

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MOULOU D MAMMERI DE TIZI-OUZOU**

Faculté du Génie de la Construction

Département de Génie Mécanique



MEMOIRE DE MAGISTER

OPTION : Mécanique Appliquée

Présenté par: SI AHMED HAMID

THEME:

**Commande non linéaire robuste et saturante des structures
mécaniques flexibles**

Devant le jury composé de:

M ^r BOUAZOUNI Amar	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Président
M ^r DJENNOUNE SAID	Professeur	U.M.M.Tizi-Ouzou	Rapporteur
M ^r BILEK Ali	Maître de Conférence A	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur
M ^r MAIDI Ahmed	Maître de Conférence A	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur
M ^r MANSOURI Rachid	Maître de Conférence A	U.M.M.Tizi-Ouzou	Examineur

Remerciements

A l'issue de cette présente étude, j'adresse mes remerciements à Dieu de m'avoir donné la chance et le courage d'aboutir au terme de cette formation.

SOMMAIRE

Introduction générale-----

CHAPITRE 1 : Modélisation de la structure flexible

I.1 Modélisation des structures flexible

I.1.1 Equation de la dynamique des structures -----	2
I.1.1.1 Déterminations des équations de la dynamique des structures-----	2
I.1.1.2 Pulsations et modes propres réels -----	4
I.1.1.3 Propriétés asymptotiques du modèle-----	5
I.1.2 Equation d'état -----	6
I.1.2.1 Équations dynamiques d'un système linéaire sous forme d'état -----	6
I.1.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres -----	7
I.1.2.3 Expression des équations dans la base modale -----	8
I.1.3 Fonction de transfert -----	8
I.1.4 Reponse fréquentielle -----	9
I.2 Application sur un modèle mécanique -----	9
I.2.1 modélisation de la structure	10
I.2.2 modélisation de la poutre.....	10
I.3 actionneurs et capteurs.....	11
I.3.1 modèle des actionneurs piézoélectriques.....	11
I.3.2 Identification expérimentale des actionneurs piézoélectriques.....	12
I.4 Génération du modèle poutre /capteur et actionneur.....	12
I.4.1 Modèle de simulation et modèle de contrôle	13
I.4.2 La méthode de troncature pour la réduction du modèle	13
I.4.3 Modèle de contrôle.....	14
I.5 conclusion.....	15

CHAPITRE II : Synthèse du correcteur H_∞

II.1 Introduction-----	17
II.2 Objectif de synthèse H_∞	18
II.3 Formalisation du problème de synthèse H_∞	18
II.4 Modélisation du système à commander.....	19

II .5 Principes d'optimisation H_∞	19
II 6 Problème H_∞ standard.....	21
II.6.1 Résolution du problème H_∞ standard par équations de Riccati.....	23
II.6.2 Résolution du problème standard par l'approche H_∞ pondérée.....	25
II.6.2.1 Mise en œuvre de synthèse par l'introduction des fonctions de pondération..	26
II.6.2.2 Mise sous forme standard pondéré -----	27
II.7 Choix des fonctions de pondération -----	28
II.7.1 Choix de la pondération W_1 -----	29
II.7.2 Choix de la pondération W_2 -----	29
II.8 Exemple d'application-----	32
II.9 Conclusion-----	33

CHAPITRE III : Introduction à l'analyse des systèmes saturés

III.1 Introduction -----	34
III.2 Exemple de motivation sur le système saturé -----	35
III.3 Stabilité des systèmes non-linéaires -----	40
III.3.1 Existence d'un domaine de stabilité-----	40
III.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov-----	40
III.3.3 Principe d'invariance de Lasalle -----	42
III.3.4 La région d'attraction de l'origine -----	43
III.3.5 Recherche de fonctions de Lyapunov -----	44
III.4 Représentation des non-linéarités de type saturation -----	46
III.4.1 Définition de la fonction saturation-----	47
III.4.2 Modélisation polytopique-----	48
III.4.3 Modélisation par non-linéarités de secteur -----	48
III.5 Analyse des systèmes saturés-----	50
III.6 Vers la prise en compte du phénomène de windup-----	52
III.6.1 Principe de la synthèse anti-windup-----	52
III.7 Conclusion-----	53

CHAPITRE IV : Synthèse anti-windup

IV.1 Introduction – philosophie	54
IV.2 Historique	54
IV.3 structure générale pour le problème « Anti-Windup »	57
IV.4 Postions du problème	59
IV.5 Direct Linear Anti-windup	59
IV.5.1 Conception de la technique Direct Linaire Anti-windup (<i>DLAW</i>)	59
IV.6 Equations du système en boucle fermée	61
IV.7 Formulation du problème de synthèse	61
IV.7.1 Solution via fonction de Lyapunov quadratique	62
IV.7.2 Discussion sur les étapes numériques	62
IV.8 Exemples d'application	63

CHAPITRE V : application

V.1 introduction	66
V.2 simulation du modèle sans la présence de contrôleurs	66
V .2.1 Analyse	66
V .2.1.1 Simulation en boucle ouverte	67
V .2.1.2 Simulation en boucle fermée non corrigé	68
V .3 .simulation du modèle avec la présence de contrôleur	68
V .3 1 Synthèse du correcteur H infini	69
V .3.2 Choix des fonctions de pondération	72
V .3.3 La réponse à un échelon de consigne	72
V .4 simulation du modèle avec saturation de l'actionneur	75
V .5 Synthèse du contrôleur H infini(exemple 2)	76
V .6 simulation du modèle avec la présence de contrôleur	76
V .7 Simulation du modèle avec saturation de la commande	77
V.8 simulation du modèle avec la présence de contrôleur avec l'anti-windup	77
V.9 Conclusion	79
Conclusion générale	80

Références bibliographique

Annexe A : LA METHODE DE TRONCATURE

Annexe B : DEFINITIONS ET RESULTATS TECHNIQUES

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 -modélisation élément fini de l'ensemble poutre –capteurs-actionneur -----	10
Figure I.2 -modèle de l'actionneur piézoélectrique -----	12
Figure II.1 -schéma de principe de la synthèse H_∞ -----	17
Figure II.2 -modèle augmenté-----	18
Figure II.3 –les pondérations fréquentielles w_1, w_2, w_3 et des valeurs singulières S,KS,T.20	
Figure II.4 -Forme standard de la synthèse H_∞ . -----	21
Figure II.5 -mise en place de la fonction de pondérations-----	25
Figure II.6 -système masse-ressort.-----	29
Figure II.7 -(a) diagramme de BODE et (b)Réponse indicielle du modèle.-----	30
Figure II.8 -Diagramme de BODE des transferts, T et leurs gabarits respectifs. -----	32
Figure II.9 -Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée -----	32
Figure III.1 - Fonction de saturation -----	35
Figure III.2 (a) R_l non borné ($m = 1, n = 2, \text{ran}(k) = 1$);(b) R_l borné ($m, n = \text{ran}(k) = 2$)	
Figure III.3 - zone linéaire est non linéaire -----	36
Figure III.4 -Reponse temporelle pour des conditions initiales différentes -----	37
Figure III.5 -présence des trajectoires divergentes et convergentes est Des points d'équilibres multiples. En plus du point d'équilibre de l'origine $x=0$.-----	38
Figure III.7 -attractivité -----	40
Figure III.8 - simplement stable -----	40
Figure III.9 -Asymptotiquement stable -----	40
Figure III.10 -contractivité des trajectoire -----	43
Figure III.11 -Exemple de fonction définie positive-----	44
Figure III.12 -Non-linéarités de types saturation (a) et zone morte (b)-----	46
Figure III.13 -Conditions de secteur pour une non-linéarité de type zone morte.-----	48
Figure III.14 -Interconnexion non-linéaire pour l'analyse de stabilité. -----	49
Figure III.15 - Principe de la synthèse anti-windup -----	51
Figure IV.1 -schéma du cas idéal linéaire-----	54
Figure IV.2 -schéma du cas idéal linéaire avec une non-linéarité N -----	54
Figure IV.3 -architecture de base d'anti-windup -----	55
Figure IV.4 - principe d'anti-windup -----	55
Figure IV.5 - Exemple (pointeur Balancing). Région de stabilité de type ellipsoïdale du système saturé en boucle fermée avec et sans correcteur anti-windup -----	63
Figure IV.6 -Exemple (pointeur Balancing). L'évolution temporelle du système en boucle Fermée avec anti- windup (trait continue) et sans anti-windup (ligne pointillée) initialisé à $x_p = [-4,2]$ -----	64

Figure V. 1- Schéma du système en boucle ouverte -----	65
Figure V. 2- (a) Tracés de Bode de $G(j\omega)$ (b) : Réponse à un échelon de consigne du système en boucle ouverte -----	66
Figure V. 3- Schéma du système en boucle fermée -----	66
Figure V. 4- (a) Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée ; (b) : Réponse à un échelon de consigne du système en boucle fermée. -----	67
Figure V. 5- Schéma de principe d'un système de contrôle -----	67
Figure V. 6- Mise en place des fonctions pondérations -----	68
Figure V. 7- Diagramme de BODE des transferts S, KS, T et leurs gabarits respectifs. -----	69
Figure V. 8- Réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée (G^*K) et du procédé G ----	70
Figure V. 9- (a) Réponse à un échelon de consigne du système réduit (b) la commande $u(t)$ générée par le contrôleur comparée à l'écart $\varepsilon=r-y$. -----	70
Figure V. 10- Comportement du contrôleur H_∞ avec saturation de l'actionneur -----	71
Figure V. 12- Malle de transport d'équipement électronique -----	71
Figure V. 13- (a) Réponse indicielle du système en boucle ouverte et (b) Diagramme de Bode du transfert en boucle ouverte. -----	72
Figure V. 6- Mise en place des fonctions pondérations -----	73
Figure V. 14- (a) la commande générée par le contrôleur H_∞ -(b) réponse à un échelon de consigne avec le régulateur H_∞ -----	74
Figure V. 15- (b) La commande avec saturation (ligne pointillée) -(a) réponse à un échelon de consigne avec saturation (ligne pointillée) -----	76
Figure V. 16- Schéma de principe d'un système de contrôle modèle de la structure et actionneur plus le gain anti-windup (K) 76	
Figure V. 17- (a) L'influence de l'action anti-windup sur l'évolution temporelle de la sortie du système y. -----	77
Figure V. 17- (b) la commande avec anti-windup (ligne bleu) -(a) réponse à un échelon de consigne avec anti-windup (ligne bleu) -----	77

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1- caractéristiques des vérins piézoélectriques -----	11
Tableau 1.2- caractéristiques des actionneurs -----	12
Tableau V. 1- Pulsations de résonance, fréquences et amortissements du système réduit en boucle ouverte -----	67
Tableau V. 2 Pulsations, fréquences et amortissements du système réduit en boucle ouverte	68

Liste des symboles

I_m : Partie imaginaire d'un nombre complexe, c'est-à-dire $I_m(x + jy) = y$

R_e : Partie réelle d'un nombre complexe, c'est-à-dire $R_e(x + jy) = x$

I_r : Matrice identité de dimension r

S : variable de Laplace

M : matrice de masse, réelle, symétrique, définie positive

K : matrice de raideur, réelle, symétrique, définie positive

ζ : Matrice d'amortissement visqueux

f : Forces généralisées.

\ddot{q}, \dot{q}, q : Vecteurs des accélérations, vitesses et déplacements modaux.

$\lambda(M)$: valeur propre de la matrice M

w : Fréquence.

$\Phi(n \times n)$: Matrice des modes propres.

Φ_i : $i^{\text{ème}}$ Vecteur propre

$p(n \times 1)$: Vecteur des participations des différents modes.

A : matrice d'évolution du système

B : matrice d'application de la commande

C : matrice d'observation.

G_r : Fonction de transfert du système réduit.

P_c : Matrice unité de dimension $(m \times N)$ permettant de sélectionner les degrés de liberté sur lesquels les déplacements sont mesurés.

G_v : Gain de l'amplification en tension.

δ_e : Déplacement imposé du vérin piézoélectrique.

V : tension électrique du vérin piézoélectrique

K_v : Raideur correspondante à celle de l'empilement des disques piézoélectriques.

K_p : Raideur du plot élastique liant le vérin à la structure.

α : Constante piézoélectrique du vérin

K_a : La raideur de l'actionneur.

δ_z : Déplacement transversal (dans la direction de l'axe Z)

θ : Rotation selon la direction de l'axe Z.

$\{f_p\}$: Vecteur de forces modales de perturbation

$\{f_c\}$: Force modales de contrôle

a : matrice d'évolution du système réduit

b : matrice d'application de la commande du système réduit

c : matrice d'observation du système réduit

d : la matrice de transmission directe du système réduit.

$\|\cdot\|_\infty$: La norme H_∞ .

$\|\cdot\|_2$: La norme H_2 .

L_2 : Espace des fonctions de carré sommable sur \mathbb{R}

$\bar{\sigma}(A)$: Valeur singulière maximale de A

$\underline{\sigma}(A)$: Valeur singulière minimale de A

w : Pulsation (rad/s)

LMI : Inégalité Matricielle Linéaire

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels

\mathbb{R}_+ : Ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{R}^{m \times n}$: Ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$

I_m : Matrice identité de taille $m \times m$

0_m : Matrice nulle de taille $m \times m$

Introduction

Les vibrations des structures mécaniques sont souvent sources de problèmes affectant le bon fonctionnement de nombreux systèmes c'est le cas par exemple des systèmes électroniques embarqués qui sont souvent soumis à un environnement vibratoire sévère.

De nombreux travaux de recherche ont porté sur le développement des techniques qui permettent de réduire voir à éliminer l'effet des vibrations sur ces systèmes.

L'une des approches est centrée sur le contrôle actif des vibrations .Il s'agit d'implémenter des lois de commande dites robustes bien connues des automaticiens afin de contrôler activement les vibrations. Cette implémentation est matérialisée grâce à l'utilisation de capteurs et actionneurs.

Ce travail proposé s'inscrit dans le prolongement de travaux récents, basés sur l'utilisation de méthodes issues de la commande robuste (de type H_2 ou H_∞). Celles-ci ont permis d'obtenir des résultats intéressants et prometteurs sur le plan applicatif .

Cependant, dans la réalité, les actionneurs sont contraints à des saturations .Dans ce contexte, les lois de commande purement basée sur une considération linéaire du problème trouvent leur limite .Afin de répondre de manière réaliste a ces problèmes, il est donc impératif de tenir compte objectivement de ces phénomènes de saturation par essence non linéaires.

Notre travail consiste donc en l'étude de la méthode de synthèse de correcteur H_∞ . On va l'applique sur une structure flexible sans tenir compte de saturation des actionneurs. Ensuite on va aborder le problème d'amortissement robuste des modes de vibration en tenant compte des saturations des actionneurs. Pour ce la plusieurs approches pourront être abordées avec, entre autre, l'approche anti-windup, formulé à l'aide d'inégalités matricielles affines ou LMI.

Dans le premier chapitre, nous commencerons par un bref aperçu de la modélisation des structures mécaniques flexibles .ensuit nous expliquons le passage du modèle mécanique vers une représentation d'état du système.

Le deuxième chapitre, est consacré à l'optimisation H_∞ . La mise sous forme standard d'un problème de commande y est expliqué, en prenant comme point d'appui le problème dit de sensibilité mixte.

L'objectif du chapitre 3 est de présenter l'ensemble des outils nécessaires à l'analyse des systèmes saturés introduisant ainsi le chapitre 4 dans lequel on a proposé la technique de synthèse anti-windup.

Enfin, le cinquième chapitre suggère de définir une stratégie en deux étapes Les saturation sont ignorées dans un premier temps, pour élaborer la méthode de contrôle ensuite en va étudier le comportement du système avec saturation .Enfin en va introduire le correcteur anti-windup pour prendre en compte simultanément ces non-linéarités causées par la saturation Nous terminons par une conclusion générale.

CHAPITRE I

Modélisation des structures flexibles

Chapitre I

Modélisation des structures flexibles

I.1 Modélisation des structures flexibles [1]

En dynamique des structures, l'ingénieur est aux prises avec la résolution de systèmes souvent fort complexes dont il devra faire un modèle pour être en mesure de procéder à l'analyse vibratoire. On peut distinguer deux grandes catégories d'approches en regard de la modélisation des phénomènes physiques : l'approche continue et l'approche discrète. Dans le cas de la première, la modélisation colle à la géométrie réelle des structures que l'on considère comme un milieu continu où se propagent des ondes. Si la géométrie est simple, il y a des solutions analytiques ; si elle est complexe, il faut avoir recours à une résolution numérique. Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis est très répandue. Elle consiste à ramener le problème de la dynamique des milieux continus à un problème discret ne contenant qu'un nombre fini de paramètres inconnus. Elle permet de caractériser le comportement dynamique d'une structure par des équations du second ordre, c'est-à-dire des équations où apparaissent explicitement les dérivées premières et secondes du paramétrage. Nous introduisons ensuite une formulation des équations de la dynamique sous forme d'état. Les automaticiens sont plus familiers avec cette représentation car elle correspond à une para-métrisation de la relation entrée-sortie du système. Nous rappelons, pour ces deux représentations, les notions de fréquences propres et modes propres et nous abordons le problème du découplage des équations. Nous terminons enfin par l'introduction de notre structure à contrôler et nous détaillerons les différentes étapes entreprises pour l'obtention du modèle à utiliser.

I.1.1 Equation de la dynamique des structures [2]

I.1.1.1 Déterminations des équations de la dynamique des structures

Le point de départ de l'ensemble des approches de modélisation est l'application du principe de Hamilton. Dans le cas de systèmes non conservatifs¹, il s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta w dt = 0 \quad (1.1)$$

w est le travail des forces non conservatives. T est l'énergie cinétique et U l'énergie de déformation, les énergies s'expriment de la manière suivante :

$$T = \frac{1}{2} \iiint \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv \quad (1.2)$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (1.3)$$

¹ Un système est dit non conservatif s'il est non amorti

Avec v le volume, discrétisé en unités de volume $d v$,

ρ masse volumique,

u_i composantes des déplacements,

σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes,

ε_{ij} composantes du tenseur des déformations.

On cherche à obtenir une solution approchée du problème continu en le réduisant à un problème discret à un nombre fini de degrés de liberté. La structure est discrétisée en éléments de dimension finie qui sont jointes en n points situés sur leur contour, appelés point nodaux ou nœuds. On définit une approximation des déplacements en séparant les variables d'espace et de temps en écrivant pour chaque composante de déplacement:

$$u_j(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(x, y, z) q_i(t) \quad (1.4)$$

avec $q_i(t)$: coordonnées généralisées,

$\Pi_i(x, y, z)$: Fonctions de base de l'approximation définies dans le domaine v .

On peut prendre les déplacements des nœuds comme coordonnées généralisées q_i ; on parle alors de méthode des déplacements. La reformulation du principe d'Hamilton (1.1) en tenant compte de l'approximation (1.4) conduit à un problème variationnel classique à n fonctions arguments $\{q_i, i=1 \text{ à } n\}$ de la variable temps. Les conditions d'extremum de cette fonctionnelle sont les équations suivantes, appelées équations de Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = f_i \quad i = 1 \text{ à } n \quad (1.5)$$

avec f_i force généralisée correspondant à la coordonnée q_i et définie par le travail virtuel des forces extérieures:

$$\delta T = f_i \delta q_i \quad (1.6)$$

Dans le cas des petits mouvements de systèmes élastiques, les expressions des énergies cinétiques et de déformation s'expriment comme formes quadratiques symétriques des vitesses et des déplacements aux nœuds respectivement, soient:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dot{q}_i^T M_{ij} q_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (1.7)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i^T K_{ij} q_j = \frac{1}{2} q^T K q \quad (1.8)$$

L'équation de Lagrange (1.5) devient alors :

$$M \ddot{q}(t) + K q(t) = f(t) \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un système avec amortissement visqueux, il faut ajouter au second membre le terme additionnel de force de dissipation visqueuse $f_c = -\zeta \dot{q}$. D'où les équations du mouvement:

$$M\ddot{q}(t) + \zeta\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t) \quad (1.10)$$

avec M . matrice de masse, réelle, symétrique, définie positive

K matrice de raideur, réelle, symétrique, positive,

ζ matrice d'amortissement visqueux,

f forces généralisées.

On distinguera deux classes de structures:

- les structures isostatiques pour lesquelles la matrice K . est définie positive,
- les structures hypostatiques, pouvant subir des déplacements d'ensemble, pour lesquelles la matrice K est singulière, l'ordre de singularité étant égal au nombre de degrés de liberté correspondant à ces mouvements d'ensemble (rigide).

Cette méthode de détermination des équations de la dynamique, qui est le fondement de la méthode des éléments finis, est basée sur la discrétisation de la structure en éléments de dimension finie. La précision du modèle dépend évidemment du nombre et de la taille des éléments. Pour pouvoir représenter correctement le comportement dynamique de structures complexe, même aux basses fréquences, il faut un nombre de degrés de libertés élevé.

1.1.1.2 Pulsations et modes propres réels

Pour caractériser le comportement dynamique d'une structure, les dynamiciens procèdent généralement à une *analyse modale réelle* du modèle. Elle consiste à déterminer les pulsations et modes propres réels du système conservatif. Les modes propres correspondent aux solutions des équations en mouvement libre du système non amorti:

$$M\ddot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (1.11)$$

Les solutions sont de la forme :

$$q(t) = \phi_i e^{j\omega_i t} \quad (1.12)$$

En remplaçant $q(t)$ dans (1-11) par sa valeur donnée en (1-12) on obtient :

$$-\omega_i^2 M \phi_i e^{j\omega_i t} + K \phi_i e^{j\omega_i t} = 0 \quad (1.13)$$

$$K \phi_i = \omega_i^2 M \phi_i \quad (1.14)$$

qui est équivalent à :

$$(K - \omega_i^2 M) \phi_i = 0 \quad (1.15)$$

Les pulsations propres ω_i sont réelles positives et les modes propres associés sont réels.

Pour les structures hypostatiques, il existe autant de modes propres à fréquence nulle que de degrés de liberté décrivant les mouvements d'ensemble de la structure: ce sont les modes rigides. Les modes flexibles de telles structures sont appelés modes libres. A partir de (1.15) on obtient n solutions que l'on met sous forme matricielle:

$$(K - \Omega M) \phi = 0 \quad (1.16)$$

avec : $\Omega = \text{diag}\{w_i^2\}$ et $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$

Les modes propres Φ_i ont la propriété d'être orthogonaux entre eux par rapport à K et M , si leurs fréquences sont différentes:

$$\Phi_i K \Phi_j = 0 \text{ si } w_i \neq w_j \quad (1.17)$$

$$\Phi_i M \Phi_j = 0 \text{ si } w_i \neq w_j \quad (1.18)$$

Les modes flexibles sont donc orthogonaux entre eux et orthogonaux aux modes rigides. De plus on a:

$$\Phi_i K \Phi_j = k_i \quad (1.19)$$

$$\Phi_i M \Phi_j = m_i \quad (1.20)$$

k_i est appelé *raideur généralisée* du mode i et m_i *masse généralisée* du mode i . Elles sont liées par la relation:

$$k_i = w_i^2 m_i \quad (1.21)$$

Les matrices $\Phi^T K \Phi$ et $\Phi^T M \Phi$ sont donc diagonales. Il existe une infinité de matrices de modes propres Φ vérifiant l'équation (1.16). En général, on choisit de la normer par rapport à M , tel que:

$$\Phi^T K \Phi = I_m \quad (1.22)$$

On a alors :

$$\Phi^T M \Phi = \Omega \quad (1.23)$$

1.1.1.3 Propriétés asymptotiques du modèle

En se plaçant toujours dans le cas où il n'y a pas de modes rigides, si on effectue une projection des équations de la dynamique (1.10), en mouvement libre, dans la base modale, on a :

$$M \ddot{q}(t) + \zeta \dot{q}(t) + K q(t) = 0 \quad (1-24)$$

$$q(t) = \Phi p(t) \quad (1-25)$$

$$\ddot{p}(t) + (\Phi \zeta \Phi^T) \dot{p}(t) + \text{diag}\{w_i^2\} p(t) = 0 \quad (1-26)$$

On voit que ces équations sont couplées par l'amortissement.

Il existe certains cas l'amortissement qui permettent d'assurer un caractère diagonal à la matrice d'amortissement modal, c'est-à-dire $\Phi \zeta \Phi^T = \text{diag}\{2\varepsilon_i w_i\}$ avec ε_i facteur d'amortissement modal:

- condition introduite par Rayleigh: l'amortissement doit pouvoir être exprimé sous la forme

$$\zeta = a_0 M + a_1 k \quad (1.27)$$

➤ série de CAUGHEY: l'amortissement s'exprime sous la forme d'une série

$$\zeta = M \sum_{j=0}^{m-1} a_j [M^{-1}K] \quad (1.28)$$

Sous ces conditions l'équation (1.26) devient :

$$\ddot{p}(t) + \text{diag}\{2\varepsilon_i w_i\} \dot{p}(t) + \text{diag}\{w_i^2\} p(t) = 0 \quad (1.29)$$

à partir de cette équation, on peut en déduire un certain nombre d'informations sur la stabilité du système:

- dans le cas où l'amortissement est nul (système conservatif):
 - si les modes sont simples et différents de zéros, la stabilité simple du système est assurée;
 - si les modes sont multiples, la stabilité simple du système n'est pas acquise;
- si la matrice d'amortissement visqueux est diagonalisable et les éléments diagonaux positifs, le système est asymptotiquement stable.
- Si la matrice d'amortissement visqueux n'est pas diagonalisable, on ne peut pas conclure sur la stabilité; il faut alors étudier la décomposition en modes complexes du système amorti; la formalisation des équations sous forme d'état est alors nécessaire.

I.1.2 Equation d'état

Les automaticiens utilisent une représentation différente sous forme d'équations différentielles du premier ordre, faisant intervenir la notion d'état.

I.1.2.1 Équations dynamiques d'un système linéaire sous forme d'état

Aux équations de la dynamique (1-24), on peut ajouter les notions d'entrée et de sortie. On note u le vecteur des entrées, $b(1*n)$ la matrice d'application de ces entrées sur les nœuds du système et y le vecteur des sorties de dimension (m) , composé de mesures de déplacements des nœud, de mesures de vitesses des nœuds et de mesures d'accélération des nœuds .On obtient le système d'équations suivant :

Les équations de la dynamique (1-24), peuvent se mettre sous la forme d'état. On note :

$$\begin{cases} M \ddot{q}(t) + \zeta \dot{q}(t) + Kq(t) = b u(t) \\ y(t) = c_a q(t) + c_v \dot{q}(t) + c_a \ddot{q}(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

Sous la condition que M soit non singulière, on peut écrire

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) = -M^{-1}C\dot{q}(t) - M^{-1}Kq(t) + M^{-1}b u(t) \\ y(t) = (c_d - c_a M^{-1}K)q(t) + (c_v - c_a M^{-1}\zeta)\dot{q}(t) + c_a M^{-1}b u(t) \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}b \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [(c_d - c_a M^{-1}K) \quad (c_v - c_a M^{-1}\zeta)] \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} + c_a M^{-1}b u(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

On obtient donc une modélisation des équations de la dynamique sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.33)$$

X : vecteur d'état, de dimension $N = 2n$, tel que :

$$x = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

A : matrice d'évolution du système, de dimension $(N * N)$:

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\zeta \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

B : matrice d'application de la commande, de dimension $(r * N)$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}b \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

b : Matrice de dimension $(N \times r)$ permettant de sélectionner les degrés de liberté sollicités par les forces de contrôle, u vecteur de la commande, y vecteur de sortie du système.

C : matrice d'observation de dimension $(N \times m)$:

$$C = [(c_d - c_a M^{-1}K) \quad (c_v - c_a M^{-1}\zeta)] \quad (1.37)$$

c_d, c_a et c_v : Matrice de dimension $(m \times n)$ permettant de sélectionner les degrés de liberté sur lesquels les déplacements, accélérations et vitesses sont mesurées.

D : matrice de transition directe de dimension $(r \times m)$:

$$D = c_a M^{-1} b \quad (1.38)$$

Le quadruplet (A, B, C, D) est une représentation d'état du système. Elle n'est pas unique, il en existe une infinité qui sont équivalentes.

I.1.2.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Les vecteurs propres correspondent aux solutions de l'équation (1-33) en mouvement libre ($u(t) = 0$) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.39)$$

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = 0 \quad (1.40)$$

L'équation caractéristique de A s'écrit :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (1.41)$$

Les valeurs propres du système sont donc les solutions de l'équation (1-41), est l'on associe à chaque valeur propre $\lambda_i (i = 1, \dots, N)$ un vecteur propre V_i définie par :

$$(\lambda_i I - A)V_i = 0 \quad (1.42)$$

On obtient donc $N = 2n$ équations que l'on assemble pour donner :

$$(\Lambda - A)V = 0 \text{ avec } \Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\} \text{ et } V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \quad (1.43)$$

Les modes propres correspondant à des valeurs propres non nulles différentes sont orthogonaux entre eux. Si on considère donc le cas où les valeurs propres sont distinctes, on a :

$$V^{-1}V = I \rightarrow \Lambda = V^{-1}AV \quad (1.44)$$

L'observation des valeurs propres λ_i permet de conclure sur la stabilité du système .

I.1.2.3 Expression des équations dans la base modale [3]

En se plaçant toujours dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, les vecteurs propres étant orthogonaux entre eux, le système d'équations (1.33) projeté sur la base des vecteurs propres donne donc un système d'équations où les équations dynamiques sont découplées :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.45)$$

$$x = V\check{x}$$

$$\begin{cases} \dot{\check{x}} = V\check{x} + V^{-1}Bu \\ y = CV\check{x} + Du \end{cases} \quad (1.46)$$

On note que d'un système d'ordre n , on est passé à un système d'équations d'ordre $N = 2n$. Pour la représentation seconde ordre, on obtenait n fréquences propres w_i . Pour la représentation d'état, chaque mode w_i correspond à deux valeurs propres complexes conjuguées λ_i :

$$\lambda_i = -\varepsilon_i w_i \pm j w_i \sqrt{1 - \varepsilon_i^2} \quad (1.47)$$

Les vecteurs propres correspondants sont eux aussi complexes conjugués.

