République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université Mouloud MAMMERI Tizi Ouzou Faculté du Génie de la Construction Département de Génie Mécanique



MEMOIRE de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de master en génie mécanique

**Option : construction mécanique** 

## THEME

# Localisation et quantification de défauts dans les structures poutres stratifiées basée sur des données modales

Proposé et dirigé par : *M: BEHTANI Amar*  Réalisé par : ASSAFSAF Samir ZENIA Karim

Promotion 2012/2013





Nous tenons à remercier notre promoteur Monsieur Amar BEHTANI pour son aide, sa disponibilité et les conseils qu'il n'a cessé de nous prodiguer pour l'aboutissement de ce modeste travail, qu'il trouve ici notre profonde gratitude et toute notre reconnaissance et notre respect.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ilsontporté à notre recherche en acceptant d'examiner ce travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin a toutes et tout ceux qui ont contribué au déroulement de ce travail.

Que tout les enseignants ayant contribués et participés a notre formation trouvent ici notre profond respect.

Karím Samír



Ce travail, et bien au-delà, je le dois à mes très chers parents qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots. Que dieu vous protège et vous garde pour nous.

A mes sœurs (houria, Malika, Souhila)

A mes frères (Mourad, jugurta)

A la mémoire de mes grands parents

A mes beaux frères

A mes nièces (Lina, lylia et ouiza)

Enfin a tout(e)s mes ami(e)s

## Karim



Ce travail, et bien au-delà, je le dois à mes très chers parents qui m'ont fourni au quotidien un soutien et une confiance sans faille et de ce fait, je ne saurais exprimer ma gratitude seulement par des mots. Que dieu vous protège et vous garde pour nous.

A mes sœurs (djamila, karima, farida, Cherifa et ma petite lynda)

A mes frères (mouhammed, brahim et tahar)

A la mémoire de mes grands parents

A mes beaux frères

A mes nièces (aya, mirra, mourad, rayan ,imane, amine et hibba)

Enfin a tout(e)s mes ami(e)s



<u>Sommaire</u>

Remerciements	i
Dédicace	ii
Sommaire	iv
Liste des figures	ix
Liste des tableaux	xii
Nomenclature	xiii

Introduction générale	1
-----------------------	---

## Chapitre I : Introduction aux matériaux composites

I.1. Introduction	3
I.2. Caractéristiques générales	4
I.3. Classification des matériaux composites	4
I.3.1. Classification suivant la forme des constituants	4
I.3.1.1. Composites à fibres	4
I.3.1.2. Composites à particules	5
I.3.2. Classification suivant la nature des constituants	6
I.4. Les éléments constituants d'un matériau composite	6
I.4.1. Introduction	6
I.4.2. Les résines	7
I.4.3. Les fibres	7
I.5. Architecture des matériaux composites	8

I.5.1. composite sandwich	8
I.5.2. Les stratifiés	8
I.5.2.1. stratifiés unidirectionnelles	9
I.5.2.2. stratifiés hybrides	9
I.5.2.3. Désignation des structures stratifiées	10
I.5.2.3.1. Exemple de désignation	11
I.6. Mécanismes de rupture dans les martiaux composites	12
I.6.1. Modes de ruptures	13
I.6.2. Fissurations	13
I.6.3. Mécanismes de rupture dans un unidirectionnel	14
I.6.3.1. Rupture des fibres	14
I.6.3.2. Rupture transverse de la matrice	15
I.6.3.3. Rupture longitudinale de la matrice	16
I.6.3.4. Rupture de l'interface	16
I.6.4. Rupture des stratifiés	16
I.7. Conclusion	18

## Chapitre II : Etat de l'art sur le thème

II.1. Introduction	19
II.2. Méthodes de contrôle non destructif	19
II.2.1. Contrôle visuel	20
II.2.2. Contrôle par ressuage	20
II.2.3. Contrôle par radiographie	20
II.2.4. Contrôle par thermographie infrarouge	20
II.2.5. Contrôle par ultrasons	20
II.2.6. Analyse vibratoire	21

II.3. Contrôle continu de l'état de la structure	21
I1.3.1. Classification des méthodes basées sur les données vibratoire	21
II.3.1.1. Méthodes basées sur les déformes propres	21
II.3.1.2. Méthode de l'enveloppe	22
II.3.1.3. Méthode de la transformée en ondelettes	23
II.3.1.4. Méthode basées sur les fréquences propres	25
II.3.1.5. Méthode basées sur les repenses fréquentielles	27
II.3.1.5. Méthode basées sur l'énergie déformation modale	28
II.3.1.5. Méthode basées sur la flexibilité modale	28
II.4. Conclusion	30

# Chapitre III : Modélisation par éléments finis des poutres stratifiées en matériau composite

III.1. Introduction	31
III.2.Théorie de la Poutre de Timoshenko	31
III.3 l'élément fini SI12	32
III.3.1 introduction	32
III.3.2 Calcul de la matrice de forme pour l'élément fini SI12	32
III.3.3 Calcul de la matrice élémentaire de rigidité pour l'élément fini SI12	38
III.3.4. Calcul de la matrice de masse élémentaire	38
III.4 Assemblage des matrices élémentaires	39
III.5 Calcul les valeurs, les vecteurs propres et les fréquences naturelles	40
III.5.1 Introduction	40
III.5.2 Calcul les valeurs, les vecteurs propres	40
III.6 Architecture de modélisation d'une poutre stratifiée sur MATLAB	40
III.7 Conclusion	41

### Chapitre IV : Présentation et application de la méthode basée sur les réponses fréquentielles

IV.1. Introduction	42
IV.2. Présentation de la méthode	43
IV.2.1. Introduction	43
IV.2.2. détection de défauts en utilisant les FRF	43
IV.2.2.1. organigramme de la détection d'endommagement basée sur la	
ΓΚΓ	44
IV.2.3. localisation et quantification de défauts	45
IV.3. Application de la méthode sur la poutre stratifiée	47
IV.3.1. présentation de la poutre	47
IV.3.2. Application de la méthode pour détermine la valeur de $\psi$	48
IV.3.2.1. Calcul de coefficient de proportionnalité $\psi$	49
IV.3.3. Application de la méthode des FRF avec $\psi = 0.3790$	50
IV.4. Conclusion	52
Chapitre V : Présentation et application de la méthode énergétique	
V.1. Introduction	53
V.2. Présentation de la méthode	54
V.3. Application de la méthode	55
V.3.1. Un seul élément endommagé	57
V.3.2. Deux éléments endommagés	58
V.3.3. Trois éléments endommagés	59
V.3.3. quatre éléments endommagés	61
V.4. Conclusion	61

Conclusion et perspectives	62	
Annexe A	64	
Annexe B	69	
Références bibliographiques	71	

## Liste des figures

### Chapitre I

Figure I.1 Composites à fibres	5
Figure I.2 Composites à particules	6
Figure I.3 Composite sandwich	8
Figure I.4 Stratification	9
Figure I.5 Désignation d'un stratifié	11
Figure I.6 Modes de ruptures	13
Figure I.7 Différents types de fissurations d'un stratifié	14
Figure I.8.Rupture d'une fibre	15
Figure I.9 Rupture transverse de la matrice	15
Figure I.10 Rupture longitudinale de la matrice	16
Figure I.11 Décohésion fibre/matrice	16
Figure I.12Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés	17
Figure I.13 Stratifié croisé 0°/90° soumis à une traction dans la direction 0°	17
Figure I.14 Stratifié croisé $\pm 45^{\circ}$ soumis à une traction dans la direction $0^{\circ}$	18

### Chapitre II

Figure II.1 : schéma de fonctionnement de la méthode de l'enveloppe	23
Figure II.2 : aucun défaut ne soit présent	24
Figure II.3 : présent d'un défaut	25
Figure II.3 : principales méthodes de détection d'endommagement	30

## Chapitre III

Figure III.1 : Déformation d'une poutre (théorie de <b>TIMOSHENKO</b> )	32
Figure III.2 : Représentation des couches de la poutre	34
Figure III.3: Elément fini SI12	35
Figure III.4: Fonction de forme de l'élément fini SI12	37
Figure III.5 : Architecture de modélisation d'une poutre stratifiée	41

## Chapitre IV

Figure. IV.1 : Organigramme des repenses fréquentielles	45
Figure. IV.2 : Les repenses fréquentielles	45
Figure. IV.3 : Poutre stratifié encastré forcé	48
Figure. IV.4 : Cas test 1	48
Figure. IV.5 : Cas test 2	49
Figure. IV.6 : Cas test 3	49
Figure. IV.7 : Cas test 4	50
Figure. IV.8 : Cas test 5	50
Figure. IV.9 : Cas test 6	50
Figure. IV.10 : Cas test 7	51
Figure. IV.11 : Cas test 8	51
Figure. IV.12 : Cas test 9	51

## Chapitre V

Figure. V.1 poutre stratifie encastrée [0/90/90/0]	56
Figure. V.2 poutre stratifie [0/90/90/0] sur deux appuis simples	56
Figure. V.3 Cas test 1	57
Figure. V.4 Cas test 2	57
Figure. V.5 Cas test 3	58

Figure. V.6 Cas test 4	58
Figure. V.7 Cas test 5	59
Figure. V.8 Cas test 6	59
Figure. V.9 Cas test 7	59
Figure. V.10 Cas test 8	59
Figure. V.11 Cas test 9	60
Figure. V.12 Cas test 10	60
Figure. V.13 Cas test 11	60
Figure. V.14 Cas test 12	60
Figure. V.15 Cas test 13	61
Figure. V.16 Cas test 14	61

## Liste des tableaux

## Chapitre I

Tableau I.1stratifié symétrique (paire)	11
Tableau I.2 stratifié symétrique (impaire).	11
Tableau I.3 : stratifié avec la séquence	12
Tableau I.4 : Stratifiés hybrides	12

### Chapitre IV

Tableau IV.1 Récapitulatif des cas tests	48
Tableau IV.2 Récapitulatif des cas tests de quantification	50

### Chapitre V

Tableau V.1 Récapitulatif des cas tests	57
---	----

## Nomenclature

$E_{x}$	Module de Young dans la direction de l'axe x	[MPa]
$E_y$	Module de Young dans la direction de l'axe y	[MPa]
$G_{ij}$	Module de cisaillement dans le plan correspondant	[MPa]
$G_{xy}$	Module de cisaillement transverse da la plaque	[MPa]
$ u_{ij}$	Coefficients de Poisson dans le plan correspondant	
$u_1$	Déplacement longitudinal dans la direction de l'axe x	[mm]
<b>u</b> <sub>3</sub>	Déplacement transversaux dans le direction de l'axe z	[mm]
γ	Rotation caractérisant la flexion autour de l'axe y	[rad]
ε	Déformation relative dans la direction <i>j</i>	
$\mathcal{E}_{\chi}$	Déformation relative dans la direction $x$	
Υ <sub>ij</sub>	Glissement de cisaillement dans le plan correspondant	
$\sigma_i$	Contrainte dans la direction <i>i</i>	[MPa]
$ au_{ij}$	Contrainte de cisaillement dans le plan correspondant	[MPa]
ρ	Masse volumique	[kg/m <sup>3</sup> ]

# Introduction générale

Aujourd'hui les nouvelles technologies ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique, une ténacité élevée et une grande légèreté. Aucun matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques physiques, et pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite. Parmi les matériaux composites, les stratifiés jouent un rôle important dans les techniques avancées.

