

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOULOUD MAMMARI DE TIZI-OUZOU

FACULTÉ DE GENIE ELECTRIQUE ET DE L' INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT

Spécialité : AUTOMATIQUE

Par :

Ahcène TRIKI

THEME

**SYNTHÈSE DE CORRECTEURS OPTIMAUX POUR
LES SYSTÈMES A PARAMÈTRES DISTRIBUES**

DEVANT LE JURY :

Président	Kamel HAMMOUCHE	<i>Professeur, Université de Tizi-Ouzou</i>
Rapporteur	Ahmed MAIDI	<i>Professeur, Université de Tizi-Ouzou</i>
Examineurs	Abderrazak LACHOURI	<i>Professeur, Université de Skikda</i>
	Ahcène HABBI	<i>Professeur, Université de Boumerdès</i>
	Ahmed CHAIB	<i>MCA, Université de Boumerdès</i>
	Hamid HAMICHE	<i>MCA, Université de Tizi Ouzou</i>

ANNÉE : 2018

A ma défunte grand-mère.

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP), de l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.

Mes vifs remerciements vont tout d'abord au Professeur MAIDI Ahmed, directeur de ma thèse, pour m'avoir dirigé, aidé et conseillé tout le long de notre travail. Outre ses qualités professionnelles, j'ai pu apprécier aussi sa disponibilité et sa simplicité. A son contact, j'ai beaucoup appris de ses compétences et rigueur scientifiques.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur HAMMOUCHE Kamal, Professeur à l'Université de Tizi Ouzou, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

J'exprime également mes sincères remerciements à Monsieur LACHOURI Abderrazak, Professeur à l'Université de Skikda, Monsieur HABBI Ahcène, Professeur à l'Université de Boumerdès, Monsieur CHAIB Ahmed, MCA à l'Université de Boumerdès, et Monsieur HAMICHE Hamid, MCA à l'Université de Tizi-Ouzou, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à ce travail et pour avoir accepté de faire partie du jury de de cette thèse.

je tiens à remercier tous les membres du Laboratoire de Conception et Conduite des Systèmes de Production (L2CSP) pour leur sympathie et l'excellente ambiance de travail qu'ils ont créé.

La réalisation de cette thèse ne saurait être possible sans le soutien de mes proches. Ainsi, c'est avec un grand plaisir et reconnaissance, que je remercie mes parents, ma sœur et mes frères pour leurs présence, encouragements et patience.

Notations et Abréviations

Symboles

a	Constante de temps d'un système du premier ordre
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$	Opérateurs linéaires matriciels
$\mathcal{A}_{ol}, \mathcal{A}_{cl}, \mathcal{B}_{ol}$	Opérateurs linéaires matriciels
$\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{I}$	Opérateurs linéaires matriciels
a_k	Paramètres incertains du dénominateur de la fonctions de transfert G
A_{SBPA}	Amplitude du signal $SBPA$
b	Fonction qui caractérise la structure géométrique de l'actionneur
b_l	Paramètre incertain du numérateur de la fonctions de transfert G
c	Fonction qui caractérise la structure géométrique du capteur
C et G_c	Fonction de transfert du correcteur
c_p	Capacité calorifique
D	Ensemble des valeurs admissibles des variables de décision (d'optimisation)
d	Fonction qui caractérise la distribution de la commande
D_{SBPA}	Durée totale du signal $SBPA$
e, e_{rt}	Erreur de poursuite
E, E_{rt}	Fonction de transfert de l'erreur de poursuite
F	Fonction de transfert du filtre des bruits de mesure
f_{ob}	Fonction objectif
G	Fonction de transfert du système à commander
g_j	Contraintes du type inégalités

g^r	Contraintes de robustesse
g^s	Contraintes de stabilité
g	Contraintes du problème d'optimisation min-max
h_i	Contraintes du type égalité
h	Coefficient de transfert de chaleur
$H_0^2(0, 1)$	Espace de Soborov d'ordre 2
J	Critère de performance
K_c, T_i, T_d	Paramètres du correcteur <i>PID</i>
K_p, K_I	Paramètres du correcteur <i>PI</i>
L	Longueur de la tige
$L^2(0, L)$	Espace de Hilbert des fonctions carrées intégrables
N_c	Nombre de cellules du registre à décalage
N_δ	Nombre des échantillons d'incertitudes
n_{θ_g}	Nombre d'éléments de θ_g (nombre de paramètres de la fonction de transfert G)
n_g	Nombre de fonctions de contraintes du type inégalité (g_i)
n_h	Nombre de fonctions de contraintes du type égalité (h_i)
N_i	Nombre d'individus de la population initiale
N_{i1}	Nombre d'individus sélectionnés pour la reproduction
n_k	Nombre de points de la réponse mesurée (y_{mes})
np	Nombre des paramètres du dénominateur
n_r	Nombre de valeurs aléatoires
nw	Nombre de variables de décision
nz	Nombre des paramètres du numérateur
p	Paramètres de la fonction de transfert G_c
P_c	Probabilité de croisement
P_m	Probabilité de mutation
P_r	Probabilité de reproduction
Q_i	Qualité de l'individu i
Q''	Flux de chaleur manipulé (commande)

r	valeur aléatoire
S	Opérateur semi-groupe
\mathcal{T}	Domaine Temporel
T	Température de la tige
t	Variable temps
T_0	Profil de température spatiale à $t = 0$
T_e	période d'échantillonnage
T_{env}	Température de l'environnement ambiant
T_f	Température de fusion du métal de la tige
t_{im}	Durée maximale d'une impulsion
T_M	Temps de montée
T_{SBPA}	Période d'horloge du signal <i>SBPA</i>
u	Signal de commande
w	Variable de décision (d'optimisation)
x	Variable d'état
y	Sortie commandée
y^d	Sortie désirée (consigne)
y_{est}	Réponse estimée
y_{mes}	Réponse mesurée
z	Variable espace

Lettres grecs

Δ	Ensemble des incertitudes
δ	vecteur des paramètres incertains
$\delta^{(i)}$	Échantillon du vecteur des paramètres incertains
η	Probabilité de satisfaction des contraintes (paramètres de confiance)
γ	Constante de temps désirée en boucle fermée
κ	Gain du système du premier ordre

λ	Conductivité thermique
Ω	Domaine spatial borné
$\partial\Omega$	Frontière du domaine spatiale
ϕ, Ψ	Opérateur semi-groupe
ρ	Masse volumique
σ	Indice caractéristique
θ	Vecteur des paramètres de la fonction de transfert C
θ_g	Vecteur des paramètres de la fonction de transfert G
ε	Probabilité de violation des contraintes (paramètres de risque)
ϑ	Entrée de référence externe

Abréviations

AG	Algorithme génétique
EDO	Équation aux dérivées ordinaires
EDP	Équation aux dérivées partielles
IAE	Intégral de la valeur absolue de l'erreur de poursuite
ICE	Intégrale du carré de l'erreur de poursuite
ITAE	Intégral de la valeur absolue de l'erreur de poursuite pondérée par le temps
PI	Correcteur proportionnel intégral
PID	Correcteur Proportionnel Intégral Dérivé
SBPA	Séquence Binaire Pseudo Aléatoire
SPD	Système à Paramètres Distribués
SPL	Système à Paramètres Localisés

Table des matières

Introduction générale	1
1 Généralités sur les systèmes à paramètres distribués	7
1.1 Introduction	7
1.2 Systèmes à paramètres distribués	8
1.2.1 Représentation mathématique des systèmes à paramètres distribués	8
1.2.2 Classifications des systèmes représentés par des EDPs linéaires du second ordre	11
1.2.3 Exemple d'un système à paramètres distribués modélisé par des EDPs	12
1.2.4 Commande des systèmes à paramètres distribués	13
1.2.5 Méthode des lignes	16
1.3 Notions sur la théorie des semi-groupes	18
1.3.1 Semi-groupe fortement continu	18
1.3.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu	18
1.3.3 Équation d'état abstraite d'un système à paramètres distribué linéaire	19
1.3.4 Semi-groupe exponentiellement stable	19
1.3.5 Stabilité exponentielle d'un système à paramètres distribués en boucle fermée	19
1.4 Conclusion	20
2 Optimisation robuste par l'approche des scénarios	23
2.1 Introduction	23
2.2 L'optimisation mathématique	24

2.2.1	Classification des problèmes d'optimisation	26
2.2.2	Méthodes de résolution d'un problème d'optimisation	27
2.3	Algorithmes génétiques	28
2.3.1	Principe de Recherche de la solution dans les AGs	28
2.3.2	Convergence d'un AG	33
2.3.3	Association des AG avec des méthodes d'optimisation locales	33
2.4	Notions de complexité algorithmique d'un problème	33
2.4.1	Problème de la classe P	34
2.4.2	Problème de la classe NP	35
2.4.2.1	Problème de la classe NP-Complet	35
2.4.2.2	Problème de la classe NP-Difficile	35
2.5	Optimisation robuste	35
2.5.1	Formulation mathématique d'un problème d'optimisation robuste	36
2.5.2	Approche des scénarios	37
2.6	Génération des nombres aléatoires	39
2.6.1	Propriétés des nombres aléatoires	40
2.6.2	Générateur de nombres pseudo-aléatoires	40
2.6.3	Générateur des congruences linéaires	41
2.6.4	Critères de Knuth	41
2.7	Conclusion	42
3	Commande PI basée sur l'approche de pré-approximation de la température d'une tige métallique	43
3.1	Introduction	43
3.2	Position du problème de commande	44
3.3	Modélisation du système à commander	45
3.3.1	Méthode du modèle	46
3.3.2	Choix du signal d'excitation	47
3.3.3	Mise en œuvre de l'identification par la méthode du modèle	49
3.4	Commande PI de la température de la tige	52

3.5	Simulation du correcteur PI	54
3.6	Implémentation du correcteur PI	57
3.7	Conclusion	60
4	synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes à paramètres localisés linéaires par l'approche des scénarios	61
4.1	Introduction	61
4.2	Position du problème de commande	63
4.3	Synthèse d'un correcteur robuste par l'approche des scénarios	64
4.3.1	Formulation du problème de commande sous forme de problème d'optimisation min-max	65
4.3.2	Formulation du problème d'optimisation min-max sous forme de problème d'optimisation semi-infini	65
4.3.3	Formulation du problème d'optimisation semi-infini sous forme d'un problème d'optimisation standard	66
4.3.4	Résolution du problème d'optimisation standard	66
4.4	Critères de performance basés sur l'intégrale de l'erreur de poursuite	67
4.5	Calcul de l'ICE par la méthode d'Aström	68
4.6	Applications de la méthode de synthèse de correcteurs robustes basée sur l'approche des scénarios	70
4.6.1	Synthèse d'un correcteur PI robuste pour un système de premier ordre incertain	71
4.6.2	Synthèse d'un correcteur PID robuste pour un système du second ordre incertain	75
4.7	Conclusion	78
5	Commande robuste d'un système à paramètres distribués	79
5.1	Introduction	79
5.2	Formulation du problème de commande robuste	80
5.3	Stratégie de commande proposée	83

5.3.1 Synthèse du retour d'état	84
5.3.2 Synthèse du correcteur robuste	89
5.4 Application numérique	91
5.5 Conclusion	97
Conclusion générale	98

Table des figures

1.1	Tige mono-dimensionnelle chauffée par la frontière.	12
1.2	Approches de commande d'un SPD.	16
2.1	Organigramme d'un AG	29
2.2	Exemples de codage binaire et de codage réel des individus.	29
2.3	Représentation des individus sur des secteurs d'une roue de loterie.	31
2.4	Exemple de croisement simple.	32
2.5	Mutation du troisième gène d'un chromosome de 6 bits.	32
3.1	Système de commande de chauffage de la tige métallique	45
3.2	Principe de la méthode du modèle.	46
3.3	Générateur d'une SBPA à 3 cellules.	47
3.4	Réponse du système de chauffage pour une entrée de type échelon de 12 V.	49
3.5	Diagramme temporel de la séquence binaire pseudo aléatoire.	49
3.6	Réponse du système de chauffage au signal d'excitation SBPA.	50
3.7	Réponse du système de chauffage au signal d'excitation SBPA avant et après filtrage.	51
3.8	Algorithme d'identification du modèle du système de chauffage de la tige.	53
3.9	Sortie mesurée (en bleu) et sortie estimée par le modèle 3.6(en rouge).	53
3.10	Évaluation des performance du PI en régime de poursuite.	55
3.11	Évaluation des performance du PI en régime de rejet de perturbation.	55
3.12	Tension de commande en régime de poursuite.	56
3.13	Tension de commande en régime de rejet de perturbation.	56

3.14	Évolution de la sortie corrigée.	57
3.15	Tension de commande de la température de la tige.	58
3.16	Programme Matlab Simulink d'implémentation du correcteur PI.	58
4.1	Boucle d'asservissement d'un système linéaire monovisible incertain	63
4.2	Algorithme de calcul des éléments des tableaux du numérateur et du dénominateur.	69
4.3	Les N_δ échantillons de l'incertitude $b^{(i)}$	73
4.4	Les N_δ échantillons de l'incertitude $a^{(i)}$	73
4.5	Valeur minimale du critère optimisé ω^* et les valeurs du critère de performance J obtenus pour les N_δ échantillons des incertitudes considérés, et les paramètres K_c^* et T_i^* calculés.	74
4.6	Évolution de la sortie $y(t)$ pour certaines incertitudes générées aléatoirement.	74
4.7	Valeurs de la contrainte J et du critère minimisé ω^* obtenus pour les échantillons des incertitudes considérés et les paramètres du PID obtenus.	77
4.8	Évolution de la sortie $y(t)$ pour quelques incertitudes générées aléatoirement.	77
5.1	Tige chauffée avec un flux de chaleur $Q''(t)$	81
5.2	Boucle de commande par retour d'état.	85
5.3	Schéma bloc de la stratégie de commande proposée (lignes pointillées indiquent l'équivalence).	89
5.4	Évolution de la sortie commandée. La ligne discontinue représente l'entrée de référence ϑ , la ligne continue noire représente la sortie commandée $\theta_m(\tau)$ obtenue pour $\beta = \beta_n$ et les lignes continues bleues représentent les sorties commandées $\theta_m(\tau)$ obtenues pour $\beta \neq \beta_n$	92
5.5	Évolutions des paramètres a et κ en fonction de β	93
5.6	Valeurs du critère de performance J et de w^* en fonction des incertitudes a et κ	95

5.7	Performance de la stratégie de commande robuste proposée. La première courbe représente la sortie contrôlée $\theta_m^d(\tau)$ et la deuxième courbe représente le flux de chaleur manipulé $q''(\tau)$ pour différentes incertitudes du paramètre β	96
-----	--	----

Liste des tableaux

4.1	Tableau du dénominateur.	69
4.2	Tableau du numérateur.	70
4.3	Expression de l'ICE pour différentes fonctions de transfert de l'erreur de poursuite.	70

Introduction générale

Pour de nombreux systèmes physiques, les évolutions des variables caractéristiques (états, entrées et sorties) sont exprimées par des fonctions qui dépendent de la variable temps et des variables de l'espace géométrique qui correspond généralement à une position définie dans un espace monodimensionnel ou multidimensionnel [1]. Par conséquent, l'espace d'état de ces systèmes est de dimension infinie [2]. Ces systèmes sont dits systèmes à paramètres distribués (SPD) en opposition aux systèmes à paramètres localisés (SPL) dont les variables caractéristiques ne dépendent pas des variables de l'espace géométrique mais dépendent uniquement de la seule variable temps.

Sur le plan mathématique, les systèmes à paramètres distribués, appelés également systèmes à paramètres répartis ou systèmes de dimension infinie, sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDPs), intégrales ou integro-différentielles [3]. Ces équations peuvent être linéaires ou non linéaires et à coefficients constants ou variables [4].

Les SPDs sont présents dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur. Comme exemples, on peut citer la biologie, la thermique, la chimie, l'électromagnétique, la mécanique des fluides et le génie des procédés. En général, tout système caractérisé par des phénomènes de transfert de la matière et de réaction fait partie de cette classe de systèmes [5].

La commande des systèmes à paramètres distribués représente un domaine de recherche très actif et occupe une place importante en théorie des systèmes [6] [7]. Au cours des dernières décennies, avec l'évolution de l'informatique et des mathématiques appliquées, ce domaine a connu un essor avec la publication de plusieurs résultats liés aux différents aspects qui concernent essentiellement la modélisation, l'analyse des propriétés

fondamentales (commandabilité, observabilité et stabilité), l'estimation, la synthèse de contrôleurs et la simulation numérique ; avec des applications aux robots flexibles [8], aux bioréacteurs [9], aux structures flexibles [10], aux réseaux de transport [11].

Les différentes techniques de commande des systèmes à paramètres distribués peuvent être scindées en deux approches principales : approches de pré-approximation et approches de post-approximation [12].

Les techniques de l'approche de pré-approximation sont basées sur la détermination préalable d'un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires (EDO) du SPD à commander. Dans ce cas, la commande d'un SPD est réduite à la commande d'un SPL, pour lequel, une panoplie de techniques d'analyse et de synthèse, bien maîtrisées par la communauté des automaticiens, existent dans la littérature.

Dans le cas où les EDPs sont complètement connues, la détermination du modèle EDO est réalisée en utilisant des techniques d'approximation des EDPs par des EDOs [13]. Ces techniques sont scindées en deux classes. La première classe regroupe des méthodes d'approximation des équations (différences finies, volumes finies et éléments finis). Elles sont, en général, basées sur la discrétisation des EDPs. La seconde classe est celle des méthodes d'approximation des solutions (méthode de collocation orthogonale et méthode de fonctions propres). Lorsque les EDPs ne sont pas complètement connues, le modèle EDO est obtenue par des techniques d'identification (modélisation expérimentale) basées sur l'exploitation des mesures collectées aux différentes positions du domaine spatial du SPD.

L'approche de pré-approximation présente l'avantage d'être simple à appliquer et permet de tirer profit de la théorie des systèmes à paramètres localisés qui est très développée. Néanmoins, elle présente des inconvénients voire des limitations qui empêchent son application pour certains systèmes comme les systèmes hyperboliques [14]. En effet, par l'approximation des EDPs ou de leurs solutions, des conclusions erronées peuvent être tirées concernant les propriétés fondamentales du système et souvent la réduction du modèle masque la nature distribuée du système original [12] [15]. De plus, la synthèse conduit en général à des correcteurs de dimension très grande ce qui représente une contrainte

pour l'implémentation pratique.

Pour les techniques de l'approche de post-approximation, les étapes d'analyse et de synthèse sont accomplies directement en utilisant le modèle EDP sans aucune approximation ou réduction [12] [14]. Cette approche permet de préserver la nature du système original et conduit souvent à des correcteurs avec des performances remarquables [14]. Notons que l'approximation est réalisée uniquement pour l'implémentation pratique du correcteur.

Pour les systèmes linéaires, l'utilisation de la forme abstraite permet de généraliser la théorie des systèmes de dimension finie (systèmes à paramètres localisés) aux systèmes à paramètres distribués en utilisant la théorie des semi-groupes [16]. Pour les systèmes non linéaires peu de résultats sont disponibles et généralement l'étude se fait par cas [6].

L'utilisation de l'approche de post-approximation permet d'améliorer davantage les performances du système en boucle fermée [14]. Néanmoins, il est toujours intéressant de concevoir des commandes par optimisation d'un certain critère permettant de quantifier l'apport du correcteur sur le plan performances [17], [18], [19], [20], [21], [22]. La synthèse des correcteurs optimaux pour les systèmes à paramètres distribués constitue un axe de recherche très actif [23], [24], [25]. La puissance des calculateurs numériques et l'existence de puissants algorithmes d'optimisation ont incité des chercheurs à développer des méthodes de synthèse de correcteurs optimaux pour les systèmes de dimension infinie. Dans le domaine temporel, la synthèse consiste, en général, à résoudre un problème de commande optimale [18] [26] [27]. Par contre dans le domaine fréquentiel peu de résultats sont disponibles et la plupart sont développés sur la base de modèles approximatifs vu la nature des fonctions de transfert des systèmes à paramètres distribués [28] [16]. En effet, les fonctions de transfert de ces systèmes prennent des formes inexploitablement par les outils de l'automatique linéaire bien connus et maîtrisés par les automaticiens.

L'objectif de la thèse consiste à proposer des techniques de synthèse de correcteurs optimaux pour les systèmes à paramètres distribués en utilisant les deux approches de pré-approximation et de post-approximation, avec des applications à un système thermique.

Le reste de la thèse est organisé comme suit :

Le chapitre 1 présente des généralités sur les systèmes à paramètres distribués. La première partie est consacrée à des généralités sur la représentation mathématique générale des systèmes à paramètres distribués, la classification des systèmes à paramètres distribués modélisés par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, et les approches de commande des systèmes à paramètres distribués. Dans la seconde partie, des notions relatives à la théorie des semi-groupes sont présentées. Cette dernière représente un outil mathématique très puissant utilisé pour l'analyse et la synthèse des systèmes à paramètres distribués linéaires. Ainsi, après la définition d'un semi-groupe fortement continu et son générateur, nous présentons la forme abstraite d'un système à paramètres distribués. Puis, nous terminons par la définition de la stabilité exponentielle d'un semi-groupe.

Le chapitre 2 est dédié à l'optimisation robuste par l'approche des scénarios. On commence le chapitre par la présentation de notions générales sur l'optimisation mathématique des fonctions. Puis, on présente les différentes classes de méthodes d'optimisation tout en mettant l'accent sur les algorithmes génétiques qui sont utilisés dans le cadre de cette thèse. Ensuite, on s'intéresse à la classification des problèmes selon leur complexité algorithmique. La suite du chapitre aborde l'optimisation robuste, c'est-à-dire l'optimisation en présence des incertitudes. Ainsi, après la formulation du problème d'optimisation robuste sous forme d'un problème min-max, on présente l'approche des scénarios qui permet de relaxer ce type de problème d'optimisation et de simplifier sa résolution. A la fin du chapitre, on s'intéresse à la génération des nombres aléatoires qui joue un rôle clef dans l'étape de relaxation.

Le chapitre 3 est consacré à l'application de l'approche de pré-approximation pour synthétiser un correcteur PI pour contrôler la température dans une tige métallique monodimensionnelle. Après avoir décrit le système de commande de la température de la tige, on détermine par identification le modèle mathématique du procédé à commander. Ensuite, le problème de conception d'un correcteur PI est formulé sous forme d'un problème d'optimisation puis résolu par la méthode des algorithmes génétiques. Le problème d'optimisation formulé consiste à minimiser le critère de

l'Intégrale du Carré de l'Erreur de poursuite (ICE) par rapport aux paramètres du correcteur définis comme variables de décision. A la fin du chapitre, les performances du correcteur synthétisé sont évaluées numériquement (simulation) et expérimentalement (implémentation pratique).

Le chapitre 4 présente une méthode développée dans le cadre de cette thèse à base de l'optimisation par l'approche des scénarios pour la synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes de dimension finie linéaires incertains. En premier lieu, le problème de synthèse d'un correcteur pour un système linéaires à paramètres localisés incertains est formulé sous forme d'un problème d'optimisation robuste sous contraintes. Le critère à optimiser correspond à un critère de performance explicite en fonction des paramètres incertains du système à corriger et des paramètres du correcteur définis comme étant les variables de décision. Les contraintes du problème d'optimisation représentent des conditions à assurer pour garantir la réalisabilité, la stabilité ainsi que certaines performance de la boucle de commande. En deuxième lieu ce problème d'optimisation robuste est résolu par l'utilisation de l'approche des scénarios. En dernier lieu, afin de démontrer les performances de la méthode développée, des exemples d'application en considérant des systèmes du premier et de second ordre sont présentés. Les performances des correcteurs obtenus sont évaluées par simulation.

Le chapitre 5 propose une stratégie de commande robuste pour un système thermique modélisé par une équation aux dérivées partielles dont les paramètres sont incertains. Le problème de commande correspond à la commande de température d'une tige métallique dont le rayon ainsi que les valeurs de certains paramètres physiques sont incertains mais supposés bornés. L'objectif de la commande consiste à imposer une référence désirée pour la sortie définie comme étant la moyenne spatiale de la température. La synthèse de la stratégie de commande proposée passe par deux étapes. En première étape, le concept de l'indice caractéristique est utilisé pour calculer un retour d'état permettant d'obtenir en boucle fermée un système de dimension finie exponentiellement stable. En seconde étape, pour faire face aux incertitudes

paramétriques, la référence du retour d'état est générée par un correcteur robuste synthétisé par l'utilisation de la méthode présentée au chapitre 4.

La thèse se termine par une conclusion générale et des perspectives envisagées.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes à paramètres distribués

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation de certaines notions théoriques utilisées tout au long de cette thèse. En première partie, ces notions portent sur des généralités sur les systèmes à paramètres distribués et en seconde partie elles portent sur certains résultats de la théorie des semi-groupes adaptés à l'étude des systèmes à paramètres distribués linéaires.

L'ensemble des généralités concernant cette classe de systèmes, présentés en section 1.2, sont axés essentiellement sur la définition, la représentation mathématique, la classification, la commande et l'approximation des systèmes à paramètres distribués. Dans la section 1.3, certains éléments de la théorie des semi-groupes sont présentés. Tout d'abord, les définitions d'un semi-groupe fortement continu et son générateur sont données. Puis, la forme abstraite d'un système à paramètres distribués est présentée. Enfin, la stabilité exponentielle d'un semi-groupe est définie.

1.2 Systèmes à paramètres distribués

Pour de nombreux systèmes physiques les variables caractéristiques sont non uniformes et non homogènes par rapport à l'espace géométrique. Par conséquent, les évolutions de ces variables sont souvent exprimées en fonction de la variable temps et des variables de l'espace géométrique qui correspondent généralement à une position définie dans un espace monodimensionnel ou multidimensionnel [1]. Ces systèmes sont dits systèmes à paramètres distribués, systèmes à paramètres répartis ou bien systèmes de dimension infinis (espace d'état infini).

Sur le plan mathématique la dynamique de tels systèmes est modélisée par des équations aux dérivées partielles, ou par des équations intégrales ou intégréo-différentielles [3]. Ces équations peuvent être linéaires ou non linéaires et à coefficients constants ou variables [4].

Les SPDs concernent une grande partie des applications relatives notamment aux domaines de la thermique, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, le génie des procédés, la chimie et la biologie [5].

1.2.1 Représentation mathématique des systèmes à paramètres distribués

Pour de nombreux cas des SPDs étudiés en littérature les variables caractéristiques des SPDs dépendent de deux variables indépendantes, à savoir, la variable temps désignée par t et définie sur un domaine temporel $\mathcal{T} = [0, +\infty[$, et la variable de l'espace géométrique désignée par z et définie sur un domaine spatial borné $\Omega = [0, L]$. La modélisation mathématique de ces systèmes conduit à un ensemble d'équations aux dérivées partielles (modèle EDP) comprenant :

- Une équation d'état (équations d'évolution) définie sur $\Omega \times \mathcal{T}$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mathcal{A}(x(z, t)) + \mathcal{B}(u(z, t)) \quad (1.1)$$

- Une équation de sortie définis sur $\Omega \times \mathcal{T}$

$$y(z, t) = \mathcal{C}(x(z, t)) \quad (1.2)$$

- Des équations des conditions à la frontière $\partial\Omega \subset \Omega$ (conditions aux limites) définies sur $\partial\Omega \times \mathcal{T}$:

$$\mathcal{L}(x(z', t)) = u(z', t) \quad (1.3)$$

- Des équations des conditions initiales (pour $t = 0$) définies sur Ω :

$$\mathcal{M}(x(z, 0)) = 0 \quad (1.4)$$

Où :

- ▷ $x(z, t)$, $u(z, t)$ et $y(z, t)$ représentent respectivement les variables d'état, de la commande et de la sortie du SPD et sont représentées par des fonctions vectorielles de dimension $1 \times n$, $1 \times m$, et $1 \times r$,
- ▷ $\mathcal{A}(\cdot)$, $\mathcal{B}(\cdot)$, $\mathcal{C}(\cdot)$, $\mathcal{L}(\cdot)$, et $\mathcal{M}(\cdot)$ sont des opérateurs matriciels différentiels spatiales, supposés bornés, ne comportant que des dérivées par rapport à z [5],
- ▷ z' est la variable spatiale qui désigne les points de l'espace Ω appartenant à la frontière $\partial\Omega$.

$\mathcal{A}(\cdot)$, $\mathcal{B}(\cdot)$ et $\mathcal{C}(\cdot)$ sont appelés respectivement opérateur d'état, opérateur de commande et opérateur de sortie. L'état $x(z, t)$ appartient à un espace d'état défini comme espace de Hilbert séparable qu'on désigne par $\mathcal{H}(\cdot)$ [29]. Le choix de l'espace de Hilbert \mathcal{H} dans le cas linéaire est lié à l'ordre le plus élevé des dérivées [30].

Les matrices $\mathcal{B}(\cdot)$ et $\mathcal{C}(\cdot)$ caractérisent respectivement la nature des commandes appliquées au système et les objectifs de la commande désirés.

Dans les équations des conditions aux frontières, lorsque c'est la valeur de $x(z', t)$ qui est imposée, on parle de condition aux frontières de Dirichlet et lorsque c'est la valeur de $\partial x(z', t)/\partial z$ qui est imposée alors, on parle de condition aux frontières de Neumann. Par contre, on parle de condition aux frontières mixte lorsque on impose au même temps la valeur de $x(z', t)$ et la valeur de $\partial x(z', t)/\partial z$.

Si dans une condition aux limites on a $u(z', t) \neq 0$ ($z' \in \partial\Omega$) (commande est appliquée à la frontière) alors les conditions aux limites sont non homogènes. Dans ce cas, afin de conserver la linéarité du problème, il faut transformer le système d'état avec conditions aux limites non homogènes à un système d'état avec conditions homogènes [4].

La nature des commandes et des observations est définie respectivement, suivant la nature des points d'application des commande $u(z, t)$ et des points d'observations des sorties $y(z, t)$ [2].

Pour les commandes, on distingue :

Commande distribuée : la commande est appliquée sur tous les points du domaine Ω ,

$$u(z, t) = b(z) u_d(t) \quad (1.5)$$

Où $b(z)$ caractérise la structure géométrique de l'actionneur, et $u_d(t)$ est le signal d'entrée.

