

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la A Recherche Scientifique

Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou



Faculté De Génie Electrique Et D'informatique  
DEPARTEMENT D'AUTOMATIQUE

**Mémoire de Fin d'Etude  
de MASTER ACADEMIQUE**  
Spécialité : Commande des Systèmes

*Présenté par*  
**Yasmina Mamar**  
**Lynda Benzeba**

Mémoire dirigé par **Safia Yousfi**

Thème

**Application de la commande  $H_{\infty}$  non  
linéaire sur un modèle d'un pendule  
inversé**

*Mémoire soutenu publiquement le 27/09/2017 devant le jury composé de :*

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Président

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Rapporteur

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

**M Prénom NOM**

Grade, Lieu d'exercice, Examineur

# REMERCIEMENTS

Nous remercions en premier lieu DIEU le tout puissant qui nous a donné la bonne foi et le courage pour accomplir ce modeste travail ainsi que nos parents.

Nos sincères remerciements d'abord notre promotrice « S.Yousfi» qui a suivi l'évolution de notre projet, surtout, pour son aide précieux et orientation.

Nous tenons à remercier également les membres de jury pour avoir accepté de juger ce mémoire.

Nous adressons nos vifs remerciements, à nos amies et à tous ceux qui nous ont aidés et pour leurs encouragements, chacun de son nom.

L'aboutissement à la réalisation d'un travail est le fruit de toutes les années de formation, c'est donc à tous nos enseignants que nous voudrions d'abord exprimer nos respect et gratitude.

# Dédicaces

*On dédie ce modeste travail :*

A nos chers parents

A notre famille

A tous nos adorables amis

*Yasmine & Lynda*



<b>Introduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre I : Généralité sur la robustesse et les normes <math>H_2</math> et <math>H_\infty</math></b>	
Introduction .....	03
I. La robustesse et la commande robuste.....	03
I.1 Robustesse et commande robuste.....	03
I.2 Représentation des incertitudes .....	04
I.2.1 Incertitudes non structurées.....	04
I.2.2 Incertitudes structurées.....	06
I.3 La commande robuste.....	07
I.3.1 Type de robustesse.....	07
I.3.1.1 Robustesse en stabilité.....	07
I.3.1.2 Robustesse en performance.....	07
I.3.2 Les commandes de la robustesse.....	07
I.4 Commande $H_2$ et $H_\infty$ .....	09
I.4.1 Historique.....	09
I.4.2 L'asservissement multivariable .....	10
I.4.2.1 L'équations et fonctions caractéristiques.....	10
I.4.3 Notion de gain pour les systèmes multivariables.....	10
I.4.3.1 Problème de performance $H_2$ .....	11
I.4.3.2 Problème de performance $H_\infty$ .....	11
Conclusion.....	13

## **Chapitre II : la commande $H_\infty$ des systèmes linéaires**

Introduction.....	14
II.1 Problème $H_\infty$ standard.....	14
II.1.1.Introduction des fonctions de pondération .....	16
II.1.2.Choix des fonctions de pondérations.....	17
II.1.3.Problèmes de sensibilité mixte.....	18
II.2 Résolution du problème $H_\infty$ standard.....	19
II.2.1 Résolution du problème $H_\infty$ standard par équation de Riccati.....	19
II.2.2 $\gamma$ -itération (méthode de dichotomie).....	22

Conclusion.....	24
-----------------	----

### **Chapitre III : La commande $H_\infty$ des systèmes non linéaires**

Introduction.....	25
III.1 Notion de passivité et dissipativité.....	25
III.2 Problème de commande $H_\infty$ non linéaire.....	26
III.2.1 Formulation mathématique du problème.....	26
III.2.2 Objectif de la commande.....	27
III.3 Hypothèse d'existence de la commande $H_\infty$ non linéaire .....	28
III.4 Solution de problème $H_\infty$ des systèmes non linéaires .....	30
III.5 Résolution du problème de commande $H_\infty$ non linéaire via la méthode des approximations successive .....	31
conclusion.....	33

### **Chapitre IV : application de la commande $H_\infty$ non linéaire sur un model d'un pendule inversé**

Introduction .....	35
IV.1 Application de la commande $H_\infty$ sur un model de pendule inversé .....	35
IV.1.1 Application de la commande $H_\infty$ linéaire .....	35
IV.1.2 Application de la commande $H_\infty$ non linéaire .....	41
Conclusion .....	44
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>45</b>
<b>Annexe A .....</b>	<b>46</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>48</b>



# *NOTATIONS*

# Notations

---

## NOTATIONS

$s$  la variable de Laplace

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}$  Respectivement, ensemble des réels et ensemble des matrices de dimensions  $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

$\sigma_{max}$  Valeur singulière structurée maximale.

$\|G_2(s)\|_2$  Norme  $H_\infty$  d'une fonction de transfert  $G(s)$ .

$\|G_1(s)\|_\infty$  Norme  $H_2$  d'une fonction de transfert  $G(s)$ .

$I_p$  Matrice identité de dimension  $p$ .

$\rho(M)$  Rayon spectrale de  $M$ .

$S(s)$  Fonction de sensibilité en sortie.

$T(s)$  Fonction de sensibilité complémentaire en sortie.

$\underline{\Sigma}(s)$  Fonction de sensibilité complémentaire en entrée.

HJE Équation Hamilton-Jacobi.

$F_l(P, K)$  Transformation Linéaire Fractionnaire Inferieure.

$W(s)$  Filtre de pondération.

LPV Système Linéaire à paramètres variant.

LTI Système Linéaire invariant dans le temps.

SISO Système monovarié.

MIMO Système multivarié.

LMI Inégalité matricielle linéaire.

BMI Inégalité matricielle bilinéaire.

NLMI Inégalité matricielle non linéaire.

LFT Transformation Fractionnaire Linéaire inferieure.

# *INTRODUCTION GENERALE*

# Introduction générale

---

## **Introduction :**

La synthèse d'une loi de commande permettant de réaliser l'asservissement d'un processus passe par l'utilisation de modèles mathématiques.

Ce dernier n'est qu'une approximation de la réalité : il aura toujours des incertitude et des erreurs de modélisation, du fait que les phénomènes physiques ne peuvent être qu'imparfaitement traduits par des modèles mathématiques.

Sur la base d'un modèle imparfait, on va donc concevoir une loi de commande pour assurer la stabilité, marges de stabilité, performances dynamique, on utilisant en général un modèle plus précis que celui utilisé pour calculer la loi de commande.