Les méthodes de contrôle non destructif (CND) traditionnelles sont d'un grand apport dans le domaine du contrôle des structures, mais elles sont limitées par leur incapacité à contrôler la structure en continu, aussi ces méthodes ne peuvent pas être utilisées sur de grandes structures, sans connaitre, a priori, l'endroit de la défaillance.

Les méthodes de détection d'endommagement, basées sur des données vibratoires, sont apparues pour remonter ces difficultés. L'idée de base de ces méthodes est que l'endommagement provoque un changement dans les propriétés mécaniques de la structure (rigidité, masse et amortissement), qui induisent à leur tour des changements dans les propriétés dynamiques de la structure (réponses fréquentielle, déformées modales...). Ces changements sont utilisés pour détecter, localiser et quantifier l'endommagement.

Dans ce travail, nous avons étudié deux méthodes de détection d'endommagements, basées sur des données modales, sur des structures poutres en matériau composite stratifié.

La première méthode et un indice efficace basé sur l'énergie de déformation modale est présenté pour localiser et quantifié les éléments défectueux de la structure endommagés, et la deuxième méthode et un indicateur de détection d'endommagement est basé sur la comparaison des deux repenses fréquentielles  $[Xu(\omega)]$  et  $[Xd(\omega)]$ . Et cela dans le but de faire apparaître la sensibilité de ces paramètres dynamiques à la présence de défauts et de faire une comparaison entre les deux méthodes.

La première partie est consacrée à l'étude bibliographique des matériaux composites, les méthodes de détection d'endommagement et la modélisation en éléments finis. Le premier chapitre donne un aperçu général sur les matériaux composites, et les différents types de défauts qu'on peut rencontrer sur ces matériaux.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les différentes méthodes de contrôle des structures, en s'étalant sur les méthodes basées sur des données vibratoires. Le troisième chapitre est consacré à la modélisation en éléments finis d'une poutre stratifiée.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à la simulation numérique.

Dans les chapitres 4 et 5 nous avons étudié respectivement deux méthodes de détection et localisation d'endommagement basée sur des données vibratoires, appelée «repenses fréquentielles **FRF** », sous différents types de conditions aux limites. Et le suivant est consacré à l'étude de la méthode basé sur l'énergie de déformation modale **MSEBI**, elle est testée sous les mêmes conditions aux limites que la première méthode.

Ce travail se veut une initiation à la recherche scientifique dans les domaines de la dynamique des structures, des méthodes de contrôle des structures, de la modélisation et des matériaux composites.

## <u>Chapitre I :</u>

Généralité sur les matériaux composites

#### I.1. Introduction [1]

Un matériau composite est constitué de deux phases différentes nommées renforts et matrices.

Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues.

Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale.

La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

### Chapitre I

#### I.2. Caractéristiques générales [2]

Un matériau composite est constitué dans le cas le plus générale d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue est appelée la « matrice », la phase discontinue est appelée le « renfort ». Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieurs, ainsi que de les protéger des agressions extérieures.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants.
- de leur distribution géométrique.
- de leurs interactions.

#### I. 3 Classification des matériaux composites [3]

Les composites peuvent être classés suivant la forme des composants ou suivant la nature des composants.

#### I.3.1 Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les composites sont classés en deux grandes classes: les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

#### I.3.1.1 Composites à fibres

Un matériau composite est un composite à fibres si le renfort se trouve sous forme de fibres (Figure I.1). Les fibres utilisées se présentent soit sous forme de fibres continues, soit sous forme de fibres discontinues : fibres coupées, fibres courtes. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de moduler à la carte les propriétés mécaniques des matériaux composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à des matériaux isotropes dans un plan. On possède donc là un type de matériau dont il peut modifier et moduler à volonté les comportements mécanique et physique en jouant sur :

• la nature des constituants

- la proportion des constituants
- l'orientation des fibres

L'importance des matériaux composites à fibres justifie une étude exhaustive de leurs comportements mécaniques.



Figure I.1 Composites à fibres.

#### I.3.1.2 Composites à particules

Un matériau composite est un composite à particules lorsque le renfort se trouve sous forme de particules (Figure I.2). Une particule, par opposition aux fibres, ne possède pas de dimension privilégiée. Les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, etc...

Dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le coût du matériau, sans en diminuer les caractéristiques. Le choix de l'association matrice-particules dépend des propriétés souhaitées.



Figure I.2 Composites à particules.

#### I.3.2. Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant des composites à matrices organiques, à matrices métallique ou à matrices minérale.Divers renforts sont associés à ces matrices. Parmi ces composites nous pouvons citer :

- Composites à matrice organique (résine).
- Composites à matrice métallique (alliages légers et ultralégers d'aluminium, de magnésium et de titane).
- Composites à matrice minérale (céramique).

#### I.4.Les éléments Constituants d'un Matériau Composite

#### I.4.1.Introduction

Un matériau composite est constitué de deux éléments essentiels, une matrice et un renfort, constitué de fibres.

La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc...) et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine.

D'un point de vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène.

Le renfort apporte au matériau composite ses performances mécaniques élevées, alors que la matrice a pour rôle de transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieures et de protéger les fibres par les agressions extérieures.

#### I.4.2.Les résines

Les résines utilisées dans les matériaux composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur.

Les résines doivent donc être assez déformables et présenter une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

Du fait de ces caractéristiques plus élevées, les résines thermodurcissables sont les plus employées actuellement dans la mise en œuvre des matériaux composites.

#### I.4.3 Les fibres

Les matériaux de renfort confèrent aux composites leurs caractéristiques mécaniques. Ces renforts permettent également d'améliorer certaines des propriétés physiques, comportement thermique, tenue en température, résistance à l'abrasion, propriétés électriques, etc.

En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses : végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc. Toutefois, les renforts les plus utilisés se présentent sous forme de fibres ou formes dérivées. Les renforts fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

#### I.5. Architecture des matériaux composites

#### I.5.1. Composites sandwichs

Le principe du technique sandwich consiste à appliquer à une âme, possédant de bonnes propriétés en compression, deux « feuilles » appelées peaux, possédants de bonnes propriétés en traction (Figure I.3). L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité ; toutefois, il faut s'assurer d'une bonne solidarisation de l'ensemble âme-peaux, de façon à répartir les efforts entre les différents constituants. L'assemblage se fait par collage, à l'aide de résines compatibles avec les matériaux en présence.



Figure I.3 Composite sandwich.

#### I.5.2. Les stratifiés

On appelle stratifié ce qui résulte de plusieurs couches (ou pli, ou monocouche) de nappes unidirectionnelles ou de tissus avec des orientations propres à chaque pli.

Les deux constituants de base d'un pli sont le renfort et la matrice.

L'un des avantages fondamentaux des stratifiées réside dans la possibilité d'adapter et de contrôler l'orientation des fibres pour que le matériau résiste à des sollicitations

déterminées dans les meilleurs conditions. Il convient donc de savoir comment les plis réagissent aux efforts qui leurs sont appliqués, compte tenu de leur orientation par rapport aux sollicitations. Il existe divers types de stratifiés :

#### I.5.2.1. Stratifiés unidirectionnels

Les stratifiés unidirectionnels sont constitués de couches avec des fibres unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.

#### I.5.2.2. Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de nature différentes, qu'il sera nécessaire de les mentionner dans la désignation. Ils permettent d'avoir un composite plus performant, en utilisant au mieux les propriétés des diverses fibres disponibles.



Figure I.4 Stratification.

- des hybrides inter-couches, constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente.
- des hybrides intra-couches, constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents.
- des couches métalliques peuvent également être intercalées entre les couches.

#### I.5.2.3. Désignation des structures stratifiées

Les structures stratifiées à base de fibres unidirectionnelles sont constituées d'un grand nombre de couches ou plis.

L'épaisseur d'une couche est généralement très faible, de l'ordre de 0.125mm pour un matériau carbone-époxy de type aéronautique, et de 0.3mm pour ceux utilisés dans l'industrie nautique. Ces structures stratifiées sont constituées de couches unidirectionnelles avec des fibres orientées de façon différente d'une couche à l'autre afin d'obtenir les propriétés mécaniques souhaitées pour la structure finale.

La désignation des structures stratifiées est délicate car il faut préciser les axes de référence. Un stratifié est codifié de la façon suivante :

- chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x.
- les couches sont nommées successivement entre crochet en allant de la face inférieure à la face supérieure. Les couches successives sont séparées par le symbole « / ».
- les couches successives d'un même matériau et de même orientation sont désignées par un indice numérique.
- en cas de stratification hybride (différents matériaux dans un même stratifié), il faut préciser par un indice la nature de la couche.
- en cas de structures symétriques, la moitié est codifiée et le symbole « s » indique la symétrie.



#### I.5.2.3.1. Exemple de désignation



#### *a***.** Stratifiés symétriques

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives. Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique.

#### Par exemple

Orientation des fibres	Notations de stratifie
90°/45°/45°/0°/0°/45°/45°/90°	[90/45 <sub>2</sub> /0] <sub>s</sub>

Tableau I.1 : stratifié symétrie (paire).

Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée. Par exemple :

Orientation des fibres	Notations de stratifie
90°/45°/45°/0°/45°/45°/90°	$[90/45_2/\overline{0}]_s$

Tableau I.2 : stratifié symétrie (impaire).

## Chapitre I

#### **b.** Séquences

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée.

Orientation des fibres	Notations de stratifie
0°/45°/90°/0°/45°/90°/90°/45°/0°/90°/45°/0°	[(0/45/90) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> ou [(0/45/90)] <sub>2s</sub>
0°/45°/90°/0°/45°/90°/60°/30°/60°/30°/60°/30°	[ (0°/45°/90°) <sub>2</sub> (60°/30°) <sub>3</sub> ]

Tableau I.3 : stratifié avec la séquence.

L'alternance [0 / 90]n est souvent désignée par stratifié croisé

#### c. Stratifiés hybrides

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Par exemple, pour des stratifiés avec la même résine :

Orientation des fibres	Notations de stratifie
0°V/45°C/-45°C/90°C/90°C/-45°C/45°C/0°V	[(0V/ <sup>+</sup> 45C/90C) <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> ou[(0V/ <sup>+</sup> 45C/90C)] <sub>2s</sub>

Tableau I.4 : Stratifiés hybrides.

Avec V : verre et C : carbone

#### I.6. Mécanismes de rupture dans les matériaux composites

Par mécanisme de rupture, il faut comprendre tout processus mécanique produisant au sein d'un matériau une « discontinuité » locale de matière appelée fissure. Il est usuel de parler d'initiation de la rupture et de propagation de la rupture. L'initiation de la rupture peut être considérée comme étant la création de microfissures, à l'échelle microscopique, à partir d'un défaut ; on parlera de microfissuration. La propagation de la rupture est le résultat de la création de nouvelles surfaces de rupture à l'échelle macroscopique, à partir des microfissures existantes ; on parlera également de microfissuration. Dans le cas des matériaux composites, l'initiation de la rupture se produit généralement bien avant l'observation d'un changement du comportement macroscopique.

#### I.6.1. Modes de ruptures

Ils constituent les trois modes élémentaires de sollicitation d'un matériau quel qu'il soit ; l'état de contraintes d'une pièce soumise à une sollicitation complexe résultera de ces trois modes simples (Figure 1.6).

- Mode I : les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement au plan de fissuration.
- Mode II : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de la fissure.
- Mode III : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissuration.



Mode I

Mode II

Mode III

Figure I.6 Modes de ruptures.

#### I.6.2. Fissurations

Les matériaux composites stratifiés peuvent présenter différents types de fissuration (inter laminaire, inter laminaire ou trans laminaire). Ces termes définissent les plans dans lesquels peuvent se développer les fissures (Figure I.7).