Commande distribuées par zones : les points d'application de la commande sont définis dans des portions (zones) Ω_i du domaine Ω ,

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p b_i(z) u_{d_i}(t) \quad (1.6)$$

Où $b_i(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'actionneurs de la zone i , et $u_{d_i}(t)$ est le signal de commande de la zone i .

Commande ponctuelle : c'est une commande par zone dont chacune des zones est définie par un seul point,

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^p u_{d_i}(z) \delta(z - z_i) \quad (1.7)$$

$z_i (i = 1, 2, \dots, p)$, sont les points d'application de la commande.

Commande aux frontières : commande ponctuelle ou distribuées par zones dont les points ou zones d'application de la commande appartient à la frontière $\partial\Omega$.

Commande par balayage : commande ponctuelle ou distribuée par zones dont les points d'application de la commande sont mobiles dans le domaine Ω .

Pour les observations, on distingue :

Observation distribuée : l'observation (sortie) $y(z, t)$ est définie pour tous les points z du domaine Ω ou d'un sous ensemble de Ω ,

$$y(z, t) = c(z) x(z, t) \quad (1.8)$$

$c(z)$ caractérise la structure géométrique du système d'observation (capteur).

Observation ponctuelle : l'observation est réalisée en certains points z_i du domaine Ω .

Observation aux frontières : l'observation est définie pour des points de la frontière $\partial\Omega$.

Observation par balayage : les points d'observation sont mobiles dans Ω .

Observation par moyennage spatial : l'observation (sortie) est définie par

$$y(t) = \int_{\Omega} c(z) x(z, t) dz \quad (1.9)$$

1.2.2 Classifications des systèmes représentés par des EDPs linéaires du second ordre

Une EDP définie pour une fonction x de plusieurs variables indépendantes (z, t) est une équation qui lie les variables indépendantes (z, t) , la fonction x et un nombre fini de dérivées partielles de x [31].

$$\mathcal{F}(z, t, \dots, x, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \dots) = 0 \quad (1.10)$$

Une fonction x^* est solution de l'EDP (1.10) si, après substitution, de x par x^* l'égalité est satisfaite pour tous les t et z appartenant au domaine de l'espace des variables indépendantes.

L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP. Si x et ses dérivées partielles apparaissent séparément et à la puissance 1 dans l'EDP (1.10), cette dernière est dite linéaire.

Considérons un système à paramètres distribués représentés par une EDP linéaire du second ordre définie par :

$$\mathbf{a} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z^2} + 2\mathbf{b} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial z \partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial^2 x(z, t)}{\partial t^2} + [\dots] = 0 \quad (1.11)$$

Le terme entre crochets ([...]) dépend de x, z, t et des dérivées premières de x .

Dans le cas où les paramètres \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} ne sont pas tous nulles, le système à paramètres distribués considéré est du type :

- hyperbolique si $\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac} > 0$,
- elliptique si $\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac} < 0$,
- parabolique si $\mathbf{b}^2 - \mathbf{ac} = 0$

Par contre, si les trois coefficients \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} sont nulles alors le système à paramètres distribués est du type hyperbolique [2].

Dans le cas général, les systèmes elliptiques modélisent des phénomènes stationnaires (indépendants du temps), en revanche les systèmes hyperboliques et paraboliques modélisent des phénomènes d'évolution (dynamiques) [32]. Par conséquent, en théorie de la commande des processus, les systèmes de types elliptiques ne sont pas traités parce que cette théorie s'intéresse à des phénomènes dynamiques [12].

1.2.3 Exemple d'un système à paramètres distribués modélisé par des EDPs

On considère une tige mono-dimensionnelle de longueur L , chauffée à son extrémité $z = L$ par un flux de chaleur $u(t)$ et isolée à l'autre extrémité $z = 0$ (figure 1.1).

Ce problème de commande est modélisé par les équations suivantes

$$C_p \rho \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad \text{avec } t > 0 \quad \text{et } 0 < z < L \quad (1.12)$$

$$T(z,0) = 0 \quad \text{avec } 0 < z < L \quad (1.13)$$

$$T(0,t) = 0 \quad \text{avec } t > 0 \quad (1.14)$$

$$T(L,t) = u(t) \quad \text{avec } t > 0 \quad (1.15)$$

$$y(t) = T(z_0, t) \quad \text{avec } z_0 = 0.2L \quad (1.16)$$

Où $T(z,t)$ est la température à l'instant t et à la position z de la tige. λ , ρ et C_p sont la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique de la tige.



FIGURE 1.1: Tige mono-dimensionnelle chauffée par la frontière.

L'équation (1.12) est l'équation d'évolution obtenue en appliquant le principe de conservation d'énergie dans la tige [28].

L'équation (1.13) est l'équation des conditions initiales. Elle indique qu'initialement (à $t = 0$) la température de tous les points de la tige est nulle.

Les équations (1.14) et (1.15) sont les équations des conditions aux limites. Elles indiquent respectivement, qu'à l'extrémité $z = 0$, la tige est isolée et l'extrémité $z = L$ est chauffée par le flux de chaleur $u(t)$.

L'équation (1.16) est l'équation de sortie commandée (température de la tige à commander).

Dans ce problème de commande, le SPD est parabolique, l'observation est ponctuelle, la commande est appliquée à la frontière et les conditions aux limites sont de type Dirichlet.

1.2.4 Commande des systèmes à paramètres distribués

La commande des systèmes à paramètres distribués représente un domaine de recherche important en théorie de la commande des systèmes [6] [7]. Au cours des dernières décennies, ce domaine a connu une croissance explosive par la publication de plusieurs documents (articles, livres, ...) traitant différents aspects de la commande de cette classe de systèmes. Ces aspects concernent essentiellement la modélisation, l'analyse, l'estimation, la synthèse de contrôleurs et la simulation numérique [2]. Ces documents sont principalement consacrés à des applications liées à la commande des robots flexibles [8], bioréacteurs [9], structure flexibles [10], vibrations des systèmes [33], réseau de transport [11]. L'article [7] présente une synthèse sur les différentes contributions concernant la commande des SPDs présentées en littérature.

Les différentes techniques de commande dédiées aux systèmes à paramètres distribués peuvent être scindées en deux approches principales : approche de pré-approximation et approche de post-approximation [12].

Approche de pré-approximation Les techniques de cette approche sont basées sur la détermination préalable d'un modèle à équations différentielles ordinaires (EDOs)

approximant le modèle à équations aux dérivés partielles du SPD à commander. De ce faite, la commande d'un SPD revient à la commande un SPL, pour lequel, il existe une panoplie de techniques bien maîtrisées par la communauté des automaticiens.

Pour les SPD dont les EDPs sont complètement connues, la détermination de ce modèle à EDO peut se faire par l'utilisation de l'une des techniques d'approximation des EDPs par des EDOs [13]. Ces techniques sont classées en deux classes. La première classe est celle des méthodes d'approximation de l'équation. Elles sont basées sur la discrétisation des EDPs. Les méthodes de cette classe les plus utilisées sont la méthode des différences finies, la méthode des lignes et la méthode des volumes finis [4],[34]. La seconde classe est celle des méthodes d'approximation de la solution. La méthode des éléments finis, la méthode des fonctions propres, la méthode de Ritz et la méthode des résidus pondérés font partie de cette classe [4]. Ces méthodes supposent que les solutions des EDPs sont séparables c'est à dire qu'on peut les écrire sous la forme :

$$x_i(z, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij}(t) \phi_{ij}(z), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.17)$$

Où $a_{ij}(t)$ sont des inconnus à déterminer et les fonctions $\phi_{ij}(z)$ appelées fonctions tests à déterminer selon la nature des EDPs.

Pour les SPD dont les EDPs ne sont pas complètement connues (les structures des EDP et/ou les valeurs de tous leurs paramètres ne sont pas connues), l'obtention du modèle EDO se fait par l'utilisation de techniques d'identification basées sur l'exploitation de mesures expérimentales qui doivent être prise (réalisées) en plusieurs points du SPD à commander. Cependant, en pratique, on peut utiliser qu'un nombre réduit de capteur pour effectuer ces mesures expérimentales. Ce qui conduit à des modèles EDO qui ne sont pas précis. Comme méthodes utilisées pour la détermination d'un modèle EDO pour un SPD inconnu, on peut citer la méthode de collocation orthogonale propre (COP) [35] et la méthode Krylov [36].

Pour les deux cas des SPDs précédents, le modèle ODE à obtenir est souvent d'une dimension très élevée, et pour synthétiser le contrôleur, à partir de ce modèle, deux approches sont possibles. La première consiste à utiliser directement le modèle ODE de dimension très élevée pour calculer un contrôleur. Ce dernier sera automatiquement de

très grand ordre, donc difficile voire impossible à implémenter pratiquement, du faite de l'espace mémoire et du temps de calcul nécessaire. Ensuite d'appliquer des techniques de réduction de correcteur pour obtenir un régulateur réduit. La seconde approche consiste à réduire le modèle ODE en un modèle d'ordre acceptable (réduit) par l'utilisation de méthode de réduction de modèle [37] [36]. Puis, d'utiliser le modèle réduit obtenu pour calculer un contrôleur de dimension réduite.

L'approximation du modèle originale d'un SPD (modèle EDP) ne préserve pas les propriétés fondamentales du SPD telles que la commandabilité, l'observabilité et la stabilité.

Notons que la stratégie de pré approximation est plus indiquée pour les systèmes paraboliques mais déconseillée pour les systèmes hyperboliques [5].

Approches de post-approximation Les méthodes de post-approximation sont basées sur l'utilisation directe du modèle EDP sans aucune approximation préalable. En effet, pour ces méthodes le contrôleur est calculé directement à partir des EDPs du SPD. Ce n'est qu'à la dernière étape, après que la synthèse du contrôleur est réalisée, qu'une approximation est pratiquée sur le contrôleur synthétisé pour obtenir un contrôleur d'ordre réduit plus pratique à implémenter que le contrôleur synthétisé initialement qui est de dimension infinie. Pour les méthodes de post approximation deux approches sont très répondues, la première est celle qui consiste à définir les EDPs du SPD dans des espaces fonctionnels [5]. Des notions d'analyse fonctionnel sont ainsi utilisées pour aborder des questions d'analyse et de synthèse de commande. Pour les SPD linéaires, plusieurs résultats basés sur la théorie des semi-groupes sont développés pour les questions de commandabilité, de l'observabilité, et de la stabilité [38], [16].

La deuxième approche est basée sur l'exploitation de la fonction de transfert d'un SPD. Il faut noter que pour les SPDs les fonctions de transfert ne sont plus des rapports de polynômes par rapport à la variable de Laplace s , mais des rapports de fonctions non linéaires en s . Cependant, elles peuvent être approchées par des séries de fonctions de transfert de polynomes lineaires [28].

Le schéma de la figure (1.2.4), résume les différentes approches de commande d'un SPD.

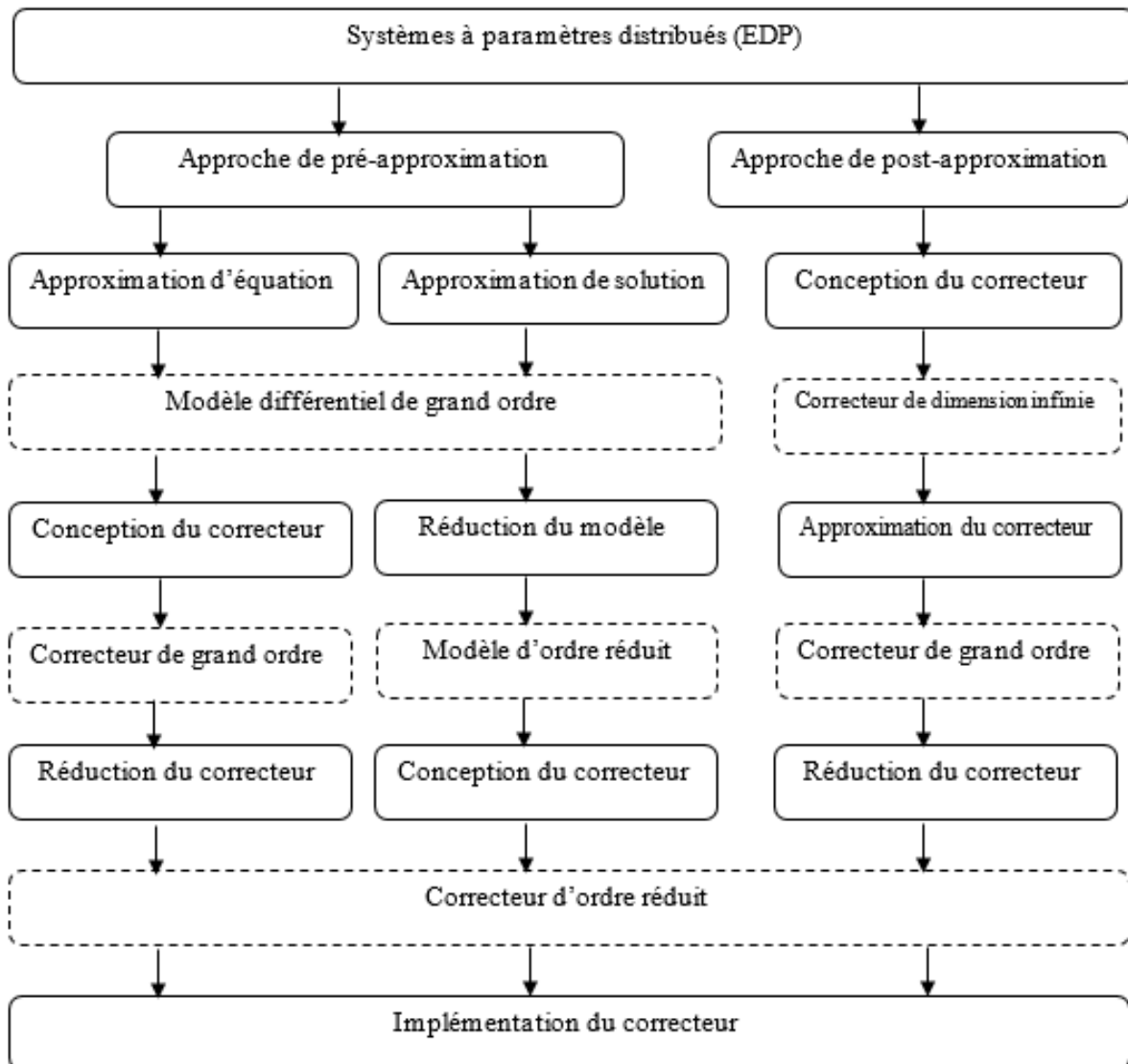


FIGURE 1.2: Approches de commande d'un SPD.

1.2.5 Méthode des lignes

La méthode des lignes, appelée aussi méthode de semi-discrétisation, est une technique d'approximation des équations aux dérivées partielles par des équations aux dérivées ordinaires. L'idée de base de cette technique consiste à discrétiser l'espace en un ensemble fini de points z_1, z_2, \dots, z_n , puis d'utiliser des formules d'approximation aux différences finies pour approximer les dérivées spatiales des PDEs par des approximations algébriques. Avec cette méthode toute EDP est approximée par un système d'équations aux dérivées

ordinaires [4],[101].

Il est à noter que la précision de l'approximation est d'autant plus importante que le nombre de points de discrétisation z_i est grand.

Les formules d'approximations aux différences finies à utiliser peuvent être déduites des Développements Limités de Taylor. Les dérivées d'ordre 1, 2, 3 ou 4 peuvent être approximées par les différences finis suivantes [34] :

$$f'(z_i, t) \approx \frac{f(z_{i+1}, t) - f(z_i, t)}{\Delta z} \quad (1.18)$$

$$f'(z_i, t) \approx \frac{f(z_i, t) - f(z_{i-1}, t)}{\Delta z} \quad (1.19)$$

$$f'(z_i, t) \approx \frac{f(z_{i+1}, t) - f(z_{i-1}, t)}{2\Delta z} \quad (1.20)$$

$$f''(z_i, t) \approx \frac{f(z_{i+1}, t) - 2f(z_i, t) + f(z_{i-1}, t)}{\Delta z^2} \quad (1.21)$$

$$f^{(3)}(z_i, t) \approx \frac{f(z_{i+2}, t) - 2f(z_{i+1}, t) + 2f(z_{i-1}, t) - f(z_{i-2}, t)}{\Delta z^3} \quad (1.22)$$

$$f^{(4)}(z_i, t) \approx \frac{f(z_{i+2}, t) - 4f(z_{i+1}, t) + 6f(z_i, t) - 4f(z_{i-1}, t) + f(z_{i-2}, t)}{\Delta z^4} \quad (1.23)$$

La méthode des lignes est considérée comme une méthode de différences finies particulière mais plus efficace en ce qui concerne la précision et le temps de calcul que la méthode des différences finies habituelles. Elle agit en discrétisant les variables de l'espace géométrique et en laissant continue la variable de l'espace temps. Elle est une méthode semi analytique ayant les avantages de la méthode des différences finies et des méthodes analytiques [39]. En outre, la méthode des lignes possède les propriétés suivantes qui motivent son utilisation :

- * Efficacité de calcul : le caractère semi-analytique de la méthode conduit à un algorithme de mise en œuvre simple qui donne des résultats précis avec moins d'effort de calcul que d'autres techniques.

- * Stabilité numérique : en séparant la discrétisation de l'espace et du temps, il est facile d'établir la stabilité et la convergence de la solution pour plusieurs classes des EDPs [39].
- * Effort de programmation réduit : en utilisant les programmes de résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO) bien documentés et fiables, l'effort de programmation peut être considérablement réduit.
- * Temps de calcul réduit : comme il n'y a qu'un petit nombre de lignes de discrétisation nécessaires dans le calcul, il n'est pas nécessaire de résoudre un grand système d'équations ; le temps de calcul est donc réduit.

1.3 Notions sur la théorie des semi-groupes

Dans cette section, nous présentons des notions de la théorie des semi-groupes utilisées dans le cadre de la thèse. Ces notions sont utilisées principalement au chapitre 5 pour démontrer la stabilité d'un système à paramètres distribués corrigé. Dans ce qui suit, on considère H un espace de Hilbert séparable.

1.3.1 Semi-groupe fortement continu

On appelle semi-groupe fortement continu (C_0 -semi-groupe) d'opérateurs sur H toute la famille d'opérateurs $(\Phi(t))_{t \geq 0}$ satisfaisant :

1. $\Phi(0) = I$
2. $\Phi(t + \tau) = \Phi(t) + \Phi(\tau)$ pour tout $t, \tau \in \mathbb{R}_+$
3. $\|(\Phi(t)x(t) - x(t))\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, pour tout $x \in H$

1.3.2 Générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu

Un générateur infinitésimal A d'un semi-groupe fortement continu $(\Phi(t))_{(t \geq 0)}$ sur un espace de Hilbert H est défini par :

$$Ax(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)x(t) - x(t)}{t} \quad (1.24)$$

lorsque cette limite existe, le domaine de A , noté $\mathcal{D}(A)$, est l'ensemble des x dans H pour lesquels cette limite existe, c'est à dire

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in H / \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t)x - x}{t} \exists\} \quad (1.25)$$

1.3.3 Équation d'état abstraite d'un système à paramètres distribué linéaire

Une équation d'état abstraite, appelée aussi opérationnelle, d'un système à paramètres distribués linéaire s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.26)$$

x est la variable d'état et A et B des opérateurs linéaires matriciels.

1.3.4 Semi-groupe exponentiellement stable

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.27)$$

Où A génère un semi-groupe fortement continu $(\Phi(t))_{t \geq 0}$;

Theorem 1 [38] *A génère un semi-groupe exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $w < 0$ tel que, pour tout $t > 0$,*

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{wt} \quad (1.28)$$

1.3.5 Stabilité exponentielle d'un système à paramètres distribués en boucle fermée

On considère le système (1.27) et une loi de commande de la forme

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.29)$$

où K est un opérateur différentiel.

En boucle fermée, on a :

$$\dot{x}(t) = (A + D)x(t) \quad (1.30)$$

avec $D = BK$.

Le théorème suivant, appelé théorème de l'opérateur perturbé, donne l'expression du semi-groupe généré par l'opérateur $A + D$ en boucle fermée.

Theorem 2 [38]

Si A est un générateur d'un semi-groupe fortement continu $\Phi(t)$ tel que $\|\Phi(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ et si D est un opérateur borné sur H , alors $A + D$ génère un semi-groupe fortement continu $(\Psi(t))$ tel que

$$\|\Psi(t)\| \leq Me^{(\alpha + M\|D\|)t}$$

D'après le théorème, la condition à vérifier pour assurer une stabilité exponentielle est :

$$\alpha + M\|D\| < 0 \quad (1.31)$$

1.4 Conclusion

De nombreux systèmes physiques sont des systèmes à paramètres distribués modélisés par des EDPs. Lorsque ces dernières sont linéaires et du second ordre le SPD modélisé est hyperbolique, elliptique, ou parabolique.

Ces dernières décennies un nombre très important, qui ne cesse d'augmenter, de travaux consacrés à la commande des SPDs sont réalisés. Ces travaux traitent de la modélisation, l'analyse, l'estimation, la synthèse de contrôleurs et la simulation numérique, et concernent notamment des applications sur des robots flexibles, bio-réacteurs, structures flexibles, vibrations des systèmes, réseaux de transport. Les méthodes de commande développées pour les systèmes à paramètres distribués peuvent être regroupées en deux classes principales : méthodes de pré-approximation et méthodes de post-approximation. Pour les méthodes de pré-approximation, la synthèse de contrôleur se fait par l'utilisation des techniques proposées pour les systèmes à paramètres localisés. En effet, par l'utilisation

des méthodes d'approximation des EDP par des EDOs ou de techniques d'identification de modèle EDO, un modèle à ODEs est obtenu pour le SPD à commander. Puis, un contrôleur est synthétisé à partir de ce modèle à ODEs pour satisfaire le cahier de charge de commande du SPD. Pour les méthodes de post-approximation, le contrôleur est synthétisé par l'exploitation directe du modèle à EDP. Dans ce cas, deux approches sont très répondues, la première consiste à définir les EDPs du SPD dans des espaces fonctionnels puis d'effectuer l'analyse et la synthèse de contrôleurs pour les SPDs dans ces espaces fonctionnels. La seconde approche est basée sur l'utilisation de la fonction de transfert d'un SPD pour la synthèse de contrôleurs. Le contrôleur obtenu, de dimension infinie, est réduit en un contrôleur d'ordre réduit réalisable par l'utilisation des méthodes de réduction.

Ces approches de commande des SPDs sont appliquées, dans les chapitres 3 et 5, pour la commande de systèmes thermiques modélisés par des équations aux dérivées partielles.

Chapitre 2

Optimisation robuste par l'approche des scénarios

2.1 Introduction

La théorie de la commande moderne et celle de l'optimisation mathématique sont étroitement liées. En effet, des méthodes d'optimisation sont souvent au cœur des méthodes d'identification de modèles, de synthèse de lois de commande, d'analyse de la stabilité et de la robustesse des systèmes, etc.

Aujourd'hui, pour la conception d'un système de commande, trois points principaux doivent être pris en compte. Tout d'abord, les systèmes à commander sont de plus en plus complexes, et des modèles linéaires simples et assez précis représentant les systèmes à commander ne sont pas toujours possible à définir. Ensuite, les spécifications de conception à satisfaire sont de plus en plus nombreuses, variées et précises. Enfin, les industriels ne veulent pas seulement trouver un régulateur qui satisfasse les spécifications désirées, mais aussi un régulateur qui les optimise [41]. Notons que les approches traditionnelles ne peuvent être utilisées pour la conception d'un système de commande répondant à telles exigences.

Avec la mise en œuvre d'outils théoriques et pratiques très performants pour la résolution des problèmes d'optimisation complexes, la synthèse de correcteurs optimaux

est une solution de plus en plus utilisée ces dernières décennies pour obtenir des lois de commande permettant de satisfaire et d'optimiser des spécifications variées et précises. Cette solution consiste à formuler le problème de commande sous forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. Puis, de résoudre ce dernier pour obtenir les paramètres du correcteur. Dans ce problème d'optimisation, les variables de décision sont les paramètres du correcteur, la fonction objectif correspond à une ou plusieurs spécifications qui doivent être optimisées et les contraintes représentent des spécifications qui doivent être satisfaites [42] [43], [44].

Généralement, le problème d'optimisation formulé est complexe (non linéaires, non convexes, multi-objectifs, non différentiables,...). Ainsi, pour sa résolution, les méthodes d'optimisation métaheuristique sont souvent plus indiquées pour leur capacité inégalée à approcher ou localiser l'optimum d'un problème d'optimisation complexe.

Ce chapitre est consacré à la présentation de certains éléments de la théorie de l'optimisation mathématique. La section 2.2 est consacrée à la définition, à la classification et aux différents types de méthodes de résolution des problèmes d'optimisation mathématique. La section 2.3 expose la méthode des algorithmes génétiques utilisée dans cette thèse pour résoudre des problèmes de conception de correcteurs optimaux. Puis, la classification des problèmes, selon leurs complexités algorithmique, est abordée en section 2.4. La section 2.5 est dédiée à un type particulier des problèmes d'optimisation, il s'agit de l'optimisation robuste et sa résolution par l'utilisation de l'approche des scénarios. La section 2.6 est consacrée à la génération de nombres aléatoires dont l'utilisation en optimisation robuste est très répandue. La dernière section 2.7 est réservée à la conclusion.

2.2 L'optimisation mathématique

L'optimisation mathématique consiste à déterminer, parmi un ensemble $D \subset \mathfrak{R}^{nw}$ de valeurs possibles d'un vecteur $w = [w_1, w_2, \dots, w_{nw}]$, un vecteur $w^* = [w_1^*, w_2^*, \dots, w_{nw}^*]$ pour lequel une fonction $f_{ob}(w)$, définie de \mathfrak{R}^{nw} vers \mathfrak{R} , prend une valeur optimale ($f_{ob}(w^*)$). Un problème d'optimisation mathématique est formulé comme suit :

$$\underset{w}{\text{optimiser}} f_{ob}(w) \quad (2.1)$$

Sujet à :

$$h_i(w) = 0 \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.2)$$

$$g_j(w) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.3)$$

Les composantes du vecteur w (i.e, w_1, w_2, \dots, w_{nw}) sont appelées variables de décision. Le vecteur w^* , est appelé optimum. Les fonctions f_{ob} , h_i et g_j définies de \mathfrak{R}^{nw} vers \mathfrak{R} sont appelées respectivement, fonction objectif, fonction des contraintes du type égalité et fonction des contraintes de type inégalités du problème d'optimisation. L'ensemble D est appelé ensemble des valeurs admissibles et il est défini par les fonctions h_i et g_j tel que :

$$D = \{w \in \mathfrak{R}^{nw} \text{ telque : } h_i(w) = 0, \forall i \in 1, \dots, n_h \text{ et } g_j(w) \leq 0, \forall j \in 1, \dots, n_g\}$$

La valeur optimale $f_{ob}(w^*)$ correspond au minimum ou au maximum de la fonction objectif. L'optimum w^* est dit optimum globale si $f_{ob}(w^*)$ est une valeur optimale de $f_{ob}(w)$ pour tous les w de D et il est dit optimum locale si $f_{ob}(w^*)$ est une valeur optimale de $f_{ob}(w)$ pour tous les w d'un voisinage de w^* .

Puisque le minimum de toute fonction $f_{ob}(w)$ est le même que le maximum de l'inverse de cette fonction, $-f_{ob}(w)$, alors tout problème de maximisation peut être remplacé par un problème de minimisation. C'est ainsi, que dans le cas générale tous les problèmes d'optimisation sont définis par des problèmes de minimisation (l'optimum est un minimum) donnés par :

$$\min_w f_{ob}(w) \quad (2.4)$$

Sujet à :

$$h_i(w) = 0 \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.5)$$

$$g_j(w) = 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.6)$$

2.2.1 Classification des problèmes d'optimisation

Les problèmes d'optimisation sont classés selon plusieurs critères, parmi ces critères on peut citer :

a) *La linéarité des fonctions f_{ob}, h_i et g_j*

Le problème d'optimisation est linéaire si les fonctions $f_{ob}(w), h_i(w)$ et $g_j(w)$ sont linéaires. Il est non linéaire dans le cas contraire (si au moins une fonction n'est pas linéaire).

b) *Le type de l'optimum*

S'il s'agit de déterminer un optimum global l'optimisation est globale. S'il s'agit de déterminer un optimum local, l'optimisation est dite locale.

c) *La convexité des fonctions f_{ob}, h_i et g_j*

Le problème d'optimisation est convexe si les fonctions $f_{ob}(w), h_i(w)$ et $g_j(w)$ sont convexes et non convexe si au moins une des trois fonctions est non convexe.

d) *La continuité des fonctions f_{ob}, h_i et g_j*

Si l'ensemble D est un sous ensemble de \mathfrak{R}^{nw} , le problème d'optimisation est continu. Par contre, si D est un sous-ensemble de \mathbb{N}^{nw} ou de $\mathbb{N}^{nw_1} \times \mathfrak{R}^{nw_2}, (nw_1 + nw_2 = nw)$ alors le problème d'optimisation est discret ou combinatoire.

e) *Le nombre de fonctions objectif*

Le problème d'optimisation est dit mono objectif s'il ne possède qu'un seul critère à optimiser (fonction objectif) et il est dit multi-objectif s'il possède plusieurs critères à optimiser.

f) *La dépendance des variables de décision du temps*

Si les variables de décision dépendent du temps, alors on a un problème d'optimisation dynamique appelé aussi problème de commande optimale. Dans le cas contraire, le problème d'optimisation est statique.

g) *L'existence des incertitudes sur les paramètres du problème d'optimisation*

Si tous les paramètres du problème d'optimisation (paramètres de f_{ob}, h_i et g_j) sont connus avec précision, le problème d'optimisation est déterministe. Par contre

si certains paramètres sont incertains le problème d'optimisation est dit problème d'optimisation robuste ou problème d'optimisation en présence d'incertitudes.

