - \lambda .\mu = \begin{pmatrix} -0.1875 \\ -0.1718 \\ -0.1828 \\ -0.0754 \\ -0.0843 \\ -0.1290 \end{pmatrix} \leq 0$$

Donc on a bien

$$H^* \mu - \lambda * \mu \leq 0$$

Comme les conditions (2) et (3) sont vérifiées alors la fonction $\Psi(x)$
 $= \max_i \left\{ \frac{Q_i}{\mu_i} x(k) \right\}$. Est une fonction de Lyapunov strictement décroissante du système
 (II.27)

I.2.Simulation du système :

I.2.1.Synthèse du retour d'état K on appliquant l'approche par invariance positive :

Après application du lemme de Farkas et simulation du programme linéaire associé à ce dernier nous avons obtenus les courbes suivantes :

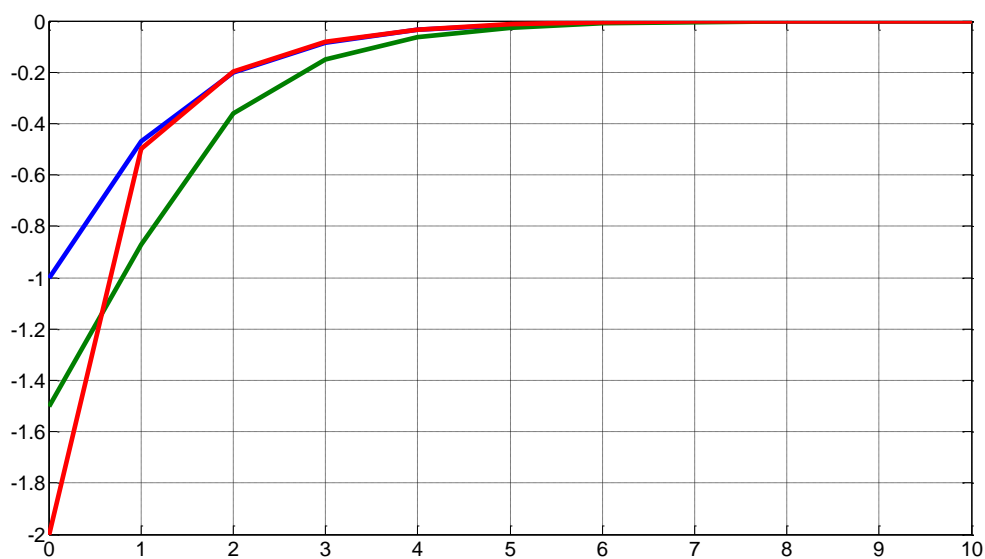


Figure III.2 : Evolution du vecteur commande à l'application de l'approche invariance positive

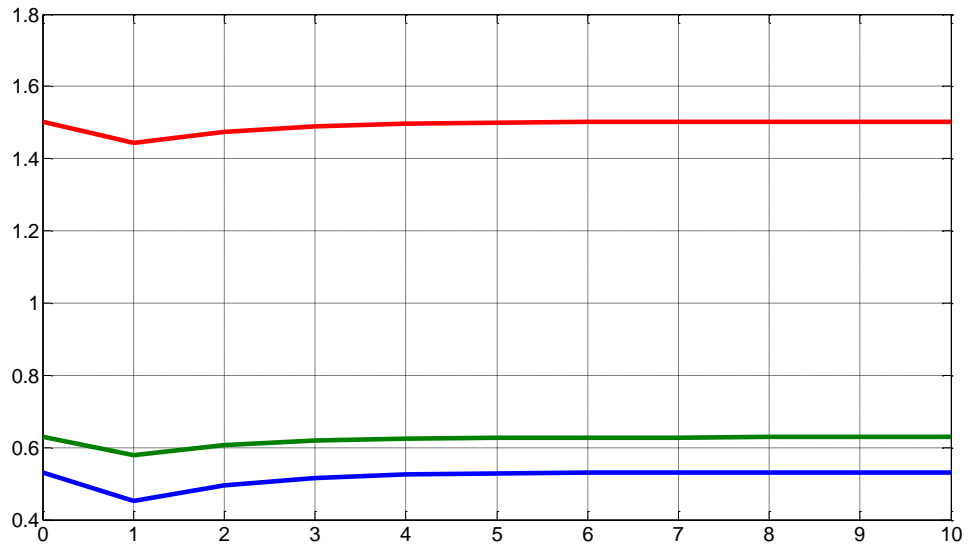


Figure III.3 : Evolution de l'entrée $u(t)$

I.2.2. Synthèse d'un retour d'état par placement de pôle :