- Fissures inter laminaires : la fissure se développe entre deux couches, suivant un plan qui leur est parallèle. Ce type d'endommagement se rencontre lors d'essais en mode I ou en mode II.
- Fissures intra laminaires : le plan de la fissure est perpendiculaire ou parallèle aux couches de renforts, et se situe à l'intérieur de la couche. Ce genre d'endommagement se rencontre lors d'essais de cisaillement ou de traction transverse.

• Fissures trans laminaires : le plan de la fissure est perpendiculaire aux couches et aux renforts. Ce type d'endommagement est par exemple observé lors d'essais de traction ou de compression uni axiale dans le sens des fibres.



Figure I.7 Différents types de fissurations d'un stratifié.

#### I.6.3. Mécanismes de ruptures dans un unidirectionnel

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de l'accumulation de divers mécanismes élémentaires :

- la rupture des fibres(Figure I.8).
- la rupture transverse de la matrice(Figure I.9).
- la rupture longitudinale de la matrice(Figure I.10).
- la rupture de l'interface fibre-matrice (Figure I.11).

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature du matériau et les conditions de sollicitations mécaniques imposées.

#### I.6.3.1. Rupture des fibres

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre atteint la contrainte à la rupture. La rupture de la fibre produit une concentration de contraintes au voisinage de la rupture, il s'en suit une redistribution de ces contraintes.



Figure I.8. Rupture d'une fibre.

#### I.6.3.2. Rupture transverse de la matrice

L'endommagement transverse de la matrice se produit lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint sa valeur de rupture.



Figure I.9 Rupture transverse de la matrice.

#### I.6.3.3. Rupture longitudinale de la matrice

La rupture longitudinale de la matrice se produit lorsque la contrainte de cisaillement de la matrice atteint sa valeur de rupture.



Figure I.10 Rupture longitudinale de la matrice.

#### I.6.3.4. Rupture de l'interface

La décohésion de l'interface intervient lorsque la contrainte de cisaillement dans la matrice atteint la contrainte de décohésion, sans qu'elle atteigne la contrainte de rupture en cisaillement de la matrice.



Figure I.11 Décohésion fibre/matrice.

#### I.6.4. Rupture des stratifiés

Dans le cas des stratifiés, en plus des mécanismes de rupture élémentaire d'un composite unidirectionnel, s'ajoute un mécanisme de rupture entre les couches, c'est la rupture par délaminage (Figure I.12). Les mécanismes de ruptures induits dépendent de la

nature des constituants, de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé.



Figure I.12Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.

Dans le cas d'un stratifié croisé  $0^{\circ}/90^{\circ}$  soumis à une traction longitudinale dans la direction  $0^{\circ}$  (Figure I.13), les divers mécanismes de rupture peuvent être observés :

- la rupture longitudinale de la matrice et/ou la rupture de l'interface fibre/matrice des couches orientées à 90°;
- la rupture des fibres dans les couches à 0°;
- la rupture transverse de la matrice dans les couches à 0°.



Figure I.13 Stratifié croisé  $0^{\circ}/90^{\circ}$  soumis à une traction dans la direction  $0^{\circ}$ .

### Chapitre I

Dans le cas d'un stratifié croisé  $\pm 45^{\circ}$  soumis à une traction longitudinale dans la direction 0° (Figure I.14), la dégradation de ce type de matériau n'est pas une rupture des fibres, mais une fissuration matricielle et un délaminage ; on observe d'abord une rupture longitudinale de la matrice suivie d'un délaminage entre couches.



Figure I.14 Stratifié croisé  $\pm 45^{\circ}$  soumis à une traction dans la direction  $0^{\circ}$ .

#### I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un aperçu général sur les matériaux composites, ainsi que les différents types d'endommagements qu'on peut rencontrer sur ce type de structures.

Dans le chapitre II, nous allons passer en revue les principales méthodes de contrôle non destructif, ainsi que celle basées sur des données vibratoires.

## <u>Chapitre II</u>

## Etat de l'art sur le thème

#### **II.1. Introduction**

Il est d'usage avant et après la mise en service d'une structure de la tester dans son intégrité. Le contrôle non destructif (CND) est le plus largement utilisé, de par son caractère non invasif qui laisse la structure intacte. On constate aussi que l'objectif du contrôle non destructif évolue en rapprochant ce domaine de celui de l'instrumentation ; il ne suffit plus aujourd'hui de détecter un défaut, il faut aussi le caractériser et le dimensionner ; il faut aussi imaginer des techniques et procédés non destructifs aptes à mettre en évidence des hétérogénéités physiques complexes ou des irrégularités de propriétés telles que.

#### II.2. Méthodes de contrôle non destructif

Les techniques de contrôle non destructif (CND) les plus utilisés dans l'industrie sont :

- Contrôle visuel ;
- Contrôle par ressuage ;
- Contrôle par radiographie ;
- Contrôle par thermographie et infrarouge ;

Contrôle par courant de Foucault...

#### II.2.1. Contrôle visuel

Ce test consiste à examiner une structure à l'œil ou à l'aide d'une loupe de poche. Cette méthode permet de mettre en évidence les défauts superficiels et les défauts internes en cas de structures transparentes.

#### II.2.2. Contrôle par ressuage

Le ressuage est un terme qui désigne l'extraction d'un fluide d'une discontinuité dans laquelle il s'était préalablement accumulé au cours d'une opération d'imprégnation. Le contrôle par ressuage est utilisé pour déceler les défauts qui débouchent à la surface d'une pièce.

#### II.2.3. Contrôle par radiographie

La structure interne du matériau est mise en évidence en soumettant la pièce à contrôler au rayonnement X. on est ainsi en mesure d'observer d'éventuels défauts. Cette technique est particulièrement adaptée pour mettre en évidence les défauts placés dans le plan du faisceau de rayons X (fissures, vides...) ce qui la rend moins sensible pour les défauts de délaminage.

#### II.2.4. Contrôle parthermographie et infrarouge

La thermographie infrarouge est devenue un des outils de diagnostic incontournables de la maintenance prédictive. En effet, la plupart des défauts se traduisent par un échauffement ou un refroidissement anormal. Seule la Thermographie Infrarouge vous permet d'observer rapidement une scène thermique et de mettre en évidence, sans contact, des différences de températures à la surface de tout type d'objet. Ainsi, en détectant ces anomalies, souvent invisibles à l'œil nu, la thermographie permet des actions correctives avant l'apparition de pannes ou problèmes coûteux.

#### II.2.5. Contrôle par ultrasons

Le contrôle par ultrasons est très efficace pour révéler les défauts présentant une grande variation d'impédance acoustique, il sera donc préférable de l'utiliser lorsqu'on cherche à contrôler des délaminages entre les couches d'un stratifié.

#### **II.2.6.Analyse vibratoire**

L'analyse vibratoire est un outil puissant de détection de défauts des machines tournantes, elle permet notamment de détecter les défauts se manifestant dans les roulements. Peut s'agir d'un défaut de cage, de bille, de piste intérieure ou de piste extérieure. Ces différents défauts sont caractérisés par des fréquences de répétition fonction de paramètres connus. Dans le cadre de cet article [4], seule la fréquence du défaut de piste intérieure sera considérée.

#### II.3. Contrôle continu de l'état de la structure

Les méthodes de détection de l'endommagement ont contribué au développement de la SHM (Structural Heath Monitoring). L'endommagement de la structure peut être défini comme un changement introduit au système, qui affecte ses performances présentes et futures (*Doebling et al.*) [5]. Un système de classification de détection de l'endommagement a été donné par *Rytter* [6]qui inclut 4 niveaux :

- Niveau 1 : détermination de l'existence de l'endommagement dans la structure ;
- Niveau 2 : détermination du type d'endommagement et de sa localisation ;
- Niveau 3 : quantification de la sévérité de l'endommagement ;
- Niveau 4 : prédiction de la durée de vie en service restante, en se basant sur le suivi de l'endommagement et des conditions de service.

#### II.3.1. Méthodes basées sur les données vibratoires

#### II.3.1.1.Méthodesbases sur les déformes propres

Les déformées propres sont les descriptions spatiales des amplitudes à chacune des fréquences de résonance. Le MAC (Modal Assurance Criterion), et les variantes qui lui sont reliées, a été développé durant les dernières décennies, comme un indicateur pour explorer l'information modale spatiale (*Allemang*) [7]. L'expression de l'indicateur MAC s'écrit :

$$MAC_{ij} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} [\phi_s]_k^i [\phi_d]_k^j\right|^2}{\sum_{k=1}^{n} ([\phi_s]_k^i)^2 \sum_{k=1}^{n} ([\phi_s]_k^j)^2}$$
(2.3)

*West* [8] est probablement le premier à avoir proposé une investigation systématique en utilisant le MAC comme indicateur statistique, qui fait la corrélation entre les déformées propres d'une structure saine et une autre endommagée sans passer par la méthode des éléments finis. Un autre critère largement utilisé est le COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion), qui fait l'identification des coordonnées où un ensemble de deux vecteurs propres ne se correspondent pas (*Lieven et Ewins*) [9]. Le COMAC s'écrit :

$$COMAC_{ij} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{m} [\phi_s]_k^i [\phi_d]_k^j\right|^2}{\sum_{k=1}^{m} ([\phi_s]_k^i)^2 \sum_{k=1}^{m} ([\phi_s]_k^j)^2}$$
(2.4)

En outre, *Ratcliffe* [10] a proposé une méthode de détection d'endommagement basée seulement sur les déformées propres. La localisation peut être effectuée à partir d'une approximation aux différences finis de l'opérateur Laplacien aux vecteurs propres.

*Khan et al.* [11] ont utilisé un scanne continu avec laser Doppler vibromètre pour surveiller les discontinuités dans les déformées propres pour détecter l'endommagement.

Contrairement aux fréquences, l'estimation des déformées propres requiert la mesure dans chacun des points où il faut faire l'estimation, posant des difficultés pratiques dues au nombre limité de capteurs et à la capacité d'avoir une mesure fiable. En plus, l'estimation des vecteurs propres à partir de la réponse fréquentielle, même en l'absence d'endommagement, peut devenir problématique quand la structure a une configuration complexe. C'est une méthode qui dépend des techniques mises en œuvre ; la faisabilité et la fiabilité sont affectées par le type de structure, l'étendue de l'endommagement, la façon d'extraire les vecteurs propres et les algorithmes utilisés pour le traitement des données.

#### II.3.1.2. La méthode de l'enveloppe

La méthode de l'enveloppe est une technique utilisant la résonance haute fréquence du roulement (ou du capteur). Pour ce faire, elle utilise la fréquence de résonance du roulement pour extraire l'information nécessaire pour la détermination de la présence du défaut et met en évidence cette information dans une plage fréquentielle normalement observée en analyse vibratoire (0 – 1500 Hz).Plus précisément, la méthode de l'enveloppe utilise la modulation del'amplitude de la fréquence de résonance du roulement, par la fréquence dudéfaut.


Figure II.1 : schéma de fonctionnement de la méthode de l'enveloppe.

### II.3.1.3. Méthodes de la transformée en ondelettes

Lorsque le signal n'est pas quasi périodique dans le temps, la transformée deFourrier n'est plus applicable. Il faut alors recourir à un autre outilmathématique : la transformée en ondelettes (TO).

Cette dernière permet d'étudier simultanément l'information temporelle etfréquentielle (la méthode de l'enveloppe traitant les signaux dans un domaine puis dans l'autre mais jamais simultanément).

