RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE.
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMERI, TIZI-OUZOU
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master
en
MATHÉMATIQUES

Option
Modélisation Mathématique

Thème

Presque périodicité des processus stochastiques

Présenté par

MADJOUR Farida

Dirigé par:

M^{me} **SMAALI Mannal.**

Éxaminé par:

M^r.**MORSLI Mohamed**	**Professeur**	**UMMTO**	**Président**
M^r.**MELLAH Omar**	**Maître de conférence B**	**UMMTO**	**Examinateur**
M^{me}.**SMAALI Mannal**	**Maître de conférence B**	**UMMTO**	**Rapporteur**

Promotion 2013/2014

Remerciements

Avant de présenter ce travail, mes remerciements vont tout dabord à :

Dieu le tout puissant qui m'a donné la volonté et la santé pour accomplir ce travail et qui ma aidé à franchir un pas vers le chemin du savoir.

Ma promotrice M^{me} SMAALI pour son suivi permanent et sa gentillesse, sa sympathie, sa disponibilité ainsi que pour ses précieux conseils tout au long du projet.

Je tiens aussi à remercier mes enseignants pour leur sacrifice et aide précieux jusqu'à l'accomplissement de ce modeste travail.

Enfin, que tous ceux et celles qui, de loin ou de prés m'ont apporté leur aide et soutien trouveront ici, mes reconnaissances et sympatie.

Farida.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chère mère qui m'a tant aimée et conseillée, mon père qui m'a encouragé.

Mes frères à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

Mes cousins et cousines.

Tous mes amis(es).

À tous ceux qui ont contribué, de loin ou de près, à la réalisation de ce projet.

Farida.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des processus stochastiques est une branche des mathématiques très importante qui consiste en l'étude des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de variables aléatoires. Cette notion d'aléatoire est contenue dans le terme "stochastique", "processus" signifie, évolution en fonction d'un paramètre, c'est-à-dire une fonction au sens usuel. D'où la naissance du concept de fonction aléatoire, ou processus stochastique.

La théorie des processus presque périodiques à été introduite à la fin des années trente par E.Slutsky, où il a étudié la presque périodicité des trajectoires des processus stochastiques. Dans les années quatre-vingt C.Tudor et T.Morozan dans leur article *"Almost periodic soulutions of affine ito equations"* [13] ont introduit la notion de presque périodicité en loi fini-dimensionnelle pour des processus à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et il ont montré qu'une équation différentielle stochastique à coefficients presque périodiques admet une solution qui est presque périodique en loi fini-dimensionnelle. Par la suite, en 1995 C.Tudor dans son article *"Almost Periodic Stochastic Processes"* [16] a introduit plusieurs types de presque périodicité en loi, à savoir : la presque périodicité en loi infini-dimensionnelle (APD), la presque périodicité en loi uni-dimensionnelle (APOD) et la presque périodicité en loi fini-dimensionnelle (APFD), ansi qu'une application aux équations différentielles stochastiques.

Avec les années cette théorie s'est développée par d'autres, on cite par exemple: H. Bezandry, Toka Diagana, G.Da Prato. . .etc.

Depuis la création de la théorie de la presque périodicité des processus, beaucoup de concepts de presque périodicité ont été introduit : presque périodicité en probabilité, presque périodicité des moments ainsi que la presque périodicité presque sûre. En 2012 F.Bedouhene, O.Mellah et Paul Raynaud de Fitte, dans leur article *"Bochner-almost periodicity for stochastic processes"*[1] ont fait une étude comparative détaillée des différents types de presque périodicité.

Notre but dans ce travail est de développer une partie de l'article [1] et de donner un exemple d'application de la presque périodicité en loi pour une de classe d'équations différentielles stochastiques.

Ce mémoire est organisé en deux chapitres complété par une annexe.

Dans le premier chapitre, on présente les différents types de presque périodicité des processus. Pour cela, on commence par rappeler le concept de la presque périodicité dans le cas déterministe et on a introduit les processus aléatoires. Après avoir défini la presque périodicité pour les processus aléatoires, on a établi les liens entre les différents types de presque périodicité.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solution presque périodique en loi d'un certain type d'équation différentielle stochastique faite par M.Kamenskii, O.Mellah et P.Raynaud de Fitte, dans leur article :*" Weak Averaging of Semilinear Stochastic Differential Equations With Almost Periodic Coefficients "*[10]. Ce chapitre est partagé en deux parties:

Une première partie est consacré à l'étude des équations différentielle stochastiques dans le cas uni-dimensionnelle.

Dans la deuxième partie, après avoir introduit la notion d'intégrale stochastique dans un espace de Hilbert, on donne un exemple d'application de la presque périodicité en loi aux équations différentielles stochastiques. Plus précisément on a énoncé un résultat d'existence et d'unicité d'une solution presque périodique en loi pour une équation différentielle stochastique dans un espace de Hilbert.

Chapitre 1

Processus stochastiques presque périodiques

Ce chapitre sera consacré à l'étude comparative des différents types de presque périodicité pour les processus continus.

1.1 Les fonctions presque périodiques

La théorie des fonctions presque périodiques a été développée par Harald Bohr. En 1926 S.Bochner donna une nouvelle définition des fonctions presque périodiques équivalente à celle donnée par H.Bohr. Puis en 1962, dans son article " A new approch to almost periodicity " [3], il démontra un critère très intéressant de la presque périodicité dit critère de double suites de Bochner. Notre objectif dans cette section est de présenter la notion de fonction presque périodique(p.p), et ses principales propriétés. Notre présentation est essentiellement inspirée des références [12], [5], [17] et [3].

1.1.1 Période, presque-période, nombre de translation

Définition 1.1.1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que :

$$f(t+T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et plus généralement

$$f(t+nT) = f(t)$$

On dit que T est une période de f.

Remarque 1.1.1. Pour définir une application T-périodique, il suffit de donner ses valeurs sur un intervalle du type $[\alpha,\, \alpha + T]$ où α est un réel quelconque.

Définition 1.1.2. (La densité relative) On dit qu'un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ s'il existe un réel $\ell > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ rencontre A, c-à-d

$$\exists \ell > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R} : [a,\, a + \ell] \cap A \neq \emptyset.$$

Exemples 1.1.1.

1. L'ensemble $A = \{\sqrt{n}, -\sqrt{n},\, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. En effet $\exists\ \ell = 1 > 0$ tel que $\forall a \in \mathbb{R}$, $[a,\, a + \ell] \cap A \neq \emptyset$. Supposons $a \geq 0$, on a alors $(a+1)^2 - a^2 = 2a + 1 \geq 1$, $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.q $a^2 \leq n \leq (a+1)^2 \Rightarrow \sqrt{n} \in [a,\, a+1]$. Si $a \leq 0$, en pose $a = -b$, avec $b \geq 0$, d'où $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q $b \leq \sqrt{n} \leq b + 1$ $\Rightarrow -b - 1 \leq -\sqrt{n} \leq -b \quad \Rightarrow a - 1 \leq -\sqrt{n} \leq a$.
   D'où A est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, L'ensemble des multiples d'une période de f est relativement dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.3. (Presque périodique) Soit $(\mathbb{E},\, d)$ un espace métrique, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{E}$. Soit $\varepsilon > 0$. Un nombre réel τ est dit ε-translation de f (ou ε-presque période de f), si quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on a

$$d(f(t + \tau),\, f(t)) < \varepsilon$$

1.1.2 Fonction Presque périodique

Soit $(\mathbb{E},\, d)$ un espace métrique. Soit f une fonction continue définie sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{E}$, où ($I = \mathbb{R} \quad ou \quad \mathbb{R}^+$).
On note par la suite par $\mathcal{C}(I,\, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues de I à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Définition 1.1.4. (Presque périodicité au sens de Bohr) Nous disons que f est presque périodique au sens de Bohr (Bohr p.p) si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$T(f,\, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R},\, \sup_{t \in I} d(f(t + \tau),\, f(t)) < \varepsilon\}$$

est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\ell = \ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ contient au moins une ε-presque période, i.e un nombre réel τ $t.q.$

$$\sup_{t \in I} d(f(t + \tau),\, f(t)) < \varepsilon$$

Définition 1.1.5. (Presque périodicité asymptotique au sens de Bohr) Nous disons que f est asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$, il existe des nombres réels $\ell(\epsilon) > 0$ et $T = T(\epsilon) > 0$ tels que tout intervalle de longueur $\ell(\epsilon)$ contient au moins un point τ qui vérifie :

$$d(f(t+\tau),\, f(t)) < \varepsilon \quad pour \quad tout \quad t \geq T \quad avec \quad t+\tau \geq T$$

Remarque 1.1.2. Une fonction f est asymptotiquement presque périodique ssi $f = g + h$ avec g est Bohr presque périodique et h continue qui tend vers 0 à l'infini.

Remarque 1.1.3. La presque périodicité asymptotique au sens de Bohr est strictement plus faible que la presque périodicité au sens de Bohr, par exemple (voir [15]) la fonction

$$x(t) = \frac{1}{1+t}\cos(\ln(1+t)),\, t \in \mathbb{R}^+$$

est asymptotiquement presque périodique, mais pas presque périodique.

Définition 1.1.6. (Presque périodicité au sens de Bochner) Supposons que $(\mathbb{E},\, d)$ est complet. Alors une fonction f est dite presque périodique au sens de Bochner si et seulement si elle est normale, c-à-d si de toute suite $(h_n^{'})$ de $\mathbb{R}$, on peut extraire une sous suite (h_n) telle que $f(t + h_n)$ converge uniformément par rapport à t, ce qui est équivaut à dire que l'ensemble des fonctions translatées $\{\widetilde{f}(t) = f(t + .),\, t \in \mathbb{R}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{E})$.

Définition 1.1.7. (**Critère de double suites de Bochner**) Une fonction f vérifie le critère de double suites de Bochner si, de deux suites quelconques $(\alpha_n^{'})$ et $(\beta_n^{'})$ de I, on peut toujours extraire $(\alpha_n) \subset (\alpha_n^{'})$ et $(\beta_n) \subset (\beta_n^{'})$ respectivement avec les mêmes indices, telles que pour chaque $t \in I$ les limites

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} f(t+\alpha_n+\beta_m) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} f(t+\alpha_n+\beta_n) \tag{1.1}$$

existent et sont égales.

Remarque 1.1.4. La propriété remarquable de ce critère est que les limites dans (1.1) existent selon les trois modes de convergence : convergence simple, convergence uniforme sur les intervalles compacts et convergence uniforme sur I. Donc l'avantage de ce critère est que la convergence simple implique la convergence uniforme.

Théorème 1.1.1. *Supposons que* $(\mathbb{E},\, d)$ *est complet. Soit* $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{E},\, d)$ *une fonction continue, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *f est presque périodique au sens de Bochner.*

2. *f satisfait le critère de double suites de Bochner.*

3. *f est presque périodique au sens de Bohr si $I = \mathbb{R}$, ou asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr si $I = \mathbb{R}_+$.*

Dans ce qui suit, on présentera certaines propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques.

1.1.3 Propriétés élémentaires des fonctions presque périodiques

Proposition 1.1.1. *Toute fonction* $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{E},\, d)$ *presque périodique au sens de Bohr, est bornée et uniformément continue.*

Preuve. 1. Bornitude de la fonction f :

f est Bohr p.p $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \ell_\varepsilon > 0$ t.q tout intervalle de longueur ℓ contienne une ε-translation. En particulier pour $\varepsilon = 1$, $\exists \ell = \ell_1 > 0$ t.q tout intervalle de longueur l_1 contienne une 1-translation. La fonction f étant continue sur le compact $[0,\, l]$, $\exists M > 0,\ \exists a \in \mathbb{E}$ t.q $\sup_{x\in[0,\ l]} d(f(x),\, a) \leq M$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, $\exists \tau \in [-x,\ -x+l]$ t.q. $d(f(x+\tau),\, f(x)) \leq 1$ et $x+\tau\ \in [0,\, l]$. Donc

$$\begin{aligned} d(f(x),\, a) &\leq d(f(x),\, f(x+\tau)) + d(f(x+\tau),\, a) \\ &\leq 1 + M \end{aligned}$$

2. Continuité uniforme de la fonction f :

Soit $\varepsilon > 0$ $\exists \ell_\varepsilon > 0$ t.q tout intervalle de longeur ℓ_ε contienne une $\frac{\varepsilon}{3}$-translation.

f est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1,\, 1+\ell]$, elle est donc uniformément continue sur $[-1,\, 1+\ell]$ c-à-d $\exists \delta_\varepsilon = \delta$ avec $0 < \delta < 1$ t.q $\forall y_1,\, y_2 \in [-1,\, 1+\ell]$ t.q. $\mid y_1 - y_2 \mid \leq 0$ on a $d(f(y_1),\, f(y_2)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Soient $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ t.q $\mid x_1 - x_2 \mid < \delta$. On sait qu'il existe $\tau \in T(f,\, \frac{\varepsilon}{3}) \cap [-x_1,\ -x_1+\ell]$, d'où $x_1+\tau \in [0,\, \ell] \subset [-1,\, \ell] \subset [-1,\, 1+\ell]$, et $x_2+\tau \in [x_2-x_1,\, x_2-x_1+\ell] \subset [-1,\, 1+\ell]$

De plus:

$\mid (x_1+\tau)-(x_2+\tau) \mid = \mid x_2 - x_1 \mid \leq \delta$ d'où $d(f(x_1+\tau),\, f(x_2+\tau)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Comme , $\tau \in T(f,\, \frac{\varepsilon}{3})$ implique que $d(f(x_i),\, f(x_i+\tau)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall i = 1{,}2$
On aura finalement:

$$\begin{aligned} d(f(x_1),\, f(x_2)) &\leq d(f(x_1),\, f(x_1+\tau)) + d(f(x_1+\tau),\, f(x_2+\tau)) + d(f(x_2+\tau),\, f(x_2)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'où f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition 1.1.2. *Une limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques au sens de Bohr est presque périodique au sens de Bohr.*

Preuve. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions presque périodiques avec $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} d(f_n(x),\, f(x)) \to 0$ pour $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} d(f_{n_\varepsilon}(x),\, f(x)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit maintenant $\tau \in T(f_{n_0},\, \frac{\varepsilon}{3})$. Alors

$$\begin{aligned} d(f(x+\tau),\, f(x)) &\leq d(f(x+\tau),\, f_{n_\varepsilon}(x+\tau)) + d(f_{n_\varepsilon}(x+\tau),\, f_{n_\varepsilon}(x)) + d(f_{n_\varepsilon}(x),\, f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $\tau \in T(f,\, \varepsilon)$.