I.1.3 Fonction de transfert

Les systèmes au repos avant $t = 0$ peuvent être décrits par une matrice de transfert. Reprenons le système d'équations d'état (1-33) :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.48)$$

Soit $x(s)$ la transformée de Laplace de $x(t) \in L[0, \infty[$, alors :

$$L\{\dot{x}(t)\} = sx(s) - x_0 \quad (1.49)$$

Si $x_0 = 0$, (1-48) devient :

$$\begin{cases} sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases} \quad (1.50)$$

que l'on peut encore écrire :

$$y(s) = G(s)u(s) \quad (1.51)$$

La matrice de transfert est :

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (1.52)$$

I.1.4 Réponse fréquentielle

L'évaluation de $G(s)$ pour $s = jw$, avec $w \geq 0$, définit la réponse fréquentielle du système. Pour un système mono-entrée/mono-sortie, la réponse fréquentielle est une fonction fréquentielle scalaire. Pour un système multi-entrées/multi-sortie, la réponse fréquentielle est une fonction fréquentielle matricielle.

La réponse fréquentielle de la valeur singulière maximale est définie comme :

$$\bar{\sigma}(G(w)) = \lambda_{\max}(G(jw)G^*(jw))^{\frac{1}{2}} \quad (1.53)$$

Le gain statique d'un système asymptotiquement stable $G(s)$ peut être définie comme la réponse fréquentielle à la fréquence nulle $G(0)$, si ce dernier est fini.

I.2 Application sur un modèle mécanique

Des modèles mathématiques permettant la représentation du phénomène physique peuvent être construits. Ces modèles utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires dont on ne connaît pas de solution analytiques en général. Il faut alors résoudre le problème numériquement en transformant les équations continues de la physique en un problème discret sur un certain domaine de calcul (le maillage) [4].

Les simulations numériques de ce fait, guident la conception dès la phase initiale d'un projet et évitent la lourdeur d'un recours systématique aux essais. Lorsque ceux-ci restent nécessaires, les simulations guident leur réalisation et l'interprétation de leurs résultats.

Dans ce qui suit un modèle éléments finis d'une poutre travaillant en flexion est développé. Ce modèle est choisi du fait que ses résultats seront exploités directement pour l'obtention d'un modèle final dit aussi (*modèle d'état*).

I.2.1 Modélisation de la structure [5, 4]

La modélisation du comportement dynamique de l'ensemble mécanique structure / actionneurs est réalisée avec la méthode des éléments finis.

Dans cette application, la structure à contrôler est une poutre encastree en acier dont la longueur, la largeur et l'épaisseur sont respectivement 1 m, 0.02 m et 0.01 m. Son comportement dynamique est contrôlé par un vérin piézoélectrique avec un plot élastique situé à 0.1 m de l'extrémité libre.

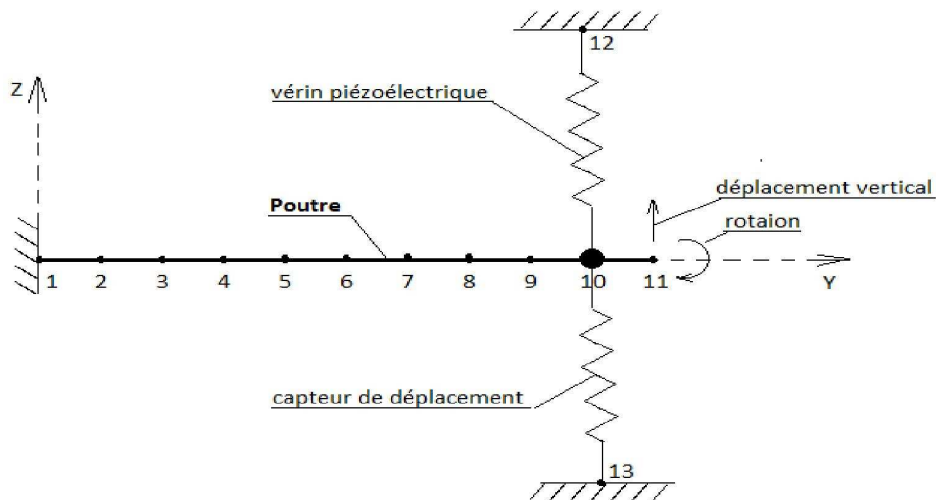


Figure I.1 –modélisation on élément fini de l'ensemble poutre –capteurs-actionneur

Le modèle éléments finis de la structure présentée figure 1.1, qui intègre la partie mécanique des actionneurs a été implémenté sous MATLAB. La poutre a été discrétisée par dix éléments de poutre à deux degrés de liberté par nœud (le déplacement transversal δ_z et la rotation θ_z).

Le plot élastique est considéré linéaire. Il est modélisé par sa raideur et les termes de couplage sont ici négligés. L'actionneur est modélisé par une raideur équivalente à celle de l'ensemble vérin piézoélectrique / plot élastique (k_{az}) suivant sa direction. Les degrés de liberté des nœuds 1, 12 et 13 sont bloqués.

I.2.2 Modélisation de la poutre

La poutre est discrétisée en dix éléments. Chaque élément possède une matrice de raideurs et des masses de dimension quatre par quatre (4×4). Chacune de ces composantes correspond au

déplacement transversale δ_z et la rotation θ au niveau des deux nœuds constituant respectivement chaque élément. Ensuite un assemblage des matrices des masses et des raideurs est entrepris, l'ordre des matrices obtenues est de vingt deux par vingt deux (22×22). Enfin, en considérant l'encastrement au niveau du premier nœud, l'ordre de ces matrices sera réduit à vingt par vingt (20×20).

Si la modélisation de la poutre seule est assez simple à obtenir, l'effet des capteurs et des actionneurs est quant à lui relativement plus compliqué, c'est pour cela nous étudierons ce point plus en détail.

I.3 Actionneurs et capteurs [5, 6]

La structure doit être équipée d'éléments actifs assurant d'échange d'énergie avec le milieu environnant. Dans notre exemple des éléments piézoélectriques sont choisis du fait que nous considérons des micros déplacements, mais aussi du fait qu'ils apportent des solutions pour obtenir une bonne efficacité du contrôle tout en étant légers et faciles à intégrer à la structure.

I.3.1 Modèle des actionneurs piézoélectriques

Un modèle d'actionneur piézoélectrique est développé dans [6]. Les caractéristiques mécaniques et électriques fournies par le constructeur sont données dans le tableau suivant :

Caractéristiques	Valeur	Unité
Tension nominale	-1000	Volt
Tension max. de fonction	-1000	Volt
Force de compression max	2000	N
Force de traction max.	300	N
Gamme de température	-40 à 80	C°
Expansion max (à 1000 V)	120	μm
Rigidité	32	N/ μm
Capacité électrique	500	Nf
Fréquence de résonance (sans charge)	5	Khz
Expansion en température	0.9	Mm/N
Longueur totale	127	Mm
Polarité	Négative	
Gain de l'amplification en tension G_p	100	

Tableau 1.1 – caractéristiques des vérins piézoélectriques

Chaque ligne d'action est constituée par un vérin piézoélectrique en série avec un plot élastique. La figure 1-2 présente le schéma et le modèle d'un actionneur piézoélectrique. Ce modèle met en œuvre un déplacement imposé δ_e proportionnel à la tension électrique V appliquée au vérin par l'amplificateur, une raideur K_v correspondant à celle de l'empilement des disques piézoélectrique, et une raideur K_p du plot élastique liant le vérin à la structure.

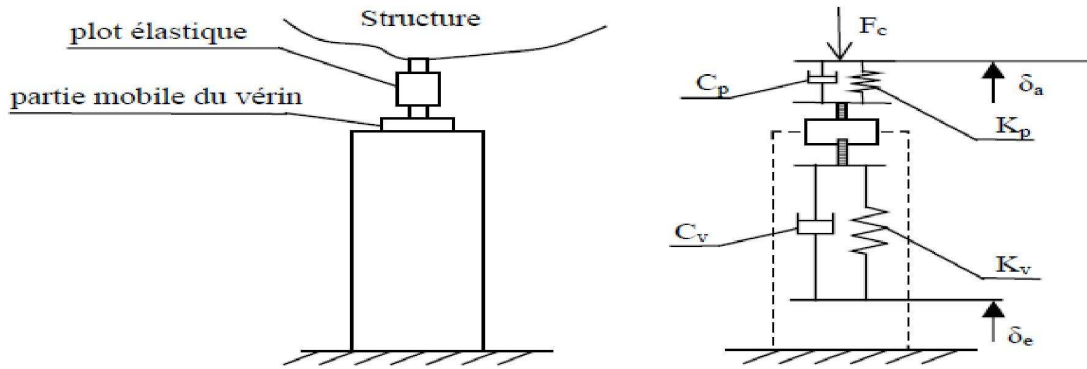


Figure I.2 – modèle de l'actionneur piézoélectrique

Les amortissements du vérin piézoélectrique C_v et du plot élastique C_p sont dans un premier temps négligés. Ils sont ensuite recalés par rapport aux amortissements modaux mesurés expérimentalement dans le modèle.

Le modèle proposé pour la force générée par un actionneur piézoélectrique est :

$$F_c = K_a(\delta_e - \delta_a) = K_a(\alpha G_v V - \delta_a) \tag{1 - 53}$$

Avec α la constante piézoélectrique du vérin et k_a la raideur de l'actionneur telle que :

$$\frac{1}{K_a} = \frac{1}{K_v} + \frac{1}{K_p} \tag{1 - 54}$$

I.3.2 Identification expérimentale des actionneurs piézoélectriques

Plusieurs tests statiques et dynamiques ont été réalisés dans [5] pour identifier les caractéristiques du vérin piézoélectrique, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

	Actionneur vertical (z)
Raideur K_a (N/m)	0.63 E6
Facteur d'amortissement ε_a (%)	5.7
Constante piézoélectrique α (m/volt)	12 E-6

Tableau 1.2- caractéristiques des actionneurs

I.4 Génération du modèle poutre /capteur et actionneur

Le comportement dynamique de la structure (poutre/actionneur) selon la direction z peut être décrit par l'équation (1-55) avec F_p force de perturbations extérieures, soit :

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + Kq = F_p + K_a \alpha G_v V \tag{1 - 55}$$

avec :

\ddot{q}, \dot{q}, q : Vecteurs des accélérations et des déplacements modaux.

f_p, f_c : vecteurs de forces modales de perturbation et de contrôle telles que :

$$f_p = \Phi f F_p$$

$$f_c = \Phi^T K_a G_v \alpha V$$

En considérant que les forces de perturbation extérieures sont nulles, et que l'amortissement de la structure est négligeable, nous aboutirons finalement au système d'équations suivant :

$$M\ddot{\delta} + K\delta = f_c(1 - 56)$$

Il est à noter que deux modèles sont réalisés pour la structure mécanique :

a-Modèle de simulation et modèle de contrôle

Le modèle de simulation est un modèle qui doit traduire le plus fidèlement possible le comportement dynamique de la structure à contrôler. Dans notre cas, ce modèle sera d'une dimension assez élevée qui est du quarantième ordre (40). Ce modèle que nous appellerons par la suite modèle initial ou total, est désigné par (G_T).

Pour la réalisation de la commande nous procéderons à deux réductions de modèle. Dans cette perspective les huit premières modes seront conservés (les plus lents). Les autres modes seront écartés. Ceci constituera la première réduction, à l'issue de laquelle nous aurons un modèle que nous désignerons par G_8 .

Une deuxième réduction est obtenue par la méthode dite de troncature. Elle consiste à conserver les modes lents et à rejeter les modes rapides sans pour autant négliger leurs effets sur le modèle complet.

a-1 La méthode de troncature pour la réduction du modèle [5]

Cette méthode est consacrée à la réduction ou simplification des systèmes complexes de grande dimension. Précisons que cette réduction ne concernera ici que l'ordre du modèle (annexe B). nous présentons essentiellement des méthodes basées sur la description de ce système dans l'espace d'état.

Partant d'un modèle de départ classique donné par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases} \quad (1-57)$$

En arrangeant les différents modes du plus lent au plus rapide on peut écrire :

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} X_1 \\ X_2 \end{cases} + \begin{cases} B_1 \\ B_2 \end{cases} \{U\} \\ y = \{C_1 \quad C_2\} \begin{cases} X_1 \\ X_2 \end{cases} \end{cases} \quad (1-58)$$

au alors :

$$\begin{cases} \{X_1\} = [A_{11} & A_{12}] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \{B_1\}\{U\} \\ \{\dot{X}_2\} = [A_{21} & A_{22}] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + \{B_2\}\{U\} \\ y = C_1 X_1 + C_2 X_2 \end{cases} \quad (1-59)$$

En négligeant les vitesses des modes lents on aura donc :

$$\dot{X}_2 = \{0\} \quad (1-60)$$

En remplaçant (1-60) dans l'équation (1-59) on aura :

$$X_2 = -A_{22}^{-1} A_{21} X_1 - A_{22}^{-1} B_2 U$$

d'où :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (A_{11} - A_{22}^{-1} A_{21}) X_1 + (B_1 - A_{22}^{-1} B_2) U \\ \{y\} = (C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21}) X_1 - (C_2 A_{22}^{-1} B_2) U \end{cases} \quad (1-61)$$

On aboutit donc à une nouvelle représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \quad (1-62)$$

avec :

$$\begin{cases} a = A_{11} - A_{22}^{-1} A_{21} \\ b = B_1 - A_{22}^{-1} B_2 \\ c = C_1 - C_2 A_{22}^{-1} A_{21} \\ d = -C_2 A_{22}^{-1} B_2 \end{cases} \quad (1-63)$$

Dans notre application seulement les quatre premiers modes seront gardés. En appliquant la méthode de troncature nous obtenons un modèle que nous désignerons par (G_r).

A la fin de cette deuxième réduction nous aboutissons à un modèle dit **modèle de contrôle**

b-Modèle de contrôle

Le modèle de contrôle doit par définition être le plus simple possible pour permettre de minimiser le coût de réalisation du contrôleur. Généralement il est issu d'une réduction de modèle de simulation, comme c'est le cas dans cet exemple.

Nous utiliserons comme modèle de contrôle, le modèle présenté par sa représentation d'état (A_r, B_r, C_r, D_r) ci-dessous :

La matrice d'évolution :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -789 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7960 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice d'application de la commande :

$$B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 388 \\ 1866 \end{bmatrix}$$

La matrice de sortie correspondant à l'utilisation d'un capteur placé au nœud 10 de façon à assurer une bonne observabilité :

$$C_r = [0.009 \quad 0.0410 \quad 0.3407 \quad 0.2451]$$

La matrice de transmission directe de la commande, qui prend en compte la troncature modale :

$$D_r = [0.4849]$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$G_r = \frac{0.4849 s^4 + 589.4 s^3 + 4322. s^2 + 1.413. 10^6 s + 3.133. 10^6}{s^4 + 8749 s^2 + 6.28 10^6}$$

I.5 Conclusion

Nous avons abouti à un modèle de contrôle du quatrième ordre après deux réductions. Toutefois ce modèle représente imparfaitement la réalité.

Pour se rapprocher du modèle réel, des incertitudes de modélisation sont envisagées et sont en général ajoutées au modèle.

Ces incertitudes de modélisation sont en générale source de problème et nécessite d'avoir recouru à plusieurs essais pour déterminer quel type d'incertitudes est à considérer, et donc posent un problème majeur pour la commande des systèmes.

CHAPITRE II

Synthèse du correcteur H_∞

Chapitre II

Synthèse du correcteur H_∞

II.1 Introduction

De nombreux processus sont caractérisés par des variations rapides des paramètres, faible amortissement, instabilité, non linéarité...etc. Le contrôle de tels systèmes est aujourd'hui un problème donnant lieu à de nombreuses études. La démarche habituelle utilise des correcteurs classiques type (PI, PID...) [7]. L'introduction de ces correcteurs permet de résoudre certains problèmes de type: annuler l'erreur statique, atténuer les effets des modes résonants, rendre le système stable. Cependant, si le procédé à commander présente des dynamiques non modélisées ou de fortes variations des paramètres, les structures de contrôle à base de correcteurs classiques (PI, PID..) n'assurent plus la robustesse. Ainsi, cette approche n'offre aucune garantie, ni sur les performances, ni sur la robustesse.

Les techniques de synthèse dites robustes, notamment du type H_∞ , sont une voie particulièrement efficace pour obtenir un correcteur dynamique répondant à un cahier des charges contenant des spécificités de robustesse vis-à-vis des bruits de mesure, des perturbations extérieures et des variations des paramètres.

Initiée par Zames au début des années 80 [8, 9, 10] et développée (en particulier) par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis, la synthèse H_∞ a connu des applications multiples dans des domaines très variés [11, 10,13]. Zames a considéré l'optimisation de la norme H_∞ d'un système bouclé mono-variable. Le travail est fait avec quelques questions de base de la théorie classique de commande et a eu immédiatement beaucoup d'attention. Il a ensuite été étendu à beaucoup de problèmes généraux, puisque il est reconnu que l'approche H_∞ permet la quantification avec la recherche de la robustesse plus directe que les méthodes d'optimisation classiques. Le nom H_∞ représente un nombre dans l'espace introduit par le mathématicien Hardy. Il est l'espace de fonctions dans le plan complexe qui sont analytiques et bornées par le demi-plan droit du plan complexe[14].

L'objectif de Ce chapitre est de présenterle principe de la synthèse H_∞ sanstenir compte duproblème des incertitudes, mais avant de commencer en va définir le problème standard et sa méthode de résolution par l'équation de Riccati, ensuit ces résultats fournissent une base pour la mise en œuvre par l'introduction de pondérations fréquentielles. Le chapitre s'achève par un exemple illustratif (système masse-ressort).

II.2 Objectif de synthèse H_∞

L'objectif de synthèse H_∞ utilise le schéma de commande de la **figure (II.1)** où les signaux d'entrée $r(s)$, $b(s)$, $v(s)$ sont respectivement la consigne, la perturbation et le bruit de mesure. Les signaux de sortie sont: $y(s)$ la sortie du système bouclé, $u(s)$ la grandeur de commande et $\varepsilon(s)$ l'erreur de suivi de référence, définie par $\varepsilon(s) = r(s) - y(s)$.

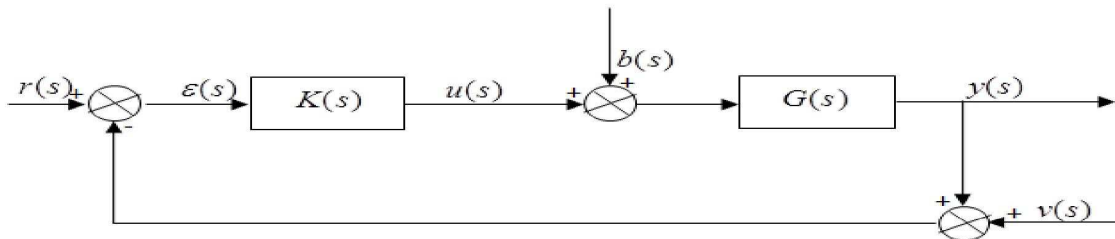


Fig. II.1 : schéma de principe de la synthèse H_∞ .

Le contrôleur $K(s)$ est alors calculé pour imposer à la boucle fermée les spécifications suivantes :

- ✓ Suivi de trajectoire de référence: l'objectif est de rendre l'erreur statique nulle et d'améliorer éventuellement le régime transitoire du système en boucle fermée.
- ✓ Rejet/atténuation de signaux de perturbation: il s'agit de minimiser l'influence du signal de perturbation $b(s)$ sur le signal d'erreur $\varepsilon(s)$ et sur la commande $u(s)$.
- ✓ Atténuation des bruits de mesure: il s'agit de minimiser l'influence des signaux de bruit $v(s)$ sur le signal de commande $u(s)$ et sur le signal de sortie $y(s)$.
- ✓ Commande modérée: on désire limiter la puissance de commande nécessaire au suivi de référence.

Une autre spécification qui est absolument nécessaire à prendre en compte est que la stabilité du système bouclé doit être assurée.

II.3 Formalisation du problème de synthèse H_∞

La commande H_∞ utilise des concepts fréquentiels pour le calcul d'un correcteur. Elle permet de prendre en compte des objectifs de stabilité, de marge de stabilité et de modelage de plusieurs transferts[10], reliant les différentes entrées/sorties existantes dans le système à commander.

Même si cette technique peut être appliquée aux systèmes multi-variables [15], on l'illustre dans ce qui suit, dans un système linéaire mono-variable basé sur la forme standard.

Le problème H_∞ standard consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé, ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système augmenté (**figure II.2**), ce dernier est composé du système lui-même et des filtres de pondération.

L'intérêt principal de la forme standard est avant tout méthodologique. Elle apporte en effet une certaine clarté de formulation en permettant de représenter à la fois le système à contrôler et le cahier des charges associé [16].

II.4 Modélisation du système à commander

De manière générale, le système à commander doit être modélisé de sorte à faire apparaître comme grandeurs d'entrées :

$u(s)$: est la commande du système,

$w(s)$: sont les entrées exogènes qui peuvent être les consignes les bruits ou les perturbations, et comme grandeurs de sortie :

$y(s)$: sont les sorties de mesures utilisées pour calculer la loi de commande $u(s)$,

$e(s)$: sont les sorties à contrôler (écart, sorties..),

Le modèle ainsi obtenu (**figure. II.2**), noté $P(s)$, est multi-variable puisqu'il est constitué de quatre transferts. On l'appelle également le modèle augmenté.

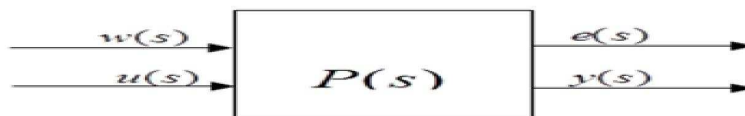


Fig.II.2 Modèle augmenté

Classiquement, on décompose $P(s)$ en quatre transferts de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} e(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{we}(s) & P_{ue}(s) \\ P_{wy}(s) & P_{yy}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

II.5 Principes d'optimisation H_∞

Considérons la boucle fermée représentée par la **figure.II.1**, où $G(s)$ représente le modèle du système à asservir et $K(s)$ le correcteur à déterminer. La sortie à contrôler est $y(t)$, l'entrée de référence est $r(t)$ et le signal $b(t)$ est la perturbation.

Rappelons que, dans le cas mono variable, la boucle fermée est complètement définie par quatre fonctions de transfert que l'on désigne respectivement par $S(s)$, $T(s)$, $K(s)S(s)$, et $G(s)S(s)$. Ces transferts s'expriment en fonction de la fonction de transfert du régulateur $K(s)$ et la fonction de transfert du système à commander $G(s)$ de la façon suivante :

$$S(s) = \frac{\varepsilon(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{II.2})$$

$$T(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{II.3})$$

$$K(s)S(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (\text{II.4})$$

On constate que $S(s) + T(s) = 1$, où $S(s)$ est communément appelée fonction de sensibilité, car elle caractérise l'erreur d'asservissement en fonction de l'entrée de référence. Cette fonction de sensibilité est importante car elle est significative de la réponse de la boucle

fermée mais aussi de la marge de module de $|1 + GK|$ sur tout le domaine fréquentiel [14, 12].
 $T(s)$ Est appelée fonction de sensibilité complémentaire car $S(s) + T(s) = 1$.

i) La recherche de la performance nominale conduit à spécifier l'atténuation en fonction de la fréquence de la fonction de sensibilité $S(s)$ sous la contrainte de stabilité nominale. Comme pour un système passe-bas $S(s)$ tendent vers l'identité en hautes fréquences, l'atténuation de la fonction de sensibilité doit être recherchée en basses fréquences. On peut définir une matrice $W_1(s)$, par exemple sous la forme $W_1(s) = w_1(s)I_p$ où $w_1(s)$ est une fonction de transfert scalaire de type passe-bas avec un gain élevé en basse fréquence (**figure.II.3.a**). L'objectif de performance nominale sera atteint si $S(s)$ vérifie :

$$\|w_1 S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(w_1(jw)S(jw)) < \gamma \quad (\text{II.5})$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(S(jw)) < \frac{\gamma}{w_1(jw)}$$

ii) Toutefois chercher à satisfaire cette condition est insuffisant en pratique car l'objectif qu'elle traduit ne tient compte ni du fait que les commandes doivent rester limitées à des valeurs raisonnables. On doit chercher à réduire la fonction $KS(s)$. Par ailleurs cette matrice traduit l'effet des signaux extérieurs sur la commande, et cet objectif est donc cohérent avec la recherche des commandes douces évitant de trop solliciter les actionneurs. Mais en basses fréquences où $S(s)$ sont faibles – d'après l'objectif i) – on a $S(s) \approx (GK)^{-1}$, soit si l'on suppose pour simplifier G et K sont carrés $KS \approx G^{-1}$ l'atténuation de KS doit être recherchée en haute fréquence. On peut définir une matrice $W_2(s)$, par exemple sous la forme $W_2(s) = w_2(s)I_m$ où $w_2(s)$ est une fonction de transfert scalaire de type passe-haut avec un gain élevé en haute fréquence (**figure.II.3.b**). L'objectif de performance nominale sera atteint si $S(s)$ vérifie :

$$\|w_2 KS\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(w_2(jw)KS(jw)) < \gamma \quad (\text{II.6})$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(K(jw)S(jw)) < \frac{\gamma}{w_2(jw)}$$

iii) pour l'atténuation de la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$. Mais en basses fréquences où GK est grand – d'après l'objectif i) – $T \approx I_p$. L'atténuation de $T(s)$ ne peut donc être recherchée en haute fréquence, comme c'était le cas pour KS – d'après l'objectif ii) –. On peut définir une matrice $W_3(s)$, par exemple sous la forme $W_3(s) = w_3(s)I_p$ où $w_3(s)$ est une fonction de transfert scalaire de type passe-haut avec un gain élevé en haute fréquence (**figure.II.3.c**). L'objectif de performance nominale sera atteint si $S(s)$ vérifie :

$$\|w_3 T\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(w_3(jw)T(jw)) < \gamma \quad (\text{II.7})$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in R \bar{\sigma}(T(jw)) < \frac{\gamma}{w_3(jw)}$$

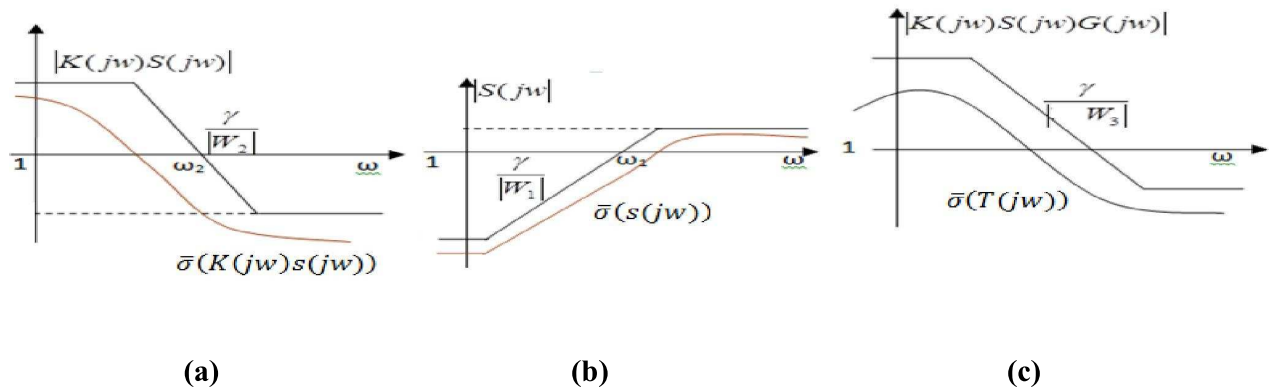


Fig.II.3 –Allure typiques de pondérations fréquentielles w_1, w_2, w_3 et des valeurs singulières S, KS, T

En résumé les trois premiers objectifs peuvent être traduits par les conditions :

$$\|W_1 S(s)\|_\infty < \gamma; \|W_2 KS(s)\|_\infty < \gamma; \|W_3 T(s)\|_\infty < \gamma \tag{II.8}$$

Tout en assurant évidemment la stabilité du système bouclé. Les pondérations W_1, W_2, W_3 ne peuvent être choisies arbitrairement .En particulier du fait que :

$$S(s) + T(s) = I_p \tag{II.9}$$

Les fonctions scalaires w_1 et w_3 doivent vérifier :

$$\forall w \in \mathbb{R} \frac{1}{w_1(jw)} + \frac{1}{w_3(jw)} > \gamma \tag{II.10}$$

Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \\ W_3 T \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \\ W_3 T \end{bmatrix} &= S^* W_1^* W_1 S + (KS)^* W_2^* W_2 (KS) + T^* W_3^* W_3 T \\ &\geq S^* W_1^* W_1 S \\ &\geq (KS)^* W_2^* W_2 (KS) \\ &\geq T^* W_3^* W_3 T \end{aligned} \tag{II.11}$$

L'inégalité étant prise au sens des matrices semi définies positives : $A \geq B \leftrightarrow A - B \geq 0$.

On a donc :

$$\forall w \in \mathbb{R} \bar{\sigma} \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 KS \\ W_3 T \end{bmatrix} \geq \begin{cases} \bar{\sigma}(W_1 S) \\ \bar{\sigma}(W_2 KS) \\ \bar{\sigma}(W_3 T) \end{cases} \tag{II.12}$$

$$\text{soit } \begin{cases} \|W_1 S\|_\infty \geq \bar{\sigma} \|W_1 S\|_\infty \\ \|W_2 K S\|_\infty \geq \bar{\sigma} \|W_2 K S\|_\infty \\ \|W_3 T\|_\infty \geq \bar{\sigma} \|W_3 T\|_\infty \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

On peut donc assurer les trois objectifs recherchés en résolvant le problème unique :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{array} \right\|_\infty < \gamma \quad (\text{II.14})$$

En pratique, nous avons vu que KS et T jouent des rôles semblables .La présence de ces deux fonction dans le critère peut être considérée comme superflue .On résolvera donc l'un des deux problèmes suivant :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_3 T \end{array} \right\| < \gamma \text{ ou } \left\| \begin{array}{c} W_1 S \\ W_2 K S \end{array} \right\| < \gamma \quad (\text{II.15})$$

Le deuxième problème s'avère plus judicieux en pratique .ces deux problèmes sont distingués dans la littérature sous le nom de problème de sensibilité mixte.