De nombreux ouvrages décrivent la transformée en ondelettes. Dans [12],elle est notamment utilisée pour détecter les défauts dans les roulements.

Dans cet article, afin d'exploiter et interpréter l'information contenue dansla transformée en ondelettes, la décomposition en valeurs singulières estutilisée.

Transformée en ondelettes de l'état de référence, En effectuant la transformée en ondelettes sur les mesures réalisées à 30Hz sur le roulement neuf, D'après cette figure, il semblerait qu'aucun défaut ne soit présent. En effet, aucune raie n'est réellement visible.



Figure II.2 : aucun défaut ne soit présent.

Transformée en ondelettes du défaut de piste interne, En appliquant la transformée en ondelettes sur le signal mesuré lorsque le roulement avec le défaut de piste est placé, on obtient la figure II.3. Bien évidemment, la plage fréquentielle observée comprend la fréquence recherchée.



Figure II.3 : présent d'un défaut.

#### II.3.1.4. Méthodes bases sur les fréquences propres

De tous les paramètres dynamiques, les fréquences naturelles sont les plus faciles à mesurer. L'inspection de changement de fréquences naturelles pour la détection d'endommagement était l'approche majeure dans les méthodes basées sur les données vibratoires pendant les décennies passées, où l'analyse modale expérimentale n'était pas encore établie, et elle, l'inspection de changement de fréquences naturelles, captivait la plupart des recherches dans le domaine.

L'investigation systématique de ce changement, dans la détection d'endommagement, peut être attribuée à *Adams et al.* [13] et *Cawley et Adams* [14]. En partant du principe que le changement de raideur est indépendant de celui des fréquences, le rapport de changement de fréquences en deux modes est fonction seulement de la localisation de l'endommagement. Des expériences ont été faites sur une plaque d'aluminium avec un défaut sous forme d'un trou rectangulaire, et sur une plaque composite en polymère renforcé de fibres de carbone, avec des défauts sous formes de fissures et d'écrasement. Avec un modèle éléments finis, de bons résultats furent obtenus en localisant l'endommagement sur la plaque d'aluminium, par contre, pour la plaque composite les résultats n'étaient pas concluants.

*Stubbs et Osegueda* [15] [16] ont développé une approche de détection de l'endommagement, à partir du changement de fréquences naturelles, qui est basée sur le critère de *Cawley-Adams.Friswell et al.* [17] ont aussi développé ce critère en introduisant des analyses statistiques sur les scénarios d'endommagement.

*Palacz et Krawczuk* [18] ont comparé différentes méthodes, basées sur les données vibratoires, incluant le critère de *Cawley-Adams*, pour la détection d'endommagement sur des poutres fissurées, ils indiquent dans leur travail que le changement dans les deux premières fréquences sans erreurs de mesure, et les quatre premières fréquences avec erreurs de mesure peuvent détecter avec succès la position et la profondeur de la fissure.

Cependant, comme mentionné par *Doebling et al.* [5] et *Friswell et Penny* [19], l'identification de l'endommagement en utilisant le changement de fréquences naturelles seul a des limitations pratiques dans certaines applications. Par exemple, le changement de fréquences est plus affecté par la température et l'humidité que par l'endommagement dans l'inspection des ponts (*Ferrar et al.*) [20].

En outre, les fréquences naturelles nous informent sur la nature globale de la structure, mais elles sont insensibles aux endommagements naissants, plus spécialement quand ces derniers sont situés dans une région à faibles contraintes.

*Messina et al.* [21] ont développé un algorithme appelé « Damage Location Assurance Criterion (DLAC) ». L'indicateur DLAC est calculé à partir du vecteur de changement de fréquences expérimental et du vecteur de changement de fréquences théorique dans la région du présumé endommagement. La localisation de l'endommagement est obtenue en comparant les modèles de changement de fréquences. Plus tard, *Messina et al.* [22] ont généralisé l'approche pour des endommagements multiples (MDLAC), en incorporant les déformées propres aux fréquences. Le DLAC a pour expression :

$$DLAC_{j} = \frac{\left|\Delta\omega_{j}^{T}\delta\omega_{j}\right|^{2}}{\left(\Delta\omega_{j}^{T}\Delta\omega_{j}\right)\left(\delta\omega_{j}^{T}\delta\omega_{j}\right)}$$
(2.1)

Avec :

$$\Delta \omega = \frac{\omega_s - \omega_d}{\omega_s} \tag{2.2}$$

Armon et al. [23] ont proposé un classement par rang des modes en changement de fréquences pour détecter des fentes et des fissures dans une poutre, et ils ont démontré que la méthode est efficace même en prenant en considération les erreurs expérimentales et les incertitudes sur le model.

*Nicholson et Alnefaie* [24] ont introduit un autre paramètre sensible à l'endommagement nommé l'indice du moment modal (Modal Moment Index MMI), qui extrait des paramètres modaux expérimentaux. L'indice a un changement brusque à l'endroit de l'endommagement et peut servir à le quantifier.

En résolvant un problème inverse des trois premières fréquences naturelles, *Chaudhari et Maiti* [25] ont utilisé la technique Frobenius qui gouverne des équations différentielles, et ont obtenu ainsi la localisation du défaut par une approche semi-numérique, tandis que *Chinchalkar* [26] a fait recours à la méthode des éléments finis pour modéliser une modification du premier ordre du problème aux valeurs propres.

*Jones et Turcotte* [27] ont pris les fréquences d'antirésonance dans un model éléments finis pour détecter les endommagements.

*Moser et al.* [28] ont étudié l'effet des conditions environnantes sur le changement de fréquences naturelles, ils ont, de la sorte, pu rendre les fréquences naturelles plus efficaces dans la détection d'endommagement.

#### II.3.1.5. Méthodes bases des repenses fréquentielle

Les fonctions de réponse fréquentielle décrivent le domaine fréquentiel du système, et sont très utilisées dans la dynamique des structures et l'identification des systèmes mécaniques pour l'extraction des fréquences de résonance, l'estimation des vecteurs propres et des coefficients d'amortissement, et vérifier les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Plusieurs méthodes de détection d'endommagement basées sur l'évaluation des paramètres modaux sont reliées, directement ou indirectement, à la FRF. Cela implique que l'information contenue dans les données FRF, peut être directement utilisée pour détecter l'endommagement.

*Wang et al.* [29] ont développé un algorithme pour localiser et quantifier l'endommagement en utilisant directement les données FRF mesurées. Le vecteur d'endommagement, qui indique la position et la magnitude de ce dernier, est calculé à partir des perturbations dans les équations de la FRF. *Mottershead et al.* [30] ont exploré la possibilité de détection d'endommagement, en utilisant des équations FRF rationnelles, basée sur l'observation que l'endommagement peut augmenter le comportement non-linéaire d'une structure. Des techniques ont été développées pour extraire ces distorsions des données FRF, afin de localiser et quantifier l'endommagement (*Vanhoenacker et al.*) [31].

#### II.3.1.6. Méthodes bases énergie de déformation modale :

*Yang et al.* [32] ont utilisé la propriété de l'invariance d'énergie de déformation modale élémentaire pour localiser l'endommagement. Dans cette méthode, l'énergie de déformation modale est décomposée en deux parties qui définissent deux indicateurs d'endommagement. Le premier est le rapport de changement d'énergie de déformation modale de compression et le second représente le rapport de changement d'énergie modale de torsion. L'énergie de déformation modale a été obtenue par des formes modales incomplètes et des matrices de raideur élémentaire. Plusieurs cas d'endommagement ont été simulés sur une plate forme pétrolière offshore. D'après les résultats obtenus, les auteurs ont montré l'efficacité et la précision de la méthode dans la détection d'endommagement sur des structures complexes.

*Brehm et al.* [33] ont développé une approche basée sur un model purement mathématique enrichi par des informations physiques obtenues par un model numérique basée sur l'énergie de déformation modale, ils ont ainsi pu localiser et quantifier l'endommagement. *Dixit et al.* [34] ont présenté une méthode basée sur l'énergie de déformation modale obtenue à partir des fréquences naturelles et des déformées propres correspondantes, afin de localiser et de quantifier des endommagements sur des poutres, sous différentes conditions aux limites, et ils ont obtenu des résultats expérimentaux qui démontrent la robustesse de leur approche.

#### II.3.1.7 Méthodes bases flexibilité modale

*Li et al.* [35] ont présenté une nouvelle approche basée sur le changement de la matrice de flexibilité modale généralisée, qu'ils ont utilisé pour localiser et quantifier des endommagements. En comparaison avec la matrice de flexibilité modale, la matrice de flexibilité modale généralisée réduit l'effet de troncature des modes d'ordre supérieur.

*Kazemi et al.* [36] ont utilisé la variation de la flexibilité modale pour détecter des défauts sur des structures plaques minces. L'indicateur d'endommagement est formulé à partir de la matrice de flexibilité modale et des équations différentielles de variation des efforts. *Reynders et al.* [37]ont proposé une méthode basée sur la flexibilité quasi statique. La matrice de flexibilité modale est combinée avec des forces virtuelles qui causent des contraintes non nulles sur de petites parties de la structure, où de possible changement de raideur sont à chercher. Ils ont démontré que, si la relation contraintes déformations est proportionnelle, le rapport entre certaines combinaisons de déformations avant et après endommagement, fait apparaître un changement de raideur, égal à l'inverse de la raideur locale. La méthode est appelée flexibilité locale.

L'organigramme de la méthode un résumé des différentes méthodes utilisées dans la détection d'endommagement en utilisant des données vibratoires.



Figure II.4 : Principales méthodes de détection d'endommagement.

## **II.4.** Conclusion

Dans ce chapitre nous avons passé en revue les différentes méthodes de contrôle non destructif, en faisant apparaitre leurs potentialités et limites, ensuite nous nous sommes intéressé aux méthodes de détection d'endommagement basées sur des sonnées vibratoires, en les classifiant par catégorie. Dans le chapitre suivant, nous développerons le model éléments finis que nous utiliserons pour calculer les paramètres modaux d'une structure poutre stratifiée, nécessaires à l'application des deux méthodes étudiées.

# <u>Chapitre III</u> <u>Modélisation par éléments finis des</u> poutres stratifiées en matériau composite

### **III.1. Introduction**

Il y a beaucoup des théories avancées pour analyse et modélise une structure en matériaux composites. La théorie la plus claire et la plus simple est La théorie de la poutre de Timoshenko, où le premier rangent la théorie de la difformité du ciseau qui a été proposé par Timoshenko en 1921.

#### III.2. Théorie de la Poutre de Timoshenko [38]

Dans la théorie de la poutre du Timoshenko un u1(x) du déplacement longitudinal dans la direction de l'axe x de la poutre, un u3(x) du déplacement transversaux dans la direction de l'axe z et une rotation  $\gamma(x)$  caractérisant la flexion autour de l'axe y (Figure .III.1)

Cette approximation linéaire du déplacement tangentiel  $u_1$  de la théorie de la poutre de Timoshenko est appelé la première théorie de la difformité du ciseau de l'ordre(first order shear déformation theory FOSDT). Et cette approximation est applicable sur les poutres homogènes et multicouches.



Figure III.1 : Déformation d'une poutre (théorie de TIMOSHENKO).