Nous avons choisi un pôle $p = [-0.5 \ -0.55 \ -0.6]^T$ et en simulant le système nous avons obtenus une matrice de retour d'état K tel que :

$$K = \begin{bmatrix} 0.6185 & 0.0903 & 0.0688 \\ 0.1806 & 0.7373 & 0.1806 \\ 0.0688 & 0.0903 & 0.7185 \end{bmatrix}$$

Et les figures suivantes :

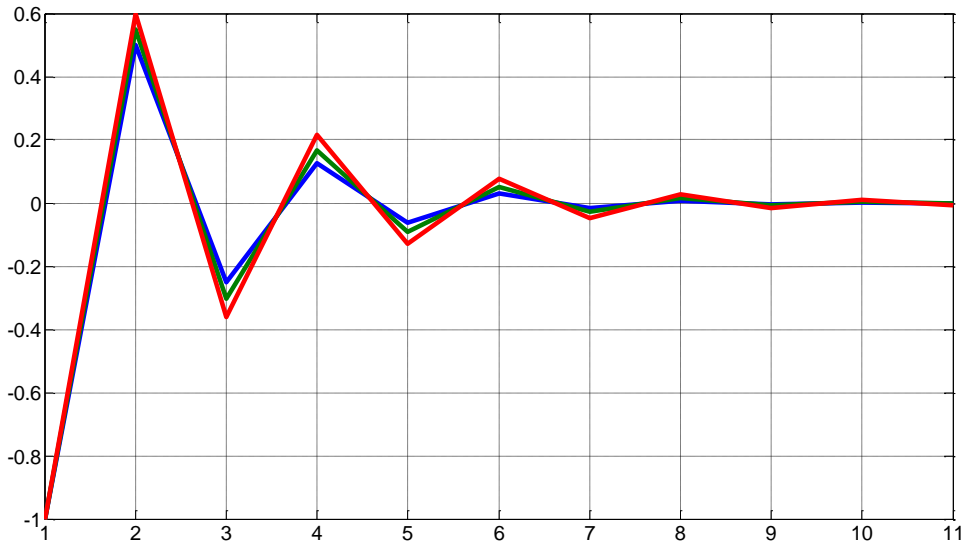


Figure III.4 : évolution du vecteur d'état à l'application du pôle P_1

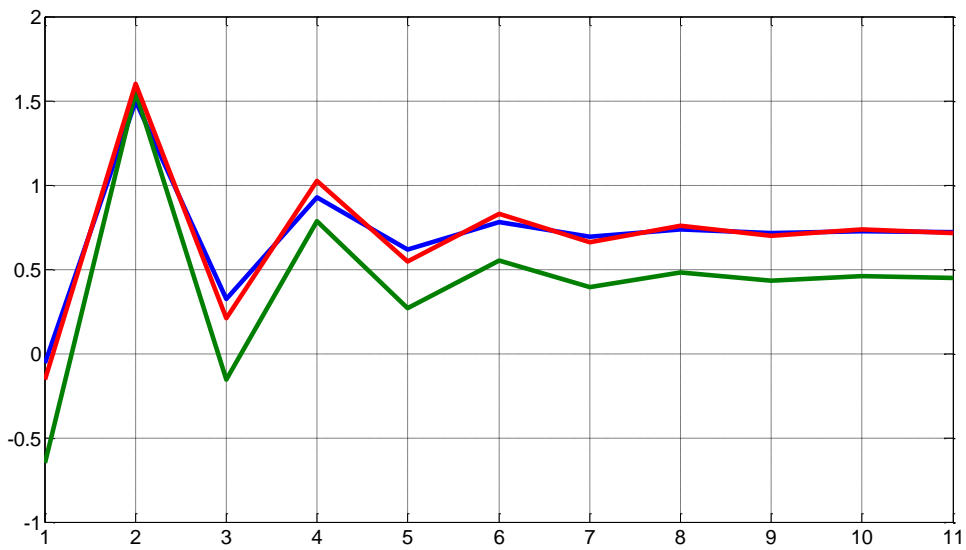


Figure III.5 : évolution de la commande à l'application du pôle P_1

I.3. Interprétation des résultats obtenus :

Soit x_d la valeur qu'on veut atteindre :

Le retour d'état K synthétisé par un placement de pôle permet de stabiliser le système et même de respecter les contraintes sur l'état (figure III.2). Par contre, on remarque à la figure III.3 que les contraintes sur le vecteur commande ne sont clairement pas respectées.

