


N°d'ordre:

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche scientifique
 Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques
Spécialité : Probabilités & Statistique

Par

BOUZEKRI MARZOUK

INFÉRENCE STATISTIQUE SUR LES PROCESSUS DE BRANCHEMENT

Devant le jury

Dr. BELKACEM CHERIFA	UMMTO	Président du jury
Dr. AIT MOHAMMED NOURA	UMMTO	Examinatrice
Dr. MERABET DALILA	UMMTO	Encadreur

Année universitaire: 2021/2022

Remerciements

Avant tout, je remercie le bon Dieu de m'avoir donné la santé, le courage et la capacité pour mener ce travail à terme.

Je tiens d'abord à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères reconnaissances à Madame MERABET Dalila pour sa disponibilité et son aide précieux tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je remercie Madame BELKACEM Cherifa pour avoir accepté de présider le jury qui examinera ce travail. J'adresse également mes vifs remerciements à Madame AIT MOHAMMED Noura pour avoir accepté de faire partie du jury de ce mémoire.

Je voudrais aussi remercier vivement l'ensemble de mes professeurs qui m'ont accompagné durant mon cursus universitaire.

Enfin, un grand merci à ma famille (mes chers frères et soeur) et particulièrement mes chers parents qui se sont sacrifiés pour mon bien et qui m'ont encouragé et soutenu tout au long de mes études.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail

A mes très chers parents pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes études et pour leurs sacrifices et soutien durant tout mon parcours. Je le dédie aussi à l'ensemble des membres de ma famille et mes amis.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	3
1 Processus de Galton-Watson	6
1.1 Introduction	6
1.2 Présentation du modèle	6
1.3 Fonction génératrice de X_n	9
1.4 Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre	11
1.4.1 Formalisme d'arbre	11
1.4.2 Propriété de branchement	14
1.5 Probabilité d'extinction	15
1.6 Le processus Galton-Watson vu comme une Martingale	22
1.7 Convergence du processus de Galton-Watson	23
1.7.1 Complément : Quelques théorèmes limites plus précis	27
1.8 Processus de Galton-Watson avec immigration	30
1.9 Processus de Galton-Watson et marche aléatoire	31
2 Estimation des paramètres du processus de Galton-Watson	35
2.1 Introduction	35
2.2 L'estimation de la moyenne du processus de Galton-Watson	35
2.2.1 Estimateur de Harris \hat{m}	36

2.2.2	Comportement asymptotique de \hat{m}	37
2.2.3	Estimateur de Nagaev \bar{m}	38
2.3	Estimation de la variance	42
2.3.1	Estimateur de Heyde	42
2.3.2	Estimateur de Dion	43
2.4	Estimation de la probabilité d'extinction	44
2.4.1	Estimateur de Stigler	45
2.4.2	Estimateur de Pakes	46
2.4.3	Estimation dans le cas où les observations sont X_0, \dots, X_n	46
2.4.4	Estimation dans le cas où les observations sont X_0, X_1	49
3	Application : un modèle épidémique par branchement uni-type	56
3.1	Introduction	56
3.2	Evolution du début de l'épidémie en Algérie	57
	Conclusion	67
	Bibliographie	68

Introduction générale

Le processus de Galton-Watson est un processus aléatoire, qui décrit l'évolution d'une ou plusieurs populations, chacune composée d'un certain nombre d'individus spécifiques. Chaque individu d'une génération peut donner naissance à de nouveaux individus, selon des règles précises par des distributions de probabilités spécifiques.

L'évolution d'une population et la reproduction sont des phénomènes difficiles à décrire précisément. Cependant, il existe de nombreuses modélisations mathématiques, plus ou moins complexes, qui permettent d'en appréhender, chacune à sa manière, les différents aspects.

L'origine de ces processus remonte à Bienaymé [7], qui dans une courte note sur "la loi de la multiplication et la durée des familles", considère un modèle à temps discret où tous les hommes ont la même probabilité d'avoir un nombre de fils donné qui parviennent à l'âge adulte. Bienaymé cherche à calculer la probabilité pour qu'un homme ait encore des descendants qui portent son nom au bout de n générations. Il met en évidence les cas sous-critique, critique ou sur-critique où la moyenne de la loi de reproduction est inférieure, égale ou supérieure à 1 et étudie le comportement d'une lignée quand le nombre de générations tend vers l'infini. En 1874, Galton et Watson [39] publient "On the probability of extinction of families". Leur but est également de calculer la probabilité d'extinction d'un nom de famille. Le modèle sous-jacent est identique à celui de Bienaymé, mais Galton et Watson ont eu l'idée d'introduire la fonction génératrice de la loi de reproduction à la génération n et d'utiliser des relations de récurrence entre les générations n et $n+1$ liées à l'indépendance des lignées.

Les processus de branchement en temps continu ont été introduits plus tardivement, par McKendrick en 1914 et surtout par Yule [43] en 1924 qui développe de manière détaillée un modèle mathématique de l'évolution des espèces en temps continu. Pour plus de détails sur ces premiers travaux, nous renvoyons au livre "Histoire des mathématiques et de la population" de Bacaer [3]. Depuis cette époque, l'étude des processus de branchement en temps continu continue à se développer et beaucoup de questions, dont beaucoup sont liées à des problèmes biologiques, sont posées et non résolues.

Notre but est d'étudier, en utilisant un modèle mathématique, l'évolution temporelle, d'un phénomène. L'existence d'un modèle mathématique permet de pouvoir quantifier numériquement certaines propriétés et de pouvoir prédire certains comportements : par exemple, montrer qu'une certaine population va s'éteindre et calculer l'espérance du temps d'extinction.

L'étude du processus de Galton-Watson peut être considérablement raffiné. Le modèle lui-même peut être enrichi et modifié afin de tenir compte de diverses situations d'intérêt (existence de types différents, survivance des individus à plusieurs générations, etc.).

Si l'on suppose qu'en plus du mécanisme de reproduction dans le processus de branchement, des individus (immigrants) peuvent arriver à chaque pas de temps de façon indépendantes identiquement distribuées, on obtient un processus de Galton-Watson avec immigration.

Il est intéressant du point de vue pratique de considérer la dynamique d'une population composée de sous-populations d'individus de types différents. Le type d'un individu est défini comme un attribut (ou un ensemble d'attributs). Des exemples classiques de tels types sont la taille à la naissance, le sexe, le génotype de l'individu. Le type peut affecter la distribution du nombre de descendants. Les distributions de descendance seront donc différentes.

Les processus ainsi obtenus sont appelés processus de branchement multi-types. Ces processus ont été utilisés avec succès dans de nombreux domaines en particulier en biologie ([21], [24], [40])

Dans ce mémoire nous nous intéressons à l'étude du processus Galton-Watson uni-type. Ce travail est composé de trois chapitres, le premier chapitre est consacré au processus du Galton-Watson sans et avec immigration, nous présentons les différentes notions, propriétés et définitions du processus Galton-Watson à temps discret, la fonction génératrice étant l'outil principal pour calculer certains événements associés au processus, ou pour calculer les moments d'intérêt quand ils existent, tels que la moyenne et la variance. Le processus de Galton-Watson est utilisé pour la modélisation des évolutions de population et le calcul de la probabilité d'extinction.

Le deuxième chapitre est consacré à l'inférence statistique sur le processus de Galton-Watson, il est divisé en deux parties. Dans la première partie nous nous intéressons à présenter quelques estimateurs pour la moyenne et la variance. La deuxième partie est consacrée à définir les différentes estimations de la probabilité d'extinction à l'aide de la fonction génératrice du processus Galton-Watson.

Dans le troisième chapitre, nous présentons un modèle probabiliste basé sur le processus de Galton-Watson et nous traitons un exemple d'application, qui modélise l'évolution du nombre de cas contaminés par le Covid-19 en Algérie et des simulations numériques de ces données avec le logiciel R.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Processus de Galton-Watson

1.1 Introduction

Le processus de Galton-Watson est le prototype le plus simple de processus de branchement, défini à temps et espace d'états discrets. Le but de ce modèle est de modéliser l'évolution d'une population en temps discret. Il a été introduit en 1874 par Francis Galton et Henry Watson [39] pour répondre au problème d'extinction des noms aristocratiques. Les processus de branchement concernent le suivi de la taille d'une population, dans laquelle les individus, se reproduisent indépendamment les uns des autres. Les individus de la génération n donnent naissance à un nombre aléatoire d'enfants puis meurent.

1.2 Présentation du modèle

On considère une mesure de probabilité $(\mathbf{P} = p_k, k \geq 0)$ sur \mathbb{N} , $(\mathbf{P} = p_k, \text{et } \sum_{k \geq 0} p_k = 1)$, et une famille dénombrable $(Y_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*)$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi \mathbf{P} , qui est la loi d'une variable Y .

On se donne également une variable aléatoire X_0 indépendante de la famille $(Y_{n,k})$.

Définition 1.1 [11]

Le processus de Galton-Watson est une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^* \quad (1.1)$$

avec $X_0 \in \mathbb{N}$.

Remarque

X_0 représente la taille initiale de la population. Le plus souvent, la population initiale sera supposée composée d'un seul individu, appelé ancêtre, c'est-à-dire $X_0 = 1$.

P est appelée loi de reproduction, et X_n représente le nombre d'individus vivants à la génération n .

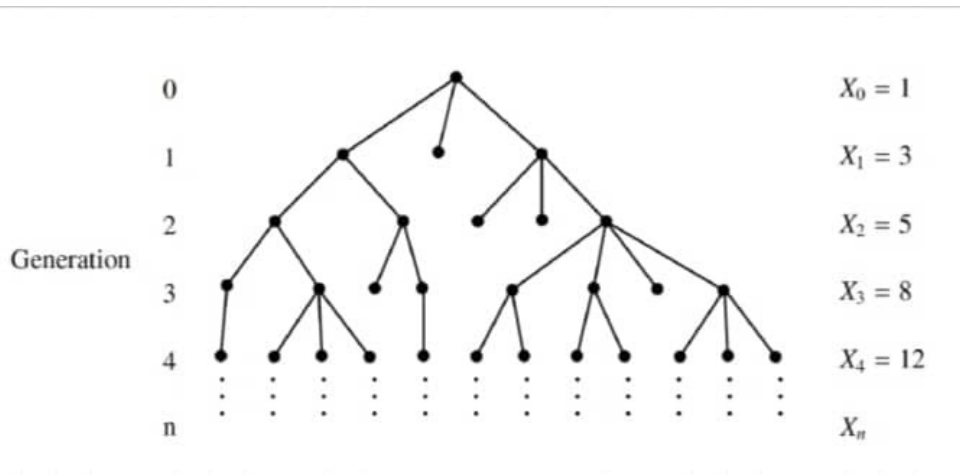


FIGURE 1.1 – Arbre généalogique d'un processus de Galton-Watson

Proposition 1.1 [11]

La suite définie par $(X_n)_n$ désigne un processus de Galton-Watson de loi de reproduction \mathbf{P} avec $(X_0 = u)$ tel que : u une variable aléatoire sur \mathbb{N}^* indépendante de la famille $(Y_{n,k}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*)$.

La suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov homogène sur \mathbb{N} de matrice de transition P définie par

$$P(i, j) = P\left(\sum_{k=1}^i Y_{0,k} = j\right) \quad (1.2)$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ on a

$$X_{n+1} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k} & \text{si } X_n \geq 1 \\ 0 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

alors

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(u = i_0, \sum_{k=1}^{i_0} Y_{0,k} = i_1, \dots, \sum_{k=1}^{i_{n-1}} Y_{n-1,k} = i_n).$$

Par hypothèse, $u, \{Y_{0,k}, k \in \mathbb{N}\}, \dots, \{Y_{n-1,k}, k \in \mathbb{N}\}$ sont indépendants.

Donc

$$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(u = i_0)P(\sum_{k=1}^{i_0} Y_{0,k} = i_1) \dots P(\sum_{k=1}^{i_{n-1}} Y_{n-1,k} = i_n).$$

Enfin, comme les variables aléatoires $Y_{n,k}$ sont toutes de même loi \mathbf{P}

$$P(u = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(u = i_0)P(i_0, i_1) \dots P(i_{n-1}, i_n).$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ = P(i_{n-1}, i_n) = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

D'où $(X_n)_n$ est bien une chaîne de Markov.

En posant alors

$$P(i, l) = P(\sum_{k=1}^i Y_{0,k} = l) \quad \text{pour } k, l \in \mathbb{N},$$

donc

$$P(0, j) = P(\sum_{k=1}^0 Y_{0,k} = j) = 1_{\{j=0\}},$$

$$P(i, j) = P(\sum_{k=1}^i Y_{0,k} = j) = P(Y_{0,1} + Y_{0,2} + \dots + Y_{0,i} = j) \quad \text{si } i \in \mathbb{N}.$$

La nature des états [28]

- L'état 0 est un état absorbant.
- $P(1) = 1$, signifie que chaque individu donne naissance à un unique individu, la taille de la population reste fixe : tous les états sont absorbants.
- Si $P(1) < 1$ tous les états sont transitoires.

1.3 Fonction génératrice de X_n

La fonction génératrice joue un rôle important dans l'étude du processus de Galton-Watson, nous commençons ce paragraphe par quelques rappels sur les propriétés de bases des fonctions génératrices.

Définition 1.2 [11]

X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , sa fonction génératrice G_X est définie par

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j P(X = j), \quad \forall s \in [-1, 1] \quad (1.3)$$

G_X est une fonction analytique sur $] - 1, 1[$, convexe sur $[0, 1]$, strictement convexe sur $[0, 1]$ lorsque $P(X \geq 2) > 0$, et $G_X(0) = P(X = 0)$ et $G_X(1) = 1$. De plus G_X caractérise la loi de X puisque

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0), \quad \forall k \geq 0, \quad (1.4)$$

où $G_X^{(k)}$ est la dérivée k -ième de G_X

les fonctions génératrices possédant les propriétés suivantes

Proposition 1.2 [11]

Si une variable aléatoire X possède une espérance et une variance finie, alors on obtient à partir de la fonction génératrice de X , les relations :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= G'_X(1) \\ \mathbb{V}(X) &= G''_X(1) - \mathbb{E}(X)^2 + E(X) \\ &= G''_X(1) - G'_X(1)^2 + G'_X(1). \end{aligned}$$

Proposition 1.3 [28]

Si X et X' sont deux v.a indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} , alors

$$G_{X+X'}(s) = G_X(s)G_{X'}(s), \forall s \in [-1, 1].$$

Application au processus de Galton-Watson

Etant donné une loi \mathbf{P} sur \mathbb{N} , on note $G = G_P$ la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi \mathbf{P} , appelée la fonction génératrice de reproduction. Considérons le processus de Galton-Watson $(X_n, n \geq 0)$, on définit pour tout $n \geq 0$, la fonction génératrice :

$$G_n(s) = \mathbb{E}(s^{X_n}) = \sum_{k \geq 0} s^k P(X_n = k), \forall s \in [-1, 1],$$

Remarquons que $P(X_n = 0) = G_n(0)$.