II.6 Problème H_∞ standard

La synthèse H_∞ utilise la notion de problème standard, qui est représenté sur la **figure II.4** la matrice de transfert $P(s)$ modélise les interactions dynamiques entre deux ensembles d'entrées et deux ensembles de sorties : le vecteur w représente des entrées extérieures ,telle que signaux deréférence ,perturbations ,bruits,le vecteur $u(s)$ représente les commandes ;les signaux $e(s)$ sont choisis pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement ;enfin , $y(s)$ représente les mesures disponibles pour élaborer la commande .

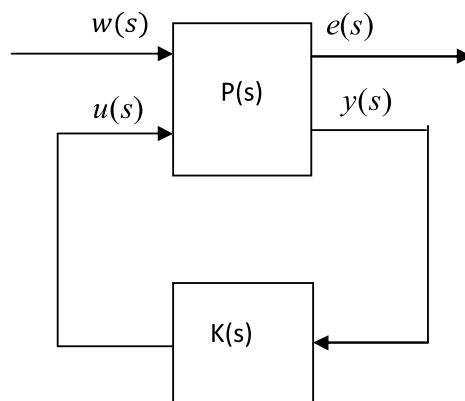


Fig. II.4. Forme standard de la synthèse H_∞ .

Lorsqu'on applique la loi de commande $u(s) = K(s) \times y(s)$ au système on obtient l'expression suivante du transfert entre les entrées exogènes $w(s)$ et les sorties régulées

$e(s)$, qui est appelée Transformation Fractionnaire Linéaire (LFT) inférieure [16]. Elle est donnée par:

$$e(s) = F_1[P(s), K(s)]w(s) \quad (\text{II.16})$$

Où

$$F_1[P(s), K(s)] = P_{we}(s) + P_{ue}(s)K(s)[I - P_{uy}(s)K(s)]^{-1}P_{wy}(s) \quad (\text{II.17})$$

La synthèse H_∞ du correcteur est définie par le problème suivant :

Etant donné $\gamma > 0$, déterminer un correcteur $K(s)$ qui stabilise le système bouclé de la **figure.II.4** et assure :

$$\begin{aligned} (i) & F_i(P, K) \text{ soit stable} \\ (ii) & \|F_i(P, K)\|_\infty \leq \gamma \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

II.6.1 Résolution du problème standard par équation de Riccati

La méthode de calcul du correcteur H_∞ standard, proposé par Doyle [16] est basée sur l'approche par équation de Riccati et l'approche par l'Inégalité Matricielle affines (LMI)[18]. Ces deux méthodes reposent sur la forme standard d'état de la matrice d'interconnexion $P(s)$, écrite sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{we} & D_{ue} \\ C_y & D_{wy} & D_{uy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

avec $x \in R^n, w \in R^{n_w}, u \in R^m, e \in R^{n_e}, y \in R^{n_y}$

Tel que n, n_w, m, n_e et n_y sont respectivement les dimensions des vecteurs x, w, u, e et y .

La méthode de résolution du problème H_∞ standard en utilisant les équations de Riccati, également connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle [16,18], est très utilisée puisqu'elle est la mieux adaptée à la résolution numérique du problème de synthèse H_∞ notamment dans le cas des systèmes de grande dimension.

La mise en œuvre de cette méthode nécessite néanmoins la vérification au préalable des quatre hypothèses suivantes :

$$H_1) (A, B_u) \text{ est stabilisable et } (C_y, A) \text{ est détectable.} \quad (\text{II.20})$$

$$H_2) \text{ rang } (D_{eu}) = n_u \text{ et rang } (D_{yw}) = n_y. \quad (\text{II.21})$$

$$H_3) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_e & D_{ue} \end{bmatrix} = n + m. \quad (\text{II.22})$$

$$H_4) \quad \forall \omega \in R \quad \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + ny. \quad (\text{II.23})$$

L'hypothèse H_1 est classique puisqu'elle doit être vérifiée dans toutes les méthodes de synthèse utilisant la représentation d'état. Cela garantit l'existence d'une loi de commande qui stabilise le système en boucle fermé.

L'hypothèse H_2 est une condition suffisante pour assurer que la loi de commande soit propre. Remarquons que le fait d'avoir D_{ue} de rang plein signifie que toutes les commandes interviennent dans les variables régulées e . Par ailleurs, cette hypothèse suppose implicitement que $n_e \geq n_u$ et $n_w \geq n_y$.

L'hypothèse H_3 entraîne que le transfert $P_{ue}(s)$ n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire (la réciproque n'est pas vraie). Il en est de même pour l'hypothèse H_4 et le transfert $P_{wy}(s)$.

Ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. De plus, pour obtenir des expressions plus simples, on introduit les conditions supplémentaires suivantes :

$$\begin{cases} D_{we} = 0 \\ D_{wy} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D_{ue}^T (C_e \quad D_{ue}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_u} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} B_w \\ D_{wy} \end{pmatrix} D_{wy}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{II.24}) \quad \text{Sous}$$

toutes ces conditions, il existe un correcteur $K(s)$ solution du problème H_∞ standard si et seulement si :

- 1- la matrice Hamiltonienne $H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, et il existe une matrice symétrique X_∞ définie positive solution de l'équation de Riccati suivante :

$$X_\infty = Ric(H_\infty) \quad (\text{II.25})$$

- 2- La matrice Hamiltonienne $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{pmatrix}$ n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire et il existe une matrice symétrique $Y_\infty \geq 0$ telle que

$$Y_\infty = Ric(J_\infty) \quad (\text{II.26})$$

3- $\rho(X_\infty Y_\infty) \leq \gamma^2$ où ρ désigne le module de la plus grande valeur propre.

L'ensemble des correcteurs $K(s)$ répondant au problème est donné par :

$$K(s) = F(K_a(s), \Phi(s))$$

Où $\Phi(s) \in RH_\infty$ est une matrice de transfert de dimensions $n_u \times n_y$ arbitraire vérifiant $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$, et $K_a(s)$ est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ B_u^T X_\infty & 0 & I_m \\ -C_y & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Avec :

$$\hat{A}_\infty = A + \delta^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C \quad (\text{II.28})$$

$$Z_\infty = (I_n - \delta^{-2} Y_\infty X_\infty) \quad (\text{II.29})$$

En particulier, le correcteur correspondant à $\Phi(s) \equiv 0$, appelé correcteur central, admet la représentation d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

Le problème (II.6.1) se présente donc comme la recherche d'un compromis entre l'objectif recherché et les moyens nécessaires. Toutefois, cette formulation s'avère en pratique très rigide, car elle ne laisse aucun élément de choix à l'utilisateur. Pour contourner cet obstacle, on introduit des pondérations sur les différents signaux. Les étapes qui suivent montrent la démarche à suivre pour contourner cet obstacle.

II.6.2 Résolution du problème standard par l'approche H_∞ pondérée

La synthèse pondérée est un cas particulier du problème standard basée sur l'introduction des fonctions de pondérations, placées aux différents points du schéma d'asservissement. Ces fonctions de pondération traduisent le cahier des charges sous forme de gabarits fréquentiels, que doivent satisfaire les transferts en boucle fermée. Il apparaît donc un lien direct entre le choix des pondérations et les spécifications du cahier des charges, ils ont une interprétation physique qui est liée au comportement désiré de la boucle fermée.

II.6.2.1 Mise en œuvre de la synthèse par l'introduction des fonctions de pondération

Reprenons le schéma de la **figure.II.1**, pour atteindre les objectifs du cahier des charges, on peut introduire des pondérations sur les différents signaux, qui prendront la forme des filtres, qui permettent de modéliser les différents transferts, $S(s)$, $KS(s)$, et $KSG(s)$ ainsi privilégier un domaine de fréquences particulier. Considérons à cette fin le schéma de la **figure (II.5)**, dans lequel l'erreur $\varepsilon(s)$ est pondérée par le filtre $W_1(s)$, la commande $u(s)$ par $W_2(s)$, est la sortie par $W_3(s)$ [17, 18, 21].

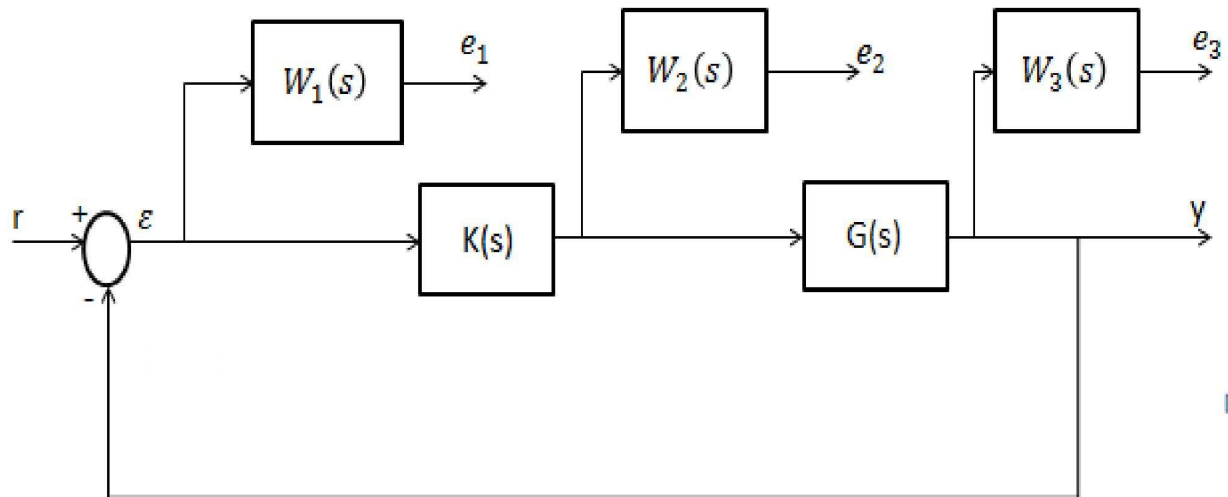


Fig II.5 : mise en place de la fonction de pondérations

On considère $r(s)$ comme entrées et $e_1(s)$, $e_2(s)$ et $e_3(s)$ comme signaux à surveiller. Ce système est alors représenté par la relation [16] :

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} [r(s)] \quad (\text{II.31})$$

Pour résoudre Le problème H_∞ standard correspondant, on a recours à la méthode exposée dans le paragraphe **II. 6**. Le problème H_∞ standard ainsi découlé est :

On détermine un nombre $\gamma > 0$, et le correcteur $K(s)$ stabilisant le système bouclé et assurant:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{bmatrix} \right\| < \gamma$$

L'avantage de considérer ce problème, plutôt que le problème plus simple (II.6.1) est que les filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ permettent de modéliser les différents transferts $S(s)$, $KS(s)$ et T .

II.6.2.2 Mise sous forme standard pondéré

Le système muni du correcteur est augmenté par des fonctions de pondération (**figure II.5**), doit alors être mis sous la forme standard, c'est-à-dire sous la forme représentée par l'équation d'état suivante[16] :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ e \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_\varepsilon & D_{\varepsilon w} & D_{\varepsilon u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Il faut d'abord identifier les différents signaux :

- $G(s)$: (entrée u , sortie y) : $\begin{cases} \dot{x} = A_G x + B_G u \\ y = C_G x + D_G u \end{cases}$
- $W1(s)$: (entrée ε , sortie e_1) : $\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1(r - y) \\ e_1 = c_1 x_1 + D_1(r - y) \end{cases}$
- $W2(s)$: (entrée u , sortie e_2) : $\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ e_2 = C_2 x_2 + D_2 u \end{cases}$
- $W3$: (entrée y , sortie e_3) : $\begin{cases} \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 y \\ e_3 = C_3 x_3 + D_3 y \end{cases}$

(II.33)

Le système $P(s)$ admet une représentation d'état d'ordre n définie par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B_w w + B_u u \\ e = C_e z + D_{ew} w + D_{eu} u \\ y = \varepsilon = C_\varepsilon z + D_{\varepsilon w} w + D_{\varepsilon u} u \end{cases} \quad (\text{II.34})$$

$$\text{tel que : } z = (x \ x_1 \ x_2 \ x_3)^T, w = (r)$$

Et :

$$A = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 \\ -B_1 C_G & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ B_3 C_g & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_u = \begin{bmatrix} B_G \\ -B_1 D_G \\ B_2 \\ B_3 D_G \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

$$C_e = \begin{bmatrix} -D_1 C_G & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ D_3 C_G & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}; C_\varepsilon = [-C_G \ 0 \ 0 \ 0] \quad (\text{II.37})$$

$$D_{ew} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; D_{eu} = \begin{bmatrix} D_1 D_G \\ D_2 \\ D_3 D_G \end{bmatrix}; D_{\varepsilon w} = [I]; D_{\varepsilon u} = [-D_G] \quad (\text{II.38})$$

Soit :

$$B = [B_w \quad B_u], \quad C = \begin{bmatrix} C_e \\ C_\varepsilon \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{ew} & D_{eu} \\ D_{\varepsilon w} & D_{\varepsilon u} \end{bmatrix}. \quad (\text{II.39})$$

L'application de l'algorithme de Glover-Doyle à ce système augmenté, doit particulièrement vérifier les quatre hypothèses de l'étape (1) de l'algorithme.

- Si (A, B, C, D) est minimal, la partie non commandable du problème est constituée par le filtre $W_3(s)$, et la partie non observable est constituée par les filtres $W_1(s)$ et $W_2(s)$.
- L'hypothèse 1 impose donc de choisir les pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ stables, et l'hypothèse 2 impose de choisir $W_2(s)$ avec un gain non nul à l'infini.
- On peut enfin noter que l'ordre du correcteur $K(s)$ est égal à la somme des ordres de $G(s)$ et des filtres $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$.

L'ensemble des problèmes de commande auxquels répond cette synthèse est le suivant:

- assurer une erreur de poursuite par rapport à un signal d'entrée
- assurer un rejet des perturbations
- limiter l'amplitude des signaux de commande par rapport à la référence et au bruit de mesure.

II.7 Choix des fonctions de pondération

La synthèse H_∞ est fréquentielle, donc toute spécification doit être imposée par l'intermédiaire d'un gabarit fréquentiel, ainsi les filtres auront le rôle de modeler les transferts en boucle fermée de l'asservissement. Bien que plusieurs techniques de choix des filtres aient été utilisées, elles restent souvent spécifiques à un système donné. On s'intéresse dans ce qui suit au choix de fonctions de pondération [22,19].

Le choix de ces fonctions se fait naturellement à partir du cahier des charges. En effet, la plupart des spécifications peuvent être interprétées par des contraintes fréquentielles sur les transferts en boucle fermée. Néanmoins, il est important de noter que les transferts en boucle fermée ne sont pas indépendants entre eux et que pour un transfert donné le correcteur ne peut pas agir sur tout le domaine fréquentiel.

Considérons les transferts S et T , on a quatre transferts qui apparaissent, mais on pondérera seulement trois transfert car $S+T=I$, et donc une fois que S (ou T) est fixé T (ou S) l'est aussi.

Les demandes principales d'un cahier des charges peuvent souvent être prises en compte par certaines caractéristiques fréquentielles des pondérations:

- gain en basses fréquences,
- gain à hautes fréquences,
- comportement asymptotique à l'origine,

- comportement asymptotique à l'infini,
- fréquence de passage à 0_{dB}

II.7.1 Choix de la pondération W_1 :

Pour contraindre le module de la fonction de sensibilité $S(s)$ par la pondération $W_1(s)$, dans [19] l'auteur propose de choisir $W_1(s)$ de la forme

$$W_1(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0} \quad (\text{II.40})$$

Avec :

$$b_1 = G_\infty \cdot \sqrt{|G_0^2 - 1|}, \quad b_0 = G_0 \cdot \omega_c \sqrt{|G_\infty^0 - 1|}$$

$$a_1 = \sqrt{|G_0^2 - 1|}, \quad a_0 = \omega_c \cdot \sqrt{|G_\infty^2 - 1|}$$

Où

$$G_0 = |W_1(0)|, \quad G_\infty = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_1(j\omega)|.$$

Avec $(G_0 - 1) \cdot (G_\infty - 1) < 0$ et $\omega_c > 0$ telle que $|W_1(j\omega_c)| = 1$, ω_c étant la fréquence de coupure souhaitée.

Comme le régulateur $K(s)$ est calculé de sorte que $|S(j\omega)| < \frac{\gamma}{W_1(j\omega)}$, le gain G_0 permet donc de contraindre $|S(j\omega)|$ en basses fréquences $|S(0)| < \frac{1}{G_0}$, permettant ainsi de réduire l'erreur statique. Comme la norme H_∞ de la fonction de sensibilité $S(s)$ est égale à l'inverse de la marge de module, on peut donc contraindre $S(s)$ en hautes fréquences par une borne supérieure telle que :

$\|S\|_\infty < \frac{1}{G_\infty}$ (G_∞ Est une borne supérieure sur la marge de module) permettant ainsi la stabilité du système bouclé.

II.7.2 Choix de la pondération W_2 :

La relation (II.31) montre que la fonction de pondération $W_2(s)$ intervient pour contraindre le module de $KS(s)$ qui lie la consigne à la commande $u(s)$. De plus, cette contrainte doit agir uniquement en basses fréquences, car on peut agir en hautes fréquences avec le correcteur $K(s)$ (en haute fréquence on a : $KS(s) \approx K(s)$).

Contrairement à la pondération $W_1(s)$, la pondération $W_2(s)$ est déterminée de façon itérative. En effet, on cherche à limiter l'amplitude du signal de commande $u(s)$, on peut choisir dans un premier temps $W_2(s)$ comme un gain afin de limiter la complexité du correcteur, on augmente progressivement le gain $|W_2(j\omega)|$ afin que la fonction de sensibilité $S(s)$ suive au plus près le gabarit $1/|W_1(j\omega)|$. Enfin on introduit une atténuation en hautes fréquences sur le gabarit $1/|W_2(j\omega)|$, l'objectif étant d'obliger le gain du correcteur à

chuter dans cette région des fréquences afin de limiter la sensibilité au bruit ; mais on fait en sorte de ne pas augmenter de façon trop importante la valeur de γ .

Il faut noter que $1/W_2$ est une fonction de transfert passe bas et on peut choisir la même structure que $W_1(s)$ [24, 22].

II.8 Exemple d'application [25]

L'utilisation des techniques H_∞ pour le loop-shaping et les détails pratiques de mise en œuvre sont illustrés sur l'exemple suivant :

Considérons le système physique simple de la **figure II.6** constitué d'un ensemble masse – ressort soumis aux frottements de coulomb

$$F_c = -f \dot{x} \quad (\text{II.41})$$

On veut asservir ce système en position, c'est-à-dire faire suivre au centre de gravité $x(t)$ de la masse une consigne $r(t)$ arbitraire. Pour ce faire on dispose d'une mesure de la position $x(t)$ et on peut exercer une commande en force $u(t)$. La commande u est calculée à partir de l'erreur $e(t) = r(t) - x(t)$.

Les spécifications du problème sont les suivantes :

1. On souhaite asservir la position de la masse m , avec une bande passante inférieure à 1 rd/s (soit un temps de réponse comprise entre 0.1 et 0.3 secondes),
2. Stabiliser le système rapidement avec le moins d'oscillations possibles (limiter la résonance du transfert)

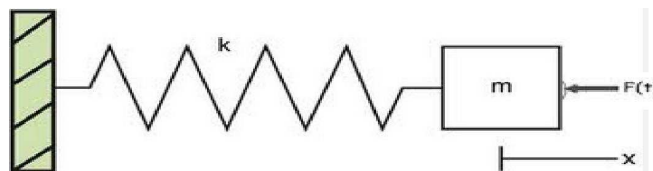


Fig. II.6—système masse-ressort.

A partir de l'équation d'état $m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$, on obtient comme transfert entrée/sortie :

$$G_0(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + 2\varepsilon \frac{s}{w_0} + \frac{s^2}{w_0^2}}$$

Où $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre et $\varepsilon = \frac{w_0 f}{2k} = \frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{km}}$ est le facteur d'amortissement.

Ces notations sont standard pour les systèmes du second ordre. On utilisera les valeurs $m=0.01$ kg, $k=1$ N/m, $f=0.002$ Ns/m.

D'où

$$\omega_0 = 10 \text{ rad/s} ; \varepsilon = 0.01.$$

Si $K(s)$ est le compensateur utilisé, la commande u_c calculée à l'instant t vérifie :

$$u_c = K(s)X(s). \quad (\text{II.42})$$

Le diagramme de BODE et la Réponse indicielle de ce transfert apparait en **figure. II.7**. On notera la résonance au voisinage de la pulsation propre ω_0 .

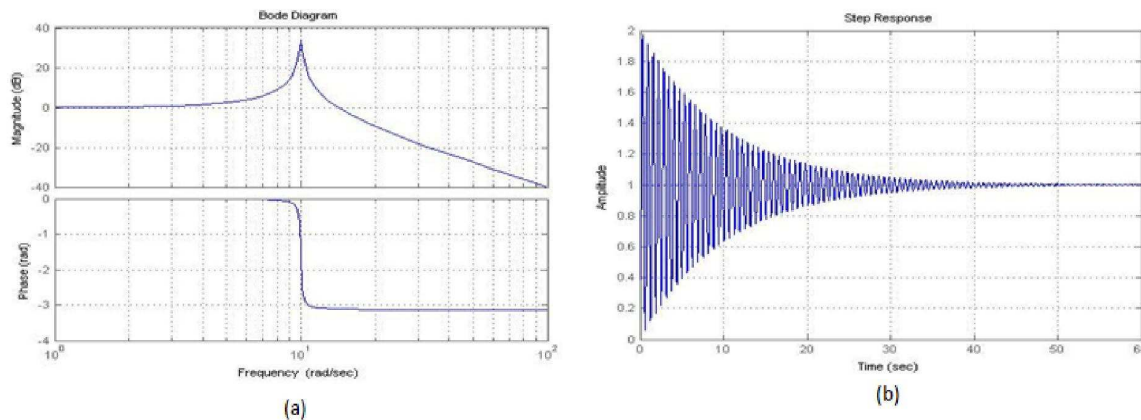


Fig. II.7–(a) diagramme de BODE et (b) Réponse indicielle du modèle.

Pour prendre en compte les deux spécifications on utilisera le critère du problème de sensibilité mixte (voir paragraphe II.5)

$$\left\| \frac{W_1 S}{W_3 T} \right\|_\infty < \gamma$$

- Choix de la pondération $W_1(s)$

La première spécification du cahier des charges concernant la fonction de sensibilité $S(s)$. Elles permettent de fixer respectivement son gain statique ($G_0 = 0.01$), sa pulsation à 0dB ($\omega_c \approx 1$), et son gain maximal ($G_\infty = 0$). En appliquant la relation (II.40), on obtient :

$$W_1 = \frac{1}{s + 0.01}$$

- Choix de la pondération $W_3(s)$

La deuxième spécialisation indique qu'on veut garder un Comportement du second ordre, mais avec une pulsation propre plus faible et un Amortissement plus grand. On applique donc une pondération d'ordre 2, on obtient :

$$W_3 = \frac{s^2 + 25s + 200}{s^2 + 35s + 300}$$

Les fonctions de pondération ainsi choisies doivent normalement contraindre le calcul du régulateur qui permet au système en boucle fermée de respecter le cahier des charges imposé.

Pour déterminer le régulateur permettant d'atteindre ces objectifs, on met le système augmenté par les fonctions de pondération $W_1(s)$ et $W_3(s)$ avec $W_2 = 0$ sous la forme standard, donnée par les équations II.32a II.39. La synthèse H_∞ utilisant l'algorithme de Glover-Doyle donné dans le paragraphe (II.6.1) pour la valeur $\gamma = 1$ permet de déterminer le régulateur $K(s)$ dont le modèle transfert est donné par :

$$K(s) = \frac{1.151 \cdot 10^4 s^4 + 4.05 \cdot 10^5 s^3 + 4.687 \cdot 10^6 s^2 + 4.099 \cdot 10^7 s + 3.45 \cdot 10^8}{s^5 + 371.5 \cdot s^4 + 6.81 \cdot 10^4 s^3 + 2.369 \cdot 10^6 s^2 + 2.297 \cdot 10^7 s + 2.295 \cdot 10^5}$$

Pour montrer que le régulateur ainsi calculé atteint les objectifs du cahier des charges nous avons effectué des simulations du système en boucle fermée où la référence $r(t)$ est un échelon d'amplitude 1.

Afin de vérifier chacune des caractéristiques du cahier des charges nous présentons également le diagramme de bode des fonctions de transfert $S(s)$ et T caractérisant la boucle fermée ainsi que leurs gabarits respectifs. La réponse indicielle de la sortie est également donnée pour vérifier les caractéristiques dynamiques et statiques du cahier des charges. Tous ces résultats sont illustrés par les figures II.8 et 9

- La figure II.8.a représente le diagramme de BODE du module de la fonction de sensibilité $S(s)$ et celui du gabarit $\gamma/|W_1|$. On constate que le diagramme de $S(s)$ est en dessous de son gabarit, et que le gain en basse fréquence de $S(s)$ est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.
- La figure II.9.b montre que le diagramme de bode du module T est en dessous de son gabarit γ/w_3 , cela justifie le bon choix des fonctions de pondération $W_3(s)$.

- La figure II.9 enfin représente la réponse indicielle de la sortie soumise à un échelon de référence de 1. La valeur finale de la sortie est égale à $(t = \infty) = 1$. Ceci montre que la précision imposée est respectée $\epsilon_{01} = 0.01$ (le temps du régime transitoire est d'environ $t_r = 0.317s$). Ces valeurs montrent que les objectifs du cahier des charges sont atteints.

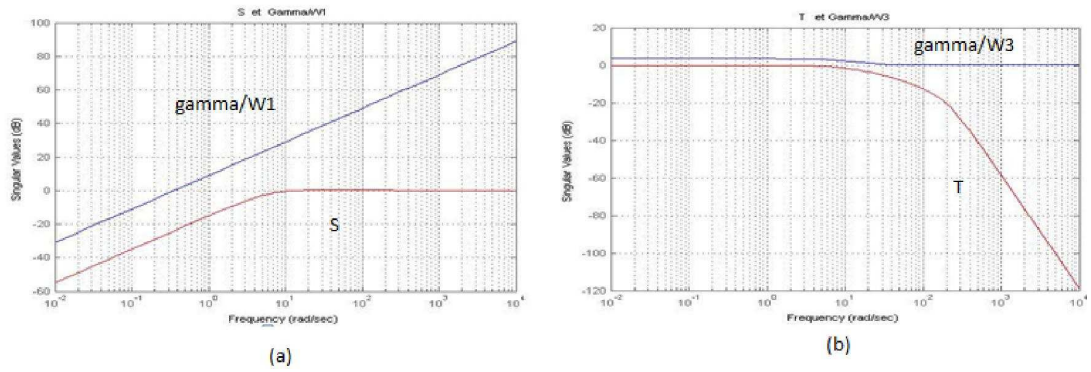


Fig. II.8 Diagramme de BODE des transferts S , T et leurs gabarits respectif.

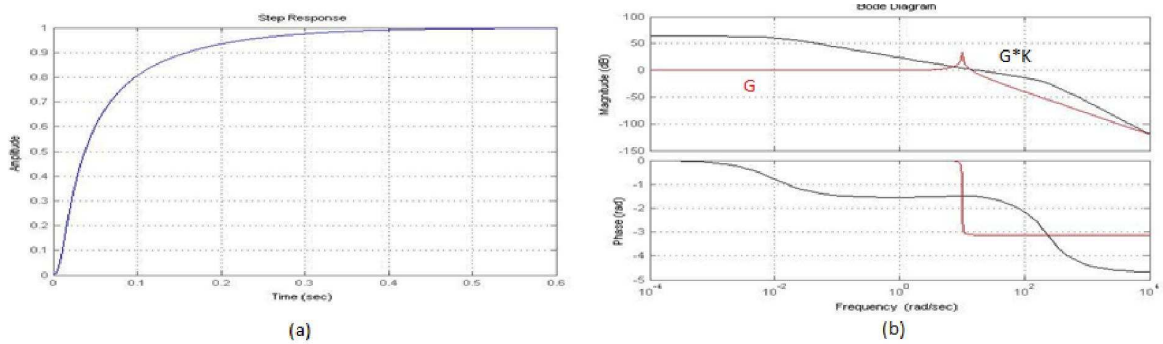


Fig. II.9. Réponse indicielle de la sortie du système en boucle fermée

II.9 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre le principe de base de problème H_∞ , celui-ci consiste à imposer de mettre le système augmenté sous une forme dite «standard ». Cette dernière nous donne une démarche très simple à suivre, pour appliquer la méthode basée sur les équations de Riccati, qui n'est possible que sous quatre hypothèses, qui doivent être impérativement vérifiées.

La synthèse par approche standard pondérée, qui est un cas particulier du problème standard. Se fait en ajoutant des filtres de pondérations aux différents points du schéma de synthèse.

CHAPITRE III

Introduction à l'analyse des systèmes saturés

Chapitre III

Introduction à l'analyse des systèmes saturés

III.1 Introduction

La synthèse de lois de commande performantes pour des systèmes saturés constitue l'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire. Ce chapitre introductif présente tout d'abord quelques résultats généraux relatifs à la théorie de la stabilité de Lyapunov ainsi que plusieurs approches permettant de modéliser des non-linéarités de type saturation. La combinaison de ces différents éléments permet alors de formuler les problèmes de l'estimation du domaine de stabilité et de la mesure du niveau de performance d'un système linéaire saturé à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMI). L'extension de ces techniques d'analyse à la synthèse de correcteurs est brièvement abordée, faisant ainsi le lien avec le chapitre IV, où est proposée la technique de synthèse anti-windup nommée Direct Linear Anti-windup (DLAW).

L'objectif de ce chapitre est de présenter les techniques existantes d'analyse des systèmes saturés puis d'introduire quelques éléments de synthèse anti-windup. Il ne s'agit pas ici de réaliser une étude bibliographique exhaustive, mais plutôt d'insister sur les résultats et les propriétés utiles à la compréhension du chapitre suivant. Pour les démonstrations de ces résultats nous pouvons citer, par exemple, les ouvrages de Khalil [27], Slotine et Li [28] et Vidyassagar [29].