D'après la figure III.4 ; nous remarquons que le vecteur d'état évolue de la valeur $x_0 = -x_d$ pour ce stabiliser à la valeur (0) que nous avons choisie comme étant un point d'équilibre. Cela a été réalisé en effectuant le changement de variable suivant : $\hat{x}(k) = x(k) - x_d(k)$ dans le but de ramener le système à ce stabilisé à la valeur (0) (ce qu'on a voulu obtenir) ;

D'autre part la figure III.5 montre l'évolution de la commande par rapport au temps. D'après le graphe, la commande progresse au milieu des deux valeurs (0) et (2), ces dernières respectent la contraintes sur la commande car nous avons choisie les valeurs limites sur la commande comme $u = [50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0]^t$ donc la commande est respectée.

I.1.2^{ème} exemple : commande d'un circuit électrique :

II.1.1. Définition du système :

Cet exemple est un circuit électrique dont la variable d'entrée est la tension $U(t)$ et la variable de sortie est la tension $v(t)$ aux bornes de la résistance R_2 . Schématisé comme ceci :

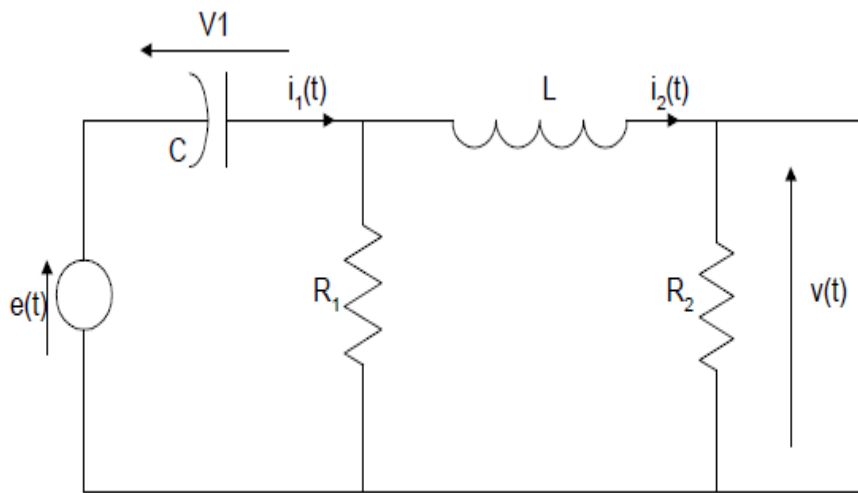


Figure III.2 : schéma électrique.

On choisit comme variables d'état la tension $v_1(t)$ aux bornes de la capacité C et le courant $i_2(t)$ circulant dans l'inductance L .

Après modélisations de différentes équations nous avons abouti à la représentation d'état continue suivante.

$$\begin{cases} x_1(t)=v_1(t) \\ x_2(t)=i_2(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1/R_1 C & 1/C \\ -1/L & -1/R_2 L \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/R_1 C \\ 1/L \end{bmatrix} U(t). \\ y(t)=v(t) = [0 \ R_2] x(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R_1=12\Omega \\ c=12 \\ L=5 \\ R_2=4\Omega \end{cases}$$

Après échantillonnage nous obtenons la nouvelle représentation :

$$A_d = \begin{pmatrix} 0.3651 & 0.0270 \\ -0.0649 & 0.2839 \end{pmatrix}$$

$$B_d = \begin{pmatrix} 0.6349 \\ 0.0649 \end{pmatrix}$$

$$C_d = [0 \quad 4];$$

Les contraintes à imposer sur l'état du système sont :

$$0 \leq x_1(t) \leq 100$$

$$0 \leq x_2(t) \leq 100$$

D'où nous déduisons la matrice Q et μ tel que :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La contrainte sur la commande est tel que :

$$0 \leq U_1 \leq 280$$

$$0 \leq U_2 \leq 280$$

Dans un premier temps nous devons traiter le problème d'invariance positive du polyèdre défini par la contrainte appliquée sur l'état afin de déterminer la matrice du retour d'état K ; ce qui revient à vérifier ces conditions (III.1):