□

Soit maintenant $(\mathbb{E},\ \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{K}$ espace normé. Alors, on a les propriétés suivantes :

Proposition 1.1.3. *Soit $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ deux fonctions presque périodiques, alors les propriétés suivantes sont vérifiées:*

1. *$\forall a \in \mathbb{K}$ les applications $af(x),\ f(ax),\ f(a+x)$ sont presque périodiques.*

2. *$\|\, f(x) \,\|$ est presque périodique.*

3. *$f(x)+g(x)$ et $f(x)-g(x)$ et $f(x)\times g(x)$ sont presque périodiques.*

Proposition 1.1.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ dérivable et presque périodique. Si la dérive $f'(x)$ est uniformément continue, alors $f'(x)$ est presque périodique.*

Preuve. On a:

$$\lim_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)] = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Posons $f_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x)$ est presque périodique.
D'autre part

$$\begin{aligned} \| f'(x) - f_n(x) \| &= \| f'(x) - n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt \| \\ &\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} \| f'(x) - f'(t) \| dt \\ &\leq \sup_{t\in[x,x+\frac{1}{n}]} \| f'(x) - f'(t) \| \end{aligned}$$

Comme f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon$ tel que $\mid x - y \mid < \delta \Rightarrow \| f'(x) - f'(y) \| < \varepsilon$, or $\exists n_0$ tel que $\forall n > n_0$, on a $\frac{1}{n} \leq \delta$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $\| f'(x) - f'(y) \| < \varepsilon$, $\forall t \in [x,\, x+\frac{1}{n}]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On a$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n > n_0$, $\| f'(x) - f'_n(x) \| < \varepsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comme on a f_n converge uniformément vers f' sur $\mathbb{R}$.

D'où f' est limite uniforme d'une suite des fonctions presque périodiques. Alors f' est presque périodique.

$\square$

Proposition 1.1.5. *Soit f une fonction presque périodique et F une primitive de f. Alors la fonction F est presque périodique ssi F est bornée.*

1.2 Processus stochastiques

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique, médecine, et bien entendu dans les domaines économiques et financiers. Dans cette partie, nous allons présenter les définitions et les propriétés principales des processus stochastiques à temps continu, pour cella nous avons besoin de rappeler la définition de variable aléatoire ainsi que les différents types de convergence de suites de variables aléatoires, comme outil important pour étudier les processus stochastiques.

1.2.1 Processus aléatoire

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, Ω est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Avant de donner la définition d'un processus, on rappellera quelques notions et notations qui seront utiles par la suite.

Définition 1.2.1. (Variable aléatoire) On appelle variable aléatoire($v.a$), toute application mesurable

$$X : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$$

On distingue deux types de variables aléatoires :

1. **Variable aléatoire discrète** Les variables aléatoires discrètes, qui prennent un nombre fini ou dénombrable de valeurs x_1, $x_2 \ldots$. Dans ce cas, la loi $\mathbb{P}_X$ est parfaitement déterminée par la donnée des nombres $p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$. Notons que

$$\forall i, \quad p(x_i) \geq 0 \quad et \quad \sum_i p(x_i) = 1$$

2. **Variable aléatoire continue** Les variables aléatoires continues, qui admettent une fonction de densité $\mathbb{P}_X(x)$:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B \mathbb{P}_X(x)dx, \quad avec \quad \mathbb{P}_X(x) \geq 0, \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_X(x)dx = 1$$

Convergence de suites de variables aléatoires Soient $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de $v.a$ et X une autre $v.a$, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il y a plusieurs façons de définir la convergence de la suite (X_n) vers X :

1. **Convergence presque sûre (p.s)**

   Une suite (X_n) de $v.a$ converge p.s vers X et on note $X_n \to_{n\to\infty} X$ $p.s$ si

$$\mathbb{P}(w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)) = 1.$$

2. **Convergence en p-moyenne (ou convergence L^p)**
   Soit (X_n) une suite de $v.a$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que X_n converge en p-moyenne vers X, et on note $X_n \rightarrow^{L^p}_{n\rightarrow\infty} X$ si
   $$\lim_{n\rightarrow\infty}(\mathbb{E}(\mid X_n - X \mid^p)) = 0$$
   Pour p=1 on a la convergence en moyenne, et on écrit $X_n \rightarrow^{L^1}_{n\rightarrow\infty} X$ si
   $$\lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{E}(\mid X_n - X \mid) = 0$$
   Pour p=2 on a la convergence en moyenne quadratique, et on écrit $X_n \rightarrow^{L^2}_{n\rightarrow\infty} X$ si
   $$\lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{E}(\mid X_n - X \mid^2) = 0$$
3. **Convergence en probabilité** $(\mathbb{P})$
   Une suite (X_n) Converge en probabilité vers X, et on note $X_n \rightarrow^{\mathbb{P}}_{n\rightarrow\infty} X$ si
   $$\forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{P}(\mid X_n - X \mid > \varepsilon) = 0$$
4. **Convergence en loi** $(\mathcal{L})$
   On dit que (X_n) Converge en loi vers X (ou en distribution), si les lois de probabilités des variables aléatoires X_n convergent faiblement vers la loi de la variables X, i.e. $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\geq 1}$converge faiblement vers $(\mathbb{P}_X)$, plus précisément si pour toute fonction φ continue et bornée à valeur dans $\mathbb{R}$, on a:
   $$\lim_{n\rightarrow+\infty}\mathbb{E}[\varphi(X_n)] = \mathbb{E}[\varphi(X)] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\rightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}}\varphi d\mathbb{P}_{X_n} = \int_{\mathbb{R}}\varphi d\mathbb{P}_X$$
   et on note $X_n \rightarrow^{\mathcal{L}}_{n\rightarrow\infty} X$ (ou $X_n \Rightarrow_n X$)

Proposition 1.2.1. • *La convergence en probabilité ⇒ La convergence en loi. La réciproque est fausse.*

- *La convergence en loi est impliquée par toutes les autres convergences.*

- *La convergence en L^p ⇒ La convergence en L^1 ⇒ La convergence en $\mathbb{P}$ ⇒ La convergence en $(\mathcal{L})$.*

- *La convergence (p.s)⇒ La convergence en* $\mathbb{P}$.

Théorème 1.2.1. ***(Fatou)****: Pour toute suite d'événements* (A_n), $A_n \subset \Omega$

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n).$$

Théorème 1.2.2. ***(Borel-Cantelli)****: Soit* (A_n) *une suite d'évènements*

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$$

Si les événements A_n *sont indépendants et si* $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$*, alors* $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$

Définition 1.2.2. (Processus) Un processus stochastique ou aléatoire $X = (X_t)_{t\in T\subset\mathbb{R}}$, est une famille de $v.a.$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeur dans $\mathbb{R}$. On peut également le voir comme une fonction aléatoire:

$$X : \begin{cases} \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R} \\ (w, t) \rightarrow X(w, t) = X_t(\omega) \end{cases}$$

Un processus $X_t(w)$ dépend de deux paramètres: le temps t et l'aléatoire w.
Si on fixe $t \in T$, la fonction $w \in \Omega \rightarrow X_t(w)$ est une $v.a.$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si on fixe $w \in \Omega$, la fonction $t \in T \rightarrow X_t(w)$, appelée trajectoire du processus.
X_t peut représenter par exemple le nombre de clients qui attendent à un guichet ou le prix d'une action, à l'instant t.

Remarque 1.2.1. • Si $T \subset \mathbb{N}$ (dénombrable infini) on dit que le processus est à temps discret.

- Si $T \subset \mathbb{N}$ (fini) on dit que le processus est un vecteur aléatoire.

- Si $T = \mathbb{R}_+$ on dit que le processus est à temps continu.

Dans ce qui suit, on s'intéressera particulièrement aux processus à temps continu.

Définition 1.2.3. (Filtration, Processus adapté) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq +\infty\}$ est une famille croissante de sous-tribu de $\mathcal{F}$: pour tout $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, on a $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ (la tribu $\mathcal{F}(t)$ représente l'information dont on dispose à l'instant t). On dit qu'un processus X(t) est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t,\, 0 \leq t \leq +\infty\}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

1.2.2 Processus à accroissements indépendants et stationnaires

Dans cette partie, on introduit quelques notions d'analyse des processus stochastiques.

Définition 1.2.4. (Stationnarité faible) Un processus (X_t), $t \in \mathbb{R}$ est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si:

1. Pour tout temps t, son espérance $\mathbb{E}(X_t)$ est constante
$$\mathbb{E}(X_t) = m$$
2. Pour tout couple de temps $(s,\, t)$, la covariance $Cov(X_s,\, X_t)$ du processus ne dépend que de $(t - s)$
3. $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$, et indépendante du temps.

Définition 1.2.5. (Stationnarité forte) Un processus X_t, est dit fortement stationnaire ou stationnaire au sens strict si $\forall \tau > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$:
$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}) \quad et \quad (X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_m+\tau})$$
ont même loi.

Remarque 1.2.2. Si rien n'est précisé lorsque l'on parle de processus stationnaire, il faut considerer qu'il s'agit de la stationnarité au sens large.

Définition 1.2.6. (Processus à accroissement indépendant) Un processus X est dit à accroissement indépendant si pour toute suite finie $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, les variables aléatoires
$$X_{t_1},\, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
qu'on appelle les accroissements de X, sont indépendants.

1.2.3 Processus gaussien et Mouvement Brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastiques est le mouvement brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.2.7. (Mouvement brownien) Un processus stochastique $(B_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ est appelé mouvement brownien si les conditions suivantes sont satisfaites:

1. Le processus B est à accroissements indépendants et stationnaires.
2. Pour chaque t, la variable aléatoire B_t suit la loi normale $\mathcal{N}(0,t)$.
3. Les trajectoires $t \to B_t(w)$ sont continues pour presque tout w.
4. $B_0 = 0$.

Proposition 1.2.2. *Soit (B_t) un Mouvement brownien alors:*

1. $\mathbb{E}(B_t) = 0$.

2. $\mathbb{E}(B_t^2) = t$.

3. *(B_t) n'est pas à variation bornée.*

4. *(B_t) n'est pas dérivable.*

Définition 1.2.8. (Processus gaussien) Soit $\{X_t,\, t \geq 0\}$ un processus aléatoire réel. Il est gaussien si, pour tout $t_1, \ldots, t_n$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^n$.

Pour démontrer qu'un processus est un mouvement brownien, au lieu de revenir à la définition, il est souvent plus aisé d'utiliser la caractérisation suivante :

Théorème 1.2.3. ***(Caractérisation du Mouvement Brownien)*** *Un processus B est un mouvement brownien ssi c'est un processus Gaussien continu centré de fonction de co-variance $cov(X_s,\, X_t) = s \wedge t$.*

1.2.4 Martingales à temps continu

Définition 1.2.9. Soit $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \{\mathcal{F}_n\}_n,\, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$ est un processus stochastique $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

1. $\mathbb{E}(\mid X_n \mid) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $\{X_n\}_n$ est adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}_n$.

3. $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la dernière condition est remplacée par $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ on dit que $\{X_n\}_n$ est une sur-martingale, et si elle est remplacée par $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ on dit que c'est une sous-martingale.

1.3 Processus stochastiques presque périodiques

Pour un processus stochastique, on peut imaginer plusieurs notions de presque périodicité. Cette possibilité a donné lieu à plusieurs définitions : presque périodicité en loi, en probabilité, presque périodicité des trajectoires, des moments ou encore différentes variantes de presque périodicité presque sûre. Dans ce qui suit, nous exposons ces différents types et nous présentons les liens entre eux.

1.3.1 Presque périodicité en loi

Nous nous intéressons à des processus stochastiques continus (X), à valeurs dans un espace métrique séparable et complet $(\mathbb{E}, d_{\mathbb{E}})$:

$$X : \begin{cases} I \subset \mathbb{R} \to E, \quad (I = \mathbb{R} \; ou \; \mathbb{R}^+) \\ t \to X(t) \end{cases}$$

Soit $C(I, \mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{E}$. Notons par $\widetilde{X}$ la fonction translatée de X, qui est définie comme suit :

$$\widetilde{X} : \begin{cases} I \to \mathcal{C}(I, \mathbb{E}) \\ s \to \widetilde{X}(s) = X(. + s) \end{cases}$$

Avant de donner la définition de la presque périodicité en loi, rappelons la définition de la métrique d_{BL} sur l'espace $\mathcal{P}(E)$ des probabilités sur $\mathbb{E}$:
Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{E})$, (ou $\mathcal{C}_b(\mathbb{E})$ l'espace des fonctions continues bornées définies sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$), alors :

$$\mid f \mid_L = \sup\{\frac{f(x) - f(y)}{d_{\mathbb{E}}(x,y)}, \quad x \neq y\}, \quad \mid f \mid_\infty = \sup_{x \in \mathbb{E}} \mid f(x) \mid$$
$$et \quad \mid f \mid_{BL} = \max\{\mid f(x) \mid_\infty , \mid f(x) \mid_L\}$$

Pour $\mu, \nu \in \mathcal{P}(E)$

$$d_{BL}(\mu, \nu) = \sup_{|f|_{BL} \leq 1} \int_{\mathbb{E}} f d(\mu - \nu)$$

La métrique d_{BL} définie sur l'espace des probabilités $\mathcal{P}(E)$ est complete.

Définition 1.3.1. (Presque périodicité en loi) Nous disons qu'un processus $\{X(t)\}_{t\in I}$ est presque périodique en loi au sens de Bochner (APD)(resp p.p en loi au sens de Bohr, resp asymptotiquement p.p en loi au sens de Bohr) si l'application

$$\mu = \mathcal{L}(\widetilde{X}) : \begin{cases} I \to (\mathcal{P}(C_k), d_{BL}) \\ t \to \mathcal{L}(\widetilde{X})(t) = \mathcal{L}(X(t + .)) = \mu_t \end{cases}$$

est presque périodique au sens de Bochner (resp p.p en loi au sens de Bohr, resp asymptotique p.p en loi au sens de Bohr).