Par ailleurs, puisqu'on travaille sur des modèles dont la validité limitée, il faudra se préoccuper de la robustesse de la loi de commande obtenu, c'est-à-dire être capable de maintenir les performances de système (stabilité, temps de réponse, précision, rapidité...) malgré le changement dans les conditions d'utilisation ou la présence d'incertitudes liées a ces paramètres ou à ces composants.

D'une manière générale, la robustesse d'une commande peut être définie comme une qualité qui d'écrit l'invariance ou la résistance du comportement d'un système asservi à un certain nombre de phénomènes interne ou externe.

Les méthodes classiques comme PI (proportionnelle intégrale), PID (proportionnelle intégrale dérivé), de la commande robuste ont prouvé leur efficacité dans de nombreux problèmes de régulation ou de poursuite pour les systèmes linéaires mais lorsque le système entaché à : des incertitudes, des perturbations ou des exigences sur les performances, dans ce cas, la commande robuste classique devient insuffisante pour répondre aux performances exigées.

Pour surmonter ces obstacles, l'utilisation des méthodes de commande avancées comme (La méthode de synthèse QFT (Quantative Feedback Theory), la commande prédictive, la méthode de synthèses multi-objectives, la commande  $H_\infty$ ) est nécessaire.

Dans le cadre de notre travail, on s'intéressera particulièrement à la dernière commande c'est-à-dire à la commande  $H_\infty$  car elle présente une solution plus performante aux problèmes cités auparavant.

Donc, Le défi majeur de notre travail de recherche est de concevoir une loi de commande plus performante au niveau de la poursuite de trajectoires, le rejet de perturbations, la stabilité, et la robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

# Introduction générale

---

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur la technique de commande robuste  $H_\infty$  appliquée sur un modèle d'un pendule inversé.

Le but est la mise en œuvre d'une loi de commande robuste de modèle cité précédemment, avec comme objectif : assurer la stabilité robuste face aux incertitudes paramétriques, perturbations tout en essayant d'améliorer la dynamique du système.

Ce mémoire est donc organisé en quatre parties de la façon suivante :

Le premier chapitre est partagé en deux parties, la première est consacrée à l'étude de la commande robuste, en terme d'acquisition des outils de base, la représentation des incertitudes (structurées et non structurées) et les quatre axes de robustesse (voir stabilité et performances nominale et stabilité et performances robuste). La deuxième partie est basée sur l'étude de la notion de la norme  $H_\infty$  et  $H_2$  .

Le deuxième chapitre consiste à présenter la théorie de la commande  $H_\infty$  des systèmes linéaires, voir le problème  $H_\infty$  standard et sa résolution par la méthode basée sur les équations de Riccati.

Le troisième chapitre consiste à présenter la théorie de la commande  $H_\infty$  des systèmes non linéaires, voir le problème  $H_\infty$  non linéaire et sa résolution par la méthode des approximations successives.

Le dernier chapitre présente l'application de la commande  $H_\infty$  linéaire et non linéaire sur un modèle d'un pendule inversé.

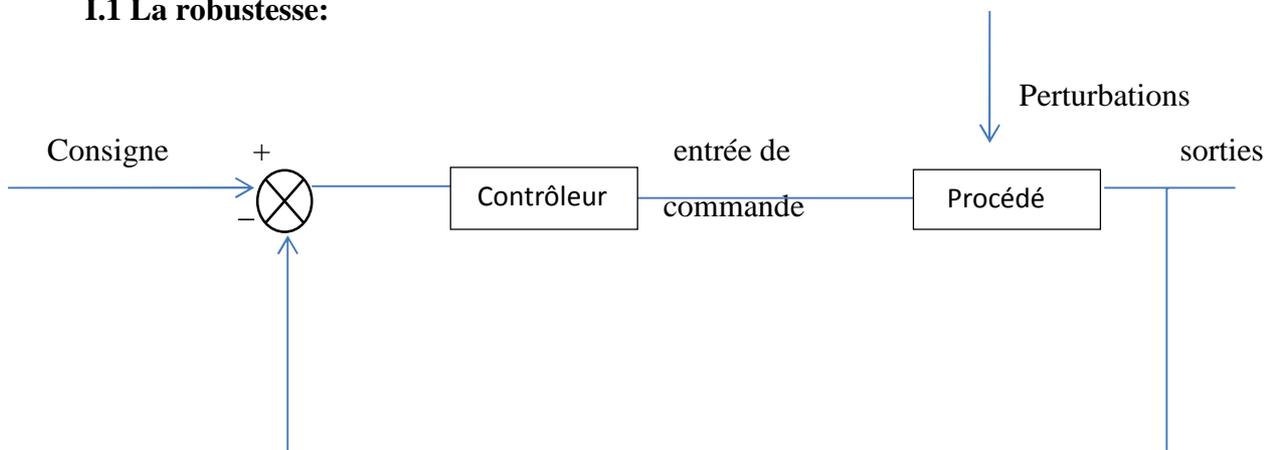
On termine notre travail par une conclusion générale sur l'étude menée.

# *CHAPITRE I*

## *GENERALITE SUR LA COMMANDE ROBUSTE ET LES NORMES $H_2$ ET $H_\infty$*

**Introduction :**

En tenant compte du fait qu'il est impossible de représenter parfaitement un procédé physique par un modèle, il est légitime de se demander si le correcteur, calculé sur la base de ce même modèle, est apte à effectuer convenablement sa tâche une fois associée au procédé réel : d'où la notion de **la robustesse**, qui signifie l'insensibilité des performances vis-à-vis des incertitudes de procédé à commander. La commande robuste répond à cette problématique, et particulièrement, la commande  $H_\infty$  qui fera l'objet de notre travail.

**I. La robustesse et la commande robuste****I.1 La robustesse:****Figure I.1** Schéma d'asservissement

L'asservissement consiste à concevoir un contrôleur de telle manière que la sortie atteigne les objectifs fixés. La conception de cet asservissement s'effectue à partir d'un modèle mathématique qui est une représentation (abstraite) mathématique du procédé.

L'obtention d'un modèle peut se faire de deux manières:

- la première (white box) consiste à décrire le comportement du procédé par des équations physiques régissant les phénomènes de ce procédé, ceci conduit à un modèle de connaissance.
- le second (black box) consiste à associer au procédé une structure mathématique et puis de déterminer les paramètres de cette structure par des techniques d'identification afin que le comportement de la structure soit le plus proche possible de celui du procédé pour les excitations considérées.

Dans les deux cas, le modèle obtenu reste toujours imparfait à cause des incertitudes.