Après exécution de l'algorithme par MATLAB, nous avons obtenu :

$$H = \begin{pmatrix} 0.2177 & 0.1952 & 0.2020 & 0.2262 \\ 0.1298 & 0.3836 & 0.2305 & 0.1056 \\ 0.2020 & 0.2262 & 0.2177 & 0.1952 \end{pmatrix}$$

0.2305 0.1056 0.1298 0.3836

$$K = [-0.5502 \quad -0.0915];$$

$$D = \begin{pmatrix} 1.2153 & 1.2153 & 1.2153 & 1.2153 \\ 1.1722 & 1.1722 & 1.1722 & 1.1722 \end{pmatrix}$$

$$D' = \begin{pmatrix} 0.1347 & 0.1347 & 0.1347 & 0.1347 \\ 0.1755 & 0.1755 & 0.1755 & 0.1755 \end{pmatrix}$$

Vérification si $H.Q = Q.A+Q.B.K$:

$$H*Q = \begin{pmatrix} 0.0157 & -0.0310 \\ -0.1006 & 0.2780 \\ -0.0157 & 0.0310 \\ 0.1006 & -0.2780 \end{pmatrix}$$

$$Q.A+Q.B.K = \begin{pmatrix} 0.0157 & -0.0310 \\ -0.1006 & 0.2780 \\ -0.0157 & 0.0310 \\ 0.1006 & -0.2780 \end{pmatrix}$$

$$H.\mu = \begin{pmatrix} 42.0588 \\ 42.4779 \\ 42.0588 \\ 42.4779 \end{pmatrix}$$

$$\mu = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Les conditions $H*Q = Q*A+Q*B*K$ et $H*\mu \leq \mu$ sont vérifiées. Alors K est une solution au problème

Mais il faut que la contrainte sur la commande soit toujours respectée c'est-à-dire il faut que U soit toujours dans l'intervalle $[50 \ 50 \ 50 \ 0 \ 0 \ 0]^t$ pour cela et comme il a été présenté dans la partie théorique nous devons vérifier ces conditions(III.2) :

Vérification si $D.Q+D'.Q=0$;

$$D.Q = \begin{pmatrix} 1.0e-010 * \\ 0.0139 \quad 0.0139 \\ 0.1674 \quad 0.1674 \end{pmatrix}$$

$$D' * Q = \begin{pmatrix} 1.0e-010 * \\ -0.0139 & -0.0139 \\ -0.1674 & -0.1674 \end{pmatrix}$$

$$U.\mu \begin{pmatrix} 243.0560 \\ 234.4320 \\ 26.9401 \\ 35.1021 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 249.6054 \\ 240.9495 \\ 30.3946 \\ 39.0505 \end{pmatrix}$$

Les conditions sont vérifiées ce qui implique le respect de la contrainte sur la commande.

La dernière chose à vérifier est la *stabilité asymptotique* du système :

Cela revient à trouver un $0 \leq \lambda < 1$, tel que la condition (III.3) sera vérifiée :

Vérification si $H^* \mu - \lambda * \mu \leq 0$

$$H^* \mu - \lambda * \mu = \begin{pmatrix} -4.3748 \\ -3.9558 \\ -4.3748 \\ -3.9558 \end{pmatrix} \leq 0$$

Donc on a bien

$$H^* \mu - \lambda * \mu \leq 0$$

Comme les conditions (2) et (3) sont vérifiées alors la fonction $\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{Q_i}{\mu_i} x(k) \right\}$, est une fonction de Lyapunov strictement décroissante du système (II.27)

II.2.1.Synthèse du retour d'état K on appliquant l'approche par invariance positive :