Où :

• $C_k = C_k(I, \mathbb{E})$ est l'espace des fonctions continues définies sur I à valeurs dans $\mathbb{E}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

• $\mathcal{P}(C_k)$ l'espace des probabilités sur C_k, muni de la topologie de la convergence étroite (topologie faible). Cette topologie est compatible avec la topologie induite par la métrique d_{BL}.

Plus précisément, pour $I = \mathbb{R}$ par exemple :

• X(t) est presque périodique en loi au sens de Bohr si $\forall \epsilon > 0$, $\exists l = l(\epsilon) > 0$t.q. $\forall a \in \mathbb{R}$, $[a, a + l] \cap T(\mu, \epsilon) \neq \varnothing$, avec

$$\begin{aligned} T(\mu, \epsilon) &= \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} d_{BL}(\mu_{t+\tau}, \mu_t) < \epsilon\} \\ &= \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} d_{BL}(\mathcal{L}(\widetilde{X})(t + \tau), \mathcal{L}(\widetilde{X})(t)) < \epsilon\} \\ &= \{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} d_{BL}(\mathcal{L}(X(t + \tau + .)), \mathcal{L}(X(t + .))) < \epsilon\} \end{aligned}$$

• X(t) est presque périodique en loi au sens de Bochner si la famille $\{t \to \widetilde{\mu}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est relativement compacte dans $C(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathcal{C}_k))$ munie de la topologie de la convergence uniforme avec $\widetilde{\mu}_t = \mu_{t+.} = \mathcal{L}(X(t + .))$.

Définition 1.3.2. (Presque périodicité en loi fini-dimensionnelle) Un processus $\{X(t)\}_{t\in I}$ est dit presque périodique en loi fini-dimensionnelle (APFD) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(t_1, \ldots, t_n) \in I$, l'application

$$\mu^{t_1,\ldots,t_n} = \mathcal{L}(X)^{t_1,\ldots,t_n} : \begin{cases} I \to \mathcal{P}(\mathbb{E}^n) \\ t \to \mathcal{L}(X(t_1 + t), \ldots, X(t_n + t)) = \mu_t^{t_1,\ldots,t_n} \end{cases}$$

est presque périodique.

Définition 1.3.3. (Presque périodicité en loi uni-dimensionnelle) Un processus $\{X(t)\}_{t\in I}$ est dit presque périodique en loi unidimensionnelle (APOD), Si l'application

$$\mu^0 = \mathcal{L}(X) : \begin{cases} I \to \mathcal{P}(\mathbb{E}) \\ t \to \mathcal{L}(X(t)) = \mu_t^0 \end{cases}$$

est presque périodique.

Pour établir le lien entre ces différentes définitions, nous avons besoin de rappeler le critère de tension pour les processus à trajectoires continues .

Définition 1.3.4. (Tension) Soit P une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on dit que P est **tendue**, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un ensemble compact K tel que:

$$P(K) > 1 - \varepsilon$$

Remarque 1.3.1. Une famille de mesures de probabilité $\{P_n\}$ est dite tendue lorsque , $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ compact t.q.

$$P_n(K) > 1 - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 1.3.1. *(Voir[2, p82]) Soit P_n une suite de mesures de probabilité sur $(\mathcal{C}, \mathrm{C})$, avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0, 1]$ est l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ et C est la tribu de Borel sur $\mathcal{C}$.*

Alors $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue si et seulement si :

1. *$\forall \eta > 0$, $\exists a$, $n_0 > 0$ et $\alpha \in \mathbb{E}$ tels que*

$$P_n[x : d_{\mathbb{E}}(x(0), \alpha) \geq a] \leq \eta, \quad n \geq n_0$$

2. *$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta$, $0 < \delta < 1$ et, $n_0 > 0$ tel que*

$$P_n[x : \sup_{|s-t|\leq\delta} d_{\mathbb{E}}(x(s), x(t)) \geq \varepsilon] \leq \eta, \quad n \geq n_0$$

La condition(2), peut être écrite sous la forme

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P_n[x : \sup_{|s-t|\leq\delta} d_{\mathbb{E}}(x(s), x(t)) \geq \varepsilon] = 0, \quad \forall \varepsilon \geq 0$$

Remarque 1.3.2. Si X est APD, alors par définition, la famille $\{r \to \mathcal{L}(\widetilde{X}(r))\}_{r\in I}$ est relativement compacte dans $C(I, \mathcal{P}(C_k))$. D'où par le théorème d'Arzelà Ascoli, on déduit que la famille $(\widetilde{X}(r))_{r\in I}$ est tendue sur $\mathcal{C}_k$. Alors d'après le théorème 1.3.1 pour tout $[a, b] \subset I$, $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, $\exists\delta > 0$ tel que

$$P\{\sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,\ s\in[a,\ b]}} d_{\mathbb{E}}(\widetilde{X}(r)(t), \widetilde{X}(r)(s)) > \eta\} < \varepsilon, \quad r \in I$$

Ce qui est équivalent à

$$P\{\sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ t,\ s\in[a,\ b]}} d_{\mathbb{E}}(X(r+t), X(r+s)) > \eta\} < \varepsilon, \quad r \in I \tag{1.2}$$

Théorème 1.3.2. *(Voir [2, p84]) Soit X, X^1, $X^2, \ldots$ des fonctions aléatoires. Si*

$$(X^n_{t_1}, \ldots, X^n_{t_k}) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \tag{1.3}$$

Pour tout $t_1, \ldots, t_k$, et si

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} P_n[x : \sup_{|s-t|\leq\delta} d_{\mathbb{E}}(X(s), X(t)) \geq \varepsilon] = 0, \quad \forall\varepsilon \geq 0 \tag{1.4}$$

Alors

$$X^n \Rightarrow_n X$$

Théorème 1.3.3. *Si X satisfait* (1.2)*, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *X est APFD.*
2. *X est APD.*

Preuve. On a clairement $2 \Rightarrow 1$. On montre alors que $1 \Rightarrow 2$ ($APFD \Rightarrow APD$).
Supposons que X est APFD. Posons:

$$\mu_t^{t_1,\ldots,t_k} = loi(X(t_1+t), \ldots X(t_k+t))$$

pour tout $t_1, t_2, \ldots t_k$, $t \in I$.

En utilisant le critère de double suites de Bochner ainsi que le procédé diagonal, on a $\forall(\alpha'_n)$, $(\beta'_n) \subset \mathbb{R}$, $\exists(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$, $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ t.q pour chaque $k \geq 1$, $q_1, q_2, \ldots, q_k \in Q \cap I$(avec Q est l'ensemble des nombre rationnels), et pour chaque $t \in I$ les limites

$$\lim_n \mu^{q_1,\ldots,q_k}_{t+\alpha_n+\beta_n} \quad et \quad \lim_n \lim_m \mu^{q_1,\ldots,q_k}_{t+\alpha_n+\beta_m}$$

existent et elles sont égales.

On a alors pour tout $t_1,\, t_2, \ldots, t_k,\, t \in I$ et pour tout $q_1,\, q_2, \ldots, q_k \in Q \cap I$

$$\begin{aligned} d_{BL}(\mu^{q_1,\ldots,q_k}_{t+\alpha_n+\beta_n},\, \mu^{t_1,\ldots,t_k}_{t+\alpha_n+\beta_n}) &= \sup_{\|f\|_{BL}\leq 1} \int_{\mathbb{E}^k} f d(\mu^{q_1,\ldots,q_k}_{t+\alpha_n+\beta_n} - \mu^{t_1,\ldots,t_k}_{t+\alpha_n+\beta_n}) \\ &\leq \int_{\Omega} d_{\mathbb{E}^k}[(X(q_1+t+\alpha_n+\beta_n), \ldots, X(q_k+t+\alpha_n+\beta_n), \\ &\quad (X(t_1+t+\alpha_n+\beta_n), \ldots, X(t_k+t+\alpha_n+\beta_n)]dP \end{aligned}$$

Donc, par (1.2), si $(q_1, \ldots, q_k) \to (t_1, \ldots, t_k)$, alors

$$d_{BL}(\mu^{q_1,\ldots,q_k}_{t+\alpha_n+\beta_n},\, \mu^{t_1,\ldots,t_k}_{t+\alpha_n+\beta_n}) \to 0$$

uniformément pour tout $t \in I$ et $n \geq 0$, par inversion des limites nous déduisons que, pour tout $k \geq 1$ et $t_1, \ldots, t_k,\, t \in I$ les limites

$$\lim_n \mu^{t_1,\ldots,t_k}_{t+\alpha_n+\beta_n} \quad et \quad \lim_n \lim_m \mu^{t_1,\ldots,t_k}_{t+\alpha_n+\beta_m}$$

existent et elles sont égales.

Par conséquent montrer que les limites

$$\lim_n loi(\widetilde{X}(t+\alpha_n+\beta_n)) \quad et \quad \lim_n \lim_m loi(\widetilde{X}(t+\alpha_n+\beta_m))$$

existent et sont égales, revient à prouver que $(\widetilde{X}(t))_{t\in I}$ et tendue sur $\mathcal{C}_k$.

Comme X est APFD, la famille $(X(t))_{t\in I} = (\widetilde{X}(t)(0))_{t\in I}$ est tendue, donc d'après (1.2) et théorème 1.3.2, nous concluons que $(\widetilde{X}(t))_{t\in I}$ est tendu sur $\mathcal{C}_k$.

□

Remarque 1.3.3. (Voir [12]) Pour $I = \mathbb{R}^+$, et pour un processus de Feller homogène X qui satisfait (1.2), les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X est APOD.
2. X est APFD.
3. X est APD.

Pour lire sur les processus de Feller, nous orientons le lecteur vers [7].

1.3.2 Presque périodicité en probabilité et en p-moyenne

1. Presque périodicité en probabilité

Définition 1.3.5. Nous disons que X est presque périodique en probabilité au sens de Bochner, si $\{\widetilde{X}(t), t \in I\}$ est totalement bornée pour la topologie de la convergence uniforme en probabilité, où X satisfait le critère de double suites de Bochner en probabilité c-à-d :

$$P - \lim_{n} X(t + \alpha_n + \beta_n) = P - \lim_{n} \lim_{m} X(t + \alpha_n + \beta_m)$$

Définition 1.3.6. Nous disons que X est presque périodique en probabilité au sens de Bohr (resp. asymptotiquement presque périodique en probabilité au sens de Bohr), si pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, $\exists l = l(\varepsilon, \eta) > 0$ (resp.$\exists l = l(\varepsilon, \eta) > 0$, $T = T(\varepsilon, \eta)$), tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un nombre τ tel que

$$P\{d_{\mathbb{E}}(X(t+\tau), X(t)) > \eta\} \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (resp. \forall t \geq T,\, t + \tau \geq T)$$

2. Presque périodicité en p-moyenne Dans cette partie on considère que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel norme, $\| \, . \, \|_{\mathbb{E}}$ sa norme et $I = \mathbb{R}$.

Définition 1.3.7. On dit que le processus X est presque périodique en moyenne d'ordre p, si l'application $X : \mathbb{R} \to L^p(\Omega, \mathbb{E})$, $t \to X(t)$ est presque périodique pour la norme $\| \, . \, \|_p = (\int \| \, . \, \|_{\mathbb{E}}^p \, dP)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 1.3.8. On dit que la famille $\{\| X(t) \|_{\mathbb{E}}, t \in \mathbb{R}\}$ est p-uniformément integrable (ou X est p-uniformément integrable) si

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{(\|X(t)\| > \alpha)} \| X(t) \|_{\mathbb{E}}^p \, dP = 0$$

Remarque 1.3.4.
1. Si X et borné, alors X est p-uniformément integrable.
2. Si X_n converge en p-moyenne alors X_n est p-uniformément integrable.
3. Si X_n converge en probabilité et X_n est p-uniformément integrable, alors X_n converge en p-moyenne (théorème de convergence de Vitali).

Proposition 1.3.1. *Si X est presque périodique en moyenne d'ordre p, alors il est presque périodique en probabilité. Inversement, si X est presque périodique en probabilité et la famille* $\{\| X(t) \|_{\mathbb{E}}^p, t \in \mathbb{R}\}$ *est uniformément integrable, alors X est presque périodique en* *moyenne d'ordre p.*

Preuve. On a clairement la presque périodicité en p-moyenne implique la presque périodicité en probabilité, par contre l'inverse est une conséquence directe du critère double suites de Bochner et le théorème de convergence de Vitali.

□

1.3.3 Propriétés de presque périodicité presque sûre

Définition 1.3.9. (Presque périodicité presque sûre) Le processus stochastique X est presque sûrement presque périodique s'il existe un sous ensemble mesurable $\Omega_1 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_1) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_1$, la trajectoire $t \to X(t)(\omega)$ est presque périodique.

Définition 1.3.10. (Critère de double suites presque sûr) Le processus stochastique X satisfait le critère uniforme de double suites presque sûr de Bochner si, pour toutes suites (α'_n) et (β'_n) dans I, il existe un sous ensemble mesurable Ω_0 de Ω tel que $P(\Omega_0) = 1$ et deux sous-suites $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ de mêmes indices telles que, pour tout $t \in I$, les limites

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_m)(\omega) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_n)(\omega) \tag{1.5}$$

existent et elles sont égales pour tout les $\omega \in \Omega_0$. (dans ce cas, Ω_0 depend des deux suites (α'_n) et (β'_n).)

1.3.4 Comparaison entre les presque périodicité

Cette partie est consacrée à la comparaison entre les différents types de presque périodicité.