Proposition 1.4 [10]

Pour tout $n \geq 0$, la fonction génératrice G_n du processus de Galton-Watson $(X_n, n \geq 0)$, vérifie

$$G_n(s) = \underbrace{GoGo\dots oG}_{n \text{ fois}}(s) = G^{(n)}(s)$$

Si on note par m le nombre moyen d'enfants par individu, appelée moyenne de reproduction,

$$m = E(Y) = G'(1) = \sum_{k \geq 1} kp_k$$

et σ^2 la variance de reproduction,

$$\sigma^2 = Var(Y) = \sum_{k \geq 1} k^2 p_k - m^2 = G''(1) - G'(1) - G'(1)^2.$$

Alors

$$E(X_n) = mE(X_{n-1}),$$

$$Var(X_n) = \sigma^2 E(X_{n-1}) + m^2 Var(X_{n-1}).$$

Les formules $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.1 [10]

Dans le cas où $X_0 = 1$, la moyenne et la variance de X_n sont données par

1. $\mathbb{E}(X_n) = m^n$ pour tout $n \geq 0$,

2.

$$\mathbb{V}(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 m^{n-1} \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{si } m \neq 1, \\ n\sigma^2 & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

Remarquons que ces formules sont également vraies si $m = \mathbb{E}(Y) = +\infty$ et ou $\mathbb{E}(Y^2) = +\infty$ (avec la convention dans ce cas que $\sigma^2 = +\infty$).

Dans la suite, sauf lorsque c'est explicitement mentionné, on supposera toujours que :

$$m = \mathbb{E}(Y) < \infty.$$

1.4 Le processus de Galton-Watson vu comme un arbre

1.4.1 Formalisme d'arbre

Etant donné un processus de branchement, il est assez naturel de construire l'arbre généalogique associé. Nous prenons ici le point de vue inverse et cherchons à donner une définition alternative des processus de Galton-Watson comme une variable aléatoire sur l'espace des arbres.

Soit U l'espace des suites finies $u = j_1, \dots, j_n$ d'entiers strictement positifs tel que,

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n \tag{1.5}$$

où \mathbb{N}^* est l'ensemble des entiers positifs et par convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \phi$ est réduit à un seul élément ϕ qu'on interprète comme étant la suite vide, et qui sera l'ancêtre de la population.

La longueur (la génération) de u est alors $|u| = n$ et par convention $|\phi| = 0$, on note : $uj = i_1 \dots i_n j$, qui est donc une arête de longueur $n + 1$. Les éléments de la forme uj sont les "enfants" de l'arête u .

Plus généralement, pour $v = k_1 \dots k_m \in U$. On note $uv = i_1 \dots i_n k_1 \dots k_m$ en particulier, on a $u\phi = u$

Définition 1.3 (Arbre et notation de Ulam-Harris-Neveu) [11]

Un arbre ω est un sous-ensemble de U qui satisfait les propriétés suivantes :

- (i) $\phi \in \omega$,
- (ii) si $uv \in \omega$, alors $u \in \omega$,
- (iii) $u \in \omega \Rightarrow \exists N_u(\omega)$ tel que $uj \in \omega, j \geq 1 \iff 1 \leq j \leq N_u(\omega)$.

On notera N au lieu N_ϕ et N_u est la variable aléatoire qui peut être interprété comme le nombre d'enfants de u dans l'arbre. On notera également Ω l'ensemble des arbres muni de la tribu \mathcal{F} engendrée par les Ω_u pour $u \in U$, où $\Omega_u = \{\omega \in \Omega : u \in \omega\}$.

La propriété (i) exprime que l'ancêtre appartient à l'arbre, pour tout arbre ω .

La propriété (ii) signifie que le "père" d'une arête de l'arbre appartient aussi à l'arbre.

Enfin, la propriété (iii) indique qu'une arête u de l'arbre a exactement N_u enfants dans l'arbre qui sont les arêtes uj pour $j \in \{1, \dots, N_u\}$.

Une représentatin graphique d'un arbre avec la notation précédente est donnée en figure 1.2.

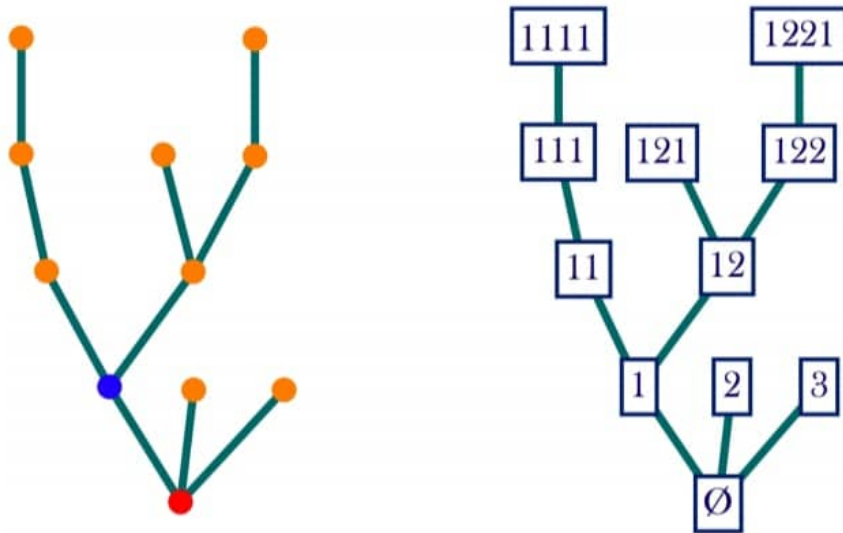


FIGURE 1.2 – Arbre et notation de Ulam-Harris-Neveu de ses noeuds

Le noeud rouge représente l'ancêtre et on adopte la convention que les individus de même génération sont numérotés de gauche à droite. Le noeud bleu est donc le premier

enfant de l'ancêtre (l'individu noté 1).

Terminologie des arbres

- L'ancêtre est appelé également racine de l'arbre.
- Chaque $u \in \omega$ est appelé noeud ou sommet.
- Chaque $u \in \omega$ tel que $N_u = 0$ est appelé feuille de l'arbre.
- Les couples de noeuds $(u; v) \in \omega^2$ telle que $v = ui$ pour un certain $i \in \mathbb{N}^*$ sont appelés branches ou arêtes.

Pour tout entier n , la $n^{\text{ème}}$ génération est définie par :

$$x_n(\omega) = \{u \in \omega : |u| = n\}$$

et sa taille est

$$X_n(\omega) = \text{Card } x_n(\omega).$$

En particulier, on a $X_1 = N$. On peut également munir l'espace des arbres Ω d'une filtration \mathcal{F}_n engendrée par les x_m pour $0 \leq m \leq n$. C'est la tribu de toutes les informations disponibles à la génération n et avant.

L'espace Ω peut également être muni des translations

$$\begin{aligned} T_u : \Omega &\rightarrow \Omega \\ \omega &\mapsto T_u(\omega) = \{v \in U : uv \in \omega\}. \end{aligned}$$

$T_u(\omega)$ est le "sous-arbre" issu de l'arête u . Il est immédiat que $T_u(\omega)$ est encore un arbre.

Ainsi, pour tout n et k dans \mathbb{N} ,

$$X_{n+k} = \sum_{u \in x_n} X_k \circ T_u. \tag{1.6}$$

Théorème 1.2 [11] **Arbre de Galton-Watson**

Etant donnée une mesure de probabilité P sur \mathbb{N} , il existe une unique probabilité Q_p (notée Q quand il n'y a pas d'ambiguïté sur P) sur (Ω, \mathcal{F}) telle que :

- (i) N a pour loi P
- (ii) Conditionnellement à $(N = j)$, les variables aléatoires $T_1, T_2, T_3, \dots, T_j$, sont indépendantes identiquement distribuées de loi Q_p .

1.4.2 Propriété de branchement

Proposition 1.5 [28]

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Le processus de Galton-Watson $(X_n, n \geq 0)$ défini par (1.1), associé à la mesure \mathbf{P} et avec $X_0 = k$ a la même loi que le processus

$$\left(X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + \dots + X_n^{(k)}, n \geq 0 \right),$$

où $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(k)}$ sont des processus de Galton-Watson i.i.d. associés à la même mesure \mathbf{P} et issus de $X_0^{(1)} = \dots = X_0^{(k)} = 1$.

Démonstration.

Pour $n \geq 0$ fixé, on note X^n le processus $(X_{n+k}, k \geq 0)$, le processus X^n est égal au processus

$$\left(\sum_{u \in X_n} X_k \circ T_u, k \geq 0 \right).$$

Or, conditionnellement à x_n , les processus $(X_k \circ T_u, k \geq 0)$ pour $u \in x_n$ sont des processus de Galton-Watson issus d'un seul ancêtre.

En particulier, pour tout sous-ensemble x de U formés de k suites de longueur n , le processus X^n sachant $x_n = x$ a même loi que $X^{(1)} + \dots + X^{(k)}$.

En sommant sur tous les x possibles, on en déduit la propriété de branchement.

Corollaire 1.1 [28]

En particulier, si nous supposons que $X_0 = k$, la fonction génératrice de X_n est donnée par :

$$G_n(s) = G^n(s)^k = \mathbb{E}(s^{X_n} | X_0 = k), \quad \forall s \in [-1, 1].$$

Et

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n | X_0 = k) = m^n k.$$

Les deux premiers moments (qui peuvent être infinis) sont :

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k, \quad m_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k.$$

1.5 Probabilité d'extinction

La question centrale de la théorie des processus de branchement est la probabilité d'extinction, où aucun individu n'existe après un certain nombre fini de génération. Remarquons tout d'abord que la probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit nulle se calcule à partir de sa fonction génératrice G_X par

$$P(X = 0) = G_X(0).$$

Ceci signifie que la probabilité pour que la descendance ait disparu à la génération n est $G_n(0)$.

La suite $(G_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante (si la génération n n'existe pas, il en va de même pour la génération $n + 1$), et bien sûr majorée par 1. On note l'événement d'extinction de la population

$$Ext = \{X_n \rightarrow 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \{X_k = 0\}. \quad (1.7)$$

Puisque $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+k} = 0, \forall k \geq 0$, alors

$$Ext = \{\exists n \geq 1 : X_n = 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\},$$

et

$$P(Ext) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(0).$$

Théorème 1.3 [11]

La probabilité d'extinction $P(Ext)$ est la plus petite racine positive ou nulle de $G(s) = s$.

- Si $m \in [0, 1]$, alors $P(Ext) = 1$.
- Si $m \in]1, +\infty]$, alors $P(Ext) < 1$.

Et il n'y a pas d'autre solution de $G(s) = s$ dans $[0, 1[$.

Démonstration.

Puisque $G^{(n)}(0) = P(X_n = 0)$ converge en croissant vers $P(Ext)$ et G continue sur $[0, 1]$, on a $G \circ G^{(n)}(0) \rightarrow G(P(Ext))$, et $G \circ G^{(n)}(0) = G^{(n+1)}(0)$, donc $P(Ext) = G(P(Ext))$.

$P(Ext)$ est alors une solution de l'équation $G(s) = s$.

Soit $a \in [0, 1]$ tel que $G(a) = a$. Vérifions par récurrence que $G^{(n)}(a) \leq a$:

Pour $n = 1$, $G(a) = a$.

Supposons que $G^{(n)}(a) \leq a$

Vu que G est croissante, alors $G \circ G^{(n)}(a) \leq G(a)$, c.à.d $G^{(n+1)}(a) \leq a$.

Donc $G^{(n)}(a) \leq a, \forall n$. On déduit que $P(Ext)$ est la plus petite racine de $G(a) = a$ dans $[0, 1]$.

— Si $m \leq 1$, on a pour tout $s < 1$,

$$(G(s) - s)' = G'(s) - 1 < G'(1) - 1 = m - 1 \leq 0.$$

Donc $G(s) - s$ est strictement décroissante. Puisque $G(1) = 1$, on en déduit que $G(s) > s$, pour tout $s \in [0, 1[$. 1 est donc le seul point fixe de G sur $[0, 1]$ et $P(Ext) = 1$.

— Si $m > 1$. Puisque $G'(s) = m$, on a alors $G(s) < s$, pour $s < 1$ dans un voisinage de 1.

Puisque G est continue sur $[0, 1]$ et que $G(0) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires implique que : $\exists q \in [0, 1[/ G(q) = q$.

Supposons que $\exists q_1$ et $q_2 : 0 \leq q_1 < q_2 < 1$ tel que $G(q_1) = q_1$ et $G(q_2) = q_2$.

La fonction $G(s) - s$ a alors 3 zéros : q_1, q_2 et 1. Cette fonction est strictement convexe, ce n'est donc pas possible. Il existe alors une unique solution.

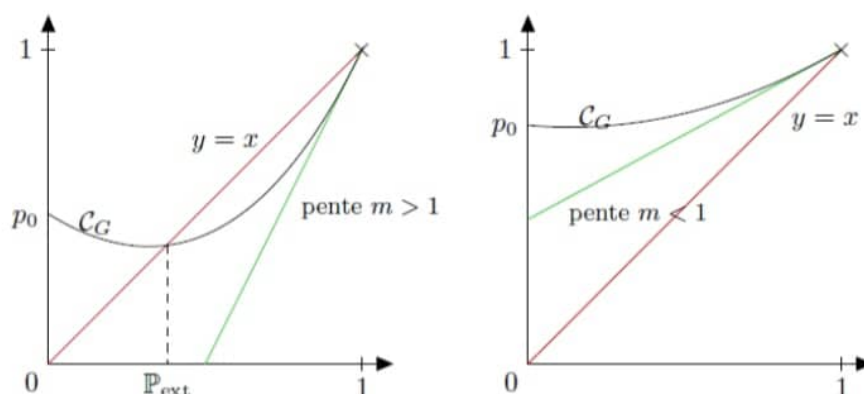


FIGURE 1.3 – Graphe de la fonction génératrice G , (à droite le cas $m < 1$ et à gauche le cas $m > 1$ avec P_{Ext} probabilité d'extinction).

Il est naturel de distinguer les cas $m > 1$ et $m \leq 1$. Mais lorsque $m = 1$, $X_n \rightarrow 0$ p.s (ce cas est aussi particulier car $Var(X_n)$ est infinie). On distingue donc trois cas : $m < 1$, $m > 1$ et $m = 1$.

On dira que le processus de Galton-Watson est :

1. **Sur-critique** si $m > 1$ (la population s'éteint avec une probabilité $p \in]0, 1[$),
2. **Critique** si $m = 1$ (la population s'éteint presque sûrement),
3. **Sous-critique** si $m < 1$ (la population s'éteint presque sûrement).

Exemples.

1) Loi de reproduction binomiale

Supposons que la loi de reproduction du processus de Galton-Watson suit la loi binomiale, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ on a $P(Y_{n,i} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Notons $m = \mathbb{E}(Y)$ l'espérance et $\sigma^2 = \mathbb{V}(Y)$ la variance de la loi binomiale

$$m = np, \quad \sigma^2 = np(1-p).$$

Posons G la fonction génératrice de la loi binomiale, pour tout $s \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1 + p(s-1))^n. \end{aligned}$$

Calculons la probabilité d'extinction :

D'après le théorème 1.3. pour déterminer la probabilité d'extinction il faut résoudre l'équation suivante : $G(s) = s$, $s \in [0, 1]$. On pose $n = 2$ pour faciliter les calculs.

$$G(s) = s \iff (p(s-1) + 1)^2 = s,$$

on développe, on obtient :

$$p^2 s^2 + (2p(1-p) - 1)s + (1-p)^2 = 0, \quad (1.8)$$

qui est une équation de second degré en s . On calcule le discriminant,

$$\Delta = (2p-1)^2 \geq 0.$$

Le discriminant est nul si $p = 1/2$, donc on distingue deux cas :

1. Si $p = 1/2$, alors $\Delta = 0$, donc l'équation (1.14) admet une racine double,

$$s_{p=1/2} = \frac{-(2p(1-p) - 1)}{2p^2} = 1.$$

2. Si $p \neq 1/2$, alors $\Delta > 0$, donc l'équation (1.8) admet deux racines,

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-(2p(1-p) - 1) + (2p-1)}{2p^2} \\ &= 1, \\ s_2 &= \frac{-(2p(1-p) - 1) - (2p-1)}{2p^2} \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^2. \end{aligned}$$

Pour $p = 1/2$, $m=1$ (cas critique). Par le théorème 1.3, la probabilité d'extinction vaut 1 ($P(Ext) = 1$).