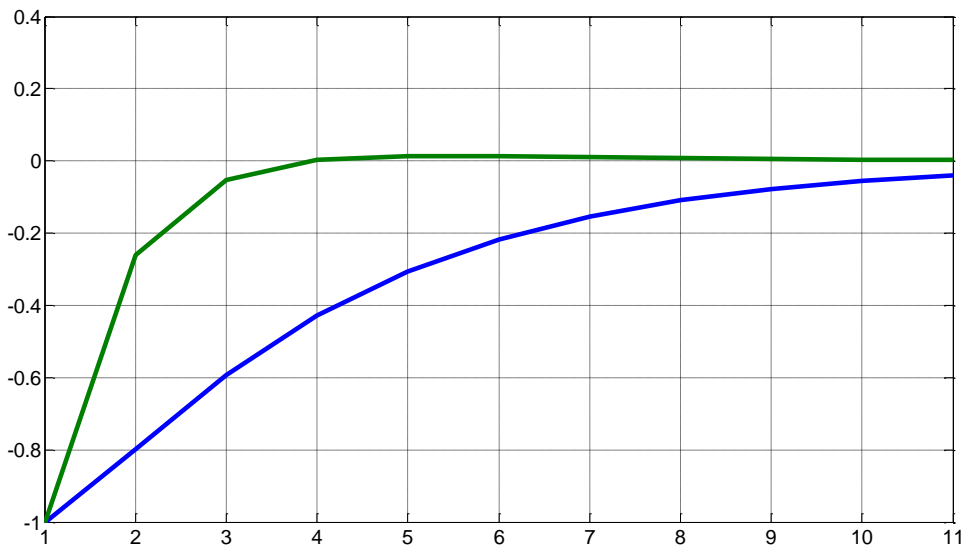


Figure III.5 : évolution du vecteur d'état

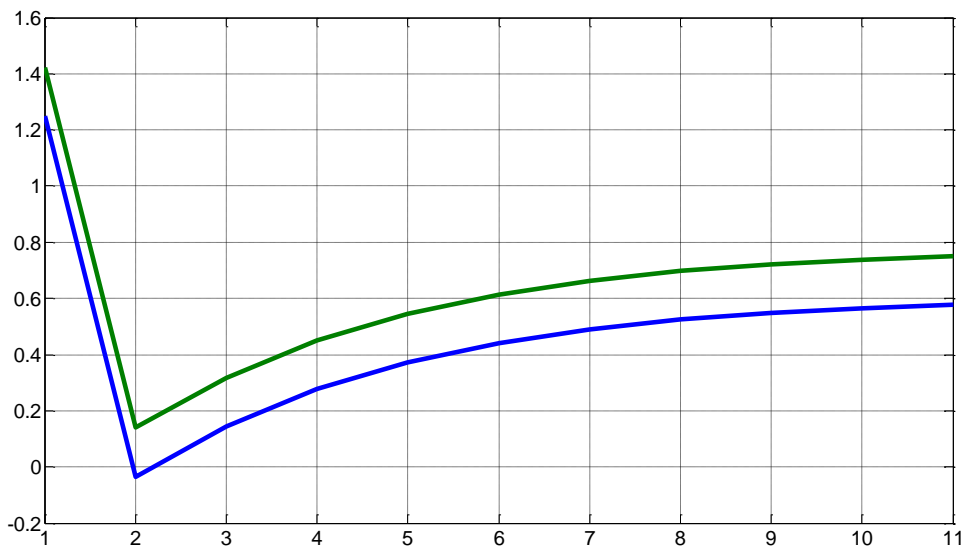


Figure III.6: Evolution du vecteur d'entrée

II.2.2. synthèse du retour d'état K par un placement de pôle donnée :

En appliquant un pôle $p_2 = [-0.5 \ -0.55]^T$, nous avons obtenu les résultats des figures suivantes :