Les sources de ces incertitudes sont : les approximations numériques les erreurs d'identification des paramètres, les diverses hypothèses de linéarisation, la réduction du modèle, les dynamiques négligées et les erreurs de mesure...

Toute les incertitudes sont regroupées dans une fonction  $\Delta$  qui est soit paramétrique (nommées **Incertitudes structurées**), soit non paramétrique (appelé **Incertitudes non structurées**). Dans le premier cas, l'incertitude, le plus souvent réel, modélise la méconnaissance des valeurs numériques du modèle. Dans le second cas, l'incertitude ne vient pas des paramètres du système mais des dynamiques négligées ou des effets de la linéarisation.

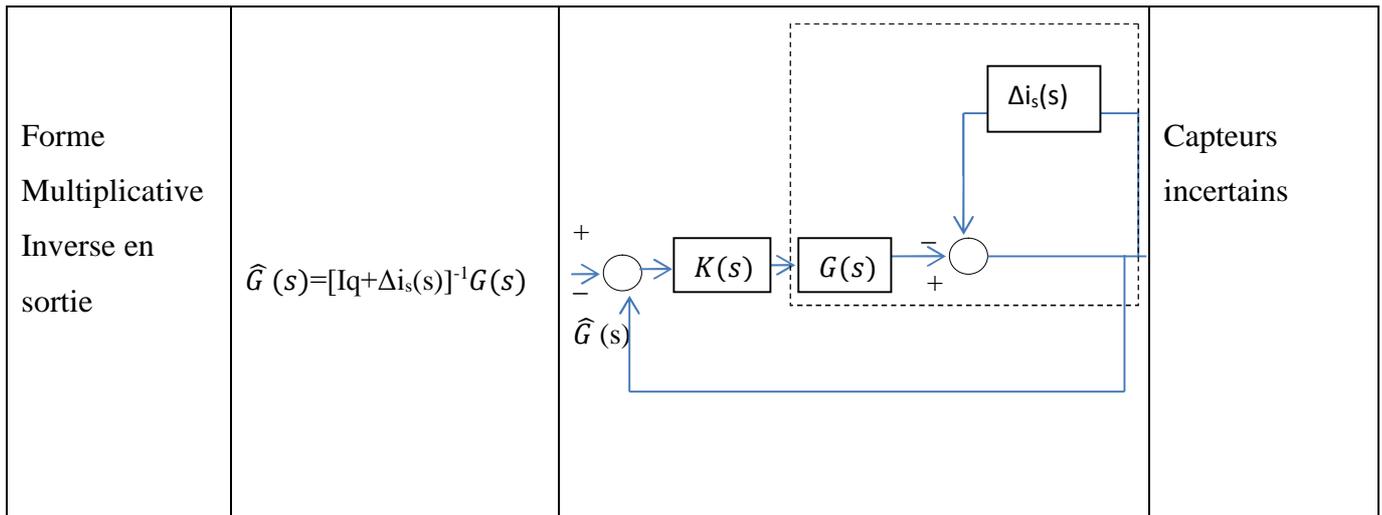
**I.2 Représentation des incertitudes :**

**I.2.1 Incertitudes non structurées :** dans ce cas l'erreur est caractérisée globalement par une matrice de transfert, sans préjuger de la façon dont les différentes sources d'erreurs interviennent dans le modèle. Cette incertitude peut être représentée sous différentes formes à partir de la matrice de transfert du modèle nominal.

La représentation des incertitudes non structurées reflète notre connaissance des phénomènes physiques qui les causent et notre capacité à les représenter sous forme simple et facile à manipuler. Le tableau suivant regroupe les incertitudes les plus courantes

Type	Système Réel	Structure	Nature de L'erreur
Forme additive	$\widehat{G}(s) = G(s) + \Delta a(s)$		Incertitude paramétrique

<p>Forme Multiplicative Directe en Entrée</p>	$\widehat{G}(s) = G(s) + G(s)\Delta e(s)$ $= G(s)[I_p + \Delta e(s)]$		<p>Actionneurs Incertains</p>
<p>Forme Multiplicative Directe en sortie</p>	$\widehat{G}(s) = G(s) + \Delta s(s)G(s)$ $= [I_q + \Delta s(s)]G(s)$		<p>Capteurs incertains</p>
<p>Forme Multiplicative inverse en entrée</p>	$\widehat{G}(s) = G(s)[I_p + \Delta i_e(s)]^{-1}$		<p>Actionneurs incertains</p>



**Tableau I.1 :** Différent types d’incertitudes non structurées.

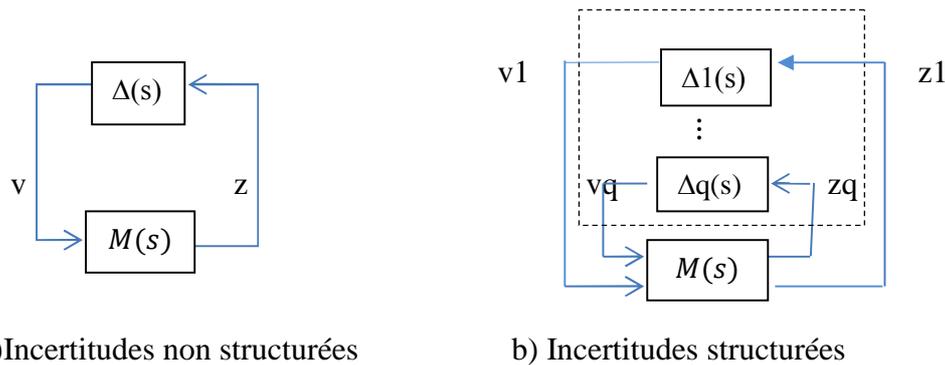
Nous considérons  $G(s)$  comme la fonction de transfert du système nominal et  $K(s)$  celle du correcteur.  $\Delta$  représente les incertitudes, et  $\widehat{G}(s)$  représente la fonction de transfert du système réel incertain.

**I.2.2 Incertitudes structurées :**

Contrairement aux incertitudes non structurées, confinées toutes dans un seul bloc, les incertitudes structurées permettent de tenir compte de chaque type d’incertitudes, paramétrique ou autre, aux différents points de notre système.

Le schéma général des incertitudes structurées représente un cas particulier du schéma général des incertitudes non structurées, dans lequel la matrice traduisant les incertitudes à une structure bloc diagonal.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta q \end{bmatrix} \tag{I.1}$$



a) Incertitudes non structurées

b) Incertitudes structurées

**Figure I.2** représentation des incertitudes

Avec le système réel, il n'y a pas question des objectifs nominaux, mais des objectifs robustes. D'où la nécessité de la commande robuste :

### I.3 La commande robuste :

La commande robuste est un type de commande qui sert à garantir les performances et la stabilité d'un système face à des perturbations du milieu et les incertitudes du modèle. En effet, le modèle mathématique qui modélise un système réel est une représentation qui consiste à approximer au mieux, avec des hypothèses simplification, le système qu'on veut commander.