### Les déplacements

$$u_1(x,z) = u(x) + z\gamma_x(x)$$
,  $u_3 = w(x)$  (3.1)

#### Les déformations

Nous avons:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x} , \quad \varepsilon_y = 0 , \quad \varepsilon_z = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} , \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0 \end{aligned}$$
(3.2)

Substituant les expressions (3.1) dans (3.2) :

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_x + zk_x$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_x = \gamma_x + \frac{\partial w}{dx}$$
(3.3)

Ici  $\varepsilon_x$  et  $k_x$  sont tensions et courbure.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{dx} \\ k_x &= \frac{\partial \gamma_x}{dx} \end{aligned}$$
 (3.4)

Energie potentielle de la poutre s'écrit

$$U = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_{x1} + \sigma_{xz} \gamma_{xz}) \, dV \tag{3.5}$$

Remplaçant les expressions (3.3) dans l'équation (3.5)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (N_x \varepsilon_{x1} + M_x K_x + 2Q \varepsilon_x) dx$$
(3.6)

L : est la longueur totale de la poutre.

Les résultantes des efforts sont données par :

$$N_{x} = \int \sigma_{x} dS$$

$$M_{x} = \int \sigma_{x} z dS$$

$$Q_{x} = \int \sigma_{xz} dS$$
(3.7)

S : section transversale de la poutre. dS=dzdy.

Substituant dans (3.7) la loi de Hooke en tenant compte des relations (3.3) :

$$N_{x} = Q_{11}\varepsilon_{x} + B_{11}k_{x} M_{x} = B_{11}\varepsilon_{x} + D_{11}k_{x} Q_{x} = 2kQ_{55}\varepsilon_{xz}$$
(3.8)

 $Q_{ij}$ ,  $B_{11}$  et  $D_{11}$  sont les coefficients de rigidité de la poutre. Pour les calculer on utilise les rigidités des couches  $A_{ij}^{(k)}$ .

Et k : si le facteur de correction de cisaillement.

$$\begin{array}{c}
Q \\
11=b \sum_{k=1}^{k} A_{11}^{(k)}[z_{k}-z_{k-1}] \\
Q \\
55=b \sum_{k=1}^{k} A_{55}^{(k)}[z_{k}-z_{k-1}] \\
B \\
11=\frac{1}{2}b \sum_{k=1}^{k} A_{11}^{(k)}[(z_{k})^{2}-(z_{k-1})^{2}] \\
D \\
11=\frac{1}{3}b \sum_{k=1}^{k} A_{11}^{(k)}[(z_{k})^{3}-(z_{k-1})^{3}]
\end{array}\right\}$$
(3.9)

Avec :

*b*: largeur de la poutre.

 $z_k$ : la coordonnée de la  $k^{eme}$  couche. (Figure III.2)

$$A_{11}^{(k)} = E_x^{(k)}$$
 et  $A_{55}^{(k)} = G_{xz}^{(k)}$  (3.10)

 $E_{\chi}^{(k)}$ : Module de Young de la  $k^{eme}$  couche dans la direction de l'axe x.

 $G_{xz}^{(k)}$ : Module de cisaillement transversal de la $k^{eme}$ couche de la poutre.



Figure III.2 : Représentation des couches de la poutre.

Remplaçant l'équation (3.8) dans (3.6) en tenant compte des relations (3.3) et (3.4), l'énergie de déformation peut être exprimée comme suit :

$$U = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \left[ Q_{11} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{2} + 2B \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial Y_{X}}{\partial x} + D_{11} \left( \frac{\partial Y_{x}}{\partial x} \right)^{2} + kQ_{55} \left( Y_{x} + \frac{\partial u}{\partial u} \right)^{2} \right] dx \quad (3.11)$$

Pour les besoins de l'identification d'endommagements dans des structures poutres stratifiées en matériaux composites nous définissons les éléments finis dénommés ci-après SI12.

#### III.3. L'élément fini SI12

#### **III.3.1. Introduction**

Considérons la flexion d'une poutre en matériau composite stratifié unidirectionnelle avec ordre des couches symétriques. Chaque nœud de l'élément fini SI12possède trois degrés de liberté(Figure III.3)

#### III.3.2. calcule de la matrice de forme pour l'élément fini SI12

La procédure de base, dans la méthode des éléments finis, est d'exprimer les coordonnées de l'élément sous forme d'interpolation en termes de coordonnées nodales.



Figure .III.3: Elément fini SI12.

Dans ce modèle, les déplacements dans chaque couche sont représentés par l'expression du déplacement d'une seule couche. Ainsi, les rotations  $\gamma_x$ sont différentes dans chaque couche.

L'énergie de déformation de l'élément fini SI12 est exprimée sous la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [Q_{11}(\varepsilon_x)^2 + D_{11}(k_x)^2 + kQ_{55}(\gamma_{xz})^2] \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon^T D \, \varepsilon \, \mathrm{dx}$$
(3.12)

 $\gamma_{xz}$ : est donnée par la relation (3.3)

 $\varepsilon_x \ et \ k_x$ : sont donnés par la relation (3.4)

Les matrices  $\epsilon$  et D sont définies comme suit :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ k_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & kQ_{55} \end{bmatrix}$$
(3.13)

La relation contraintes déplacements sont données sous forme matricielle comme suit :

$$\varepsilon_x = Lu \tag{3.14}$$

Les matrices L et u sont données par :

$$u = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \gamma_x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{bmatrix}$$
(3.15)

Les déplacements nodaux de l'élément fini SI12  $v_i$  sont définis par le vecteur suivant :

$$v_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \gamma_x^i \end{bmatrix}$$
(3.16)

 $v_i$ : Vecteur déplacements de nœud *i* 

$$v_e^T = \{ v_i^T, v_j^T, v_k^T, v_l^T \}$$
(3.17)

 $v_e$ : Vecteur déplacements nodaux de l'élément fini SI12.

L'approximation des déplacements dans l'élément fini SI12 est donnée par :

$$u = Nv_e \tag{3.18}$$

36

Tel que N est la matrice des fonctions de forme.

Avec N = 
$$\begin{bmatrix} N_i I_3, N_j I_3, N_k I_3, N_l I_3 \end{bmatrix}$$
 (3.19)  
 $I_3$ : Matrice unité 3x3:  $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 

 $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_k$  et  $N_l$ : Fonction d'interpolation qui dépend du type de sous domaine considéré et du nombre de nœuds par sous domaines. Pour assurer la continuité de la flèche w.

$$N_{l} = 1 - \frac{11}{2} \frac{x}{l} + 9 \left(\frac{x}{l}\right)^{2} + \frac{9}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{3}$$

$$N_{j} = 9 \frac{x}{l} - \frac{45}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{2} + \frac{27}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{3}$$

$$N_{k} = -\frac{9}{2} \frac{x}{l} + 18 \left(\frac{x}{l}\right)^{2} - \frac{27}{2} * \left(\frac{x}{l}\right)^{3}$$

$$N_{l} = \frac{x}{l} - \frac{9}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{2} + \frac{9}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^{3}$$
(3.20)

La figure (III.4)montre la variation des fonctions de forme en fonction des coordonnées des nœuds i, j, k et l.



Figure III.4: Fonction de forme de l'élément fini SI12.

### III.3.3. Calcul de la matrice élémentaire de rigidité pour l'élément fini SI12

Remplaçant l'expression (3.18) dans (3.14) :

$$\varepsilon = Bv_e Avec B = LN \tag{3.21}$$

Remplaçant la relation (3.20) dans (3.12) énergie de déformation :

$$U_{e} = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \varepsilon^{T} D\varepsilon dx = \frac{1}{2} v_{e}^{T} K_{eu} v_{e}$$
(3.22)

Keu: est la matrice de rigidité de l'élément fini SI12

La matrice de raideur élémentaire  $K_{eu}$  est obtenue à partir de l'énergie de déformation :

$$K_{eu} = \frac{1}{2} \int_0^L B^T D B dx$$
 (3.23)

#### III.3.4. Calcul de la matrice de masse élémentaire

L'énergie cinétique  $T_e$  voir Figure III.1 est donnée par la relation suivante :

$$T_{e} = \frac{1}{2} \int_{Ve} \sigma \, \dot{u}_{i}^{2} dV = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{z_{0}}^{z_{k}} \sigma (\dot{u}_{1}^{2} + \dot{u}_{3}^{2}) dx dy dz \\ = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \int_{z_{0}}^{z_{k}} \sigma (\dot{u}^{2} + 2z\dot{u}\dot{\gamma}_{x} + z^{2}\dot{\gamma}_{x}^{2}) dx dz \\ = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} [\sigma_{0}(\dot{u}^{2} + \dot{w}^{2}) + 2\sigma_{1}\dot{u}\dot{\gamma}_{x} + \sigma_{2}\dot{\gamma}_{x}^{2}] dx$$

$$(3.24)$$

Avec les densités massiques généralisées  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont données par les relations suivantes:

$$\sigma_{0} = b \sum_{k=1}^{K} \sigma_{k} [z_{k} - z_{k-1}]$$

$$\sigma_{1} = \frac{1}{2} b \sum_{k=1}^{K} \sigma_{k} [z_{k}^{2} - z_{k-1}^{2}]$$

$$\sigma_{2} = \frac{1}{3} b \sum_{k=1}^{K} \sigma_{k} [z_{k}^{3} - z_{k-1}^{3}]$$
(3.25)

Tel que  $\sigma_k$ : Masse volumique de la  $K^{eme}$ couche.

Le vecteur déplacement u est défini par la relation (3.15) et la matrice  $R_0$  est définie par la formule suivante :

$$R_{0} = \begin{bmatrix} \sigma_{0} & 0 & \sigma_{1} \\ 0 & \sigma_{0} & 0 \\ \sigma_{1} & 0 & \sigma_{2} \end{bmatrix}$$
(3.26)

Avec  $R_0$  est la matrice des masses généralisées.

Substituant l'expression (3.18) dans la relation (3.24):

$$T_e = \frac{1}{2} v_e^T M_{eu} v_e (3.27)$$

Où  $M_{eu}$  est la matrice de masse de l'élément finis SI12

$$M_{eu}S'\acute{e}crit: M_{eu} = \int_0^L N^T R_0 N dx$$
(3.28)

Avec N est la matrice des fonctions de forme .est définie dans la matrice de rigidité élémentaire, N<sup>t</sup> est la matrice transposée de la matrice N.

#### III.4. Assemblages des matrices élémentaires

Après le calcul des matrices élémentaires de rigidité  $K_{eu}$  et de masse  $M_{eu}$  de tous les éléments, il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir les matrices de rigidité global Ku et la matrice de masse global  $M_u$  de toute la poutre.

Pour avoir les matrices globales  $[M_u]$  et $[K_u]$  on fait la sommation des matrices élémentaires augmentées à la taille de la matrice globale $[M_{eu}]$ et $[K_{eu}]$ .

$$[Mu] = \sum_{1}^{Nel} M_{eu}$$

$$[Ku] = \sum_{1}^{Nel} K_{eu}$$
(3.36)

Avec Nelest le nombre d'éléments finis de la poutre.

#### III.5.Calcul les valeurs et vecteurs propres et les fréquences naturelles

#### III.5.1 Définition [39]

La fréquence est le nombre de fois qu'un phénomène se répète en un temps donne. Lorsque l'unité de temps choisie est la seconde, la fréquence s'exprime en hertz[Hz].

#### III.5.2 calcul des valeurs et vecteur propres :

Pour avoir les fréquences naturelles les f il faut d'abord calculer les valeurs ( $\varphi$ ) et les vecteurs propres ( $\lambda$ ), après imposition des conditions aux limites.

L'équation générale d'une structure s'écrit :

$$([K_u] - \lambda[M_u])\{\varphi\} = 0 \tag{3.29}$$

#### III.6. Architecture de modélisation d'une poutre stratifiée sur MATLAB

Les grandes étapes à suivre pour modélise une poutre stratifiée est bien présenter sur la (Figure III.5). Et elle reste les détails de programmation ce que on le trouve dans tous les formules et les équations qui sont bien détaillé dans ce chapitre.