Pour $p \neq 1/2$, l'équation (1.8) admet deux racines, pour déterminer laquelle est la probabilité d'extinction, il faut distinguer deux cas suivant la valeur de la moyenne :

— Si $p < 1/2$, on aura $m < 1$ (cas sous-critique), donc $P(Ext) = 1$, c'est aussi la plus petite racine de l'équation (1.8), on vérifie que $s_1 < s_2$.

$$\text{On a : } s_2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

$$\text{Or } p < 1/2 \Rightarrow 1/p > 2 \Rightarrow (1 - 1/p)^2 > 1, \text{ donc } s_2 > s_1.$$

Par conséquent, s_1 est la plus petite racine, et puisque $s_1 = 1$, on retrouve bien le résultat.

— Si $p > 1/2$, on aura $m > 1$ (cas sur-critique), donc $P(Ext) \in [0, 1[$. Dans ce cas, on vérifie que $s_2 < s_1 = 1$, on a : $s_2 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = (1 - 1/p)^2$

$$\text{Or } 1/2 < p < 1 \Rightarrow 0 < (1 - 1/p)^2 < 1 \Rightarrow s_2 < s_1.$$

Par conséquent, s_2 est la plus petite racine, et $P(Ext) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2$.

On obtient donc la probabilité d'extinction suivante en fonction de p :

$$P(Ext) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 & \text{si } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

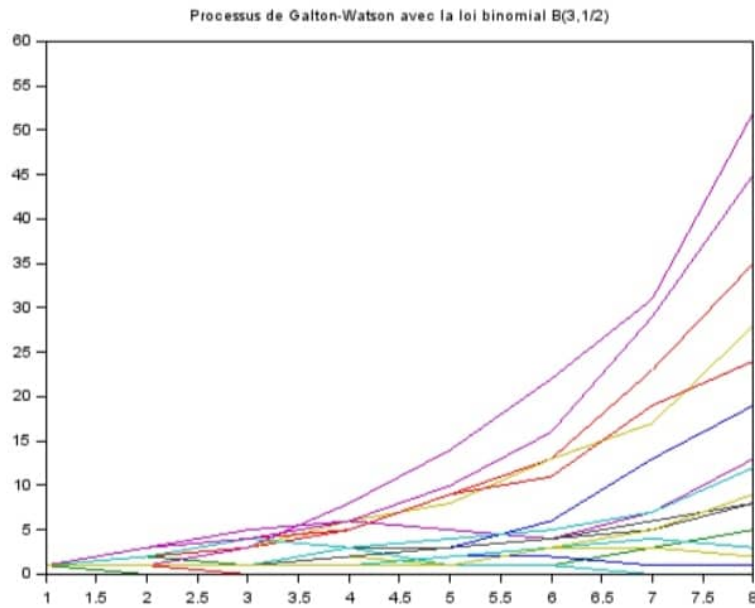


FIGURE 1.4 – Exemple de trajectoires de processus de Galton-Watson avec une loi de reproduction binomiale $B(2; 1/2)$

2) Loi de reproduction géométrique décalée $\mathcal{G}(p)$

Supposons que la loi de reproduction est la loi géométrique décalée de paramètre p , $p \in [0, 1]$

$$P(Y_{n,i} = k) = p(1 - p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Notons m son espérance définie par

$$m = \frac{1 - p}{p}.$$

Posons G la fonction génératrice de la loi géométrique décalée donnée pour tout

$s \in [-1, 1]$ par

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{k \geq 0} p(1-p)^k s^k \\ &= p \sum_{k \geq 0} (s(1-p))^k \\ &= \frac{p}{1-s(1-p)}. \end{aligned}$$

Calculons la probabilité d'extinction. D'après le théorème 1.3. pour déterminer la probabilité d'extinction il faut résoudre l'équation suivante

$$\begin{aligned} G(s) &= s, \quad \forall s \in [0, 1]. \\ G(s) = s &\iff \frac{p}{1-s(1-p)} = s. \end{aligned}$$

On développe on obtient

$$(1-p)s^2 - s + p = 0. \tag{1.9}$$

Calculons le discriminant

$$\Delta = (2p-1)^2 \geq 0.$$

Le discriminant est nul si $p = 1/2$, par conséquent, on distingue deux cas :

1. Si $p = 1/2$, alors $\Delta = 0$, d'où l'équation (1.9) admet une racine double :

$$s_{p=1/2} = \frac{1}{2(1-p)} = 1.$$

2. Si $p \neq 1/2$, alors $\Delta > 0$, d'où l'équation (1.9) admet deux racines :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{p}{(1-p)}, \\ s_2 &= 1. \end{aligned}$$

Lorsque $p \geq 1/2$, alors $m \leq 1$ (cas sous-critique). Par le théorème 1.3. la probabilité d'extinction vaut 1 ($P(Ext) = 1$).

Lorsque $p < 1/2$, alors $m > 1$ (cas sur-critique) et $\mathbf{P}(Ext) \in [0, 1[$, c'est aussi la plus petite racine ($s_1 < s_2$). Donc, $P(Ext) = s_1 = \frac{p}{1-p}$.

On obtient donc la probabilité d'extinction suivante en fonction de p :

$$\mathbf{P}(Ext) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{p}{1-p} & \text{si } p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

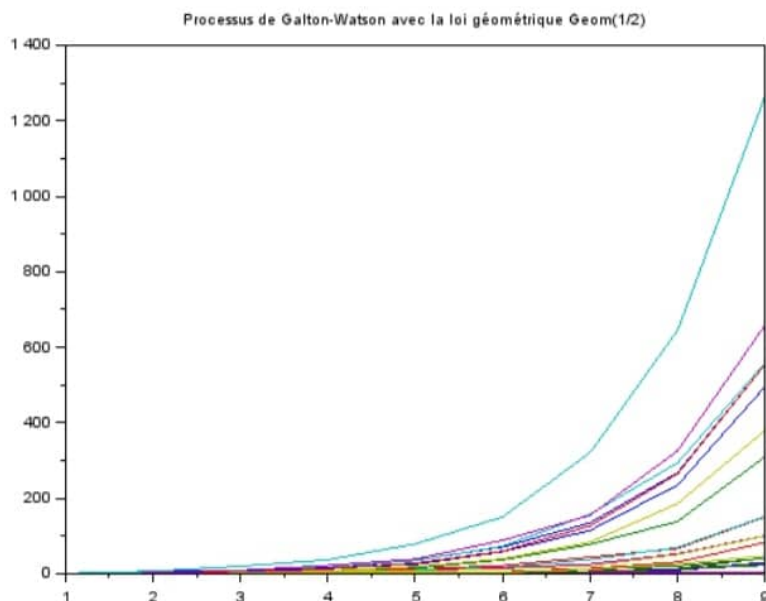


FIGURE 1.5 – Exemple de trajectoires de processus de Galton-Watson avec une loi de reproduction géométrique $G(1/2)$

1.6 Le processus Galton-Watson vu comme une Martingale

Commençons ce paragraphe par rappeler la définition d'une martingale, sous-martingale et sur-martingale.

Définition 1.4 [30]

Un processus $(Z_n, n \geq 0)$ est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ si

- Z_n est \mathcal{F}_n -mesurable,
- $\mathbb{E}(|Z_n|) < \infty$ pour tout $n \geq 0$,
- $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_n$ (resp. $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq Z_n$, $\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq Z_n$), $\forall n \geq 0$ p.s.

Proposition 1.6 [28]

Soit $(X_n, n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson.

- (X_n) est une martingale $\Leftrightarrow m = 1$.

- (X_n) est une sous-martingale $\Leftrightarrow m > 1$.
- (X_n) est une sur-martingale $\Leftrightarrow m < 1$.

Démonstration.

Soit (\mathcal{F}_n) la filtration naturelle du processus (X_n) : (X_n) est adapté à (\mathcal{F}_n) et positif.

On a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}/\mathcal{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{X_n} \mathbb{E}(Y_{n,k}) = X_n \mathbb{E}(Y_{n,k}).$$

Car les $Y_{n,k}$ sont indépendantes. Donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = mX_n.$$

Le processus $(X_n, n \geq 0)$ est alors

- Une martingale $\Leftrightarrow m = 1$.
- Une sous-martingale $\Leftrightarrow m > 1$.
- Une sur-martingale $\Leftrightarrow m < 1$.

1.7 Convergence du processus de Galton-Watson

On suppose que $m < \infty$. On définit

$$W_n = \frac{X_n}{m^n} \quad \forall n \geq 0, \tag{1.10}$$

Proposition 1.7 [1]

Le processus $(W_n, n \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$. Il converge presque sûrement vers une v.a W à valeurs dans $[0, +\infty[$ quand $n \rightarrow +\infty$. Dans le cas particulier où $m \leq 1$, la v.a W est p.s nulle.

Démonstraton

La v.a. X_n est clairement \mathcal{F}_n -mesurable et on a $\mathbb{E}(X_n) = m^n < \infty$. obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_{n+1}}{m^{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k=1}^{X_n}\mathbb{E}(Y_{n,k}|\mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{m^{n+1}}\sum_{k=1}^{X_n}\mathbb{E}(Y_{n,k}) = \frac{1}{m^{n+1}}mX_n = \frac{X_n}{m^n} = W_n \end{aligned}$$

car les $Y_{n,k}$ sont indépendantes,

(W_n) est donc une martingale.

D'après la propriété des martingales qui stipule que toute martingale positive converge p.s quand $n \rightarrow +\infty$ vers une v.a finie p.s, on a

$$W_n \rightarrow W \text{ p.s.}$$

Si $m \leq 1$, $P(Ext) = 1 = P(\exists n \geq 0/X_n = 0) = P(\exists n \geq 0/W_n = 0)$ et $W_{n+k} = 0$, pour tout $k \geq 0$, si $W_n = 0$. Alors $W = 0$ p.s.

Théorème 1.4 [28]

Soit $(X_n, n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson. On suppose que $X_0 = 1, m > 1$ et la variance de reproduction σ^2 est finie. Alors W_n converge p.s et dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a $W > 0$ telle que

$$\mathbb{E}(W) = 1 \text{ et } \mathbb{V}(W) = \frac{\sigma^2}{m^2 - m}.$$

Démonstration

On utilise les martingales.

(W_n) est bien une martingale (d'après la proposition 1.6) donc,

$$\mathbb{E}(W_n) = \mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}\left(\frac{X_0}{m^0}\right) = \mathbb{E}(X_0) = 1, \text{ et } \mathbb{E}(X_n) = m^n\mathbb{E}(W_n) = m^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et aussi, (W_n) est une martingale positive donc elle converge p.s. vers une v.a. W intégrable. On sait que (W_n^2) est une sous-martingale, la décomposition de Doob [32] de (W_n^2) s'écrit alors :

$$W_n^2 = M_n + A_n,$$

où (M_n) est une martingale et $A_n = \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(W_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) - W_{l-1}^2$ avec $A_0 = 0$.

On vérifie que $A_n = \sum_{l=1}^n \mathbb{E}((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1})$.

En effet,

$$\mathbb{E}((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) = \mathbb{E}((W_l)^2 | \mathcal{F}_{l-1}) + \mathbb{E}((W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) - 2\mathbb{E}(W_l W_{l-1} | \mathcal{F}_{l-1}).$$

On a

$$\mathbb{E}(W_l W_{l-1} | \mathcal{F}_{l-1}) = W_{l-1} (\mathbb{E}(W_l | \mathcal{F}_{l-1})) = W_{l-1} W_{l-1} = W_{l-1}^2,$$

$$\mathbb{E}(W_{l-1}^2 | \mathcal{F}_{l-1}) = W_{l-1}^2,$$

d'où $\mathbb{E}((W_l - W_{l-1})^2 | \mathcal{F}_{l-1}) = \mathbb{E}(W_l^2 | \mathcal{F}_{l-1}) - W_{l-1}^2$.

On note $A_n = \langle W \rangle_n$ le crochet de $(W)_n$. On introduit les v.a. $\eta_{n,k} = Y_{n,k} - m$.

On a :

$$\begin{aligned} X_n - mX_{n-1} &= (Y_{n,1} - m) + (Y_{n,2} - m) + \dots + (Y_{n,X_{n-1}} - m) \\ &= \eta_{n,1} + \eta_{n,2} + \dots + \eta_{n,X_{n-1}}, \end{aligned}$$

par indépendance des $\eta_{n,k}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left((X_n - mX_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left((\eta_{n,1} + \dots + \eta_{n,X_{n-1}})^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \mathbb{E}\left((\eta_{n,1} + \dots + \eta_{n,X_{n-1}})^2\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \eta_{n,k}\right)^2\right) \\ &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{X_{n-1}} \eta_{n,k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{X_{n-1}} \mathbb{V}(\eta_{n,k}) \\ &= X_{n-1} \sigma^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left((W_n - W_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_n}{m^n} - \frac{X_{n-1}}{m^{n-1}}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
 &= \frac{1}{m^{2n}} \mathbb{E}\left((X_n - mX_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
 &= \frac{1}{m^{2n}} \sigma^2 X_{n-1} \\
 &= \frac{1}{m^{2n}} \sigma^2 W_{n-1} m^{n-1} \\
 &= \frac{\sigma^2}{m^{n+1}} W_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\langle W \rangle_n = \sigma^2 \sum_{l=1}^n \frac{W_{l-1}}{m^{l+1}}.$$

Pour $m > 1$, montrons que $\mathbb{E}(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle W \rangle_n) < \infty$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \langle W \rangle_n\right) &= \mathbb{E}(\langle W \rangle_\infty) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{W_{l-1}}{m^{l+1}}\right) \\
 &= \sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(W_{l-1})}{m^{l+1}} \\
 &= \sigma^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{m^{l+1}} \\
 &= \sigma^2 \frac{1}{m(m-1)} < \infty.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité maximale de Doob [32], on a $E(\sup_{0 \leq l \leq n} W_l^2) \leq \mathbb{E}(W_n^2)$. Puisque $\mathbb{E}(W_n^2) = \mathbb{E}(M_n) + \mathbb{E}(\langle W \rangle_n)$ et $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0) = E(W_0^2) = \mathbb{E}(X_0^2) = 1$, alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq l \leq n} W_l^2\right) \leq 4(\mathbb{E}(\langle W \rangle_n) + 1).$$

La convergence monotone implique

$$\mathbb{E}\left(\sup_n W_n^2\right) \leq 4(\mathbb{E}(\langle W \rangle_\infty) + 1) < \infty$$

donc (W_n) est bornée dans L^2 , par conséquent : (W_n) converge dans L^2 vers W . Comme (W_n) converge aussi dans L^1 , on a $\mathbb{E}(W) = 1$ et

$$\mathbb{V}(W) = \mathbb{E}(W^2) - 1 = \mathbb{E}(M_n) + \mathbb{E}\langle W \rangle_\infty - 1 = 1 + \frac{\sigma^2}{m(m-1)} - 1 = \frac{\sigma^2}{m(m-1)}.$$

1.7.1 Complément : Quelques théorèmes limites plus précis

Nous allons énoncer ici les résultats qui décrivent plus finement le comportement des processus de Galton-Watson avant leur extinction, dans les cas sur-critique, critique et sous-critique. Ce sont des résultats difficiles, que nous admettrons.