Il existe donc un écart entre le comportement observé du système réel et son modèle interne. La commande robuste vise à déterminer une loi de commande qui soit capable de garantir des performances nominales. Par la même approche, on peut rendre le système robuste face aux perturbations extérieures (par exemple, une rafale de vent sur un avion de ligne) qui en somme, peuvent être considérées comme une modification du modèle interne.

#### I.3.1 Type de robustesse :

##### I.3.1.1 robustesse en stabilité :

Un système est robuste en stabilité s'il demeure stable en présence d'incertitudes (structuré et non structurées) comme les erreurs de modélisation. La stabilité d'un système linéaire ne dépend pas des signaux exogènes, elle dépend des éléments de la structure du système.

### I.3.1.2 robustesse en performances :

Un système est robuste en performances si ses performances sont conservées malgré les des perturbations, telles que les incertitudes structurées et non structurées ; les performances peuvent se mesurer en terme de temps de réponse du système, d'amortissements des modes, de découplage perturbation....

### I.3.2 Les commandes robustes :

Les méthodes de synthèse de commande robuste les plus connues sont :

- La méthode de synthèse QFT (Quantative Feedback Theory) : initialement développé par le professeur **Isaac Horowitz** dans les années 1970, elle permet de prendre en compte l'incertitude portant sur le procédé par des domaines d'incertitudes fréquentiels, et construit pour un ensemble de fréquences sur le diagramme de black-nicols. Cette modélisation totalement structurée de l'incertitude permet d'obtenir des commandes à la fois robustes et aussi perforantes que possible.
- La commande prédictive, quant à elle ,fait intervenir deux blocs de calcul : le **prédicteur**, dont la structure est déterminer à partir du model du système à commander, il effectue le calcul de la prédiction de la sortie sur un horizon de prédiction, et l'**optimisateur** qui détermine la commande de façon à optimiser un critère de performance tout en tenant compte des contraintes sur les signaux d'entrée/sortie. Le principe de la commande prédictive robuste (RMPC) consiste à prendre en compte les incertitudes du modèle au niveau de synthèse de la loi commande, et ensuite introduit sous la forme d'un problème d'optimisation min-max, visant à minimiser par rapport à la commande, le maximum du critère vis-à-vis de l'ensemble des modèles compatible.
- La méthode de synthèses multi-objectives qui permet de prendre en compte plusieurs critères de synthèse (de types  $H_\infty$  et  $H_2$ ) sans introduire de couplage artificiel entre les contraintes ; ceci est possible grâce aux propriétés de la paramétrisation de Youla et l'utilisation de changement de variable numériquement bien posé. Ces propriétés permettant de considérer les objectifs indépendamment les uns des autres en utilisant des fonctions de Lyapunov déférentes pour chaque critère.
- La commande  $H_\infty$  qui est une commande optimale. Il s'agit essentiellement d'une méthode d'optimisation, qui prend en compte une définition mathématique des restrictions du comportement attendu en boucle fermé. La commande  $H_\infty$  a pour principale avantage la capacité d'inclure dans un même effort de synthétisation, les concepts liés à la

commande classique et à la commande robuste. Le mot "optimal" est utilisé dans son sens strictement mathématique car la commande  $H_\infty$  minimisera l'effet des entrées/sorties du système. Le "infini" dans  $H$  infini signifie que ce type de commande est conçu pour imposer des restrictions de type minimax (minimiser la perte maximale possible) dans le domaine fréquentiel.

Parmi les commandes citées plus haut, la commande  $H_\infty$  est l'une des meilleures commandes robustes, qui fera l'objet de ce qui suit.

#### **I.4 La commande $H_\infty$ :**

##### **I.4.1 Historique :**

La commande  $H_\infty$  (appelée encore commande fréquentielle avancée ou commande robuste multivariable) est une nouvelle approche de l'Automatique Fréquentielle, elle a été initiée par Zames au début des années 80 et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [1], [4], [5]. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « commande robuste » [3], elle est utilisée pour mise au point rapide de lois de commande robustes des systèmes linéaires stationnaires et multivariables [2], [3]. Elle prend une place de plus en plus importante parmi les méthodes de synthèse de contrôleurs. Dans cette approche, l'un des points intéressants est qu'elle permet de prendre en compte, à priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, qui est ainsi traduit directement sous forme d'un critère mathématique à vérifier [2]. Celui-ci est formulé en utilisant la norme  $H_\infty$ , d'où le nom qu'on donne à cette méthode de synthèse. La synthèse du contrôleur qui satisfait ce critère se fait algorithmiquement par résolution du problème d'optimisation en exploitant la puissance de calcul des ordinateurs actuels.

La synthèse d'une loi de commande doit assurer de bonne performance pour le modèle mais surtout pour le procédé qu'il représente. Cette philosophie conduit naturellement à l'introduction de la notion de robustesse donc, c'est lui qui a donné naissance à toute l'automatique moderne. Dans les années 40, Bode et Nyquist ont proposé des méthodes fréquentielles capables de quantifier la robustesse d'un système linéaire à travers les notions de marge de gain et marge de phase. Dans les années 60, et par l'utilisation de représentation d'état et des techniques d'optimisation, des propriétés de robustesse intéressantes ont été montrées sur le régulateur LQG (Linéaires Quadratiques Gaussiens) [8], malheureusement,

ces correcteurs ont montré des faibles qualités de robustesse [6], [7]. Dans les années 80, Doyle et Safonov ont proposé l'utilisation de la norme H $\infty$ , pour la synthèse d'une loi de commande H $\infty$ , cette dernière est un outil très intéressant pour analyser la robustesse en stabilité des systèmes [8] vis-à-vis des variations paramétriques et le rejet des perturbations.