Figure III.5 : Architecture de modélisation d'une poutre stratifiée.

#### **III.7.** Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rédigés les différentes étapes pour modélisée en éléments finis une poutre stratifiée, afin d'avoir les données dynamiques nécessaires à l'application des méthodes de détection et localisation d'endommagement basée sur des données modale présentées dans les chapitres suivants.

# <u>Chapitre IV</u>

# <u>Présentation et application de la</u> <u>méthode basée sur les réponses</u> <u>fréquentielles</u>

#### **IV.1. Introduction**

Pour vérifié l'existence des défauts, leur position et leur amplitudes dans les structures avant et pendant la mise en marche, pour ce là nous utilisons les méthodes vibratoires car ces méthodes sont facile a manipulée et sont économiques.

Une approche consiste à surveiller et interpréter les changements dans les repenses fréquentielles d'une structure en veut de diagnostiquer son état de santé.

Ainsi, dans la présente méthode, les réponses fréquentielles *(FRF)* sont utilisées pour détecter les endommagements, plutôt que les fréquences naturelles et les formes modales.

Pour vérifier la robustes de cette méthode, nous avons considérer plusieurs cas tests numérique sur une poutre stratifier.

#### IV.2. Présentation de la méthode basée sur les repeses fréquentielle (FRF) [40]

#### **IV.2.1. Introduction**

Cette méthode comporte deux étapes, la première consiste à détecter la présence de défauts en utilisant les réponses fréquentielles et la deuxième consiste à la localisation et quantification des défauts.

#### IV.2.2. Etapes 1 : détection de défauts en utilisant les FRF

Les endommagements modifient la manière avec laquelle réponde une structure. C'est à dire les repenses fréquentielles d'une structure endommager sont déférentes avec les repenses fréquentielles d'une structure sains. Si on le compare c'il y a une déférence donc il existe des endommagements.

Les changements se produisent également dans certains paramètres structuraux, tels que la masse, l'amortissement et la raideur.

Les équations du mouvement d'une structure saine à N degrés de libertés (Nddl) peuvent être exprimées comme suit :

$$[Mu]\{\ddot{x}(t)\} + [D]\{\dot{x}(t)\} + [Ku]\{x(t)\} = F(t)$$
(4.1)

Ou $[M_u]$ , [D] et  $[K_u]$  représentent les matrices globales de masse, amortissement, et de rigidité pour la structure saine.

Nous avons négligé l'amortissement dans notre étude, donc l'équation (4.1) devienne

$$[Mu]\{\ddot{x}(t)\} + [Ku]\{x(t)\} = F(t)$$
(4.2)

Si nous supposons une excitation harmonique, la force extérieure et le déplacement peut être exprimé comme suit.

$$f(t) = \{F(\omega)\}e^{j\omega t} \quad et \quad x(t) = \{x(\omega)\}e^{j\omega t}$$
(4.3)

En remplacent ces équations dans l'équation (4.2) on aura les deux équations (4.4) et (4.5) pour la structure sain et endommager :

$$\{-\omega^{2}[Mu] + [Ku]\}\{X(t)\}e^{j\omega t} = \{F(\omega)\}e^{j\omega t}$$
(4.4)

$$\{-\omega^{2}[Md] + [Kd]\}\{X(t)\}e^{j\omega t} = \{F(\omega)\}e^{j\omega t}$$
(4.5)

Tels que  $M_u$  et  $K_u$  représentent les matrices globales de masse, et de rigidité pour la structure endommagée.

En simplifié  $e^{j\omega t}$  dans le deux cote de l'équation, on obtient la matrice de FRF,[ $Xu(\omega)$ ] et [ $Xd(\omega)$ ] sont définies comme suit :

$$[Xu(\omega)] = \{(-\omega^2[Mu] + [Ku])^{-1}\} * [F(\omega)]$$
(4.6)

$$[Xd(\omega)] = \{(-\omega^2 [Md] + [Kd])^{-1}\} * [F(\omega)]$$
(4.7)

Tels que  $[Xu(\omega)]$  et  $[Xd(\omega)]$  représentent les repenses fréquentielles pour la structure saine et endommagée.

Pour la même excitation la repense fréquentielle reste toujours la même, si la structure ne comporte pas de défauts. De là, l'indicateur de détection d'endommagement utiliser dans cette méthode est basé sur la comparaison des deux repenses fréquentielles  $[Xu(\omega)] et [Xd(\omega)]$ . La représentation graphique des repenses fréquentielles des structures saine et endommagée est donnée sur la figure. IV.2.

#### IV.2.2.1. Organigramme de la détection d'endommagement basée sur la FRF

Dans cette partie de notre étude nous présentant les déférentes étapes à suivre pour détecter la présence d'endommagements dans une structure stratifier en utilisons les repenses fréquentielles (figure. IV.1).



Figure IV.1 : organigramme des repenses fréquentielles.



Figure IV.2 : repenses fréquentielles des structures.

#### IV.2.3. Etape 2 : localisation et quantification de défauts

Apres détection de la présence de défauts dans une structure, une deuxième étape s'impose. Cette étape consiste à repérer les positions et leurs ampleurs. Pour cela nous proposons l'utilisation de l'expression de l'énergie de déformation modale comme suit :

 $Reu_i^{es}$  et  $Red_i^{ed}$  sont respectivement l'énergie de déformation des structures saine et endommagée, Nel est le nombre d'éléments de la structure, nr est le nombre de repense fréquentielle.

$$Reu_{i}^{es} = \frac{1}{2} \{xu\}_{i}^{t} [K_{eu}(j)] \{xu\}_{i} \}$$

$$Red_{i}^{ed} = \frac{1}{2} \{xd\}_{i}^{t} [K_{eu}(j)] \{xd\}_{i}^{d} \}$$

$$i = 1: nr; j = 1: Nel$$

$$(4.8)$$

 $[K_{eu}]$  Est la matrice de rigidité élémentaire de la structure saine à la dimension de la matrice globale.

Toute l'énergie de la structure peut-être calculée en additionnant le  $R_{eu}$  et  $R_{ed}$  de chaque élément, alors on peut écrire :

$$RTU_i^s = \sum_{j=1}^{Nel} Reu_i^{es} \qquad ; \qquad RTD_i^d = \sum_{j=1}^{Nel} Red_i^{ed} \qquad (4.9)$$

Pour normaliser le  $Reu_i^{es}$  et le  $Red_i^{ed}$  on devisera chaque énergie élémentaire sur l'énergie totale, donc l'énergie normalisé s'écrie :

$$NRU_i^{es} = \frac{Reu_i^{es}}{RTU_i^s} \quad ; \qquad NRD_i^{ed} = \frac{Red_i^{es}}{RTD_i^s} \quad (4.10)$$

Après normalisation du *MRU*et *MRU*, on peut choisir les premiers nombres des repenses fréquentielles (nr) comme paramètres efficaces, et on peut écrire :

$$MNRU^{es} = \frac{\sum_{i=1}^{nr} NRU_i^{es}}{nr} \qquad ; \qquad MNRD^{ed} = \frac{\sum_{i=1}^{nr} NRD_i^{ed}}{nr} \qquad (4.11)$$

L'indicateur nommé l'indice de base d'énergie de déformation et repenses fréquentielles s'écrit sous la forme suivante :

$$indic\_FRF = \frac{MNRD^{ed} - MNRU^{es}}{MNRU^{es}}$$
(4.12)

Pour localiser des défauts il faut représenter l'indicateur et pour la quantification nous avons calculé un coefficient de proportionnalité de l'indic\_FRF par rapport aux taux d'endommagement. Le nouvel indicateur est donné par l'équation suivante :

$$indic_quant = indic_FRF * \psi$$
(4.13)

Tel que  $\psi$  est le coefficient de proportionnalité (l'indic\_FRF par rapport aux taux)

### IV.3. Application de la méthode sur la poutre stratifiée

#### IV.3.1. présentation de la poutre

Dans cette partie, nous considérons une poutre stratifie en matériaux composite avec quatre plis d'une matrice époxy et fibres de carbone présenté sur la figure IV.3.

Ces caractéristiques mécaniques sont :

 $E_1 = 14.48 * 10^{10} Pa$   $E_2 = 0.965 * 10^{10} Pa$   $G_{12} = 0.414 * 10^{10} Pa$  $\sigma = 1390 \ kg/m^3$ 

Ces caractéristiques géométriques sont :

Nel = 20 éléments finis.

L: longueur = 1 m

b : largueur = 0.1 m

h : épaisseur = 0.1 m



Figure IV.3 : poutre stratifie encastrée [0/90/90/0] excitée.

## IV.3.2. Application de la méthode pour détermine la valeur de $\psi$

Afin de déterminer valeur de  $\psi$  nous avons considéré les trois cas de tests suivant :

	Numéro du cas test	Eléments	Pourcentage		
		endommagés	d'endommagement		
	1	7	30% sur Ex		
indic_FRF	2	9	25% sur Ex		
Indic_quant	3	17	20% sur Ex		

Tableau IV.1 : Récapitulatif des cas tests.



Figure. IV.4 : cas test 1 (a : variation de *indc\_FRF* b : variation de *indc\_quant*).



Figure. IV.5 : cas test 2 (a : variation de *indc\_FRF* b : variation de *indc\_quant*).



Figure. IV.6 : cas test 3 (a : variation de *indc\_FRF* b : variation de *indc\_quant*).

### IV.3.2.1. Calcul de coefficient de proportionnalité $\psi$

Pour chaque cas test nous avons calculé la valeur de  $\psi$  correspondante, et nous avons pris la valeur moyenne comme paramètre de quantification.

$$\psi = \frac{\% d' endommagement}{la \ lecture \ indic\_FRF \ * \ 100}$$
(4.14)  
$$\psi_1 = \frac{30}{0.88 \ * \ 100} = 0.35$$
  
$$\psi_2 = \frac{25}{0.66 \ * \ 100} = 0.3788$$
  
$$\psi_3 = \frac{20}{0.49 \ * \ 100} = 0.4082$$
  
$$\psi = \frac{0.35 + 0.3788 + 0.4082}{3} = 0.3790$$

### IV.3.3. Application de la méthode des FRF avec $\psi = 0.3790$

Le récapitulatif des cas test que nous avons considéré dans cette application est donné sur le tableau suivant :

Nombre de défauts	Numéro du cas test	Eléments	Pourcentage			
		endommagés	d'endommagement			
1	4	2	20%			
	5	7	15%			
	6	15	55%			
2	7	4 et 12	20% et 30%			
	8	3 et 13	35% et 60%			
3	9	6, 12 et 18	30%			

Tableau IV.2 : Récapitulatif des cas tests de quantification.

# 1<sup>er</sup> cas 1 éléments endommagé

En faussant varié la position et le taux d'endommagement pour le cas d'un seul élément endommagé, les résultats obtenu sont représentés sur les figures suivantes.



Figure IV.7 : Cas test 4.

Figure IV.8 : Cas test 5.



Figure IV.9 : Cas test 6.

Les résultats obtenus montrant que l'endommagement est toujours localisé et la quantification n'est pas significatif pour le troisième cas.

## 2<sup>ème</sup> cas 2 éléments endommagés

En faussant varié les positions et les taux d'endommagement pour le cas de deux élément endommagés, les résultats obtenu sont représentés sur les figures suivantes.



Figure IV.10 : Cas test 7.

Figure IV.11 : Cas test 8.