2.2.2 Méthodes de résolution d'un problème d'optimisation

En raison de la diversité des problèmes d'optimisation rencontrés, les techniques de recherche de l'optimum, font appel à un arsenal de méthodes qu'on peut classer comme suit :

a) *Méthodes déterministes*

Ces méthodes ne font pas intervenir le hasard dans la détermination de l'optimum. Généralement, elles nécessitent le choix d'un point de départ et la connaissance de la fonction objectif. Ce type d'optimisation regroupe, les méthodes locales, les méthodes globales classiques basées sur le calcul du gradient, etc.

b) *Méthodes stochastiques*

Contrairement aux méthodes déterministes, ces méthodes font des explorations aléatoires et font appel à des propriétés probabilistiques dans la recherche de l'optimum. Elles sont moins rapides que les méthodes déterministes, mais elles peuvent trouver, en principe, un optimum difficile à atteindre avec les méthodes déterministes. Aussi, ces méthodes ne requièrent pas de poser un point de départ et n'exigent que peu de hypothèses sur la fonction objectif.

Les métaheuristiques sont des algorithmes d'optimisation stochastiques et itératifs qui peuvent optimiser une large gamme de problèmes d'optimisation différents. Ils ont une grande capacité de trouver ou au moins de se rapprocher l'optimum global mais au prix élevé du temps de calcul.

En majorité, les métaheuristiques sont inspirées par des analogies avec la physique, avec la biologie ou encore l'éthologie.

Parmi les méthodes de cette classe, on distingue les métaheuristiques de « voisinage » qui font progresser une seule solution à la fois (recuit simulé, recherche tabou, etc.) et les métaheuristiques « distribuées », qui manipulent en parallèle toute une po-

pulation de solutions (algorithmes génétiques, optimisation par essaim de particule, etc.) et essayent d'améliorer leurs qualités au cours des itérations.

Les algorithmes génétiques que nous allons aborder en détail dans la section suivante sont l'une des métaheuristiques les plus utilisées en littérature.

2.3 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques (AG) sont des techniques stochastiques de recherches globales utilisée pour la résolution des problèmes d'optimisation dont les solutions ne peuvent pas être calculées en temps raisonnable de façon analytique ou algorithmique [45]. Leur principe est inspiré du mécanisme de la sélection naturelle (déterminer quels membres d'une population survivent et se reproduisent) et de la génétique (brassage et recombinaison des gènes des parents pour produire les gènes des enfants) [46]. L'origine des AG revient aux travaux de John Holland dans les années 1970 [47]. Tandis que leur popularisation est l'œuvre de David Goldberg à travers son livre *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning* [48] publié en 1989 .

2.3.1 Principe de Recherche de la solution dans les AGs

Le schéma de la figure 2.1, présente les différentes étapes mises en œuvre pour la recherche de solution par les AGs.

► Génération d'une population initiale

En première étape d'un AG, un nombre N_i d'éléments de l'ensemble des solutions admissibles sont choisis aléatoirement pour former un ensemble appelé population initiale. Ces éléments choisis, appelés individus ou chromosomes, sont ensuite codés sous forme de chaînes de symbole (gènes) de longueur finie. La figure 2.2 présente des exemples de codage binaire et de codage réel des individus.

Le choix des individus de la population initiale joue un rôle important pour la rapidité de convergence d'un AG. Si aucune information n'est disponible sur la position de l'optimum dans l'espace de recherche (l'ensemble des solutions admissibles), les

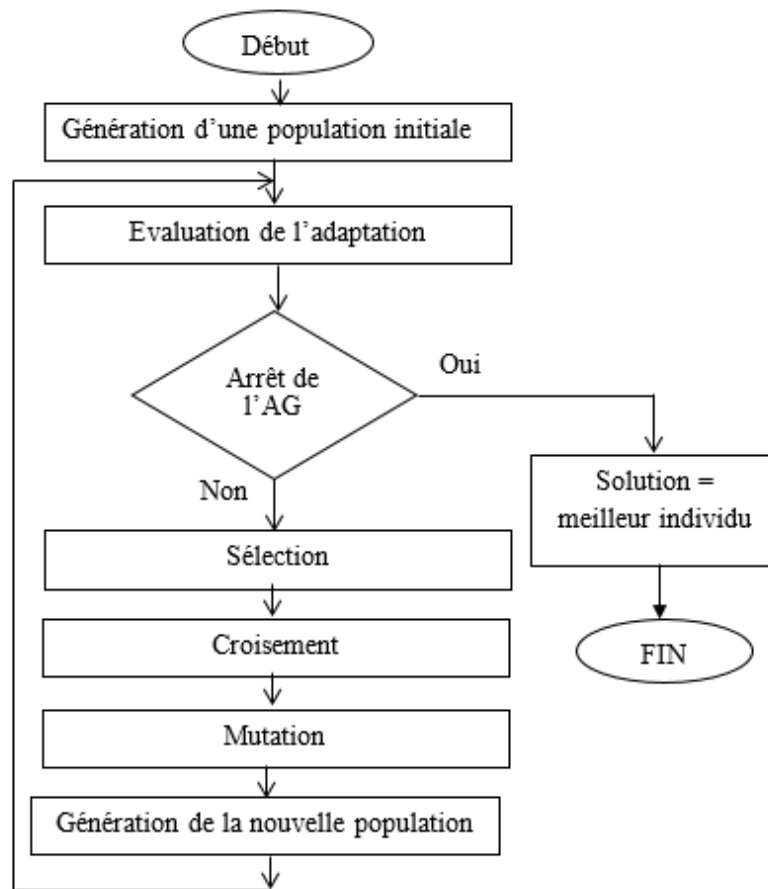


FIGURE 2.1: Organigramme d'un AG



FIGURE 2.2: Exemples de codage binaire et de codage réel des individus.

individus de la population initiale sont choisis aléatoirement en faisant des tirages uniformes sur tout l'espace de recherche. Par contre, si on dispose d'une information sur la position de l'optimum, alors ils sont choisis dans un sous-ensemble susceptible de contenir l'optimum. La taille de la population initiale N_i dépend de la nature du problème, mais généralement elle vaut quelques centaines ou quelques milliers d'individus.

► Évaluation

Dans cette étape, on attribue à chaque individu i une valeur de performance (qualité) Q_i proportionnelle à son adaptation au problème à optimiser. La méthode de détermination de cette valeur dépend du problème à optimiser. Dans le cas d'un problème mono objectif, cette valeur peut être obtenue à partir de l'évaluation de la fonction objectif pour cet individu.

► Sélection

Les résultats de l'étape d'évaluation vont servir pour sélectionner, parmi les individus de la population courante, les individus qui vont participer à l'opération de reproduction (croisement et mutation). Dans certains cas, un individu est sélectionné pour participer plus d'une fois à la reproduction. Le nombre d'individus à sélectionner N_{i1} est laissé à l'appréciation du programmeur. Plusieurs techniques de sélection sont présentées en littérature. Les techniques suivantes sont couramment utilisées :

- *Technique de la roulette*

La technique de la roulette est inspirée de la roue de la loterie. Son principe consiste à associer à chaque individu i un secteur d'une roue dont l'angle est proportionnel à sa performance Q_i (figure 2.3). Puis, effectuer une suite de tirage au sort homogène sur cette roue. Après chaque tirage, le secteur de la roue obtenu correspond à l'individu à sélectionner. Ainsi, un bon individu aura plus de chance qu'il soit choisi qu'un individu moins bon car un grand segment, auras plus de chances d'être tiré qu'un petit segment.

- *Technique de sélection par rang*

Cette technique permet de choisir toujours les individus les plus adaptés aux problèmes à optimiser. Et le hasard (l'aléatoire) n'intervient pas dans ce mode de sélection. En effet, avec cette technique, les N_{i1} individus à sélectionner sont les N_{i1} individus de la population courante les plus performants (ayant les meilleures adaptations).

- *Sélection uniforme*

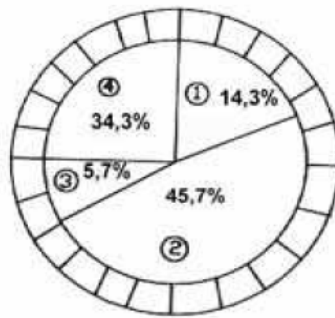


FIGURE 2.3: Représentation des individus sur des secteurs d'une roue de loterie.

La sélection se fait d'une manière aléatoire, uniformément sur tous les individus et sans prise en compte de l'évaluation des individus. Chaque individu possède une probabilité de $1/N_i$ d'être sélectionné.

- *Sélection stochastique*

Pour effectuer ce type de sélection, en premier lieu, on calcule pour chaque individu i la probabilité de reproduction P_{ri} définie par :

$$P_{ri} = \frac{Q_i}{\frac{1}{N_i} \sum Q_i} \quad (2.7)$$

En second lieu, on prend comme fréquence de reproduction de chaque individu i , la valeur entière de P_{ri} .

► **Le croisement**

Le croisement est le principal opérateur agissant sur les individus sélectionnés pour la reproduction (individus parents). Il est appliqué avec une certaine probabilité appelée probabilité de croisement, P_c , (typiquement, $P_c = 80\%$) [46]. L'objectif du croisement est de réaliser le brassage génétique de la nouvelle population et l'application du principe d'hérédité de la théorie de Darwin. Il existe deux types de croisement :

- Le croisement simple consiste à fusionner les particularités de deux individus parents à partir d'un point pivot à fin d'obtenir deux nouveaux individus enfants (voir figure 2.4).
- Le croisement multiple repose sur le même principe sauf qu'il y a plusieurs points pivot.

► Mutation

La mutation est le second opérateur de reproduction. Il est appliqué avec une probabilité appelée probabilité de mutation P_m (typiquement, $P_m = 5$ à 10%) [49]. Son objectif est d'introduire de nouvelles informations dans la nouvelle population. La mutation consiste à choisir au hasard un gène dans un chromosome sujet de la mutation puis d'altérer ce gène par son opposé (voir figure 2.5).

► Génération de la nouvelle population

A l'issue de l'opération de mutation, on sera en présence des N_i individus de population courante (individus parents) et des N_{i+1} nouveaux individus obtenus après les opérations de reproduction. A partir de ces $N_i + N_{i+1}$ individus une nouvelle population de même taille que la précédente doit être créée. Une des méthodes utilisées consiste à prendre les N_i individus ayant les meilleures adaptations.

► Critères d'arrêt d'un AG

L'arrêt d'un AG peut être programmé pour l'une des raisons suivantes :

- Un nombre de générations maximales est atteint,

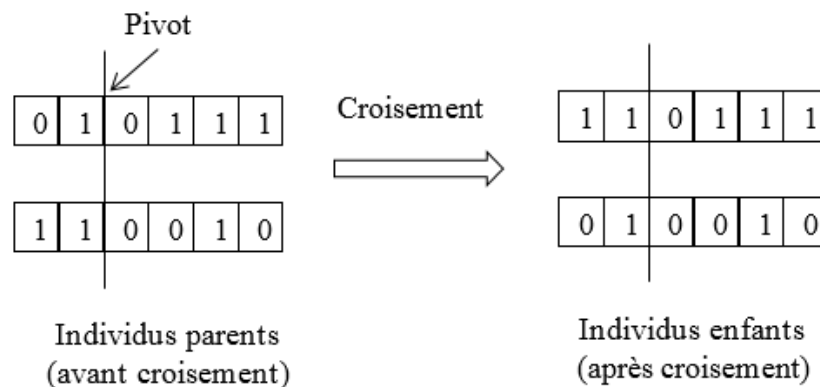


FIGURE 2.4: Exemple de croisement simple.

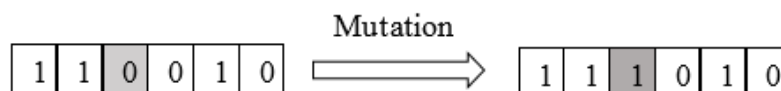


FIGURE 2.5: Mutation du troisième gène d'un chromosome de 6 bits.

- Un nombre de génération maximale sans améliorer la solution est atteint,
- L'obtention de chromosomes ayant atteint un certain degré d'homogénéité (un grand nombre de chromosomes possèdent des gènes identiques aux mêmes positions).

2.3.2 Convergence d'un AG

Jusqu'à présent il n'existe aucun résultat qui garantit que la méthode des AG converge en un temps fini vers la solution optimale. Les seuls résultats disponibles garantissent uniquement l'obtention de l'optimum global au bout d'un nombre fini de générations [46].

2.3.3 Association des AG avec des méthodes d'optimisation locales

Du fait du mécanisme de recherche utilisé, les AGs sont très efficaces pour trouver la zone de l'espace des solutions contenant l'optimum globale recherché. Mais moins efficaces pour trouver la valeur exacte de l'optimum dans cette zone. Or, c'est précisément ce que réalisent bien les algorithmes d'optimisation locale.

Ainsi, pour plus d'efficacité, il est toujours intéressant d'associer à un algorithme génétique un algorithme d'optimisation locale. En effet, pour qu'un processus d'optimisation à base des algorithmes génétique puisse avoir une bonne chance de converger vers une valeur exacte de l'optimum globale il faut appliquer un algorithme d'optimisation locale sur l'optimum obtenu par l'algorithme génétique.

2.4 Notions de complexité algorithmique d'un problème

En général les problèmes se classent en deux catégories : les problèmes résolubles et les problèmes non résolubles, selon qu'il existe ou non un algorithme de résolution [50]. Les problèmes algorithmiques ou bien résolubles, c'est-à-dire qui peuvent être traité par ordinateur, répondent à une structure algorithmique : hypothèse, données et une

question. On distingue en particulier deux types de problèmes algorithmiques ou bien résolubles [51] :

- Les problèmes de décision qui posent une question dont la réponse est oui ou non,
- Les problèmes d'existence ou de recherche d'une solution ou encore dit de calcul : ils comportent une question ou plutôt une injonction de la forme « trouver un élément tel que ... ». La réponse consiste à fournir cet élément.

La théorie de la complexité algorithmique est un domaine des mathématiques, plus précisément de l'informatique théorique qui s'intéresse à l'étude de la difficulté des problèmes à travers l'évaluation de la complexité des algorithmes de résolution proposées. Cette évaluation est discutée sur deux aspects : aspect temporel (complexité temporelle) et aspect spatial (complexité spatiale). La complexité temporelle consiste à estimer le temps de calcul nécessaire pour résoudre un problème donné. Tandis que la complexité spatiale permet d'estimer les besoins en mémoire (l'espace mémoire requis) pour la résolution d'un problème donné.

Les problèmes algorithmiques sont classés selon leur complexité en deux catégories principales : les problèmes P (Polynomial time) et les problèmes NP (Non déterministe Polynomial time). En outre, la catégorie des problèmes NP est divisée en deux sous catégories : NP-Complet et NP-Difficile.

2.4.1 Problème de la classe P

Les problèmes de la classe P (les problème P) peuvent être résolus par une machine de Turing déterministe en un temps de calcul polynomial par rapport à la taille du problème à traiter. Ces problèmes sont souvent faciles à résoudre par des algorithmes dont le nombre d'instructions est donné par une fonction polynomiale par rapport à la taille du problème [52]. On désigne par une machine de Turing, une machine abstraite représentant un modèle abstrait du fonctionnement de l'ordinateur et de sa mémoire. Elle a été proposée par le mathématicien Alan Mathisan Turing en 1936 afin de définir le concept d'algorithme. Un exemple d'un problème P est le problème de calcul du plus grand diviseur.

2.4.2 Problème de la classe NP

La classe des problèmes NP regroupe les problèmes qui peuvent être résolus avec une machine de Turing non-déterministe en un temps non polynomial, et pour lesquels il est possible de vérifier qu'une solution proposée est correcte en un temps polynomial par rapport à la taille du problème. Le terme non-déterministe désigne un pouvoir qu'on incorpore à un algorithme pour qu'il puisse aboutir à la bonne solution. Le problème du voyageur de commerce dont on cherche le plus court chemin permettant de parcourir un ensemble de sommets (villes) en passant par chacun une seule fois est un exemple de problème NP. Cette classe de problèmes peut être subdivisée en deux sous-classes :

2.4.2.1 Problème de la classe NP-Complet

Un problème est NP-Complet s'il est de classe NP et si on peut le ramener, par une transformation polynomiale, à un autre problème NP connu. Il faut noter que ce sont des problèmes de décision, difficiles, et pour lesquels il n'existe pas d'algorithme permettant leur résolution en un temps polynomial.

2.4.2.2 Problème de la classe NP-Difficile

La classe de problèmes NP-Difficiles englobe les problèmes de décision et les problèmes d'optimisation. Les problèmes NP-Difficiles sont aussi difficiles que les problèmes NP-Complets. Si un problème de décision associé à un problème d'optimisation P est NP-Complet alors P est un NP-Difficile [53]. Par conséquent, afin de prouver qu'un problème d'optimisation est NP-Difficile, il suffit de montrer que le problème de décision associé à P est NP-Complet [54]. Il est à noter que jusqu'à maintenant, aucun algorithme polynomial n'est connu pour résoudre les problèmes NP-Difficiles.

2.5 Optimisation robuste

Sur le plan pratique, il est difficile de trouver des exemples de systèmes à optimiser qui ne sont pas complexes et qui ne comprennent pas un certain niveau d'incertitude

sur les valeurs de quelques paramètres. Ce constat a poussé les spécialistes du domaine à proposer une nouvelle théorie de l'optimisation mathématique appelée optimisation robuste ou optimisation en présence d'incertitudes. Cette théorie s'intéresse à la résolution des problèmes d'optimisation comportant des paramètres incertains.

La première formulation d'une solution robuste à un problème d'optimisation à paramètres incertains peut être attribuée à Soyster au début des années 70 [55]. Puis, le domaine a pris son essor beaucoup plus tard, à la fin des années 90, grâce aux travaux des pionniers du domaine Ben-Tal et Nemirovski [56], [57], mais également d'El-Gahoui et Lebret [59], [58]. Depuis, l'optimisation robuste est devenue un des domaines de recherche les plus actifs en optimisation, avec des applications dans des domaines tels que la recherche opérationnelle, la théorie du contrôle, les statistiques, l'économie etc.

2.5.1 Formulation mathématique d'un problème d'optimisation robuste

La formulation mathématique générale d'un problème d'optimisation en présence d'incertitudes (2.8-2.10) est basée sur la notion du cas le plus défavorable (pire cas) exprimé sous forme d'un problème du type min-max.

$$\min_w \max_{\delta} f_{ob}(w, \delta) \quad (2.8)$$

Sujet à :

$$h_i(w, \delta) = 0, \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.9)$$

$$g_j(w, \delta) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.10)$$

Où :

$\delta \in \Delta$: vecteur des paramètres incertains,

Δ : ensemble de toutes les incertitudes.

Sous cette forme on parle aussi d'un problème d'optimisation min-max.

Souvent, l'optimisation d'un problème min-max, se heurtent à des difficultés numériques considérables, voire, même à l'impossibilité de résolution vu la complexité du problème. Pour contourner ces difficultés, une des solutions proposées consiste à relaxer le

problème min-max en un problème d'optimisation standard (déterministe) puis le résoudre avec une méthode adéquate. L'approche des scénarios est l'une des méthodes proposées pour réaliser cette relaxation.

2.5.2 Approche des scénarios

L'approche des scénarios est le fruit des recherches menées par *Giuseppe C. Calafiore* et *Marco C. Campi* [60] pour développer une méthode de résolution de problèmes de programmation convexe semi-définie.

L'idée de base de cette approche consiste à garantir la robustesse de la solution face à une grande majorité des valeurs des incertitudes, plutôt que à toutes les valeurs possibles des incertitudes. Ainsi, lors de la recherche de la solution, le nombre infini de contraintes est réduit en un nombre fini, en ne considérant que N_δ valeurs ou « scénarios » des incertitudes, extraites aléatoirement de l'ensemble Δ et suivant une probabilité de distribution P_r . En fonction du problème rencontré, cette dernière peut avoir des interprétations différentes. Parfois, c'est une mesure de la probabilité avec laquelle les situations se produisent, d'autres fois elle décrit simplement l'importance relative que nous attribuons aux différentes instances d'incertitudes.

Pour résoudre un problème d'optimisation min-max par l'utilisation de l'approche des scénarios les trois étapes suivantes sont à réaliser :

a) **Formulation du problème d'optimisation min-max sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini**

En étape 1 : on reformule le problème d'optimisation min-max sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini comme suit :

$$\min_{w, z} w' \quad (2.11)$$

Sujet à :

$$f_{ob}(w, \delta) \leq w' \quad (2.12)$$

$$h_i(w, \delta) = 0, \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.13)$$

$$g_j(w, \delta) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.14)$$

w' : est une nouvelle variable de décision.

Ce nouveau problème d'optimisation est caractérisé par un nombre de variables de décision fini et un nombre de contraintes infini d'où l'appellation optimisation semi-infinie.

Même si la fonction objectif ne présente aucune structure complexe, comme la non linéarité, ce type de problème est difficile à résoudre, et généralement, de type NP-difficile vu le nombre infini de contraintes.

b) Formulation du problème d'optimisation semi-infini sous forme d'un problème d'optimisation standard

Étape 2 : à partir de l'ensemble des incertitudes Δ , on extrait N_δ échantillons indépendants et identiquement distribués $(\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N_\delta)})$ suivant une probabilité de distribution P_r . Ensuite, en ne considérant que les N_δ contraintes correspondants aux échantillons sélectionnés, le problème d'optimisation semi-infini devient un problème d'optimisation standard avec un nombre de contraintes fini donné comme suit :

$$\min_{w, w'} w' \quad (2.15)$$

Sujet à :

$$f_{ob}(w, \delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N_\delta)}) \leq z \quad (2.16)$$

$$h_i(w, \delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N_\delta)}) = 0, \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.17)$$

$$g_j(w, \delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(N_\delta)}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.18)$$

c) Résolution du problème d'optimisation standard

Étape 3 : on résout le problème d'optimisation standard obtenu par l'utilisation d'une méthode de résolution des problèmes d'optimisation déterministe.

Par la conversion du problème d'optimisation robuste en un problème d'optimisation standard, seules les contraintes correspondantes aux paramètres incertains extraits δ^i ($i = 1, \dots, N_\delta$) qui sont considérés pour la recherche de la solution. Cependant, deux questions évidentes s'imposent :

- Comment choisir la valeur du nombre d'échantillons N_δ ?
- Quel degré de robustesse présente la solution trouvée puisque la procédure de sa recherche était restreinte à un nombre fini de contraintes tandis que les autres étaient ignorées ?

Dans l'article [61] il a été démontré qu'en choisissant le nombre d'échantillons N_δ tel que :

$$N_\delta \geq \frac{e^1}{e^1 - 1} (d + 1) (d - 1 + \ln(\frac{M}{\eta})) \quad (2.19)$$

la solution du problème d'optimisation standard a obtenir satisfiera toutes les contraintes avec une probabilité supérieur à $1 - \eta$ et une probabilité de confiance de la solution supérieur ou égale à ε .

Dans la formule (2.19), d est le nombre des variables de décision, M est un entier vérifiant $M \geq d + 1$, $\varepsilon \in [0, 1]$ est le paramètre de risque de violation des contraintes et $\eta \in [0, 1]$ est le paramètre de confiance de la solution.

La formule de calcul du nombre d'échantillons N_δ de l'équation (2.19) est définie pour le cas générale des problèmes d'optimisation non-convexes. Par contre, lorsque le problème d'optimisation est convexe, N_δ est définie par d'autres relations [62], [63], [64].

Dans [63] des applications de l'optimisation par l'approche des scénarios en automatique sont présentés pour la conception de commande robuste, de commande stabilisante en présence d'incertitudes, de la commande H_2 et pour la réduction de modèle.

2.6 Génération des nombres aléatoires

Dans les algorithmes génétiques ou dans l'optimisation par l'approche des scénarios, les nombres aléatoires jouent un rôle important. L'implémentation de tels algorithmes sur un calculateur requiert la génération des nombres aléatoires.

Une variable aléatoire peut être définie comme étant une variable dont la suite des valeurs n'est pas prédictible. Aussi longue que soit la série générée, il est impossible de trouver une équation permettant de prédire le reste de la série à partir de celles déjà générées [65].

2.6.1 Propriétés des nombres aléatoires

On dit que n_r valeurs r_i d'une variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$ si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- *Uniformité* : toutes les valeurs r_i sont réparties sur $[0, 1]$,
- *Indépendance* : pour tout i allant de 2 à n_r , la valeur r_i ne doit avoir aucune dépendance avec la valeur r_{i-1}

L'aléatoire est une notion relativement difficile à définir. La nécessité de produire de longues séries de nombres simulant l'aléatoire, tout en ayant d'autres qualités, comme une répartition aussi uniforme que possible est une préoccupation permanente des informaticiens.

L'utilisation d'un ordinateur pour générer des nombres aléatoires peut paraître déconcertante car n'importe quel programme informatique ne peut exécuter une suite d'instruction seulement si cette dernière est décrite à l'avance. Ainsi, dans ce contexte, le générateur sera forcément déterministe et non véritablement aléatoire. Pour cela, on parlera, dans ce cas, d'une génération de variables « pseudo-aléatoire ».

2.6.2 Générateur de nombres pseudo-aléatoires

Un générateur de nombres pseudo-aléatoires est un processus (fonction mathématique ou algorithme) qui génère une suite de nombres pseudo-aléatoires possédant les mêmes propriétés qu'une suite de nombres aléatoires, mais générée à travers une procédure déterministe.

La plupart des algorithmes développés pour la génération de nombres pseudo aléatoires ont pour but de produire des suites uniformément distribuées et qui puisse apparaître comme non déterministe. Le générateur, le plus couramment, utilisé est celui des congruences linéaires développé par D. H Lehmer en 1948 [67].

2.6.3 Générateur des congruences linéaires

Le générateur des congruences linéaires génère une séquence de nombres entiers non négatifs r_n grâce à la formule de récurrence suivante (aussi connue par l'algorithme de Lehmer) [66].

$$r_n = (a_m r_{(n-1)} + c_i) \text{ mod } m_t \quad \forall n \geq 1 \quad (2.20)$$

Où $\text{mod } m_t$ est le reste de la division de $(a_m r_{(n-1)} + c_i)$ par m_t , m_t est un entier positif appelé terme, a_m, c_i et r_0 sont appelés respectivement multiplicateur, incrément et germe.

La suite de nombre aléatoire uniforme est définie par la suite suivante :

$$u_n = \frac{r_n}{m_t}, \quad \forall n \geq 1 \quad (2.21)$$

Le choix des trois paramètres doit répondre à certains critères, car un mauvais choix de ces paramètres peut rendre le générateur complètement trivial. Nous présentons ci-après un ensemble de critères, appelés critère de Knuth, très utilisés pour choisir ces trois paramètres.

2.6.4 Critères de Knuth

Knuth présente les critères que doivent satisfaire les paramètres a_m, c_i et m_t comme suit :

- c_i et m_t doivent être premiers entre eux,
- a_{m-1} doit être un multiple de n_p , pour tout n_p nombre premier diviseur de m_t ,
- a_{m-1} doit être un multiple de 4, si m_t est un multiple de 4,
- si m_t est une puissance de 2, le bit de poids faible des nombres produits vaut alternativement 0 et 1.

Il est à noter les remarques suivantes :

- Si on désire produire toujours la même séquence, il faut utiliser la même valeur de r_0 ,
- Si on préfère que la séquence soit toujours différente, il faut initialiser r_0 avec une valeur différente à chaque fois qu'on refait la génération.
- Dans tous les cas, les nombres de la suite sont compris entre 0 et $m_t - 1$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des notions de l'optimisation mathématique utilisées dans cette thèse pour l'identification de modèle et le calcul des paramètres de correcteurs optimaux.

Après avoir présenté un ensemble de notions portant sur les la définition, la classification et résolutions des problèmes d'optimisation mathématique, nous avons exposé dans le détail, les étapes et le fonctionnement des algorithmes génétiques. Puis, la notion de complexité algorithmique et la classification des problèmes selon leurs difficultés sont présentées. Ensuite, nous nous sommes intéressés à l'optimisation robuste et à la résolution des problèmes d'optimisation de cette classe par l'utilisation de l'approche des scénarios. A la fin, nous avons abordé la génération des nombres aléatoires qui représente une étape importante pour l'optimisation pour l'optimisation par l'approche des scénarios.

Chapitre 3

Commande PI basée sur l'approche de pré-approximation de la température d'une tige métallique

3.1 Introduction

Les systèmes de diffusion de chaleur représentent une classe importante des systèmes à paramètres distribués. Leur modélisation mathématique est basée sur l'équation de la chaleur. Ces systèmes sont présents dans plusieurs procédés industriels. On peut par exemple citer les échangeurs de chaleur utilisés pour refroidir ou chauffer des fluides [33], [69] et les concentrateurs solaires utilisés dans les centrale de production de l'électricité à partir de l'énergie solaire thermique [70], [71].

Les travaux traitant de la commande des systèmes de diffusion de chaleur représentent une part importante des travaux portant sur la commande des systèmes à paramètres distribués.

Le procédé de diffusion de la température, dans une tige mono-dimensionnelle, est l'un des procédés utilisés pour tester et évaluer les performances des lois de commande conçues pour les systèmes à paramètres distribués en général et pour les systèmes de diffusion de chaleur en particulier [12], [72], [73].

Dans ce chapitre, la stratégie de pré-approximation est adoptée pour synthétiser un correcteur PI pour contrôler la température dans une tige métallique. Après avoir présenté le système de commande de la température de la tige dans la section 3.2, le modèle mathématique du procédé à commander est déterminé par identification à la section 3.3. Dans la section suivante, le problème de conception d'un correcteur PI est posé sous forme d'un problème de d'optimisation puis résolu par les algorithmes génétiques. Le critère minimisé est l'Intégrale de la valeur Absolu de l'Erreur de poursuite (IAE) et les variables de décision sont les paramètres du correcteur. L'évaluation des performances du correcteur obtenu est réalisée par simulation à la section 3.5. L'implémentation pratique du contrôleur PI est présentée dans la section 3.6.

3.2 Position du problème de commande

Le problème de commande, étudié dans ce chapitre, concerne la commande d'un procédé de chauffage d'une tige métallique chauffée à son extrémité $z = L$ par une résistance électrique alimentée, à travers un amplificateur de puissance, par une tension $u(t)$. Cette dernière est générée par un dispositif de commande comprenant :

- Une carte interface PC d'entrées/sorties permettant de générer la tension de commande $u(t)$ à partir des signaux qu'elle reçoit d'un ordinateur (PC) et de transmettre à l'ordinateur les mesures de la température effectuées par un capteur de température placé au point situé à la position $z_0 = 0.7L$ de la tige.
- Un ordinateur dans lequel on implémente les algorithmes de commande du chauffage de la tige. Par l'exécution de ces programmes et à partir des valeurs de température mesurées par le capteur, l'ordinateur va calculer et transmettre à la carte interface les signaux de commande à envoyer à l'amplificateur de puissance (voir figure 3.1).