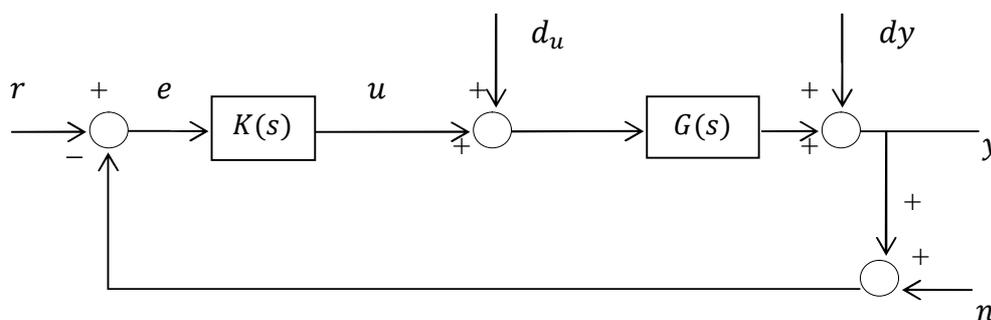
L'intérêt et l'importance de la commande H $\infty$ , dans le cadre des systèmes linéaire, réside dans le fait qu'elle repose avant tout sur les aidées classiques développée par Black, Bode et Horowitz. Et qu'elle ramène tous les problèmes de robustesse sous une forme simple, appeler forme standard, regroupant toutes les incertitudes possibles.

#### I.4.2 L'asservissement multivariable:

Considérons l'asservissement multivariable des systèmes LTL. Dont le schéma bloc est illustré en figure I.3.  $G(s)$  représente la matrice ( $p \times m$ ) fonction de transfert du procédé à asservir et  $K(s)$  la matrice ( $m \times p$ ) fonction de transfert de contrôleur.

Avec :

- $s$  : variable de Laplace.
- $p$  : le nombre d'entrées.
- $m$  : le nombre de sorties.



**Figure I.3** schéma représentatif d'une boucle de suivi de consigne

Les différents signaux représentés sur la figure I.3 sont :

$r(s)$  : consigne ou signal de référence.

$y(s)$  : signal de sortie ou réponse.

$e(s)$  : erreur de suivi.

$u(s)$  : commande.

$d_u(s)$ : perturbation sur la commande.

$d_y(s)$ : perturbation sur la sortie.

$n(s)$  : bruit de mesure.

### I.4.2.1 Equations et fonctions caractéristiques

Considérons l'asservissement de la Figure I.3 et supposons que le système et le contrôleur sont linéaires. Si  $G(s)$  et  $K(s)$  dénotent leur fonction de transfert respective, le bilan des signaux dans la boucle donne les équations caractéristiques suivantes :

$$y = GK(I + GK)^{-1}(r - n) + (I + GK)^{-1}d_y + G(I + KG)^{-1} \quad (\text{I.2})$$

$$e = (I + GK)^{-1}(r - d_y - n)G(I + KG)^{-1}d_u \quad (\text{I.3})$$

$$u = K(I + GK)^{-1}(r - d_y - n)K - G(I + KG)^{-1}d_u \quad (\text{I.4})$$

Ces équations mettent en valeur certain nombre de fonctions de transfert caractéristiques de la boucle (loop transfert functions) qui vont jouer un rôle important dans l'étude et la synthèse des asservissements robustes. Ces fonctions sont :

- ◆ les fonctions de transfert en boucle ouverte  $GK(s)$  et  $KG(s)$ . (elles ne coïncident pas en général dans le cas MIMO).
- ◆ la fonction de sensibilité en sortie (output sensitivity function) :

$$S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$$

Cette dernière indique la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations  $d_y$  sur cette sortie, c'est-à-dire la façon dont  $d_y$  affecte  $y$ . Par défaut, le terme " fonction de sensibilité " fera implicitement référence à la fonction de sensibilité en sortie. Elle caractérise aussi la relation entre l'erreur d'asservissement  $e$  et les signaux externes  $r$ ,  $d_y$  et  $n$ .

- ◆ la fonction de sensibilité en entrée (input sensitivity function) :

$$\Sigma(s) = (I + K(s)G(s))^{-1}$$

Elle indique la sensibilité de l'entrée  $u + d_u$  du système aux perturbations  $d_u$  affectant cette entrée.

- ◆ La fonction de sensibilité complémentaire (en sortie) :

$$T(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = I - S(s)$$

Elle détermine la relation entre la sortie  $y$  et la consigne  $r$  (en termes de transformées de LAPLACE) ainsi que l'effet du bruit de mesure  $n$  sur la sortie  $y$ .

- ◆ La fonction  $G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} = G\Sigma(s)$  qui exprime la sensibilité de la sortie  $y$  aux perturbations  $d_u$  de la commande  $u$ .
- ◆ La fonction  $K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = KS(s)$  qui détermine comment les perturbations du système  $d_y$  et le bruit de mesure  $n$  affectent la commande  $u$ .

### I.4.3 Notion de gain (norme) pour les systèmes multivariables :

#### I.4.3.1 Problème de performance H $_2$ :

Historiquement, l'utilisation de la norme H $_2$ , est apparue dans les années 1960 avec la théorie de la commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG). La norme H $_2$  d'un transfert  $w_2 \rightarrow z_2$  est une mesure précise de la puissance du signal de sortie  $z_2$  pour un bruit blanc Unitaire  $w_2$  en entrée. Il s'agit d'un critère qui mesure la performance d'atténuation de la puissance des perturbations.

a) **Définition de la Norme H $_2$**  : pour un système LTI certain, dont le transfert

$w_2 \rightarrow z_2$  est décrit par la matrice de transfert  $G_2$  :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 w_2(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} w_2(t) \end{cases} \quad G_2(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2 + D_{22} \quad (\text{I.10})$$

$$\|G_2(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(G_2^*(jw)G_2(jw))dw} \quad (\text{I.11})$$

#### I.4.3.2 Problème de performance H $\infty$ :

Un autre critère qui permet d'évaluer le rejet de perturbation est de considérer la norme H $\infty$ . Pour un système LTI certain stable. La norme H $\infty$  d'un transfert  $w_1 \rightarrow z_1$  indique la plus grande amplification sur toutes les fréquences pour une entrée sinusoïdale. Le cout H $\infty$  caractérise la plus grande puissance qui est susceptible d'être transmise par le système pour n'importe quel signal d'entrée.

a) **Définition de la Norme H $\infty$** :

La norme H $\infty$  d'un système dynamique est l'amplification maximale que le système peut exercer sur l'énergie du signal d'entrée.

Dans le cas d'un système MIMO, ceci équivaut à la valeur singulière maximale du système, ce qui, dans le cas SISO, se traduit par la valeur maximale de l'amplitude de sa réponse fréquentielle.

Pour un système LTI certain dont le transfert  $w_1 z_1$  est décrit par la matrice de transfert

$$T_1: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_1(t) \\ z_2(t) = C_1 x(t) + D_{11} w_1(t) \end{cases} \quad G_1(s) = C_1(sI - A)^{-1} B_1 + D_{11} \quad (\text{I.12})$$

$x(t)$  est le vecteur d'état.