Le chapitre est organisé autour de quatre grands axes. Tout d'abord, le paragraphe III.2 illustre un exemple sur les comportements non linéaires produits par la saturation de commande. Le paragraphe III.3 introduit des concepts de base qui sont fondamentaux pour la présentation des chapitres suivants, sur le domaine de stabilité et présente quelques résultats généraux relatifs à la théorie de Lyapunov. Le paragraphe III.4 est quant à lui consacré à la représentation des non-linéarités de type saturation. L'accent est notamment mis sur la modélisation par condition de secteur. La combinaison de ces éléments au paragraphe III.5 permet alors d'obtenir des formulations convexes des problèmes de l'estimation du domaine de stabilité pour un système linéaire saturé. Enfin, l'extension de ces techniques d'analyse à la synthèse de correcteurs est brièvement abordée dans le paragraphe III.6, qui permet de faire le lien avec le chapitre IV, où est proposée la technique de synthèse anti-windup.

III.2 Exemple de motivation sur le système saturé :

Soit un système linéaire, à temps continu, invariant dans le temps, décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) \quad (3.1)$$

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur de commande, A et B sont des matrices réelles de dimensions respectives $n \times n$ et $n \times m$

Prenons comme exemple le système simple suivant (pointeur d'équilibrage) donné dans [28], décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.2)$$

Ce système en boucle ouverte est instable, les valeurs propres de A sont 1 et -1. Pour stabiliser ce système, considérons la commande qui est une fonction linéaire de l'état, c'est-à-dire, le système est bouclé par un retour d'état du type :

$$u(t) = Kx(t) \quad \text{avec } K \in R^{m \times n} \quad (3.3)$$

on remplace u(t) dans (3.1) on aura :

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) \quad (3.4)$$

Dans ce cas, le correcteur est un gain, la matrice K peut être choisie telle que toutes les valeurs propres de $(A + BK)$ sont placées dans le demi-plan gauche du plan complexe. La stabilité asymptotique du système linéaire (3.4) est alors garantie dans un sens global.

$$K = [13 \quad 7]$$

Si aucune contrainte d'amplitude n'est présente sur les états ou sur la commande du système (3.1), le système en boucle fermée est linéaire et stable qui est gouverné par l'équation dynamique (3.4).

Étant donné que les valeurs propres de $(A + BK)$ sont -3 et -4, à partir de la théorie des systèmes linéaire classique, nous pouvons conclure que l'origine ($x = 0$) du système en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable, c'est à dire :

$$\forall x(0) \in R^2, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x(0)) \rightarrow 0$$

Supposons maintenant que la commande $u(t)$ soit soumise à des contraintes d'amplitude, c'est-à-dire, chaque composante $u_{(i)}(t), i, \dots, m$, du vecteur de commande est comprise entre une valeur maximale et une valeur minimale. Autrement dit, à chaque instant t le vecteur de commande $u(t)$ doit appartenir à un ensemble polyèdre Ω , définie par :

$$\Omega_i = \left\{ u_i \in R^m; -u_{\min(i)} \leq u_i \leq u_{\max(i)} \right\} \quad \text{avec } u_{\min(i)} u_{\max(i)} > 0, \text{ pour } i = \dots, m.$$

Ainsi, en considérant le retour d'état (3.3), si la valeur de $u(t) = Kx(t)$ est supérieure à u_{max} la commande restera bloquée sur u_{max} . De la même façon, si $u(t) = Kx(t)$ est inférieure à $-u_{min}$ la commande restera bloquée sur $-u_{min}$. Dans ce cas, on dit qu'il y a saturation de la commande. La loi de commande effectivement appliquée au système (3.1) est donc :

$$u(t) = sat(Kx(t)) \tag{3.5}$$

avec chaque composante $u_{(i)}(t)$, pour $i = 1, \dots, m$, définie par :

$$u_{(i)}(t) = \left(sat(Kx(t)) \right)_{(i)} = \begin{cases} -u_{min(i)} & \text{si } K_{(i)}x(t) < -u_{min(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{si } -u_{min(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{max(i)} \\ u_{max(i)} & \text{si } K_{(i)}x(t) > u_{max(i)} \end{cases} \tag{3.6}$$

La loi de commande (3.5) est appelée dans la littérature retour d'état saturé ou retour d'état saturant. La fonction saturation $u(t) = sat(Kx(t))$ que nous considérons est décrite par la courbe montrée dans la Fig.III.1.

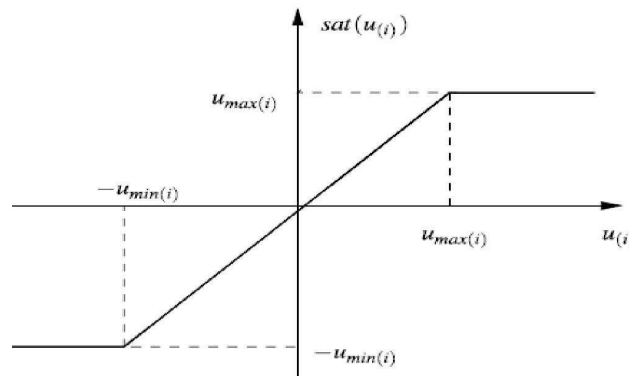


Fig.III.1. Fonction de saturation

Le système en boucle fermée, obtenu par l'application du retour d'état saturant au système (3.1), est le système non-linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bsat(Kx(t)) \tag{3.7}$$

Désormais, Nous appellerons le système (3.7) système en boucle fermée avec saturation de commande, ou tout simplement système saturé.

Si l'état du système (3.7) est tel que la valeur de $Kx(t)$ est comprise entre $u_{min(i)}$ et $u_{max(i)}$, $\forall i = 1, \dots, m$, les commandes ne sont pas saturées. L'ensemble des états ayant cette propriété est appelé région de linéarité du système (3.7), cette région est donc définie par :

$$R_l = S(K, u_{min(i)}, u_{max(i)}) = \left\{ u \in R^m; -u_{min(i)} \leq u_i \leq u_{max(i)} \right\} \text{ avec } u_{min(i)}, u_{max(i)} > 0, i = 1, \dots, m$$

Cette région est appelée région d'attraction comme le montre la figure suivante :

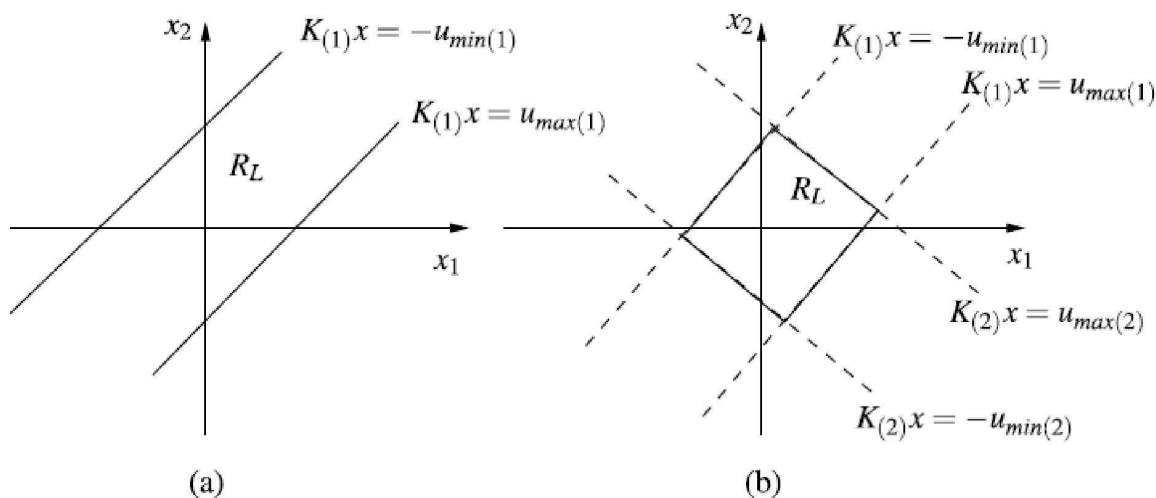


Fig.III.2(a) R_L non borné ($m = 1, n = 2, \text{ran}(k) = 1$); (b) R_L borné ($m = n = 2, \text{ran}(k) = 2$)

Dans cette région polyédrale, on dit que le système saturé (3.7) admet un modèle localement linéaire. En effet, si $x(t) \in S(K, u_{\min(i)}, u_{\max(i)})$, $x(t + 1)$ peut-être déterminé en utilisant l'équation linéaire (3.4). Néanmoins, il est important de remarquer que le fait d'avoir $x(t) \in S(K, u_{\min(i)}, u_{\max(i)})$ n'applique pas $x(t + 1) \in S(K, u_{\min(i)}, u_{\max(i)})$. Ainsi même si les valeurs propres de $(A+BK)$ sont placées dans le demi-plan gauche du plan complexe, on ne peut pas conclure a priori que cette trajectoire qui est initialisé dans $S(K, u_{\min(i)}, u_{\max(i)})$ converge vers l'origine. Pour cela il faut considérer le comportement non-linéaire du système (3.7).

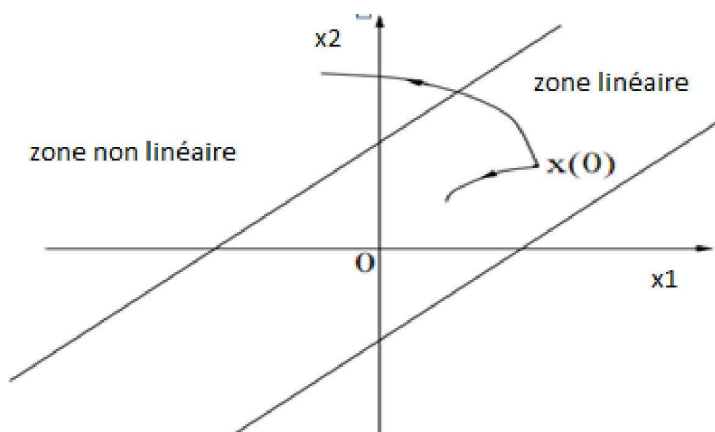


Fig.III.3 zone linéaire est non linéaire

Remarque III.1

On a considéré par simplicité comme loi de commande un retour d'état. Cependant, l'étude de la stabilité d'un système avec saturation des commandes qui considèrent une loi du type retour d'état linéaire est assez générique.

Revenons, sur l'exemple (3.1)(pointeur d'équilibrage). Supposons que le signal de commande est limité en amplitude :

$$-5 \leq u(t) \leq 5$$

dans ce cas, le système (3.7) en boucle fermée est instable :

$$\text{Avec } \text{sat}(Kx(t)) = \begin{cases} 5 & \text{si } Kx(t) > 5 \\ Kx(t) & \text{si } |Kx(t)| \leq 5 \\ -5 & \text{si } Kx(t) < -5 \end{cases}$$

il existe deux points d'équilibre en plus de $x = 0$ quand la commande est saturée :

$$x_{e1} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } x_{e2} = \begin{bmatrix} +5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

il existe certaines valeurs initiales $x(0)$, telles que :

$$x(t, x(0)) \neq 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

La Figure ci-dessous illustre l'évolution temporelle du système en boucle fermée (3.7) en considérant trois conditions initiales différentes.

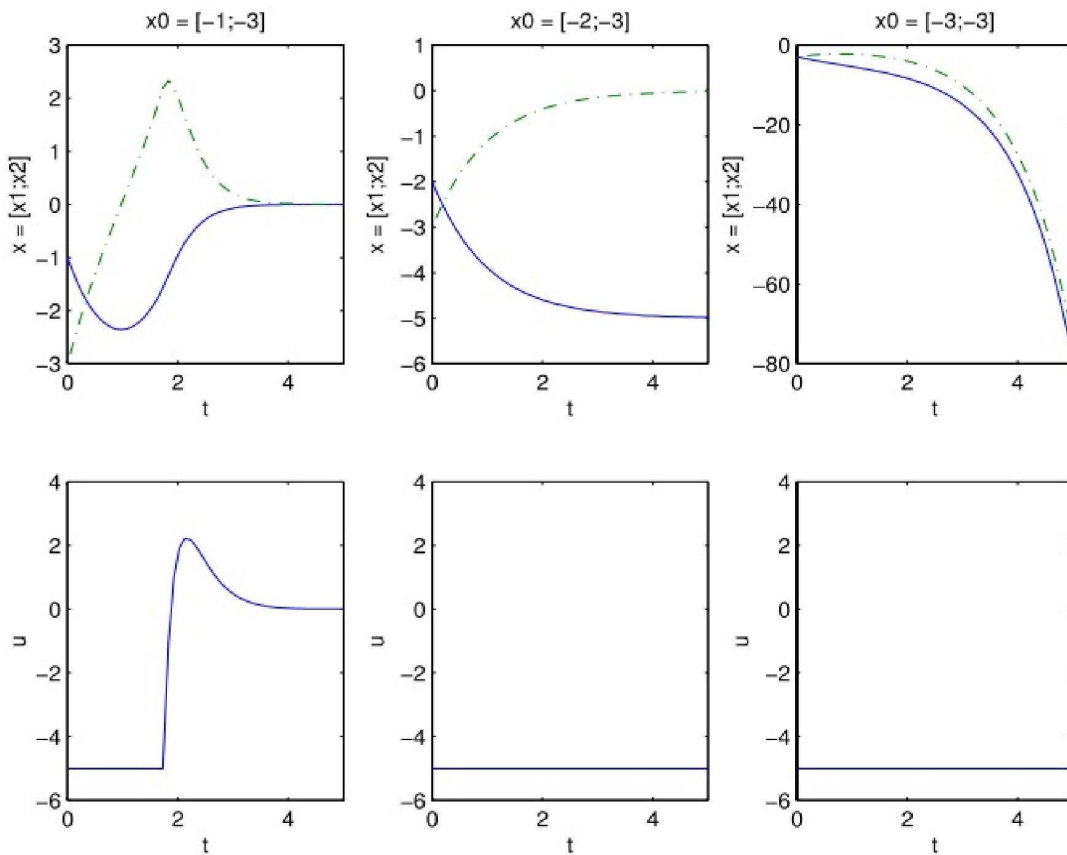


Fig.III.4 Réponse temporelle pour des conditions initiales différentes

- $x_1(0) = [-1, -3]$ du fait que le signal de commande $u(t)$ est saturé pendant les premiers instants, la trajectoire converge asymptotiquement vers l'origine.
- $x_2(0) = [-2, -3]$ du fait que $(A + BK)$ est Hurwitz¹, la trajectoire converge vers un point d'équilibre x_e différent de l'origine ($x_e = [-5, 0]$). Notez que dans ce cas, le signal de commande reste saturé tout le temps.
- $x_3(0) = [-3, -3]$ du fait que $(A + BK)$ est Hurwitz, la trajectoire diverge. Notez que dans ce cas, le signal de commande reste également saturé tous les temps.

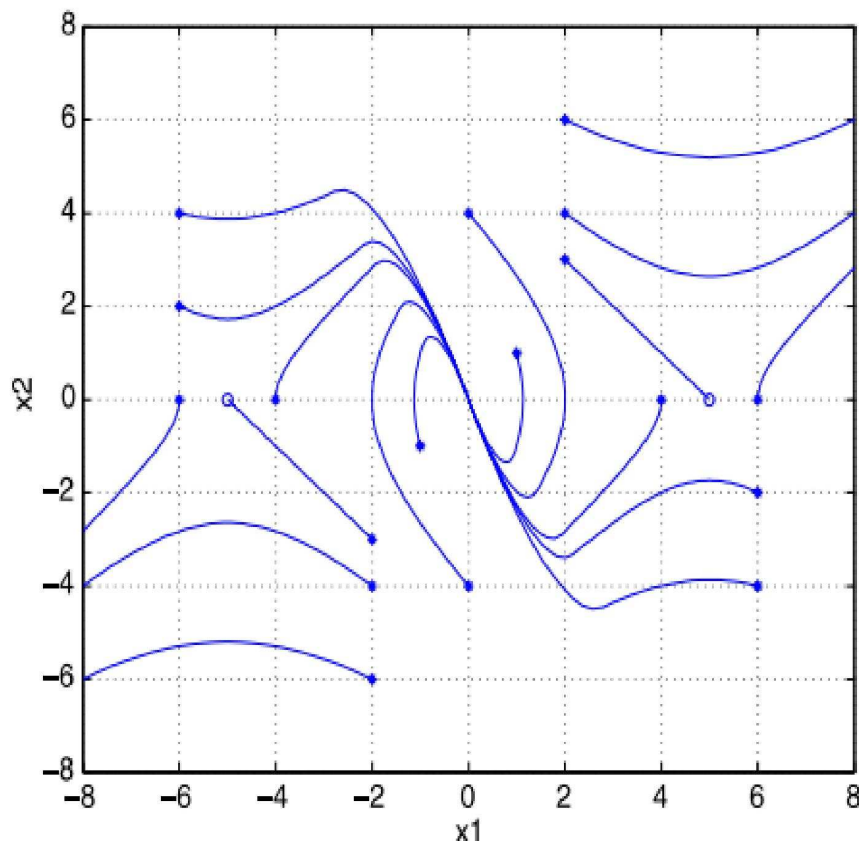


Fig.III.5 Présence des trajectoires divergentes et convergentes et des points d'équilibres multiples. En plus du point d'équilibre de l'origine $x=0$.

La figure III.5 montre un plan de phase avec de nombreuses trajectoires. Il est clair, selon les conditions initiales, il existe des trajectoires qui convergent asymptotiquement à l'origine et d'autres qui convergent vers d'autres points d'équilibre ou divergent. Ainsi, bien que l'origine du système linéaire en boucle fermée est stable, elle n'est pas globalement asymptotiquement stable en l'absence de contraintes d'entrée, ce n'est pas le cas lorsque ces contraintes sont présentes.

III.3 Stabilité des systèmes non-linéaires

III.3.1 Existence d'un domaine de stabilité

Etudier la stabilité d'un système linéaire est relativement aisé. La réponse est en effet binaire : le système est globalement stable ou instable, et ce quelles que soient les conditions initiales. Dans le cas d'un système non-linéaire, et notamment d'un système saturé, la notion de stabilité est en revanche plus complexe, car elle peut devenir locale.

Pour illustrer cette différence, on considère un système linéaire instable en boucle ouverte, pour lequel une loi de commande stabilisante a été calculée. On suppose alors que l'amplitude maximale de la commande est bornée en raison d'une limitation physique de l'actionneur, puis on initialise l'état du système de sorte que le signal délivré par le correcteur présente une amplitude supérieure à cette valeur limite. Tout se passe alors comme si le système fonctionnait en boucle ouverte, et son comportement correspond à celui d'un système linéaire instable soumis à une entrée constante. L'amplitude des signaux en sortie est donc susceptible de diverger rapidement. Ces signaux étant utilisés par le correcteur, une divergence des signaux de commande est également probable, d'où une poursuite du fonctionnement saturé. Par ce raisonnement intuitif, on voit bien qu'un tel système linéaire saturé n'est certainement pas stable globalement. Par contre, une initialisation du vecteur d'état au voisinage de l'origine conduit à un fonctionnement non saturé, et donc à un comportement localement stable.

Dans ce contexte se pose alors la question de déterminer le domaine de stabilité associé à un point d'équilibre, *i.e.* le plus grand sous-ensemble de l'espace d'état autour d'un point d'équilibre à l'intérieur duquel aucune initialisation du système n'engendre d'instabilité. On s'appuie pour cela sur la théorie de Lyapunov, présentée brièvement au paragraphe III.3.6, qui propose une caractérisation de la stabilité dans l'espace d'état.

III.3.2 Stabilité au sens de Lyapunov [30]

La théorie de Lyapunov a été introduite à la fin du 19^{ème} siècle afin d'étudier la stabilité des systèmes dynamiques [31]. Plus précisément, elle s'intéresse à des systèmes continus et discrets à temps invariant et invariant de dimension finie dont le comportement est décrit par une équation différentielle vectorielle du premier ordre éventuellement non-linéaire, à temps continue, invariant dans le temps.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.8)$$

Définition III.3 (point d'équilibre) Un vecteur $x_e \in \mathbb{R}^n$ est appelé point ou état d'équilibre (ou point singulier) du système (3.1) s'il vérifie

$$f(x_e) = 0. \quad (3.9)$$

Tout point d'équilibre pouvant être ramené à l'origine par le changement de variable $\bar{x}_e = x - x_e$, on se contente sans perte de généralité d'étudier la stabilité lorsque le point d'équilibre vaut $x_e = 0$.

Définition III.4 (attractivité) L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre attractif pour le système (3.8) s'il existe un voisinage $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ de l'origine tel que:

$$x_0 \in \Omega \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

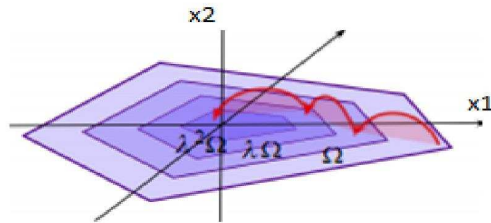


Fig.III.7 attractivité

Définition III.4 (stabilité)

- **Stable**, L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre simplement stable pour le système (3.8) si pour tout $\varepsilon \in \mathfrak{R}_+$, il existe $\delta \in \mathfrak{R}_+$ tel que:

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \forall t \in \mathfrak{R}_+$$

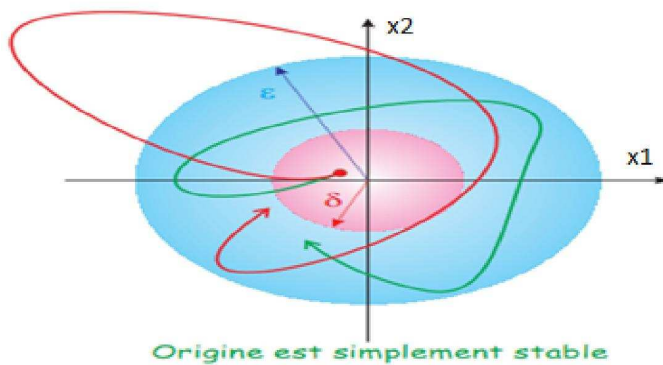


Fig.III.8 simplement stable

- **Asymptotiquement stable**, L'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (3.8) s'il est stable et attractif.

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

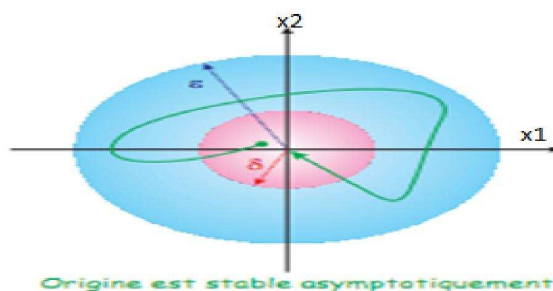


Fig.III.9 Asymptotiquement stable

Relativement aux systèmes (3.8), le théorème ci-dessous permet alors de caractériser la stabilité ou la stabilité autour de l'origine.

Théorème III.1 (caractérisation de la stabilité) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de l'origine. S'il existe une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur Ω et différentiable sur $\Omega - \{0\}$ telle que :

1. $V(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega - \{0\}$ et $V(0) = 0$,

2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$,

Alors l'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre stable pour le système (3.8). Si de plus V vérifie :

3. $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega - \{0\}$,

Alors l'état $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (3.8).

Remarque III.2

Lorsque les hypothèses du théorème III.1 sont vérifiées, l'ensemble Ω associé à la fonction de Lyapunov V représente un domaine de stabilité garanti du système (3.8). On se contente ici de cette notion de stabilité locale, les systèmes saturés considérés en pratique n'étant le plus souvent pas stables globalement, i.e. pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Le théorème III.1 traduit en termes mathématiques un concept physique élémentaire : si l'énergie totale d'un système se dissipe continuellement, i.e. décroît avec le temps, alors ce système évolue vers un état d'équilibre stable. L'idée consiste donc à déterminer une fonction positive V associant à chaque état x du système un niveau d'énergie, puis à prouver que cette fonction décroît le long de toutes les trajectoires du système initialisées dans un sous-ensemble Ω de l'espace d'état.

III.3.3 Principe d'invariance de Lasalle

Si la fonction de Lyapunov choisie est telle que $\Delta V(x(t)) \leq 0$ le long des trajectoires du système (3.8), on ne peut rien affirmer sur la stabilité asymptotique de l'origine à partir de l'application du théorème III.1. cependant, si on peut garantir qu'aucune trajectoire ne peut rester aux points où $\Delta V(x(t)) = 0$, à l'exception de $x = 0$, alors la convergence des trajectoires vers l'origine sera certaine. Ce résultat, connu comme le principe de l'invariance de Lasalle, est donc "plus fort" que le théorème III.1

Théorème III.2 : Soient

- Ω Un ensemble compact positivement invariant par rapport au système (3.8)
- $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction telle que $\Delta V(x(t)) \leq 0$ dans Ω .
- E l'ensemble de tous les points de Ω vérifiant $\Delta V(x(t)) = 0$
- M le plus grand ensemble invariant contenu dans E

Alors, toute trajectoire initialisée dans U converge vers M quand $t \rightarrow \infty$

Ainsi, lorsque $\Delta V(x(t)) \leq 0$ pour prouver que l'origine est asymptotiquement stable on doit montrer que le plus grand ensemble invariant contenu dans E est l'origine ($x = 0$). Cela est établi en montrant qu'aucune trajectoire ne peut rester indéfiniment dans E sauf la trajectoire triviale $\emptyset(t, 0) = 0$. Dans ce cas on peut formuler les deux corollaires suivants permettant de conclure sur la stabilité asymptotique de l'origine.

Corollaire III.1 : Soient

- $x = 0$ un point d'équilibre du système (3.8)
- $V : U \rightarrow \mathcal{R}$ Une fonction continue et définie positive dans un voisinage U de l'origine telle que $\Delta V(x(t)) \leq 0$ Dans U .
- $S = \{x \in \mathcal{R}^n; \Delta V(x(t)) = 0\}$.

Supposons qu'aucune trajectoire ne peut rester dans S sauf la trajectoire triviale $\emptyset(t, 0) = 0$. Alors l'origine est asymptotiquement stable.

Corollaire III.2 : Soient

- $x = 0$ un point d'équilibre du système (3.8)
- $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ Une fonction continue, définie positive, radialement non-bornée et telle que $\Delta V(x(t)) \leq 0, \forall x(t) \in \mathcal{R}^n$.
- $S = \{x \in \mathcal{R}^n; \Delta V(x(t)) = 0\}$.

Supposons qu'aucune trajectoire ne peut rester dans S sauf la trajectoire triviale $\emptyset(k, 0) = 0$. Alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.

III.3.4 La région d'attraction de l'origine

En général, il n'est pas suffisant de déterminer si l'origine du système est asymptotiquement stable. En effet, lorsque l'origine est asymptotiquement stable, on s'intéresse souvent à savoir quel est le plus grand domaine dans l'espace d'état dans lequel toute trajectoire qui y commence converge vers l'origine. Cette question nous amène à la définition de la région d'attraction de l'origine.

Définition III.5 : soit $\emptyset(t, x(0))$ la trajectoire qui part, à l'instant $t=0$, de l'état $x(0)$. La région d'attraction de l'origine est définie comme l'ensemble de tous les points x de l'espace d'état tels que pour $x = x(0)$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \emptyset(t, x(0)) = 0$

Le domaine d'attraction de l'origine est donc l'ensemble :

$$R_A = \{x(0) \in \mathcal{R}^n; \emptyset(t, x(0)) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty\}$$

Remarquons que si le système est globalement asymptotiquement stable, alors la région d'attraction de l'origine est tout l'espace d'état, i.e., $R_A = \mathcal{R}^n$

La détermination exacte de la région d'attraction de l'origine d'une façon analytique est une tâche en générale difficile, voire impossible [27], [32]. Cependant, on peut déterminer des approximations de la région d'attraction, c'est-à-dire, on peut déterminer des régions de l'espace d'état où la convergence asymptotique des trajectoires vers l'origine est garantie.

Définition III.6 : une région R_s de l'espace d'état est une **région de stabilité asymptotique** par rapport à l'origine du système (3.8) si pour toute condition initiale

$$x(0) \in R_s \text{ on a } \lim_{t \rightarrow \infty} \emptyset(t, x(0)) = 0$$

En particulier, il est toujours possible de déterminer des régions de stabilité asymptotique à partir des domaines de Lyapunov et d'ensemble positivement invariants [30]. En fait, si l'on considère une fonction de Lyapunov telle que $\Delta V(x) < 0$ le long des trajectoires du système dans une région comme le montre la Fig.III.10:

$$S_c = \{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq c\}$$

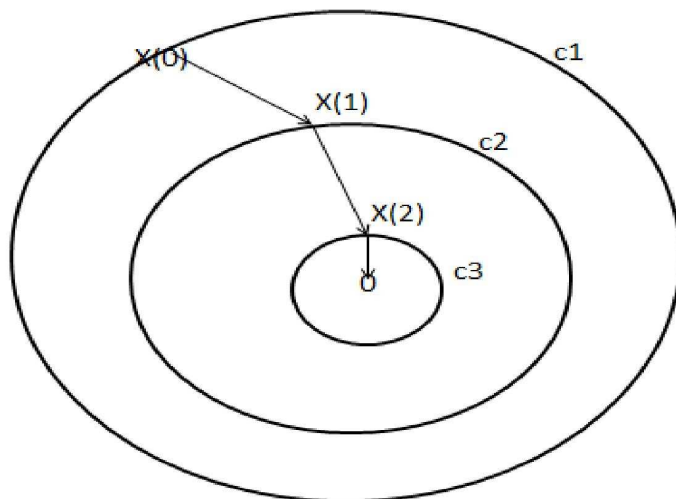


Fig.III.10 contractivité des trajectoire

On garantit que tout trajectoire initialisée dans S_c y reste et converge vers l'origine quand $t \rightarrow \infty$. d'autre part, d'après le principe d'invariance de Lasalle, si le corollaire III.1 s'applique en considérant un ensemble M positivement invariant, nous pouvons conclure sur la stabilité asymptotique dans cet ensemble.