1. Presque périodicité en probabilité et presque périodicité presque sûre Pour établir le lien entre la presque périodicité en probabilité et la presque périodicité presque sûre, on utilise le lien entre la convergence en probabilité et la convergence presque sûre. On sait que la convergence presque sûre implique celle en probabilité. Pour l'implication inverse, on a le lemme suivant :

Lemme 1.3.1. *Soit $(X_n(t))$ une suite de processus qui converge en probabilité uniformément par rapport à $t \in I$. Alors il existe une sous-suite $(X_{n_k}(t)) \subset (X_n(t))$ qui converge presque* *sûrement pour chaque $t \in I$.*

Preuve. Supposez que $(X_n(t))$ converge en probabilité vers un processus $(X(t))$ uniformément par rapport à $t \in I$, on note $Y_n(t) = d(X_n(t), X(t))$. Alors, par la convergence uniforme en probabilité de $X_n(t)$ vers $X(t)$: pour tout $\epsilon > 0$ et $\eta > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, \eta)$ tel que pour tout $t \in I$ et $n \geq N$, nous avons

$$P(Y_n(t) > \varepsilon) < \eta.$$

Soit maintenant (η_k) une suite des réels positifs tel que

$$\sum_{k \geq n} \eta_k \to 0 \quad lorsque \quad n \to \infty$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta_k > 0$, $\exists N_k = N(\varepsilon, \eta_k)$ tel que, pour tout $t \in I$, $P(Y_{N_k}(t) > \varepsilon) < \eta_k$. Montrons que $(Y_{N_k}(t))$ converge presque sûrement pour tout $t \in I$. Nous avons

$$P(\sup_{k \geq n} Y_{N_k}(t) > \varepsilon) = P(\bigcup_{k \geq n} \{Y_{N_k}(t) > \varepsilon\}) \leq \sum_{k \geq n} \eta_k$$

et le terme de la droite converge vers zéro pour $n \to \infty$. Donc $Y_{N_k}(t)$ converge presque sûrement vers zéro pour chaque $t \in I$. Comme $Y_{N_k}(t) = d(X_{N_k}(t), X(t))$, $X_{N_k}(t)$ converge presque sûrement vers $X(t)$ pour chaque $t \in I$.

□

Théorème 1.3.4. *Les propriétés suivantes de X sont équivalentes:*

1. *X vérifie le critère double suites uniforme presque sûr de Bochner.*
2. *X est presque périodique en probabilité.*

Preuve. On a $1 \Rightarrow 2$. Montrons que $2 \Rightarrow 1$.
Supposons que X est presque périodique en probabilité, alors X vérifie le critère double suite uniforme de Bochner en probabilité, c-à-d $\forall$ (α'_n) et (β'_n) dans I. Il existe deux sous-suites $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ de même indice tel que, pour tout $t \in I$, les limites en probabilité

$$P - \lim_{n\to\infty} X(t + \alpha_n + \beta_n) \quad et \quad P - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} X(t + \alpha_n + \beta_m)$$

existent et elles sont égales. D'après la remarque 1.1.3 ces limites existent uniformément(en probabilité) pour tout $t \in I$.

D'après le Lemme 1.3.1 il existe deux sous suites notées encore (α_n) et (β_n) avec les mêmes index telles que, pour chaque $t \in I$, les limites

$$\lim_{n\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_n) \quad et \quad \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} X(t+\alpha_n+\beta_m)$$

existent et elles sont égales presque sûrement, d'où (1).

□

1.1 La presque périodicité en probabilité et la presque périodicité des trajectoires L'exemple suivant montre qu'un processus peut être presque périodique en probabilité sans avoir des trajectoires presque périodique :
Soit (δ_n) une suite de variables aléatoires sur l'espace de probabilité $([0,\, 1],\, dt)$(dt est la mesure de lebesgue) définie par $\delta_n = 1_{[\frac{n}{2^k},\, \frac{n+1}{2^k}]}$ pour $2^{k-1} \leq n < 2^k, \quad k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : [0{,}1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} nt \quad si \quad t \in [0,\, \frac{1}{2}] \\ n(1-t) \quad si \quad t \in [\frac{1}{2},\, 1] \end{cases}$$

et $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$X_t(w) = \begin{cases} f_{[t]}(t-[t]) \quad si \quad \delta_{[t]}(w) = 1 \\ 0 \quad si \quad \delta_{[t]}(w) = 0 \end{cases}$$

avec $[t]$ est la partie entière du nombre t, et

$$f_{[t]}(t-[t]) = \begin{cases} [t](t-[t]) \qquad si \quad (t-[t]) \in [0,\, \frac{1}{2}] \\ (1-t+[t])[t] \quad si \quad (t-[t]) \in [\frac{1}{2},\, 1] \end{cases}$$

On remarque que les trajectoires de X sont continues sur $\mathbb{R}^+$. Mais presque aucune n'est bornée, ni uniformément continue car, si on pose $A_n = (\delta_n = 1)$ alors
$P(\limsup_n A_n) = P(\cap_n \cup_{k\geq n} A_k) = P([\frac{1}{2},\, 1]) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Nous avons pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} P(X_t > \varepsilon) = \lim_{t\to+\infty} P[\frac{[t]}{2^k},\, \frac{[t]+1}{2^k}] = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2^k} = 0,\ (k/\ 2^{k-1} \leq [t] < 2^k)$$

donc X est asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr en probabilité, donc il est presque périodique au sens de Bochner en probabilité.

1.2 La presque périodicité presque sûre et la presque périodicité en probabilité La presque périodicité presque sûre n'implique pas la presque périodicité en probabilité :

Soit X un processus défini par $X(t)(w) = e^{i\frac{t}{w}}$, $\forall w \in]0,\ 1]$ et $t \in I$. Le processus X est presque sûrement presque périodique, mais il n'est pas presque périodique en probabilité. En effet, comme $\mid X \mid \leq 1$, pour montrer que X n'est pas presque périodique en probabilité, il suffit de montrer que X n'est pas presque périodique en moyenne quadratique. Soit τ une ϵ-presque période c-à-d, $E \mid X_{t+\tau} - X_t \mid^2 \leq \varepsilon$, pour tout $t \in I$. Soit $A(\tau) = E \mid X_{t+\tau} - X_t \mid^2$

$$\begin{aligned}
A(\tau) &= \int_0^1 \mid e^{i\frac{t+\tau}{w}} - e^{i\frac{t}{w}} \mid^2 dw = \int_0^1 \mid e^{i\frac{\tau}{w}} - 1 \mid^2 dw = 4\int_0^1 \mid \frac{e^{i\frac{\tau}{2w}} - e^{-i\frac{-\tau}{2w}}}{2i} \mid^2 dw \\
&= 2\int_0^1 \sin^2(\frac{\tau}{w})dw = 2 \mid \tau \mid \int_{|\tau|}^{\infty} \frac{1-\cos(2u)}{u^2}du \\
&= 2 \mid \tau \mid \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\tau|+k\pi}^{|\tau|+(k+1)\pi} \frac{1-\cos(2u)}{u^2}du \\
&= 2 \mid \tau \mid \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\tau|+k\pi}^{|\tau|+(k+1)\pi} \frac{1}{u^2}du - 2 \mid \tau \mid \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|\tau|+k\pi}^{|\tau|+(k+1)\pi} \frac{\cos(2u)}{u^2}du \\
&\geq 2 \mid \tau \mid \int_{|\tau+\pi|}^{\infty} \frac{1}{u^2}du = 2\frac{\mid \tau \mid}{\mid \tau \mid + \pi}
\end{aligned}$$

car si on pose $a = \mid \tau \mid + k\pi$

$$\begin{aligned}
\int_{|\tau|+k\pi}^{|\tau|+(k+1)\pi} \frac{\cos(2u)}{u^2}du &= \int_a^{a+\pi} \frac{\cos(2u)}{u^2}du \geq \frac{1}{(a+\pi)^2}\int_a^{a+\pi} \cos(2u)du \\
&= \frac{1}{(a+\pi)^2}[\frac{1}{2}\sin(2u)]_a^{a+\pi} = 0
\end{aligned}$$

Donc si $\mid \tau \mid \geq \frac{\varepsilon\pi}{2-\varepsilon}$, nous obtenons $A(\tau) > \varepsilon$, qui montre que l'ensemble des ε-presque périodes n'est pas relativement dense dans I, donc X n'est pas presque périodique en moyenne quadratique.

2. Presque périodicité en loi et les autres types de presque périodicité

Théorème 1.3.5. *Un processus X presque périodique en probabilité est presque périodique en loi fini-dimensionnelle.*

Preuve. Supposons que X est presque périodique en probabilité alors, X satisfait le critère de double suites uniforme en probabilité. Soient (α'_n) et (β'_n) deux suites dans I, il existe deux sous-suites $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ de mêmes indices telles que, pour tout $t,s \in I$, les limites en probabilité

$$P - \lim_n X(t+s+\alpha_n+\beta_n) \quad et \quad P - \lim_n \lim_m X(t+s+\alpha_n+\beta_m)$$

existent et elles sont égales. De même, pour chaque $(t_1,\, t_2, \ldots, t_k) \in I$, et $\forall s \in I$, on a

$$P - \lim_n (X(t_1+s+\alpha_n+\beta_n),\, X(t_2+s+\alpha_n+\beta_n), \ldots, X(t_k+s+\alpha_n+\beta_n))$$

et

$$P - \lim_n \lim_m (X(t_1+s+\alpha_n+\beta_m),\, X(t_2+s+\alpha_n+\beta_m), \ldots, X(t_k+s+\alpha_n+\beta_m))$$

existent et elles sont égales, comme la convergence en probabilité implique la convergence en loi, alors on obtient

$$\lim_n loi(X(t_1+s+\alpha_n+\beta_n), \ldots, X(t_k+s+\alpha_n+\beta_n))$$

et

$$\lim_n \lim_m loi(X(t_1+s+\alpha_n+\beta_m), \ldots, X(t_k+s+\alpha_n+\beta_m))$$

existent et elles sont égales, alors X est APFD.

$\square$

Remarque 1.3.5. Si (1.4) est vérifiée, on a l'équivalence entre la presque périodicité en loi(APD) et la presque périodicité en loi fini-dimensionnelle (APFD). On déduit donc que la presque périodicité en probabilité implique l'APD dans ce cas.

2.1 La presque périodicité en loi n'implique pas la presque périodicité en probabilité Soit X un processus strictement stationnaire (donc APD) continu tel que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est indépendant et X_0 est non constante.
Supposons que X est presque périodique en probabilité, alors on peut extraire de X_n une sous suite (X_{n_k}) qui converge en probabilité vers une variable aléatoire U. Par la stationnarité de X, nous avons $\mathcal{L}(U) = \mathcal{L}(X_0)$, par la loi 0.1 de Kolomgorov, U est presque partout constante, contradiction. Donc X n'est pas presque périodique en probabilité.

2.2 La presque périodicité en probabilité n'implique pas la presque périodicité en loi Cet exemple est construit à partir de l'exemple de la sous section 1.1, mais celui-ci est presque périodique en probabilité et satisfait la condition (1.2), donc par le théorème 1.3.5 il est presque périodique en loi. Le processus que nous allons construire sera presque périodique en probabilité sans satisfaire la condition (1.2).
Soit $\Omega = [0,\, 1[$ et dt est la mesure de lebesgue. Pour tout $n \geq 0$, $w \in [0,\, 1[$ et $w'_n = \min(w + \frac{1}{n},\, 1)$. On défini la fonction f_n sur $[0,\, 1[\times[0,\, 1[$ par

$$f_n(w,\, t) = \begin{cases} 0 \quad si \quad t \leq w \quad ou \quad t \geq w'_n \\ 2\frac{t-w}{w'_n - w} \quad si \quad w \leq t \leq \frac{w+w'_n}{2} \\ 2\frac{w'_n - t}{w'_n - w} \quad si \quad \frac{w+w'_n}{2} \leq t \leq w'_n \end{cases}$$

pour $t \geq 0$, et $w \in [0,\, 1[$ on note

$$X_t(w) = f_{[t]}(w,\, t - [t])$$

avec [t]est la partie entière du nombre t. Alors les trajectoires de X sont continues et nous avons pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P(X_t > \varepsilon) \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{[t]} = 0$$

cela signifie que X est asymptotiquement presque périodique au sens de Bohr en probabilité, donc il est presque périodique au sens de Bochner en probabilité.
Pour chaque $n \geq 0$ et $w \in [0,\, 1[$ la fonction $f_n(w,\, .)$ prend la valeur 1 pour $t = \tau_n(w) = \frac{w+w'_n}{2}$, et 0 à l'extereur de l'intervalle $[w,\, w']$ donc, pour tout $n \geq 0$, $w \in \Omega$ $\exists t = n + \tau_n(w) \in [n,\, n+1]$ tel que $X_t(w) = 1$ et $s \in [n,\, n+1]$ tel que $X_s(w) = 0$ et $\mid t - s \mid \leq \frac{1}{n}$ pour tout $\delta > 0$, $n \geq \frac{1}{\delta}$ nous avons alors

$$P\{ \sup_{\substack{|t-s|<\delta \\ s\in[n,\, n+1]}} d_{\mathbb{E}}(X(t),\, X(s)) > \frac{1}{2}\} = 1$$

ce qui contredit la condition (1.2). Alors X n'est pas presque périodique en loi.

Conclusion

Le schéma suivant résume les liens existants entre les différents types de presque périodicité.