La norme  $H_\infty$  d'un système stable est définie par :

$$\|G_1(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_{\max} G_1(jw) \quad (\text{I.13})$$

Où  $\sigma_{\max}$  est la valeur singulière structurée maximale.

### b) Les propriétés de la norme H $\infty$

$$\bullet \quad \|F(s)G(s)\|_\infty \leq \|F(s)\|_\infty \|G(s)\|_\infty \quad (\text{I.14})$$

$$\bullet \quad \left\| \begin{pmatrix} F(s) \\ G(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq \sup(\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty) \quad (\text{I.15})$$

$$\bullet \quad \|(F(s) \quad G(s))\|_\infty \geq \sup(\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty) \quad (\text{I.16})$$

Intuitivement, l'inégalité (I.14) exprime que le gain maximal de la mise en série de deux systèmes est inférieur au produit de leurs gains maximaux respectifs.

Les inégalités (I.15) et (I.16), qui correspondent à la mise en parallèle de deux systèmes avec une entrée ou une sortie commune, indique qu'en ne considérant qu'une partie de cette association, on obtient forcément un gain maximal plus faible.

### c) Les avantages de la commande H $\infty$ :

La commande  $H_\infty$  possède plusieurs avantages dont on cite :

- la commande  $H_\infty$  prend en compte des spécifications temporelles et fréquentielle du cahier de charge.
- Le critère  $H_\infty$  est construit directement du cahier de charge (la traduction des spécifications en termes de gabarits fréquentielle correspond aux pondérations).

- Elle permet de synthétiser des correcteurs qui prennent en compte à la fois les spécifications robuste et les spécifications de performance.
- Elle permet de traiter simplement la commande des systèmes MIMO.

**d) Les inconvénients de la commande H $\infty$  :**

La commande H $\infty$  non linéaire s'applique que pour les systèmes affines en entrée.

**Conclusion :**

Dans le cadre de ce chapitre, en premier lieu nous avons brièvement exposés la notion de la robustesse et ses différents types (robustesse en stabilité et en performance), Nous avons introduit aussi les incertitudes. Ces incertitudes peuvent être « dynamiques », portant sur la structure même du procédé, ou « paramétriques » portant alors sur ses paramètres. Pour réduire l'effet de ces incertitudes, nous utiliserons une commande robuste particulièrement, la commande H $\infty$  qui fera l'objectif des chapitres suivants.

## *CHAPITRE II*

# *COMMANDE $H_\infty$ DES SYSTÈMES LINEAIRE*

**Introduction :**

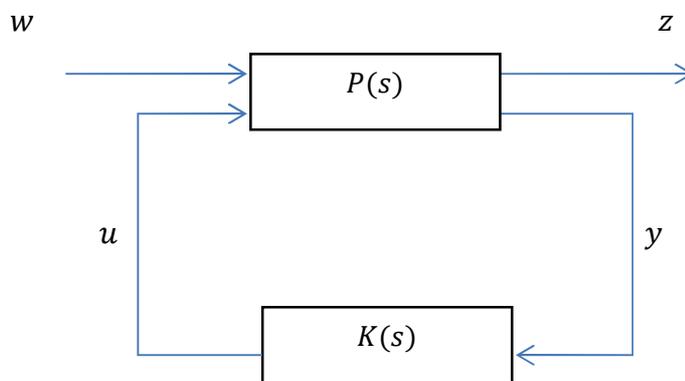
La commande  $H_\infty$  est considérée comme une méthode permettant de modéliser les matrices de transfert de la boucle fermée et d'intégrer ainsi différents objectifs de performance et de robustesse dans la procédure de synthèse de correcteur.

Dans ce chapitre, nous étudierons les notions de base de la commande  $H_\infty$  linéaire, et ses méthodes de résolution notamment par la résolution des équations de Riccati.

**II.1 Problème  $H_\infty$  standard :**

Sous sa forme la plus simple, le problème  $H_\infty$  est un problème de rejet de perturbation. Il consiste à minimiser l'effet d'une perturbation  $w$  sur le comportement du système. Le signal  $w$  est supposé d'énergie finie. On peut agir sur le système par une commande  $u$  et on dispose d'une observation  $y$ . Il s'agit donc de synthétiser une loi de commande  $u = K(s).y$  qui minimise l'impact de  $w$  sur  $z$ . On mesurera cet impact par le rapport  $\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}$ . La stabilité interne du système bouclé devra bien sûr être assurée.

Afin d'apporter une facilité méthodologique à la résolution des problèmes  $H_\infty$ , une représentation connue sous la dénomination « forme standard » a été introduite, elle est donnée par la figure II.1



**Figure II.1** problème standard

Dans cette figure  $P(s)$  représente le modèle augmenté, et  $K(s)$  le correcteur. Le système  $P(s)$  est formé des quatre transferts multivariables existant entre les entrées  $u$  (commande du système) et  $w$  (entrées exogènes: consignes, perturbations,...) et les sorties  $y$  (mesures) et  $z$  (sorties régulées, ou grandeurs à surveiller) :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Cette représentation permet de calculer, avec les outils appropriés, le correcteur  $K$  de manière à optimiser, selon un critère donné, la fonction de transfert  $T_{zw}(s)$  entre les entrées exogènes  $w(t)$  et les sorties régulées  $z(t)$ . Par ailleurs, pour une loi de commande  $u = K \cdot y$  connue,  $T_{zw}(s)$  peut se calculer de la façon suivante :

On a:

$$z = P_{11} w + P_{12} u \quad (\text{II.2})$$

$$y = P_{21} w + P_{22} u \quad (\text{II.3})$$

Avec  $u = K y$

En éliminant  $u$  et  $y$  dans ces équations, nous obtenons

$$z(s) = (P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21})w(s) \quad (\text{II.4})$$

alors

$$T_{zw}(s) = F_l(P, K) = P + P_{12}K^{-1}P_{21} \quad (\text{II.5})$$

Une réalisation de  $F_l(P, K)$  est donnée par:

$$F_l(P, K) = D_{BF} + C_{BF}(SI - A_{BF})^{-1}B_{BF} \quad (\text{II.6})$$

La stabilité interne de la boucle fermée est équivalente à la stabilité de  $A_{BF}$ , c'est-à-dire à  $R(\lambda_i(A_{BF})) < 0$ . Cette expression, généralement notée  $F_l(P, K)$ , est appelée Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure (LFT). Rappelons en outre, que  $P_{22}(s) = G(s)$ , où  $G(s)$  est la fonction de transfert du système.