III.3.5 Recherche de fonctions de Lyapunov

Une telle approche est intéressante, car elle permet d'évaluer la stabilité sans résoudre directement le système (3.8), ce qui constitue souvent un problème difficile. Cependant, le théorème III.1 ne donne pas d'indication sur la manière de construire une fonction de Lyapunov V , et ce résultat très général s'avère inexploitable en l'état. Dans la pratique, on adopte une stratégie conservatrice qui consiste à rechercher :

- des fonctions de Lyapunov V dans un espace fonctionnel restreint,
- des domaines de stabilité Ω dont le contour est défini par une courbe de niveau de la fonction de Lyapunov, *i.e.* du type :

$$\Omega(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\} \tag{3.10}$$

Où c représente un réel positif donné

La difficulté majeure de la deuxième méthode de Lyapunov réside dans le choix de la bonne "fonction". Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique pour la détermination de fonction de Lyapunov.

Remarque III.3 Les domaines définis par une relation du type (3.10) vérifient une propriété

d'inclusions successives le long de toute trajectoire du système. En effet, pour tous $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$, on a $C_1 > C_2 \Rightarrow \Omega(C_2) \subset \Omega(C_1)$. Comme $V(x)$ est déterminée de manière à être décroissante le long des trajectoires du système, on peut en déduire que si à un instant t_1 , l'état du système appartient au domaine $\Omega(C_1)$, alors pour tout instant $t > t_1$, il appartiendra à un domaine $\Omega(c)$ strictement inclus dans le domaine initial, dont il ne pourra plus s'échapper. On parle de domaines de stabilité invariants contractifs.

Les fonctions de Lyapunov les plus largement utilisées sont les fonctions quadratiques, notamment dans les domaines de l'analyse de robustesse des systèmes linéaires et de la synthèse robuste. Elles donnent parfois des résultats conservatifs mais conduisent souvent à des caractérisations convexes facilement exploitables d'un point de vue numérique. Comme leur nom l'indique, de telles fonctions sont quadratiques en l'état x du système et s'écrivent sous la forme :

$$V(x) = x^T P x \tag{3.11}$$

Exemple III.2 :

Avec $P = I_2$ on aura $V(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$

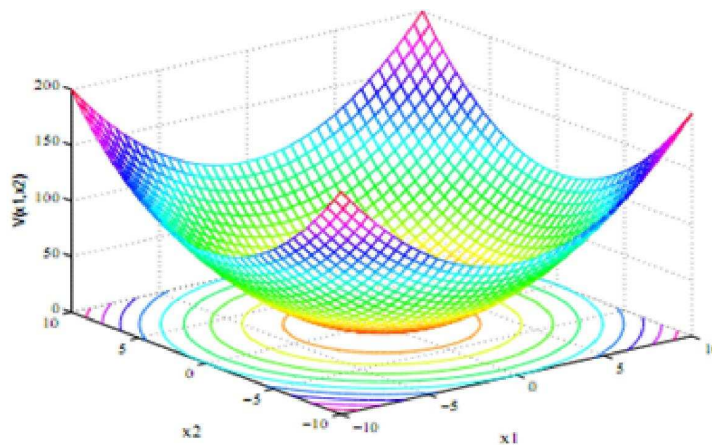


Fig III.11 : Exemple de fonction définie positive

Où P représente une matrice symétrique définie positive, ce qui garantit que $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. En outre, les domaines de stabilité associés correspondent à des ellipsoïdes

$$\varepsilon_p = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq c\} \tag{3.12}$$

Dont la taille peut être aisément maximisée. En effet, le volume d'un ellipsoïde défini par la relation (3.12) est proportionnel au déterminant de la matrice $Q = P^{-1}$. Maximiser le volume de ε_p revient donc à maximiser le déterminant de Q , ce qui constitue un problème convexe [33]. Enfin, le choix de fonctions quadratiques permet d'exprimer de manière simple la décroissance de $V(x)$ et donc les conditions de stabilité du système saturé (voir paragraphe III.4).

D'autres catégories de fonctions de Lyapunov peuvent être envisagées:

- les fonctions de Popov, également appelée fonctions de Lure.
- les fonctions quadratiques par morceaux.

- les fonctions polyédrales.
- les fonctions polynomiales.
- et plus récemment, l'enveloppe convexe ou le maximum point par point d'une famille de fonctions quadratiques.

Toutes ces fonctions offrent plus de degrés de liberté que les fonctions quadratiques classiques et permettent donc de réduire le conservatisme. Elles présentent également d'autres avantages. Ainsi, les fonctions de Popov permettent de prendre explicitement en compte le profil des saturations par l'introduction de termes intégraux. L'utilisation de fonctions quadratiques par morceaux apparaît quant à elle naturelle dans la perspective d'étudier les systèmes linéaires saturés, qui peuvent être vus comme des systèmes affines par morceaux. Cependant, l'utilisation de telles fonctions s'avère souvent délicate, notamment dans la perspective de développer des outils de synthèse :

- Les domaines de stabilité associés peuvent être difficiles à optimiser en raison de leur forme particulière. Dans certains cas, il n'existe pas de condition simple permettant de maximiser leur taille dans une direction donnée de l'espace d'état.
- Il n'est souvent pas possible d'obtenir une formulation convexe du problème de synthèse, ce qui conduit à proposer des résolutions itératives dont la convergence peut être délicate. Dans le cas des fonctions les plus complexes, il n'existe parfois même pas de caractérisation convexe de la stabilité ou de la performance.
- Une diminution du conservatisme s'accompagne généralement d'une augmentation des variables d'optimisation, ce qui peut s'avérer rédhibitoire en termes de temps de calcul.

On se limitera donc ici à l'approche quadratique.

III.4 Représentation des non-linéarités de type saturation

Le choix d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^T P x$ avec $P = P^T > 0$ assure que $V(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et ce quel que soit l'opérateur $f(\cdot)$ décrivant l'évolution de l'état x du système. Par contre, déterminer si une telle fonction vérifie la relation $\dot{V}(x) < 0$ sur un sous-ensemble Ω de l'espace d'état n'est pas aussi immédiat.

On s'intéresse ici au cas particulier des systèmes linéaires saturés, pour lesquels l'équation différentielle (3.8) peut s'écrire sous la forme:

$$\dot{x} = \bar{A} x + \bar{B} \Psi_L(\bar{C} x) \tag{3.13}$$

Où $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\bar{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont des matrices constantes, tandis que $\Psi_L(\cdot)$ est un opérateur non-linéaire constitué de m saturations $\Psi_{L_i}(\cdot)$:

$$\Psi_L(z) = [\Psi_{L_1}(z_1) \dots \Psi_{L_m}(z_m)]^T$$

et $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_m)$ une matrice diagonale correspondant aux niveaux de saturation (voir paragraphe III.5.1). La condition de décroissance de V le long des trajectoires du système (3.13) s'exprime donc sous la forme :

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (\bar{A}^T P + P \bar{A}) x + 2x^T P \bar{B} \Psi_L(\bar{C} x) < 0 \tag{3.14}$$

L'inégalité (3.14) est non-linéaire et il est difficile de déterminer directement le sous-ensemble de l'espace d'état sur lequel elle est vérifiée. La stratégie consiste donc à proposer une caractérisation (conservative) de l'opérateur saturation $\Psi_L(\cdot)$ permettant de remplacer la relation $\dot{V}(x) < 0$ par une condition suffisante convexe. Deux approches sont couramment utilisées :

- la modélisation polytopique,
- la modélisation par non-linéarités de secteur.

La définition exacte de la fonction saturation est rappelée au paragraphe III.5.1 puis ces deux caractérisations sont présentées respectivement aux paragraphes III.5.2 et III.5.3.

Remarque III.4II existe d'autres manières de caractériser l'opérateur $\Psi_L(\cdot)$, en divisant par exemple l'espace d'état en régions de saturation, mais elles sont plutôt adaptées à des fonctions de Lyapunov non quadratiques et ne sont donc pas présentées ici.

III.4.1 Définition de la fonction saturation

Une fonction saturation $\Psi_L(\cdot)$, est une fonction linéaire par morceaux définie par :

$$\Psi_L(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq l \\ l & \text{si } z > l \\ -l & \text{si } z < -l \end{cases} \quad (3.15)$$

où l représente un nombre réel positif, et dont la caractéristique est représentée sur la figure III.12 (a). Une telle non-linéarité intervient dans la modélisation de nombreux systèmes physiques et présente donc un intérêt pratique indéniable.

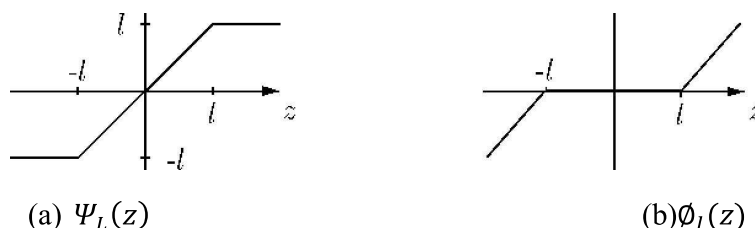


Figure III.12 Non-linéarités de types saturation (a) et zone morte (b)

D'un point de vue théorique, il s'avère en revanche plus intéressant de travailler avec une fonction zone morte $\Phi_l(\cdot)$ semblable à celle représentée sur la figure III.12 (b), et dont l'expression est donnée par :

$$\Phi_l(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| \leq l \\ z - l & \text{si } z > l \\ z + l & \text{si } z < -l \end{cases} \quad (3.16)$$

En effet, une zone morte est nulle dans le domaine de fonctionnement linéaire, ce qui permet de déterminer facilement la dynamique du système nominal, *i.e.* non saturé.

Il est important de souligner que tout système affecté par des saturations $\Psi_L(\cdot)$ peut être transformé de manière à ne faire intervenir que des zones mortes $\Phi_l(\cdot)$ en notant que :

$$\Psi_L(z) + \Phi_l(z) = z \quad (3.17)$$

De plus, si l'on pondère les entrées et sorties du système saturé, on peut supposer sans perte de généralité que ces zones mortes sont normalisées, *i.e.* que $L = I_m$. Plus précisément, on peut réécrire le système (3.13) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + B \Phi(Cx) \quad (3.18)$$

Où $\Phi(\cdot)$ représente un opérateur non-linéaire constitué de m zones mortes normalisées et :

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + \bar{B}\bar{C} \\ B &= -\bar{B}L \\ C &= L^{-1}\bar{C} \end{aligned}$$

On se limitera donc dans la suite à l'étude des systèmes linéaires soumis à des zones mortes normalisées et décrits par la relation (3.18).

III.4.2 Modélisation polytopique

La modélisation polytopique a été introduite par [34] et repose sur l'application du résultat ci-dessous au système saturé (3.18).

Lemme III.1 Soit $\Phi(\cdot)$ un opérateur non-linéaire constitué de m fonctions zone morte normalisées. Soit $v \in \mathfrak{R}^m$ avec $|v_i| \leq 1 \forall i \in [1, m]$. Pour tout vecteur $z \in \mathfrak{R}^m$, il existe une matrice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ avec $\lambda_i \in [0, 1] \forall i \in [1, m]$ telle que :

$$\Phi(z) = (I_m - \Lambda)(z - v)$$

Si l'on pose $v = Hx$, avec $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, le système (3.18) s'écrit sous la forme :

$$\dot{x} = (A + BM(\Lambda))x \quad (3.19)$$

Avec $M(\Lambda) = (I_m - \Lambda)(C - H)$. Comme la matrice Λ appartient à un polytope constitué de 2^m sommets définis par :

$$E = \{\text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m), \lambda_i = 0 \text{ ou } 1\} \quad (3.20)$$

Les trajectoires de ce système sont couvertes par celles du système polytopique :

$$\dot{x} = Ax, \mathcal{A} \in c_0 (\{A + BM(\Lambda), \Lambda \in E\}) \quad (3.21)$$

à condition que $|H_i x| \leq 1$ pour tout $i \in [1, m]$, où H_i désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de H . L'opérateur non-linéaire $\Phi(\cdot)$ a donc disparu et l'on se retrouve dans le cadre d'une modélisation classique d'un système linéaire incertain, ce qui facilite grandement l'analyse de stabilité.

III.4.3 Modélisation par non-linéarités de secteur

Une alternative à la modélisation polytopique consiste à exploiter la condition de secteur modifiée proposée par [35].

Lemme III.2 Soit $\Phi(\cdot)$ un opérateur non-linéaire constitué de m fonctions zone morte normalisées. Pour tous vecteurs $z, w \in \mathfrak{R}^m$ tels que $|z_i + w_i| < 1 \forall i \in [1, m]$, l'inégalité :

$$\Phi(z)^T \Lambda (\Phi(z) + w) \leq 0 \quad (3.22)$$

est vérifiée pour toute matrice diagonale définie positive $\Lambda \in \mathfrak{R}^{m \times m}$.

Une interprétation graphique de ce résultat est proposée sur la figure III.13 (b) dans le cas où $m = 1$. La zone représentée en gris correspond à l'ensemble des valeurs pouvant être prises par une fonction $\phi(\cdot)$ qui vérifie la condition (3.22). Elle contient la fonction zone morte (tracée en gras), mais se s'y limite pas, ce qui traduit un certain conservatisme. Ce dernier demeure cependant raisonnable, et même nul dans le domaine de fonctionnement linéaire correspondant à l'intervalle $[-1,1]$.

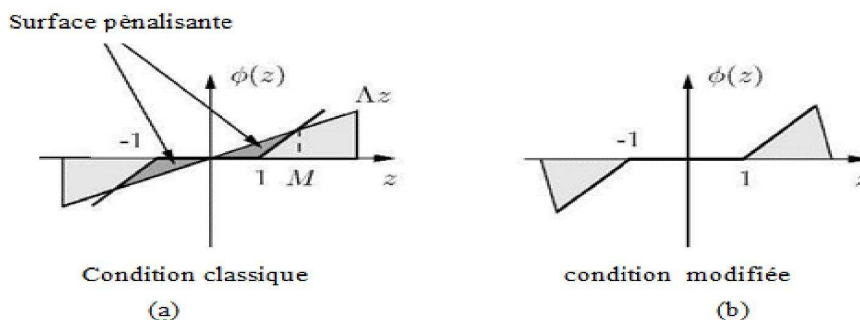


Figure III.13 Conditions de secteur pour une non-linéarité de type zone morte.

Remarque III.5 La condition (3.22) énoncée par le lemme III.2 est plus contraignante que la condition de secteur classique utilisée jusqu'alors, qui s'exprime de la manière suivante [27]:

$$\Phi(z)^T \wedge (\Phi(z) - \gamma z) \leq 0 \tag{3.23}$$

où γ représente une matrice diagonale fixée a priori qui vérifie $0 < \gamma < I_m$. Le fait d'imposer $w = -\gamma z$ dans la relation (3.23) pour obtenir l'inégalité (3.24) se traduit sur la figure III.13 (a) par l'apparition de surfaces pénalisantes en termes de conservatisme dans la zone de fonctionnement linéaire du système. De plus, la condition classique (3.23) n'est valable que localement pour des valeurs de z comprises dans l'intervalle $[-M, M]$, alors que la condition modifiée (3.13) (b) est globale.

Afin de pouvoir exploiter le lemme III.2, il reste à relier le vecteur w à l'état x du système saturé. En posant $w = Hx$ de la même manière qu'au paragraphe III.5.2, avec H une matrice quelconque, la condition de secteur modifiée devient plus conservative nous conduit à des contraintes quadratiques facilement exploitables (voir paragraphe III.6). Ainsi, en définissant l'ensemble polyédral pour $z = cx$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : |(C_i + H_i)x| \leq 1 \forall i \in [1, n]\} \tag{3.24}$$

On est ramené à l'étude du système $\dot{x} = Ax + B\Phi(Cx)$ où l'opérateur $\Phi(\cdot)$ vérifie:

$$\Phi(cx)^T \wedge (\Phi(cx) + Hx) \leq 0 \quad \forall x \in S \tag{3.25}$$

III.5 Analyse des systèmes saturés

La modélisation par non-linéarités de secteur présentée au paragraphe III.5.3 permet d'obtenir des conditions de stabilité et de performance pour le système saturé (3.18) sous forme d'inégalités matricielles linéaires. En outre, ces conditions sont valables dans un cadre très général.

L'objectif des travaux de mémoire étant principalement d'étudier la synthèse anti-windup, on privilégie donc naturellement l'approche par condition de secteur modifiée présentée au paragraphe III.5.3. Cette dernière permet en effet d'obtenir une formulation convexe du problème d'anti-windup statique (voir paragraphe III.7). Mais avant d'aborder le problème de synthèse, on s'intéresse tout d'abord dans ce paragraphe à l'obtention de conditions de stabilité pour un système saturé à l'aide des outils présentés aux paragraphes III.4 et III.5.

❖ Estimation du Domain de stabilité

On considère l'interconnexion de la figure III.14 où $M(s)$ représente un système linéaire stationnaire stable admettant pour représentation d'état:

$$M(s) = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\phi w \\ z = C_\phi x \in \mathbb{R}^m \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.26)$$

On cherche alors à déterminer le plus grand domaine de l'espace d'état sur lequel la stabilité du système (3.26) peut être garantie malgré la présence de zones mortes normalisées:

$$w = \Phi(z) \quad (3.27)$$

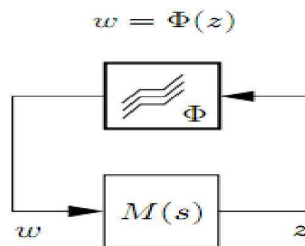


Figure III.14 Interconnexion non-linéaire pour l'analyse de stabilité.

Remarque III.6 On suppose que la transmission directe du système (3.26) est nulle, ce qui revient à ne pas prendre en compte de saturations imbriquées. Ce choix est motivé par les deux arguments suivants:

- Les saturations imbriquées apparaissent le plus souvent lorsque l'on considère des actionneurs limités à la fois en amplitude et en vitesse. Cependant, ce problème peut être évité en utilisant une modélisation appropriée à base d'intégrateurs limités.
- Des conditions théoriques supplémentaires doivent être vérifiées en présence de saturations imbriquées, ce qui augmente le conservatisme et la complexité du problème à résoudre, notamment dans une perspective de synthèse.

La proposition ci-dessous permet de calculer un domaine de stabilité garanti pour l'interconnexion représentée sur la figure III.14.

Proposition III.1 (analyse de stabilité) S'il existe une matrice $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ diagonale et $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telles que les conditions LMI ci-dessous sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_\phi S - Z^T \\ SB_\phi^T - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Z_i^T + QC_{\phi i}^T \\ Z_i + C_{\phi i}Q & 1 \end{bmatrix} > 0, i = \dots m \quad (3.29)$$

Où Z_i et $C_{\phi i}$ représentent respectivement la $i^{\text{ème}}$ ligne de Z et C_ϕ , alors l'ellipsoïde :

$$\varepsilon_P = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P x \leq \delta\} \quad (3.30)$$

où $P = Q^{-1}$, est un domaine de stabilité asymptotique pour l'interconnexion de la fig III.14.

Preuve III.1: La satisfaction des inégalités (3.29) implique que l'ellipsoïde ε_P est inclus dans l'ensemble polyédral S défini par la relation (3.24) via la relation $Z = HQ$. Ainsi, pour tout $x \in \varepsilon_P$, l'opérateur $\phi(\cdot)$ introduit dans la relation (3.27) vérifie la condition de secteur (3.25) :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & H^T \Lambda \\ \Lambda H & 2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.31)$$

On considère alors une fonction de Lyapunov quadratique définie par (3.11). Sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système (3.26) s'écrit :

$$\dot{V}(x) = x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P B_\phi w \quad (3.32)$$

et la condition $\dot{V}(x) < 0$ s'exprime sous la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & P B_\phi \\ B_\phi^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.33)$$

En appliquant la S-procédure voir annexe A puis en pré- et post-multipliant le résultat par $\text{diag}(Q, S)$, on obtient finalement la relation (3.28) en posant $S = \Lambda^{-1}$. Les inégalités (3.28) et (3.29) représentent donc des conditions suffisantes pour que l'origine $x = 0$ soit un point d'équilibre asymptotiquement stable pour l'interconnexion de la figure III.14 et que toute trajectoire initialisée dans ε_P converge vers ce point.

Remarque III.7 Le résultat de la proposition III.1 est formulé comme un problème de faisabilité, mais il existe plusieurs manières de le transformer en un problème d'optimisation. Un objectif classique déjà évoqué en [37] et pour lequel il existe une formulation convexe consiste à maximiser le volume de ε_P . Il est également possible de maximiser la taille de cet ellipsoïde dans une direction u donnée de l'espace d'état, ce qui revient à maximiser un objectif linéaire βu sous la contrainte LMI :

$$\begin{bmatrix} Q & \beta u \\ \beta u^T & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque III.8 Une autre manière d'appliquer la condition du secteur (3.22) peut être envisagée. Elle consiste à choisir $\omega = z + Gx$ et $z = kx$. Dans ce cas les conditions de la proposition III.1 elle dévient :

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T & B_\phi S - Qk^T - Z^T \\ SB_\phi^T - kw - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Z_i^T \\ Z_i & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0, i = \dots m \quad (3.35)$$

Ces conditions que en va utiliser pour la conception anti-windup.

III.6 Vers la prise en compte du phénomène de windup

III.6.1 Principe de la synthèse anti-windup

Le windup est un phénomène bien connu qui se manifeste par un fort dépassement du signal de consigne et un temps de réponse excessif, *i.e.* par une dégradation des performances. Il survient notamment dans le cas où un système commandé par des actionneurs susceptibles de saturer est rebouclé par un correcteur linéaire comportant des intégrateurs, par exemple un PID. Lorsque les saturations sont actives, l'erreur continue à être intégrée, et ce bien que les commandes envoyées au système soient altérées. Les états du correcteurs peuvent donc devenir très grands, ce qui entraîne la poursuite du fonctionnement saturé, voire l'instabilité.

La synthèse anti-windup est une procédure en deux étapes qui consiste à minimiser cette dégradation de performance due à la présence de saturations :

1. un correcteur nominal est d'abord synthétisé pour le système non saturé afin d'assurer la stabilité et le niveau de performance requis dans la zone de fonctionnement linéaire,
2. un correcteur additionnel est alors introduit afin de contrer les effets négatifs des saturations et retrouver dans la mesure du possible le niveau de performance nominal.

Ce dispositif est illustré sur la figure III.15: la différence entre les signaux à l'entrée et à la sortie des non-linéarités est calculée ou estimée puis vient agir sur la dynamique et sur les sorties du correcteur nominal par l'intermédiaire d'un correcteur anti-windup à optimiser.

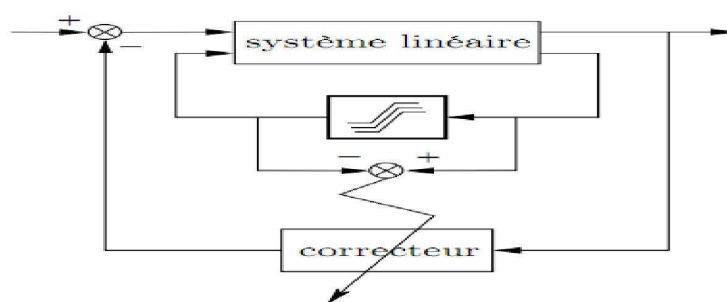


Figure III.15 Principe de la synthèse anti-windup

III.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré pour fixer des conditions, principalement basés sur les LMI, pour faire face aux problèmes d'analyse de stabilité asymptotique et les problèmes de conception de commande. En modélisant le terme de saturation par la condition de secteur généralisé et

en utilisant la fonction de Lyapunov quadratique. Les éléments fournis dans ce chapitre ouvrent la voie au chapitre 4.

CHAPITRE IV

Synthèse anti-windup

Chapitre IV

Synthèse anti-windup

IV.1 Introduction – philosophie [36, 37]

Les saturations sont omniprésentes dans les problématiques industrielles modernes et l'un des enjeux majeurs de l'automatique non-linéaire consiste à synthétiser des lois de commande performantes pour des systèmes saturés. La littérature est abondante sur ce sujet et de nombreuses techniques ont été mises au point, la plus populaire et la plus pragmatique d'entre elles étant indiscutablement l'anti-windup. Cette procédure de synthèse en deux étapes présentée en détail au paragraphe III.6 est introduite dans un contexte industriel il y a une quarantaine d'années, mais ce n'est qu'au milieu des années 90 que des méthodes rigoureuses sont développées. L'introduction progressive de nouvelles caractérisations de la fonction de saturation se traduit par l'expression de conditions suffisantes de stabilité de moins en moins conservatives. Parmi elles, la modélisation par condition de secteur modifiée présentée au paragraphe III.4.3 marque une nouvelle étape, car elle permet d'obtenir aisément une formulation convexe du problème de synthèse anti-windup dans le cas statique.

IV.2 Historique :

Le phénomène de windup est mis en évidence dès le milieu du 20^{ème} siècle, et des méthodes ad hoc adaptées principalement à des correcteurs nominaux de type PID sont proposées. L'étude de systèmes saturés connaît alors un engouement important, comme en témoigne le nombre important de contributions dans ce domaine.

Il faut pourtant attendre le milieu des années 90 pour assister au développement de méthodes plus rigoureuses permettant de donner des garanties de stabilité et de prendre en compte des spécifications en termes de performance. Cette volonté de formaliser le problème de synthèse anti-windup se retrouve ainsi dans [37], qui propose une structure anti-windup unificatrice, et dans [37], qui formule le problème de recouvrement de la performance nominale en termes de gains L_2 non linéaires faisant intervenir la réponse effective du système saturé et celle du système linéaire associé. De nombreuses stratégies parfois délicates à mettre en œuvre sur des applications réalistes sont alors proposées.

Cette même époque voit l'émergence de nouvelles méthodes fondées sur la résolution de problèmes LMI, pour lesquels des solveurs performants sont désormais disponibles. Les auteurs [37] sont parmi les premiers à s'engager dans cette voie. Ils montrent en particulier que les propriétés de stabilité et de performance d'un système saturé peuvent s'exprimer à l'aide de LMI, mais la synthèse anti-windup, qu'elle soit statique ou dynamique, reste quant à elle un problème non convexe. Le développement progressif de nouvelles caractérisations de la fonction de saturation permet alors d'obtenir des conditions suffisantes de moins en moins conservatives :

1. modélisation par condition de secteur classique et application des critères du cercle et de Popov .
2. modélisation polytopique.
3. modélisation par condition de secteur modifiée.

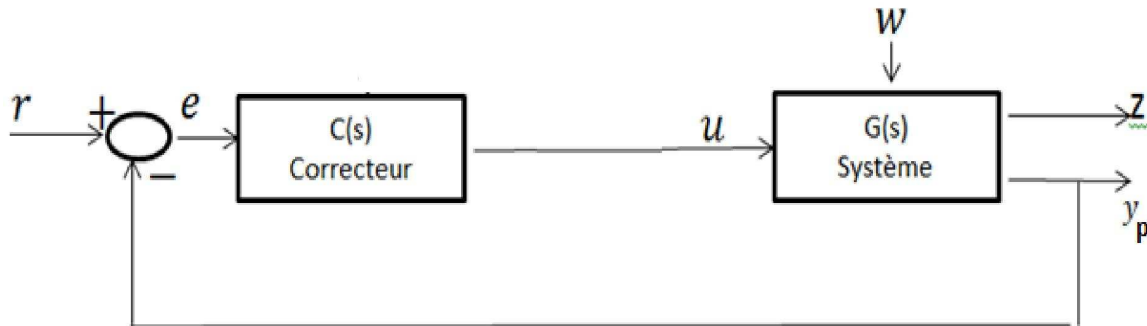
Cette dernière caractérisation, présentée au paragraphe III.4.3, marque une nouvelle étape, car elle permet d'obtenir une formulation convexe du problème de synthèse anti-windup, que l'on cherche un correcteur statique ou dynamique.

IV.3 Structure générale pour le problème « Anti-Windup »

Dans le cadre des systèmes de contrôle, il peut arriver qu'un contrôleur fonctionne très bien pour une certaine gamme de valeurs du signal de référence alors les performances se trouvent considérablement détériorées en cas de signaux de référence qui sortent même de peu de cette gamme. Dans beaucoup de cas, la sortie d'un contrôleur n'attaque pas directement le système mais passe par des dispositifs de limitation d'amplitude (saturation) ou par d'autres non-linéarités.

Un phénomène appelé « windup » en anglais apparaît si aucune précaution n'est prise lors de la synthèse du correcteur. L'origine de ce phénomène est le fait que la commande calculée par le correcteur est différente de celle appliquée réellement au système.

Dans la Fig VI.1 on peut voir le schéma idéal et linéaire du cas où on veut rendre petit l'erreur e en dépit des changements de la référence r ou de la perturbation w :



FigVI.1 schéma du cas idéal linéaire

on peut introduire une non-linéarité N comme montré en fig.IV.2

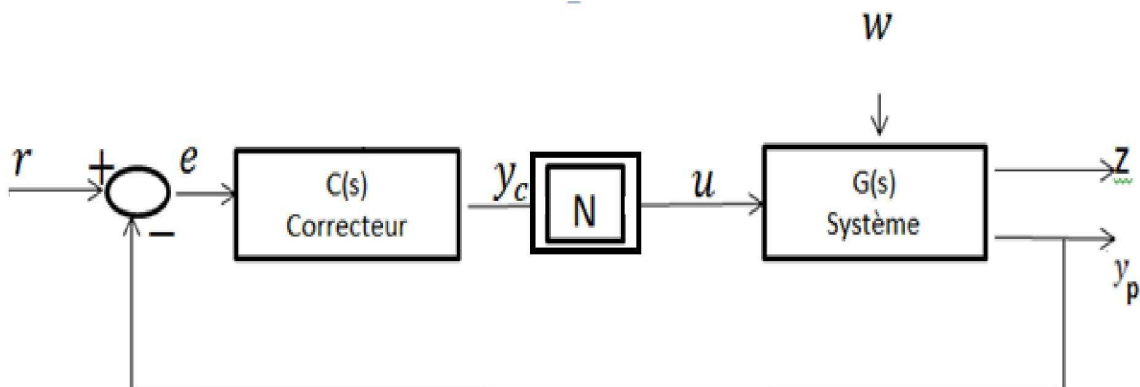


Fig IV.2 schéma du cas idéal linéaire avec une non-linéarité N

C'est la discordance entre u et y_c qui cause le windup, qui va engendrer des dégradations de performances et quelque fois l'instabilité.

Pour remédier à ce problème, on peut utiliser, comme le montre la FigIV.3, le principe général de l'architecture de base d'anti-windup.