Théorème 1.5 [23]

Supposons $m \in]1, \infty[$ et $X_0 = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $P(W = 0) = P(Ext)$,
- (ii) $\mathbb{E}(W) = 1$,
- (iii) $W_n \rightarrow W$ dans L^1 lorsque $n \rightarrow \infty$,
- (iv) $\mathbb{E}(\sup_n W_n) < \infty$,
- (v) $\sum_{k=2}^{\infty} (k \log k) p_k < \infty$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Y \ln^+ Y) < \infty$.

Théorème 1.6 [22]

si $m = 1$ et $\sigma^2 < \infty$, alors

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(X_n > 0) = 2\sigma^{-2}$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_n / X_n > 0] = \frac{\sigma^2}{2}$,
- 3) pour tout $\mu \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{X_n}{n} \leq \mu / X_n > 0) = 1 - \exp(-\frac{2\mu}{\sigma^2})$.

Autrement dit, conditionnellement à la non extinction, $\frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{2}{\sigma^2}$.

Le dernier résultat décrit le comportement stationnaire d'un Galton-Watson sous-critique au temps n sur l'événement de non survie au temps n .

Théorème 1.7 [28]

Supposons $0 < m < 1$ et $X_0 = 1$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j | X_n > 0) = Q(j), \quad \forall j \geq 1, \quad (1.11)$$

Où Q est une loi de probabilité sur \mathbb{N} . On appelle Q la limite de Yaglom du processus de Galton-Watson.

Dans ce cas sous-critique (lorsque $m < 1$), nous souhaitons étudier finement les propriétés du temps d'extinction en fonction de la condition initiale (la taille de la population initiale (i)). Supposons que $m_2 < \infty$ et notons comme précédemment $\sigma^2 = \mathbb{V}(Y)$.

Proposition 1.8 [28]

Supposons que $m < 1$.

1) Pour tout $i, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{i(1-m)m^{n+1}}{\sigma^2(1-m^n) + m^{n+1}(1-m)} \left(1 - \frac{(i-1)m^n}{2}\right) \leq P(X_n > 0 / X_0 = i) \leq im^n.$$

2) Pour n assez grand, on a

$$\frac{m(1-m)}{\sigma^2} im^n \leq P(X_n > 0 / X_0 = i) \leq im^n.$$

Il est intéressant d'un point de vue pratique d'étudier le temps moyen d'extinction d'une population sous critique en fonction de la taille de la population initiale. Le résultat suivant va répondre à cette question pour une population initialement très grande.

Proposition 1.9 [28]

Considérons un processus de Galton-Watson $(X_n)_n$ sous-critique ($m < 1$) et tel que $X_0 = i$. Supposons de plus que $\sigma^2 < \infty$ et posons $c_1 = \frac{(1-m)m}{\sigma^2}$. Soit T_0 le temps d'atteinte de 0 du processus $(X_n)_n$. Alors, pour i suffisamment grand,

$$\left(\frac{\ln i - \ln \ln i}{|\ln m|}\right) \left(1 - \frac{1}{i^{c_1}}\right) \leq \mathbb{E}(T_0 / X_0 = i) \leq \frac{\ln i}{|\ln m|} + \frac{2-m}{1-m}.$$

Corollaire 1.2 [28]

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, nous avons

$$\mathbb{E}(T_0 / X_0 = i) \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\ln i}{|\ln m|}.$$

Remarque.

Ce corollaire a des conséquences importantes : même si au temps 0, la population est extrêmement grande, elle va s'éteindre rapidement si le nombre moyen d'enfants par individu est inférieur à 1. En effet, $\ln i$ est négligeable devant $k = i$ quand $i \rightarrow \infty$.

Exemple. Application à l'extinction des baleines noires en Atlantique du Nord.

[28]

On souhaite modéliser l'évolution d'une population de baleines (femelles), on s'intéresse à leur loi de reproduction. L'unité de temps est un an.

En 1994, des études statistiques estimaient leur nombre à 150. On suppose que l'on connaît (i.e. que l'on a pu estimer statistiquement) la probabilité $\beta \in [0, 1]$ qu'une baleine meure et la probabilité d'avoir un petit "femelle" (en un an) $\alpha \in [0, 1]$. D'après les données des sections précédentes, la loi de reproduction est donnée par

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathbf{P}(X_n = 0) = \beta, \\ P_1 &= \mathbf{P}(X_n = 1) = (1 - \beta)(1 - \alpha), \\ P_2 &= \mathbf{P}(X_n = 2) = (1 - \beta)\alpha. \end{aligned}$$

En 1994, des estimations ont montré que $P_0 \approx 0.06$ et $\alpha \approx 0.038$. Alors

$$m = p_1 + 2p_2 = (1 - \beta)(1 + \alpha) = 0.976 < 1,$$

c'est-à-dire le processus de Galton-Watson est bien dans le cas sous-critique, avec

$$\sigma^2 = P_1 + 4P_2 \approx 0.095.$$

Cherchons pendant combien d'années nous pouvons être certain qu'avec 99% de chances, il n'y aura pas extinction. On fait le calcul en appliquant la proposition 1.8. On obtient ainsi

$$\mathbf{P}(X_n > 0 | X_0 = 150) \geq 0.99 \quad \text{dès que} \quad 0.99 \leq \frac{m(1-m)}{\sigma^2} im^n$$

Ce qui est équivalent à

$$n \leq \frac{\ln \left(\frac{0.99\sigma^2}{(1-m)im} \right)}{\ln m}.$$

Par conséquent

$$n \leq 150.$$

Ainsi, avec 99% de chances et si il n'y a pas de changement environnemental, les baleines survivront jusqu'en 2144.

Cherchons maintenant dans combien d'années les baleines auront 99% de chances d'avoir disparu. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = 0 | X_0 = 150) &\geq 0.99 \quad \text{dès que} \quad im^n \leq 0.01 \\ &\Leftrightarrow n \geq 395. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons assurer avec 99% de chances que si il n'y a pas de changement environnemental, les baleines auront disparu en 2389.

Le corollaire 1.2 appliqué à $m = 0.976$ et $i = 150$ donne $\mathbb{E}(T_0/X_0 = i) \simeq 206$.

1.8 Processus de Galton-Watson avec immigration

Le processus de Galton-Watson avec immigration permet de fournir une modélisation explicite de l'évolution d'une population. La notion d'immigration correspond au fait que la population de référence peut s'enrichir d'apports extérieurs : on peut citer l'exemple de l'évaluation d'un patrimoine génétique, ou des exemples d'immigration en écologie et en physique.

Définition 1.5 [10]

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $(I_n, n \geq 0)$ de loi Q sur \mathbb{N} , on construit le processus de Galton-Watson avec immigration $(Z_n, n \geq 0)$ avec loi de reproduction P et loi d'immigration Q comme suit

$$\begin{cases} Z_0 = 0, \\ Z_{n+1} = I_n + \sum_{k=1}^{Z_n} Y_{n,k}, \quad \forall n \geq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

I_n est l'effectif de l'immigration à la génération n , pour chaque individu k de la génération n $Y_{n,k}$ désigne le nombre de descendants.

Remarquons que chaque migrant arrivé à une certaine date n se reproduit ensuite comme un processus de Galton-Watson standard.

Proposition 1.10 [10]

Le processus de Galton-Watson avec immigration $(Z_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov et si $H_n(s)$ est la fonction génération de Z_n , alors pour tout $n \geq 0$

$$H_{n+1}(s) = H(s)(H_n \circ G(s)), \quad \forall s \in [-1, 1], \quad (1.13)$$

où $H(s)$ est la fonction génératrice de Q c'est à dire $H(s) = H_1(s)$ et G la fonction génératrice de P . On déduit alors par récurrence que

$$H_n(s) = \prod_{k=0}^{n-1} H \circ G^k(s), \quad \forall s \in [-1, 1], \quad (1.14)$$

avec la convention que $G^0(s) = s$.

Les résultats principaux de cette section sont les suivants.

Théorème 1.8 [33] (Cas sous-critique avec immigration)

Supposons que $m < 1$. Notons $\ln^+ I = \sup(\ln I, 0)$. On a alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln^+ I) < \infty &\quad \Rightarrow \quad (Z_n, n \geq 0) \text{ converge en loi,} \\ \mathbb{E}(\ln^+ I) = \infty &\quad \Rightarrow \quad Z_n \xrightarrow{P} +\infty. \end{aligned}$$

Théorème 1.9 [33]

supposons que $m > 1$. On a alors les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln^+ I) < \infty &\quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m^{-n} Z_n \text{ existe et finie p.s.,} \\ \mathbb{E}(\ln^+ I) = \infty &\quad \Rightarrow \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} c^{-n} Z_n = +\infty \text{ pour tout } c > 0 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

1.9 Processus de Galton-Watson et marche aléatoire

Le but de cette partie est de présenter une description d'un arbre par une marche aléatoire, qui permettent d'obtenir des propriétés généalogiques dans les arbres de Galton-Watson.

Processus de contour

On reprend ici la notation de Hulam-Harris-Neveu. Nous commençons par décrire un algorithme d'exploration de l'arbre, qui vise à explorer la totalité de l'arbre et à construire une marche, appelée "processus de contour", qui code l'arbre et qui est particulièrement bien adapté à l'étude des propriétés généalogiques de la population décrite par l'arbre.

On rappelle d'abord la notion de marche.

Définition 1.6 [11] (Marches aléatoires)

Une marche aléatoire est une marche $(S_n, n \geq 0)$ de pas aléatoire $(X_k, k \geq 1)$ i.i.d :

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0; \\ \sum_{k=1}^n X_k, & \text{si } n > 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Une marche aléatoire arrêtée au temps T est une marche de pas $(X_k, 0 \leq k \leq T)$ pour une suite $(X_k, k \geq 1)$ i.i.d.

Définition 1.7 [11] (Parcours d'exploration par "contour")

Soit l'arbre $\omega \in \Omega$. On considère l'algorithme d'exploration suivant. On pose $v_0(\omega) = \emptyset$ (étape 0 de l'algorithme). Supposons avoir construit $v_0(\omega), v_1(\omega), \dots, v_k(\omega) \in \omega$ pour un certain $k \geq 0$. Alors

- Si $v_k(\omega)$ a un enfant qui n'a pas encore été visité par l'algorithme (c'est-à-dire qui n'est pas l'un des v_0, \dots, v_k), alors on pose $v_{k+1}(\omega)$ le premier enfant (pour l'ordre lexicographique) de $v_k(\omega)$ qui n'a pas encore été visité ;
- Si $v_k(\omega)$ n'a pas d'enfants ou si tous ses enfants ont déjà été visités,
 - Si $v_k(\omega) = \emptyset$, l'algorithme s'arrête à l'étape k ;
 - Si $v_k(\omega) \neq \emptyset$, alors on pose $v_{k+1}(\omega)$ le parent de $v_k(\omega)$

On note $T(\omega)$ le nombre d'étapes de l'algorithme. Ainsi, l'algorithme s'arrête à l'étape $T(\omega) - 1$. Par exemple, le parcours d'exploration par contour de l'arbre de la figure 1.6 est donné en l'abscisse de la figure 1.7. Dans cet exemple $v_0 = \emptyset, v_1 = 1, v_2 = 11, v_3 = 1, \dots, v_{26} = \emptyset$ et $T(\omega) = 27$.

On observe que chaque arête de l'arbre est parcourue deux fois, d'abord en descendant en profondeur puis en remontant vers la racine. Ainsi, $T(\omega)$ est égale au double du nombre d'arêtes plus 1. On remarque qu'un arbre comporte un noeud de plus que son nombre

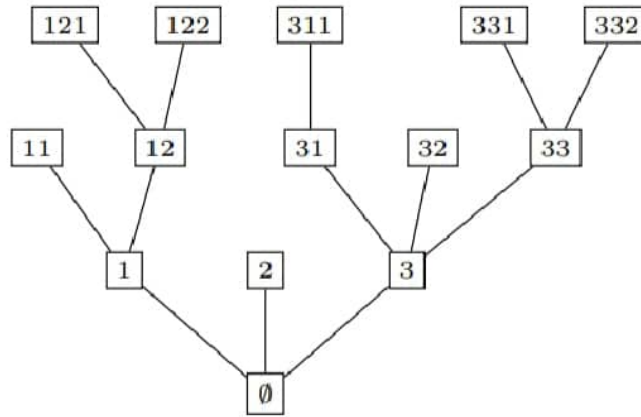


FIGURE 1.6 – Un arbre fini avec la notation de Ulam-Harris-Neveu

d'arêtes. Le nombre d'arêtes de l'arbre (appelé également descendance totale de l'arbre) est donné par

$$Z = \sum_{n \geq 0} X_n = \sum_{n=0}^{T_{Ext}-1} x_n, \quad T_{ext} \text{ est le temps d'atteinte de } 0.$$

Donc

$$T(\omega) = 2 \sum_{n=0}^{T_{Ext}-1} x_n - 1.$$

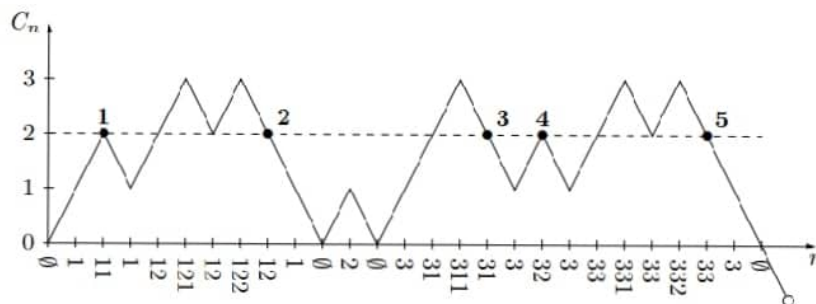


FIGURE 1.7 – Le processus de contour de l'arbre de la figure 1

En abscisse se trouve la suite des noeuds visités par l'algorithme de parcours. Les individus à la génération 2 sont indiqués par des \bullet , à l'instant de leur dernière visite par

le processus de contour. Ils sont numérotés de 1 à 5, dans l'ordre de leur visite par le processus de contour.

On remarque que les nouveaux individus sont visités par le processus d'exploration dans l'ordre lexicographique. on parle de parcours par contour carlasuite des noeuds visités par l'algorithme est donnée par la suite des noeuds visités quand on fait le tour de l'arbre en partant à gauche de la racine. Lorsque l'arbre w est infini, l'algorithme ne s'arrête pas et en général tous les noeuds de l'arbre ne sont pas visités.

Définition 1.8 [11]

Soit $\omega \in \Omega$ et $(v_n, 0 \leq n \leq T-1)$ la suite des noeuds visités dans l'algorithme d'exploration de ω . Le processus de contour $(C_n, n \in \{0, 1, \dots, T\})$ de ω est défini par :

$$C_n = \begin{cases} |v_n|, & 0 < n < T-1; \\ -1, & n=T. \end{cases} \quad (1.16)$$

Remarquons qu'on a toujours $C_0 = |\emptyset| = 0$. Le processus de contour associé à l'arbre de la figure 1.7 est représenté dans la figure 1.7 . Il est clair d'après la définition 1.8 que le processus de contour est une marche dont les pas sont soit 1 soit -1, issue de 0 et arrêtée à son premier temps d'atteinte de -1.