L'objectif du problème de commande consiste à synthétiser et implémenter un correcteur permettant d'assurer un certain profil désiré pour la température au point de la tige situé à la position $z_0 = 0.7L$.

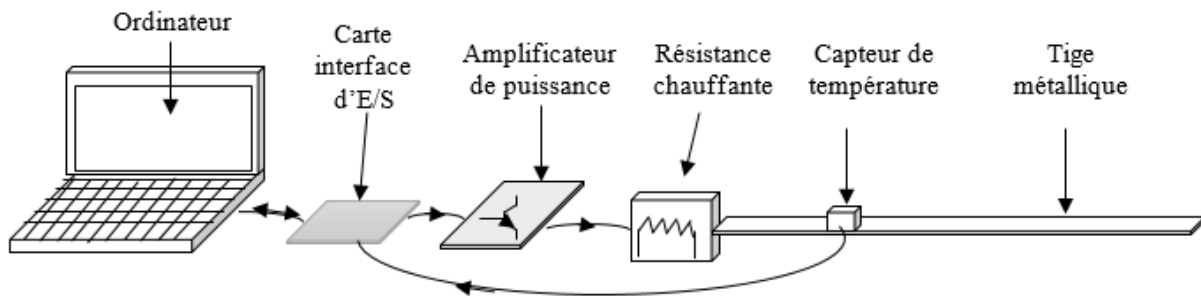


FIGURE 3.1: Système de commande de chauffage de la tige métallique

3.3 Modélisation du système à commander

Afin de répondre au cahier de charge du problème de commande, il faut en premier déterminer le modèle mathématique du procédé à commander. Ce dernier est composé des éléments suivants : amplificateur de puissance, résistance chauffante, tige métallique et capteur de température. Le modèle à déterminer décrit la relation entre la tension $u(t)$ et la température mesurée $T(z_0, t)$ par le capteur de température.

Pour déterminer ce modèle, une des solutions possibles consiste à déterminer en premier un modèle reliant la tension $u(t)$ à la température de la tige à l'extrémité $z = L$ (désignée par $T(L, t)$). Puis, déterminer un second modèle reliant la température $T(L, t)$ à la température de n'importe quel point de la tige ($T(z, t)$). En négligeant les échanges de chaleur suivant la direction transversale dans la tige et les échanges de chaleur entre la tige et son environnement, ce second modèle peut être obtenu sous forme du modèle à paramètres distribués définis par les équations (1.12)-(1.16). Une seconde solution consiste à considérer le système comme une boîte noire et de procéder à la détermination de son modèle par identification (modélisation expérimentale).

Comme nous ne disposons pas de suffisamment d'informations permettant de poser avec une bonne précision toutes les équations régissant le fonctionnement du système de chauffage de la tige, nous avons choisi de déterminer le modèle de ce dernier par la seconde solution, c'est-à-dire par identification. Pour ce faire, nous avons opté pour l'utilisation de la méthode du modèle pour déterminer un modèle sous forme de fonction de transfert

définie par :

$$G(s) = \frac{\sum_{j=0}^{j=nz} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{i=np} a_i s^i} \tag{3.1}$$

avec nz et np deux entiers naturels vérifiant $np \geq nz$.

3.3.1 Méthode du modèle

Comme c'est illustré par la figure 3.2, le principe de la méthode du modèle consiste à définir le modèle à identifier sous forme d'une fonction de n_{θ_g} paramètres θ_{g_i} , ($i = 1, \dots, n_{\theta_g}$), puis de déterminer les valeurs de ses paramètres par la minimisation d'un critère J dépendant de l'erreur entre la réponse mesurée du système à identifier et la réponse estimée du modèle identifié obtenues pour un même signal d'excitation. Dans le cas générale, le critère J est choisi comme suit :

$$J = \sum \varepsilon_y^2(t) \tag{3.2}$$

avec $\varepsilon_y(t) = y_{mes}(t) - y_{est}(t)$. $y_{mes}(t)$ et $y_{est}(t)$ sont respectivement la réponse mesurée du système à modéliser et la réponse estimée du modèle à identifier obtenues pour un même signal d'excitation $u(t)$.

L'avantage majeur de la méthode du modèle est le faite qu'elle n'exige aucune hypothèse sur le modèle à identifier comme la linéarité par exemple.

Comme c'est le cas pour d'autres méthodes d'identification, le choix du signal d'excitation pour la méthode du modèle joue un rôle important pour l'obtention d'un modèle précis du procédé à identifier.

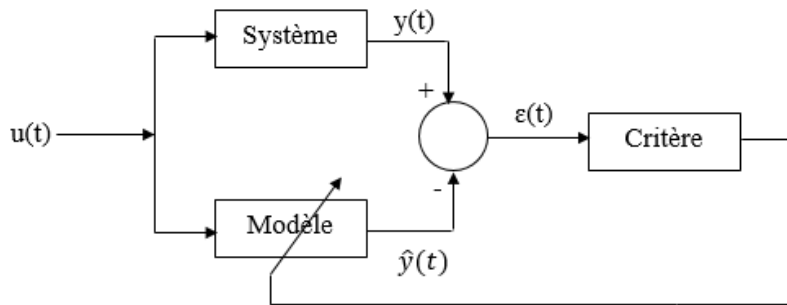


FIGURE 3.2: Principe de la méthode du modèle.

3.3.2 Choix du signal d'excitation

Le signal d'excitation choisi pour l'identification du modèle du système de chauffage de la tige par la méthode du modèle est le signal SBPA "Séquence Binaire Pseudo Aléatoire".

Ce signal est très utilisé pour l'identification des modèles. il est composé d'une suite périodique de séquences d'impulsions rectangulaires. Les largeurs des impulsions varient aléatoirement et la période est définie par la longueur de la séquence. Ce signal représente une approximation d'un signal bruit blanc discret. Il est riche en fréquence et sa valeur moyenne est nulle et ne modifie pas le point de fonctionnement du procédé. Pour l'identification des modèles, ce signal est choisi pour sa capacité d'exciter le système dans tout le spectre de fréquences susceptible de contenir tous les modes du système à identifier [74], [75].

Une SBPA est générée à l'aide d'un registre à décalage (réalisés en matériel ou logiciel) bouclé sur lui-même (figure 3.3). Ce générateur fournit alors des suites (séquences) pseudo-aléatoires de 0 et de 1. Les bouclages optimaux sont donnés par des polynômes particuliers.

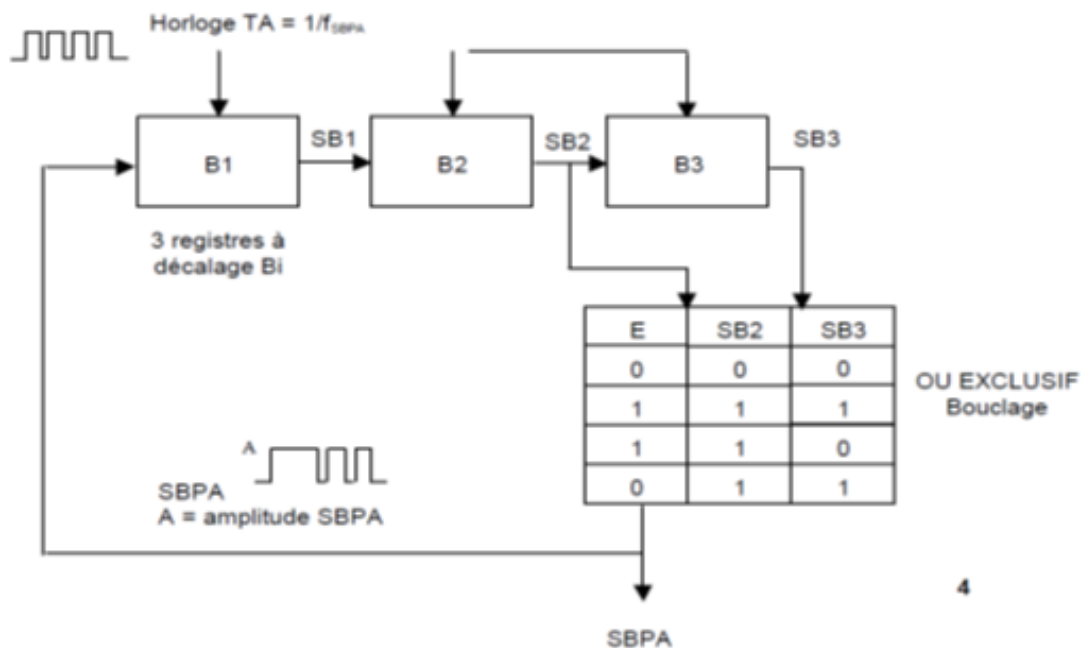


FIGURE 3.3: Générateur d'une SBPA à 3 cellules.

Les éléments caractéristiques d'un signal SBPA sont :

- nombre de cellules (N_c),
- période d'horloge (T_{SBPA}),
- durée maximale d'une impulsion ($t_{im} = N_c T_{SBPA}$),
- longueur de la séquence ($2^{N_c} - 1$),
- amplitude du signal (A_{SBPA}).

Le dimensionnement d'une SBPA pour l'identification d'un système donné peut se faire en réalisant les étapes suivantes :

- a- Choisir la période d'horloge (T_{SBPA}) comme étant un multiple de la période d'échantillonnage (T_e),
- b- Choisir l'amplitude du signal SBPA (A_{SBPA}),
- c- Choisir le nombre de cellules N_c de manière à respecter les deux conditions suivantes :

$$t_{im} = p N_c T_e > T_M$$

$$p (2^{N_c} - 1) T_e \leq D_{SBPA}$$

Avec :

- T_M est le temps de montée du procédé à identifier,
- $p = \frac{T_{SBPA}}{T_e} = 1, 2, 3, \dots$,
- D_{SBPA} est la durée totale du signal SBPA.

Pour le dimensionnement de la SBPA, à utiliser pour l'identification du système de chauffage de la tige, en premier lieu, nous avons réalisé un test indiciel pour déterminer la valeur du temps de montée T_M . A partir de la courbe de la réponse indicelle obtenue (figure 3.4), on obtient $T_M = 900s$.

Puis, compte tenu de la valeur du temps de monté obtenue, nous avons choisi

$$N_c = 4, p = 1, T_e = 300s, T_{SBPA} = 300s \text{ et } A_{SBPA} = 12V.$$

Avec ces choix, le diagramme temporel de la séquence binaire pseudo aléatoire utilisé est donné par la figure 3.5.

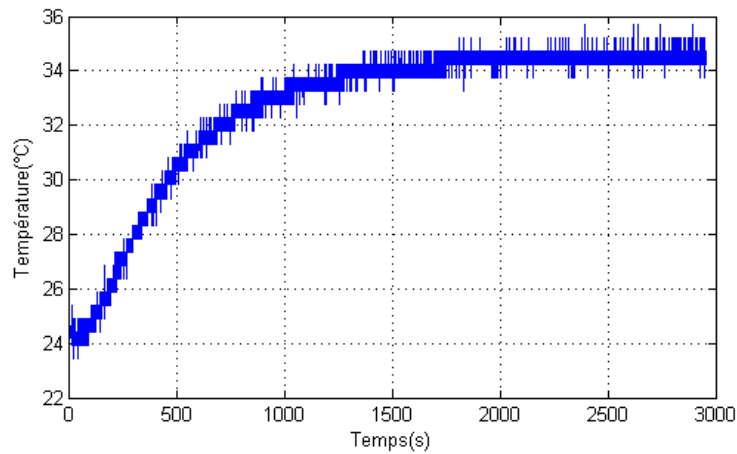


FIGURE 3.4: Réponse du système de chauffage pour une entrée de type échelon de 12 V.

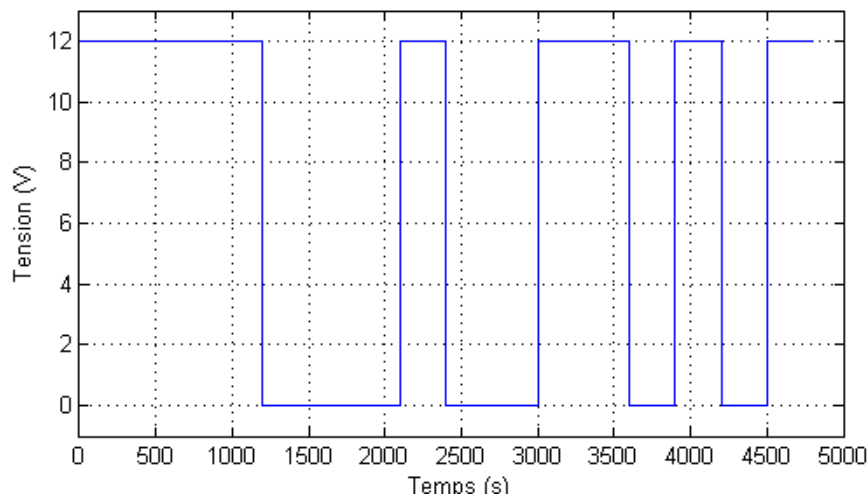


FIGURE 3.5: Diagramme temporel de la séquence binaire pseudo aléatoire.

3.3.3 Mise en œuvre de l'identification par la méthode du modèle

L'identification par la méthode du modèle des paramètres de la fonction de transfert (3.1) du système de chauffage de la tige est réalisée en deux étapes :

◇ *Étape 1 : Mesure de la réponse au signal SBPA*

Dans cette étape, le signal SBPA est appliquée à l'entrée du système de chauffage de la tige (tension d'entrée de l'amplificateur de puissance). Puis, la réponse représentée en figure (3.6) est enregistrée sous formes de $n_k = 1600$ points ($kT, T_{mes}(z_0, kT)$).

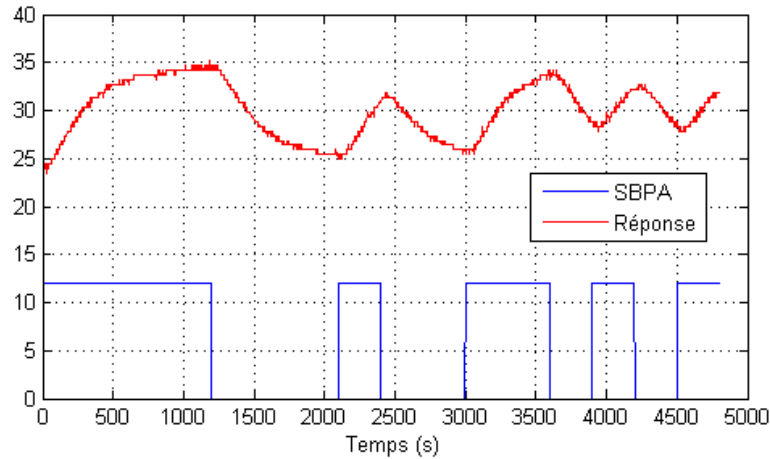


FIGURE 3.6: Réponse du système de chauffage au signal d'excitation SBPA.

kT représente les instants de mesures séparés par une période $T = 5s$, $k = 1, \dots, 1600$ et $T_{mes}(z_0, kT)$ représentent les températures mesurées aux instants kT .

◇ *Étape 2 : Détermination des paramètres de la fonction de transfert*

Pour déterminer les paramètres de la fonction de transfert (3.1), nous avons considéré comme origine de mesure des valeurs des températures mesurées, la valeur de $24.2^\circ C$ qui correspond à la valeur de de la température mesurée à l'instant initiale ($t = 0$).

Ainsi, le problème d'identification des paramètres de la fonction de transfert (3.1) revient à déterminer les paramètres de de cette dernière pour lesquels la courbe de la réponse de cette fonction de transfert au signal SBPA précédent soit le plus proche possible de la courbe réalisée par les 1600 points $(kT, T_{mes}(z_0, kT) - 24.2)$ c'est-à-dire la réponse mesurée et décalée vers le bas de $24.2^\circ C$.

Avant de procéder à la détermination des paramètres de la fonction de transfert 3.1, la réponse mesurée et décalée de $24.2^\circ C$ est appliquée à un filtre numérique passe bas du premier ordre dont la fonction de transfert est donnée par :

$$F(s) = \frac{1}{10s + 1} \tag{3.3}$$

Les paramètres du filtre sont choisis de telle manière à obtenir un bon filtrage des bruits de mesures tout en introduisant un retard très faible (voir figure 3.7).

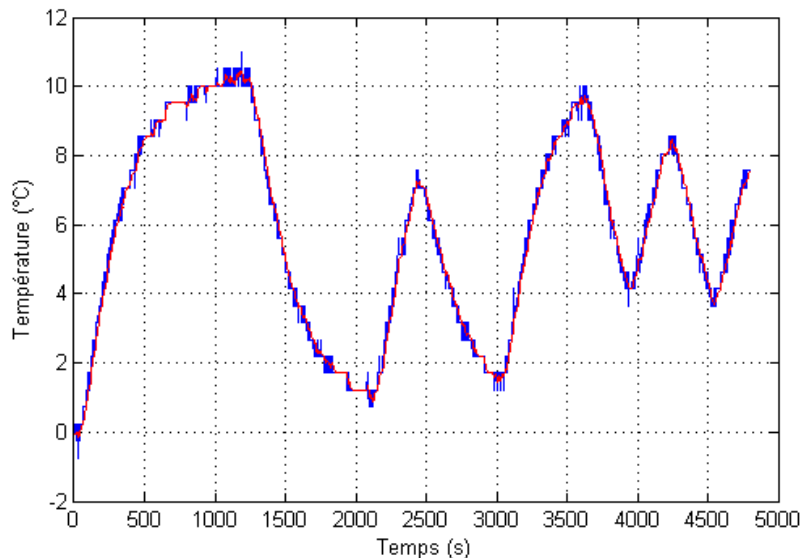


FIGURE 3.7: Réponse du système de chauffage au signal d'excitation SBPA avant et après filtrage.

Compte tenu de la définition précédente du problème d'identification des paramètres de la fonction de transfert 3.1, ce dernier est formulé par le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{a_i b_j} \sum_{k=0}^{k=1600} (T'_{mes}(z_0, kT) - T_{est}(z_0, kT))^2 \quad (3.4)$$

avec $T'_{mes}(z_0, kT) = T_{mes}(z_0, kT) - 24.2$ et $T_{est}(z_0, kT)$ est la sortie estimée, aux instants kT , de la fonction transfert (3.1) en réponse à une excitation par le signal *SBPA*.

Afin de déterminer un modèle précis et ayant un ordre pas trop important (ordre ≤ 10), le problème d'optimisation (3.4) est résolu pour toutes les valeurs de n_p et n_z vérifiant $n_z \leq n_p \leq 10$. Puis le modèle le plus précis obtenu est retenu.

La précision du modèle obtenu après chaque optimisation est évaluée par l'erreur quadratique moyenne normalisée (*NRMSE* pour *Normalized Root-Mean-Square Error*) définie par :

$$E_{NRMSE} = 100 \left(1 - \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n_k} (T_{mes}(z_0, kT) - T_{est}(z_0, kT))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n_k} (T_{mes}(z_0, kT) - \frac{1}{n_k} \sum_{k=1}^{k=n_k} (T_{mes}(z_0, kT))^2}} \right) \quad (3.5)$$

Cette erreur est fréquemment utilisée pour mesurer la différence entre des valeurs prédites (estimées) par un modèle ou un estimateur et des valeurs pratiques observées ou mesurées.

Comme c'est illustré par la figure 3.8, l'algorithme de résolution du problème d'optimisation (3.4) est basé sur l'hybridation d'un algorithme génétique avec une méthode d'optimisation locale. En effet, en première étape un algorithme génétique est appliqué pour déterminer une solution appartenant à un voisinage de la solution globale. En seconde étape, une méthode d'optimisation locale basée sur l'algorithme de Nelder-Mead [76] est appliquée pour obtenir une solution très proche de la solution globale.

Après plusieurs exécutions de cet algorithme hybride, le meilleur modèle obtenu est donné comme suit :

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \tag{3.6}$$

avec $N_G(s) = 1.321 \cdot 10^{-9} s^5 + 5.518 \cdot 10^{-12} s^4 + 1.532 \cdot 10^{-13} s^3 + 4.066 \cdot 10^{-16} s^2 + 3.061 \cdot 10^{-18} s + 8.033 \cdot 10^{-22}$,

$D_G(s) = s^{10} + 0.076 s^9 + 0.004077 s^8 + 0.0001274 s^7 + 1.748 \cdot 10^{-6} s^6 + 1.832 \cdot 10^{-8} s^5 + 1.479 \cdot 10^{-10} s^4 + 6.826 \cdot 10^{-13} s^3 + 2.567 \cdot 10^{-15} s^2 + 4.163 \cdot 10^{-18} s + 7.60510^{-22}$.

La figure 3.9 représente la sortie mesurée et la sortie estimée par le modèle (3.6)

3.4 Commande PI de la température de la tige

Après l'obtention d'un modèle mathématique définissant la relation mathématique entre la grandeur à commander ($T(z_0, t)$) et la grandeur de commande ($u(t)$), dans cette section le modèle est utilisé pour synthétiser un correcteur optimal permettant de réaliser l'objectif du problème de commande du système de chauffage de la tige. Pour ce faire, nous avons opté pour un type de correcteurs classiques, très utilisé en industrie et dont les performances ne sont plus à présenter, il s'agit d'un correcteur PI dont la fonction de transfert est donnée par :

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \tag{3.7}$$

```

Meilleure_fitness = 0,
Pour np allant de 1 à 10
  Pour nz allant de 1 à np
    Résoudre le problème d'optimisation par un Algorithme Génétique,
    Solution initiale = solution Algorithme Génétique,
    Résoudre le problème par méthode d'optimisation locale,
    Solution = solution méthode d'optimisation locale,
    Calculer la précision de la solution (ENRMSE),
    Si meilleure_précision < ENRMSE
      Meilleure_précision = ENRMSE,
      Meilleure_solution = solution,
    Fin de Si
  Fin de Pour
Fin de Pour

```

FIGURE 3.8: Algorithme d'identification du modèle du système de chauffage de la tige.

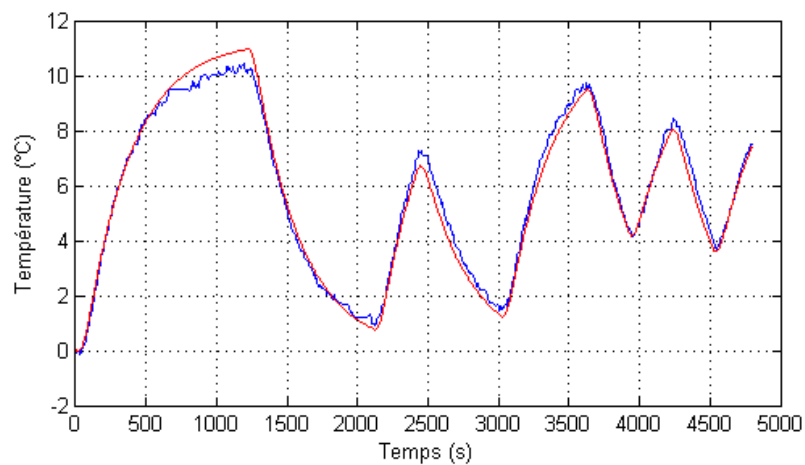


FIGURE 3.9: Sortie mesurée (en bleu) et sortie estimée par le modèle 3.6(en rouge).

où K_p et K_I sont les paramètres du correcteur à déterminer.

Pour la synthèse du correcteur PI (déterminer les valeurs des paramètres K_p et K_I) nous avons opté pour la méthode synthèse par minimisation d'un critère de performance [68]. Le critère utilisé est l'Intégrale de la valeur Absolue de l'Erreur de poursuite (IAE),

défini comme suit :

$$IAE = \int_0^{\infty} (|T_d(z_0, t) - T(z_0, t)|) dt \quad (3.8)$$

avec $T(z_0, t)$ et $T_d(z_0, t)$ sont respectivement la température commandée (sortie) et la température désirée en sortie (consigne).

Ainsi, le problème de synthèse du correcteur PI (détermination des paramètres K_p, K_I) est formulé par le problème d'optimisation avec contraintes suivant :

$$\min_{K_p, K_I} \int_0^{\infty} (|T_d(z_0, t) - T(z_0, t)|) dt \quad (3.9)$$

sujet à :

$$K_p, K_I \geq 0 \quad (3.10)$$

Le calcul d'un optimum global pour le problème (3.9)-(3.10) d'une façon analytique et en un temps raisonnable est une tâche très difficile à cause de la complexité de la relation exprimant l'erreur de poursuite en fonction des paramètres K_p et K_I . Par conséquent, nous avons choisi de résoudre ce problème d'optimisation par un algorithme génétique en utilisant la fonction "ga" du Toolbox genetic algorithm de Matlab.

Après plusieurs essais, la meilleure solution obtenue est :

$$K_p = 1.453, K_I = 0.0045s^{-1}. \quad (3.11)$$

Ce qui donne le correcteur PI suivant :

$$C(s) = 1.3481 + \frac{0.0042}{s} \quad (3.12)$$

Il est à noter qu'une deuxième optimisation par un algorithme d'optimisation locale est réalisée sur la solution (3.11), mais sans amélioration de la solution.

3.5 Simulation du correcteur PI

Avant d'implémenter pratiquement le correcteur PI synthétisé, l'évaluation de ses performances en simulation est réalisée en effectuant deux tests de simulation sous l'environnement Matlab Simulink. Dans le premier test, le correcteur est testé en régime de

poursuite de consigne et dans le seconde test le correcteur est testé en régime de rejet de la perturbation.

Les profils imposés à la consigne et à la perturbation ainsi que les réponse obtenues pour chacun des deux tests sont données par les figures 3.10 et 3.11.

Les allures des tensions de commande obtenues pour chacun des deux tests sont données par les figures 3.12 et 3.13.

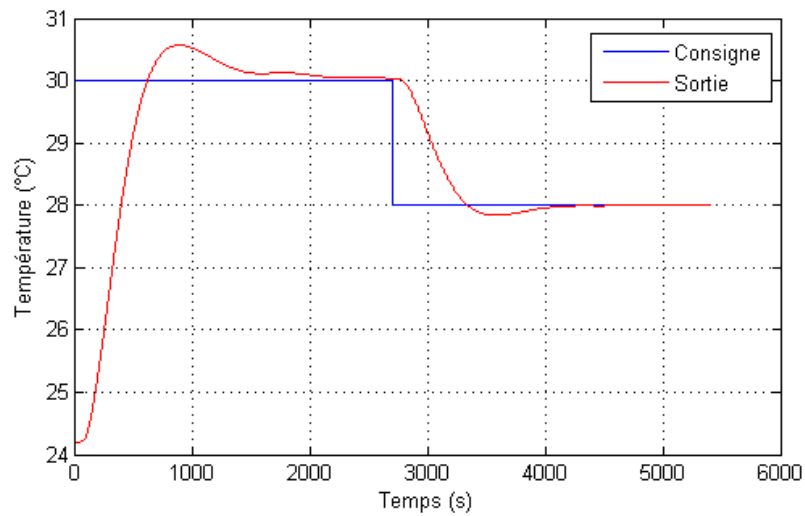


FIGURE 3.10: Évaluation des performance du PI en régime de poursuite.

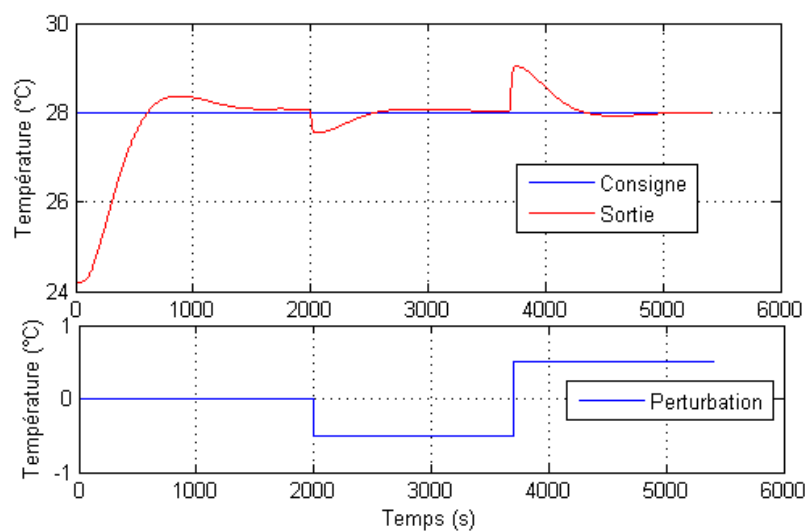


FIGURE 3.11: Évaluation des performance du PI en régime de rejet de perturbation.

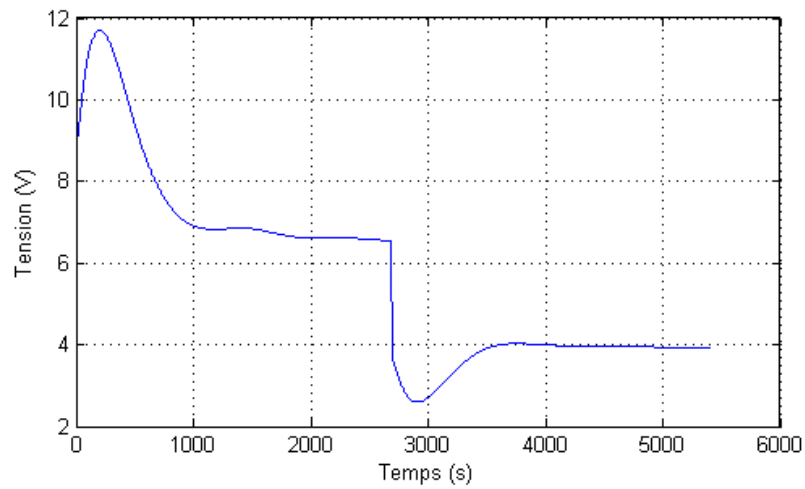


FIGURE 3.12: Tension de commande en régime de poursuite.