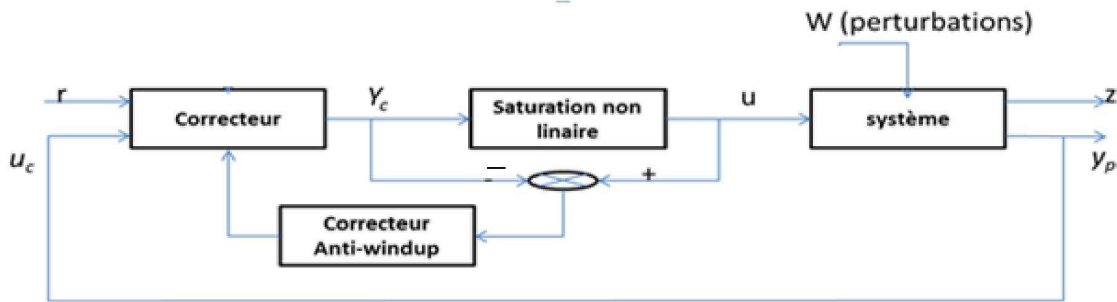


Fig IV.3 architecture de base d'anti-windup

Le système linéaire en boucle fermée est "perturbé" par le signal de zone morte (voir paragraphe III.4.3) correspondant à $(u - y_c)$ et ce même signal est exploité pour activer l'action anti-windup chaque fois nécessaire (à savoir quand les limites de saturation sont dépassées ou, de façon équivalente, chaque fois que la fonction de zone morte est différent de zéro).

Notez que la représentation dans les figures. Fig IV.3 est très générale et au fil des ans elle a été définie dans la forme représentée sur la Fig IV.4. Dans cette figure, il y a une séparation entre le "contrôleur sans contrainte" et le correcteur "anti-windup".

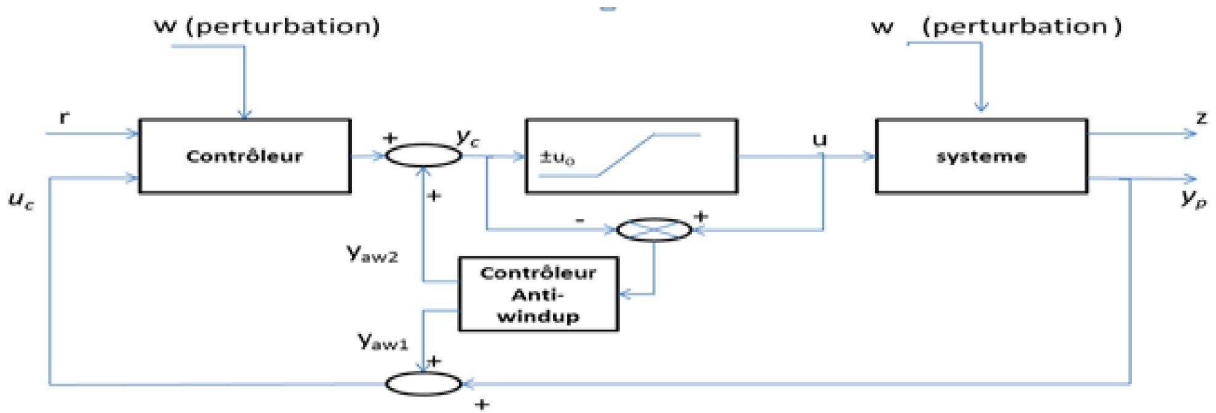


Fig IV.4 principe d'anti-windup

Le correcteur anti-windup lui-même émet deux signaux, l'un qui est alimenté directement dans le signal de contrainte de commande y_{aw2} , et le signal y_{aw1} qui est introduit dans l'équation d'état du correcteur. Pratiquement tous les correcteurs anti-windup qui sont présents dans la littérature, peut être représentés sous cette forme et donc les correcteurs anti-windup décrits dans ce qui suit seront supposés avoir cette architecture.

Remarque IV.1 De nombreuses stratégies anti-windup injectent le y_{aw2} signal directement dans l'équation d'état de commande, plutôt que par addition avec les sorties mesurées. Pendant que l'ancienne stratégie peut donner plus de liberté dans la conception anti-windup, la stabilité et les conditions d'optimalité restent à peu près similaires avec les deux stratégies. Ainsi une grande attention est consacrée à cette question.

Remarque IV.2 La mise en pratique du schéma de la Fig IV.4 considère que le signal anti-windup est réellement injecté à l'entrée du contrôleur. Puis l'anti-windup compensateur peut être facilement ajouté au contrôleur existant.

Sur les Fig IV.3 et 4, chaque bloc (contrôleur, système, compensateur anti-windup) peut être linéaire ou non linéaire, ce qui conduit à des formulations différentes des problèmes d'anti-windup.

IV.4 Positions du problème :

La Fig IV.4 représente l'architecture fondamentale d'anti-windup, avec les notations utilisées dans la suite. Nous considérons le système linéaire $G(s)$ à temps continu, en utilisant la notation d'entrée-sortie de la Fig IV.4:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{pu} u + B_{pw} w \\ y_p &= C_p x_p + D_{pu} u + D_{pw} w \\ z &= C_z x_p + D_{zu} u + D_{zw} w \end{aligned} \quad (4.1)$$

Les paires (A_p, B_p) et (C_p, A_p) sont respectivement contrôlables et observable

En outre, en respectant le système (4.1), on suppose qu'un correcteur linéaire nominal $C(s)$ (4.3) d'ordre n_c a été synthétisé par une méthode bien choisie de manière à stabiliser le système $G(s)$ et à garantir un niveau de performances satisfaisant en l'absence de saturations. C'est à dire lorsque les interconnexions suivantes sont utilisées:

$$u = y_c, u_c = y_p, y_{aw1} = 0, y_{aw2} = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u_c + B_{cw} w \\ y_c &= C_c x_c + D_c u_c + D_{cw} w \end{aligned} \quad (4.3)$$

Remarque IV.3 les systèmes (4.1) et (4.3) est supposé être bien posé. Par conséquent, l'interconnexion (4.2) est définie à partir

$$y_c = \Delta^{-1} C_c x_c + \Delta^{-1} D_c C_p x_p + \Delta^{-1} (D_c D_{pw} + C_{cw}) w \text{ avec } \Delta = I_m - D_c D_{pu} \quad (4.4)$$

Remarque IV.4 Par hypothèse, la boucle fermée sans saturation avec les connexions (4.2), est supposée assurer la stabilité interne et bien posé. Par conséquent, il est évidemment nécessaire que la matrice $\Delta = I_m - D_c D_{pu}$ et la matrice $I_p - D_{pu} D_c$ sont inversibles.

Et la matrice dynamique en boucle fermée sans contrainte et définie par :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_p + B_{pu} \Delta^{-1} D_c C_p & B_{pu} \Delta^{-1} C_c \\ B_c (I_m + D_{pu} \Delta^{-1} D_c) C_p & A_c + B_c D_{pu} \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

La matrice \hat{A} est supposée être Hurwitz, soit en l'absence de limites de contrôle, le système en boucle fermée serait globalement exponentiellement stable

Supposons maintenant que le vecteur d'entrée u est soumis à des limitations d'amplitude comme suit :

$$-u_{0_i}(t) \leq u_i(t) \leq u_{0_i}(t), u_{0_i}(t) > 0, i = 1, \dots, m \quad (4.7)$$

En conséquence, le signal de commande réellement injecté dans le système (4.1) est saturé et la commande du contrôleur (4.3) qui est décrite par :

$$u = \text{sat}(y_c) = \text{sat}(\Delta^{-1} C_c x_c + \Delta^{-1} D_c C_p x_p + \Delta^{-1} (D_c D_{pw} + C_{cw}) w) \quad (4.8)$$

Avec chaque composant du terme de saturation $\text{sat}(y_c)$ classiquement définie par :

$$\text{sat}(y_{c(i)}) = \text{sign}(y_{c(i)}) \min(|y_{c(i)}|, u_{0(i)}) \quad (4.9)$$

Deux signaux additionnels y_{aw1} et y_{aw2} agissant respectivement sur les entrées et les sorties de correcteur sont alors introduits afin de minimiser les effets négatifs de ces non-linéarités. Une représentation d'état du correcteur $C(s)$ ainsi obtenu est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c \dot{u}_c + B_{cw} w + y_{aw1} \\ y_c &= C_c x_c + D_c u_c + D_{cw} w + y_{aw2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Les signaux y_{aw1} et y_{aw2} ont comme objectif d'atténuer les effets indésirables de windup causés par la saturation d'entrée. On peut considérer un contrôleur anti-windup $J(s)$ que l'on cherche à optimiser, de dimension connue, dont l'entrée est liée à la non-linéarité de zone morte $\phi(y_c) = \text{sat}(y_c) - y_c$, et sa sortie est un vecteur $\begin{bmatrix} y_{aw1} \\ y_{aw2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_c+m}$ défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aw} &= A_{aw} x_{aw} + B_{aw} (\text{sat}(y_c) - y_c) \\ \begin{bmatrix} y_{aw1} \\ y_{aw2} \end{bmatrix} &= C_{aw} x_{aw} + E_{aw} (\text{sat}(y_c) - y_c) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} y_{aw1} \\ y_{aw2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_c+m} \quad (4.11)$$

Il est maintenant possible de représenter la principale architecture de conception du correcteur anti-windup, est appelé direct linéaire anti-windup (DLAW)

IV.5 Direct Linear Anti-windup[37]

La stratégie de la technique directelinéaireanti-windup(DLAW) consiste à sélectionnerl'anti-windupfiltragedans la Fig IV.4 commeun filtre linéairequi produitles signaux y_{aw2} et y_{aw1} comme sortie :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{aw} &= A_{aw}x_{aw} + B_{aw}(sat(y_c) - y_c) \\ \begin{bmatrix} y_{aw1} \\ y_{aw2} \end{bmatrix} &= C_{aw}D_{aw} + E_{aw}(sat(y_c) - y_c) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tel que \dot{x}_{aw} est l'état du correcteur anti-windup, $u_{aw} = sat(y_c) - y_c = \emptyset(y_c)$ est l'entrée du correcteur anti-windup, et le vecteur $\begin{bmatrix} y_{aw1} \\ y_{aw2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n_c+m}$ est sa sortie

Le but de conceptionconsiste à calculer les matrices $A_{aw}, B_{aw}, C_{aw}, E_{aw}$ de (4.12) de sorte quelesystème anti-windupen boucle fermée(4,1), (4,10), (4,12) satisfait la stabilitéetles propriétésde performance.

IV.5.1 Conception de la technique Direct Linéaire Anti-windup (DLAW)

Dans cette section,les systèmes définispar(4,1), (4,10), (4,12) peuvent aussi s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{pu} u + B_{pw} w \\ y_p &= C_p x_p + D_{pu} u + D_{pw} w \\ z &= C_z x_p + D_{zu} u + D_{zw} w \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u_c + B_{cw} w + y_{aw1} \\ y_c &= C_c x_c + D_c u_c + D_{cw} w + y_{aw2} \\ \dot{x}_{aw} &= A_{aw} x_{aw} + B_{aw} (sat(y_c) - y_c) \\ y_{aw1} &= [I_{n_c} \quad 0] (C_{aw} x_{aw} + E_{aw} (sat(y_c) - y_c)) \\ y_{aw2} &= [0 \quad I_m] (C_{aw} x_{aw} + E_{aw} (sat(y_c) - y_c)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

IV.6 Equations du système en boucle fermée

Une grandepartie des résultatsréalisés dans le cadre de la technique DLAWsont baséesur l'utilisation desnon-linéaritésde type zone mortequi Sant modélisé par les conditionsdu secteur généralisé(voir chapitre III).Considérantla fonction saturation $sat(y_c)$, lanon-linéaritézone morte $\emptyset(y_c)$ est obtenue à partir de $\emptyset(y_c) = sat(y_c) - y_c$. Ainsi, On définit le vecteur d'état augmenté x

$$\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} x_p \\ x_c \\ x_{aw} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n+n_c+n_{aw}}$$

Le système en boucle fermée est définie par :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= A \varepsilon(t) + B_1 \phi(y_c) + D_{12} w \\ y_c &= C_1 \varepsilon(t) + D_{11} \phi(y_c) + D_{12} w \\ z &= C_2 \varepsilon(t) + D_{21} \phi(y_c) + D_{22} w \end{aligned} \quad (4.14)$$

Tel que :

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A} & B_v C_{aw} \\ 0 & A_{aw} \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} B_\phi + B_v D_{aw} \\ B_{aw} \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}; C_1 = [C_1 C_{v1} C_{aw}] \quad (4.15)$$

$$D_{11} = D_1 + C_{v1} D_{aw}; C_2 = [C_2 C_{v2} C_{aw}]; D_{21} = D_2 + C_{v2} D_{aw}$$

Avec \hat{A} est définie dans (4.6)

$$\begin{aligned} B_v &= \begin{bmatrix} B_{pu} \Delta^{-1} [0 \quad I_m] \\ B_c D_{pu} \Delta^{-1} [0 \quad I_m] + [I_{nc} \quad 0] \end{bmatrix} \\ B_\phi &= \begin{bmatrix} B_{pu} (I_m + \Delta^{-1} D_c D_{pu}) \\ B_c D_{pu} (I_m + \Delta^{-1} D_c D_{pu}) \end{bmatrix} \\ C_1 &= [\Delta^{-1} D_c C_p \quad \Delta^{-1} C_c] \\ C_{v1} &= \Delta^{-1} [0 \quad I_m]; D_1 = \Delta^{-1} D_c D_{pu} \\ C_2 &= [C_z + D_{zu} \Delta^{-1} D_c D_p \quad D_{zu} \Delta^{-1} C_c] \\ C_{v2} &= D_{zu} \Delta^{-1} [0 \quad I_m] \\ D_2 &= D_{zu} (I_m + \Delta^{-1} D_c D_{pu}) \\ B_2 &= \begin{bmatrix} B_{pu} \Delta^{-1} (D_{cw} + D_c D_{pw}) + B_{pw} \\ B_c D_{pu} \Delta^{-1} (D_{cw} + D_c D_{pw}) + B_{cw} + B_c D_{pw} \end{bmatrix} \\ D_{12} &= \Delta^{-1} (D_{cw} + D_c D_{pw}) \\ D_{22} &= D_{zw} + D_{zu} \Delta^{-1} (D_{cw} + D_c D_{pw}) \end{aligned}$$

Remarque IV.5 Dans ce qui suit on va étudier la stratégie anti-windup statique qui représente le moyen le plus simple pour évaluer l'avantage de la philosophie anti-windup pour les systèmes présentant une saturation de l'actionneur. Des procédures d'optimisation associées sont convexes, et quand l'action anti-windup est injectée seulement dans la dynamique du contrôleur $C(s)$ ($y_{aw2} = 0$), il n'y a pas de boucle implicite algébrique dans le système en boucle fermée. nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{pu} \text{sat}(y_c) + B_{pw} w \\ \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c u_c + B_{cw} w + E_{aw} (\text{sat}(y_c) - y_c) \\ y_c &= C_c x_c + D_c u_c + D_{cw} w \end{aligned} \quad (4.16)$$

IV.7 Formulation du problème de synthèse

Comme souligné dans le chapitre 3, nous pouvons poser deux questions à l'égard du système (4.14), à savoir la stabilité quand $w = 0$ et les problèmes de performance quand $w \neq 0$. Il est important de souligner que dans le cas où $w = 0$, l'un des problèmes par rapport au système en boucle fermée (4.14), consiste à calculer le gain anti-windup E_{aw} (statique) afin d'agrandir le bassin d'attraction du système en boucle fermée qui en résulte. Dans le cas où $w \neq 0$, le problème revient à assurer un certain niveau de performance qui peut être mesurée.

Problème IV.1 : Déterminer le gain d'anti-windup E_{aw} et une région de stabilité asymptotique pour le système en boucle fermée.

- L'objectif implicite de ce problème est de maximiser la taille de la région de stabilité en faisant un choix judicieux du gain E_{aw} .

IV.7.1 Solution via la fonction de Lyapunov quadratique

Dans cette section, nous nous concentrons sur la stabilité asymptotique interne du système fermé (4.14). Par conséquent, nous supposons que $w(t) = 0$. Pour faciliter la présentation des résultats ci-dessous. Notons que le système en boucle fermée (4.14) avec $w(t) = 0$ s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \tilde{A} \varepsilon(t) - (\tilde{B} + \tilde{R} E_{aw}) \Phi(\tilde{K} \varepsilon(t)) \quad (4.17)$$

$$\text{avec } \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_p + B_p D_c C_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}; \tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{nc} \end{bmatrix}; \tilde{K} = [D_c C_p \quad C_c]$$

Par la suite, on va considérer la fonction de Lyapunov de type quadratique. Tous les résultats sont fournis en utilisant la modélisation par non-linéarité de secteur (voir paragraphe III.5.3, et en particulier le lemme III.2 du Chap. 3).

Dans cette section, nous considérons une fonction de Lyapunov quadratique définie comme :

$$V(x) = \varepsilon^T P \varepsilon, \varepsilon = \varepsilon^T > 0$$

Pour prouver la stabilité asymptotique du système (4.17), on va utiliser la relation (3.28) de la proposition III.1 dans chap. III

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T & \tilde{B}S - Z^T \\ S\tilde{B}^T - Z & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

La non-linéarité $\phi(\tilde{K}\varepsilon(t))$ et une zone morte et satisfait la condition de secteur :

$$\phi(\tilde{K}\varepsilon(t))^T \wedge (\phi(\tilde{K}\varepsilon(t)) + Hx) \leq 0, \forall \varepsilon \in S \quad (4.19)$$

Où Λ est une matrice diagonale positive et S est un ensemble polyédral défini par :

$$S = \{x \in \mathfrak{R}^n : |(\tilde{K}_i + H_i)\varepsilon| \leq 1 \forall i \in [1, n]\} \quad (4.20)$$

En notant $P = Q^{-1}$ et en utilisant le changement de variables $GW = Z$, on aura la satisfaction de la relation (3.26)

$$\begin{bmatrix} Q & Z_i^T + QC_{\phi i}^T \\ Z_i + C_{\phi i}Q & 1 \end{bmatrix} > 0, i = \dots m \quad (4.21)$$

signifie que l'ellipsoïde $\xi(P, 1)$ est inclus dans l'ensemble polyédrique S

Alors le gain $E_{aw} = ZS^{-1}$ et l'ensemble ellipsoïde $\varepsilon_p = \{x \in \mathfrak{R}^n : x^T P x \leq 1\}$ sont solutions de notre problème.

IV.7.2 Discussion sur les étapes numériques

Nous sommes intéressés par les deux cas suivants :

- Cas 1. Choisir un critère d'optimisation.
- Cas 2. Quel est le plus grand ensemble de conditions initiales que nous pouvons stabiliser?

A partir des deux cas notre objectif est de déterminer le gain d'anti-windup E_{aw} ce gain qui Maximise l'estimation du bassin d'attraction associée.

❖ Approche quadratique :

Comme dans la Proposition 4.1, L'objectif implicite est de maximiser l'ensemble $\varepsilon(P, \eta)$. Par conséquent, différents critères peuvent être associés aux différentes façons de mesurer la taille de l'ensemble $\varepsilon(P, \eta)$.

L'algorithme simple suivant peut être utilisé afin d'exposer une solution du problème de l'analyse de stabilité.

(Proposition III.1) Nous voulons chercher Q, S et Z

Présence d'une non-linéarité due au produit entre Q et Z

Algorithme 1

- **Etape 0** initialiser Z
- **Etape 1.** Fixer Z et résoudre avec $\eta = 1$:

$$\begin{aligned} & \min f(\varepsilon(p, 1)) \\ & \text{subject to inégalités (4.18) – (4.21)} \end{aligned}$$

- **Etape 2.** Fixer Q obtenu au pas précédent et résoudre :

$$\begin{aligned} & \min f(\varepsilon(p, 1)) \\ & \text{subject to inégalités (4.18) – (4.21)} \end{aligned}$$

- **Etape 3.** Si la différence obtenue à l'étape 1 et 2 est plus grande qu'une Précision désirée alors retourner au pas 1. Sinon stop et $E_{aw} = ZS^{-1}$

IV.8 Exemples d'application

L'objectif de cette exemple est d'illustrer les théories de conditions développées dans ce chapitre. Pour l'analyse de la stabilité locale.

Exemple IV.9 (pointeur Balancing) [37] Prenons à nouveau l'exemple de motivation utilisée dans le chapitre 3, avec les notations du système (4.1), on a :

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B_{pu} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; u_0 = 5$$

Pour évaluer l'effet des différentes stratégies anti-windup en présence de saturation dans la boucle de régulation, il est plus intéressant de considérer les systèmes en boucle fermée portant un contrôleur dynamique. Au lieu d'un correcteur par retour d'état utilisé dans les manipulations précédentes de cet exemple de motivation, nous appliquons maintenant un routeur de sortie dynamique construite à partir d'un contrôleur PI :

$$y_c = k_p y_p + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t y_p \text{ Avec } k_p = 2; T_i = 0.1$$

Une représentation d'état a été conçue pour ce système :

$$A_c = 0; B_c = \frac{k_p}{T_i}; C_c = 1; D_c = k_p$$

Prenons le problème de stabilité ($w = 0$), tel que défini au chapitre. 5. Le système en boucle ouverte est instable, en utilisant la technique DLAW dans le cas de stabilité local (voir chap.

5). Prenons le cas le plus simple où un correcteur anti-windup statique est proposé ($A_{aw} = B_{aw} = C_{aw} = 0$) comme suggéré dans la remarque 5.6, et considérant que la sortie anti-windup est injectée seulement dans la dynamique du correcteur x_c . La Proposition 4.4.2 est appliquée pour trouver un gain $D_{aw} = [E_{aw} \ 0]$ anti-windup qui maximise le bassin de la région d'attraction du système saturé en boucle fermée avec une action anti-windup. Comme suggéré dans l'algorithme 5.8.2, un ensemble de condition initiale admissible du type carrée est fixée de composants x_p :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; v_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

L'optimisation du problème a donné :

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.04 & 0.0 \\ 0.04 & 0.04 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.004 \end{bmatrix}$$

$$\mu = 0.1600; \quad (\beta = 2.5000); \quad E_{aw} = 10.0098 \quad ; \quad D_{aw} = [10.0098 \ 0]$$

Où μ est le critère d'optimisation, directement liée à la mise à l'échelle du facteur $\beta = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$ sa forme est définie par l'ensemble x_0 formé par les directions v_1 à v_4 (voir aussi Remarque 7.9). Figure 8. présente l'ellipsoïde obtenu de stabilité pour le système en boucle fermée en présence du correcteur anti-windup.

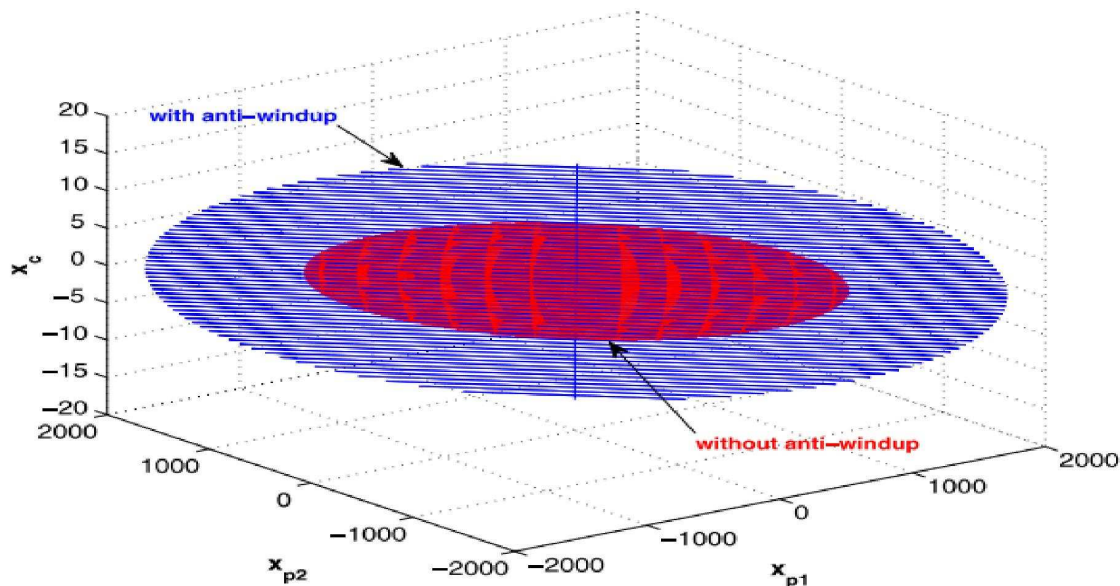


Fig. IV.5 Exemple (pointeur Balancing). Région de stabilité de type ellipsoïdale du système saturé en boucle fermée avec et sans correcteur anti-windup

Dans cette figure, l'ellipsoïde de stabilité en boucle fermée pour le système saturé sans anti-windup, obtenu à partir du même critère d'optimisation $\min \mu$, est également représenté. Dans ce cas, on obtiens $\mu_{noaw} = 0.9898 (\beta_{noaw} = 1.0052)$. On peut remarquer l'amélioration en termes de taille de la région de stabilité asymptotique obtenu avec l'utilisation d'une stratégie anti-windup.

L'influence de l'action anti-windup peut également être appréciée sur l'évolution temporelle de l'état du système \dot{x}_p et entrée $u = sat(y_c)$ pour différentes conditions initiales.

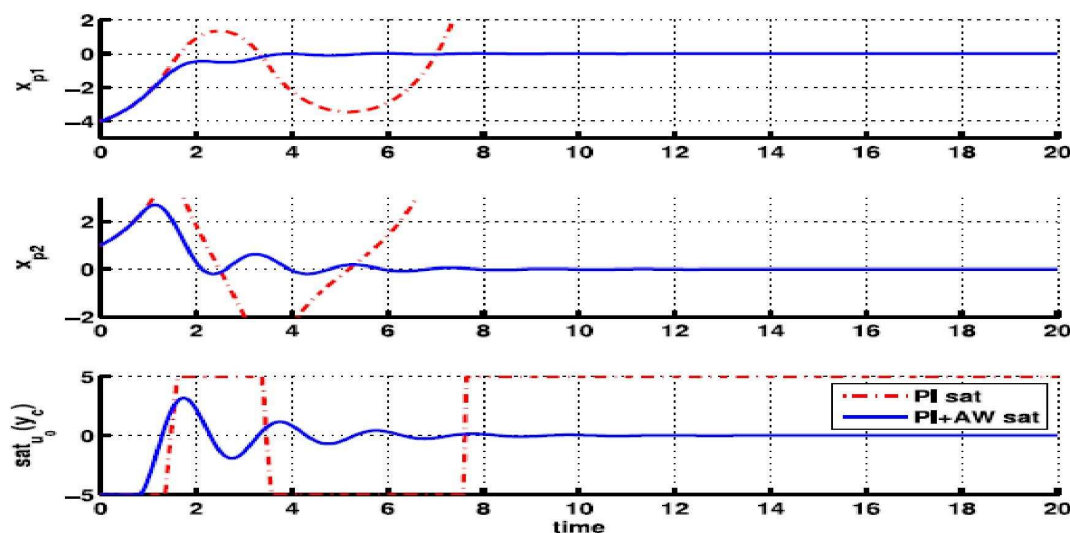


Fig. IV.6 : Exemple (pointeur Balancing). L'évolution temporelle du système en boucle fermée avec anti-windup (trait continue) et sans anti-windup (ligne pointillée) initialisé à $x_p = [-4 \ 2]$

Figure IV.2 illustre le cas avec la condition initiale $(x_p = [-4 \ 1]^T, x_c = 0)$. Cette condition initiale appartient à la région de stabilité asymptotique avec l'anti-windup mais qui n'appartient pas à la région de stabilité asymptotique du système en boucle fermée sans anti-windup. On peut vérifier que la trajectoire du système en boucle fermée converge avec anti-windup vers 0 par contre les trajectoires sans anti-windup va vers l'infini.

Une action anti-windup (anti-windup statique plantée à la fessur la dynamique et la sortie du contrôleur) peut également être utilisée, mais il n'apporte pas une importante amélioration dans cet exemple.

IV.9 Conclusion

➤ Stabilité locale :

Synthèse du gain d'anti-windup, analyse de la région de stabilité

- Pas de solution miracle
- Compromis entre performance et taille de la région de stabilité
- Conservatisme mais bons résultats (comparaison)
- Procédures numérique globalement efficaces.

➤ Extensions possibles : systèmes à retard, systèmes avec perturbations additives, systèmes singuliers

CHAPITRE V

Application

V. 1 Introduction

Ce chapitre est dédié à l'application de la loi de commande H_∞ en présence de saturation du signal de commande à la poutre dont le modèle a été établi au premier chapitre. Plus précisément, il s'agit d'illustrer le comportement de la commande H_∞ reconnue robuste lorsque les commandes sont soumises à des saturations dues aux limites technologiques des actionneurs. Certes, la limitation de l'énergie de commande peut être prise en compte de manière inhérente dans le problème standard de la commande H_∞ par le choix adéquat du gabarit W_2 , mais imposer des contraintes sur ce gabarit peut entraîner de limites sur les performances espérées. La solution de laisser libre le choix de la fonction de pondération W_2 sans se soucier des saturations éventuelles sur l'actionneur puis de compenser ces saturations par une stratégie d'anti-windup pourrait naturellement très avantageuse. L'illustration de cette solution est la question centrale de notre travail. Les développements théoriques et la justification mathématique de cette solution sort du cadre de ce magister mais reste un problème complètement ouvert sur des futurs travaux de recherche. Les simulations présentées dans ce chapitre sont réalisés sous MATLAB et MATALB/SIMULINK. Pour la stratégie de calcul du compensateur anti-windup, nous avons exploité la boîte à outil SATAW-Tool [38] développée sous MATLAB et téléchargeable gratuitement sur le web.