Lorsque l'arbre est fini, le passage du processus de contour à l'arbre qui lui correspond peut se visualiser d'une manière assez commode : supposons que l'on enduise de colle le dessous de la courbe du processus de contour de la figure 1.7, et que l'on écrase la courbe dans la direction horizontale. Les parties du processus de contour qui sont en face les unes des autres seront alors collées, et on obtient l'arbre de la figure 1.6 en dépliant les parties non-collées. Inversement, si on se donne un arbre comme celui de la figure 1.6, on obtient le processus de contour en découpant en deux toutes les arêtes dans le sens de la longueur, sauf les extrémités des arêtes qui sont des feuilles. Lorsque l'on étire la courbe ainsi obtenue, on retrouve la figure 1.7.

Chapitre 2

Estimation des paramètres du processus de Galton-Watson

2.1 Introduction

Le processus de branchement est le principal outil utilisé pour modéliser des populations qui évoluent de manière aléatoire dans le temps. Ils ont été utilisés avec succès dans de nombreux domaines en biologie, écologie, médecine

D'où l'intérêt de développer des méthodes d'inférence statistique sur ces processus pour mieux comprendre et prédire l'évolution des phénomènes observés. Dans cette partie, nous présentons les résultats essentiels sur l'estimation des paramètres du processus de Galton-Watson. On étudie l'estimation de la moyenne m , de la variance σ^2 de la loi de reproduction et de la probabilité d'extinction d'un processus de Galton-Watson.

2.2 L'estimation de la moyenne du processus de Galton-Watson

Considérons un processus de Galton-Watson

$$\begin{cases} X_{n+1} = \sum_{k=1}^{X_n} Y_{n,k} \\ X_0 = x \quad \text{si } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.1)$$

où les $Y_{n,k}$ sont de v.a indépendantes de même loi \mathbf{P} (loi de reproduction), de moyenne m et de variance σ^2 .

Nous commençons par introduire les notations nécessaires :

X_{ik} est le nombre d'individus à la génération i qui produisent exactement k descendants.

Z_{nk} est le nombre total d'individus à travers les n générations qui produisent k descendants : $Z_{nk} = X_{0k} + X_{1k} + \dots + X_{nk}$.

Z_n est le nombre total d'individus qui sont présents dans le processus jusqu'à la génération n : $Z_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$,

et $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots, k = 0, 1, \dots$. On a aussi la relation suivante.

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} X_{ik} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

2.2.1 Estimateur de Harris \hat{m}

L'estimateur de Harris [18] maximise la vraisemblance dans le modèle général de loi de reproduction ($P = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$).

Théorème 2.1 [18, 19]

Les estimateurs du maximum la vraisemblance de p_k et m basés sur les valeurs observées de X_{ik} pour $i \leq n$, sont respectivement.

$$\hat{p}_k = \frac{Z_{nk}}{Z_n}. \quad (2.2)$$

$$\hat{m} = \frac{Z_n - Z_0}{Z_{n-1}} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}}. \quad (2.3)$$

Idée de la preuve

Pour X_i fixé, la fonction de probabilité conditionnelle conjointe de X_{i0}, X_{i1}, \dots , est

$$\frac{(X_i)! \prod_{k=0}^{\infty} p_k^{X_{ik}}}{\prod_{k=0}^{\infty} (X_{ik})!}.$$

Ainsi la fonction de probabilité jointe des X_{ik} pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ et $k = 0, 1, 2, \dots$, est donnée par le produit de deux facteurs dont l'un est indépendant de p_k , le logarithme de l'autre étant $\sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^n X_{ik}) \log p_k$. La valeur de cette expression est clairement maximisée en prenant $p_k = \hat{p}_k$. Puisque $\sum_k X_{ik} = X_i$ et $\sum_k kX_{ik} = X_{i+1}$, la quantité $\sum k\hat{p}_k$ donne alors une estimation de m , c-à-d \hat{m} .

2.2.2 Comportement asymptotique de \hat{m}

Dans cette section, on étudie les propriétés asymptotique de \hat{m} en examinant deux cas de passage à la limite en n et ou en x .

Si x est fixé et $n \rightarrow \infty$, l'estimateur \hat{m} est consistant et asymptotiquement normal avec une normalisation aléatoire. Si x et $n \rightarrow \infty$, \hat{m} est consistant et asymptotiquement normal avec une normalisation déterministe.

Théorème 2.2 [14, 15]

Soit n fixé et $x \rightarrow \infty$.

- 1) Si $m \rightarrow \infty$, alors $\hat{m} \rightarrow m$ p.s et $\mathbb{E}(\hat{m}) \rightarrow m$.
- 2) Si la variance des reproduction $\sigma^2 < \infty$, alors la loi limite de

$$\sqrt{\frac{x}{\sigma^2}(1 + m + \dots + m^{n-1})}(\hat{m} - m).$$

est une loi normale $N(0, 1)$.

Considérons maintenant le cas où le nombre de générations est grand avec x fixé, nous avons ce résultat pour le cas sur-critique.

Théorème 2.3 [14, 15]

Si $1 < m < \infty$, alors pour x fixé, $n \rightarrow \infty$

$$\hat{m} \rightarrow m \quad p.s \text{ sur } A,$$

où $A = \{X_n \rightarrow +\infty\}$.

Théorème 2.4 [14, 15]

Supposons que $m > 1$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Posons $P_A(\cdot) = P(\cdot/A)$ et $S(w) = P_A(W < w)$ où $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{m^n}$, alors pour x fixé et $n \rightarrow \infty$

$$a) \quad P_A\left\{\sqrt{\frac{X_0+\dots+X_{n-1}}{\sigma^2}}(\hat{m}-m) < z\right\} \rightarrow \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$b) \quad P_A\left\{\sqrt{\frac{x(1+\dots+m^{n-1})}{\sigma^2}}(\hat{m}-m) \leq z\right\} \rightarrow \int_0^\infty \phi(x\sqrt{w})dS(w).$$

c) Les résultats a) et b) restent vrais si P_A est remplacé par $P(. / X_n > 0)$.

Ce dernier résultat nous donne la distribution asymptotique dans le cas sous-critique et critique sous l'hypothèse que x et n soient assez grands.

Théorème 2.5 (Yanev) [43]

Soit $0 < \sigma^2 < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$ et $x \rightarrow \infty$,

a) $\hat{m} \rightarrow m$ p.s et $\mathbb{E}(\hat{m}) \rightarrow m$.

b) Si $m < 1$,

$$\sqrt{\frac{x}{\sigma^2(1-m)}}(\hat{m}-m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{N}(0,1).$$

c) Si $m = 1$, alors si $\frac{n}{x} \rightarrow 0$, loi limite de

$$\sqrt{\frac{xn}{\sigma^2}}(\hat{m}-m)$$

est une loi normale $N(0,1)$, et lorsque $\frac{n}{x^2} \rightarrow \infty$, la loi limite de

$$\frac{\sigma^2}{2x^2(1-\hat{m})}$$

est une loi stable d'exposant $1/2$.

d) Si $m > 1$ et loi de reproduction admet un moment fini d'ordre 4, alors la loi limite de

$$\sqrt{\frac{x(1+\dots+m^{n-1})}{\sigma^2}}(\hat{m}-m)$$

est une loi normale $N(0,1)$.

2.2.3 Estimateur de Nagaev \bar{m}

Un autre estimateur de la moyenne de reproduction a été proposé par Nagaev [30]. Cet estimateur est basé sur les l'échantillon X_0, X_1, \dots, X_n et est défini par.

$$\bar{m} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{X_n} & \text{si } X_n > 0 \\ 1 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

On note que l'estimateur de Harris \hat{m} est une combinaison linéaire aléatoire des \bar{m}

$$\hat{m} = \frac{(X_0\bar{m}_1 + X_1\bar{m}_2 + X_2\bar{m}_3 + \dots + X_{n-1}\bar{m}_n)}{X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}}.$$

On rappelle que

$$m = \sum_{k \geq 1}^{\infty} kp_k$$

$$P(X_{n+1} = j/X_n = i) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_i = k) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) = 1 \quad (2.4)$$

et si $m \leq 1$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$p_{n0} = P(X_n = 0) \rightarrow 1. \quad (2.5)$$

Si $m > 1$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$p_{n0} = P(X_n = 0) \rightarrow \lambda, \quad (2.6)$$

où $0 \leq \lambda < 1$ et $\lambda = \sum_{k \geq 0} p_k \lambda^k$.

On note $b = G'''(1)$, $c = G''''(1)$, où G est la fonction génératrice associée à (X_n) , c'est-à-dire

$$G(s) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k.$$

Théorème 2.6 [30]

1) Si $m > 1$ et $b < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$,

$$q_n = 1 - p_{n0} = km^n(1 + o(1)),$$

où k est une constante positive.

2) Si $m = 1$, $b \neq 0$ et $c < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$q_n = 1 - p_{n0} = \frac{2}{bn}(1 + o(1)).$$

3) Si $m > 1$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$\lambda - p_{n0} = k_1 a_1^n (1 + o(1)),$$

où k_1 est une constante positive, $a_1 = G'(\lambda)$ et λ défini par (2.6).

Posons

$$p_{nk} = P(X_n = k); \quad p_{nk}^* = P(X_n = k / X_n > 0) = \frac{p_{nk}}{q_n}$$

et $T_n(z) = P(X_n < z / X_n > 0)$

Le comportement asymptotique de $T_n(z)$ est décrit par le théorème suivant

Théorème 2.7 [41] (théorème de Yaglom)

1) Si $m > 1$ et $b < \infty$, alors la suite (p_{nk}^*) converge vers une loi limite (p_k^*) de fonction génératrice F satisfaisant l'équation

$$F(G(z)) = mF(z) + 1 - m.$$

2) Si $m = 1$, $b \neq 0$ et $c < \infty$ alors, quand $n \rightarrow \infty$.

$$T_n\left(\frac{z}{q_n}\right) = (1 - e^{-z})(1 + o(1)).$$

3) Si $m > 1$ et $b < \infty$, alors

$$T_n(zm^n) = T(z)(1 + o(1)).$$

Théorème 2.8 [30] L'estimateur

$$\bar{m} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{X_n} & \text{si } X_n > 0 \\ 1 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

vérifie $\mathbb{E}(\bar{m} / X_n > 0) = m$; $\sigma_n^2 = \text{Var}(\bar{m}_n / X_n > 0) = (\text{Var} X_1) \sum_{k \geq 1} \frac{p_{nk}^*}{k}$

On rappelle que $\text{Var}(X_1) = b + m - m^2$.

Démonstration

On a $\mathbb{E}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n > 0) = \sum_{k \geq 1} p_{nk}^* \mathbb{E}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n = k)$. De la condition (2.4), on a $\mathbb{E}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n = k) = m$. Alors $\mathbb{E}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n > 0) = m \sum_{k \geq 1} p_{nk}^* = m$. De la même manière $\text{Var}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n > 0) = \sum_{k \geq 1} p_{nk}^* \text{Var}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n = k)$. En utilisant 2.4, on obtient $\text{Var}(\frac{X_{n+1}}{X_n} / X_n > 0) = \text{Var} X_1 \sum_{k \geq 1} \frac{p_{nk}^*}{k}$.

Théorème 2.9 [30]

1) Si $m < 1$ et $b < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_n^2 = (\text{Var} X_1) \sum_{k \geq 1} \frac{p_k^*}{k} (1 + o(1)),$$

où p_k^* est la distribution limite donnée dans le théorème Yaglom (théorème 2.7).

2) Si $m = 1$, $b \neq 0$ et $c < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$\sigma_n^2 = O\left(\frac{\log n}{n}\right).$$

3) Si $m > 1$ et $b < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$,

$$\sigma_n^2 = O(\rho^n),$$

où $1 > \rho^2 > \max(a_1, \frac{1}{m})$. L'estimateur \bar{m} est alors consistant pour $m > 1$.

Les résultats suivants décrivent le comportement asymptotique de \bar{m} .

Théorème 2.10 [30]

1) Si $m < 1$ et $b < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$P(\bar{m} < z / X_n > 0) = \sum_{k \geq 1} p_k^* F_1^{k*}(zk) (1 + o(1)),$$

où $F_1(z)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X_1 , $F_1^{k*}(z)$ est la k -ème convolution de $F_1(z)$ et p_k^* est la loi limite (donnée par le théorème de Yaglom).

2) Si $m > 1$, $b \neq 0$ et $c < \infty$, alors quand $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{(\bar{m} - 1) \sqrt{\frac{n}{2}} < z / X_n > 0\right\} = \int_0^\infty \phi(z\sqrt{v}) e^{-v} dv (1 - o(1)),$$

où

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

3) Si $m > 1$ et $b < \infty$ alors quand $n \rightarrow \infty$

$$P\{(\bar{m} - m)\sqrt{m^n} < z/X_n > 0\} = \int_0^\infty \phi\left(\frac{z}{\sigma}\sqrt{\nu}\right)dT(\nu)(1 + o(1)),$$

où $T(\nu)$ est la loi limite donnée dans le théorème 2.7 et $\sigma^2 = \text{Var}X_1 = b + m - m^2$.

Théorème 2.11 [14, 15]

Si $m > 1$, $0 < \sigma^2 < \infty$ et $P(W < w) = S(w)$ où $W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{m}$, alors pour x fixé et $n \rightarrow \infty$

- a) $P_A\left\{\sqrt{\frac{X_n}{\sigma^2}}(\bar{m} - m) \leq z\right\} \rightarrow \phi(z).$
- b) $P_A\left\{\sqrt{\frac{m^n}{\sigma^2}}(\bar{m} - m) \leq z\right\} \rightarrow \int_0^\infty \phi(x\sqrt{w})dS(w).$
- c) $\mathbb{E}(\bar{m}/X_n > 0) = m.$
- d) $\bar{m} \rightarrow m$ p.s et $\mathbb{E}(\bar{m}) = m.$

2.3 Estimation de la variance

Pour utiliser les estimateurs de Harris et de Nagaev dans la construction des intervalles de confiance pour la moyenne et la distribution des descendance, il est nécessaire d'estimer la variance σ^2 .

2.3.1 Estimateur de Heyde

Un premier estimateur a été proposé en 1974 par Heyde [20] :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{i+1} - \bar{m}X_i)^2}{X_i}. \quad (2.7)$$

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.12 [20]

Si $P_0 = 0$, $m > 1$ et $0 < \sigma^2 < \infty$. Alors

1) $\bar{\sigma}^2 \xrightarrow{p.s.} \sigma^2$

2) Si $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$, alors

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2)}{\sqrt{2\sigma^4}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{N}(0, 1).$$

3) S'il existe $\delta > 0$, tel que $\mathbb{E}(X_1^{4+\delta}) < \infty$, alors

$$\bar{\sigma}^2 = (\sigma^2 + \eta(n)) \sqrt{\frac{4\sigma^4}{n} \log \log n},$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \eta(n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \eta(n) = -1$.