En observant que le rapport  $\frac{\|Z\|_2}{\|W\|_2}$  est dans le pire des cas donné par:

$$\sup_{w \neq 0} \frac{\|Z\|_2}{\|W\|_2} = \|F_l(P, K)\|_\infty \quad (\text{II.7})$$

Le problème décrit ci-dessus peut se formuler mathématiquement comme suit:

- **Problème  $H_\infty$  Optimal:** minimiser  $\|F_l(P, K)\|_\infty$  sur l'ensemble des compensateurs  $K(s)$  qui stabilisent le système de manière interne.

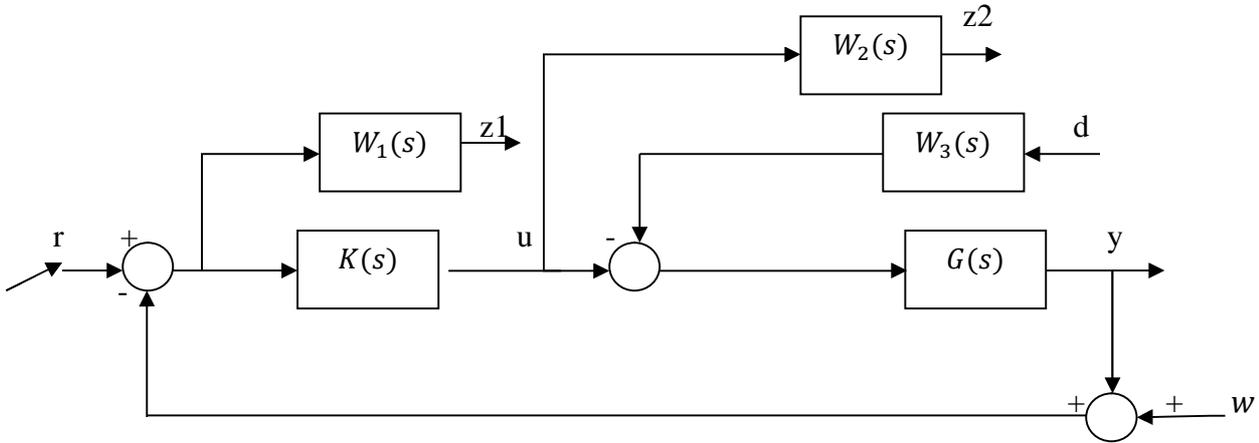
Le minimum est noté  $\gamma_{\text{opt}}$  appelé « gain » (ou atténuation) «  $H_\infty$  optimal ». Le problème sous-optimal associé joue également un rôle important.

- **Problème  $H_\infty$  Sous-Optimal:** étant donné  $\gamma > 0$ , trouver un compensateur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure que:  $\|F_l(P, K)\|_\infty < \gamma$

**II.1.1.Introduction des fonctions de pondération :**

Pour atteindre les objectifs de stabilité et de performance, des fonctions dites de pondération sont introduites sur les différents signaux ; sous forme de filtres permettant, suivant le signal auquel elles s'appliquent, de privilégier un domaine de fréquences particulier.

Nous considérons, à cette fin, le schéma de la figure suivante, dans lequel l'erreur est pondérée par le filtre  $W_1$ , la commande  $u$  par  $W_2$ , et l'entrée de perturbation par  $W_3$ .



**Figure II.2 :** Introduction des fonctions de pondérations

Les signaux  $r$  et  $d$  sont les entrées et  $z1, z2$  sont les sorties objectives ; nous avons donc le transfert suivant :

$$\begin{bmatrix} z1(s) \\ z2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)S(s) & W_1(s)S(s)G(s)W_3(s) \\ W_2(s)K(s)S(s) & W_2(s)K(s)S(s)G(s)W_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(s) \\ d(s) \end{bmatrix} \quad (II.7)$$

Avec  $S = (I + GK)^{-1}$  est la fonction de sensibilité en sortie.

Le problème  $H_\infty$  de ce transfert est le suivant :

Déterminer un nombre  $\gamma > 0$  et un correcteur  $K(s)$  stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1S & W_1SGW_3 \\ W_2KS & W_2KSGW_3 \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (II.8)$$

L'avantage de considérer ce problème plutôt que le problème précédent, est que les filtres  $W_1(s), W_2(s)$  et  $W_3(s)$  permettent de modeler les différents transferts " $Sy KSy SyG KSyG$ ".

Si l'équation (II.8) est vérifiée alors les propriétés suivantes le sont aussi ;

$$\|W_1KS\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in \mathbb{R} |S(jw)| < \frac{\gamma}{|w_1(jw)|} \quad (II.9)$$

$$\|W_2 S\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)(s)S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)|} \quad (\text{II.10})$$

$$\|W_1 W_3 S G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)w_3(j\omega)|} \quad (\text{II.11})$$

$$\|W_2 W_3 K S G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathbb{R} |K(j\omega)S(j\omega)G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_2(j\omega)w_3(j\omega)|} \quad (\text{II.12})$$

On voit donc que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions  $S$   $KS$   $SG$   $KSG$  est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres choisis.

### II.1.2.Choix des fonctions de pondérations :

Nous rappelons brièvement les critères qui déterminent le choix des fonctions de pondérations :

- $W_1$  est en general sous la forme :  $W_1 = \frac{1}{M_s} \frac{s+wb}{s+wb} M_s \varepsilon$  (II.13)

Pour respecter les hypothèses restrictives de résolution du problème  $H_\infty$ ,  $\varepsilon$  est fixé, en général, à une valeur faible mais non nulle. Ce choix donne naissance a une action presque intégrale au sein du correcteur assurant ainsi un gain élevé en basse fréquences, ce qui implique une minimisation de la fonction de sensibilité  $S$  dans cette bande, donc une bonne précision en régime permanent.

La pulsation  $wb$  sera choisit prêt de la bonde passante minimale souhaitée pour le système corrigé en boucle ouverte.

La valeur de  $M_s$  limite le maximum de  $\delta(S(j\omega))$  en haute fréquence.

- $W_2$  s'ecrit sous la forme  $W_2 = \frac{1}{\varepsilon_u} \frac{s+wh/M_u}{s+wh/\varepsilon_u}$  (II.14)

Le choix de  $\varepsilon_u$  faible, nous assure l'atténuation de  $KS$  aux hautes fréquences .

La pulsation  $wh$  limite la plage de l'amplification des bruits de mesure. Cette pulsation doit être choisit suffisamment éloignée de la pulsation propre désiré pour l'asservissement en boucle fermée.

La valeur de  $M_u$  limite le maximum de  $\delta(KS(j\omega))$ .