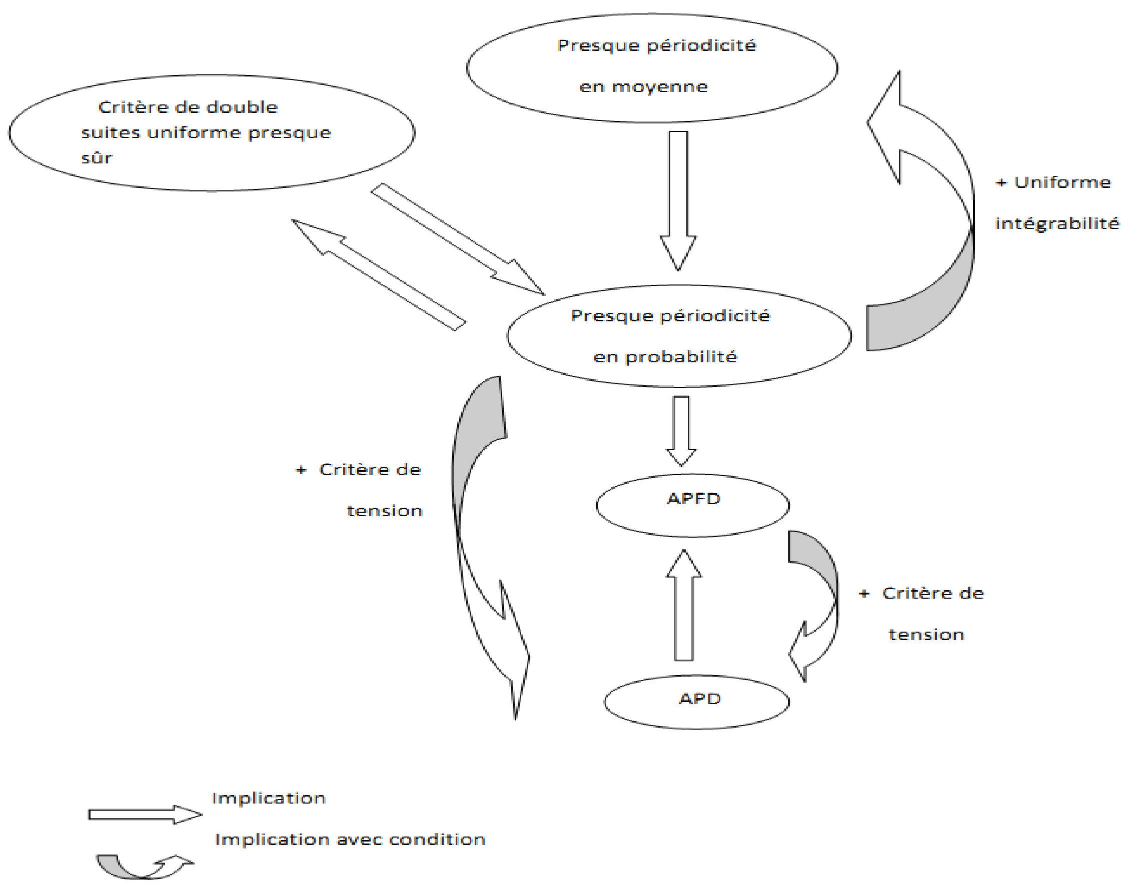

FIG. 1.1 – *Les liens entre les différents types de presque périodicité*

Chapitre 2

Exemple d'application aux équations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre on donne un exemple d'application de la presque périodicité en loi aux équations différentielles stochastiques.

2.1 Intégrales stochastiques

Dans cette section, on essaye de donner un sens à l'intégrale par rapport à un mouvement Brownien qui est note par $\int_0^T H_s dB_s$. On appelle ce genre d'intégrale intégrale stochastique, c-à-d intégrale par rapport à des processus stochastiques.

On va commencer par construire l'integrale stochastique sur un ensemble de processus dit élémentaires ou simples.

Définition 2.1.1. On appelle processus élémentaire H_t un processus de la forme:

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} X_i 1_{]t_i,\ t_{i+1}]}(t), \quad t \in [0,\, T]$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ forme une partition de $[0,\, T]$ et X_i est une v.a.$\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable et bornée $\forall i \in 1, \ldots ,n$.

On défini alors l'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H par rapport au mouvement Brownien comme:

$$\begin{aligned} I(H)_t &= \int_0^T H_s dB_s \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \end{aligned}$$

Pour étendre la notion d'intégrale stochastique à la classe des processus X-$\mathcal{F}_t$ adaptés vérifiant

$$\mathbb{E}[\int_0^T \mid X_t \mid^2 dt] < +\infty$$

notée par V, on a besoin de rappeler le résultat d'approximation suivant :

Lemme 2.1.1. *Soit $X \in V$ alors il existe une suite de processus simples $H_n(t)$ t.q.*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \mathbb{E} \mid X(t) - H_n(t) \mid^2 dt = 0$$

On est maintenant en mesure de définir l'intégrale stochastique pour un processus dans V :

Soit $X \in V$, par le lemme 2.1.1 X est limite au sens L_2 d'une suite de processus simples H_n. $\int_0^T X_t dB_t$ est alors définie par

$$\int_0^T X_t dB_t = L_2 - \lim_{n \to +\infty} \int_0^T H_n(t) dB_t.$$

On a les propriétés suivantes de l'intégrale stochastique :

Proposition 2.1.1. *(Voir[9]) Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus dans V, on a les propriétés suivantes:*

1. $\mathbb{E}(\int_0^T H_s dB_s) = 0.$

2. *Propriété d'Isométrie:*

$$\mathbb{E}((\int_0^T H_s dB_s)^2) = \mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds).$$

3. $\int_0^T H_s dB_s$ *est une martingale*

4. *Le processus* $((\int_0^T H_s dB_s)^2 - \int_0^T H_s^2 ds)$*est une martingale.*

5. *La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par:*

$$< \int_0^T H_s dB_s, \int_0^T H_s dB_s >= \int_0^T H_s^2 ds$$

Jusqu'à présent, on a défini l'intégrale stochastique mais il nous manque encore des règles de calcul. La première règle de calcul est la suivante:

2.1.1 Formules d'Itô

La formule d'Itô donne, en particulier, un façon de calculer $f(B_t)$ si f est une fonction deux fois continûment différentiable.

Théorème 2.1.1. *(Voir [11]) Soit* $(\mathrm{B_t},\ t \in \mathbb{R}^+)$ *un mouvement Brownien, et* $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ *(c.a.d* f,f',f'' *sont des fonctions continues). On suppose de plus que*

$$\mathbb{E}(\int_0^t (f'(B_s))^2 ds) < \infty, \forall t > 0. \tag{2.1}$$

Alors pour tout $t > 0$*,*

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \tag{2.2}$$

Exemples 2.1.1. Pour calculer $\int_0^t B_s dB_s$, on utilise la formule d'Itô.
Soit $f(X) = X^2$, on a alors $f'(X) = 2X$ et $f''(X) = 2$, pour $X = B_t$ on applique la formule (2.2) on obtient :
$B_t^2 - B_0^2 = \int_0^t 2B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2ds$
$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t$
Alors
$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

Nous généralisons maintenant la formule d'Ito ci-dessus en remplaçant le mouvement Brownien par une classe plus générale de processus.

2.1.2 Processus d'Ito

On appelle processus d'Ito, un processus stochastique (X_t) qui peut s'écrire sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Ou encore sous la forme

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t$$

où

- X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, et K_t, H_t sont $\mathcal{F}_t$ adaptés.
- $\int_0^T \mid K_s \mid ds < +\infty$ *p.s.*
- $\int_0^T \mid H_s \mid^2 ds < +\infty$ *p.s.*

Définition 2.1.2.

Théorème 2.1.2. ***(Variation quadratique d'un processus d'Itô)*** *Soit* (X_t)*un processus d'Ito:*

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t$$

Alors sa variation quadratique est donnée par :

$$d < X,X >_s = H_s^2 ds$$

Remarque 2.1.1. Pour calculer $d < X >_s = d < X,\, X >_s$, on peut appliquer la règle ci-dessous :

$<>$	ds	dB_s
ds	0	0
dB_s	0	ds

$d < X,\, X >_s = < K_s ds + H_s dB_s,\, K_s ds + H_s dB_s > = H_s^2 ds$

Exemples 2.1.2. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X >_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)(K_s ds + H_s dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds \end{aligned}$$

Proposition 2.1.2.

1. *Si M est une martingale qui sécrit sous la forme $M_t = \int_0^t K_s ds$ avec K un processus à variation bornée ($M_t = \int_0^t \mid K_s \mid ds < \infty \quad p.s$) alors $M_t = 0$ $p.s \forall t \in [0,\, T]$.*
2. *La décomposition d'un processus d'Ito est **unique** p.s*
3. *Un processus d'Ito est une martingale si et seulement si sa partie donnée par l'integrale de Rimann est nulle (sa partie en ds).*

Théorème 2.1.3. ***(Formule d'Itô)*** *Soit* (X_t)*un processus d'Ito:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et f une fonction deux fois continûment differentiable, on a:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X,\, X >_s$$

où, par définition:

$$< X,\, X >_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s$$

De même si $(t,\, x) \to f(t,\, x)$ est une fonction deux fois differentiable en x et une fois differentiable en t, ces dérivées étant continues en $(t,\, x)$,on a:

$$f(t,\, X_t) = f(0,\, X_0) + \int_0^t f'_s(s,\, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s,\, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,\, X_s) d < X,\, X >_s$$

2.1.3 Formule d'Itô vectorielle

La formule d'Itô s'étend au cas vectoriel comme suit:

Théorème 2.1.4. ***(Formule d'Itô vectorielle)*** *Soient $B_t = [B_{1,t}, \ldots, B_{m,t}]^T$ un mouvement Brownien de dimension m (c'est à dire que ses composantes sont des mouvements Browniens indépendants) et $X_t = [X_{1,t}, \ldots, X_{n,t}]^T$ représente un processus d'Itô de dimension n de la forme*

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t = \begin{pmatrix} b_{1,t} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n,t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11,t} & . & . & . & \sigma_{1m,t} \\ & & . & & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ \sigma_{n1,t} & . & . & . & \sigma_{nm,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ . \\ . \\ . \\ dB_{m,t} \end{pmatrix}$$

et $Y_t = f(t,\, X_t) = [f_1(t,\, X_t), \ldots, f_p(t,\, X_t)]^T = [Y_{1,\,t}, \ldots, Y_{p,t}]^T$ avec f de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. Alors , Y est un processus d'Itô donné par

$$dY_{k,t} = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t,\, X_t) dt + [\nabla_x f_k(t,\, X_t)]^T dX_t + \frac{1}{2} dX_t^T \nabla_x^2 f_k(t,\, X_t) dX_t$$

avec

$$[\nabla_x f_k(t,\, X_t)]_i = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t,\, X_t) \quad et \quad [\nabla_x^2 f_k(t,\, X_t)]_{ij} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,\, X_t)$$

L'exemple suivant illustre l'emploi de la formule d'Itô vectorielle:

Exemples 2.1.3. Pour $X_t = B_t$, on définit $Y_t = f(t,\, X_t) = [\cos X_t,\ \sin X_t]^T$. En utilisant la formule d'Itô vectorielle on obtient alors

$$dY_t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(B_t) \\ \sin(B_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} -\sin(B_t) \\ \cos(B_t) \end{pmatrix} dB_t$$

2.1.4 Formule d'intégration par parties

Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô, on a alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X,\, Y >_t \ \ p.s$$

qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X,\, Y >_t$$

2.1.5 Les différentes formes de la formule d'Itô

Pour le Mouvement Brownian (B_t) avec $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s) ds.$$

2. Pour un processus d'Itô avec $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X >_s .$$

3. Pour un processus d'Itô avec $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0,\, T] \times \mathbb{R})$ fonction du temps et de l'espace:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(s, X_s) d < X >_s .$$

4. Pour un processus d'Itô multidimensionnelle $f \in \mathcal{C}^{1,2}([0,\, T] \times \mathbb{R}^n)$:

$$f(t,\, X_t) = f(0,\, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,\, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_i}(s,\, X_s) dX_s$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(s,\, X_s)d < X_i,\, X_j >_s .$$

Remarque 2.1.2. Dans les formules (3)et (4)nous avons fait le développement de Taylor à l'ordre 1 par rapport à t car la fonction t est une fonction à variation finie .

2.2 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation d'une équation différentielle ordinaire (EDO). Le but est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire.
La perturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien, qui sera de la forme $G(t,\, X_t)dB_t$ avec B est un mouvement brownien. Une EDS est de la forme

$$\begin{cases} dX_t = F(t,\, X_t)dt + G(t,\, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.3}$$

En fait l'écriture (2.3) est symbolique car dB_t, n'a pas vraiment de sens (le mouvement brownien n'est pas dérivable), il faudrait écrire (2.3) sous la forme

$$X_t = x + \int_0^t F(s,\, X_s)ds + \int_0^t G(s,\, X_s)dB_s \tag{2.4}$$

X est donc construit à l'aide de l'integrale stochastique $\int_0^t \sigma(s,\, X_s)dB_s$ définie dans la premiere partie.

Avant de donner plus de détail sur les équations différentielles stochastiques, nous rappelons un résultat d'existence et d'unicité concernant les équations différentielles ordinaires.
Définition 2.2.1. (Equation différentielle ordinaire) Une équation différentielle ordinaire (EDO) sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est un système du type

$$\begin{cases} y_t^{'} = f(t,\, y) \\ y_0 = x_0 \end{cases}$$

où $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.
En général, il est impossible de donner une solution explicite à une EDO. On peut cependant chercher à savoir s'il existe une solution, et si elle est unique. Pour cela nous disposons du résultat suivant:
Théorème (Cauchy-Lipschitz). *Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que*

pour tous $t \in \mathbb{R}^+$, x, $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \mid f(t,\, x) - f(t,\, y) \mid \leq K \mid x - y \mid (\textit{condition} \quad \textit{de} \quad \textit{Lipschitz}) \\ \mid f(t,\, x) \mid \leq K(1 + \mid x \mid) \end{cases}$$

Alors l'EDO a une solution unique définie sur $\mathbb{R}^+$.

Exemples 2.2.1. Soit:

$$\begin{cases} f(t,\, y) = y^2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Alors l'unique solution de ce système est $y_t = \dfrac{1}{1-t}$.

Définition 2.2.2. (équation différentielle stochastique) On appelle EDS une équation de la forme:

$$\begin{cases} dX_t = b(t,\, X_t)dt + \sigma(t,\, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.5}$$

ou sous forme d'intégrale

$$X_t = x + \int_0^t b(s,\, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,\, X_s)dB_s \tag{2.6}$$

avec : $b(t,\, X_t)$ appelé **dérive** ou **drift** de l'EDS, $\sigma(t,\, X_t)$ appelé **coefficient de diffusion** de l'EDS.

L'inconnue est le processus X. Le problème est ,comme pour une EDO, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

La solution d'une EDS est une fonction aléatoire. Il s'agit d'un processus qu'on note $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Plus précisément, on a :

2.2.1 Solution d'une EDS

Une solution de l'EDS est définie par :

Une base stochastique filtrée $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathcal{F}_t,\, \mathbf{P})$.

2. Un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien B_t

3. Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ continu $\mathcal{F}_t$ -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ ont un sens et l'égalité

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

est satisfaite pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ presque sûrement (p.s).

2.2.2 L'existence et l'unicité de la solution

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes sur b et σ pour avoir un résultat d'existence et d'unicité pour (2.5).