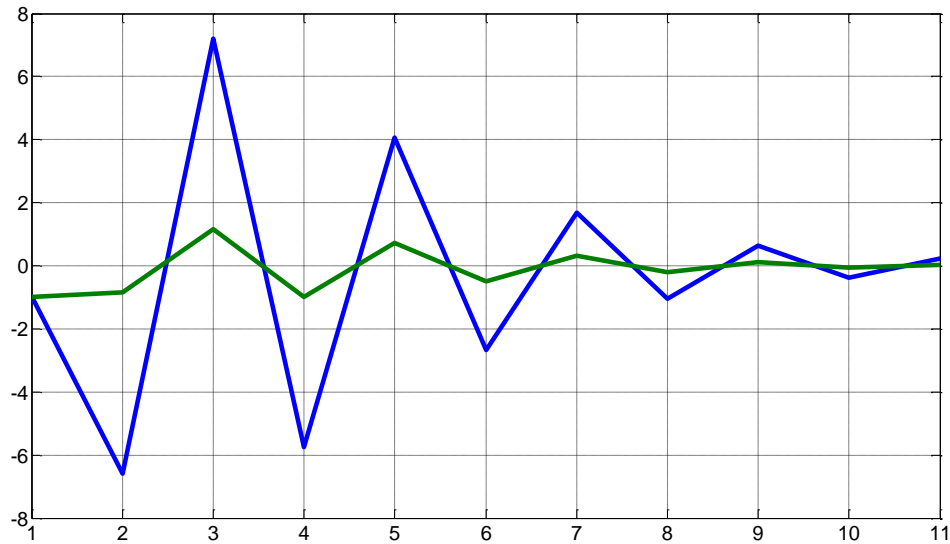


Figure III.7 : évolution du vecteur d'état

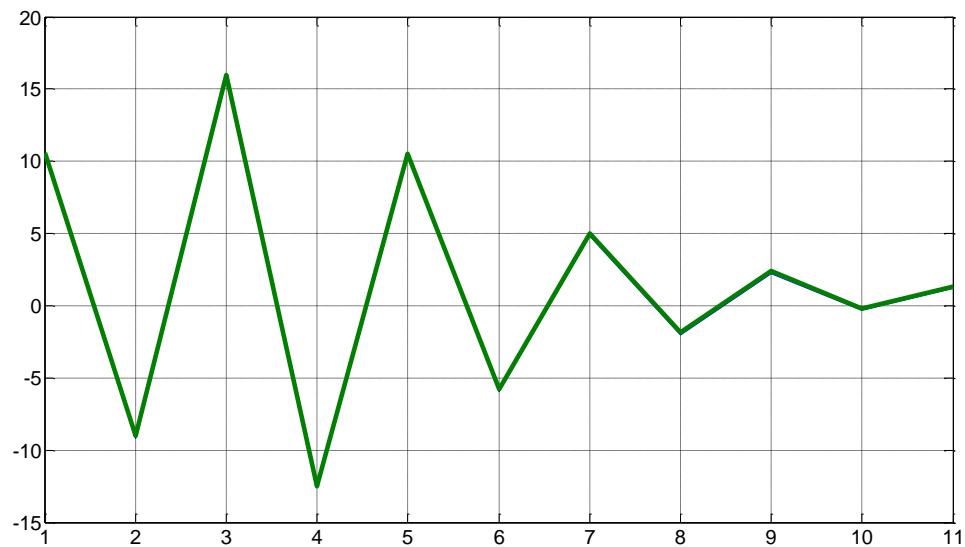


Figure III.3 : évolution du vecteur commande

II.3. Interprétation des résultats pour l'exemple2 :

Comme dans le cas du premier exemple, on obtient ceci :

Avec le pôle qu'on a choisi le système est stable mais ne respecte pas la contrainte sur l'état.

Or en appliquant les résultats obtenus par invariance positive, le système se stabilise sans oscillations tout en respectant les contraintes imposées

Conclusion :

L'approche par invariance positive des systèmes linéaires soumis à des contraintes sur l'état et/ou la commande s'avère plus judicieuse par rapport au respect des contraintes et la robustesse du système à commandé.

CONCLUSION
GENERALE

Le projet que nous avons réalisé a porté sur l'étude de l'invariance positive de systèmes linéaires soumis à des contraintes sur l'état et / ou sur la commande. L'idée de base de cette approche est de contraindre l'état du système à évoluer dans un domaine nommé domaine positivement invariants, inclus ou égale dans le domaine défini par les contraintes. Puisque ces contraintes sont de type linéaire, elles définissent des polyèdres convexes dans l'espace d'état.

Après avoir étudié les fondements de l'approche de commande par invariance positive, nous avons appliqué cette méthode sur deux exemples : hydraulique et électrique en utilisant la boîte à outils CVX de Matlab, basée sur la technique des inégalités matricielles (LMI).

L'invariance positive d'un polyèdre convexe est caractérisée par l'existence de solutions à deux relations matricielles linéaires. Le test d'existence et le calcul d'une loi de commande par retour d'état linéaire rendant positivement invariant un polyèdre donné peut alors se faire de façon simple, par résolution d'un ensemble d'inégalités matricielles linéaires.