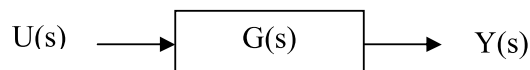
La structure à contrôler est une poutre travaillant en flexion dans la direction $Z[2]$. La commande se doit d'assurer un asservissement de position, de sorte à pouvoir déplacer la poutre d'une valeur donnée en générant le moins d'oscillations possible et en atteignant la position finale le plus rapidement possible. Dans un premier lieu, les simulations du système, en boucle ouverte montrent que le système est fortement oscillant. Ceci conduit donc à la nécessité de corriger ce système. Puis, en second lieu, nous procédons à la synthèse d'un contrôleur H_∞ . Sur la base des performances fixés, les gabarits des fonctions de pondération sont construits et le contrôleur H_∞ est calculé au moyen de la boîte à outil disponible sous MATALB. En troisième lieu, nous supposons la présence d'une saturation de la commande. Les dégradations constatées par cette saturation nous conduisent à envisager d'insérer la compensation par anti-windup. L'exécution de l'algorithme d'anti-windup n'a pas pu se faire en raison des conditions d'existence de la solution que le système poutre ne satisfait pas. Afin de palier à ce problème et d'illustrer la stratégie d'anti-windup, nous présentons un exemple didactique composé d'une masse et d'un ressort.

V. 2 Simulation du modèle sans la présence de contrôleur

V.2.1 Analyse

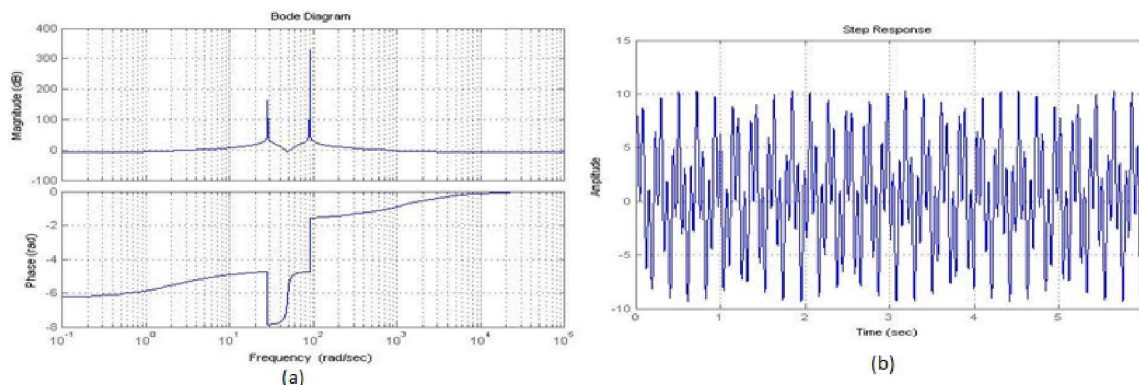
V.2.1 Simulation en boucle ouverte

Le schéma fonctionnel du système en boucle ouverte est présenté par la figure suivante :



FigV. 1 : Schéma du système en boucle ouverte

Afin d'analyser le comportement du système réduit sur les plans temporel et fréquentiel, nous allons tracer la réponse indicielle et les diagrammes de Bode de $G(j\omega)$.



FigV. 2 : (a) Tracés de Bode de $G(j\omega)$ (b) : Réponse à un échelon de consigne du système en boucle ouverte ;

Les valeurs des pulsations propres et des amortissements de notre système sont résumées dans le tableau suivant :

Pulsation (w_n) [rd/s]	Fréquence [hertz]	Amortissement (ε)
28.10	0.22	0.13
89.22	0.07	0.02

Tableau V. 1 Pulsations de résonance, fréquences et amortissements du système réduit en boucle ouverte

On notera la résonance au voisinage des deux pulsations propres. Ce système mono-entrée mono-sortie du quatrième ordre possède quatre modes flexibles caractérisés par les valeurs propres quasi-imaginaires.

V.2.2 Simulation en boucle fermée non corrigé

Le schéma fonctionnel du système en boucle fermée sans correcteur est présenté par la figure suivante :

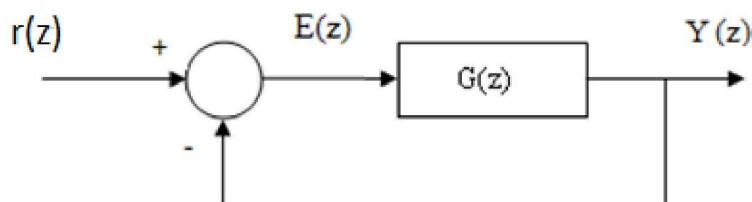


Fig V .3 : Schéma du système en boucle fermée

Les simulations effectuées ont donné les résultats suivants :

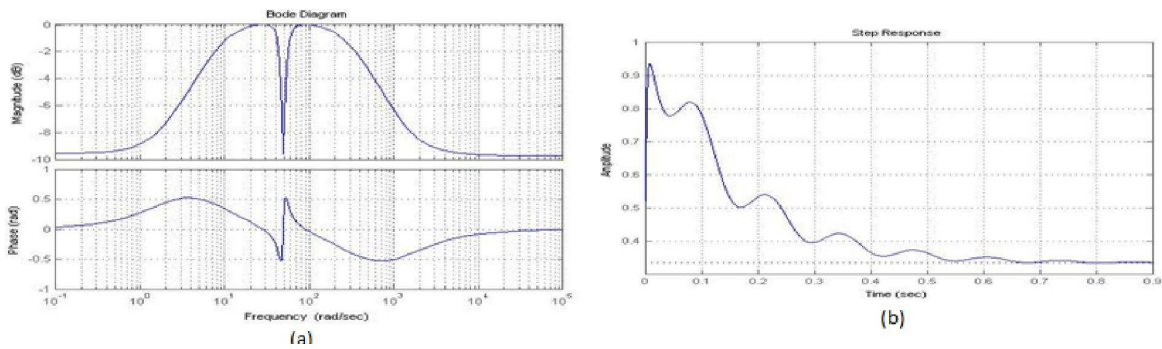


Fig. V .4 : (a) Tracé de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée ; (b) : Réponse à un échelon de consigne du système en boucle fermée.

Les valeurs des pulsations propres, des fréquences et des amortissements de notre système sont résumées dans le tableau suivant :

Pulsation (w_n) [rd/s]	Fréquence[hertz]	Amortissement (ϵ)
48.8925	0.13	0.0993

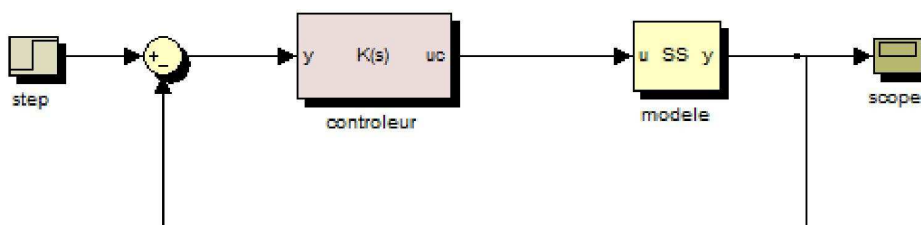
Tableau V. 2 Pulsations, fréquences et amortissements du système réduit en boucle ouverte

Nous constatons que l'objectif de l'asservissement n'est pas du tout atteint du fait que la sortie s'éloigne de la consigné désirée. Nous remarquons que le système en boucle fermée possède deux modes flexibles dominants et deux modes rigides. Les modes flexibles induisent de fortes oscillations sur la réponse du système à un échelon de consigne. Les performances du système bouclé sont très médiocres. L'asservissement nécessite donc un correcteur.

V .3 .simulation du modèle avec la présence de contrôleur

V. 3 1 Synthèse du correcteur H infini

L'ensemble contrôleur, modèle de la structure peut être représenté dans ce cas :



FigV .5 : Schéma de principe d'un système de contrôle

Présentation du problème :

Le processus à asservir est présenté schématiquement par la figure(V.6). L'objectif du problème est de calculer un correcteur H_∞ standard augmenté de trois fonctions de pondérations $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$. Les objectifs de l'asservissement sont les suivants :

- Stabiliser le système avec un suivi de consigne avec erreur statique très faible d'environ 0.3%
- rendre le système plus rapide,
- avoir une bande passante : $\omega_c \approx 0.35$ rd/s,
- limiter l'énergie de commande
- avoir un amortissement et une pulsation propre trèsgrands

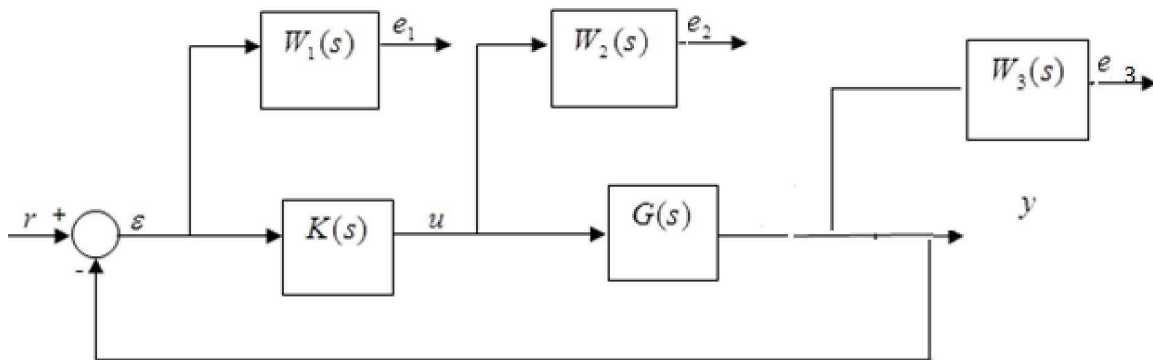


Fig. V .6 : Mise en place des fonctions pondérations

V.3.2 Choix des fonctions de pondération $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$

Le filtre w_1 est choisi afin que le diagramme de $1/|w_1|$, coupe l'axe 0dB à 0.35 rd/s (bande passante demandée) et en appliquant la relation (II.22) avec $G_\infty = 0, G_0 = 350$ et $w_c = 0.35$ rd/s.

$W_3(s)$ est choisie de sorte qu'on veut garder un comportement du second ordre, mais avec une pulsation propre plus faible et un amortissement plus grand. On applique donc à une pondération d'ordre 2.

Dans un premier temps $W_2(s)$ est choisie constante. Cette pondération est ajustée afin que la fonction de sensibilité S suive le plus près possible le gabarit γ/W_1 . Finalement, la valeur $w_2 = 0.01$ a été retenue. Dans ce cas, le problème de la commande H infini est de déterminer le correcteur $K(s)$ qui minimise la norme infinie de la matrice

$$\left\| \begin{array}{l} W_1 S \\ W_2 K S \\ W_3 T \end{array} \right\| < \gamma$$

Enfin, on introduit une atténuation en haute fréquences sur le gabarit $|w_2|$ afin d'obliger le gain du correcteur à chuter dans les hautes fréquences. Cela permet de limiter la sensibilité au bruit. A nouveau, on fait en sorte de ne pas augmenter de façon trop importante la valeur de γ . Finalement, après plusieurs essais, les fonctions de transfert finalement choisies sont :

$$w_1 = \frac{0.35}{s + 0.001}$$

$$w_2 = \frac{s + 1}{s + 100}$$

$$w_3 = \frac{s^2 + 30s + 400}{s^2 + 35s + 300}$$

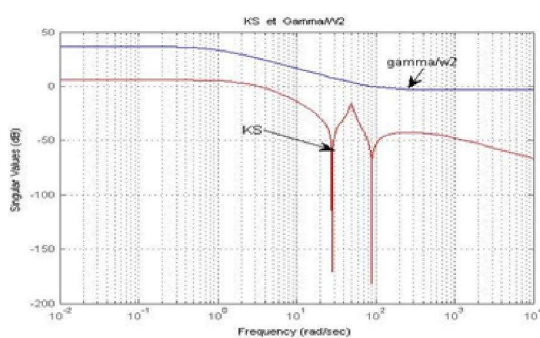
Le calcul du correcteur est effectué à l'aide des instructions disponibles à cet effet dans MATLAB. Les résultats obtenus sont :

On obtient $\gamma = 0.6719$ pour un correcteur d'ordre 8 dont la fonction de transfert est :

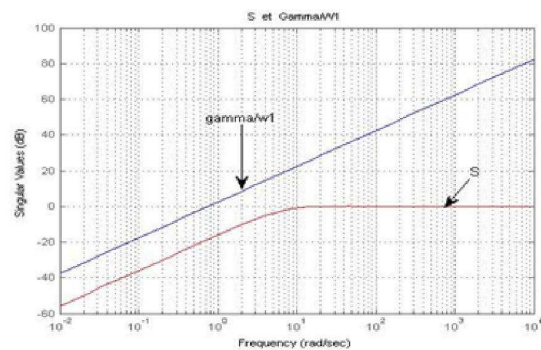
$K(s)$

$$= \frac{4.704 s^7 + 635.1 s^6 + 5.904 \cdot 10^4 s^5 + 5.698 \cdot 10^6 s^4 + 1.859 \cdot 10^8 s^3 + 5.223 \cdot 10^9 s^2 + 1.123 \cdot 10^{10} s + 7.1 \cdot 10^{10}}{s^8 + 655.5 s^7 + 8.011 \cdot 10^4 s^6 + 3.934 \cdot 10^6 s^5 + 2.061 \cdot 10^8 s^4 + 5.029 \cdot 10^9 s^3 + 4.241 \cdot 10^{10} s^2 + 7.1 \cdot 10^{10} s + 7.1 \cdot 10^{10}}$$

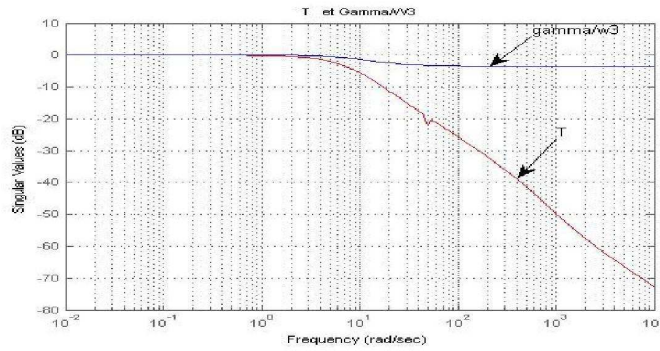
L'introduction du correcteur ainsi obtenu dans la boucle de régulation donne des résultats présentés par les figures V.7 et V.8.



(a)



(b)



(c)

Fig. V.7 Diagramme de BODE des transferts S, KS, T et leurs gabarits respectifs.

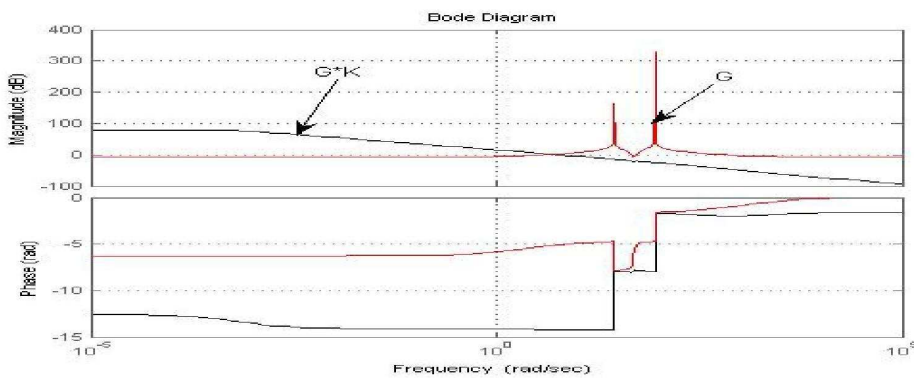


Fig. V.8: Réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée (G*K) et du procédé G.

La figure (V.7.b) représente le diagramme de Bode du module de la fonction de sensibilité $S(s)$ et celui de son gabarit $\gamma/|w_1|$. On remarque que le diagramme de $S(s)$ est en dessous de son gabarit et le gain de $S(s)$ en basse fréquences est très faible, ceci garanti une bonne précision de la sortie par rapport à l'entrée de référence.

La figure (V.7.a) représente le diagramme de Bode du module du transfert $KS(s) = \frac{u(s)}{r(s)}$ et celui du gabarit $\gamma/|w_2|$. Dans ce cas aussi le diagramme de $KS(s)$ est en dessous de son gabarit, le gain de $KS(s)$ est faible en haute fréquences, ceci garanti une diminution de l'énergie (amplitude) de commande en réponse à une consigne, et assure une stabilité robuste sur le modèle complet.

La figure (V.7.c) représente le diagramme de Bode du module du transfert $T = \frac{y(s)}{r(s)}$ et celui du gabarit $\gamma/|w_3|$. Le diagramme de Bode de Test également en dessous du gabarit, cela garanti un rejet de bruit. D'autre part, la fonction T représente la fonction de transfert en boucle fermée. Le diagramme de T ressemble à celui d'un transfert d'un système du premier ordre. Il

y a absence complète de modes oscillants. Cela justifie le bon choix des fonctions de pondération $w_1(s)$, $w_2(s)$ et $w_3(s)$.

La figure (V.8) représente la réponse fréquentielle de la boucle ouverte corrigée $G(s)K(s)$ et celle de procédé $G(s)$, elle montre que la pulsation au gain unité est égale 28.1 rd/s et la marge de phase est égale à 97 degrés. Ces résultats montrent que le cahier des charges est respecté.

V.3.3 simulation du modèle avec la présence de contrôleur

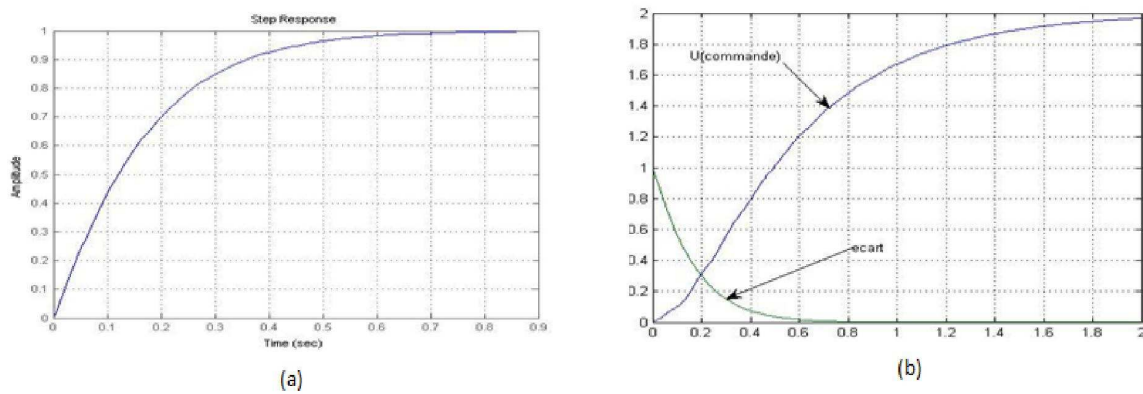


Fig. V.9: (a) Réponse à un échelon de consigne du système réduit (b) la commande $u(t)$ générée par le contrôleur comparée à l'écart $\varepsilon = r - y$.

La figure V.9 (a) montre que la réponse à un échelon de consigne est complètement aperiodique (aucune présence d'oscillations).

V. 4 simulation du modèle avec saturation de l'actionneur

Nous supposons, à présent, que l'actionneur est soumis à une saturation. Nous voudrions analyser les performances du correcteur H infini conçu en présence de cette saturation. L'ensemble contrôleur, modèle de la structure et actionneur peut être représenté dans ce cas :

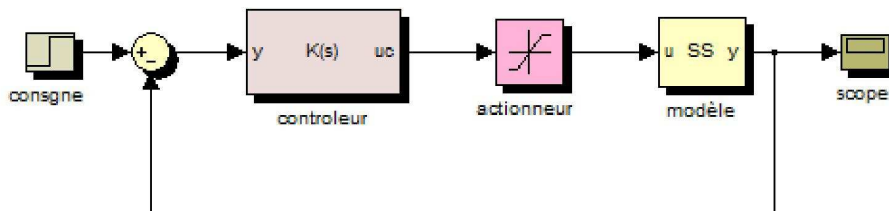
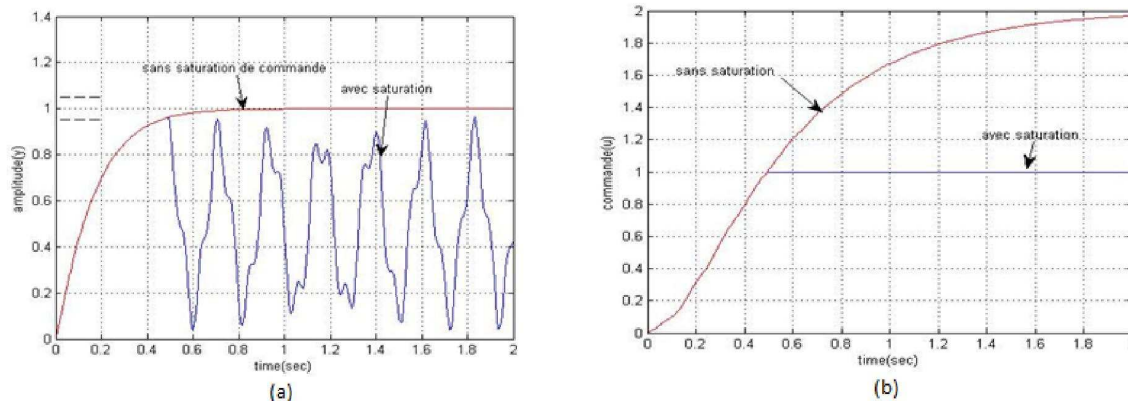


Fig. V.10 Comportement du contrôleur H_∞ avec saturation de l'actionneur

Le niveau de saturation est pris égal à 1. L'introduction du correcteur ainsi obtenu avec saturation de la commande, dans la boucle de régulation donne des résultats présentés par les figures V.11 et V.12



Comme le montre cette figure V.11(b), au cours de la période de saturation, la commande $u(t)$ reste à sa valeur maximale 1 unité. Nous constatons que les performances du correcteur H infini sont complètement dégradées, on atteint même la limite de l'instabilité. En présence de saturation de la commande, la commande H infini nécessite une compensation anti-windup en dépit de ses qualités de robustesse.

Nous avons essayé de calculer le compensateur anti-windup statique par la boîte à outil SATAW disponible sous MATLAB [38]. Cependant l'exemple de la poutre avec le correcteur H_∞ déterminé ne vérifie pas les conditions de faisabilité des LMI utilisées dans le calcul du gain de l'anti-windup. Une autre stratégie de l'anti-windup comme par exemple une compensation dynamique peut être une alternative. Une autre solution est de reconfigurer le problème de commande H infini en modifiant les objectifs.

Afin d'illustrer concrètement la stratégie d'anti-windup et d'illustrer l'exploitation du logiciel SATAW, nous avons traité un autre exemple composé d'une masse et d'un ressort.

La structure [1] à contrôler est un prototype d'une malle de transport d'équipement électronique de masse $m=1$ kg. L'équipement électronique est protégé des impacts à l'aide d'une mousse dont la rigidité $k=1$ N/m et dont l'amortissement $c=0.1$. Durant le transport, le système subit des excitations à sa base. Le jeu entre le haut de l'équipement électronique et la malle est protégé par un amortisseur actif (système de contrôle actif de vibrations). La commande $u(t)$ de cet amortisseur est générée par le correcteur H infini doit assurer les objectifs suivants :

1. On souhaite asservir la position de la masse m avec un écart statique très faible.
2. Stabiliser le système rapidement avec le moins d'oscillations possibles (limiter la résonance du transfert).
3. Assure la robustesse par rapport à la saturation de l'actionneur (anti-windup)

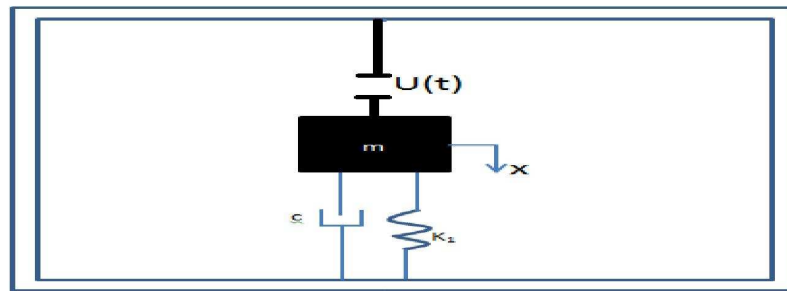


Fig. V.12. Malle de transport d'équipement électronique

A partir de l'équation d'état $m\ddot{x}(t) + f\dot{x}(t) + kx(t) = u(t)$, on obtient comme transfert entrée/sortie :

$$G_0(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + fs + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 + 2\varepsilon \frac{s}{w_0} + \frac{s^2}{w_0^2}}$$

Ou :

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Est la pulsation propre.}$$

$$\varepsilon = \frac{w_0 f}{2k} = \frac{1}{2} \frac{f}{\sqrt{km}} \text{ Est le facteur d'amortissement.}$$

Ces notations sont standard pour les systèmes du second ordre. On utilisera les valeurs $m=1$ kg, $k=1\text{N/m}$ $f=0.1$ Ns/m d'où

$$w_0 = 1.4 \text{ rd/s ; } \varepsilon = 0.05.$$

Si $K(s)$ est le compensateur utilisé, la commande u_c calculée à l'instant t vérifie :

$$u_c = K(s)X(s) .$$

Le diagramme de BODE et la réponse indicielle de ce transfert apparaît en figure 4.5. On notera la résonance au voisinage de la pulsation propre w_0 .

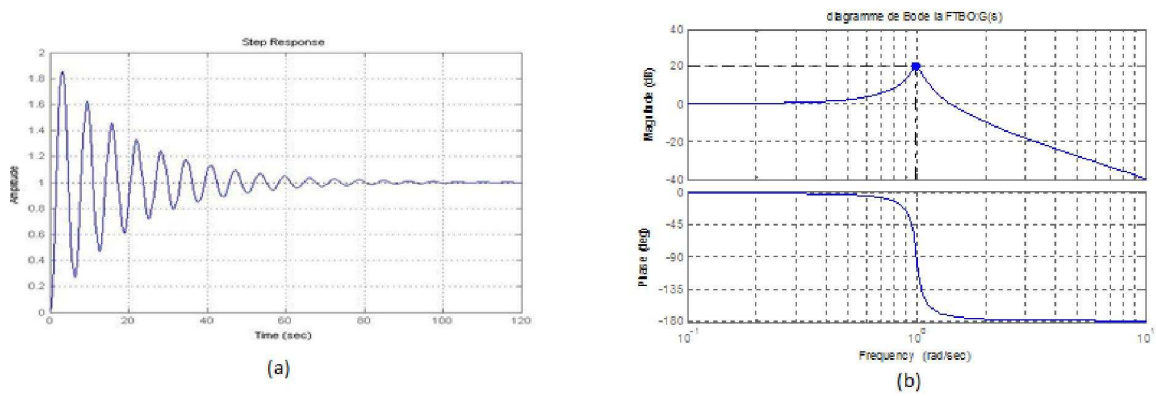


Fig. V.13–(a) Réponse indicielle du système en boucle ouverte et (b) Diagramme de Bode du transfert en boucle ouverte.

V. 5 Synthèse du contrôleur H_∞

Le processus à asservir est présenté schématiquement par la figure ci-dessous:

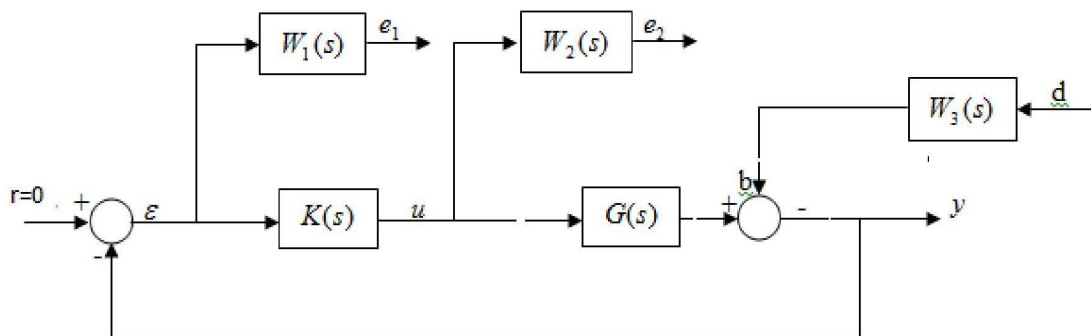


Fig. V .6 : Mise en place des fonctions pondérations

Les objectifs du contrôle sont illustrés sur le schéma d’asservissement ci-dessous. Afin de satisfaire les prescriptions de la commande, nous avons fixé les pondérations comme suit:

$$W1 = \frac{490s+3999}{700s+5.713} ; W2 = \frac{71.41s+560}{0.7141s+800} ; W3 = 0.26$$

Le contrôleur H_∞ calculé sous Matlab est donné par sa fonction de transfert :

$$K_{H_\infty} = \frac{0.04045 s^3 + 45.41 s^2 + 4.581 s + 45.41}{s^3 + 11.25 s^2 + 32.5 s + 0.2645}$$

V.6 simulation du système avec la présence de contrôleur

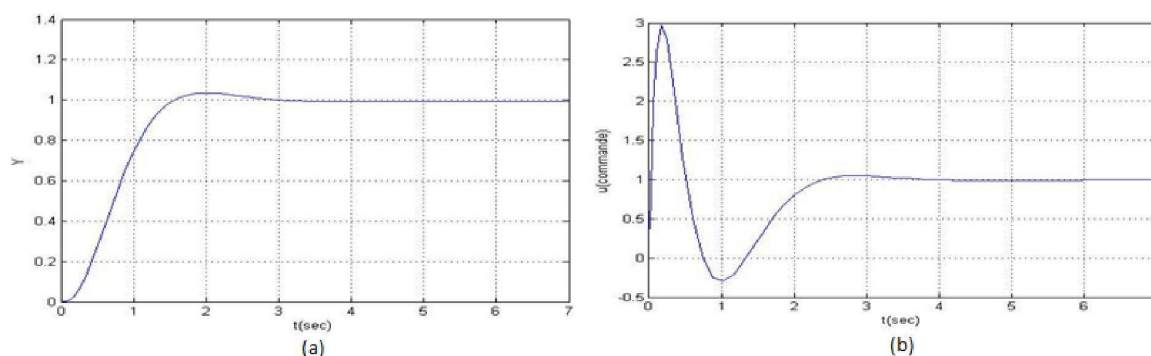
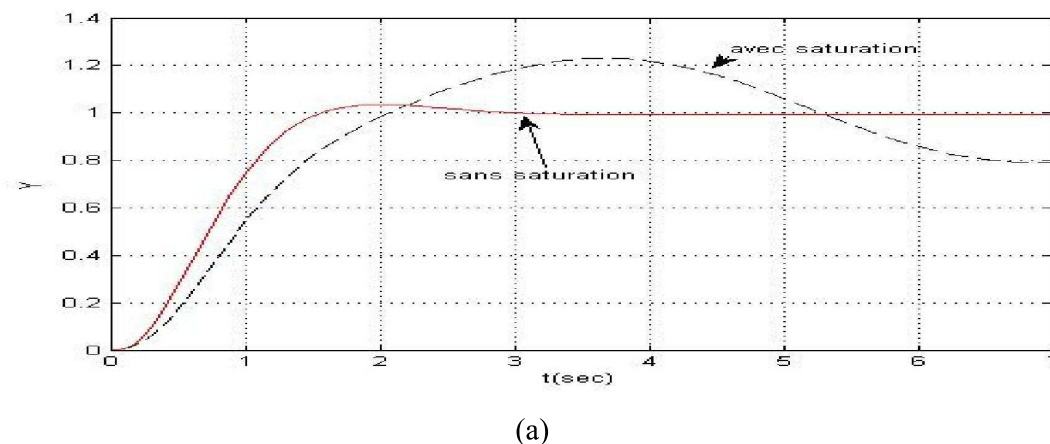


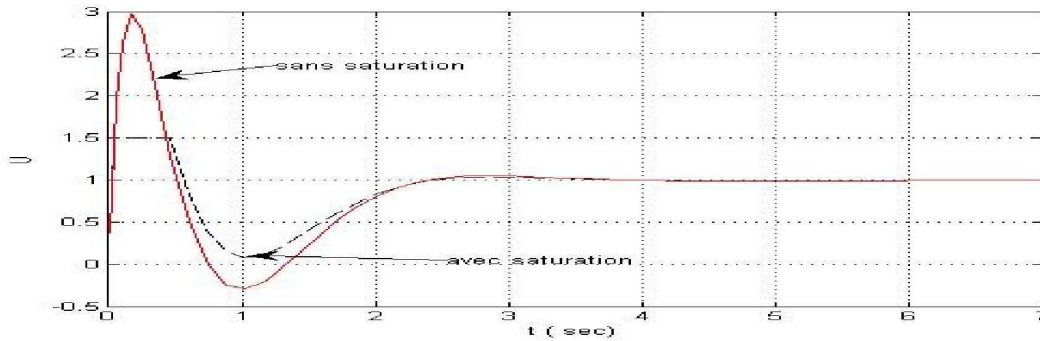
Fig. V.14 (a) la commande gènère par le controleur H_{∞} -(b) réponse à un échelon de consigne avec le régulateur H_{∞}

-La figure V.14représente la réponse indicielle de la sortie soumise à un échelon de référence de 1. La valeur finale de la sortie est égal à $(t = \infty) = 1$. Ceci montre que les objectif1 et 2 sont respectés.