Les résultats obtenus montrant que les endommagements sont localisés dans les deux cas test, et la quantification n'est pas significatif pour le deuxième cas.

## 3<sup>ème</sup> cas 3 éléments endommagés

Nous considérons les éléments 8, 12 et 18 endommagés de 30%, les résultats obtenus sont représentés sur la figure suivante.



Figure IV.12 : Cas test 9.

Les résultats obtenus montrant que les endommagements sont localisés et le taux d'endommagement correspond a l'indicateur.

### **IV.4** Conclusion

Les résultats obtenus nous montrons qu'on peut utiliser les changements dans les réponses fréquences pour détecter la présence d'éventuels défauts dans les structures en matériaux composites.

Les résultats obtenus nous montrons que l'indicateur d'endommagement base sur l'énergie de déformation modale et les repenses fréquentielles est fiable pour la localisation des endommagements et la quantification de ces dernières dans le cas de faibles taux d'endommagement dans les structures en matériaux composites stratifiés.

# Chapitre V :

# <u>Présentation et application de la méthode</u> <u>basée sur l'énergie de déformation</u> <u>modale</u>

#### **V.1 Introduction**

Les endommagements sous forme de perte de rigidité locale dans une structure changeraient les propriétés physiques de système telles que, les paramètres de vibration de la structure, les vecteurs et les valeurs Propres. Dans ces cas, le changement des paramètres de vibration peut être employé comme indicateurs pour la détection, localisation et quantification d'endommagement.

Dans cette méthode, un indice efficace basé sur l'énergie de déformation modale est présenté pour localiser et quantifier les défauts.

# V.2. Présentation de la méthode basée sur l'énergie de déformation modale (Modal Strain Energy Based Index MSEBI) [41]

Dans cette étude, un index effectif a basé sur l'énergie de la tension modale (MSE) est présenté pour placer correctement les éléments défectueux d'une structure endommagée. L'analyse modale est un outil pour déterminer les fréquences naturelles et la mode façonne d'une structure.

$$([Ku] - \lambda_i [Mu]) \{\phi\}_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, nm; nm; nombre \text{ de modes}$$
(5.1)

Où [*Ku*] et [*Mu*] sont les matrices globales de rigidité et de masse de la structure, respectivement ;  $\lambda_i$  et  $\varphi_i$  sont les valeurs et vecteurs propres. On a :

$$\{\phi\}_i^T[Mu]\{\phi\}_i = 1 \quad et \quad \{\phi\}_i^T[Ku]\{\phi\}_i = \lambda_i$$
(5.2)

Puisque les vecteurs propres sont équivalents aux déplacements nodaux d'une structure, donc la MSE est distribuée dans chaque élément de la forme suivante :

$$MSE_{i}^{es} = \frac{1}{2} \{\phi\}_{i}^{t} [K_{eu}(j)] \{\phi\}_{i}^{d} \}$$

$$MSE_{i}^{ed} = \frac{1}{2} \{\phi\}_{i}^{dt} [K_{eu}(j)] \{\phi\}_{i}^{d} \}$$

$$i = 1: nm; j = 1: Nel$$
(5.3)

 $MSE_i^{es}$  et  $MSE_i^{ed}$  sont respectivement l'énergie de déformation modale des structures saine et endommagée, Nel est le nombre d'éléments de la structure, n*m* est le nombre de modes.

 $[K_{eu}]$  est la matrice de rigidité élémentaire de la structure saine à la dimension de la matrice globale.

Toute l'énergie modale de la structure peut-être calculée en additionnant le MSE de chaque élément, alors on peut écrire :

$$MSE_{i}^{s} = \sum_{j=1}^{Nel} MSE_{i}^{es}$$
;  $MSE_{i}^{d} = \sum_{j=1}^{Nel} MSE_{i}^{ed}$  (5.4)

Pour normaliser le  $MSE_i^{es}$  et le  $MSE_i^{ed}$  on devisera chaque énergie élémentaire sur l'énergie totale, donc l'énergie normalisé s'écrie :

$$NMSE_i^{es} = \frac{MSE_i^{es}}{MSE_i^s} \quad ; \quad NMSE_i^{ed} = \frac{MSE_i^{ed}}{MSE_i^d} \tag{5.5}$$

Après normalisation du *MSE*, on peut choisir les premiers nombres des (nm) modes comme paramètres efficaces, et on peut écrire :

$$MNMSE^{es} = \frac{\sum_{i=1}^{nm} NMSE_i^{es}}{nm} \qquad ; \qquad MNMSE^{ed} = \frac{\sum_{i=1}^{nm} NMSE_i^{ed}}{nm} \qquad (5.6)$$

L'indicateur nommé l'indice de base d'énergie de déformation modale MSEBI s'écrit sous la forme suivante :

$$MSEBI^{e} = \frac{MNMSE^{ed} - MNMSE^{es}}{MNMSE^{es}}$$
(5.7)

Pour localiser les endommagements, il suffit juste de prendre les *j* indices MSEBI non nuls et les éléments correspondants, en sachant que l'indice des éléments sains sera presque nul ou négative.

#### V.3. Application de la méthode :

On perturbe l'état de la sante de la poutre en variant le nombre d'éléments endommager, le taux d'endommagement, les conditions aux limites et la position des éléments endommagées pour voir la sensibilité de l'indicateur à ces changements.

Nous avons considéré deux cas de condition aux limites. Le premier cas est encastrélibre (Le premier élément de la poutre stratifiée est encastrée (Figure. V.1)). Et le deuxième cas, la poutre est sur deux appuis simples (Le premier et le dernier élément de la poutre stratifiée sont sur des appuis simples (Figure. V.2)).

Dans cette partie, nous considérons une poutre stratifie en matériaux composite avec quatre plis d'une matrice époxy et fibres de carbone.

Caractéristiques mécaniques

 $E_1 = 14.48 * 10^{10} Pa$  $E_2 = 0.965 * 10^{10} Pa$  $G_{12} = 0.414 * 10^{10} Pa$   $\sigma = 1390 \ kg/m^3$ 

Caractéristiques géométriques :

- Nel = 20 éléments finis.
- L : longueur = 1 m
- b : largueur = 0.1 m
- h: épaisseur = 0.1 m



Figure. V.1 : poutre stratifie encastrée [0/90/90/0]



Figure. V.2 : poutre stratifie [0/90/90/0] sur deux appuis simples.

Le nombre de modes utilise pour calcule l'indicateur d'endommagement dans le cas des faible taux d'endommagement est quatre et dans le cas des taux d'endommagement important nous avons utilise huit modes (voir annexe A).

Nous avons modélisé l'endommagement par la réduction du module d'Young des couches du l'élément fini du stratifié (d'autres modélisation de défauts sont donné en annexe B). Les cas testes considéré dans cette partie sont regroupé dans le tableau suivant :

Nombre	N° du	Encastrée_libre	Eléments			Pourcentage				
de	cas test	Appuis simples	endommagés			d'endommagement (sur				
défauts			C .			Ex)				
	17	(en)	8		25%					
1	18	(as)								
	19	(en)	16		50%					
	20	(as)								
	21	(en)	6	6 12		25%			50%	
2	22	(as)								
	23	(en)	7	7 9		20%			30%	
	24	(as)								
	25	(en)	5	1	10 15		25% 50		%	30 %
3	26	(as)								
	27	(en)	8	1	2	16	30 %	25	%	20 %
	28	(as)								
	29	(en)	4	8	15	16	25%	25%	70%	5 70%
4	30	(as)								

Tableau. V.1 : Récapitulatif des cas tests

## V.3.1. Un seul élément endommagé

En faisant varier la position, le taux d'endommagement et le type de conditions aux limites dans le cas d'un seul élément endommagé. Les histogrammes représentatifs de la variation de l'indicateur d'endommagement sont représentés sur les figures ci-dessous :



Figure. V.3 Cas test 1



Figure. V.4 Cas test 2



Les résultats montrent que la position de défaut n'influe pas sur la localisation et la quantification des défauts. Mais le type de condition aux limites et le taux d'endommagement influe sur la quantification d'endommagement.

#### V.3.2. Deux éléments endommagés

Après avoir vérifié la méthode à la présence d'un seul endommagement, on vérifie sa fiabilité à la présence de deux endommagements.

En faisant varier les positions, les taux d'endommagement et le type de conditions aux limites dans le cas de deux éléments endommagés. Les histogrammes représentatifs de la variation de l'indicateur d'endommagement sont représentés sur les figures ci-dessous :

Les éléments 6 et 12 qui sont situes presque au milieu de la poutre sont perturbés de 25% et 50% sur Ex, et avec deux conditions aux limites, poutre encastrée (Figure. V.7) et sur deux appuis simples (Figure. V.8).

Les éléments 7 et 9 qui sont situes presque au milieu de la poutre sont perturbés de 20% et 30% sur Ex, et avec deux conditions aux limites, poutre encastrée (Figure. V.9) et sur deux appuis simples (Figure. V.10)




Figure. V.8 : Cas test 6





Figure. V.10 : Cas test 8

Les résultats montrent que la position et le nombre de défauts n'influent pas sur la localisation et la quantification des défauts. Mais le type de condition aux limites et le taux d'endommagement influe sur la quantification d'endommagement.

### V.3.3. trois éléments endommagés

Après avoir vérifié la méthode à la présence de deux endommagements, on vérifie sa fiabilité à la présence de trois endommagements, toujours en changeant de module Young.

En faisant varier les positions, les taux d'endommagement et le type de conditions aux limites dans le cas de trois éléments endommagés. Les histogrammes représentatifs de la variation de l'indicateur d'endommagement sont représentés sur les figures suivantes : Les éléments 5,10 et 15 qui sont perturbés de 25%, 50% et 30% sur Ex, et avec deux conditions aux limites, poutre encastrée (Figure. V.11) et sur deux appuis simples (Figure. V.12).

Les éléments 8 ,12 et 16 qui sont perturbés de 30%, 25% et 20% sur Ex, et avec deux conditions aux limites, poutre encastrée (Figure. V.13) et sur deux appuis simples (Figure. V.14)



Figure. V.11 : Cas test 9



Figure. V.12 : Cas test 10





Figure. V.14 : Cas test 12

Les quatre figures montrent que le nombre des défauts et leurs positions n'influencent pas sur la localisation et la quantification. Mais le type de condition aux limites et le taux d'endommagement influe sur la quantification.

#### V.3.4. quatre éléments endommagés

Après avoir vérifié la méthode à la présence de trois endommagements, on vérifie sa fiabilité à la présence de quatre endommagements, toujours en changeant de module Young.

Les éléments 4, 8, 15 et 16 qui sont perturbés de 25%, 25%, 70% et 70% sur Ex, et avec deux conditions aux limites, poutre encastrée (Figure. V.15) et sur deux appuis simples (Figure. V.16).





Figure. V.16 : Cas test 14

Les deux figures montrent que le type de condition aux limites et le taux d'endommagement influes sur la quantification, c.à.d. pour les faibles taux d'endommagement encastrement-libre quantifié bien et pour les fort taux d'endommagent les appuis simples est plus rependent.

#### V.5. Conclusion

D'âpres les résultats obtenue a l'application de la méthode énergétique (MSEBI) on conclure que l'indicateur est sensible a la détection, localisation, quantification pour déférent nombres des défauts et leurs positions sur la structure ainsi le taux d'endommagement et les types des conditions aux limites.

Mais pour les faibles taux d'endommagement encastrement-libre quantifié bien et pour les fort taux d'endommagent les appuis simples est plus rependent.