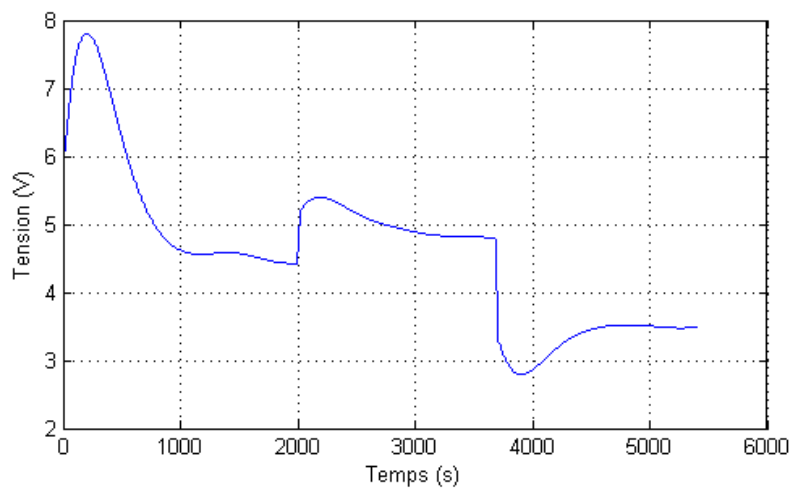


FIGURE 3.13: Tension de commande en régime de rejet de perturbation.

A partir des figures 3.10 et 3.11, on constate que la sortie poursuit convenablement la consigne imposée et l'effet de la perturbation est rejeté rapidement. Ainsi, on conclut que le correcteur PI synthétisé présente de bonnes performances en mode poursuite de consigne et en mode de rejet de perturbations.

A partir des figures 3.12 et 3.13, on remarque que la tension de commande reste inférieure à 12V (non saturée) pendant toute la durée du test de simulation.

3.6 Implémentation du correcteur PI

Pour tester les performances du correcteur PI en pratique, ce dernier est implémenté sur l'ordinateur du système de chauffage de la tige métallique. La consigne imposée est le même que le signal consigne imposé pour le test de simulation du PI en régime de poursuite.

L'allure de la sortie obtenue en réponse à cette consigne est donnée par la figure 3.14. On constate que le correcteur agit correctement pour assurer la poursuite de la consigne. On remarque aussi que le signal de commande reste non saturé pendant toute la période du test pratique (figure 3.15).

En outre, que ce soit pour la température de sortie ou pour la tension de commande, on constate que la courbe enregistrée pratiquement et la courbe obtenue par simulation en régime de poursuite présentent des allures très proches. Ce qui prouve aussi que le modèle identifié décrit avec une bonne précision le comportement du système modélisé.

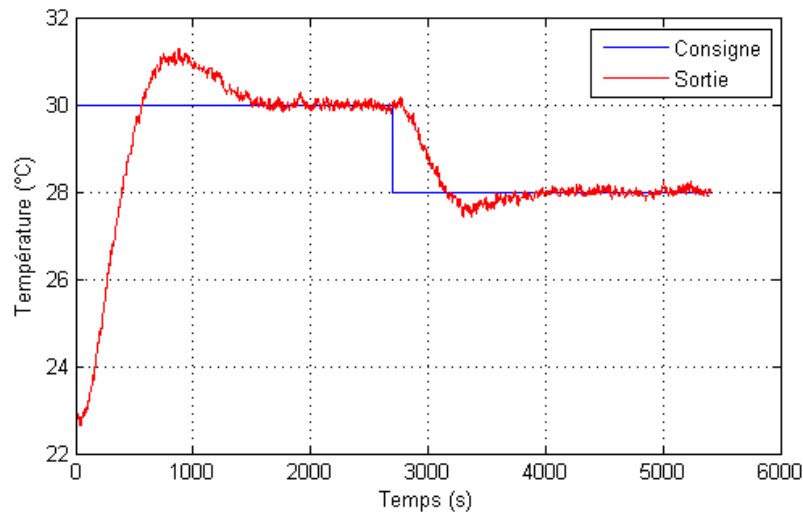


FIGURE 3.14: Évolution de la sortie corrigée.

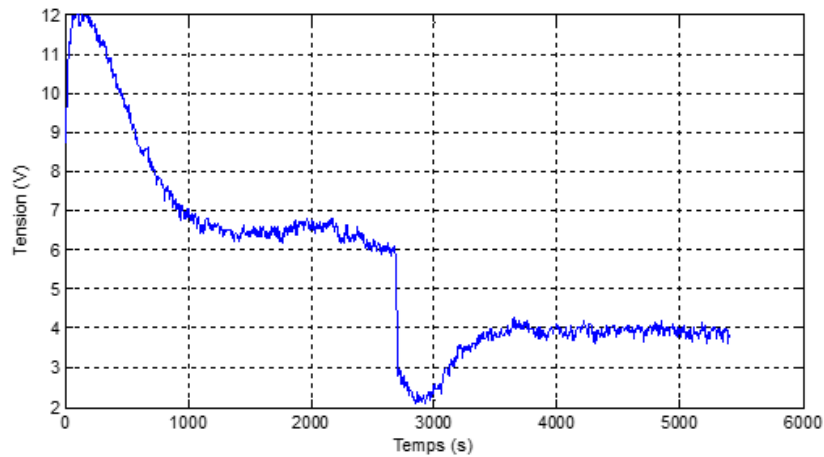


FIGURE 3.15: Tension de commande de la température de la tige.

L'implémentation du correcteur PI est mise en oeuvre par la réalisation du programme Matlab/Simulink donné par la figure 3.16.

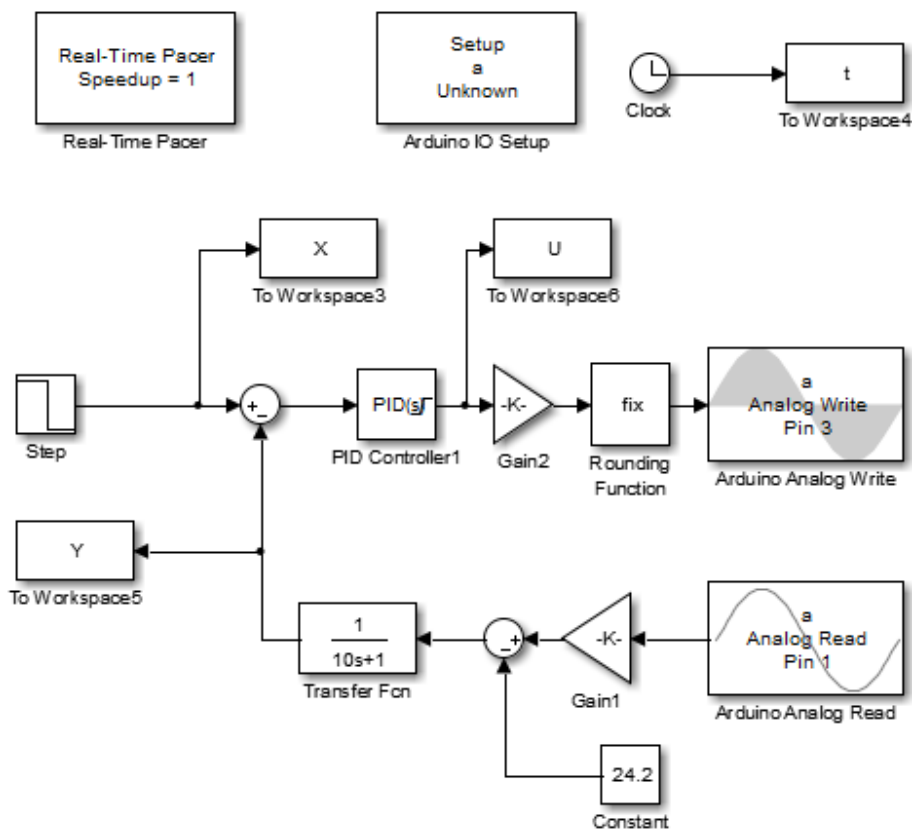


FIGURE 3.16: Programme Matlab Simulink d'implémentation du correcteur PI.

Dans ce programme :

- le bloc « **Arduino IO Setup** » est utilisé pour définir la carte Arduino à utiliser comme carte interface PC d'entrées / sorties,
- le bloc « **Real Time Pacer** » est utilisé pour spécifier le rapport entre le temps de simulation et le temps réel (Simulation Time / Real Time),
- le bloc « **Arduino Analog Write** » est utilisé pour générer, sur la sortie analogique (PWM) 3 de la carte Arduino, le signal de commande (tension $u(t)$) sous forme d'un signal modulé en largeur d'impulsion (MLI ou PWM en anglais) de fréquence de $490Hz$. Ce bloc reçoit à son entrée la valeur du signal à générer (valeur moyenne du signal MLI) sous forme d'entiers compris entre 0 et 255 (0 pour $0V$ et 255 pour $5V$),
- le bloc « **Gain 2** » multiplie le signal de commande (sortie du correcteur PI) comprises entre 0 et 12 par un gain de $255/12$ pour obtenir des valeurs numériques comprises entre 0 et 255,
- Le bloc « **Rounding Function** » permet d'arrondir les valeurs numériques du signal de commande comprises entre 0 et 255 en valeurs entières comprises entre 0 et 255 pour les envoyer sur les entrées du bloc Arduino Analog Write,
- le bloc « **Arduino Analog Read** » est utilisé pour acquérir les valeurs des températures mesurées par le capteur connecté à l'entrée analogique 1 de la carte Arduino. Les valeurs acquises sont converties dans la carte Arduino par un convertisseur analogique numérique en valeur numériques comprises entre 0 (pour $0V$) et 1024 (pour $5V$),
- le bloc « **Gain 1** » multiplie les valeurs des températures acquises par un gain de $5000/(1024 \times 10)$ pour obtenir des valeurs correspondantes aux températures mesurées en $^{\circ}C$,
- le bloc « **Transfert Fcn** » est utilisé pour filtrer les bruits de mesure de la température mesurée par un filtre passe bas du premier ordre implémenté numériquement.

3.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la commande de la température dans une tige métallique par l'utilisation de l'approche de pré-approximation. L'objectif est de concevoir et d'implémenter pratiquement un correcteur performant pour la commande de température dans une tige métallique monodimensionnelle. Avant de concevoir le correcteur, le modèle du système à commander est identifié par l'utilisation de la méthode du modèle. Les paramètres obtenus ont été le résultat de deux niveaux d'optimisation, une optimisation par les algorithmes génétique suivie par une optimisation par un algorithme d'optimisation locale (Algorithme de Nelder-Mead). Ensuite, la synthèse d'un correcteur PI est réalisée par l'optimisation du critère de performance IAE (Intégrale de la valeur Absolue de l'Erreur de poursuite). Les performances du correcteur PI synthétisé ont été testées et vérifiées avec succès, en premier lieu par simulation en considérant les problèmes de poursuite et de rejet de perturbation et puis en second lieu par implémentation pratique en considérant le problème de poursuite.

Chapitre 4

synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes à paramètres localisés linéaires par l'approche des scénarios

4.1 Introduction

La synthèse d'une loi de commande performante pour un système dynamique est basée généralement sur l'exploitation d'un modèle mathématique traduisant d'une manière assez précise le comportement dynamique du système. Pour les systèmes réels, la détermination d'un tel modèle, par modélisation et/ou identification, aboutit, dans de nombreux cas à un modèle incertain, c'est-à-dire un modèle qui comporte des termes ou des paramètres dont les valeurs numériques ne peuvent être données qu'avec des incertitudes.

On peut distinguer deux types d'incertitudes ; les incertitudes structurelles et les incertitudes non structurelles. Les incertitudes structurelles (appelées également incertitudes paramétriques) sont utilisées pour représenter l'effet des variations des valeurs de certaines caractéristiques du système modélisé. Elles sont souvent représentées par des intervalles bornés de variations des valeurs de certains paramètres du système. Comme exemple de ce type d'incertitudes, on peut citer, les incertitudes dues à la dégradation des caractéristiques d'un système résultant du vieillissement de certains de ces composants. Les

incertitudes dues aux dynamiques des phénomènes, de hautes fréquences, négligées dans la modélisation sont un exemple d'incertitudes non structurelles.

Commander un système dont la dynamique est décrite par un modèle incertain revient à trouver une loi de commande, dite robuste, qui soit capable de garantir, indépendamment des incertitudes du modèle, la stabilité en boucle fermée ainsi qu'un niveau de performance acceptable.

Ces dernières années, le domaine de la commande robuste a atteint un certain niveau de maturité avec des contributions significatives. Toutefois, il demeure toujours un domaine de recherche très actif avec de nombreux problèmes ouverts [77].

Pour la commande robuste des systèmes, deux approches majeures peuvent être distinguées [63], [77]. La première, dite approche de synthèse par le pire cas (worst-case design), tente d'appliquer les contraintes de conception sur l'ensemble du domaine des incertitudes [63], [64]. Cette approche conduit à des problèmes d'optimisation robuste, classés NP-hard, dont le degré de complexité augmente avec la dimension du système [62], [78], [80]. La seconde approche, qui est une alternative intéressante et prometteuse à la première, est l'approche probabiliste [62], [63], [81], [82]. L'idée de base de cette approche consiste à réaliser une sélection aléatoire des incertitudes dans le but de transformer un problème d'optimisation robuste, avec un nombre de contraintes infini, en un problème d'optimisation standard avec un nombre fini de contraintes. Ce dernier est résolu avec une probabilité de violation des performances très faible [63], [81]. L'approche des scénarios est l'une des méthodes de conception probabilistes de commande robustes [63], [64], [82]. C'est une méthode non séquentielle qui a été appliquée avec succès pour résoudre plusieurs problèmes de conception de commandes robustes [63], [64].

Dans ce chapitre, une méthode de synthèse de correcteurs robustes pour les systèmes linéaires incertains par l'approche des scénarios est développée. Cette méthode permet de concevoir des correcteurs robustes pour les systèmes à paramètres localisés linéaires incertains. Le problème de synthèse d'un correcteur robuste pour un système linéaire incertain est formulé en section 2. Puis, les différentes étapes de synthèse du correcteur par la méthode développée sont décrites en section 3. Dans la première étape, le problème

de synthèse du correcteur robuste est formulé sous forme d'un problème d'optimisation robuste sous contraintes minimisant un critère de performance. Dans la deuxième étape, le problème d'optimisation robuste est réécrit sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini. Ensuite, en utilisant l'approche des scénarios ce dernier problème est relaxé pour obtenir un problème d'optimisation standard. En dernière étape, le problème d'optimisation standard est résolu par une méthode d'optimisation des problème standard. La section 4 présente les critères de performance qui peuvent être utilisés dans le cas de cette méthode. En section 5, un algorithme basé sur la méthode d'Aström permettant de calculer l'expression analytique du critère de performance ICE «intégrale du carré de l'erreur » est exposé. En section 6, afin d'illustrer les performances des correcteurs robustes synthétisés par la méthode présentée, cette dernière est appliquée pour la synthèse de correcteurs du type PID pour deux systèmes physiques modélisés par des fonctions de transfert incertaines du premier et du second ordre. Les performances des correcteurs obtenus sont évaluées par simulation et les résultats obtenus montrent que la méthode développée est performante.

4.2 Position du problème de commande

Considérons le problème d'asservissement d'un système linéaire monovariante incertain à paramètres localisés représenté dans la Figure 4.1.

Dans cette figure :

- $C(s, \theta_c)$ et $G(s, \delta)$ représentent respectivement, les fonctions de transfert du correcteur robuste et du système linéaire incertain à paramètres localisés,

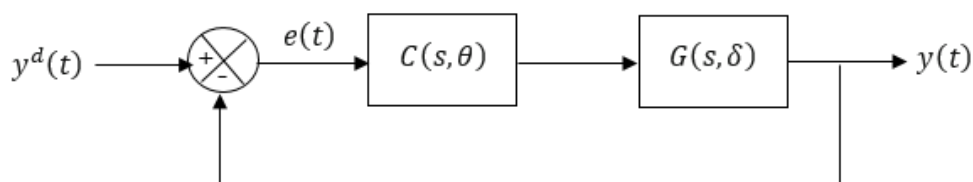


FIGURE 4.1: Boucle d'asservissement d'un système linéaire monovariante incertain

- $y^d(t), y(t)$ et $e(t)$ représentent respectivement la consigne, la sortie et l'erreur de poursuite.

$G(s, \delta)$ est définie par la forme générale suivante :

$$G(s, \delta) = \frac{b_0 s^{nz} + b_1 s^{nz-1} + \dots + b_{nz-1} s + b_{nz}}{a_0 s^{np} + a_1 s^{np-1} + \dots + a_{np-1} s + a_{np}} = \frac{\sum_{l=0}^{l=nz} b_l s^{nz-l}}{\sum_{k=0}^{k=np} a_k s^{np-k}} \quad (4.1)$$

avec

$$np \geqslant nz.$$

$$a_k^{min} \leqslant a_k \leqslant a_k^{max}, \quad k = 0, \dots, np$$

$$b_l^{min} \leqslant b_l \leqslant b_l^{max}, \quad l = 0, \dots, nz$$

δ est le vecteur des paramètres de la fonction de transfert $G(s, \delta)$, c'est à dire

$$\delta = [a_0, \dots, a_{np}, b_0, \dots, b_{nz}].$$

Les valeurs a_k^{min} et a_k^{max} (b_l^{min} et b_l^{max}) sont respectivement les valeurs minimales et maximales des paramètres incertains a_k pour $k = 0, \dots, np$ (b_l pour $l = 0, \dots, nz$).

La structure de la fonction de transfert du correcteur $C(s, \theta_c)$ est supposée connue et θ_c est le vecteur de ses paramètres.

l'objectif de ce problème de commande consiste à déterminer les paramètres θ_c ($\theta_c \in \mathfrak{R}^{n_{\theta_c}}$) permettant de réaliser la poursuite de la consigne $y^d(t)$ par la sortie $y(t)$.

4.3 Synthèse d'un correcteur robuste par l'approche des scénarios

Afin de résoudre le problème de commande formulé dans la section précédente (synthétiser le correcteur robuste $C(s, \theta_c)$), nous proposons une méthode que nous avons développée dans le cadre de notre thèse et qui est basée sur l'optimisation robuste par l'approche des scénarios. En premier lieu, le problème de commande est formulé sous forme d'un problème d'optimisation de type min-max. Puis, les trois étapes de résolution d'un problème d'optimisation robuste par l'approche des scénarios, présentées au chapitre 2 (section 2.5.2), sont effectuées pour résoudre le problème d'optimisation formulé.

4.3.1 Formulation du problème de commande sous forme de problème d'optimisation min-max

En supposant que la poursuite de la consigne par la sortie peut se traduire par la minimisation d'un critère de performance $J(\theta_c, \delta)$, le problème de commande précédent peut être formulé sous forme d'un problème d'optimisation min-max comme suit :

$$\min_{\theta_c} \max_{\delta} J(\theta_c, \delta) \quad (4.2)$$

Sujet à :

$$g(\theta_c, \delta) \leq 0 \quad (4.3)$$

La contrainte ($g(\theta_c, \delta) \leq 0$) traduit des conditions à assurer pour garantir la stabilité ainsi que certaines contraintes de réalisabilité et/ou de robustesse qui peuvent être considérées.

L'équation (4.2) signifie qu'on cherche à déterminer les paramètres θ_c pour lesquels le maximum de la quantité $J(\theta_c, \delta)$, obtenu pour toutes les valeurs possibles des paramètres δ , soit minimal.

4.3.2 Formulation du problème d'optimisation min-max sous forme de problème d'optimisation semi-infini

Le problème d'optimisation (4.2)-(4.3) peut être réécrit sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini comme suit :

$$\min_{\theta_c, w} w \quad (4.4)$$

Sujet à :

$$J(\theta_c, \delta) \leq w \quad (4.5)$$

$$g(\theta_c, \delta) \leq 0 \quad (4.6)$$

où w est une nouvelle variable de décision.

4.3.3 Formulation du problème d'optimisation semi-infini sous forme d'un problème d'optimisation standard

Par l'utilisation de l'approche des scénarios, le problème d'optimisation semi-infini précédent est réécrit sous forme d'un problème d'optimisation standard donné comme suit :

$$\min_{\theta_c, w} w \quad (4.7)$$

Sujet à :

$$J(\theta_c, \delta^{(i)}) \leq w \quad (4.8)$$

$$g(\theta_c, \delta^{(i)}) \leq 0 \quad (4.9)$$

$\delta^{(i)} = [a_0^{(i)}, \dots, a_{np}^{(i)}, b_0^{(i)}, \dots, b_{nz}^{(i)}]$ ($i = 1, \dots, N_\delta$) sont des échantillons du vecteur des paramètres incertains supposées uniformément distribués et indépendants.

Dans le cas général, les fonctions des contraintes (4.8) et (4.9) sont non convexes. Par conséquent, le problème d'optimisation (4.7)-(4.9) est non convexe et le nombre d'échantillons N_δ est déterminé en utilisant la relation (2.19) après un choix judicieux des valeurs des paramètres η et ε .

La solution θ_c^* du problème d'optimisation standard (4.7)-(4.9) va être calculé avec une probabilité de risque de violation des contrainte inférieur ou égale à η et avec une probabilité de confiance de la solution supérieur ou égale à $1 - \varepsilon$. Ainsi, pour avoir une solution précise et avec une très petite probabilité de violation des contraintes, les paramètres η et ε doivent être fixés très petits. Ceci produit un nombre important d'échantillons N_δ et par conséquent, un grand nombre de contraintes pour le problème d'optimisation standard.

4.3.4 Résolution du problème d'optimisation standard

Le problème d'optimisation standard obtenu (4.7)-(4.9) peut être résolu par l'utilisation d'une méthode adéquate de résolution des problèmes d'optimisation standard.

Il est à noter que du fait du nombre important des contraintes (4.8)-(4.9), pour assurer une convergence rapide de la solution optimale θ_c^* , il est nécessaire d'exprimer les fonctions

$J(\theta_c, \delta^{(i)})$ et $g(\theta_c, \delta^{(i)})$ par des expressions pouvant être évaluées rapidement.

4.4 Critères de performance basés sur l'intégrale de l'erreur de poursuite

Dans de nombreux travaux portant sur la synthèse de correcteurs, après le choix de la structure du correcteur, les paramètres de ce dernier sont déterminés par minimisation des critères de performance faisant intervenir l'erreur de poursuite. Ces critères prennent en compte la totalité de la réponse du procédé et peuvent prendre l'une des formes suivantes [83] :

- **Intégrale du carré de l'erreur (ICE)**

$$ICE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (4.10)$$

Dans ce critère la valeur de l'erreur intervient par son carré. De ce fait, l'utilisation de l'ICE permet d'éliminer les grandes erreurs (valeurs > 1) tout en tolérant les petites erreurs (valeurs < 1) pendant une longue période de temps. Ainsi, il produit une réponse rapide sans dépassements importants mais avec plusieurs oscillations de faibles amplitudes.

- **Intégral de la valeur absolue de l'erreur (IAE)**

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (4.11)$$

Ce critère intègre l'erreur absolue dans le temps sans ajouter de poids aux erreurs. Les petites erreurs sont éliminées plus rapidement que dans le cas de l'ICE. Sa réponse est plus lente que l'ICE mais avec des oscillations moins amorties.

- **Intégral de la valeur absolue de l'erreur pondérée par le temps (ITAE)**

$$ITAE = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (4.12)$$

Dans le critère ITAE, l'erreur absolue est pondérée par le temps. Ce qui le rend plus sensible aux erreurs persistantes dans le temps et à celles survenues aux régimes dynamiques (perturbation et variation paramétrique). Cependant, il sera moins efficace pour l'élimination des erreurs ayant lieu à des faibles valeurs de temps (dépassement initiale et oscillation au régime transitoire).

4.5 Calcul de l'ICE par la méthode d'Aström

Pour déterminer une expression facile et rapide à évaluer du critère ICE, l'article [79] propose une méthode qui permet de déterminer à partir de la transformée de Laplace de l'erreur de poursuite $E(s)$, une expression analytique simple et rapide à évaluer de l'ICE. Cette méthode, appelée méthode d'Aström, consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- Déterminer la transformée de Laplace de l'erreur de poursuite sous la forme suivante :

$$E(s) = \frac{\sum_{l=0}^{j=n-1} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{k=n} a_k s^k} \quad (4.13)$$

- Construire à partir des coefficients a_k , ($k = 0, \dots, n$) et b_l ($l = 0, \dots, n - 1$) du dénominateur et du numérateur de $E(s)$, les tableaux 4.5 et 4.5 en suivant l'algorithme de la figure 4.2.
- Calculer la valeur du critère ICE par la relation suivante.

$$ICE = \sum_{k=1}^n \frac{B_{k,k-1}^2}{2A_{k,k} A_{k,k-1}} \quad (4.14)$$

Par l'utilisation le Toolbox de programmation symbolique de Matlab, nous avons écrit un programme qui calcule automatiquement l'expression de l'ICE pour toute transformée de Laplace de l'erreur de poursuite donnée sous la forme de l'équation (4.13).

Le tableau (4.5) présente les expressions du critère ICE pour certaines expressions de $E(s)$.

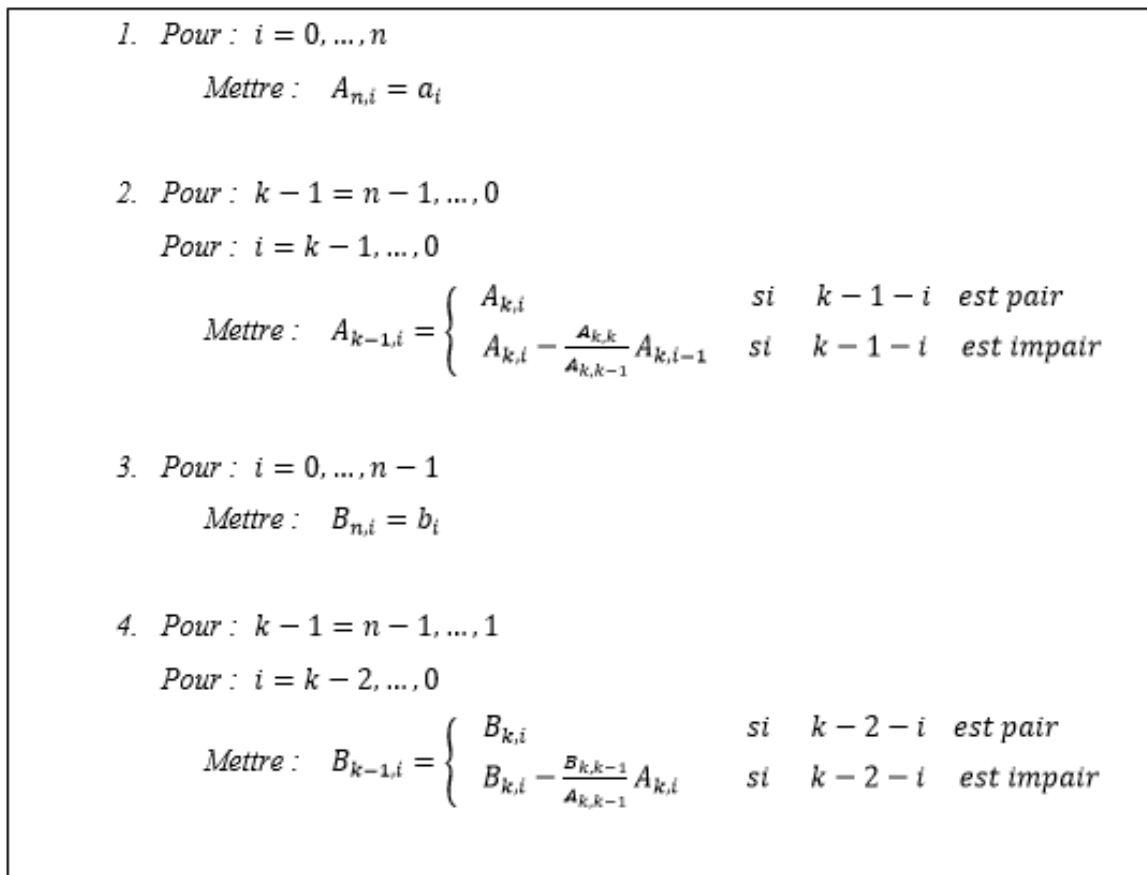


FIGURE 4.2: Algorithme de calcul des éléments des tableaux du numérateur et du dénominateur.

TABLE 4.1: Tableau du dénominateur.

$A_{n,n}$	$A_{n,n-1}$	$A_{n,n-2}$	\dots	$A_{n,k-1}$	\dots	$A_{n,0}$
	$A_{n-1,n-1}$	$A_{n-1,n-2}$	\dots	$A_{n-1,k-1}$	\dots	$A_{n-1,0}$
		\ddots		\vdots		\vdots
			$A_{k,k}$	$A_{k,k-1}$	\dots	$A_{k,0}$
				$A_{k-1,k-1}$	\dots	$A_{k-1,0}$
					\ddots	
						$A_{0,0}$

TABLE 4.2: Tableau du numérateur.

$B_{n,n-1}$	$B_{n,n-2}$...	$B_{n,k-1}$...	$B_{n,0}$
	$B_{n-1,n-2}$...	$B_{n-1,k-1}$...	$B_{n-1,0}$
		\ddots	\vdots		\vdots
			$B_{k,k-1}$...	$B_{k,0}$
				\ddots	\vdots
					$B_{1,0}$

TABLE 4.3: Expression de l'ICE pour différentes fonctions de transfert de l'erreur de poursuite.