V. 7 Simulation du système avec saturation de la commande

Nous imposons une saturation de la commande à un niveau égal à 1.5. Nous constatons que la saturation dégrade la réponse puisque le temps mis pour atteindre son régime permanent est excessif avec aussi un dépassement comme le montre la figure V.15 (a)ci dessous. La figure V. 15 (b) donne les signaux de commande en absence et en présence de la saturation. Une saturation plus forte aurait créé des oscillations plus importantes sur la réponse et aurait conduit le système à la limite de l'instabilité.





(b)

Fig. V.15(b) La commande avec saturation (ligne pointillée) -(a) réponse à un échelon de consigne avec saturation (ligne pointillée)

V.8 Simulation du modèle avec la présence de contrôleur avec l'anti-windup

Nous insérons, à présent, la compensation anti-windup. L'ensemble contrôleur, modèle de la structure et actionneur peut être représenté dans ce cas par la figure ci-dessous :

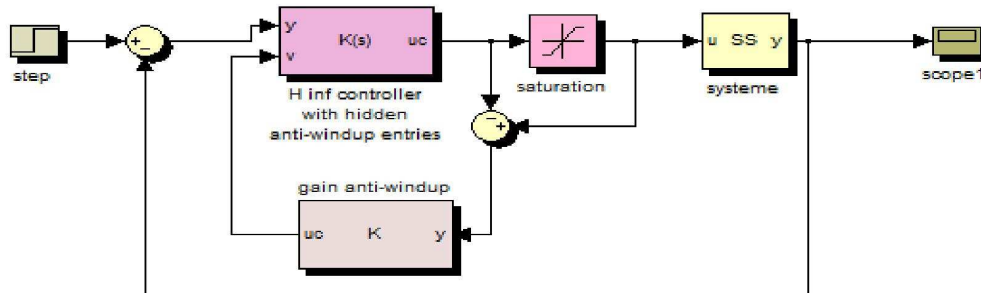
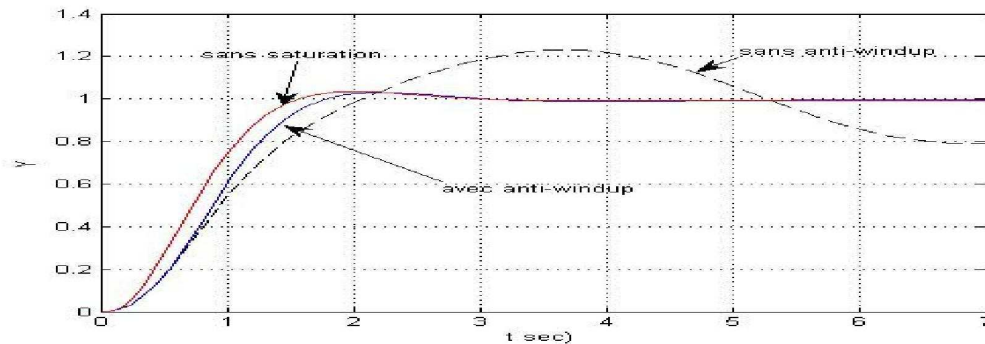


Fig. V.16 : Schéma de principe d'un système de contrôle modèle de la structure et actionneur plus le gain anti-windup (K)

Le système en boucle ouverte est stable mais très oscillant. Nous proposons de déterminer le compensateur anti-windup qui maximise le bassin d'attraction du système saturé en boucle fermée afin d'assurer la stabilité locale. Nous utilisons la technique DLAW en se limitant à une compensation statique ($A_{aw} = B_{aw} = C_{aw} = 0$) et en considérant que la sortie anti-windup est injectée seulement dans la dynamique du correcteur x_c . Le gain de l'anti-windup $D_{aw} = [E_{aw} \ 0]$ est alors déterminé selon l'algorithme IV.1. Nous obtenons :

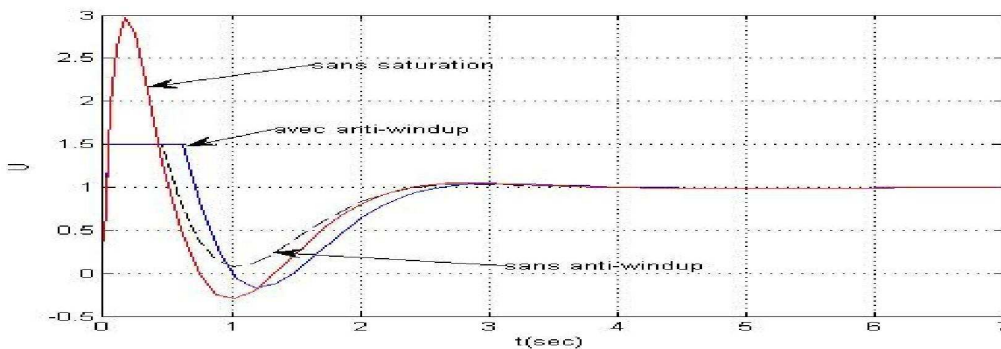
$$E_{aw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.428 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation du système corrigé muni de la compensation d'anti-windup sont donnés par les figures ci-dessous. L'effet de la compensation de l'anti-windup est tout à fait visible sur la réponse du système en boucle fermée donnée par la figure V. 17 (a). Nous obtenons une stabilisation rapide avec un dépassement négligeable et un écart statique quasi-nul. La figure V. 18 (b) donne les signaux de commande en présence et en absence de l'anti-windup. Nous remarquons que la commande compensée satisfait la saturation et ne possède pas de valeurs négatives. Nous concluons à travers cet exemple, l'effet bénéfique de l'anti-windup qui permet de rattraper les dégradations causées par la saturation de l'actionneur.



(a)

Fig. V.17 (a) L'influence de l'action anti-windup sur l'évolution temporelle de la sortie du système y .



(b)

Fig. V.17(b) la commande avec anti-windup (ligne bleu) - (a) réponse à un échelon de consigne avec anti-windup (ligne bleu)

V.9 Conclusion

La technique de la commande H_∞ est une commande reconnue robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation. Elle offre aussi l'avantage de résoudre dans un formalisme général des problèmes de commande complexes avec des objectifs aussi variés que possible tels que la stabilisation, le suivi de consigne, la robustesse, l'atténuation de l'influence des signaux exogènes perturbateurs (bruits, perturbations) sur les signaux à réguler et aussi la minimisation de l'effort de commande. Dans ce chapitre, nous avons essayé de mettre à l'épreuve cette technique de commande à des contraintes de saturations des actionneurs. D'après les résultats que nous avons obtenus sur les deux exemples (poutre et système masse ressort), il ressort que cette technique de commande reste fragile par rapport à ces saturations. Elle nécessite comme d'autres commandes une compensation avec l'anti-windup. La stratégie de la compensation de l'anti-windup n'a pas pu être mise en œuvre dans le cas de la poutre en raison de la violation des conditions de faisabilité des inégalités matricielles nécessaires à la synthèse du gain statique de compensation par le système muni du correcteur H infini. Néanmoins, nous avons essayé d'illustrer cette stratégie sur un exemple académique de contrôle actif de vibration constitué d'une masse et d'un ressort. Nous avons montré sur cet exemple l'effet bénéfique de la compensation anti-windup. Les performances obtenues après la compensation sont satisfaisantes.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons traité le problème de commande H_∞ d'un système mécanique flexible en présence de saturation de la commande délivrée par l'actionneur. L'objectif est de tester les performances de la commande H_∞ soumis aux saturations.

Dans une première partie, nous avons étudié les systèmes mécanique flexibles sur les principe de modélisation et de commande nous avons pris comme exemple une poutre avec des vibration vertical, en étudiant les actionneur et les capteur piézoélectriques nécessaire a la commande de tels système.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes intéressés à la synthèse de lois d'commande robuste de type H_∞ , et sa résolution par des équations de riccati a été choisie.

En troisième partie, nous avons traité le problème de la saturation et des techniques de compensation par l'anti-windup. Notre étude est limitée à la compensation par un gain statique.

En dernière partie, nous avons illustrée dans un premier temps sur l'exemple de la poutre la commande H_∞ sans est avec la saturation de la commande. Nous avons remarqué que la commande H_∞ est très fragile par rapport aux saturations .en effet, même si cette commande est reconnu robuste, la saturation de la commande peut conduire le système en boucle fermée à une instabilité.

Sur cet exemple de la poutre, nous n'avons pas pu mettre en œuvre la compensation anti-windup au le système muni du correcteur ne satisfait pas les conditions d'existence d'une solution .une compensation dynamique s'avère nécessaire afin d'illustre la compensation anti-windup par un gain statique, nous avons traité un second exemple qui consiste sur un système de contrôle actif de vibration. Sur cet exemple nous avons pu illustre l'effet avantageux de la compensation anti-windup qui permet d'obtenir des performances statique et dynamique acceptable en présence de saturation sur la commande.

Les perspectives de notre travail sont :

1-sur le plan théorique

Il serait souhaitable de traiter le problème de l'effet de la saturation sur la commande H_∞ et d'étudier l'interaction entre la saturation et le choix des gabarits sur la fonction KS ($j\omega$).

2-sur le plan expérimental

L'acquisition d'un banc d'essai de commande de vibration d'une poutre permettre de valider les techniques de commande développées et aussi de soulever d'autre problème technologique non pris en compte à travers la théorie utilisée.

Bibliographie

- [1] M.Thomas ,F.Laville « Simulation des vibration mécanique par MATLAB ,Simulink et ansys ». Université du Québec école de technologie supérieure, Edition PADIE 2007.
- [2] H.Madjid «contrôle actif robuste d'une structure mécanique flexible » «. Thèse de magister, Université UMMO. T.O. 2009.
- [3] D.Beuvois .commande des systèmes Multi variables .Approche Fréquentielle. Polycopié ESE.
- [4] francoisAxisa . Modélisation des systèmes mécanique 2, système continu éditions Hermès sciences.
- [5] mohamed MALHIS .control actif modal flou des rotors flexible par plan d'actionPiézoélectrique il a présentée devant l'institut national des sciences appliquées de lyon.
- [6] BèatriceMadelaine,Détermination d'un Modèle Dynamique Pertinent Pour la commande : de la Réductionna la construction, présentée en vue de l'obtention du titre de docteur de l'ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace spécialité :automatique et dynamique ,soutenue le 8 décembre 1998.
- [7] W. Tan, H. J. Marquez, T. Chen, R. K. Gooden « Control Design for an Industrial Boiler», Proceedings of the American Control Conference Arlington, VA June 25-27, 2001.
- [8] J.Hwa lee « A State Space Approach to h-infinity control of state delayed systems» Proceedings of SL winter workshop, feb, 13 – 15 ,1989.
- [9] H. Kwakernaak « Robust Control And H_{∞} -Optimisation ». Automatica, vol.29, No.2, PP.255-273, 1993.
- [10] G. Puyou. «Conception Multi-objectifs de Lois de Pilotage pour un Avion de Transport Civil». Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale Supérieure de l'aéronautique et de L'Espace,ONERA, 2005.
- [11] F. Abdulgalil «Commande linéaire dans les systèmes de forage pétrolier : contribution à la suppression du phénomène de « STICK-SLIP » «.Thèse de doctorat, Université Paris XI.Orsay. 2006.
- [12] J.DCuyper, J. Swevers, M. Verhaegen et P.Sas «Feedback Control for Signal Tracking on a 4 Poster Test Rig in the Automotive Industry». LMS International, Interleuvenlaan 68, Leuven, Belgium 2001.
- [13] S.Gumussoy, D.Henrion et M.Millstone «Multiobjective Robust Control with H_{∞} »,Katholieke Universities Leuven .Department of Computer Science, Belgium, 2001.

-
- [14] H. Kwakernaak « Robust Control And H_∞ -Optimisation ». Automatica, vol.29, No.2, PP.255-273, 1993.
- [15] A. Kruczek et A. Stribrsky « H_∞ Control of Automotive Active Suspension With Linear Motor ». CTU, Faculty of Electrical Engineering. Department of Control Engineering Karlovo náměstí 13, 121 35 Praha 2000.
- [16] G. Duc et S. Font « Commande H_∞ et μ -Analyse ». Editions HERMES, Paris, 1999
- [17] G. Duc « Panorama des principales approches relevant du « cadre H_∞ » ». Traitement du Signal – Volume 15 - n°6, 1998.
- [18] M. Zerenet H. Özbay « On the Strong Stabilization And Stable H_∞ Controller Design Problems for MIMO systems ». Automatica 36 pp 1675-1684, 2000.
- [19] S. Font « Méthodologie pour Prendre en Compte la Robustesse des Systèmes Asservis: Optimisation H_∞ et Approche Symbolique de la Forme Standard ». Thèse de doctorat, Université Paris XI. Orsay. 1995.
- [20] G. Scorletti, V. Fromion. « Introduction à la Commande Multivariable des Systèmes : Méthode de Synthèse Fréquentielle H_∞ ». Thèse de Doctorat, université Caen, Basse Normandie, 2007.
- [21] L. Mianzo et H. Peng « LQ and H Preview Control for a Durability Simulator », University of Michigan. 1997.
- [22] S. Gumussoy, D. Henrion et M. Millstone « Multiobjective Robust Control with H_∞ », Katholieke Universiteit Leuven .Department of Computer Science, Belgium, 2001.
- [23] J. Hwa lee « A State Space Approach to h-infinity control of state delayed systems » Proceedings of SL winter workshop, feb, 13 – 15, 1989.
- [24] F. Demourant « Interaction Identification-Commande Robuste: Méthode et Application à l'Avion Souple ». Thèse de doctorat, Ecole Nationale supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. 2002. ONERA.
- [25] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, G. Ferreres « Robustesse et commande optimale », Edition Cépadués 1999.
- [26] équipe d'accueil SUPAERO-ONERA CSDV (ONERA-DCSD, centre de Toulouse) « Contribution à la commande des systèmes saturés en présence d'incertitudes et de variations paramétriques. Application au pilotage de l'avion au sol ». Thèse de doctorat, DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE.
- [27] H.K. Khalil .Nonlinear systems .Mac Millan, 1992.

-
-
- [28] J.J.E Slotine and W. Li. Applied nonlinear control. Prentice Hall, 1991.
- [29] M. Vidyasagar. Nonlinear systems analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, second edition, 1992.
- [30] J.M.G.D. Silva jr «sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes ». Thèse de doctorat, préparée au laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes du CNRS, 1997.
- [31] A.M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 5(3): 531-773, 1992.
- [32] R. Suarez, J. Alvarez-Ramirez, and J. Alvarez. linear systems with single saturated input : stability analysis. in proc. of 30th IEEE conference on decision and control (CDC'91), pages 223-118, Brighton, U.K., 1991.
- [33] L. Vandenberghe, S. Boyd et S.P. Wu. Determinant maximization with Linear Matrix Inequality constraints. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 29(2): 499-533, 1998
- [34] T. Hu, Z. Lin et B.M. Chen. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. Automatica, 38(2): 351-359
- [35] J.M. Gomes da Silva Jr et S. Tarbouriech. Anti-windup design with guaranteed regions of stability : an LMI-based approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(1): 106-111, 2005.
- [36] Clément Roos. Le 5 décembre 2007, DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE sur (Contribution à la commande des systèmes saturés en présence d'incertitudes et de variations paramétriques. Application au pilotage de l'avion au sol).
- [37] J.M. Gomes da Silva Jr et S. Tarbouriech. I. Queinnec sur (stability and stabilization of linear systems with saturating actuators), edition Springer.
- [38] Isabelle Queinnec, Sophie Tarbouriech. «SATAW-Tool: a SATuration AWare matlab Toolbox ». March 25, 2013.

Annexe A

Définitions et Résultats Techniques

Définitions et Résultats Techniques

L'objectif de cette annexe est de regrouper les définitions et les résultats techniques utiles à la compréhension du manuscrit. Le parti pris consiste à se concentrer sur l'essentiel puis à proposer quelques références pour les lecteurs désireux d'en savoir plus.

Transformations Fractionnaires Linéaires (LFT)

LFT supérieure et inférieure

On distingue deux transformations fractionnaires linéaires qui correspondent aux deux interconnexions représentées sur la figure A.1.

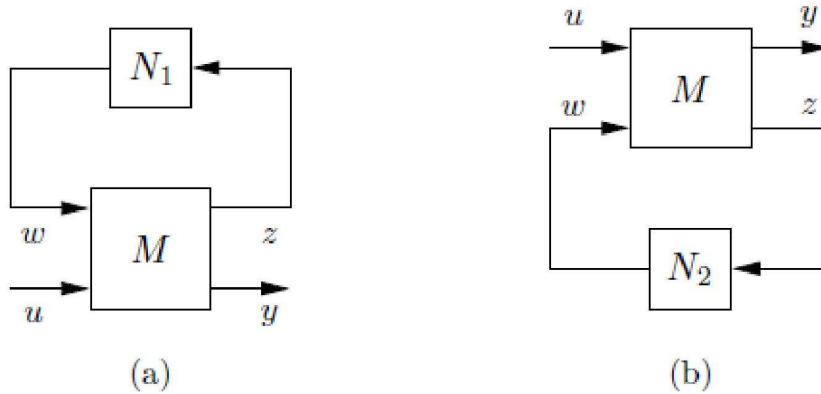


Figure A.1 LFT supérieure (a) et inférieure (b).

Elles sont définies formellement de la manière suivante :

Définition A.1 (LFT) : Soient $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$, $N_1 \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ et $N_2 \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$.

- Si la matrice $(I - M_{11}N_1)^{-1}$ existe, la LFT supérieure est la fonction f_u définie par :

$$f_u(M, N_1) = M_{22} + M_{21}N_1(I - M_{11}N_1)^{-1}M_{12} \quad (\text{A.1})$$

- Si la matrice $(I - M_{22}N_2)^{-1}$ existe, la LFT inférieure est la fonction f_l définie par :

$$f_l(M, N_2) = M_{11} + M_{12}N_2(I - M_{22}N_2)^{-1}M_{21} \quad (\text{A.2})$$

Produit de Redheffer

Le produit de Redheffer est associé à l'interconnexion représentée sur la figure A.2.

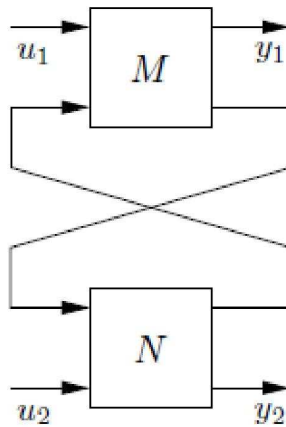


Figure A.2 Produit de Redheffer.

Il est défini formellement de la manière suivante :

Définition A.2 (produit de Redheffer) : Soient $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$, $N_1 = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^{q_1 \times p_1}$ et $N_2 \in \mathcal{C}^{q_2 \times p_2}$.

- Si les matrices $(I - M_{11}N_1)^{-1}$ et $(I - M_{22}N_2)^{-1}$ existent, le produit de Redheffer est la fonction R définie par :

$$R(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)} \times \mathcal{C}^{(q_2+q_3) \times (p_2+p_3)} \rightarrow \mathcal{C}^{(p_1+q_3) \times (q_1+p_3)}$$

$$R(M, N) = \begin{bmatrix} f_l(M, N_{11}) & M_{12}(I - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \\ N_{21}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} & f_u(N, M_{22}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)

Quelques éléments historiques

L'origine des LMI remonte à la fin du 19^{ème} siècle, lorsque Lyapunov publie ses travaux sur la stabilité des systèmes. Il montre en particulier qu'un système régi par l'équation différentielle $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que $A^T P + P A < 0$, et que cette inégalité peut être résolue analytiquement. Lur'e et Postnikov sont les premiers dans les années 1940 à appliquer cette théorie à des problèmes pratiques dans le domaine de l'automatique. Ils proposent un critère de stabilité qui se présente sous forme de LMI et permet notamment d'étudier des systèmes dont l'actionneur présente une non-linéarité. Les inégalités obtenues sont résolues à la main, ce qui limite leur utilisation à des systèmes de petite taille.

Néanmoins, leurs travaux montrent que la théorie de Lyapunov a un brillant avenir devant elle . Des avancées significatives sont alors réalisées dans les années 1960, notamment sous l'impulsion de Yakubovich :

- le lemme positif réel, ou lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, conduit à des techniques graphiques de résolution pour des systèmes présentant une seule non-linéarité (critères du cercle, de Popov, de Tsypkin),
- le problème LMI associé à ce même lemme est résolu quelques années plus tard à partir des solutions symétriques d'une équation de Riccati algébrique.

Ces travaux permettent peu à peu de considérer des problèmes de taille plus importante, mais ils ne sont généralement applicables qu'à des familles particulières de LMI. C'est finalement au début des années 1980 que l'on prend conscience qu'il est possible de résoudre des LMI de forme beaucoup plus générale par des techniques d'optimisation convexe. Le développement de méthodes de points intérieurs très efficaces et l'augmentation constante de la puissance des calculateurs ont motivé la reformulation de nombreux problèmes sous forme d'inégalités matricielles linéaires, qui représentent aujourd'hui l'un des outils privilégiés de l'automaticien .

Définition formelle et formulation pratique

Définition A.3 (inégalité matricielle linéaire) On appelle inégalité matricielle linéaire toute équation du type:

$$F(z) > 0 \tag{A.4}$$

Où $F: V \rightarrow S^N$ représente une fonction affine définie sur un espace vectoriel V et à valeurs dans l'ensemble $S^N = \{M \in R^{N \times N}: M = M^T\}$.

Remarque A.4 L'inégalité $F(z) > 0$ signifie que la matrice symétrique $F(z)$ est définie positive, i.e. $u^T F(z) u > 0$ pour tout $u \in R^N - \{0\}$. De manière équivalente, la plus petite valeur propre de $F(z)$ est positive.

Remarque A.5 Un ensemble de LMI peut être traité comme une seule LMI structurée.

Les deux assertions ci-dessous sont en effet équivalentes :

1. $F_i(z) > 0$ pour tout $i \in [1, m]$
2. $diag(F_1(z), \dots, F_m(z)) > 0$

Remarque A.6 En pratique, les variables de décision z sont généralement stockées sous forme matricielle. Il existe alors deux scalaires p et q tels que $V = R^{p \times q}$.

Problèmes génériques et méthodes de résolution

Soient $F, G: V \rightarrow S^{N_1}$ et $H: V \rightarrow S^{N_2}$ des fonctions affines. Soit $f: s \rightarrow R$ une fonction convexe, où $s = \{z \in V: F(z) > 0\}$. Il existe trois problèmes génériques faisant intervenir des LMI :

- Le problème de faisabilité consiste à trouver une valeur de $z \in V$ telle que $F(z) > 0$. En pratique, on cherche généralement un vecteur z qui minimise le scalaire $t \in R$

sous la contrainte $-F(z) < tI_{N_1}$. Si la valeur minimale de t obtenue est négative, le problème est faisable.

- Le problème aux valeurs propres consiste à déterminer la valeur de $z \in V$ qui minimise $f(z)$ sous la contrainte $F(z) > 0$.
- Le problème aux valeurs propres généralisé consiste à minimiser le scalaire $\beta \in R$ sous les contraintes:

$$\begin{cases} \beta F(z) - G(z) > 0 \\ F(z) > 0 \\ H(z) > 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Remarque A.7 Dans tous les cas, les inégalités sont strictes. Ce n'est cependant pas restrictif, car toute LMI non stricte peut se ramener à une LMI stricte.

La plupart des problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans les domaines de la Commande, de l'identification ou du traitement du signal peuvent s'exprimer à l'aide d'inégalités matricielles linéaires sous l'une des trois formes ci-dessus. Par exemple, étudier la stabilité du système linéaire $\dot{x} = Ax$ avec $A \in R^{n \times n}$ revient à déterminer s'il existe une matrice $P \in S^n$ telle que $F(P) > 0$, avec $F(P) = \text{diag}(P - A^T P - P A) \in S^{2n}$. Il s'agit donc d'un problème de faisabilité.

Remarque A.8 Les trois problèmes énoncés ci-dessus sont convexes ou quasi-convexes, ce qui garantit l'existence d'un optimum global, mais ils ne sont en revanche pas différentiables. Il existe principalement deux familles de méthodes permettant de les résoudre :

- les méthodes des plans sécants, introduites dans le cadre de la programmation convexe au cours des années 1970, puis appliquées une quinzaine d'années plus tard dans le domaine de la commande robuste.
- les méthodes de points intérieurs, développées dans le cadre de la résolution de LMI par deux mathématiciens russes.

Elles permettent toutes les deux de calculer l'optimum global du problème en temps polynomial. Les méthodes de points intérieurs présentent cependant l'avantage d'être sensiblement plus rapides et de traiter efficacement des problèmes de taille relativement grande comportant quelques centaines voire milliers de variables. Elles sont d'ailleurs implantées dans la Robust Control Toolbox pour Matlab.

Complément de Schur

Le complément de Schur permet d'écrire sous forme de LMI certaines inégalités matricielles non-linéaires.

Lemme A.9 (complément de Schur) Soient $R \in R^{n \times n}, S \in R^{m \times m}$ des matrices symétriques et $M \in R^{n \times m}$ une matrice quelconque. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} 1. & \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & S \end{bmatrix} > 0 \\ 2. & \begin{cases} R > 0 \\ S - M^T R^{-1} M > 0 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} S > 0 \\ R - M S^{-1} M^T > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Annexe B

La méthode de troncature

1- Matrice des masses d'un élément de la poutre en flexion :

$$M_e = \begin{bmatrix} 0.0583 & 0.0822 & 0.0202 & -0.04886 \\ 0.0822 & 0.1495 & 0.0486 & -0.1121 \\ 0.0202 & 0.0486 & 0.0583 & -0.0822 \\ -0.0486 & -0.1121 & -0.0822 & 0.1495 \end{bmatrix}$$

2- Matrice des raideurs d'un élément de la poutre en flexion :

$$K_e = \begin{bmatrix} 42000 & 210000 & -42000 & 10000 \\ 210000 & 1400000 & -210000 & 700000 \\ -42000 & -210000 & 42000 & -210000 \\ 210000 & 700000 & -210000 & 1400000 \end{bmatrix}$$

3- Les systèmes réduit G_8 est donné par sa représentation d'état (A_8, B_8, C_8, D_8) tel que

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} & I_{8 \times 8} \\ A_{8 \times 12} & 0_{8 \times 8} \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A_{8 \times 12} = \begin{bmatrix} -789.00 & & & & & & & & & & & & \\ 0 & -7959.60 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -29997.67 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -33528.43 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -93181.83 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -209323.12 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -408812.04 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -726059.57 & & & & & \end{bmatrix}$$

$$B_T [0_{1 \times 20} \quad -387.97 \quad 1865.87 \quad -28907.89 \quad 12034.59 \quad 10809.33 \quad -15727.52 \quad 20581.79 \quad 24071.79]$$

$$C_T = 10^{-13} [-8.97 \quad 41.04 \quad -317.78 \quad 283.07 \quad 218.29 \quad -292.00 \quad 348.87 \quad 368.99 \quad 0_{1 \times 8}]$$

$$D_T = [0]$$

4- Le modèle initial, total ou de simulation est donné par sa représentation d'état (A_t, B_T, C_T, D_T)

$$A_T = \begin{bmatrix} 0_{20 \times 20} & I_{20 \times 20} \\ A_{T12} & 0_{20 \times 20} \end{bmatrix} \text{ Tel que :}$$