2.3.2 Estimateur de Dion

Estimateur de Dion pour la variance si m est connue

Dion 1975 s'est intéressé à l'estimation de σ^2 , il a d'abord considéré le cas où m est connue et a proposé l'estimateur

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{i+1} - mX_i)^2}{X_i}$$

Théorème 2.13 [15]

Si $p_0 = 0$, $m > 1$, $0 < \sigma^2 < \infty$ et $\mathbb{E}(X_1^4) < \infty$, alors

$$\mathbb{E}(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2,$$

et

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{(\tilde{\sigma}^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Estimateur de Dion pour la variance si m est inconnue

En utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance (E.M.V.) \hat{m} de m , Dion a proposé l'estimateur :

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{(X_{i+1} - \hat{m}X_i)^2}{X_i}. \quad (2.8)$$

Théorème 2.14 [15]

Si $p_0 = 0$, $m > 1$ et $0 < \sigma^2 < \infty$, alors

$$|\hat{\sigma}^2 - \tilde{\sigma}^2| (n+1)^{1-\varepsilon} \xrightarrow{P} 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Corollaire 2.1 [15]

Sous les hypothèses du théorème 2.14, on a

$$\sqrt{\frac{n+1}{2}} \frac{(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)}{\sigma^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Dans ce cas, Dion considère un estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2 lorsque l'échantillon $\{X_{ik}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n\}$ est disponible. En utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance de \hat{p}_k de p_k , l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ^2 (si m est inconnue) est

$$\sigma_4^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \hat{m})^2 \hat{p}_k.$$

Dion a prouvé que lorsque $m > 1$, $0 < \sigma^2 < \infty$ et $\mathbb{E}(Y^4) < \infty$

$$P\left(\frac{\sqrt{Z_n}(\sigma_4^2 - \sigma)}{\sqrt{\text{Var}(Y - m)^2}} \leq x/X_n > 0\right) \rightarrow \phi(x).$$

2.4 Estimation de la probabilité d'extinction

Comme nous l'avons vu précédemment, la probabilité d'extinction est l'un des facteurs importants d'un processus de Galton-Watson. Supposons à nouveau que X_n est un processus de Galton-Watson, avec une fonction génératrice G .

2.4.1 Estimateur de Stigler

Stigler [37] a obtenu en 1971 un estimateur de la probabilité d'extinction en estimant les probabilités p_k . Il suppose que les observations disponibles sont Y_1, Y_2, \dots, Y_r . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la probabilité d'extinction π , est la racine minimale de l'équation $G(s) = s$. Stigler a proposé la fonction empirique $\hat{G}(s)$ comme un estimateur de $G(s)$, où

$$\hat{G}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_k s^k.$$

Puisque $(\hat{p}_k, k = 0, 1, \dots)$ est un estimateur du maximum de vraisemblance de $(p_k, k = 0, 1, \dots)$, $\hat{G}(s)$ est un estimateur du maximum de vraisemblance de $G(s)$ et toute fonctionnelle de \hat{G} est un E.M.V. de G . Soit $\hat{\pi}$ l' E.M.V de π donné par

$$\hat{\pi} = \inf_{0 \leq s < 1} [s : \hat{G}(s) = s]. \quad (2.9)$$

Théorème 2.15 [37]

- 1) $\hat{\pi}$ est un estimateur biaisé.
- 2) $\hat{\pi} \rightarrow \pi$ quand $r \rightarrow \infty$ p.s.
- 3) $\hat{\pi}$ a la loi asymptotique suivante :

(a) si $m > 1$ et $p_0 > 0$, alors

$$P\left(\frac{\sqrt{r}(\hat{\pi} - \pi)}{\tau^2} \leq z\right) \rightarrow \phi(z)$$

quand $r \rightarrow \infty$ où $\tau^2 = \left(\frac{G(\pi^2) - \pi^2}{1 - G'(\pi)}\right)^2$.

(b) Si $m = 1$, $p_1 < 1$ et $G''(1^-) < \infty$ alors quand $r \rightarrow \infty$

$$P(\sqrt{r}(1 - \hat{\pi}) \leq z) \rightarrow \begin{cases} G\left(\frac{\sqrt{G''(1^-)}z}{2}\right) & \text{si } z \geq 0, \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

(c) Si $m < 1$ alors $P(\hat{\pi} = 1 \text{ pour tout } r \text{ suffisamment grand}) = 1$.

Ces résultats sont utilisés pour approximer les intervalles de confiance. Stigler a ensuite comparé cet estimateur à l'estimateur correspondant à une loi de reproduction p_k .

2.4.2 Estimateur de Pakes

Pakes en 1975 (voir [33]) a prolongé le travail de Stigler au cas $n > 0$. Il suppose que l'échantillon observé est $(X_{ik}, i = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots)$. Il a défini une suite d'estimateurs dépendant de i , de $p_{i,k}$

$$\hat{p}_{i,k} = \begin{cases} \frac{X_{ik}}{X_i} & si X_i > 0 \\ \delta_{k0} & si X_i = 0 \end{cases}$$

où δ_{k0} est la fonction delta de Kronecker. Par conséquent

$$\hat{G}(i, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_{ik} s^k \quad 0 \leq s \leq 1$$

et

$$\hat{\pi}_i = \inf(s : \hat{G}(i, s) = s) \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Les propriétés suivantes de $\hat{\pi}$ sont montrées :

- 1) $\mathbb{E}(\hat{\pi}_i / X_i > 0) \rightarrow \pi$ quand $i \rightarrow \infty$ si $m > 1$
- 2) $\hat{\pi}_i$ à la distribution asymptotique suivante

(a) Si $m > 1$

$$P\left(\frac{\sqrt{X_i}(\hat{\pi}_i - \pi)}{\tau^2} \leq z / X_i > 0\right) \rightarrow \phi(z)$$

où τ^2 est défini dans le théorème 2.15.

(b) Si $m = 1$ et $G^{(4)}(1^-) < \infty$, alors

$$P(\sqrt{X_i}(1 - \hat{\pi}_i) \leq z / X_i > 0) \rightarrow \begin{cases} G\left(\frac{\sqrt{G''(1^-)}z}{2}\right) & si \quad z \geq 0, \\ 0 & si \quad z < 0. \end{cases}$$

2.4.3 Estimation dans le cas où les observations sont X_0, \dots, X_n

Nous considérons le cas où on connaît uniquement les tailles de la population X_0, X_1, \dots, X_n .

Estimation directe

Si nous supposons que la loi de reproduction a une certaine forme paramétrique spécifiée alors on peut obtenir un estimateur direct de π .

Exemple 1 (loi de Poisson)

- Si nous supposons qu'on a une loi de poisson de paramètre λ

$$P_j = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^j}{j!} \quad \text{pour } j = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

où $\lambda > 0$, alors la fonction génératrice de reproduction est donné par

$$G(s) = \exp[\lambda(s - 1)]. \quad (2.11)$$

Nous commençons par estimer λ par $\hat{m} = \frac{X_1 + X_2, \dots, X_{n+1}}{X_0 + X_1 + \dots + X_n}$ puisque $\lambda = m$ (moyenne de la reproduction), on obtient ainsi $\hat{\lambda}$. Un estimateur de π serait alors :

$$\hat{\pi}_p = \inf_{0 \leq s < 1} \{s : s = \exp[\hat{\lambda}(s - 1)]\},$$

qui peut être approximé numériquement.

Exemple 2 (loi Binomiale)

- Si nous supposons qu'on a une loi de binomiale de paramètres (k, α)

$$P_j = \begin{cases} C_j^k \alpha^j (1 - \alpha)^{k-j} & \text{si } j = 0, 1, \dots, k \\ 0 & \text{si } j = k + 1, k + 2, \dots, \end{cases}$$

(k fixé et $0 \leq \alpha < 1$), alors la fonction génératrice de reproduction est donnée par

$$G(s) = [1 + \alpha(s - 1)]^k$$

Puisque $m = k\alpha$, donc un estimateur de α est $\hat{\alpha} = \frac{\hat{m}}{k}$, ainsi un estimateur de π est

$$\hat{\pi}_{Bk} = \inf \{s : s = [1 + (\frac{\hat{m}}{k})(s - 1)]^k\}.$$

Pour $k > 2$, cette estimation pourrait être approchée par des méthodes numériques. Lorsque $k = 2$ on obtient la solution exacte suivante :

$$\hat{\pi}_{B2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{m} \leq 1 \\ 1 - (\frac{2}{\hat{m}}) & \text{si } \hat{m} > 1. \end{cases}$$

Une estimation directe de π peut être obtenue pour d'autres loi de reproductions ayant des structures paramétriques.

Dans la suite, on considère un modèle plus général ne supposant aucune structure spécifique pour la loi de reproduction p_k , on suppose qu'il y a un nombre maximum k de descendants par individu.

Estimateur de Bailey [2]

Bailey en 1964 a proposé cet estimateur de π défini par :

$$\hat{\pi}_B = \min\{1, \exp[\frac{2(1 - \hat{m})}{\hat{\sigma}^2}]\}. \quad (2.12)$$

Cette construction a été motivée par les calculs suivants : lorsque $m > 1$ et σ^2 sont connues, alors

$$\pi = G(\pi) = \mathbb{E}(\pi^Y)$$

où Y est une variable aléatoire de loi de probabilité $P[Y = j] = p_j$ pour $j = 0, 1, \dots, k$, $G(\cdot)$ étant la fonction génératrice de reproduction. Si on pose $\pi = e^\theta$ alors :

$$\begin{aligned} e^\theta &= \mathbb{E}(\pi^Y) \\ &= \mathbb{E}(e^{\theta Y}) \\ &= \varphi(\theta) \end{aligned}$$

où φ est la fonction génératrice de moments de la variable aléatoire Y . Alors

$$\theta = \log(\varphi(\theta)) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} K_j \theta^j}{j!}$$

Puisque $K_1 = m$ et $K_2 = \sigma^2$, on a

$$\theta = m\theta + \frac{\sigma^2\theta^2}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \left(\frac{K_j\theta^j}{j!} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \theta &\simeq m\theta + \frac{\theta^2\sigma^2}{2} \\ 1 &\simeq m + \frac{\sigma^2\theta}{2} \\ \theta &\simeq \frac{2(1-m)}{\sigma^2} \end{aligned}$$

et

$$\pi \simeq e^\theta = \exp\left[\frac{2(1-m)}{\sigma^2}\right].$$

Il est clair que l'hypothèse $m > 1$ est importante afin que π satisfasse $0 < \pi < 1$. Remplaçons m et σ^2 par leurs estimateurs \hat{m} et $\hat{\sigma}^2$ respectivement, on obtient alors l'estimateur de Bailey défini par (2.12). En supposant de plus que $X_n > 0$, $n = 0, 1, \dots$ on a

$$\hat{\pi}_B \xrightarrow{P} \exp\left[\frac{2(1-\hat{m})}{\hat{\sigma}^2}\right] \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Ce résultat découle du fait que, sous ces hypothèses $\hat{m} \rightarrow m$ et $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$ et de la continuité de la fonction $\exp\left[\frac{2(1-\hat{m})}{\hat{\sigma}^2}\right]$.

2.4.4 Estimation dans le cas où les observations sont X_0, X_1

Maintenant nous proposons une autre méthode permettant d'estimer π . Cette méthode sera motivée par l'exemple suivant : supposons que nous observons $X_0 = 3, X_1 = 4$, on souhaite estimer π . Bien que ces observations ne nous donnent pas d'informations directes sur le nombre de descendants produits par chacun des trois premiers individus, nous savons que

- a) l'un des trois a eu 4 descendants et les deux autres n'ont aucun descendant,
- b) l'un des trois a eu 3 descendants, l'autre 1, et un autre n'a pas eu de descendants,
- c) deux des trois ont eu deux descendants et l'autre a eu 0 descendant,
- d) deux des trois ont eu un descendant et l'autre a eu 2 descendants.

- Si (a) se produisait, les E.M.V des p_j sont donnés par $\hat{p}_0 = 2/3$,
 $\hat{p}_1 = 0, \hat{p}_2 = 0, \hat{p}_3 = 0, \hat{p}_4 = 1/3, \hat{p}_5 = \hat{p}_6 = \dots = 0$.
- si (b) se produisait, les E.M.V des p_j sont donnés par $\hat{p}_0 = 1/3, \hat{p}_1 = 1/3$,
 $\hat{p}_2 = 0, \hat{p}_3 = 1/3, \hat{p}_4 = \hat{p}_5 = \dots = 0$.
- si (c) se produisait, les E.M.V des p_j sont donnés par $\hat{p}_0 = 1/3, \hat{p}_1 = 0$,
 $\hat{p}_2 = 2/3, \hat{p}_3 = \hat{p}_4 = \dots = 0$.
- si (d) se produisait, les E.M.V des p_j sont donnés par $\hat{p}_0 = 0, \hat{p}_1 = 2/3$,
 $\hat{p}_2 = 1/3, \hat{p}_3 = \hat{p}_4 = \dots = 0$.

Maintenant nous estimons les $\{p_j, j = 0, 1, 2, \dots, k\}$ par $p_j^*(3, 4)$, qui est une moyenne pondérée (par le nombre de façons dont chaque cas est réalisé) de ces estimations

$$p_0^*(3, 4) = [3(2/3) + 6(1/3) + 3(1/3) + 3(0)]/15 = 5/15$$

$$p_1^*(3, 4) = [3(0) + 6(1/3) + 3(0) + 3(2/3)]/15 = 4/15$$

$$p_2^*(3, 4) = [3(0) + 6(0) + 3(2/3) + 3(1/3)]/15 = 3/15$$

$$p_3^*(3, 4) = [3(0) + 6(1/3) + 3(0) + 3(0)1]/15 = 2/15$$

$$p_4^*(3, 4) = [3(1/3) + 6(0) + 3(0) + 3(0)]/15 = 1/15$$

$$p_5^*(3, 4) = P_6^*(3, 4) = \dots = 0$$

On peut maintenant estimer la fonction génératrice de la reproduction $G(s)$ par

$$\hat{G}(s) = \sum_{j=0}^k p_j^*(3, 4) s^j$$

et estimer π par

$$\hat{\pi} = \inf_{0 \leq s \leq 1} (s : \hat{G}(s) = s)$$

Cette méthode peut se généraliser ainsi : si nous avons observé $X_0 = i, X_1 = j$, alors il existe un nombre N_{ij} (nombre de façons que les i individus produisent j descendants), dans l'exemple précédent $N_{34} = 15$. Pour chaque cas, correspond un E.M.V de p_l : (le nombre d'individus produisant l descendants) $/i$, pour $l = 0, 1, 2, \dots, k$.

De la même façon que l'exemple précédent, on définit $p_l^*(i, j)$ en prenant la moyenne

des \hat{p}_l . On utilise alors ces estimations de probabilité pour estimer G et π .

$$\hat{G}(s) = \sum_{l=0}^k p_l^*(i, j) s^j,$$

$$\hat{\pi} = \inf_{1 \leq s \leq 1} \{s : \hat{G}(s) = s\}.$$

Nous avons alors ce resultat :

Théorème 2.16 ([35])

Pour N_{ij} et $p_\alpha^*(i, j)$ défini ci-dessus, si on pose n_l le nombre d'individus qui produisent l descendants ($l = 0, 1, \dots, k$), alors

$$N_{ij} = \sum_{S_{ij}} \frac{i!}{\prod_{l=0}^k n_l!}$$

et pour $\alpha = 0, 1, \dots, k$. On a

$$p_\alpha^*(i, j) = \frac{\sum_{S_{ij}} \alpha_n \frac{i!}{\prod_{l=0}^k n_l!}}{i N_{ij}},$$

où $S_{i,j} = \{(n_0, n_1, \dots, n_k) : \sum_{l=0}^k n_l = i, \sum_{l=0}^k n_l l = j\}$

Nous allons maintenant supposer que k , le nombre maximum de descendants par individu est égal à 2. Pour ce cas particulier, les valeurs de $N_{i,j}$ pour les petites valeurs de i et j , sont données dans le table 1 et les valeurs de $p_\alpha^*(i, j)$ pour $\alpha = 0, 1, 2$ et pour de petites valeurs de i et j sont données dans le table 1.