Théorème 2.2.1. *Soit b et σ deux fonctions, on suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, $X, Y \in \mathbb{R}$, on a :*

Condition de Lipschitz

$$| b(t, X_t) - b(t, Y_t) | + | \sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t) | \leq K | X - Y |$$

2. Croissance linéaire

$$| b(t, X_t) | + | \sigma(t, X_t) | \leq K(1+ | X |)$$

3.

$$E[| X_0 |^2] < \infty$$

Alors l'EDS (2.5) possède une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$. De plus cette solution $(X_s)_{0\leq t\leq T}$ vérifie:

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} | X_s |^2) < +\infty$$

L'unicité signifie que si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ et $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ sont deux solutions de (2.5), alors:

$$\forall\ 0 \leq t \leq T,\ X_t = Y_t \ p.s.$$

Exemples 2.2.2. On considère l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x_0$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et σ, $x_0 > 0$, on montre l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela nous allons vérifier les conditions du théorème, alors:

On a

$$\begin{aligned}
\mid \mu X_t - \mu Y_t \mid + \mid \sigma X_t - \sigma Y_t \mid &= \mid \mu(X_t - Y_t) \mid + \mid \sigma(X_t - Y_t) \mid \\
&\leq \mid \mu \mid\mid X_t - Y_t \mid + \mid \sigma \mid\mid X_t - Y_t \mid \\
&\leq (\mid \mu \mid + \mid \sigma \mid)(\mid X_t - Y_t \mid) \\
&\leq K \mid X_t - Y_t \mid
\end{aligned}$$

D'où la condition de Lipschitz.

2. Et

$$\begin{aligned}
\mid \mu X_t \mid + \mid \sigma X_t \mid &\leq \mid \mu \mid\mid X_t \mid + \mid \sigma \mid\mid X_t \mid \\
&\leq (\mid \mu \mid + \mid \sigma \mid) \mid X_t \mid \\
&\leq K \mid X_t \mid
\end{aligned}$$

D'où la condition de linéarité.

3. On a x_0 constant $E(\mid x_0 \mid^2) < \infty$.

Définition 2.2.3. (Solution forte) Un processus adapté X_t sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ est appelé solution forte de l'EDS (2.5) si:

$\mathbb{P}\{X_0 = x\} = 1$.

2. $\int_0^T [\parallel b(s,\, X_s) \parallel + \parallel \sigma(s,\, X_s) \parallel^2] ds < +\infty$.

3. $X_t = X_0 + \int_0^T b(s{,}X_s)ds + \int_0^T \sigma(s{,}X_s)dB_s$, $\mathbb{P}$ *presque sûrement.*

Définition 2.2.4. (Solution faible) Une solution faible de l'equation (2.5) est un processus continu (X_t) tel que les processus (M_t) et (N_t) définis respectivement par :

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(s{,}X)ds, \quad N_t = M_t^2 - \int_0^t \sigma(s{,}X)^2 ds$$

sont des martingales.

Proposition 2.2.1. *Supposons b, σ continues, σ bornée et supposons encore que l'équation* (2.5) *admette une solution forte* (X_t). *Alors* (X_t) *est une solution faible de* (2.5).

Preuve. On a σ bornée, il est clair que

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t b(s,X)ds = \int_0^t \sigma(s,X)dB_s$$

est une martingale continue de carré integrable. De plus, la variation quadratique de (M_t) est donnée par $< M_t >= \int_0^t \sigma(s,X)^2 ds$, donc le processus (N_t) défini par

$$N_t = M_t^2 - \int_0^t \sigma(s,X)^2 ds$$

est également une martingale.
D'où (X_t) est une solution faible.

Exemples 2.2.3. On considère l'EDS suivante:

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t \quad et \quad X_0 = 0$$

On montre que cette équation admet une solution faible.
On a:
$M_t = X_t - a\int_0^t X_s ds = \int_0^t \sqrt{X_s} dB_s$
et
$N_t = M_t^2 - \int_0^t X_s ds$
sont des martingales. D'où cette équation admet une solution faible.

Par contre il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité de solution forte.
Pour voir cela, on considère l'exemple suivant:

Exemples 2.2.4. (Existence de solution faible qui n'est pas forte) (Voir [14])
On considère l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = signe(X_t)dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

avec

$$signe(X_T) = \begin{cases} 1 \quad si \quad X \geq 0 \\ -1 \quad si \quad X < 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

On constate facilement que
$X_t = \int_0^t signe(X_s)dB_s$

On montre que X_t est solution faible de l'équation (2.7), d'après la définition 2.2.4 on a
$M_t = \int_0^t signe(X_s)dB_s$
et
$N_t = M_t^2 - \int_0^t signe(X_s)^2 ds$
Alors X_t est une martingale, et que

$$< X_t, X_t >= \int_0^t signe(X_s)^2 ds = \int_0^t ds = t$$

Par le théorème de Paul Lévy, on a X_t est un mouvement Brownien standard .
On déduit que tous les mouvements Browniens standards sont des solutions de l'équation (2.7), comme tous les mouvements Brownien standards sont de même loi alors l'équation (2.7) admet une solution faible unique.
L'équation (2.7) n'admet pas une solution forte unique car: si on considère (B_t) et $(-B_t)$ deux solution de (2.7), alors $P(B_t = -B_t) = P(2B_t = 0) = 0$ donc (2.7) n'admet pas de solution forte unique.

A présent, pour trouver la solution d'une EDS, on introduit la forme de la solution et on vérifie que l'EDS de départ est bien satisfaite en appliquant la formule d'Itô, et voici quelques exemples .

2.2.3 Solution explicite de quelques types d'EDS

On considère deux types d'EDS : Equations linéaires et Equations affines.

Equations linéaires On appelle EDS linéaire, une équation avec des coefficients linéaires qui sont de la forme: $b(t, X_t) = aX_t$ et $\sigma(t, X_t) = bX_t$

Equation de Langevin

Un exemple classique d'utilisation de l'integrale stochastique est la résolution de l'équation de Langevin, qui est sous la forme:

$$\begin{cases} dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.9}$$

Pour X_0 donnée, l'équation de Langevin possède une unique solution appelée processus Ornstein-Uhlenbeck est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s \tag{2.10}$$

Sans le terme σdB_t, l'équation (2.9) devient $dX_t = -aX_t dt$

$$dX_t = -aX_t dt \Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} = -adt$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} = \int_0^t -ads$$

$$\Rightarrow \ln(X_t) = -at$$

$$\Rightarrow X_t = ce^{-at}$$

d'où sa solution est

$$X_t = Ce^{-at}$$

Pour tenir compte du terme σdB_t, on fait varier la constante C :

$$dCe^{-at} - aCe^{-at} = dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$$

d'où

$$dCe^{-at} = \sigma dB_t$$

$$dC = \sigma e^{at} dB_t$$

$$\int_0^t dC = \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

$$C = x_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

Alors la solution de l'équation (2.9) est

$$X_t = x_0 e^{-at} + e^{-at} \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

On peut aussi utiliser la formule d'intégration par parties pour vérifier que X_t est solution de (2.9). On pose $Y_t = x_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$, et $X_t = e^{-at}$

On obtient:
$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + d < X,Y >_t$

$$\begin{aligned} d(X_tY_t) &= X_tdY_t + Y_tdX_t + d < X,Y >_t \\ &= e^{-at}dY_t - aY_te^{-at}dt \\ &= e^{-at}\sigma e^{at}dB_t - aY_te^{-at}dt \\ &= -aX_tdt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

d'où (2.9)
Avec $d < X,Y >_t= 0$ car e^{at} à variation bornée (dérivable), et $Y_te^{-at} = X_t$

Equation de Black et Scholes Soit l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_tdt + \sigma X_tdB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Sa solution est donnée par

$$X_t = X_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t) \tag{2.12}$$

Cette équation est appelée équation de Black et Scholes.

Si X_t est le prix d'une action à l'instant t, il est possible de modéliser son évolution en supposant que $\frac{dX}{X}$, la variation relative du prix, évolue selon l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

où μ et σ sont deux constantes appelées dérive et volatilité de l'action. Alors

$$dX_t = \mu X_tdt + \sigma X_tdB_t$$

On suppose que $X_t > 0$

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

En intégrant le membre de gauche, on trouve $\log(X_t)$, posons $Y_t = \log(X_t)$, On applique la formule d'Itô on obtient:

$$\begin{aligned}
dY_t &= Y_t^{'} dX_t + \frac{1}{2} Y_t^{''} d < X >_t \\
&= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} d < X >_t \\
&= \frac{1}{X_t} (\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} \sigma_t^2 X_t^2 dt \\
&= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 dt \\
&= (\mu - \frac{1}{2} \sigma_t^2) dt + \sigma dB_t
\end{aligned}$$

Alors:
$d \log(X_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma_t^2)dt + \sigma dB_t$
En intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc
$X_t = X_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma_t^2)t + \sigma B_t)$
On obtient donc la solution (2.12)

2. **Equations affines** On dit qu'une équation est affine si ces coefficients sont affines c-à-d: si $b(t, X_T)$ est sous la forme $bX_t + b'$ et $\sigma(t, X_T)$ est sous la forme $\sigma X_t + \sigma'$
On considère l'EDS affine générale suivente :

$$\begin{cases} dX_t = (\mu X_t + \mu^{'})dt + (\sigma X_t + \sigma^{'})dB_t \\ X_0 = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Sa solution est donnée par

$$X_t = S_t + (\mu^{'} - \sigma\sigma^{'})S_t \int_0^t S_s^{-1} ds + \sigma^{'} S_t \int_0^t S_s^{-1} dB_s \tag{2.14}$$

Avec
$S_t = \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$ solution de l'EDS linéaire suivante

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

et $S_0 = 1$.
déterminons l'équation dont la solution est S_t^{-1}

Posons: $f(X) = \frac{1}{X}$, $X \neq 0$.

$$\begin{aligned}
f(S_t) &= f(S_0) + \int_0^t f^{'}(S_s)dS_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(S_s)d < S >_s \\
&= 1 - \int_0^t \frac{1}{S_s^2}dS_s + \int_0^t \frac{1}{S_s^3}d < S >_s \\
&= 1 - \int_0^t \frac{1}{S_s^2}(\mu S_s dS + \sigma S_s dB_s) + \int_0^t \frac{1}{S_s^3}\sigma^2 S_s^2 ds \\
&= 1 - \int_0^t \frac{1}{S_s}(\mu dS + \sigma dB_s) + \int_0^t \frac{1}{S_s}\sigma^2 ds \\
&= 1 + \int_0^t \frac{1}{S_s}(-\mu + \sigma^2)ds - \int_0^t \frac{1}{S_s}\sigma dB_s
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
dS_t^{-1} &= \frac{1}{S_t}(-\mu + \sigma^2)dt - \frac{1}{S_t}\sigma dB_t \\
&= S_t^{-1}(-\mu + \sigma^2)dt - S_t^{-1}\sigma dB_t
\end{aligned}$$

On pose: $Y_t = X_t S_t^{-1}$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
d(X_t S_t^{-1}) &= X_t dS_t^{-1} + S_t^{-1}dX_t + d < X_t S_t^{-1} > \\
&= X_t dS_t^{-1} + S_t^{-1}((\mu X_t + \mu^{'})dt + (\sigma X_t + \sigma^{'})dB_t) - \sigma S_t^{-1}(\sigma X_t + \sigma^{'})dt \\
&= S_t^{-1}(\mu^{'} - \sigma\sigma^{'})dt + \sigma^{'} S_t^{-1} dB_t
\end{aligned}$$

D'où

$X_t S_t^{-1} = 1 + (\mu^{'} - \sigma\sigma^{'}) \int_0^t S_s^{-1}ds + \sigma^{'} \int_0^t S_s^{-1}dB_s$

Alors

$X_t = S_t(1 + (\mu^{'} - \sigma\sigma^{'}) \int_0^t S_s^{-1}ds + \sigma^{'} \int_0^t S_s^{-1}dB_s)$

D'où (2.14).

On montre que X_t est solution de (2.13) à l'aide de la formule d'Itô

$X_t = S_t(1 + (\mu^{'} - \sigma\sigma^{'}) \int_0^t S_s^{-1}ds + \sigma^{'} \int_0^t S_s^{-1}dB_s)$

on pose $X_t = S_t Z_t$ d'ou

$$\begin{aligned}
dX_t &= S_t dZ_t + Z_t dS_t + d < S_t Z_t > \\
&= S_t(\mu^{'} - \sigma^{'}\sigma)S_t^{-1}dt + S_t\sigma^{'}S_t^{-1}dB_t) + Z_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \sigma^{'}\sigma dt \\
&= \mu^{'}dt + \sigma^{'}dB_t + X_t\mu_t dt + X_t\sigma_t dB_t \\
&= (\mu X_t + \mu^{'})dt + (\sigma X_t + \sigma^{'})dB_t
\end{aligned}$$

D'ou (2.13)

2.3 Intégrale stochastique dans un espace de Hilbert

L'objectif de cette partie est de donner un sens à l'intégrale stochastique $\int_0^t G(s)dW_s$, où W_s est un processus de Wiener à valeur dans un espace de Hilbert. On présentera à cet effet la formule d'Itô ainsi que les propriétés essentielles de cette intégrale.
Dans la suite on considère deux espaces de Hilbert séparables $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$. On note par $L(\mathbb{H}_1,\, \mathbb{H}_2)$ $(L(\mathbb{H}_1)$ *pour* $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_2)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés, $\|\ .\ \|_{L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)}$ sa norme et $Q \in L(\mathbb{H}_1)$ un opérateur symétrique défini positif sur $\mathbb{H}_1$ avec $Qe_j = \lambda_j e_j$, $j = 1,\, 2,\, \ldots$ pour une base orthonormée complète $\{e_j\}$ et $trQ = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j < +\infty$, et $W(t)$ un Q-processus de Winer c-à-d:

Définition 2.3.1. Le processus $W(t)$, $t \geq 0$ est un Q-processus de Wiener si:

W(0)=0.

2. W est à trajectoires continues.
3. W indépendant.
4. $\mathcal{L}(W(t) - W(s)) = \mathcal{N}(0,\, (t-s)Q)$, $t \geq s \geq 0$.

Si le processus $W(t)$, $t \in [0, T]$ satisfit (1)-(4) pour tout t, $s \in [0, T]$ alors le processus $W(t)$ est dit Q-processus de Wiener pour tout $[0, T]$.

Proposition 2.3.1. *Supposons que* W *est un* Q*-processus de Wiener, et* $trQ < \infty$*. Alors on a:*

W est un processus Gaussian dans $\mathbb{H}_1$

$$\mathbb{E}(W(t)) = 0 \quad et \quad Cov(W(t)) = tQ$$

2. *Pour tout t, W s'écrit sous la forme*

$$W(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_j} B_j(t) e_j$$

Avec

$$B_j(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} < W(t),\, e_j > \quad j = 1,\, 2, \ldots$$

est un mouvement Brownien.