E(s)	ICE
$\frac{b_0}{a_0 + a_1 s}$	$\frac{b_0^2}{2a_0 a_1}$
$\frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}$	$\frac{b_0^2}{2a_0 a_1} + \frac{b_1^2}{2a_1 a_2}$
$\frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}$	$\frac{(b_0 a_2 - a_0 b_2)^2}{2a_0 a_2 (a_1 a_2 - a_0 a_3)} + \frac{b_2^2}{2a_2 a_3} + \frac{b_1^2}{2(a_1 a_2 - a_0 a_3)}$
$\frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4}$	$\frac{\left(b_0 \left(a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}\right) - a_0 b_2\right)^2 + a_0 \left(b_1 - \frac{a_1 b_3}{a_3}\right)^2}{2 a_0 \left(a_1 \left(a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}\right) - a_0 a_3\right)} + \frac{b_3^2}{2 a_3 a_4} + \frac{b_2^2}{2 a_3 \left(a_2 - \frac{a_1 a_4}{a_3}\right)}$

4.6 Applications de la méthode de synthèse de correcteurs robustes basée sur l'approche des scénarios

Afin d'illustrer les performances de la méthode de synthèse de correcteurs robustes basée sur l'approche des scénarios, deux applications ont été réalisées. Elles concernent

respectivement, la synthèse d'un correcteur PI robuste pour un système incertain du premier ordre et la synthèse d'un correcteur PID robuste pour un système incertain du second ordre. Pour ces deux applications ;

- Le critère de performance à minimiser est l'Intégrale du Carré de l'Erreur de poursuite (ICE), i.e. :

$$J(\theta_c, \delta) = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad (4.15)$$

- L'évaluation de $J(\theta_c, \delta)$ est effectuée par l'utilisation de la méthode d'Aström exposée à la section 4.5.

4.6.1 Synthèse d'un correcteur PI robuste pour un système de premier ordre incertain

Dans cette première application, la méthode de synthèse de correcteurs robustes proposée est appliquée pour synthétiser un correcteur PI robuste pour un système du premier ordre incertain dont la fonction de transfert est :

$$G(s, \delta) = \frac{Vs(s)}{Ve(s)} = \frac{b}{as + 1} \quad (4.16)$$

avec $1 \leq a \leq 5, 1 \leq b \leq 10$ et $\delta = [a, b]$.

La fonction de transfert du correcteur PI à synthétiser est :

$$C(s, \theta_c) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \quad (4.17)$$

avec $\theta_c = [K_c, T_i]$.

Le calcul de la transformée de Laplace de l'erreur de poursuite donne :

$$E(s) = \frac{b K_c T_i s + b K_c}{a T_i s^2 + T_i (1 + b K_c) s + b K_c} \quad (4.18)$$

Le calcul de l'ICE par l'utilisation de la méthode d'Aström donne :

$$J = \frac{T_i + a b K_c}{2 b K_c (1 + b K_c)} \quad (4.19)$$

L'application du critère stabilité de Routh-Jury à la boucle fermée conduit à la condition suivante :

$$K_c, T_i \geq 0 \quad (4.20)$$

Ainsi, d'après les résultats de la section 4.3, le problème de synthèse du correcteur PI robuste peut être formulé grâce à l'approche des scénarios sous forme du problème d'optimisation standard suivant :

$$\min_{K_c, T_i} \omega \quad (4.21)$$

sujet à :

$$J = \frac{T_i + a^{(i)} b^{(i)} K_c}{2 b^{(i)} K_c (1 + b^{(i)} K_c)}, i = 1, \dots, N_\delta \quad (4.22)$$

$$K_c, T_i \geq 0 \quad (4.23)$$

avec $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$, ($i = 1, \dots, N_\delta$) sont respectivement les échantillons des incertitudes a et b , distribués uniformément sur les intervalles des incertitudes $[1, 5]$ et $[1, 10]$.

En posant $\varepsilon = 0.001$, $\eta = 0.01$ et $M = d + 1$ avec $d = 3$ (nombre de variables de décision), le calcul du nombre d'échantillons N_δ des incertitudes par la relation (2.19) donne $N_\delta = 8838$.

La résolution du problème d'optimisation (4.21)-(4.23) par la méthode des algorithmes génétiques, en utilisant des fonction du toolbox genetic algorithm de Matlab, abouti à la solution suivante :

$$K_c^* = 50.7224, T_i^* = 0.1581 \text{ et } \omega^* = 0.074 \quad (4.24)$$

Ce qui donne le correcteur PI suivant :

$$C(s, \theta_c) = 50.7224 \left(1 + \frac{1}{0.1581 s} \right) \quad (4.25)$$

les échantillons des incertitudes $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N_\delta$), utilisés pour le calcul du correcteur PI, sont donnés respectivement par les figure 4.3 et 4.4.

La figure 4.5 représente la valeur minimale du critère optimisé ω^* ainsi que les valeurs du critère de performance J obtenus pour les N_δ échantillons des incertitudes a et b considérés et les paramètres K_c^* et T_i^* calculés.

On remarque que la première contrainte (4.22) du problème d'optimisation standard précédent n'est violée que pour un très petit nombre de cas des échantillons des incertitudes à savoir les échantillons $a^{(i)}$ proches de 1 et les échantillons $b^{(i)}$ proches de 5.

L'évolution de la sortie $y(t)$ obtenue en simulation pour plusieurs valeurs des incertitudes générées aléatoirement est représentée dans la figure 4.6. Ces résultats démontrent

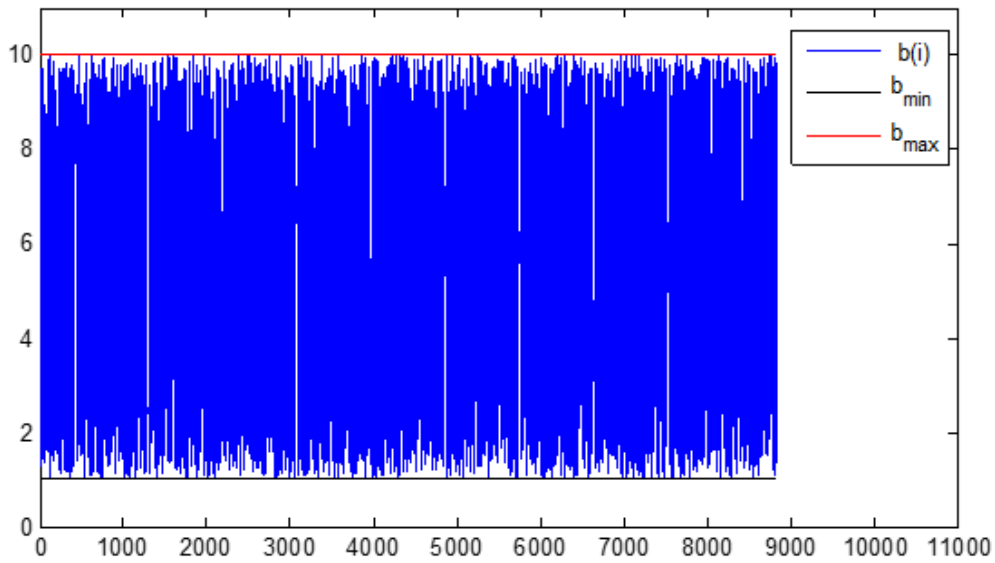


FIGURE 4.3: Les N_δ échantillons de l'incertitude $b^{(i)}$.

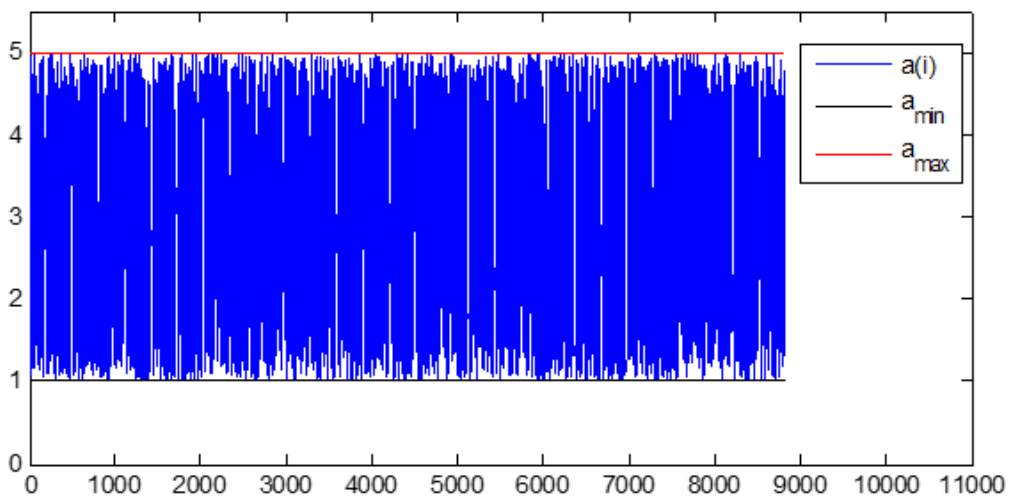


FIGURE 4.4: Les N_δ échantillons de l'incertitude $a^{(i)}$.

la robustesse du correcteur PI synthétisé. En effet, malgré les incertitudes des paramètres a et b , la sortie suit la consigne avec une erreur statique nulle, un dépassement nul et un temps de réponse acceptable.

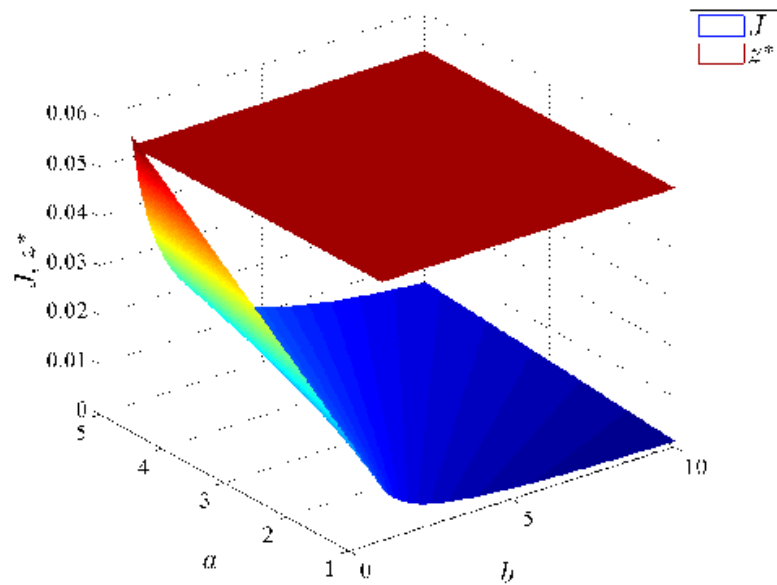


FIGURE 4.5: Valeur minimale du critère optimisé ω^* et les valeurs du critère de performance J obtenus pour les N_δ échantillons des incertitudes considérés, et les paramètres K_c^* et T_i^* calculés.

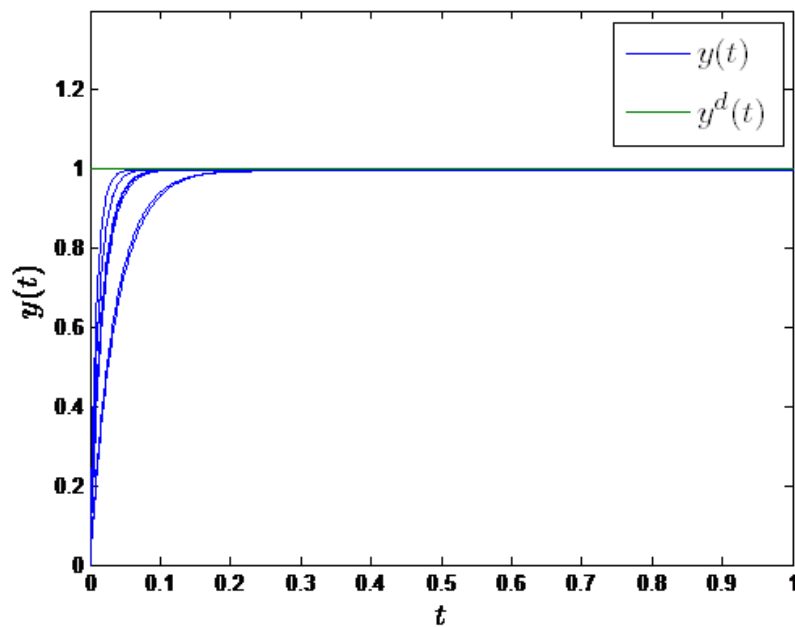


FIGURE 4.6: Évolution de la sortie $y(t)$ pour certaines incertitudes générées aléatoirement.

4.6.2 Synthèse d'un correcteur PID robuste pour un système du second ordre incertain

Dans la seconde application, il est proposé de synthétiser un correcteur PID pour un système du second ordre incertain défini par la fonction de transfert

$$G(s, \delta) = \frac{k}{(s+a)(s+b)} \quad (4.26)$$

avec $1 \leq k \leq 3$, $-1 \leq a \leq 1$, $-1 \leq b \leq 1$ et $\delta = [k, a, b]$.

La fonction de transfert du correcteur PID est :

$$C(s, \theta_c) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s + T_d s} \right) \quad (4.27)$$

avec $\theta_c = [K_c, T_i, T_d]$

Le calcul de la transformée de Laplace de l'erreur de poursuite donne :

$$E(s) = \frac{\beta_2(\theta_c, \delta)s^2 + \beta_1(\theta_c, \delta)s + \beta_0(\theta_c, \delta)}{\alpha_0(\theta_c, \delta)s^3 + \alpha_1(\theta_c, \delta)s^2 + \alpha_2(\theta_c, \delta)s + \alpha_3(\theta_c, \delta)} \quad (4.28)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \beta_1(\theta_c, \delta) &= k k_c T_d T_i, \beta_2(\theta_c, \delta) = k k_c T_i, \beta_3(\theta_c, \delta) = k k_c, \\ \alpha_0(\theta_c, \delta) &= T_i, \alpha_1(\theta_c, \delta) = T_i(a + b + k k_c T_d), \alpha_2(\theta_c, \delta) = T_i(k k_c + ab), \alpha_3(\theta_c, \delta) = k k_c \end{aligned}$$

Le calcul de l'ICE par la méthode de Aström donne :

$$J(\theta_c, \delta) = \frac{\left[\alpha_1 \left(\beta_3 - \frac{\alpha_3 \beta_1}{\alpha_2} \right)^2 + \alpha_3 (\beta_2)^2 \right]}{2 \alpha_1 \alpha_3 \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_0 \alpha_3}{\alpha_1} \right)} + \frac{(\beta_1)^2}{2 \alpha_0 \alpha_1}$$

L'application du critère stabilité de Routh-Jury à la boucle de commande conduit à la condition suivante :

$$K_c, T_i, T_d \geq 0 \quad (4.29)$$

Ainsi, le problème de synthèse du correcteur PID robuste peut être formulé sous forme du problème d'optimisation standard suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{k_c, \tau_i, \tau_d, w} w \\ & \text{subject to :} \\ & J(\theta_c, \delta^{(i)}) \leq w, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.30)$$

où

$$J(\theta_c, \delta^{(i)}) = \frac{\left[\alpha_1^{(i)} \left(\beta_3^{(i)} - \frac{\alpha_3^{(i)} \beta_1^{(i)}}{\alpha_1^{(i)}} \right)^2 + \alpha_3^{(i)} \left(\beta_2^{(i)} \right)^2 \right]}{2 \alpha_1^{(i)} \alpha_3^{(i)} \left(\alpha_2^{(i)} - \frac{\alpha_0 \alpha_3^{(i)}}{\alpha_1^{(i)}} \right)} + \frac{\left(\beta_1^{(i)} \right)^2}{2 \alpha_0 \alpha_1^{(i)}}$$

avec

$$\delta^{(i)} = [k^{(i)}, a^{(i)}, b^{(i)}], \alpha_k^{(i)} = \alpha_k(\theta_c, \delta^{(i)}) \text{ et } \beta_k^{(i)} = \beta_k(\theta_c, \delta^{(i)}).$$

Le nombre des variables de décision $d = 4$ (k_c, T_i, T_d and ω). Ainsi, en prenant $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-3}$, le nombre d'échantillons obtenu par la relation (2.19) est $N_\delta = 12093$.

La résolution du problème d'optimisation standard précédent par un algorithme génétique aboutit à la solution :

$$k_c^* = 14.6521, T_i^* = 0.0775, T_d^* = 17.0776 \text{ et } w^* = 0.0252. \quad (4.31)$$

Les différentes valeurs de la contrainte ($J(\theta_c, \delta^{(i)})$) obtenues pour les $N = 12093$ échantillons des incertitudes, générés aléatoirement et distribués uniformément sur l'intervalle des contraintes $\Delta = [1, 3] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$, sont données par la figure 4.7.

La figure 4.8 représente l'évolution de la sortie $y(t)$ obtenue pour plusieurs valeurs des incertitudes générées aléatoirement. On constate que malgré les incertitudes des paramètres k, a et b , la sortie suit la consigne avec une erreur statique nulle et un dépassement nulle et un temps de réponse acceptable. Ce qui confirme la robustesse du correcteur PID synthétisé.

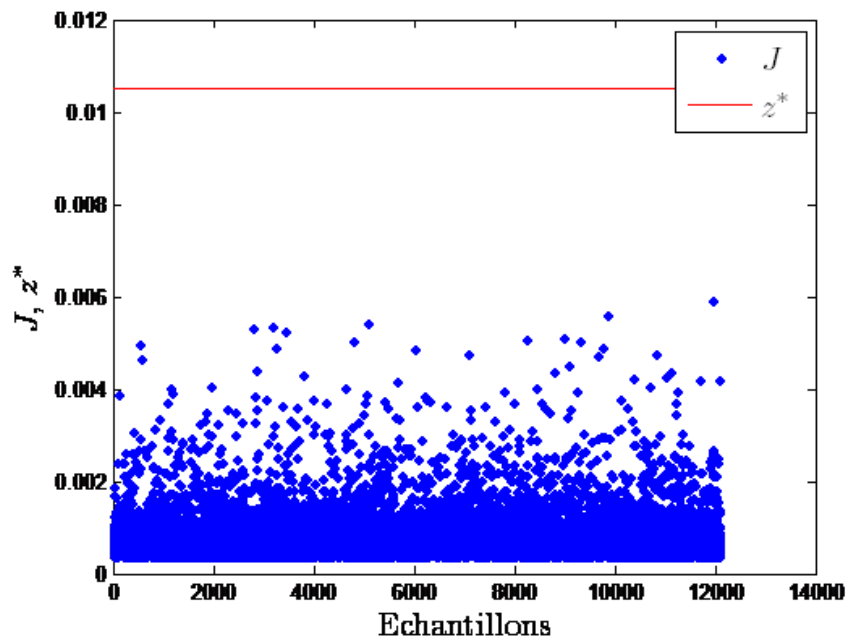


FIGURE 4.7: Valeurs de la contrainte J et du critère minimisé ω^* obtenus pour les échantillons des incertitudes considérés et les paramètres du PID obtenus.

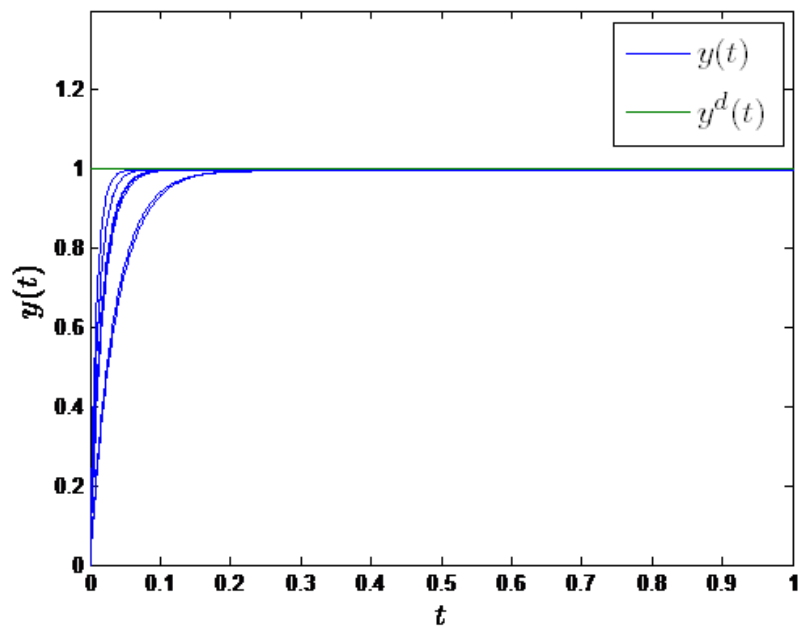


FIGURE 4.8: Évolution de la sortie $y(t)$ pour quelques incertitudes générées aléatoirement.

4.7 Conclusion

Ce chapitre présente une méthode de synthèse de correcteurs robustes, basée sur l'approche des scénarios, développée pour les systèmes à paramètres localisés linéaires incertains.

Ainsi, le problème de synthèse d'un correcteur robuste pour un système à paramètres localisés linéaire incertain est posé. Les incertitudes sont paramétriques et supposées bornées et la structure du correcteur est connue. Puis, pour résoudre ce problème de commande, en premier lieu le problème de synthèse de correcteur robuste est formulé sous forme d'un problème d'optimisation semi-infinie avec un nombre infini de contraintes. La fonction objective correspond à un critère de performance de la commande à réaliser, les variables de décision sont les paramètres du correcteur et les contraintes correspondent à des critères de stabilités et de robustesse à assurer en boucle fermée. En deuxième lieu, par l'utilisation de l'approche des scénarios, le problème d'optimisation semi infini formulé est réécrit sous forme d'un problème d'optimisation standard avec un nombre de contraintes fini. En dernier lieu, les paramètres du correcteur sont déterminés par la résolution de ce problème d'optimisation standard. Quatre critères de performances, basées sur l'intégrale de l'erreur de poursuite, et pouvant être choisis comme fonction objectif sont présentés.

Afin d'illustrer les performances de la méthode développée, deux d'applications ont été présentées. Elles concernent la synthèse de correcteurs robustes du type PID pour des systèmes incertains du premier et du second ordre. L'intégrale du carré de l'erreur (ICE) est choisie comme critère de performance à optimiser (fonction objectif du problème d'optimisation semi infini). Pour obtenir une convergence rapide de la solution optimale du problème d'optimisation standard, le critère ICE est exprimé analytiquement comme une fonction des paramètres du correcteur à synthétiser et des incertitudes du système à commander. Après la synthèse de chaque correcteur, une simulation de la boucle fermée est réalisée en considérant plusieurs cas pour les paramètres incertains. Pour les deux applications et toutes les simulations réalisées, les réponses obtenues montrent une bonne poursuite de consigne ; ce qui prouve la justesse de la méthode proposée.

Chapitre 5

Commande robuste d'un système à paramètres distribués

5.1 Introduction

La commande robuste des systèmes à paramètres distribués est un domaine de recherche actif et difficile [6], [16], [84]. A cause de la dimension infinie des SPDs, la synthèse des correcteurs robustes pour ce type de systèmes est une tâche difficile et peu de contributions existent dans la littérature [85], [86], [87], [88].

La première approche proposée est basée sur l'approximation du SPD par un SPL par une opération de discrétisation des EDP ou de leurs solutions (approche de pré-approximation) [13]. L'objectif est d'exploiter la théorie de la commande robuste des SPLs qui propose des méthodes puissantes de conception de correcteurs robustes. Afin que la dynamique du SPD soit bien approximée par le SPL, ce dernier doit être de grande dimension. Par conséquent, le problème de conception du correcteur est NP-difficile et la conception du correcteur robuste est une tâche complexe et rarement réalisable [62].

La deuxième approche est basée sur l'utilisation directe du modèle PDE sans aucune approximation (approche de post-approximation). Cette approche conduit également à des problèmes d'optimisation robustes classés NP-difficiles formulés dans un espace de dimension infinie [89].

Le présent chapitre présente une stratégie de commande robuste pour un système à paramètres distribués incertain [104]. Le problème de commande, formulé en section 5.2, correspond à la commande de température d'une tige métallique dont le rayon ainsi que les valeurs de certains paramètres physiques sont incertains mais bornés. L'objectif de cette commande consiste à imposer une température désirée pour une sortie définie comme la température moyenne de la tige malgré les incertitudes paramétriques.

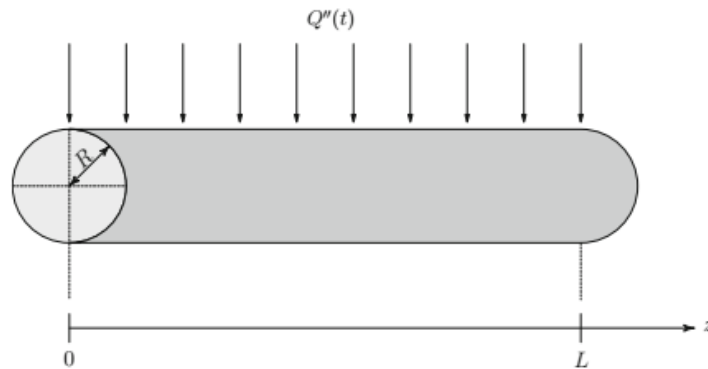
La stratégie de commande développée, présentée en section 5.3, comporte deux étapes. En première étape, il est proposé de considérer un modèle nominal et d'utiliser, par la suite, le concept du degré relatif de la commande géométrique [14] pour calculer un retour d'état garantissant la poursuite de consigne et la stabilité en boucle fermée. En seconde étape, pour faire face aux incertitudes paramétriques, un correcteur robuste structuré définissant l'entrée de référence du retour d'état est synthétisé par l'approche des scénarios [61]. En section 5.4, les performances de la stratégie de commande robuste proposée sont démontrées, par simulation, dans le cas de problème de chauffage d'une tige en acier dont les valeurs de son rayon sont incertaines et bornées dans un intervalle connu. L'objectif est d'atteindre, malgré ces incertitudes, une température de consigne désirée pour la température moyenne le long de la tige.

5.2 Formulation du problème de commande robuste

Le problème de commande robuste abordé dans ce chapitre correspond à la commande de température d'une tige métallique, de longueur L , chauffée par un flux de chaleur distribué $Q''(t)$ (figure 5.1). On suppose que la tige est soumise à des échanges de chaleur avec l'environnement à travers sa surface latérale et les deux extrémités sont en contact (à la même température) avec le milieu extérieur.

On considère que le coefficient de transfert de chaleur h , la conductivité thermique λ et le rayon R de la tige sont des paramètres incertains et bornés dans des intervalles connus définis respectivement par $[h_{min}, h_{max}]$, $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ et $[R_{min}, R_{max}]$.

L'objectif de commande consiste à calculer la commande (profil du flux $Q''(t)$) à ap-

FIGURE 5.1: Tige chauffée avec un flux de chaleur $Q''(t)$.

pliquer pour réaliser, en dépit des incertitudes sur les paramètres h , λ et R , la poursuite d'un signal de consigne désirée. la sortie commandée est définie comme une fonction des températures des points de la surface latérale de la tige donnée par :

Compte tenu de la description du problème de commande ci-dessus, l'évolution de la température le long de la tige est régie par l'équation aux dérivées partielles suivante [90] :

$$\rho c_p \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{2h}{R} (T(z, t) - T_{\text{env}}) + d(z) Q''(t), \quad 0 < z < L \quad (5.1)$$

Accompagnée des équations des conditions aux limites et des conditions initiales suivantes :

$$T(0, t) = T_{\text{env}} \quad (5.2)$$

$$T(L, t) = T_{\text{env}} \quad (5.3)$$

$$T(z, 0) = T_0(z) \quad (5.4)$$

où :

- $T(z, t) \in L^2(0, L)$ est la température de la tige, $z \in [0, L]$ et $t \in [0, \infty[$ sont respectivement les variables de l'espace et du temps.
- ρ , c_p , λ et h sont les propriétés physiques de la tige et désignent respectivement la densité, la capacité calorifique, la conductivité thermique et le coefficient de transfert de chaleur,
- T_{env} est la température ambiante et $T_0(z) \in L^2(0, L)$ est le profil de température spatiale à $t = 0$,

- $Q''(t) \in L^2([0, L[, \Re)$ est le flux de chaleur manipulé (commande),
- $d(z) \in L^2([0, L])$ est une fonction lisse connue qui caractérise la distribution de $Q''(t)$ dans le domaine spatial $]0, L[$,
- $L^2(0, L)$ est l'espace de Hilbert des fonctions carrées intégrables, définies sur le domaine spatial $[0, L]$, équipé d'un produit scalaire [91]

$$\langle f(z), g(z) \rangle_{L^2(0, L)} = \int_0^L f(z) g(z) dz \quad (5.5)$$

et de la norme

$$\|f(z)\|_{L^2(0, L)}^2 = \langle f(z), f(z) \rangle_{L^2(0, L)} \quad (5.6)$$

Pour une étude générale, on propose de travailler avec un modèle sans dimension. Pour ce faire, on considère les variables non dimensionnelles suivantes

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{T(z, t) - T_{\text{env}}}{T_f - T_{\text{env}}}, \quad \xi = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{\lambda t}{\rho c_p L^2} \quad (5.7)$$

où T_f est la température de fusion du métal de la tige.

En appliquant ces changement de variables aux equations du modèle de la température de la tige, le modèle sans dimensions suivant est obtenu

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta \theta(\xi, \tau) + b(\xi) q''(\tau), \quad 0 < \xi < 1 \quad (5.8)$$

$$\theta(0, \tau) = 0 \quad (5.9)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (5.10)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi) \quad (5.11)$$

où

$$b(\xi) = \frac{L^2 d(\xi L)}{\lambda (T_f - T_{\text{env}})}, \quad q''(\tau) = Q'' \left(\frac{\rho c_p L^2 \tau}{\lambda} \right), \quad \theta_0(\xi) = \frac{T_0(z) - T_{\text{env}}}{T_f - T_{\text{env}}} \quad (5.12)$$

$$\beta = \frac{2 h L^2}{\lambda R} \quad (5.13)$$

On note que les incertitudes définies sur les paramètres h , λ et R se traduisent dans le modèle non-dimensionnel par des incertitudes sur le paramètres β définies par

$$\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}] \quad (5.14)$$

avec $\beta_{min} = \frac{2 h_{min} L^2}{\lambda_{max} R_{min}}$ et $\beta_{max} = \frac{2 h_{max} L^2}{\lambda_{min} R_{max}}$.

Ainsi, le nouvel objectif de commande consiste à calculer un signal de commande (profil du flux $q''(\tau)$) à appliquer pour assurer, en dépit des incertitudes sur le paramètre β , une poursuite du signal de consigne désirée par la sortie commandée exprimée par :

$$\theta_m(\tau) = \int_0^1 c(\xi) \theta(\xi, \tau) d\xi \quad (5.15)$$

où $c(\xi)$ est une fonction lisse choisie telle que les spécifications de du cahier des charges soient respectées.