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	3	4	5	6	7	8
2		2	6	10	15	21	28	36
3		1	7	16	30	50	77	112
4			6	19	45	90	161	266
5			3	16	51	126	266	504
6			1	15	45	141	357	784
7				10	30	126	393	1016
8				4	15	90	357	1017
9				1	5	50	266	1016
10					1	21	161	784
11						6	77	504
12						1	28	266
13							7	112
14							1	36
15								8
16								1

Table 1 Les valeurs de $N_{i,j}$

(i,j)	\hat{p}_0	\hat{p}_1	\hat{p}_2
1,0	1	0	0
1,1	0	1	0
1,2	0	0	1
2,0	1	0	0
2,1	1/2	1/2	0
2,2	1/3	1/3	1/3
2,3	0	1/2	1/2
2,4	0	0	1
3,0	1	0	0
3,1	2/3	1/3	0
3,2	3/6	2/6	1/6
3,3	6/21	9/21	6/21
3,4	1/6	2/6	1/6
3,5	0	1/3	2/3
3,6	0	0	1
4,0	1	0	0
4,1	3/4	1/4	0
4,2	6/10	3/10	1/10
4,3	7/16	6/16	3/16
4,4	9/19	7/19	9/19
4,5	3/16	6/16	7/16
4,6	1/10	3/10	6/10
4,7	0	1/4	3/4
4,8	0	0	1
5,0	1	0	0
5,1	4/5	1/5	0
5,2	50/75	20/75	5/75
5,3	80/150	50/150	20/150
5,4	95/225	80/225	50/225
5,5	80/225	95/225	50/225
5,6	50/225	80/225	95/225
5,7	20/150	50/150	50/150
5,8	5/75	20/75	50/75
5,9	0	1/5	4/5
5,10	0	0	1

Table 2 : Estimation des $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2$

Pour estimer π nous aurons besoin du théorème suivant.

Théorème 2.17 [23]

Lorsque le nombre maximum de descendants par individu est 2, alors π est donné par

$$\pi = \min\left\{1, \frac{p_0}{p_2}\right\}$$

Preuve

Nous devons trouver s tel que $p_0 + p_1s + p_2s^2 = s$ c'est-à-dire les racines de $p_2s^2 + (p_1 - 1)s + p_0 = 0$. Les racines sont $s_1 = 1, s_2 = \frac{p_0}{p_2}$. Donc la plus petite racine positive est $\pi = \min[1, \frac{p_0}{p_2}]$.

Nous définissons alors l'estimateur

$$\hat{\pi}_{MULT} = \min\{1, \frac{\hat{p}_0^*}{\hat{p}_2^*}\} \quad (2.14)$$

où p_0^* et p_2^* sont définis précédemment.

Pour comparer les performances de ces estimateurs lorsque des échantillons sont relativement petits, une simulation de Monte-Carlo a été réalisée comme suit :

- 1) La taille de la population a été fixée à 5.
- 2) Plusieurs distributions de reproduction (p_0, p_1, p_2) , sont choisies représentant des valeurs de m entre 0,6 et 4/3 (incluant plusieurs distributions avec $m = 1$, et des valeurs de π entre 0,25 et 1.
- 3) Le processus de Galton-Watson est observé pour 5 générations et les valeurs (X_0, X_2, \dots, X_5) sont enregistrées, 1000 processus de Galton-Watson indépendants ont été générés pour chaque distribution.
- 4) Pour chaque processus,

les 3 estimateurs suivants sont calculés :

- $\hat{\pi}_B$ l'estimateur de Bailey.
- $\hat{\pi}_{MULT}$.
- $\hat{\pi}_{B2}$ pour une loi de reproduction binomiale $B(2, \alpha)$.

Les estimations et leurs erreurs quadratiques sont enregistrées. La valeur moyenne et l'erreur quadratique moyenne de chaque estimateur sont calculées. Ce sont des estimations de l'espérance et de l'erreur quadratique moyenne de ces estimateurs pour chacune des distributions de descendance (lois de reproduction).

- 5) Les estimateurs ont été modifiés pour traiter les cas problématiques, lorsqu'un processus s'est éteint avant d'avoir atteint 5 générations, n est alors réduit de 5 au numéro

de la première génération de taille 0 et les estimateurs ont été modifiés en conséquence. Lorsqu'un processus est resté constant en taille, $\hat{\sigma}^2 = 0$ et l'estimateur $\hat{\pi}_B$ est null. Lorsque $\hat{m} = 0$, l'estimateur du $\hat{\pi}_{B2}$ sera égal à 1. Lorsque $\hat{p}_2^* = 0$ l'estimateur $\hat{\pi}_{MULT}$ sera égal 1.

Les résultats de cette étude sont présentés dans le table 3

Distributions de descendance					Espérance et EQM des estimateurs		
P_0	P_1	P_2	m	π	$\hat{\pi}_B$	$\hat{\pi}_{B2}$	$\hat{\pi}_{MULT}$
0.6	0.2	0.2	0.6	1.0	0.99902 0.00030	0.99928 0.00013	0.99944 0.00008
4/9	4/9	1/9	2/3	1.0	0.99929 0.00019	0.99960 0.00005	0.99969 0.00003
0.4	0.4	0.2	0.8	1	0.98570 0.00748	0.99097 0.00253	0.99268 0.00165
0.4	0.3	0.3	0.9	1.0	0.93332 0.03697	0.94859 0.01844	0.95955 0.01186
0.05	0.9	0.05	1	1	0.74718 0.20696	0.93137 0.01633	0.94473 0.01069
0.125	0.75	0.125	1	1	0.76397 0.16592	0.89364 0.03411	0.91417 0.02258
0.25	0.5	0.25	1	1	0.800036 0.12453	0.86658 0.05238	0.89394 0.03439
0.3	0.4	0.3	1	1	0.83772 0.90687	0.87574 0.05009	0.90403 0.03191
1/3	1/3	1/3	1.0	1.0	0.83663 0.09224	0.85609 0.06222	0.88916 0.03947
0.4	0.2	0.4	1.0	1.0	0.84982 0.08437	0.85961 0.06573	0.89180 0.04185
0.475	0.05	0.475	1	1	0.85490 0.07794	0.85058 0.06986	0.89109 0.04213
0.3	0.3	0.4	1.1	0.75	0.68827 0.10630	0.71879 0.06958	0.77640 0.04878
0.2	0.4	0.4	1.2	0.5	0.45295 0.10810	0.53394 0.06411	0.61188 0.06089
0.25	0.25	0.5	1.25	0.5	0.43596 0.09886	0.46179 0.06412	0.55505 0.05513
1/9	4/9	4/9	4/3	0.25	0.18928 0.04831	0.30181 0.02914	0.39560 0.04696

Table 3 : Comparaison des estimateurs de π

On remarque que pour la majorité des distributions, $\hat{\pi}_{MULT}$ a la plus petite E.Q.M (erreur quadratique moyenne). Il semble qu'en l'absence d'autre information autre que m au voisinage de 1, $\hat{\pi}_{MULT}$ est préférable aux autres estimateurs.

Chapitre 3

Application : un modèle épidémique par branchement uni-type

3.1 Introduction

Les premiers modèles mathématiques utilisés en épidémiologie sont les modèles compartimentaux. L'idée est de diviser une population en plusieurs classes épidémiologiques (compartiments). Ces modèles sont déterministes, cependant il est parfois nécessaire de rendre probabiliste un modèle. Parmi les modèles stochastiques, les processus de branchement occupent une place importante dans l'application à l'épidémiologie. Dans cette section, on se propose d'appliquer ce modèle à l'évolution de l'épidémie de CORONAVIRUS en Algérie.

La population étudiée est constituée initialement d'un individu infecté (le premier cas) qui porte le virus. Posons alors $X_0 = 1$ (un ancêtre). Cet individu engendre une génération par contamination suivant une loi de contamination (de reproduction) d'une v.a. Y , $P(Y = k) = p_k$, la probabilité d'avoir k individus (contaminés) à la génération 1. Après que le cas 1 est détecté et soigné, par la suite, il n'intervient plus dans la contamination. La génération 1 de contaminés va engendrer à son tour une génération 2 de contaminés en suivant une même loi Y de contamination de la variable aléatoire Y . Le processus se poursuit ainsi, la génération n engendre des descendants contaminés pour la génération $n + 1$ de telle sorte

que chaque individu i de la génération engendra un nombre Y_i de descendants contaminés pour la génération $n + 1$ suivant la même loi de contamination $P(Y_i = k) = p_k$, c'est-à-dire la même loi que Y de moyenne $E(Y) = m$ (taux de contamination).

Ainsi la loi de contamination est la même et ne dépend ni de l'individu, ni de la génération n . Notons X_n le nombre d'individus contaminés à la génération n .

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_{n,k}, \forall n \geq 0.$$

Le problème majeur ici est l'extinction de la chaîne X_n (extinction de la contamination). L'une des difficultés rencontrées dans l'étude d'une épidémie provient des données collectées, notamment celle concernant le nombre d'individus infectés, il est alors difficile de connaître la loi de reproduction (contamination), on cherche alors à trouver un estimateur \hat{m} de la moyenne de reproduction m .

- Lorsque $\hat{m} \leq 1$, on aura une extinction de la contamination.
- Si $\hat{m} > 1$, chaque individu infecté contaminera plus d'individus susceptibles, ce qui signifie que le nombre de contaminations croît. Pour évaluer la probabilité d'extinction on utilisera les estimateurs donnés dans le chapitre précédent.

3.2 Evolution du début de l'épidémie en Algérie

Dans cette section, on applique le modèle de branchement de Galton-Watson aux données de covid 19 en Algérie en utilisant le logiciel statistique R. Les informations sont données sur les nombres cumulés et le nombre de nouveaux cas à des intervalles de 10 jours pour la période du 25 février 2020 au 14 septembre 2020.

Le choix des intervalles de 10 jours est justifiée par l'hypothèse que toute personne qui est détectée infectée le serait dans la période de 10 jours. Il est aussi rapporté, dans l'article [26] que la période d'incubation moyenne est de 10 jour.

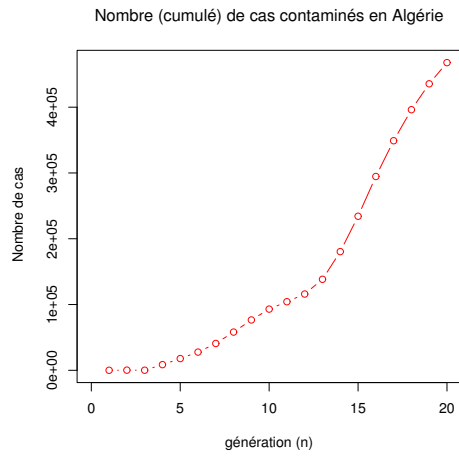


FIGURE 3.1 – le nombre cumulé de nouveaux cas contaminés

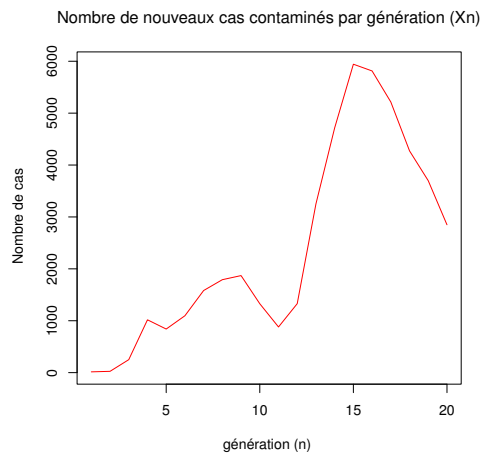


FIGURE 3.2 – le nombre de nouveaux cas contaminés par génération

Estimation de la moyenne de contamination

On utilise les deux estimateurs de la moyenne de reproduction donnés par :

Estimateur de Harris

$$\hat{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_0 + \dots + X_{n-1}} \quad (3.1)$$

Estimateur de Nagaev

$$\bar{m} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{X_n} & \text{si } X_n > 0 \\ 1 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

on obtient les résultats donnés dans la table suivante :

n	\bar{m}	\hat{m}
1	2.0000	1.0021
2	1.6666	1.0049
3	10.000	1.0214
4	5.0720	1.0175
5	0.8250	1.0231
6	1.3047	1.0339
7	1.4434	1.0386
8	1.1321	1.0404
9	1.0441	1.0282
10	0.7101	1.0180
11	0.6625	1.0282
12	1.5102	1.0729
13	2.4469	1.1091
14	1.4501	1.1411
15	1.2601	1.1381
16	0.9781	1.1221
17	0.8971	1.0978
18	0.8193	1.0835
19	0.8654	1.05317
20	0.7704	1.06307

Table4 : l'estimateur de Harris et l'estimateur de Nagaev

L'estimateur de Harris montre un comportement relativement plus stable que l'estimateur de Nagaev. Toutes les valeurs de \hat{m} sont autour de 1 (légèrement supérieures à 1), on est dans le cas sur-critique.

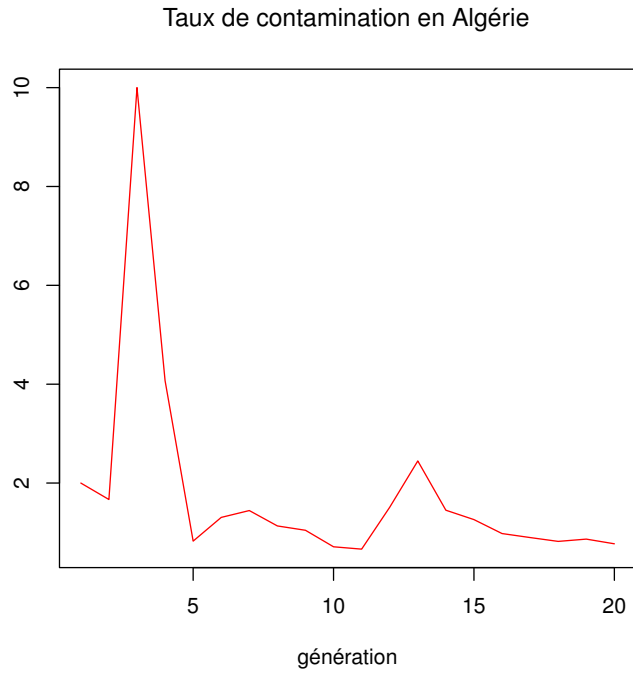


FIGURE 3.3 – Evolution du taux de contamination en Algérie (par l'estimateur de Nagaev (\bar{m}_n))

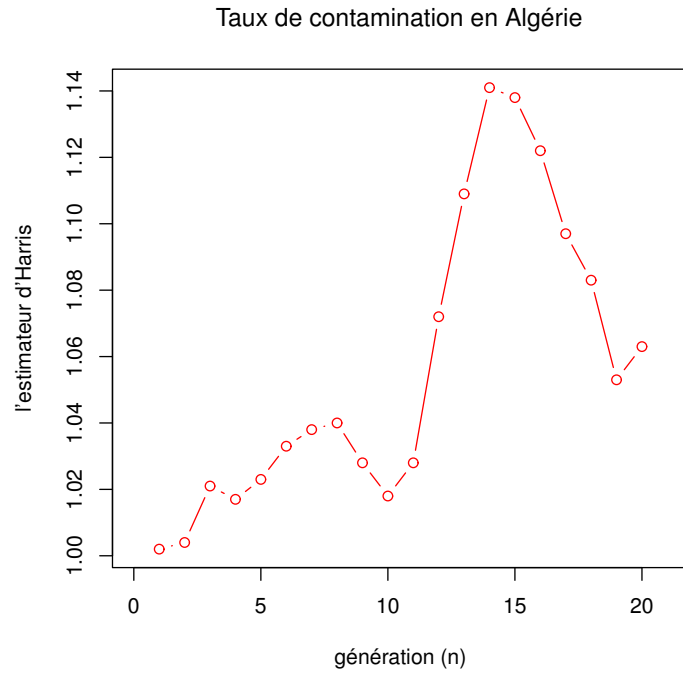


FIGURE 3.4 – Évolution du taux de contamination en Algérie (par l'estimateur de Harris (\hat{m}_n))

Estimation de la moyenne du processus X_n

En estimant m , on peut prédire la valeur moyenne M_n des individus contaminés dans la population. On sait que $\mathbb{E}(X_n) = M_n = m^n$ (si $X_0 = 1$), on peut ainsi construire deux estimateurs de la moyenne des individus de contaminés

$$\hat{M} = \hat{m}^n \quad \text{et} \quad \bar{M} = \bar{m}^n.$$

On peut prévoir le nombre moyen d'individus contaminés pour les k jours suivant par les relations : $\hat{M}_{n+k} = \hat{m}^{n+k}$ et $\bar{M}_{n+k} = \bar{m}^{n+k}$.