Pour définir l'intégrale stochastique par rapport au processus W, on introduit le sous espace $\mathbb{H}_1^0 = Q^{\frac{1}{2}}\mathbb{H}_1$ qui est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\| u \|_{\mathbb{H}_1^0} = \| Q^{\frac{1}{2}} u \|_{\mathbb{H}_1} \ ,\ u \in \mathbb{H}_1$$

Soit maintenant

$$L_2^0 = L_2^0(\mathbb{H}_1^0,\, \mathbb{H}_2) = \{\psi \in L(\mathbb{H}_1^0,\, \mathbb{H}_2) : Tr((\psi Q^{\frac{1}{2}})(\psi Q^{\frac{1}{2}})^*) < \infty\}$$

l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Alors L_2^0 est un espace de Hilbert séparable muni de la norme

$$\| \psi \|_{L_2^0}^2 = Tr((\psi Q^{\frac{1}{2}})(\psi Q^{\frac{1}{2}})^*) \ \forall \psi \in L_2^0$$

Soit $T \geq 0$ et $\phi = \phi(t)$, $t \in [0,\, T]$ un processus à valeurs dans L_2^0 $\mathcal{F}_t$-adapté.
Notons par:

$$\| \phi \|_t = \left\{ \mathbb{E} \int_0^t Tr((\phi Q^{\frac{1}{2}})(\phi Q^{\frac{1}{2}})^*)) ds \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\mathcal{U}^2([0,\, T],\, L_2^0) = \left\{ \phi : [0,\, T] \to L_2^0 \ t.q. \ \| \phi \|_T < +\infty \right\}$$

Alors l'intégrale stochastique $\displaystyle\int_0^t \phi(s) dW_s \ \in \mathbb{H}$ est définie par

$$\int_0^t \phi(s) dW_s = L^2 - \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \phi(s) \sqrt{\lambda_i} e_i dB_i(s) \ t \in [0,\, T]$$

Proposition 2.3.2. *1. La variation quadratique de l'intégrale stochastique* $\int_0^t (H(s) dW_s$ *est donnée par*

$$\ll H.W(t) \gg = \int_0^t (H(s) Q^{\frac{1}{2}})(H(s) Q^{\frac{1}{2}})^* ds$$

2. *Propriété d'Isométrie*

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \parallel \int_0^t H(s)dW_s \parallel^2 &= \parallel H \parallel_t^2 \\ &= \mathbb{E}(\int_0^t tr(H(s)QH(s)^*)ds)\end{aligned}$$

3.

$$\mathbb{E}\int_0^t H(s)dW_s = 0.$$

4.

$$\mathbb{E} \parallel \int_0^t H(s)dW_s \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 \leq \mathbb{E}\int_0^t \parallel H(s) \parallel_{L_2}^2 ds,\ 0 \leq t \leq T$$

Lemme 2.3.1. *([10]) Soit $p \geq 2$, et $Y \in L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ un processus stochastique adapté, on a pour tout $t \geq 0$*

$$\mathbb{E} \parallel \int_0^T Y(s)dW(s) \parallel^P \leq C_p\mathbb{E}(\int_0^t tr(Y(s)QY^*(s)ds)^{\frac{p}{2}} \tag{2.15}$$

Avec

$$C_p = \frac{1}{(2c)^{\frac{p}{2}}}(\frac{2+2c}{p-1} - 2^{\frac{p}{2}})\ et\ c > (p-1)2^{\frac{p}{2}-1} - 1$$

Pour $p = 2$ on a $C_2 = 1$ alors dans l'équation (2.15)*on aura l'égalité des deux termes.*

2.3.1 Formule d'Itô

Soie $(H(t,.))_{0 \leq t \leq T}$ un processus stochastique dans $\mathcal{U}^2([0,\ T],\ L_2^0)$, et X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{H}_1$ $\mathcal{F}_0$-mesurable, $K : [0,\ T] \times \Omega \to \mathbb{H}_1$ un processus intégrable presque sûrement, alors le processus suivant

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW_s$$

est bien défini, et un processus de cette forme s'appelle processus d'Itô. On écrit en notation différentielle

$$dX_t = K_tdt + H_tdW_t$$

Théorème 2.3.1. ***(Formule d'Itô)****[6] Avec les notations précédentes, soit $g : [0,T] \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, le processus $Y_t = g(t,X_t)$ est un processus d'Itô, et*

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t g_s'(s,\ X_s)ds + \int_0^t g_x'(s,\ X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_{xx}''(s,\ X_s)d < X,\ X >_s$$

qui est équivalent a

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t g'_s(s,\, X_s)ds + \int_0^t < g'_x(s,\, X_s),\, K_s > ds + \int_0^t < g'_x(s,\, X_s),\, H_s dW_s >$$

$$+\frac{1}{2}tr\int_0^t (g''_{xx}(s,\, X_s)H_s Q^{\frac{1}{2}}(H_s Q^{\frac{1}{2}})^*)ds$$

2.4 Solution presque périodique en loi d' une EDS

Dans la suite, on donne un exemple d'application de la presque périodicité aux équations différentielles stochastiques. Plus précisément, on présentera un résultat d'existence et d'unicité d'une solution presque périodique en loi pour une classe d'équations différentielles stochastiques à coefficients presque périodiques.

On note par $L^2(P,\, \mathbb{H}_2)$ l'espace des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{H}_2$, à moyenne quadratique finie. Et par $CUB(\mathbb{R},\, L^2(P,\mathbb{H}_2))$ l'espaces de Banach des processus stochastiques continus et uniformément bornée en moyenne quadratique.

Nous considérons l'equation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = AX(t)dt + F(t,\, X(t))dt + G(t,\, X(t))dW(t) \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

Avec:

$A : Dom(A) \subset \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ est un opérateur linéaire fermé tel que $Dom(A)$ est dense dans $\mathbb{H}_2$.

$F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L(\mathbb{H}_1,\, \mathbb{H}_2)$ sont des fonctions continues.

Supposons qu'on a :

$W(t)$ est un Q processus de Wiener, avec Q un opérateur nucléaire, défini sur une base stochastique $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F})_{t\in\mathbb{R}},\, \mathbb{P})$.

2. $A : Dom(A) \to \mathbb{H}_2$ est le générateur infinitésimal d'un $\mathcal{C}_0$ semi-groupe noté par $(S(t))_{t\geq 0}$ tel qu'il existe une constante $\delta > 0$ avec

$$\| S(t) \|_{L(\mathbb{H}_2)} \leq e^{-\delta t}, \quad t \geq 0$$

3. Il existe une constante K tel que les fonctions $F : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to \mathbb{H}_2$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{H}_2 \to L(\mathbb{H}_1,\, \mathbb{H}_2)$ satisfont

$$\| F(t,\, x) \|_{\mathbb{H}_2} + \| G(t,\, x) \|_{L(\mathbb{H}_1,\, \mathbb{H}_2)} \leq K(1+ \| x \|_{\mathbb{H}_2})$$

4. Les fonctions F et G sont Lipschitzienne, c-à-d il existe une constante K telle que

$$\| F(t, x) - F(t, y) \|_{\mathbb{H}_2} + \| G(t, x) - G(t, y) \|_{L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)} \leq K \| x - y \|_{\mathbb{H}_2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{H}_2$.

5. Les fonctions F et G sont uniformément presque périodiques pour tout $t \in \mathbb{R}$ uniformément par rapport aux sous-ensembles bornés de $\mathbb{H}_2$.

Théorème 2.4.1. *(Voir [10]) On suppose que les conditions de (1) à (5) sont réalisées, et que* $\theta = \frac{K^2}{\delta}(\frac{2}{\delta} + trQ) < 1$. *Alors il existe une unique solution X de* (2.16) *dans* $CUB(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{P}, \mathbb{H}_2))$. *Autrement dit, X a des trajectoires presque partout continues, et $X(t)$ peut être exprimé explicitement comme suit, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s, X(s))dW(s) \tag{2.17}$$

Si de plus $\theta' = \frac{4K^2}{\delta}(\frac{1}{\delta} + trQ) < 1$, *alors X est presque périodique en loi.*

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes:
La première consiste à montrer l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation,en utilisant le théorème du point fixe. La deuxième consiste à démontrer que cette solution est presque périodique en loi, et pour cela on utilise le critère de double suites de Bochner.

Soit X une solution de (2.16). Notons que pour tout $t \geq s$, $s \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s, X(s))dW(s)$$

satisfait

$$X(t) = S(t-s)X(s) + \int_{s}^{t} S(t-s)F(s, X(s))ds + \int_{s}^{t} S(t-s)G(s, X(s))dW(s)$$

Nous introduisons un opérateur L par

$$LX(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s, X(s))dW(s)$$

Première partie : Nous allons montrer que L admet un point fixe unique, pour cela on calcule $I = \mathbb{E} \| (LX)(t) - (LY)(t) \|_{\mathbb{H}_2}^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, en utilisant l'inégalité de

Cauchy-Schwartz et l'identité de parallelogram ($\| a+b \|^2 \leq 2 \| a \|^2 + 2 \| b \|^2$), on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \mathbb{E} \| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s,\, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s,\, X(s))dW(s) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s,\, Y(s))ds - \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s,\, Y(s))dW(s) \|_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&= \mathbb{E} \| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s))]ds \\
&\quad + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s))]dW(s) \|_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&\leq 2\mathbb{E} \| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s))]ds \|_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&\quad +2\mathbb{E} \| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s))]dW(s) \|_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} \| S(t-s) \| \| F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s)) \|_{\mathbb{H}_2} ds)^2 \\
&\quad +2\mathbb{E}(\| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s))]dW(s) \|_{\mathbb{H}_2})^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \| F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s)) \|_{\mathbb{H}_2} ds)^2 \\
&\quad +2\mathbb{E}(\| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s))]dW(s) \|_{\mathbb{H}_2})^2 \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \parallel F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s)) \parallel_{\mathbb{H}_2} ds)^2 \\
&\leq 2\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} ds \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \mathbb{E} \parallel F(s,\, X(s)) - F(s,\, Y(s)) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 ds) \\
&\leq 2K^2 \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} ds \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 ds \\
&\leq 2K^2 (\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} ds)^2 \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&\leq \frac{2K^2}{\delta^2} \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2
\end{aligned}$$

Pour I_2, nous utilisons l'identité de l'isometrie nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2\mathbb{E}(\parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s))] dW(s) \parallel_{\mathbb{H}_2})^2 \\
&\leq 2trQ \int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)} \mathbb{E} \parallel G(s,\, X(s)) - G(s,\, Y(s)) \parallel_{L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)}^2 ds \\
&\leq 2K^2 trQ \int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 ds \\
&\leq 2K^2 trQ (\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)} ds) \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2 \\
&\leq \frac{K^2 trQ}{\delta} \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel_{\mathbb{H}_2}^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \parallel (LX)(t) - (LY)(t) \parallel^2_{\mathbb{H}_2} &\leq I_1 + I_2 \\
&\leq (\frac{2K^2}{\delta^2} + \frac{K^2 trQ}{\delta}) \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel^2_{\mathbb{H}_2} \\
&\leq \frac{K^2}{\delta}(\frac{2}{\delta} + trQ) \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel^2_{\mathbb{H}_2} \\
&\leq \theta \sup_{s\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X(s) - Y(s) \parallel^2_{\mathbb{H}_2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $\theta < 1$, nous déduisons que L est un opérateur contractant, d'où, il existe une unique solution de (2.16) sur $CUB(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{P}, \mathbb{H}_1))$.

Deuxième partie : Nous supposons que $\theta' < 1$, on utilise le critère de double suites de Bochner et on montre que la solution X est presque périodique en loi. On montre en premier lieu que X est presque périodique en loi fini-dimensionnelle. Soit (α'_n) et (β'_n) deux suites de $\mathbb{R}$, on cherche à trouver $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ respectivement avec les mêmes indices telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les limites

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mu(t + \alpha_n + \beta_m) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \mu(t + \alpha_n + \beta_n) \tag{2.18}$$

existent et elles sont égales, avec $\mu(t) = \mathcal{L}(X)(t)$.

Comme F et G sont presque périodiques, on peut toujours extraire $(\alpha_n) \subset (\alpha'_n)$ et $(\beta_n) \subset (\beta'_n)$ respectivement avec le même indice tel que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} F(t + \alpha_n + \beta_m, x) = \lim_{n\to\infty} F(t + \alpha_n + \beta_n, x) = F_0(t, x) \tag{2.19}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} G(t + \alpha_n + \beta_m, x) = \lim_{n\to\infty} G(t + \alpha_n + \beta_n, x) = G_0(t, x) \tag{2.20}$$

ces limites existent pour tout $t \in \mathbb{R}$ uniformément par rapport aux sous-ensembles bornés de $\mathbb{H}_2$.

On pose $(\gamma_n) = (\alpha_n + \beta_n)$. Pour tout nombre entier n fixé, nous considérons

$$X^n(t) = \int_{-\infty}^t S(t-s)F(s + \gamma_n, X^n(s))ds + \int_{-\infty}^t S(t-s)G(s + \gamma_n, X^n(s))dW(s)$$

qu'est une solution de

$$dX^n(t) = AX^n(t)dt + F(t+\gamma_n,\, X^n(t))dt + G(s+\gamma_n,\, X^n(t))dW(t) \tag{2.21}$$

et

$$X^0(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F_0(s,\, X^0(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s,\, X^0(s))dW(s)$$

une solution de

$$dX^0(t) = AX^0(t)dt + F_0(t,\, X^0(t))dt + G_0(t,\, X^0(t))dW(t) \tag{2.22}$$

Comme on a

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s,\, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s,\, X(s))dW(s)$$

Alors

$$X(t+\gamma_n) = \int_{-\infty}^{t+\gamma_n} S(t+\gamma_n-s)F(s,\, X(s))ds + \int_{-\infty}^{t+\gamma_n} S(t+\gamma_n-s)G(s,\, X(s))dW(s)$$

On utilise le changement de variable $s = \sigma + \gamma_n$, on obtient

$$X(t+\gamma_n) = \int_{-\infty}^{t+s-\sigma} S(t-\sigma)F(\sigma+\gamma_n, X(\sigma+\gamma_n))d\sigma + \int_{-\infty}^{t+s-\sigma} S(t-\sigma)G(\sigma+\gamma_n, X(\sigma+\gamma_n))d\widetilde{W}_n(s)$$

On pose $s = \sigma$, alors

$$X(t+\gamma_n) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)F(s+\gamma_n,\, X(s+\gamma_n))ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)G(s+\gamma_n,\, X(s+\gamma_n))d\widetilde{W}_n(s)$$

Avec $\widetilde{W}_n(s) = W(s+\gamma_n) - W(\gamma_n)$ est un mouvement Brownian de même loi que $W(s)$. De l'indépendance des accroissements de W, nous déduisons que le processus $X(t+\gamma_n)$ a la même loi que $X^n(t)$.