Les fonctions $b(\xi)$ et $c(\xi)$ représentent des éléments de synthèse importants pour les DPSs [14]. Dans le cas de cette présente étude, le choix de ces deux fonctions est précisé dans les hypothèses 1 and 2.

Hypothèse 1 *Les deux fonctions lisses $b(\xi)$ et $c(\xi)$ sont choisies non orthogonales [91], c'est-à-dire,*

$$\langle b(\xi), c(\xi) \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 b(\xi) c(\xi) d\xi \neq 0 \quad (5.16)$$

Hypothèse 2 *La fonction $c(\xi) \in H_0^2(0, 1)$, où $H_0^2(0, 1)$ est l'espace de Soborov d'ordre 2 défini comme suit [91]*

$$H_0^2(0, 1) = \{c(z) \in L^2(0, 1) : c^{(k)}(z) \in L^2(0, 1); k = 1, 2 \text{ and } c(0) = c(1) = 0\} \quad (5.17)$$

5.3 Stratégie de commande proposée

Cette section présente la stratégie de commande proposée pour réaliser l'objectif de commande défini dans la section précédente. L'idée de cette stratégie est d'utiliser la théorie de la commande géométrique pour calculer un retour d'état qui permet d'obtenir en boucle fermée un système modélisé par un modèle linéaire à paramètres localisés d'ordre réduit avec des incertitudes paramétriques bornées. Ensuite, pour faire face à l'effet de ces incertitudes paramétriques, il est proposé de définir l'entrée de référence du retour d'état par un correcteur robuste paramétré par l'optimisation par l'approche des scénarios.

5.3.1 Synthèse du retour d'état

Dans cette partie, on considère que le paramètre incertain β prend la valeur nominale β_n égale à la valeur moyenne, c'est-à-dire $\beta_n = \frac{\beta_{min} + \beta_{max}}{2}$.

Le concept de l'indice caractéristique de la théorie du contrôle géométrique des DPSs, introduit par Christofides et Daoutidis [14], stipule que si l'indice caractéristique d'un système donné est σ , alors une dynamique d'un modèle linéaire d'ordre σ peut être imposée au comportement entrée-sortie (comportement de la sortie commandée en réponse à la consigne désirée) de ce système.

L'indice caractéristique est défini comme le plus petit ordre de la dérivée de la sortie qui est exprimée explicitement (linéairement) en fonction de l'entrée [92], [93], [94].

Le calcul de la première dérivée de la sortie contrôlée (5.15) donne

$$\frac{d\theta_m(\tau)}{d\tau} = \int_0^1 c(\xi) \frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi \quad (5.18)$$

$$= \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) + b(\xi) q''(\tau) \right] d\xi \quad (5.19)$$

$$= \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi + \left[\int_0^1 c(\xi) b(\xi) d\xi \right] q''(\tau) \quad (5.20)$$

Dans l'équation (5.20), on constate que la commande $q''(\tau)$ apparaît linéairement dans la première dérivée de la sortie commandée $\theta_m(\tau)$ pondérée par le coefficient $\left(\int_0^1 c(\xi) b(\xi) d\xi \right)$ qui est non nul (Hypothèse 1). Ce qui signifie que l'indice caractéristique de ce système est $\sigma = 1$. Par conséquent, il est possible de calculer un retour d'état $q''(\tau)$ imposant au transfert « consigne - sortie commandée » une dynamique d'un système linéaire du premier ordre (figure 5.2) modélisé par l'équation différentielle

$$\gamma \frac{d\theta_m(\tau)}{d\tau} + \theta_m(\tau) = \vartheta \quad (5.21)$$

où γ est la constante de temps désiré en boucle fermée et ϑ est une entrée de référence externe. Cette entrée est supposée constante et représente la température désirée.

En substituant $\theta_m(\tau)$ et $d\theta_m(\tau)/d\tau$ par leurs expressions données respectivement par les équation (5.15) et (5.20) dans l'équation (5.21), puis en résolvant l'équation obtenue par rapport à $q''(\tau)$, on obtient l'expression de la commande $q''(\tau)$ suivante

$$q''(\tau) = \frac{1}{\gamma \int_0^1 c(\xi) b(\xi) d\xi} \left(\vartheta - \theta_m(\tau) - \gamma \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right) \quad (5.22)$$

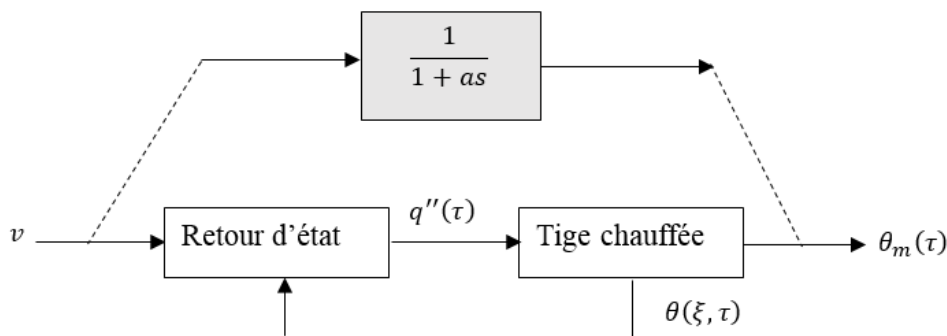


FIGURE 5.2: Boucle de commande par retour d'état.

En remplaçant dans (5.8) le flux $q''(\tau)$ par son expression donnée en (5.22), on obtient l'équation d'évolution de la boucle fermée (tige chauffée + retour d'état) comme suit :

$$\frac{\partial \theta(\xi, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta \theta(\xi, \tau) + \frac{b(\xi)}{\gamma \int_0^1 c(\xi) b(\xi) d\xi} \times \left(\vartheta - \theta_m(\tau) - \gamma \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right) \quad (5.23)$$

A partir de l'équation de la dynamique de la boucle fermée (5.21), on constate que la stabilité externe est assurée lorsque la constante de temps $\gamma > 0$. Ceci n'est pas suffisant pour assurer la stabilité interne du système en boucle fermée (5.23).

Pour déterminer la condition de stabilité interne du système en boucle fermée, on commence par l'écriture des équations du modèle en la boucle ouverte (5.8) et du retour d'état (5.22) sous la forme abstraite suivante [95],[96]

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \mathcal{A}_{ol} \theta(\tau) + \mathcal{B}_{ol} q''(\tau) \quad (5.24)$$

et

$$q''(\tau) = \mathcal{K} \theta(\tau) + \mathcal{H} e_{re}(\tau) \quad (5.25)$$

Les opérateurs sont définis comme suit

$$\mathcal{A}_{ol} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \beta, \mathcal{B}_{ol} = b(\xi), \mathcal{K} = I \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \beta_n \right] d\xi, \mathcal{H} = I \gamma^{-1} \quad (5.26)$$

avec $I = \left[\int_0^1 c(\xi) b(\xi) d\xi \right]^{-1}$ et $e_{re}(\tau) = \vartheta - \theta_m(\tau)$ (re = retour d'état).

Par conséquent, puisque ϑ représente une température constante, le système en boucle fermée (5.23) peut être écrit sous la forme abstraite suivante

$$\frac{de_{\text{re}}(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\gamma} e_{\text{re}}(\tau) \quad (5.27)$$

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = \mathcal{A}_{\text{cl}} \theta(\tau) + \mathcal{H} e_{\text{re}}(\tau) \quad (5.28)$$

ou $\mathcal{A}_{\text{cl}} = (\mathcal{A}_{\text{ol}} - \mathcal{B}_{\text{ol}} \mathcal{K})$ est l'opérateur d'état résultant en boucle fermée.

Dans l'équation (5.21), on a $\gamma > 0$ (constante de temps), d'où

$$\|e_{\text{re}}(\tau)\| \leq |e_{\text{re}}(0)| e^{-\tau/\gamma} \quad (5.29)$$

Par conséquent, la stabilité du système en boucle fermée (5.27)–(5.28) est assurée si l'opérateur d'état \mathcal{A}_{cl} génère un semi-groupe stable [97]. La condition de stabilité interne du système en boucle fermée (5.23) est donnée par la proposition 1.

Proposition 1 *Le système en boucle fermée (5.27)–(5.28), pour lequel l'hypothèse 1 et 2 sont respectées, est stable du point de vue stabilité interne, c'est-à-dire, l'opérateur \mathcal{A}_{cl} génère un semigroupe exponentiellement stable, si*

$$|I| \left\| \frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \|b^2(\xi)\|_{L^2(0,1)} < \beta_{\min} + \pi^2 \quad (5.30)$$

Démonstration 1 *L'opérateur d'état en boucle fermée résultant \mathcal{A}_{cl} représente l'opérateur d'état en boucle ouverte \mathcal{A}_{ol} perturbé par l'opérateur $\mathcal{B}_{\text{ol}} \mathcal{K}$. Ainsi, selon le théorème de l'opérateur borné [98], puisque \mathcal{A}_{ol} est un générateur d'un semi-groupe stable [99], c'est à dire,*

$$\|U(\tau)\| \leq e^{-(\beta+\pi^2)\tau}, \quad (\beta > 0 \text{ selon (5.13)}) \quad (5.31)$$

et si la perturbation $\mathcal{B}_{\text{ol}} \mathcal{K}$ est bornée, alors l'opérateur \mathcal{A}_{cl} est un générateur du semi-groupe suivant

$$\|S(\tau)\| \leq e^{(-\beta-\pi^2+\|\mathcal{B}_{\text{ol}} \mathcal{K}\|_{L^2(0,1)})\tau} \quad (5.32)$$

qui est stable si la condition suivante est satisfaite

$$-(\beta + \pi^2) + \|\mathcal{B}_{\text{ol}} \mathcal{K}\|_{L^2(0,1)} > 0 \quad (5.33)$$

l'opérateur linéaire $\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}$ est borné, ce qui revient à vérifier l'existence de la constante C telle que

$$\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)} \leq C \|\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)} \quad (5.34)$$

et la petite valeur de C représente la norme de $\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\|_{L^2(0,1)}$.

La première étape de la preuve est de démontrer que l'opérateur $\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}$ est borné, c'est-à-dire on vérifie l'existence de la constante C .

Le calcul de la norme de $\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}$ donne

$$\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 = \left\| I b(\xi) \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (5.35)$$

$$= \int_0^1 \left[I b(\xi) \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right]^2 d\xi \quad (5.36)$$

$$= I^2 \int_0^1 \left[b(\xi) \left| \int_0^1 c(\xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right| \right]^2 d\xi \quad (5.37)$$

En tenant compte de l'hypothèse (2) et des conditions au limites (5.9) et (5.10), l'intégration par parties du premier terme de l'intégrale interne dans (5.37) devient

$$\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 = I^2 \int_0^1 \left[b(\xi) \left| \int_0^1 \left(\frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right) \theta(\xi, \tau) d\xi \right| \right]^2 d\xi \quad (5.38)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet d'écrire

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right) \theta(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \int_0^1 \left\| \frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \|\theta(\xi, \tau)\|_{L^2(0,1)} d\xi \quad (5.39)$$

d'où

$$\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)}^2 \leq I^2 \int_0^1 b^2(\xi) \left\| \frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)}^2 \|\theta(\xi, \tau)\|_{L^2(0,1)}^2 d\xi \quad (5.40)$$

$$\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\theta(\tau)\|_{L^2(0,1)} \leq |I| \left\| b^2(\xi) \right\|_{L^2(0,1)} \left\| \frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \|\theta(\xi, \tau)\|_{L^2(0,1)} \quad (5.41)$$

$$\leq C \|\theta(\xi, \tau)\|_{L^2(0,1)} \quad (5.42)$$

avec

$$C = |I| \left\| \frac{d^2 c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \left\| b^2(\xi) \right\|_{L^2(0,1)} \quad (5.43)$$

par conséquent, on peut conclure que l'opérateur $\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}$ est borné et sa norme est $\|\mathcal{B}_{ol}\mathcal{K}\|_{L^2(0,1)} = C$.

la seconde étape de la preuve est d'obtenir la condition de stabilité interne (5.30). Ainsi, selon le développement ci-dessus, l'opérateur d'état en boucle fermée \mathcal{A}_{cl} génère le semi groupe suivant

$$\|S(\tau)\| \leq e^{-(\beta+\pi^2-C)\tau} \quad (5.44)$$

qui est stable si $\beta + \pi^2 - C > 0$, c'est à dire,

$$|I| \left\| \frac{d^2c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \|b^2(\xi)\|_{L^2(0,1)} < \beta + \pi^2 \quad (5.45)$$

Comme $0 < \beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}$, alors le système en boucle fermée (5.27)–(5.28) est exponentiellement stable si

$$|I| \left\| \frac{d^2c(\xi)}{d\xi^2} - \beta_n \right\|_{L^2(0,1)} \|b^2(\xi)\|_{L^2(0,1)} < \beta_{\min} + \pi^2 \quad (5.46)$$

Remarque 3 Le coté gauche de la condition (5.46) dépend à la fois de $b(\xi)$ et de $c(\xi)$, donc par un choix approprié de ces deux fonctions, on peut garantir la stabilité interne.

■

Jusqu'à présent la loi de commande synthétisée (5.22) permet une poursuite exacte avec la dynamique désirée caractérisée par la constante de temps γ que lorsque $\beta = \beta_n$. Par contre, dans le cas où β est différent de β_n , la dynamique de la boucle fermée caractérisée par (5.21) ne sera pas réalisée exactement et une détérioration des performances va être observée sur la sortie commandée $\theta_m(\tau)$. Ainsi, le temps de réponse va être affecté et des importantes erreurs statiques vont être observées (ceci est illustré dans le cas d'un exemple étudié dans la section 5.4). Par conséquent, le système en boucle fermée peut être décrit par la fonction de transfert incertaine suivante

$$G(s, \delta) = \frac{\theta_m(\tau)}{\vartheta} = \frac{\kappa}{a s + 1} \quad (5.47)$$

où $k \in [\kappa_{\min}, \kappa_{\max}]$ et $a \in [a_{\min}, a_{\max}]$ sont respectivement les intervalles bornés des incertitudes a and κ . Ces incertitudes sont groupées dans le vecteur $\delta = [a, \kappa] \in \Delta$.

Comme les valeurs maximales et minimales des paramètres incertains a et κ ne peuvent être déterminées analytiquement en fonction de β , nous avons proposé de les estimer à partir de plusieurs observations du signal de la sortie, $\theta_m(\tau)$, obtenues par simulation de la boucle de commande pour plusieurs valeurs du paramètre incertain β .

5.3.2 Synthèse du correcteur robuste

Pour pallier au problème de la détérioration des performances causé par les variations des paramètres (incertitudes) a et κ , il est proposé de définir l'entrée de référence ϑ , du retour d'état (5.22), par un correcteur robuste externe comme est illustré par la figure 5.3 qui résume la stratégie de contrôle proposée.

Pour la synthèse du correcteur robuste, il est proposé d'utiliser la méthode basée sur l'approche des scénarios développée au chapitre précédent. Ainsi, en premier lieu, un problème d'optimisation robuste est formulé à partir des spécifications désirées. Puis le problème d'optimisation obtenu est réécrit sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini. Ensuite, par l'utilisation de l'approche scénario, ce problème d'optimisation robuste est réécrit sous forme de problème d'optimisation standard qui est résolu par la suite par une méthode de résolution des problèmes d'optimisation standard.

- **Formulation du problème d'optimisation robuste**

Pour synthétiser le correcteur structuré noté $G_c(s, p)$, on propose de déterminer, pour toute les valeurs possibles du vecteur des paramètres incertains δ , le vecteur des paramètres du correcteur p ($p \in \mathbb{R}^{np}$, np nombre de paramètres de $G_c(s, p)$) minimisant l'erreur ICE. Ainsi, le problème de synthèse du correcteur structuré

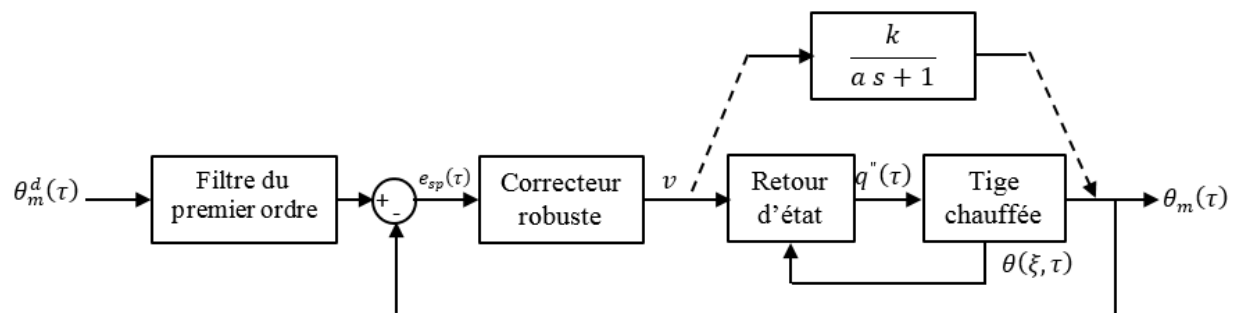


FIGURE 5.3: Schéma bloc de la stratégie de commande proposée (lignes pointillées indique l'équivalence).

peut être formulé par le problème d'optimisation min-max suivant :

$$\min_p \max_{\delta} J(p, \delta) \quad (5.48)$$

sujet à :

$$g^r(p, \delta) \leq 0 \quad (5.49)$$

$$g^s(p, \delta) \leq 0 \quad (5.50)$$

Les contraintes g^r and g^s assurent la robustesse et la stabilité de la boucle de commande globale.

- **Formulation du problème d'optimisation semi-infini**

Le problème d'optimisation robuste précédent peut être réécrit sous forme d'un problème d'optimisation semi-infini suivant :

$$\min_{p, w} w \quad (5.51)$$

sujet à :

$$J(p, \delta) \leq w \quad (5.52)$$

$$g^r(p, \delta) \leq 0 \quad (5.53)$$

$$g^s(p, \delta) \leq 0 \quad (5.54)$$

où w est une nouvelle variable de décision.

- **Formulation du problème d'optimisation standard**

Par l'utilisation de l'approche des scénarios, la solution du problème d'optimisation semi infini (5.51)-(5.54) est réduite à la solution du problème d'optimisation standard défini comme suit :

$$\min_{p, w} w \quad (5.55)$$

sujet à :

$$J(p, \delta^{(i)}) \leq w \quad (5.56)$$

$$g^r(p, \delta^{(i)}) \leq 0 \quad (5.57)$$

$$g^s(p, \delta^{(i)}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_{\delta} \quad (5.58)$$

où $\delta^{(i)} = [a^{(i)}, \kappa^{(i)}]$, ($i = 1, \dots, N_\delta$) sont les échantillons du vecteur des paramètres incertains indépendants et uniformément distribués sur les intervalles des incertitudes respectifs.

Dans le cas général, le problème d'optimisation (5.55)-(5.58) est non convexe (les fonctions des contraintes sont non convexes). Par conséquent, le nombre d'échantillons N_δ est déterminé en utilisant la relation 2.19 et en choisissant des paramètres de confiance η et de précision ε .

- **Résolution du problème d'optimisation standard**

La résolution du problème d'optimisation standard obtenu (5.55)-(5.58), peut être réalisée par l'utilisation d'une méthode d'optimisation des problèmes déterministes.

5.4 Application numérique

Pour démontrer les performances de la stratégie de commande robuste proposée, nous considérons le problème de commande précédent avec une tige en acier caractérisée par :

- les propriétés physiques [102] : $\rho = 7350.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $c_p = 570 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ and $h = 4.19 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$,
- la longueur $L = 1 \text{ m}$,
- le rayon R incertain dans l'intervalle borné $[0.15 \text{ m}, 0.35 \text{ m}]$.

Ce qui donne, selon la relation (5.13), $\beta \in [0.6667, 1.3317]$

La fonction de distribution du flux de chaleur est $b(\xi) = 1$ (distribution uniforme) et la fonction d'observation $c(\xi) = \xi(1 - \xi)$.

Ainsi, (5.22) donne le retour d'état suivant

$$q''(\tau) = \frac{6}{\gamma} \left(\vartheta - \theta_m(\tau) - \gamma \int_0^1 \xi(1 - \xi) \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \beta_n \theta(\xi, \tau) \right] d\xi \right) \quad (5.59)$$

Pour déterminer les intervalles d'incertitudes des paramètres a et κ du système du premier ordre équivalent à la boucle de commande (retour d'état et tige), le modèle de cette dernière est simulé pour plusieurs valeurs de β linéairement distribuées dans l'intervalle des incertitude $[0.6667, 1.3317]$.

Cette simulation est réalisée par l'utilisation de la méthode des lignes en considérant : $\gamma = 3$, $\vartheta = 0.5$ et $\beta_n = 0.8889$. La valeur nominale β_n , est calculée par la relation (5.13) et en prenant $R = R_n = (R_{\min} + R_{\max})/2$.

Les allures de la sortie $\theta_m(\tau)$ obtenues pour les différentes valeurs de β considérées sont données par la figure 5.4.

Les résultats obtenus montrent clairement qu'en présence des incertitudes ($\beta \neq \beta_n$), le retour d'état (5.59) ne permet pas d'assurer la poursuite de l'entrée de référence spécifiée. Par contre dans le cas où $\beta = \beta_n$, la poursuite est achevée avec la dynamique spécifiés (dynamique d'un système du premier ordre avec constante de temps $\gamma = 3$ et un gain $\vartheta = 0.5$), ceci est attendu parce que pour le calcul du retour d'état β est pris égale à β_n .

Les évolutions des paramètres a et κ , du modèle incertain (5.47), pour les différentes valeurs de β considérées, sont données par la figure 5.5. Cette figure montre des évolutions non linéaires pour les deux paramètres.

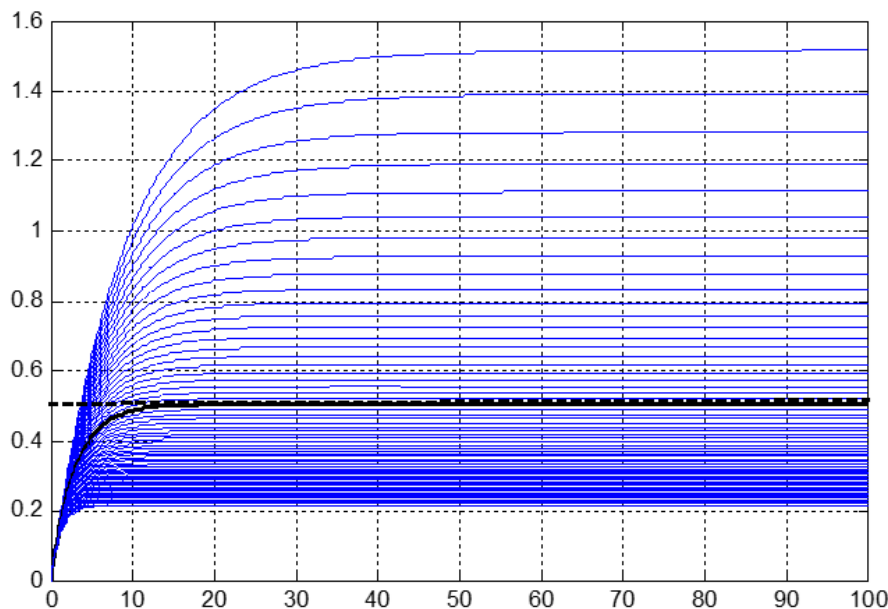
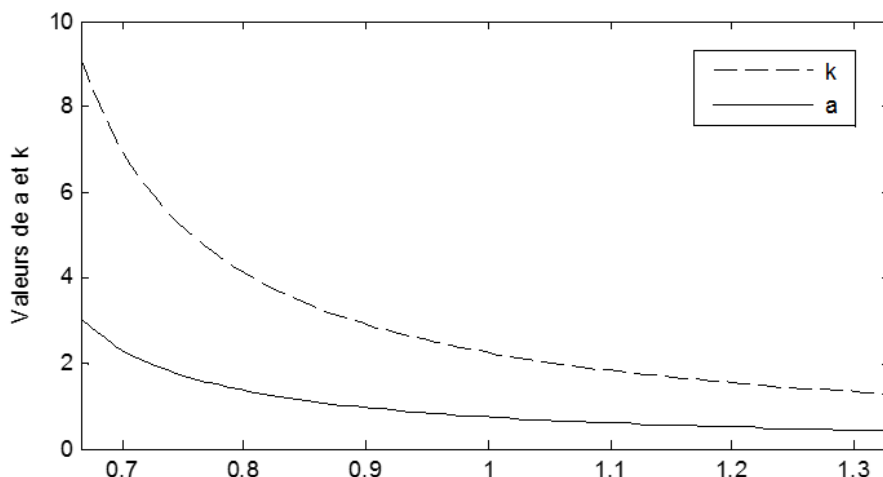


FIGURE 5.4: Évolution de la sortie commandée. La ligne discontinue représente l'entrée de référence ϑ , la ligne continue noire représente la sortie commandée $\theta_m(\tau)$ obtenue pour $\beta = \beta_n$ et les lignes continues bleus représentent les sorties commandée $\theta_m(\tau)$ obtenues pour $\beta \neq \beta_n$.

FIGURE 5.5: Evolutions des paramètres a et κ en fonction de β .

Les intervalles de variations des paramètres incertains a et κ sont obtenus comme suit :

$$[\kappa_{\min}, \kappa_{\max}] = [1.2872, 8.9770] \text{ et } a \in [a_{\min}, a_{\max}] = [0.4293, 2.9925]$$

Ce qui donne

$$\delta = [a, \kappa] \in \Delta = [0.4293, 2.9925] \times [1.2872, 8.9770] \in \mathbb{R}^2$$

Pour éliminer l'effet des incertitudes sur les performances de la sortie commandée nous avons proposé de définir l'entrée de référence du retour d'état (5.59) par un correcteur PID robuste aux variations des paramètres a et κ . le réglage du correcteur est réalisé en utilisant la méthode, basée sur l'approche des scénarios, présentée au chapitre 4.

La fonction de transfert du correcteur PID est défini par

$$G_c(s, p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (5.60)$$

où K_c , T_i et T_d sont les paramètres de réglage du correcteur. Donc, $p = [K_c, T_i, T_d]$.

La transformée de Laplace de l'erreur de poursuite est

$$E_{\text{sp}}(s) = \frac{T_i \kappa s + T_i}{T_i (\kappa + a K_c T_d) s^2 + T_i (1 + a K_c) s + a K_c} \quad (5.61)$$

L'expression du critère de performance ICE obtenue par la méthode de Åström ([103]) est donnée par

$$J(K_c, T_i, T_d, \delta) = \frac{T_i}{2(1 + a K_c)} \left(\frac{1}{a K_c} + \frac{\kappa^2}{T_i (\kappa + a K_c T_d)} \right) \quad (5.62)$$

avec $\delta \in \Delta$.

En plus du choix de la structure du correcteur, certaines contraintes de robustesse peuvent être imposées sur ces paramètres [100]. Ces contraintes définissent la région de robustesse. Par exemple, pour les PIDs commercialisés, les constantes de temps doivent vérifier [100]

$$g^r(K_c, T_i, T_d, \delta) : T_d - \frac{T_i}{4} \leq 0 \quad (5.63)$$

Pour assurer la stabilité de la stratégie de commande robuste, la contrainte de stabilité est obtenue par l'application du critère Routh-Jury [94], comme suit

$$g^s(K_c, T_i, T_d, \delta) = -K_c \leq 0 \quad (5.64)$$

En plus, les deux constantes de temps T_i et T_d doivent être positives, c'est à dire,

$$T_i > 0, \quad T_d > 0 \quad (5.65)$$

Ainsi, le problème de synthèse du correcteur PID robuste peut être formulé par le problème d'optimisation robuste suivant :

$$\min_{K_c, T_i, T_d, w} w$$

sujet à :

$$\begin{aligned} \frac{T_i}{2(1 + a^{(i)} K_c)} \left(\frac{1}{a^{(i)} K_c} + \frac{(\kappa^{(i)})^2}{T_i (\kappa^{(i)} + a^{(i)} K_c T_d)} \right) &\leq w, \quad i = 1, \dots, N \\ T_d - \frac{T_i}{4} &\leq 0 \\ -K_c &\leq 0 \\ -T_i &\leq 0 \\ -T_d &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

où $N_\delta = 12093$ est le nombre des échantillons obtenu en appliquant la relation (2.19) avec $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\eta = 10^{-3}$. Les échantillons sont générés en assumant une de probabilité de distribution uniforme.

Notons que, le nombre de variables de décision du problème d'optimisation (5.66) est $d = 4$ (K_c, T_i, T_d and w) et que M pris égale à $d + 1$, (i.e., $M = 5$).

Le problème d'optimisation (5.66) est résolu par la méthode des algorithmes génétiques. La solution obtenue est

$$K_c^* = 24.2867, T_i^* = 13.0724, T_d^* = 3.1732 \text{ et } w^* = 0.1353 \quad (5.67)$$

La figure 5.6 représente les différentes valeurs du critère de performance (J) pour toutes les incertitudes possibles des paramètres a et κ . La figure montre que la première contrainte (5.66) est violée pour une très petite partie de Δ , qui correspond à des cas où les valeurs de a et κ sont très proches respectivement de 0,4293 et 8,9770. Ainsi, étant donné que la contrainte n'est pas considérablement violée, une dégradation faible est observée dans la réponse de sortie.

Lors de la simulation, le signal de consigne $\theta_m^d(\tau)$ est filtré par un filtre de premier ordre pour éviter les fluctuations soudaines de la sortie commandée $\theta_m(\tau)$ (voir la figure 5.3)

Les évolutions de la sortie $\theta_m^d(\tau)$ et du flux de chaleur manipulé $q''(\tau)$ en boucle fermée pour un ensemble d'incertitudes générées de manière aléatoire sont données par la figure 5.7.