Les résultats de simulation obtenus sont jugés satisfaisant par rapport aux gabarits construits pour satisfaire les spécifications fixées dans le cahier des charges.

Une perspective intéressante à ce travail consiste à rendre invariant un polyèdre de contraintes par rapport à un système linéaire soumis à des perturbations additives et/ou des incertitudes.

- 1- M.Vassilaki, J.C.Hennet and G.Bitsonis ,« Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints »,International Journal of control, vol 47, pages 1727-1735, 1988.
- 2- R. KARA « Contribution à l'analyse quantitative et à la commande des réseaux de Petri continu à arcs valués », Thèse de doctorat, université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 2009.
- 3- D-HENRION « Stabilité des systèmes linéaires incertains à commande contrainte » Thèse de doctorat ,Toulouse 1999
- 4- J.M-GOMES DA SILVA « Stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commande » Thèse de doctorat, Toulouse 1997.
- 5- C.E-TRABUCO DOREA « $L'(A,B)$ -invariance de polyèdre convexes ;Application à la commande sous contrainte » Thèse de doctorat, Toulouse 1997.
- 6- C.-VACHIER « représentation d'état et commande dans l'espace d'état » , Paris XII-Val de Marne 2007 .
- 7- A-ZEGAGH & L-SOUMER « Commande des système linéaire par retour d'état avec contraintes sur les entrées » U.M.M.T.O 2001.
- 8- J.C-HENNET « An extension of Farkas lemma and its application to the linear constrained regulation problem », Académie des sciences de Paris, 1989
- 9- M-KIAi « Stabilisation des systèmes linéaires continus contraints sur la commande par retour d'état et de sortie saturés », thèse de doctorat, Toulouse 1994.
- 10-F-Blanchini « Set invariance in control » , Automatica, 1988.

11-H.BENLAOUKLI « Méthodes géométriques pour la construction des ensembles invariants » thèse de Doctorat, université, 2009.

ANNEXE 1

Dans l'espace affine attachée à \mathcal{R}^n , tout point X vérifiant le système d'inéquations linéaires :

$$Q.X \leq \mu \dots\dots\dots(1)$$

Avec $Q \in \mathcal{R}^n$ et $\mu \in \mathcal{R}^q$ appartient à un ensemble convexe fermé, appelé polyèdre, que nous noterons $R(Q, \mu)$.

$$R(Q, \mu) = \{ X \in \mathcal{R}^n ; Q.X \leq \mu \} \dots\dots\dots (2)$$

Supposons que cet ensemble n'est pas vide, c'est à dire que les inéquations constituant le système(1) sont compatibles. L'ensemble $R(Q, \mu)$ n'est pas supposé borné. Dans le cas particulier où le vecteur μ est nul, le système (1) est dit homogène. $R(Q, 0)$ est un cône polyédral convexe.

Dans le cas général où une au moins des composantes de μ est non nulle, le système d'inéquations (1) est dit non-homogène.

Etant donné une matrice $P \in \mathcal{R}^{p \times n}$ et un vecteur $v \in \mathcal{R}^p$, on cherche sous quelles conditions

$$R(Q, \mu) \subseteq R(P, v) \dots\dots\dots(3)$$

c'est à dire quelles relations entre Q, μ, P et v sont nécessaires et suffisantes pour que toute solution du système (1) soit aussi solution du système (4)

$$P.X \leq v \dots\dots\dots (4)$$

Une condition nécessaire et suffisante d'imbrication des deux systèmes d'inéquations linéaires est donnée par le théorème suivant (dit lemme de Farkas étendu).

Théorème

Une condition nécessaire et suffisante pour que tout point $x \in \mathcal{R}^n$ solution du système d'inéquations compatibles $Qx \leq \mu$ soit solution du système d'inéquations $PX \leq v$ est qu'il existe une matrice U telle que :

$$U = ((U_{ij})) \text{ avec } U_{ij} \geq 0 \text{ pour } i = 1 \dots p ; j = 1 \dots q \dots\dots\dots (5)$$

$$U.Q = P \dots\dots\dots (6)$$

$$U.\mu \leq v \dots\dots\dots (7)$$