# **Conclusion générale**

Dans ce mémoire, nous avons modélisé une poutre stratifiée en éléments finis SI12, et nous avons étudié deux méthodes de détections d'endommagements, ces méthodes reposent sur des données vibratoires, la première utilise les variations des réponses fréquentielles **FRF** tandis que la deuxième est basée sur l'énergie de déformation modale qui est fonction des déformées propres **MSEBI**.

La première méthode utilisée est appelée « repense fréquentielle », et elle utilise les fréquences FRF (Fonction de Repense Fréquentielle). Cette méthode détecte la présence d'éventuel endommagement dans une structure poutre stratifiée.

Les indicateurs d'endommagements de la deuxième méthode sont basés sur l'énergie de déformation modale. Le premier utilise les vecteur propres et le second utilise les repenses fréquentielles.

Les résultats obtenus nous montrons que les deux indicateur de la deuxième méthode détectent, localisent et quantifient les endommagements et cela quelque soit la position des défauts sur la structure, le taux d'endommagent et les deux cas de conditions aux limites appuis simples et encastrée-libre.

D'âpres les résultats obtenue a l'application de la méthode énergétique (MSEBI) et la méthode des repense fréquentielle (FRF) on conclure que l'indicateur de (MSEBI) est plus sensible a la détection, localisation, quantification pour déférent nombres des défauts et leurs positions sur la structure ainsi le taux d'endommagement et les types des conditions aux limites.

De même cette étude nous a permis d'élargir nous connaissance dans le domaine de la dynamique des structures et les matériaux composites ainsi l'utilisation de la méthode des éléments finis et la programmation en utilisant l'environnement MATLAB.

En perspectives nous suggérons de valider les résultats obtenus par des expériences et d'introduire d'autres types de défauts comme le délaminage par exemple.

### Annexe A

La quantité d'information utilisée pour déterminer le taux d'endommagement dépond du nombre de modes utilisés. Afin de déterminer le nombre de modes nécessaire pour identifier, localiser et quantifier les défauts, nous avons considérer plusieurs cas tests :

1. Cas de taux d'endommagement 20%

Eléments	Pourcentage	Numéro du cas test	Les <i>i<sup>éme</sup></i> modes
endommagés	d'endommagement		utilisés
		1	1
		2	2
7	20 % sur Ex	3	3
		4	4
		5	5
		6	6
		7	7
		8	8

Tableau.1 : Récapitulatif des cas tests pour le chois de (nm) pour un taux de 20%





9 11 Elements

13 15 17 19

3 5 7

Figure.6 : Cas test 6.

9 11 Elements

13 15 17 19

1 3 5 7





Les résultats obtenus nous montrent que les quatre premières modes comportent la quantité d'information nécessaire pour identifier, localiser et quantifier des défauts.

### 2. Cas de taux d'endommagement > 50%

Eléments	Pourcentage	Numéro du cas test	Les <i>i<sup>éme</sup></i> modes
endommagés	d'endommagement		utilises
		9	1
		10	2
		11	3
10	60 % sur Ex	12	4
		13	5
		14	6
		15	7
		16	8

Le récapitulatif des cas tests est donné sur le tableau suivant :

Tableau.2. Récapitulatif des cas tests pour le chois de (nm) pour un taux de 60%











Figure.12 : Cas test 12.



Figure.14 : Cas test 14.







Figure.13 : Cas test 13.



Les résultats obtenus nous montrent que les huit premières modes comportent la quantité d'information nécessaire pour identifier, localiser et quantifier des défauts.



Dans cette annexe, Nous avons modélisé l'endommagement par la réduction du module d'Young suint l'axe des x d'une ou de deux couches d'un élément fini. Nous avons considérer deux cas de condition aux limites, appuis simples et encastrée libre.

Poutre encastre-libre (élément 7 endommagé de 40%)				
Numér o de la couche	Une couche endommagée	Deux couche endommagée		
1 <sup>er</sup> et 4eme couche	$H_{\text{B}}$			
2 et 3eme couche	$H_{\text{S}}^{\text{H}}$	0.05 0.04 0.03 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.01 0.02 0.02		

### Annexe B

Poutre sur deux appuis simples (élément 7 endommagé de 40%)				
Directio n Des fibre couche	Une couche endommagée		Deux couche endommagée	
<b>0</b> °	0.8 0.6 0.4 0.2 0.2 0 -0.2	3 5 7 9 11 13 15 17 19 Elements	0.8 0.6 0.4 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2	
<b>90</b> °	0.01 0.008 0.006 0.004 0.002 -0.002 -0.002 -0.004 -0.006 -0.006 -0.008 -0.01 1	3 5 7 9 11 13 15 17 19 Elements	0.05 0.04 0.03 0.02 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01	

## <u>Références bibliographiques</u>

- [1] Laurent Gornet, 2008, "Matériaux composites : Généralités sur les matériaux composites", centrale Nantes France.
- [2] Jean-Marie Berthelot, 2010, "Mécanique des matériaux et structures composites", *Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés*, Le Mans, France.
- [3] Jean-Marie Berthelot, 1999, "Mechanics of Composite Materials and Structures", Institute for Advanced Materials and Mechanics, Le Mans, France.
- [4] COLLIENNE G., Comparaison d'un capteur sonore et d'un capteur d'accélération dans le cadre de la maintenance vibratoire, travail de fin d'études, Gramme Liège, 2004.
- [5] Doebling, S. W., Ferrar, C. R. and Prime, M. B., 1998, "A summary review of vibration-based damage identification methods," *The Shock and Vibration Digest*, 30(2), 91-105.
- [6] Rytter, A., 1993, "Vibration-based inspection of civil engineering structures," Ph.D. dissertation, Aalborg University, Denmark.
- [7] Allemang, R. J., 2002, "The modal assurance criterion (MAC): twenty years of use and abuse," *Proceedings of SPIE*, v. 4753, pp. 397-405.
- [8] West, W. M., 1984, "Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen," *Proceedings of the Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, pp. 1-6.
- [9] Lieven, N. A. J. and Ewins, D. J., 1988, "Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)," *Proceeding of the 6th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 690-695.
- [10] Ratcliffe, C. P., 1997, "Damage detection using a modified Laplacian operator on mode shape data," *Journal of Sound and Vibration*, **204**(3), 505-517.
- [11] Khan, A. Z., Stanbridge, A. B. and Ewins, D. J., 1999, "Detecting damage in vibrating structures with a scanning LDV," *Optics and Lasers in Engineering*, 32(6), 583-592.
- [12] LESCEUX J.M., Détection précoce de défauts dans les roulements par analyse vibratoire, Revue Scientifique des ISILF vol 10, Avril 1996.

- [13] Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J. and Stone, B. J., 1978, "A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures," *Journal of Mechanical Engineering Science*, **20**(2), 93-100.
- [14] Cawley, P. and Adams, R. D., 1979, "The location of defects in structures from measurements of natural frequencies," *Journal of Strain Analysis*, **14**(2), 49-57.
- [15] Stubbs, N. and Osegueda, R., 1990, "Global non-destructive damage evaluation in solids," *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 5(2), 67-79.
- [16] Stubbs, N. and Osegueda, R., 1990, "Global damage detection in solids: experimental verification," *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, **5**(2), 81-97.
- [17] Friswell, M. I., Penny, J. E. T., and Wilson, D. A. L., 1994, "Using Vibration data and statistical measures to locate damage in structures," *Modal Analysis: the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, **9**(4), 239-254.
- [18] Palacz, M. and Krawczuk, M., 2002, "Vibration parameters for damage detection in structures," *Journal of Sound and Vibration*, **249**(5), 999-1010.
- [19] Friswell, M. I. and Penny, J. E., 1997, "The practical limits of damage detection and location using vibration data," *Proceedings of the 11th VPI & SU Symposium on Structural Dynamics and Control*, Blacksburg, VA, pp. 1-10.
- [20] Farrar *et al.*, 1994, "Dynamic characterization and damage detection in the I-40 bridge over the Rio Grande," *Los Alamos National Laboratory Report*, LA-12767-MS.
- [21] Messina, A., Jones, A. and Williams, E. J., 1996, "Damage detection and localization using natural frequency changes," *Proceeding of the 14th International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, pp. 67-76.
- [22] Messina, A., Contursi, T. and Williams, E. J. and, 1997, "Multiple damage evaluation using natural frequency changes," *Proceeding of the 15th International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, pp. 658-664.
- [23] Armon, D., Ben-Haim, Y., and Braun, S., 1994, "Crack detection in beams by ranki-ordering of eigenfrequency shifts," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **8**(1), 81-91.
- [24] Nicholson, D. W. and Alnefaie, K. A., 2000, "Modal moment index for damage detection in beam structures," *Acta Mechanica*, **144**(3-4), 155-167.
- [25] Chaudhari, T. D. and Maiti, S. K., 2000, "A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack," *International Journal of Solids and Structures*, **37**(5), 761-779.

- [26] Chinchalkar, S., 2001, "Determination of crack location in beams using natural frequencies," *Journal of Sound and vibration*, **247**(3), 417-429.
- [27] Jones, K. W. and Turcotte, J. S., 2001, "Finite element model updating using antiresonant frequencies," *Proceeding of the 19th International Modal Analysis Conference*, Kissimmee, FL, pp. 341-347.
- [28] Moser P. and Moaveni B., 2011,"Environmental effects on the identified natural frequencies on the Dowling Hall Footbridge," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **25**(2011), 2336-2357.
- [29] Wang, Z., Lin, R. M. and Lim, M. K., 1997, "Structural damage detection using measured FRF data," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 147(1-2), 187-197.
- [30] Mottershead, J. E., Kyprianou, A. and Ouyang, H. 2003, "Estimation of rotational frequency responses," *Mechanical and Corrosion Properties*, A – Key Engineering Materials, 245/246, 157-116.
- [31] Vanhoenacker, K., Schoukens, J., Guillaume, P. and Vanlanduit, S., 2004, "The use of multisine excitations to characterize damage in structures," *Mechanical Systems and Signal Processing*, **18**(1), 43-57.
- [32] Yang H.Z., Li H.S. and Wang S.Q., 2003, "Damage location of offshore platforms under ambient excitation", *China Ocean Engineering*, v. 17, pp. 495-504.
- [33] Brehm M., Zabel V. and Bucher C., 2010, "An automatic mode pairing strategy using an enhanced modal assurance criterion based on modal strain energies", *Journal of Sound and Vibration*, **329**(2010), 5372-5392.
- [34] Dixit A. and Hanagud S., 2011, "Single beam analysis of damaged beams verified using a strain energy based damage measure", *International Journal of Solids and Structures*, **48** (2011), 592-602.
- [35] Li J. Wu B. Zeng Q.C. and Lim C.W., 2010, "A generalized flexibility matrix approach for structural damage detection", *Journal of Sound and Vibration*, **329** (2010), 4583-4587.
- [36] Kazemi S., Fooladi A. and Rahai A.R., 2010, "Implementation of the modal flexibility variation to fault identification in thin plates", *Acta Astronautica*, **66** (2010), 414-426.
- [37] Edwin R. and Guido D.R., 2010, "A local flexibility, method for vibration based damage localization and quantification", Journal of sound and vibration, 329 (2010), 2367-2383.
- [38] Rolands Rikards, 1999, "Analysis of laminated Structures Course of lectures", Riga Technical University.

- [39] LANDOLSI FOUED, 2010. « Techniques de surveillances ».
- [40] H.Y.Hawang, 2003. « Damage detection structures using a few frequency response measurements ».
- [41] P Cornwell, 1999. « Application of the strain energy damage detection method to plate\_like structures ».