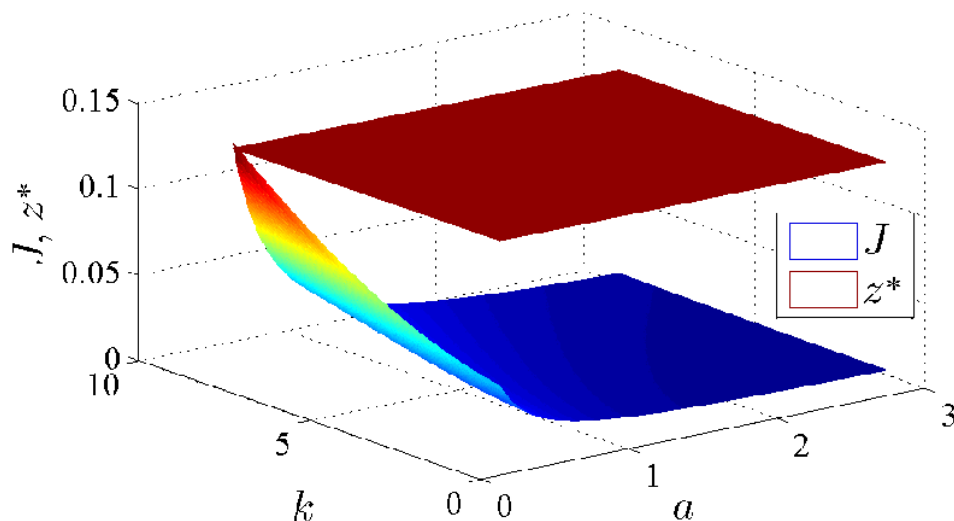


FIGURE 5.6: Valeurs du critère de performance J et de w^* en fonction des incertitudes a et κ .

Les résultats obtenus démontrent la robustesse de la stratégie de commande proposée. En effet, malgré les incertitudes des paramètres, la poursuite de la consigne est assurée d'une manière satisfaisante (écarts faibles et tolérables par rapport à la réponse nominale). En outre, les variations du flux de chaleur manipulé $q''(\tau)$ restent physiquement raisonnables quelle que soit la variation du paramètre β .

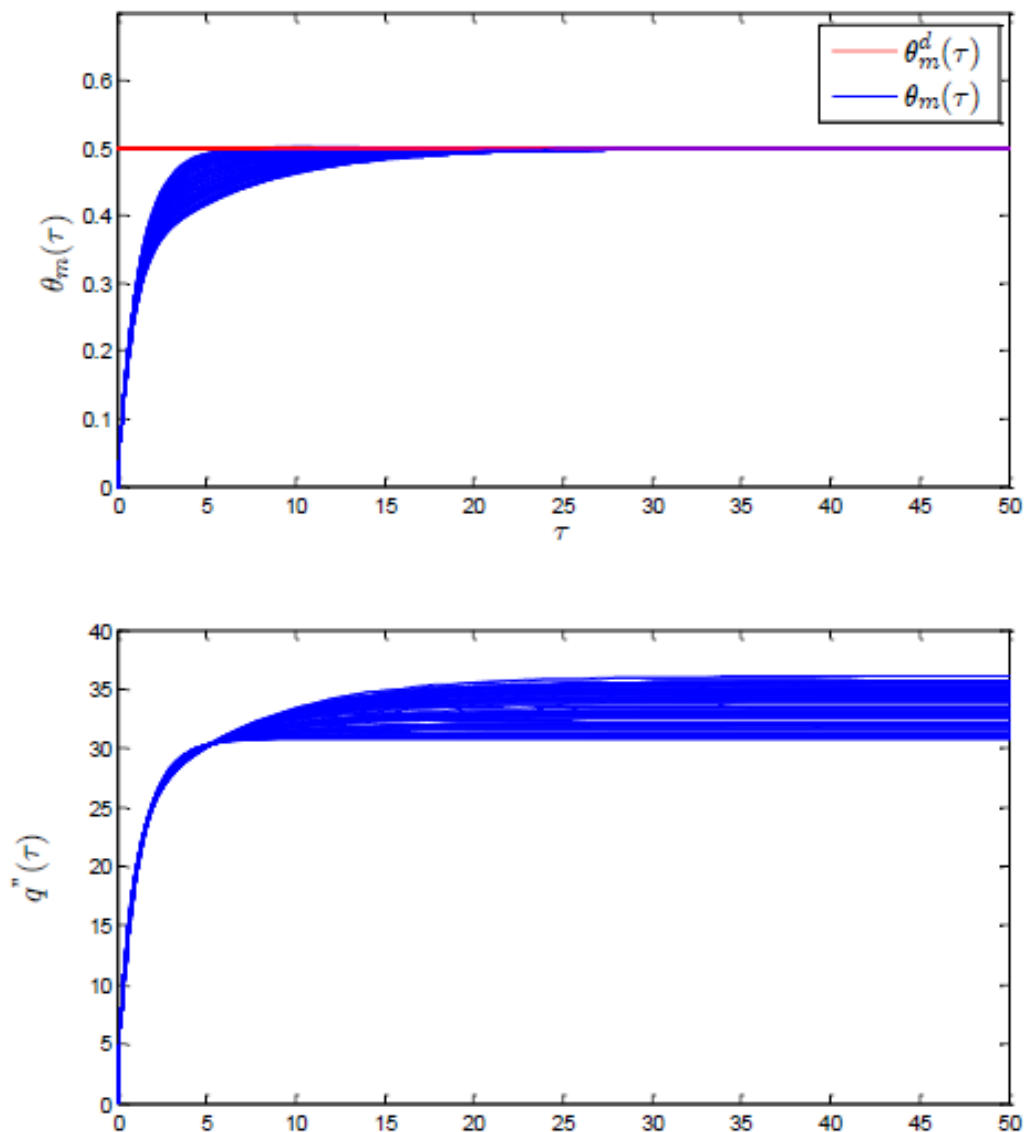


FIGURE 5.7: Performance de la stratégie de commande robuste proposée. La première courbe représente la sortie contrôlée $\theta_m^d(\tau)$ et la deuxième courbe représente le flux de chaleur manipulé $q''(\tau)$ pour différentes incertitudes du paramètre β .

5.5 Conclusion

Ce chapitre propose une stratégie de commande robuste développée pour la commande de température d'une tige chauffée modélisée par une équation de diffusion-réaction linéaire avec des incertitudes paramétriques bornées. En première étape, Le concept de l'indice caractéristique de la théorie de la commande géométrique est utilisé pour calculer un retour d'état permettant d'obtenir en boucle fermée un système à paramètre localisés d'ordre réduit (système du premier ordre).

Il est démontré que par un choix approprié des fonctions d'observation et de commande, le système de boucle fermée qui en résulte est exponentiellement stable malgré les incertitudes paramétriques. Néanmoins, la poursuite de consigne par la sortie commandée est considérablement affectée lorsque les paramètres du système s'écartent de leurs valeurs nominales.

En second étape, pour éviter la détérioration des performances due aux incertitudes paramétriques, il est proposé de définir l'entrée de référence du retour d'état par un correcteur robuste structuré. L'approche développée dans le chapitre précédent est utilisée pour synthétiser ce correcteur.

En supposant la structure du correcteur robuste connue, le problème de réglage des paramètres est formulé sous la forme d'une optimisation robuste garantissant à la fois la robustesse et la stabilité en boucle fermée. Ce problème d'optimisation est ensuite relaxé en utilisant l'approche de scénario en le ramenant à un problème d'optimisation standard facile à résoudre.

Les performances de la stratégie de commande développée sont démontrées en simulation par un exemple d'application concernant le problème de chauffage d'une tige en acier avec un rayon incertain. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de la stratégie de commande développée en poursuite malgré les incertitudes paramétriques.

Conclusion générale

L'optimisation des systèmes de commande constitue une étape primordiale pour améliorer davantage les performances d'un système dynamique. Ainsi, si la structure d'un système de commande est choisie de telle sorte à répondre aux exigences du cahier des charges, son réglage peut être toujours réalisé par optimisation d'un critère de performance. Le travail présenté, dans cette thèse, concerne l'optimisation des correcteurs pour les systèmes à paramètres distribués. L'objectif consiste à développer des approches pour la détermination des correcteurs optimaux.

Ainsi, après avoir introduit des notions sur les systèmes à paramètres distribués, nous avons abordé la théorie des semi-groupes des opérateurs continus utile pour l'analyse de la stabilité des systèmes à paramètres distribués linéaires. Ensuite, nous avons présenté des généralités sur l'optimisation robuste tout en mettant l'accent sur l'approche des scénarios utilisée pour relaxer un problème d'optimisation robuste en un problème d'optimisation standard. Ce dernier peut être aisément résolu par des méthodes d'optimisation déterministes, stochastiques ou hybrides. Puis, nous avons présenté une approche d'optimisation d'un correcteur PI, basée sur la stratégie de pré-approximation, utilisé pour asservir la température d'une barre métallique dont le modèle est identifié aussi par optimisation. Après évaluation des performances par simulation, nous avons implémenté pratiquement le correcteur obtenu. Par la suite, nous avons proposé une approche que nous avons développé pour l'optimisation des correcteurs robustes pour un système linéaire de dimension finie dont les paramètres sont incertains. Pour formuler le problème d'optimisation du correcteur, nous avons proposé d'utiliser la méthode d'Aström pour expliciter analytiquement le critère à optimiser en fonction des paramètres du correcteur et ceux du système.

Dans ce cas, le problème d'optimisation obtenu est du type min-max (robuste), puis en introduisant une nouvelle variable d'optimisation (de décision), nous avons converti le problème d'optimisation min-max en un problème d'optimisation semi-infini dont le nombre de contraintes est infini. Puis, nous avons utilisé l'approche des scénarios pour relaxer le problème d'optimisation en définissant un ensemble de contraintes approprié pour garantir une solution optimale avec une probabilité désirée. Le problème d'optimisation standard résultant est résolu par les algorithmes génétiques. Des systèmes du premier et second ordre incertains ont été considérés pour illustrer les performances d'un correcteur PID robuste optimisé par cette approche. Ensuite, nous avons appliqué cette approche pour l'optimisation d'un système de commande pour un système à paramètres distribués dont les paramètres sont incertains. Ainsi, en utilisant l'approche de la post-approximation, nous avons développée une loi de commande géométrique permettant d'assurer la poursuite de consigne et la stabilité exponentielle en boucle fermée. Par la suite, pour garantir la robustesse du système de commande vis à vis des incertitudes paramétriques, nous avons utilisée la méthode d'optimisation des correcteurs robustes proposée, pour optimiser les paramètres d'un correcteur PID définissant la variable externe du retour d'état distribué. Les performances de la stratégie de commande ont été évaluées par simulation dans le cas d'un problème de chauffage d'une tige métallique dont les dimensions sont aléatoires.

Les contributions principales de la thèse sont résumées par les points suivants :

1. conception basée sur l'approche de pré-approximation et implémentation d'un correcteur PID optimal pour la commande de température d'une tige métallique ;
2. formulation du problème de conception d'un correcteur optimal pour un système à paramètres localisés sous forme d'un problème d'optimisation robuste et application de l'approche des scénarios pour sa résolution ;
3. conception d'un retour d'état de nature distribuée géométrique pour la commande de la température d'une tige métallique avec un terme de source basée sur l'approche de post-approximation ;
4. application du théorème de perturbation pour l'analyse de la stabilité de la tempé-

rature de la tige métallique à paramètres incertains ;

5. combinaison des deux approches pré et post-approximations pour la conception d'un système de commande robuste pour un système à paramètres distribués incertain.

A la lumière des résultats obtenus, on peut affirmer que l'optimisation robuste constitue un outil mathématique intéressant pour l'optimisation d'un correcteur, à structure fixe, pour un système de dimension finie dont les paramètres sont incertains. La résolution du problème d'optimisation robuste par l'utilisation de l'approche des scénarios permet de déterminer aisément un correcteur robuste assurant les performances désirées avec une probabilité qu'on peut facilement contrôler par un judicieux paramétrage du processus de relaxation du problème d'optimisation robuste.

L'utilisation du concept de l'indice caractéristique de la théorie de la commande géométrique permet de concevoir facilement des lois de commandes de nature distribuée (de dimension infinie) pour les systèmes à paramètres distribués linéaires. L'obtention de la loi de commande passe simplement par un calcul successif des dérivées temporelles de la sortie à commander.

Le théorème de perturbation des opérateurs continus, de la théorie des semi-groupes, est une méthode élégante pour démontrer la stabilité d'un système linéaire à paramètres distribués corrigé par une loi de commande de nature distribuée. Nous avons montré, que l'application de ce théorème peut être étendue aux systèmes de dimension infinie comportant des paramètres incertains bornés.

La combinaison des deux approches de pré et post-approximations constitue une idée intéressante pour l'optimisation des performances d'un système de dimension infinie linéaire incertain. En effet, la post-approximation permet d'obtenir en boucle fermée un système à paramètres localisés avec des variations paramétriques qui peuvent être estimées par une simple simulation. Puis, la définition de la variable externe de la loi de commande distribuée par un correcteur robuste, obtenu par optimisation robuste, évite la dégradation des performances du système corrigé en présence des incertitudes.

L'optimisation des correcteurs pour un système à paramètres distribués restent un domaine de recherche inexploré. Plusieurs pistes méritent d'être investies, on peut citer :

- Les systèmes à paramètres distribués dans le domaine fréquentielle sont décrits par des fonctions de transfert irrationnelles. Par conséquent, la conception d'un correcteur en utilisant directement ce type de fonctions de transfert constitue un problème intéressant ;
- La conception des correcteurs optimaux par l'approche des scénarios est prometteuse, ainsi il est intéressant de considérer des problèmes d'optimisation multi-objectifs des correcteurs avec un ensemble de contraintes de robustesse ;
- Dans le cadre de cette thèse, l'étude est limitée au correcteur PID, néanmoins il est intéressant de considérer l'optimisation d'autres stratégies de commande (par exemple une commande en cascade, une commande à modèle interne ou commande floue) et de penser aussi à envisager des correcteurs à structure variable.

Bibliographie

- [1] RAY, W. Harmon. Some recent applications of distributed parameter systems theory, a survey. *Automatica*, 1978, vol. 14, no 3, p. 281-287.
- [2] A. Rachid : Systèmes de régulation. Dunod, Paris, 1996.
- [3] LAKSHMIKANTHAM, Vangipuram. Theory of integro-differential equations. CRC Press, 1995.
- [4] BABARY, Jean-Pierre et PELCZEWSKI, Wladyslaw. Commande optimale des systèmes continus déterministes. Masson, 1985.
- [5] MAIDI, Ahmed. Commande des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles hyperbolique. 2008. Thèse de doctorat. Université Mouloud Mammeri.
- [6] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Control of nonlinear distributed process systems : Recent developments and challenges. *AIChE Journal*, 2001, vol. 47, no 3, p. 514-518.
- [7] PADHI, Radhakant et ALI, Sk Faruque. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, vol. 33, no 1, p. 59-68.
- [8] BOOK, Wayne J. Modeling, design, and control of flexible manipulator arms : A tutorial review. In : *Decision and Control, 1990.*, Proceedings of the 29th IEEE Conference on. IEEE, 1990. p. 500-506.
- [9] DOCHAIN, Denis, BABARY, Jean-Pierre, et TALI-MAAMAR, Nadia. Modelling and adaptive control of nonlinear distributed parameter bioreactors via orthogonal collocation. *Automatica*, 1992, vol. 28, no 5, p. 873-883.

-
- [10] ESLAMI, Sohrab et JALILI, Nader. A comprehensive modeling and vibration analysis of AFM microcantilevers subjected to nonlinear tip-sample interaction forces. *Ultramicroscopy*, 2012, vol. 117, p. 31-45.
- [11] BLANDIN, Sebastien. Modeling, estimation and control of distributed parameter systems : application to transportation networks. 2012. Thèse de doctorat. UC Berkeley.
- [12] RAY, Willis Harmon. *Advanced Process control*. Butterworths, Boston, 1989.
- [13] LI, Han-Xiong et QI, Chenkun. Modeling of distributed parameter systems for applications A synthesized review from time space separation. *Journal of Process Control*, 2010, vol. 20, no 8, p. 891-901.
- [14] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et DAOUTIDIS, Prodromos. Feedback control of hyperbolic PDE systems. *AIChE Journal*, 1996, vol. 42, no 11, p. 3063-3086.
- [15] SINGH, R. N. P. A contribution to the theory of non-linear distributed-parameter systems. *International Journal of Systems Science*, 1977, vol. 8, no 1, p. 87-96.
- [16] CURTAIN, Ruth F. et ZWART, Hans. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] BORZÌ, Alfio et SCHULZ, Volker. *Computational optimization of systems governed by partial differential equations*. SIAM, 2011.
- [18] NEITTAANMAKI, Pekka et TIBA, Dan. *Optimal control of nonlinear parabolic systems : theory : algorithms and applications*. CRC Press, 1994.
- [19] BENDERSKY, Eugene et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. A computationally efficient method for optimization of transport-reaction processes. *Computers & Chemical Engineering*, 1999, vol. 23, p. S455-S458.
- [20] BENDERSKY, Eugene et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Optimization of transport-reaction processes using nonlinear model reduction. *Chemical Engineering Science*, 2000, vol. 55, no 19, p. 4349-4366.

-
- [21] ARMAOU, Antonios et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Dynamic optimization of dissipative PDE systems using nonlinear order reduction. *Chemical engineering science*, 2002, vol. 57, no 24, p. 5083-5114.
- [22] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et ARMAOU, Antonios. Control and optimization of multiscale process systems. *Computers & chemical engineering*, 2006, vol. 30, no 10-12, p. 1670-1686.
- [23] BREDIES, Kristian, CLASON, Christian, KUNISCH, Karl, et al. (ed.). *Control and optimization with PDE constraints*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [24] FATTORINI, Hector O., et al. *Infinite dimensional optimization and control theory*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] DE LOS REYES, Juan Carlos. *Numerical PDE-constrained optimization*. Springer, 2015.
- [26] LI, Mingheng et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. An input/output approach to the optimal transition control of a class of distributed chemical reactors. *Chemical engineering science*, 2007, vol. 62, no 11, p. 2979-2988.
- [27] LI, Mingheng et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Optimal control of diffusion-convection-reaction processes using reduced-order models. *Computers & chemical engineering*, 2008, vol. 32, no 9, p. 2123-2135.
- [28] CURTAIN, Ruth et MORRIS, Kirsten. Transfer functions of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, 2009, vol. 45, no 5, p. 1101-1116.
- [29] P. FAURRE, M. ROBIN : *Éléments d'automatique*. Dunod, Paris, 1990.
- [30] RICHARD, Jean-Pierre. *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*. Hermès Science Publication, Paris, 2002.
- [31] MYINT-U, Tyn et DEBNATH, Lokenath. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [32] ALLAIRE, Grégoire. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

- [33] MAIDI, Ahmed, DIAF, Moussa, et CORRIOU, Jean-Pierre. Optimal linear PI fuzzy controller design of a heat exchanger. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 2008, vol. 47, no 5, p. 938-945.
- [34] RECKTENWALD, Gerald W. Finite-difference approximations to the heat equation. *Mechanical Engineering*, 2004, vol. 10, p. 1-27.
- [35] ZHENG, D. et HOO, Karlene A. System identification and model-based control for distributed parameter systems. *Computers & chemical engineering*, 2004, vol. 28, no 8, p. 1361-1375.
- [36] ANTOULAS, Athanasios C. et SORENSEN, Dan C. Approximation of large-scale dynamical systems : An overview. 2001.
- [37] RACHID, Ahmed et MEHDI, Driss. Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires. Editions Technip, 1997.
- [38] EL JAI, Abdelhak. *Eléments d'Analyse et de Contrôle des Systèmes*. 2004.
- [39] SADIKU, M. N. O. et OBIOZOR, C. N. A simple introduction to the method of lines. *International journal of electrical engineering education*, 2000, vol. 37, no 3, p. 282-296.
- [40] SAUCEZ, Ph, SCHIESSER, W. E., et al. (ed.). *Adaptive method of lines*. CRC Press, 2001.
- [41] DRÉO, Johann, PÉTROWSKI, Alain, SIARRY, Patrick, et al. *Métaheuristiques pour l'optimisation difficile*. Eyrolles, 2003.
- [42] LIESLEHTO, Jukka. PID controller tuning using Evolutionary programming. In : *American Control Conference*, 2001. Proceedings of the 2001. IEEE, 2001. p. 2828-2833.
- [43] GAING, Zwe-Lee. A particle swarm optimization approach for optimum design of PID controller in AVR system. *IEEE transactions on energy conversion*, 2004, vol. 19, no 2, p. 384-391.
- [44] HBAIEB, S., FONT, S., BENDOTTI, P., et al. Convex optimization for control analysis application to the steam generator water level. In : *Control Applications*,

2002. Proceedings of the 2002 International Conference on. IEEE, 2002. p. 1016-1021.
- [45] ABUIZIAH, I. et SHAKARNEH, N. A review of genetic algorithm optimization : operations and applications to water pipeline systems. International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering, 2013, vol. 7, no 12, p. 341-347.
- [46] BERTHIAU, Gérard et SIARRY, Patrick. État de l'art des méthodes d'optimisation globale. RAIRO-Operations Research, 2001, vol. 35, no 3, p. 329-365.
- [47] HOLLAND, John Henry. Adaptation in Natural and Artificial Systems : The University of Michigan, 1975.
- [48] GOLDBERG, David E. et HOLLAND, John H. Genetic algorithms and machine learning. Machine learning, 1988, vol. 3, no 2, p. 95-99.
- [49] BERTHIAU, Gérard et SIARRY, Patrick. État de l'art des méthodes d'optimisation globale. RAIRO-Operations Research, 2001, vol. 35, no 3, p. 329-365
- [50] JEDRZEJEWSKI, Franck. Introduction aux méthodes numériques. Springer Science & Business Media, 2006.
- [51] PERIFEL, Sylvain. Complexité algorithmique. Ellipses, 2014.
- [52] SAKAROVITCH, Michel. Optimisation combinatoire : méthodes mathématiques et algorithmiques [1], Graphes et programmation linéaire. 1984.
- [53] CHARON, Irène, GERMA, Anne, et HUDRY, Olivier. Méthodes d'optimisation combinatoire. Paris : Masson, 1996.
- [54] LAYEB, Abdesslem. Utilisation des Approches d'Optimisation Combinatoire pour la Vérification des Applications Temps Réel. 2010. Thèse de doctorat. université Mentouri de Constantine.
- [55] SOYSTER, Allen L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. Operations research, 1973, vol. 21, no 5, p. 1154-1157.

-
- [56] BEN-TAL, Aharon et NEMIROVSKI, Arkadi. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations research letters*, 1999, vol. 25, no 1, p. 1-13.
- [57] BEN-TAL, Aharon et NEMIROVSKI, Arkadi. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 2000, vol. 88, no 3, p. 411-424.
- [58] EL GHAOUI, Laurent, OUSTRY, Francois, et LEBRET, Hervé. Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 1998, vol. 9, no 1, p. 33-52.
- [59] EI-GHAOUI, L. et LEBRET, H. Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices. *Sima Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1997, vol. 18, p. 1035-1064.
- [60] CALAFIORE, Giuseppe et CAMPI, Marco C. Uncertain convex programs : randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 2005, vol. 102, no 1, p. 25-46.
- [61] GRAMMATICO, Sergio, ZHANG, Xiaojing, MARGELLOS, Kostas, et al. . A scenario approach to non-convex control design : Preliminary probabilistic guarantees. In 2014 American control conference (ACC), June 4-6, 2014, Portland, Oregon, USA.
- [62] ALAMO, Teodoro, TEMPO, Roberto, LUQUE, Amalia, et al. Randomized methods for design of uncertain systems : Sample complexity and sequential algorithms. *Automatica*, 2015, vol. 52, p. 160-172.
- [63] CALAFIORE, Giuseppe C. et CAMPI, Marco C. The scenario approach to robust control design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, vol. 51, no 5, p. 742-753.
- [64] CAMPI, Marco C., GARATTI, Simone, et PRANDINI, Maria. The scenario approach for systems and control design. *Annual Reviews in Control*, 2009, vol. 33, no 2, p. 149-157.

- [65] TEMPO, Roberto, CALAFIORE, Giuseppe, et DABBENE, Fabrizio. Randomized algorithms for analysis and control of uncertain systems : with applications. Springer Science & Business Media, 2012.
- [66] LEHMER, Derrick H. Mathematical methods in large-scale computing units. *Annu. Comput. Lab. Harvard Univ.*, 1951, vol. 26, p. 141-146.
- [67] LEHMER, Derrick H. Mathematical methods in large-scale computing units. *Annu. Comput. Lab. Harvard Univ.*, 1951, vol. 26, p. 141-146.
- [68] FLAUS, Jean-Marie. La régulation industrielle : régulateurs PID, prédictifs et flous. Hermes, 1994.
- [69] MAIDI, Ahmed, DIAF, Moussa, et CORRIOU, Jean-Pierre. Boundary geometric control of a counter-current heat exchanger. *Journal of Process Control*, 2009, vol. 19, no 2, p. 297-313.
- [70] CAMACHO, E. F., RUBIO, F. R., BERENGUEL, M., et al. A survey on control schemes for distributed solar collector fields. Part I : Modeling and basic control approaches. *Solar Energy*, 2007, vol. 81, no 10, p. 1240-1251.
- [71] CAMACHO, E. F., RUBIO, F. R., BERENGUEL, M., et al. A survey on control schemes for distributed solar collector fields. Part II : Advanced control approaches. *Solar Energy*, 2007, vol. 81, no 10, p. 1252-1272.
- [72] MAIDI, Ahmed et CORRIOU, Jean Pierre. Boundary control of nonlinear distributed parameter systems by input-output linearization. In : 18th IFAC Congress, Milano, Italy, Aug. 2011. p. 28-30.
- [73] MAIDI, Ahmed et CORRIOU, Jean Pierre. Distributed control of nonlinear diffusion systems by input-output linearization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, vol. 24, no 3, p. 389-405.
- [74] LANDAU, Ioan Doré. System identification and control design. 1990.
- [75] BORNE, Pierre et RICHARD, Jean-Pierre. Modélisation et identification des processus. Editions Technip, 1992.

- [76] NELDER, John A. et MEAD, Roger. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 1965, vol. 7, no 4, p. 308-313.
- [77] PETERSEN, Ian R. et TEMPO, Roberto. Robust control of uncertain systems : Classical results and recent developments. *Automatica*, 2014, vol. 50, no 5, p. 1315-1335.
- [78] BLONDEL, Vincent et TSITSIKLIS, John N. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, vol. 35, no 6, p. 2118-2127.
- [79] BORNE, Pierre. *Commande optimale*. Ed. Techniques Ingénieur, 1996.
- [80] TOSCANO, Rosario. *Structured controllers for uncertain systems*. Springer London Limited, 2013.
- [81] DABBENE, Fabrizio et TEMPO, Roberto. Probabilistic and randomized tools for control design. *The control handbook*, 2010.
- [82] TEMPO, Roberto, CALAFIORE, Giuseppe, et DABBENE, Fabrizio. *Randomized algorithms for analysis and control of uncertain systems : with applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [83] CORRIOU, Jean-Pierre. *Commande des procédés*. Lavoisier, Tec.& Doc., 2012.
- [84] VAN KEULEN, Bert. *H[∞]-control for distributed parameter systems : A state-space approach*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [85] ARMAOU, Antonios et CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Robust control of parabolic PDE systems with time-dependent spatial domains. *Automatica*, 2001, vol. 37, no 1, p. 61-69.
- [86] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et DAOUTIDIS, Prodromos. Robust control of hyperbolic PDE systems. *Chemical engineering science*, 1998, vol. 53, no 1, p. 85-105.
- [87] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et BAKER, James. Robust output feedback control of quasi-linear parabolic PDE systems. *Systems & Control Letters*, 1999, vol. 36, no 5, p. 307-316.

- [88] DING, Limei, JOHANSSON, Andreas, et GUSTAFSSON, Thomas. Application of reduced models for robust control and state estimation of a distributed parameter system. *Journal of Process Control*, 2009, vol. 19, no 3, p. 539-549.
- [89] BORZÌ, Alfio et SCHULZ, Volker. Computational optimization of systems governed by partial differential equations. SIAM, 2011.
- [90] FARLOW, Stanley J. Partial differential equations for scientists and engineers. Courier Corporation, 1993.
- [91] ATKINSON, Kendall E et HAN, Weimin. Theoretical numerical Analysis. A functional analysis framework (3rd ed.). 2009. Berlin : Springer.
- [92] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et DAOUTIDIS, Prodromos. Nonlinear control of diffusion-convection-reaction processes. *Computers & chemical engineering*, 1996, vol. 20, p. S1071-S1076.
- [93] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. Nonlinear and robust control of PDE systems : Methods and applications to transport-reaction processes. Springer Science & Business Media, 2012.
- [94] JEAN-PIERRE, CORRIOU. Process control : Theory and applications. 2004.
- [95] CURTAIN, Ruth F. et ZWART, Hans. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. Springer Science & Business Media, 2012.
- [96] EMIRSJLOW, Zbigniew et TOWNLEY, Stuart. From PDEs with boundary control to the abstract state equation with an unbounded input operator : a tutorial. *European Journal of Control*, 2000, vol. 6, no 1, p. 27-49.
- [97] CHRISTOFIDES, Panagiotis D. et DAOUTIDIS, Prodromos. Feedback control of hyperbolic PDE systems. *AIChE Journal*, 1996, vol. 42, no 11, p. 3063-3086.
- [98] ENGEL, Klaus-Jochen et NAGEL, Rainer. A short course on operator semigroups. Springer Science & Business Media, 2006.
- [99] AFIFI, Larbi, EL JAI, Abdelhaq, et ZERRIK, El Hassan. Systems theory regional analysis of infinite-dimensional linear systems. Perpignan : Presses Universitaires de Perpignan. 2012.

-
- [100] ÅSTRÖM, Karl Johan et HÄGGLUND, Tore. Advanced PID Control. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society. Research Triangle Park, NC 27709, 2006.
- [101] SAUCEZ, Ph, SCHIESSER, W. E., et al. (ed.). Adaptive method of lines. CRC Press, 2001.
- [102] DUDA, P. et TALER, J. Solving direct and inverse heat conduction problems. 2006.
- [103] ÅSTRÖM, Karl J. Introduction to stochastic control theory. New York : Academic Press, 1970.
- [104] TRIKI, Ahcène, MAIDI, Ahmed, BELHARET, Karim, et al. Robust Control Strategy for a Conduction ?Convection System Based on the Scenario Optimization. Journal of Control, Automation and Electrical Systems, 2017, vol. 28, no 4, p. 482-492.