Nous allons montrer que $X^n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $X^0(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour cela on va calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \parallel X^n(t) - X^0(t) \parallel^2_{\mathbb{H}_2}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \parallel X^n(t) - X^0(t) \parallel^2 &= \mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F_0(s,\, X^0(s))]ds \\
&+ \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - G_0(s,\, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&\leq 2\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F_0(s,\, X^0(s))]ds \parallel^2 \\
&+2\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - G_0(s,\, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&\leq 4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F(s+\gamma_n,\, X^0(s))]ds \parallel^2 \\
&+4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s))]ds \parallel^2 \\
&+4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - G(s+\gamma_n,\, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&+4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - G_0(s,\, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&\leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

Nous utilisons les conditions (2)-(4) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F(s+\gamma_n,\, X^0(s))]ds \parallel^2 \\
&\leq 4\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} \parallel S(t-s) \parallel \parallel F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) \parallel ds)^2 \\
&\leq 4\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) \parallel ds)^2 \\
&\leq 4(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds)(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^n(s)) - F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) \parallel^2 ds) \\
&\leq \frac{4K^2}{\delta}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel X^n(s) - X^0(s) \parallel^2 ds
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s))]ds \parallel^2 \\
&\leq 4\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s)) \parallel ds)^2 \\
&\leq 4\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds)(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s)) \parallel^2 ds) \\
&\leq 4(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds)^2 \sup_s \mathbb{E} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s)) \parallel^2 \\
&\leq \frac{4}{\delta^2}\sup_s \mathbb{E} \parallel F(s+\gamma_n,\, X^0(s)) - F_0(s,\, X^0(s)) \parallel^2
\end{aligned}
$$

I_2 converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, car $\sup_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{E} \parallel X^0(t) \parallel^2 < \infty$ fait que $\{X^0(t)\}_t$ est tendu par rapport aux ensembles bornés.

Nous appliquons maintenant l'isométrie d'Ito, nous obtenons

$$\begin{aligned}
I_3 &= 4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n, X^n(s)) - G(s+\gamma_n, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&\leq 4trQ\mathbb{E}\int_{-\infty}^{t} \parallel S(t-s) \parallel^2 \parallel G(s+\gamma_n, X^n(s)) - G(s+\gamma_n, X^0(s)) \parallel^2 ds \\
&\leq 4trQ\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel G(s+\gamma_n, X^n(s)) - G(s+\gamma_n, X^0(s)) \parallel^2 ds \\
&\leq 4K^2trQ\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel X^n(s) - X^0(s) \parallel^2 ds.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_4 &= 4\mathbb{E} \parallel \int_{-\infty}^{t} S(t-s)[G(s+\gamma_n, X^0(s)) - G_0(s, X^0(s))]dW(s) \parallel^2 \\
&\leq 4trQ\mathbb{E}(\int_{-\infty}^{t} \parallel S(t-s) \parallel^2 \parallel G(s+\gamma_n, X^0(s)) - G_0(s, X^0(s)) \parallel^2 ds \\
&\leq 4trQ(\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)}ds)\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbb{E} \parallel G(s+\gamma_n, X^0(s)) - G_0(s, X^0(s)) \parallel^2 \\
&\leq \frac{2trQ}{\delta}\sup_{s\in\mathbb{R}}\mathbb{E} \parallel G(s+\gamma_n, X^0(s)) - G_0(s, X^0(s)) \parallel^2
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement que I_2, on a $I_4 \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Nous avons alors :

$$\mathbb{E} \parallel X^n(t) - X^0(t) \parallel^2 \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

On pose $I_2 + I_4 = \alpha_n$ avec $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ et $\beta = \frac{4K^2}{\delta} + 4K^2trQ < \delta$.
D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \parallel X^n(t) - X^0(t) \parallel^2 &\leq \alpha_n + \frac{4K^2}{\delta}\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel X^n(s) - X^0(s) \parallel^2 ds \\
&+ 4K^2trQ\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)}\mathbb{E} \parallel X^n(s) - X^0(s) \parallel^2 ds,
\end{aligned}$$

En utilisant une variante du lemme de Gronwall (voir lemme 3.3 dans [10]), nous avons :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E} \parallel X^n(t) - X^0(t) \parallel^2 = 0$$

D'où $X^n(t)$ converge en moyenne quadratique vers $X^0(t)$, alors $X^n(t)$ converge en loi vers $X^0(t)$. Mais, la loi de $X^n(t)$ est la même que celle de $X(t+\gamma_n)$, nous déduisons que $X(t+\gamma_n)$ converge en loi vers $X^0(t)$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \mu(t+\alpha_n+\beta_n) = \mathcal{L}(X^0(t)) = \mu_t^0.$$

En utilisant (2.19) et (2.20) nous déduisons que :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mu(t+\alpha_n+\beta_m) = \mu_t^0.$$

D'où X est presque périodique en loi uni-dimensionnelle.
Finalement, une propriété de convergence de suites de variables aléatoires à carrés intégrables (voir proposition 3.2 de [10]), nous permet de déduire que X est presque périodique en loi.

□

Exemples 2.4.1. (Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire)
Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement Brownian standard. Soit α,$\sigma > 0$, et X un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire défini par

$$X_t = \sqrt{2\alpha}\sigma \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} dW_s \tag{2.23}$$

Alors X est une solution bornée dans L^2 de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = -X_t dt + \sqrt{2\alpha}\sigma dW_t$$

le processus X est un processus Gaussian stationnaire car : $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau \geq 0$

$$Cov(X_t,X_{t+\tau}) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau}$$

D'où X est presque périodique en loi.

Exemples 2.4.2. Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement Brownian standard. Soit X défini par

$$X_t = e^{-t+\sin(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{s-\sin(s)} \sqrt{1-\cos(s)} dW_s$$

solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_t = (-1 + \cos(t))X_t dt + \sqrt{1 - \cos(t)} dW_t \tag{2.24}$$

le processus X est Gaussian non stationnaire car
$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(e^{-t+\sin(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{s-\sin(s)} \sqrt{1-\cos(s)} dW_s) = 0$, mais

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t+\tau}) &= \mathbb{E}(X_t, X_{t+\tau}) \\ &= e^{-t+\sin(t)} e^{-t-\tau+\sin(t+\tau)} \int_{-\infty}^{t} e^{2(s-\sin(s))}(1-\cos(s))ds \\ &= \frac{1}{2} e^{-\tau+\sin(t+\tau)-\sin(t)} \end{aligned}$$

dépend de t.
Comme l'équation (2.24) vérifie les conditions du théorème 2.4.1, on peut affirmer que la solution X est presque périodique en loi.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a essayé de presenter la notion de presque périodicité pour les processus stochastiques. Cette notion a donné lieu à différents concepts.

Dans une première partie une étude comparative de ces différents concepts à été présentée. L'étude d'une équation différentielle stochastique à coefficients presque périodiques a fait l'objet de la deuxième partie.

Nous estimons que ce modeste travail sera d'une utilité pour les gens intéressés par ce domaine.

Annexe

Opérateurs et semi-groupes sur un espace de Hilbert

Définition 2.4.1. (Produit scalaire) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une application, notée $< ., . >$, de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout x, y, $z \in E$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a:

$< x, x > \geq 0$ et si $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. $< x, y >= \overline{< y, x >}$.
3. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$ *et* $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$.

Définition 2.4.2. (Espace de Hilbert) On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel $\mathbb{H}$ muni d'un produit scalaire $< x, y >$ tel que la semi-norme $\sqrt{< x, x >}$ soit une norme sur $\mathbb{H}$, qui rende cet espace complet.
Si $\mathbb{H}$ est un espace de Hilbert, on notera $\| x \|= \sqrt{< x, x >}$ pour tout $x \in \mathbb{H}$ on a:

Inégalité de Cauchy-Schwarz L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$|< x, y >| \leq \| x \| \| y \|$$

Identité du Parallélogramme Pour tout x, $y \in \mathbb{H}$, on a:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| x \|^2)$$

Définition 2.4.3. (Opérateur nucléaire) Un opérateur linéaire $Q \in L(E,F)$ est dit nucléaire, où E et F sont deux espaces de Banach, s'il existe deux suites $\alpha_i \subset F$ et $\varphi_i \subset E^*$ telles que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \| \alpha_i \|_F \| \varphi_i \|_{E^*} \leq +\infty$$

et pour lesquelles on a la représentation suivante

$$Qx = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \varphi_i(x), \quad x \in E.$$

Soit $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$ deux espaces de Hilbert séparables, et $e_i \subset E$ un système orthonormé complet. Un opérateur linéaire borné $Q \in L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ est dit Hilbert Schmidt si

$$\sum_{i\geq 1} \| Qe_i \|^2_{\mathbb{H}_1} < +\infty.$$

L'ensemble de tous les opérateurs Hilbert Schmidt noté par $L_2(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ et muni de la norme

$$\| Q \|_{L_2\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2} = (\sum_{i\geq 1} \| Qe_i \|^2)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Hilbert.

Définition 2.4.4. (la trace d'un opérateur nucléaire) On note la trace d'un opérateur nucléaire $Q \in L(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$ par trQ, alors

$$Tr(Q) = \sum_{i\geq 1} < Qe_i,e_i >_{\mathbb{H}_1}$$

.

Définition 2.4.5. Si Q est un opérateur borné, l'opérateur $Q^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ défini par

$$< Qe_i,f_i > = < e_i,Q^* f_i > , \quad \forall e_i,f_i \in \mathbb{H}$$

est dit opérateur adjoint de Q.

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de cette définition

Proposition 2.4.1. *Soient A et B deux opérateurs et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors on a :*

$(A + B)^* = A^* + B^*$.

2. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}^* A$.
3. $(A^*)^* = A$.
4. $(I)^* = I$.
5. $(AB)^* = B^* A^*$.
6. $\| A \| = \| A^* \|$.
7. $\| AA^* \| = \| A \|^2$.

Remarque 2.4.1. La relation entre un opérateur Hilbert et un opérateur nucléaire est : un opérateur $Q \in L(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ est Hilbert si Q^*Q est un opérateur nucléaire sur $\mathbb{H}_1$ ou si QQ^* est un opérateur nucléaire sur $\mathbb{H}_2$. Ainsi, on a

$$\| Q \|_{L_2(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)} = (Tr(QQ^*))^{\frac{1}{2}} = (Tr(Q^*Q))^{\frac{1}{2}}$$

Définition 2.4.6. ($\mathcal{C}_0$- semi-groupe) Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{C}_0$- semi-groupe sur X lorsque les conditions suivantes sont réalisées

S(0)= I.

2. S(t+s)=S(t)S(s)   pour tout $t \geq 0$ et tout $s \geq 0$.
3. $\lim_{t\to 0} S(t)x = x$ pour tout $x \in X$.

Définition 2.4.7. (Générateur infinitésimal) On appelle générateur infinitésimal du $\mathcal{C}_0$-semi-groupe $S(t)_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble:

$$D(A) = \{x \in \mathbb{H}_2 \mid \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t} existe\}$$

par

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A)$$

Théorème 2.4.2. *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un $\mathcal{C}_0$-semi-groupe, alors il existe des constantes $\delta \geq 0$ et $M \geq 0$ telles que*

$$\| S(t) \| \leq Me^{\delta t} \quad pourtoutt \geq 0.$$

Bibliographie

[1] Fazia Bedouhene, Omar Mellah, and Paul Raynaud de Fitte. *Bochner-almost periodicity for stochastic processes*. Stoch. Anal. Appl., 30(2) : 322-342, 2012.

[2] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[3] S.Bochner, *A new approch to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci USA 48, 2039-2043, 1962.

[4] Yves Caumel,*Probabilités et processus stochastique*, Springer-Verlag France, 2011.

[5] C.Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Chelsea, New, York 1989.

[6] Giuseppe Da Prato et Jerzy Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*. Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[7] Stewart N.Ethier, Thomas G. Kurtz. *Markov Processes*. Characterization and convergence

[8] Dominique Foata et Aimé Fuchs, *Calcl Des Probabilités*, Cours, exercices et problémes corrigés, Seconde édition: 1998, ISBN 2 10 007547 0, Dunod, Paris.

[9] Monique Jeanblanc, *Cours de calcul stochastique*, Master 2IF EVRY, Septembre 2006.

[10] Mikhail Kamenskii, Omar Mellah and Paul Raynaud de Fitte. *Weak averaging of semilinear stochastic differentil equations with almost periodic*. 2014.

[11]Olivier Lévêque, *Cours de probabilités et calcul stochastique*, 2004-2005

[12] Omar Mellah, *Étude des solutions presque périodiques des Équations différentielles stochastiques*, Thèse de doctorat, Université de Tizi-Ouzou en co-tutelle avec l'université de Rouen, 2013.

[13] T.Morozan, C.Tudor, *Almost periodic solutions of affine Ito equations*, Stoch. Anal. Appl., 7(4), 451-474 (1989).

[14] Bernt Øksendal *Stochastic differential equations*. An introduction with applications. Fifth edition, correctes printing. Springer-Verlag Heidelberg New York.

[15] W. M. Ruess and W. H. Summers. *Asymptotic almost periodicity and motions of semigroups of operators*. In Proceedings of the symposium on operator theory (Athens, 1985), volume 84, pages 335-351, 1986.

[16] C.Tudor, *Almost periodic stochastic processes*, In Qualitative problems for differential equations and control theory, pages 289-300. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.

[17] S.Zaidman. *Almost-periodic functions in abstract spaces*, volume 126 of Research Notes in Mathematics. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.