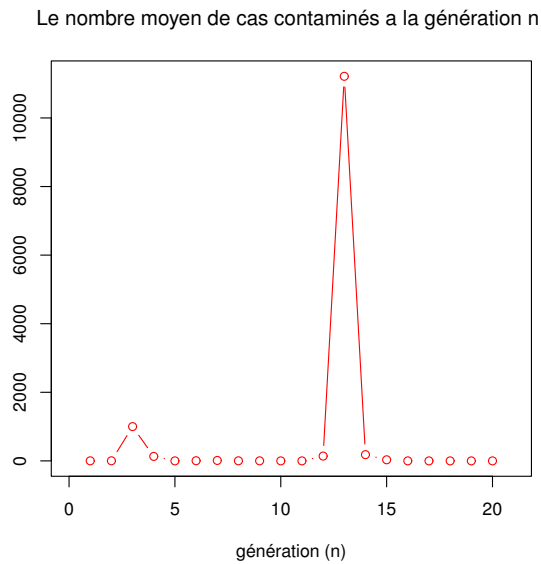


FIGURE 3.5 – Le nombre moyen de cas contaminés à la génération n en Algérie (par l'estimateur de Nagaev (\bar{m}_n))

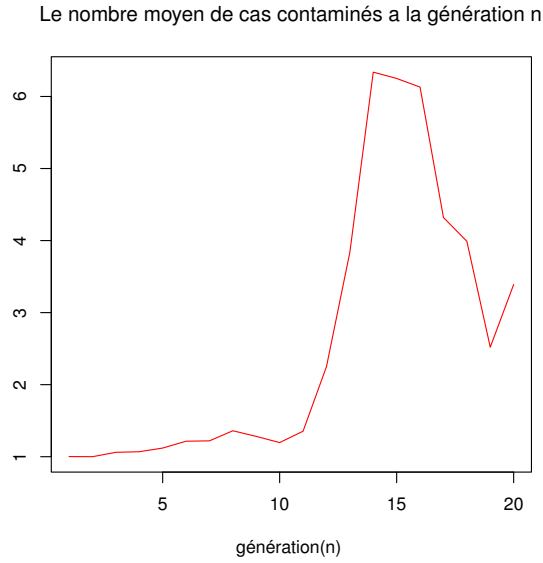


FIGURE 3.6 – Le nombre moyen de cas contaminés à la génération n en Algérie (par l'estimateur de Harris (\hat{m}_n))

Estimation de la probabilité d'extinction

Pour estimer la probabilité d'extinction, on utilise l'estimateur proposé par Bailey qui est basé sur l'estimateur de Harris \hat{m}

$$\hat{\pi}_B = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{m} \leq 1 \\ \exp(2(1 - \hat{m})/\hat{\sigma}^2) & \text{si } \hat{m} > 1. \end{cases}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(X_{j+1} - \hat{m}X_j)^2}{X_j}.$$

On obtient les résultats suivants :

n	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\pi}$
1	9493.03	0.99918
2	9470.31	0.99896
3	9341.54	0.99990
4	9371.19	0.99970
5	9328.77	1.0000
6	9449.80	0.99894
7	9220.80	0.99888
8	9206.85	0.99944
9	9292.48	0.99981
10	9367.36	1.0000
11	9292.48	1.00000
12	9001.07	0.99888
13	8804.06	0.99939
14	8669.07	0.99888
15	8680.33	0.99906
16	8745.26	1.00000
17	8863.15	1.00000
18	8937.91	1.0000
19	9119.29	1.00000
20	9055.63	1.00000

Table 5 : l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ et l'estimateur de $\hat{\pi}$

Les valeurs de \hat{m} sont bien supérieures à la valeur critique 1, donc $P(Ext) < 1$. L'estimateur de Bailey nous a donné des valeurs proches de 1, donc il y a extinction probable de la contamination.

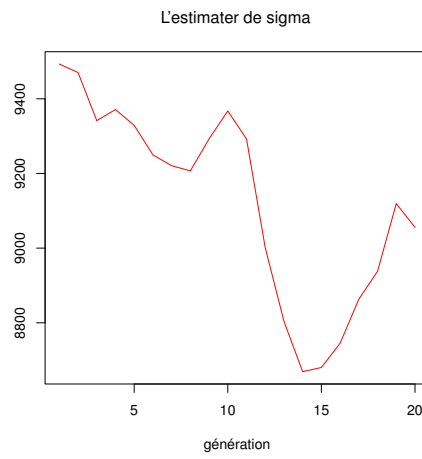


FIGURE 3.7 – l'estimateur $\hat{\sigma}^2$

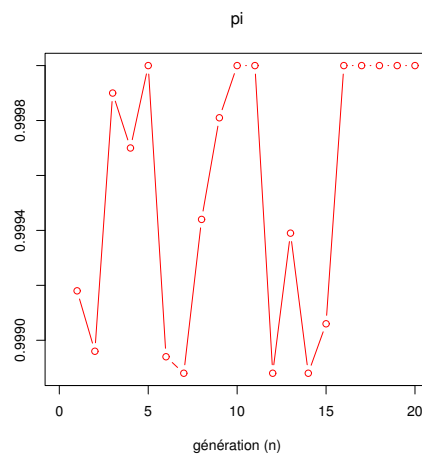


FIGURE 3.8 – l'estimateur $\hat{\pi}$

Conclusion

Le travail de ce mémoire a porté sur l'étude du processus de Galton-Watson en temps discret.

En premier lieu, on a abordé le processus uni-type sans immigration, où on a cité les différentes notions de base tel que la fonction génératrice, la probabilité d'extinction, le comportement asymptotique. Par la suite, on a introduit la notion d'immigration afin de comprendre l'évolution des populations, on terminé par la marche aléatoire et le processus contour.

En deuxième lieu, on s'est intéressé à l'inférence statistique sur le processus de Galton-Watson, où on a cité quelques estimateurs de la moyenne et de la variance (estimateur d'Harris, Nagaev, Dion), enfin on a cité quelques estimateurs de la probabilité d'extinction.

Un exemple d'application du processus de Galton-Watson à l'évolution de l'épidémie du coronavirus a été présenté au troisième chapitre.

Comme perspectives, on peut s'intéresser à des processus de branchement plus généraux multi-types, avec immigration on en environnement aléatoire.

Résumé

Ce mémoire porte sur le processus de Galton-Watson uni-type et l'inférence statistique sur ces processus. Au premier chapitre nous avons étudié le cas uni-type ou nous avons énoncé les différentes notions, propriétés, définitions et concepts de base de ces processus, puis nous avons présenté ses leurs caractéristiques que nous avons illustré par des exemples. Au second chapitre, on s'est intéressé à l'inférence statistique sur le processus Galton-Watson. Nous avons étudié des estimateurs de la moyenne, de la variance, et de la probabilité d'extinction.

Enfin, on a terminé le travail par une application au troisième chapitre à un modèle épidémique.

Abstract

This dissertation is about uni-type Galton-Watson processes and statistical inference on these processes. In the first chapter we studied the uni-type case where we stated the different notions, properties, definitions and basic concepts of these processes, then we presented these characteristics that we illustrated with examples. In the second chapter, we focused on the statistical inference of the Galton-Watson process. We studied estimators of the mean, the variance, and the extinction probability.

Finally, we ended the work with an application for an epidemic model in third chapter.

Bibliographie

- [1] Athreya K.B., Ney P.E. (1972). Branching processes. Springer.
- [2] Bailey N. (1964). The Elements of Stochastic Processes with. Applications to the Natural Sciences. Wiley, New York.
- [3] Bacaer N. (2008). Histoire des mathématiques et de populations. Le sel et le fer, Cassini.
- [4] Bacaer N. (2020). Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de Coronavirus en France. Math. model. Nat. Phenom 15 29.
- [5] Bansaye V. (2008). Proliferating parasites in dividing cells : Kimmel's branching model revisited. The Annals of Applied Probability, pages 967-996.
- [6] Bansaye V. (2009). Cell contamination and branching processes in a random environment with immigration. Advances in Applied Probability, 41(4) :1059-1081.
- [7] Bienaymé I.J. (1845). De la loi de multiplication et de la durée des familles. Soc. Philomat. Paris Extraits, Sér, 5 : 37-39.
- [8] Bloch D. A. and Watson G. S. (1967). A Bayesian Study of the Multinomial Distribution. Annals of Mathematical Statistics 38 1423-1435
- [9] Box G. E. P. (1954). Some Theorems on Quadratic Forms Applied to the study of Analysis of Variance Problems, I. Effect of Inequality of Variance in the One-way Classification. Annals of Mathematical Statistics 25 290-302.
- [10] Chafai D., Malrieu F. (2015). Recueil de modèles aléatoires. Springer.
- [11] Champagnat N. (2015). Processus de Galton-Watson et applications en dynamique des population. Notes de cours.

-
- [12] Cryer J. D. and Robertson T. (1975). Isotonic Estimation of the Probability of Extinction of a Branching Process. *Journal of the American Statistical Association* 70 905-912.
- [13] Delma J.F., Jourdain B. (2006). *Modèles aléatoires : application aux sciences de l'ingénieur et du vivant*, Springer.
- [14] Dion J. P. (1974). Estimation of the Mean and the Initial Probabilities of a Branching Process. *Journal of Applied Probability* 11 687-694.
- [15] Dion J. P. (1975). Estimation of the Variance of a Branching Process. *Annals of Statistics* 3 1183-1187.
- [16] Forien R., Pang G., Pardoux E. (2021). Estimating the state of the covid-19 in France using a model with memory. The royal society publishing.
- [17] Galton F. (1873). Problem 4001. *Educational Times*.
- [18] Harris T. E. (1948). Branching Processes. *Annals of Mathematical Statistics* 19 474-494.
- [19] Harris T.E. (1963). *The theory of branching processes*. Berlin Springer.
- [20] Heyde C. C. (1974). On Estimating the Variance of the Offspring Distribution in a Simple Branching Process. *Advances in Applied Probability* 6 421-433.
- [21] Jacob C. (2010). Branching Processes : Their Role in epidemiology. *International journal of environmental research and public health*, 7(3) : 1186-1204.
- [22] Jacques Istas. (2000). *Mathematical Modeling For the Life Sciences*, Département IM-SSBSHM Université Pierre Mendès-France, VOL. 34, Springer-Verlag.
- [23] Kesten H., Stigum B.P. (1966) A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. *The annals of mathematical statistics* 37(5) : 1211-1223.
- [24] Kimmel M. Axelrod D.E. (2002). *Branching processes in biology*. Springer.
- [25] Laha A.K. (2021). A Multi-type Branching Process Model for Epidemics with Application to COVID-19 in India. *Strategic Management, Decision Theory, and Decision Science*, pp 51-58, Springer.

-
- [26] Lauer .S.A, Grantz.K.H., Q. Bi, F.K. Jones, Q. Zheng, H.R. Meredith, A.S. Azman, N.G. Reich, J. Lessler. (2020). The incubation period of coronavirus disease 2019 (covid-19) from publicly reported confirmed cases : estimation and application.
- [27] Lehmann E. L. (1959). Testing Statistical Hypotheses. Wiley, New York.
- [28] Méléard S. (2016). Modèles Aléatoires en Ecologie et Evolution. Springer.
- [29] Mode C.J. (1971). Multitype branching processes : theory and applications. volume 34. American Elsevier Pub. Co.
- [30] Nagaev A.V. (1967). On Estimating the Expected Number of Direct Descendants of a Particle in a Branching Process. Theory of Probability and its Applications 12 314-320.
- [31] Neveu J. (1986). Arbres et processus de Galton-Watson. Annales de l'I. H. P.
- [32] Neveu J. (1972). Martingales à temps discret. Masson.
- [33] Pakes A. G. (1975). Non-parametric Estimation in the Galton- Watson Process. Mathematical Biosciences 26 1-18.
- [34] Pakes A.G. (2003). Biological applications of branching processes. Handbook of statistics.
- [35] Potter R.W. (1977). Infernce for the Galton-Watson process, dissertation. Ph.D. The Ohio state University.
- [36] Seneta E. (1970). On the supercritical Galton-Watson process with immigration. Math. Biosci. 7, 9-14.
- [37] Stigler S. M. (1971). The Estimation of the Probability of Extinction and other Parameters associated with Branching Processes. Biometrika 58 499-508.
- [38] Vatutin V.A, Haccou P. Jagers P. (2005). Branching processes : variation, growth, and extinction of populations. Cambridge University Press.
- [39] Watson H.W, Galton F. (1875). On the probability of the extinction of families. The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland.
- [40] X Wu. (2010). Branching processes with biological applications. PhD thesis, Rice University.
- [41] Yaglom B.P. (1947). Certain limit theorems of the theory of branching stochastic process. Doki. Akad. Nauk. SSSR (n. s) 56, 795-798.

- [42] Yanev N.M. (1975). On the statistics of branching processes. *theor. prob. appl.* 20,612-662
- [43] Yule G.U. (1924). A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J.C. Willis. *Philos. R. Soc. London, Ser. B* 213 :21-87.

Résumé

Ce mémoire porte sur le processus de Galton-Watson uni-type et l'inférence statistique sur ces processus. Au premier chapitre nous avons étudié le cas uni-type ou nous avons énoncé les différentes notions, propriétés, définitions et concepts de base de ces processus, puis nous avons présenté ses leurs caractéristiques que nous avons illustré par des exemples.

Au second chapitre, on s'est intéressé à l'inférence statistique sur le processus Galton-Watson. Nous avons étudié des estimateurs de la moyenne, de la variance, et de la probabilité d'extinction.

Enfin, on a terminé le travail par une application au troisième chapitre à un modèle épidémique.

Abstract

This dissertation is about uni-type Galton-Watson processes and statistical inference on these processes. In the first chapter we studied the uni-type case where we stated the different notions, properties, definitions and basic concepts of these processes, then we presented these characteristics that we illustrated with examples. In the second chapter, we focused on the statistical inference of the Galton-Watson process. We studied estimators of the mean, the variance, and the extinction probability.

Finally, we ended the work with an application for an epidemic model in third chapter.