- $W_3$  spécifie le type de perturbation et du bruit à rejeter.

Les fonctions de pondération ne sont pas nécessairement des fonctions du premier ordre. Elles peuvent être constantes, ou d'ordre supérieur, suivant les contraintes de cahier de charge et les besoins du concepteur pour la réalisation de correcteur. Le choix de ces fonctions n'est pas

implicite et il est sujet de quelques tâtonnement pour arriver aux « meilleurs » fonctions de pondérations.

**II.1.3. Problèmes de sensibilité mixte :**

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que, pour  $S = (I + GK)^{-1}$  fonction de sensibilité en sortie :

- L'objectif de performance nominale est atteint si :

$$\|W_1S\|_\infty < 1 \tag{II.15}$$

- L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme additive non structurée est atteint si :

$$\|W_2KS\|_\infty < 1 \tag{II.16}$$

- L'objectif de la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes de modèle représentées sous la forme multiplicative directe non structurée est atteint si :

$$\|W_3T\|_\infty < 1 \tag{II.17}$$

$T$  est la fonction de sensibilité complémentaire.

Tout en assurant la stabilité du système bouclé. Les pondérations  $W_1(s)$ ,  $W_2(s)$  et  $W_3(s)$  ne peuvent être choisies arbitrairement. En particulier, du fait que :

$$S + T = 1 \tag{II.18}$$

$W_1(s) = w_1(s)Ip$  , ou  $w_1(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-bas avec un gain élevé en basse fréquence.

$W_2(s) = w_2(s)Im$  , ou  $w_2(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain élevé en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes additives que le système doit tolérer.

$W_3(s) = w_3(s)Ip$  , ou  $w_3(s)$  est une fonction de transfert scalaire du type passe-haut avec un gain important en hautes fréquences, choisie en accord avec la norme des incertitudes multiplicative que le système doit tolérer.

Les trois objectifs recherchés peuvent se résumer en un problème unique :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1S \\ W_2KS \\ W_3T \end{array} \right\|_\infty < 1 \tag{II.19}$$

$KS$  et  $T$  jouent des rôles semblables; donc il suffit de résoudre l'un des deux problème suivant:

$$\left\| \begin{matrix} W_1 S \\ W_3 T \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} W_1 S \\ W_2 K S \end{matrix} \right\|_\infty < 1 \quad (\text{II.20})$$

Ces deux problèmes sont désignés dans la littérature sous le nom de problème de sensibilité mixte.

Différentes méthodes sont envisageables pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard. Nous présentons ci-dessous l'approche par équation de Riccati, dans laquelle la valeur optimale de  $\gamma$  est recherchée par dichotomie.

Cette méthode utilise une représentation d'état de la matrice d'interconnexion  $P(s)$ , que nous écrivons sous la forme suivante.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ e(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_e & D_{ew} & D_{eu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

## II.2. Résolution du problème $H_\infty$ standard :

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème de commande de  $H_\infty$  on cite à titre d'exemple : méthode de Youla, les inégalités matricielles (LMI) et les équations de Riccati.

### II.2.1. Résolution du problème $H_\infty$ standard par équation de Riccati :

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 1980 [11], [18], [21], et en générale mise en œuvre numériquement sur un ordinateur et elle repose sur la résolution d'une série d'équation de Riccati [2]. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée et la plus fiable numériquement [2], [3] [11], [19], [20].

L'équation de Riccati est donnée par : [17], [7]

$$XA + A^T X - XPX + Q = 0 \quad (\text{II.22})$$

Avec :  $P = \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T$  et  $Q = C_e^T C_e$

La solution stabilisante, si elle existe, sera une matrice symétrique tel que  $A - PX$  est une matrice stable (ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = Ric \begin{bmatrix} A & -P \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Pour résoudre le problème  $H_\infty$  standard, on suppose satisfaites les hypothèses suivantes :

a) Les hypothèses :

**Hypothèse 1(H1) :** La paire  $(A, B_u)$  est stabilisable et la paire  $(C_y, A)$  est détectable.

- ✓ Cette hypothèse classique de toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande  $K(s)$  qui stabilise le système en boucle fermée.

**Hypothèse 2 (H2) :**  $\text{rang}(D_{eu}) = n_u$  et  $\text{rang}(D_{yw}) = n_y$

- ✓ Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la loi de commande du correcteur soit propre.

**Hypothèse 3 (H3) :**  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_u \\ C_u & D_{eu} \end{bmatrix} = n + n_u$

- ✓ Cette hypothèse garantit que le transfert  $P_{12}$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

**Hypothèse 4 (H4) :**  $\forall \omega \in \mathbb{R} \text{rang} \begin{bmatrix} A - j\omega I_n & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + n_y$

- ✓ Cette hypothèse garantit que le transfert  $P_{21}$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

b) Hypothèse simplificatrice :

Il est toujours possible en appliquant une série de transformation au système (II.21) de se ramener au cas où les conditions suivantes sont vérifiées :

$$D_{ew} = 0 \quad D_{eu}^T (C_e \ D_{eu}) = (0 \ I_{n_u}) \tag{II.24}$$

$$D_{yu} = 0 \quad \begin{pmatrix} B_w \\ D_{yw} \end{pmatrix} D_{yw}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_y} \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant permet de décrire la solution du problème standard :

**Théorème II.1: [11]** Sous les hypothèses H1 – H4 et les conditions (II.24), le problème  $H_\infty$  standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

- (i) La matrice  $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w^T - B_u B_u^T \\ -C_e^T C_e & -A^T \end{bmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire
- (ii) Il existe une matrice symétrique  $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$

(iii) La matrice  $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2}C_e^T C_e - C_y^T C_y \\ -B_w B_w^T & -A \end{bmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe

imaginaire

(iv) Il existe une matrice symétrique  $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$  solution de l'équation de Riccati

$$Y_\infty A^T + AY_\infty + Y_\infty (\gamma^{-2} C_e^T C_e - C_y^T C_y) Y_\infty + B_w B_w^T = 0 \quad (\text{II.25})$$

(v)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$  (II.26)

Où  $\rho(\cdot)$  désigne le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

La recherche du  $\gamma$  optimal est effectuée par dichotomie présentée plus loin. en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution  $K(s)$  pour le  $\gamma$  défini. Les algorithmes couramment implantés fournissent une solution appelée « correcteur central » défini ci-dessous. Cependant, il existe une infinité de solutions au problème sous optimal, pour  $\gamma$  fixé. [12]

Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati et la dernière condition introduit un lien entre les deux solutions. Enfin la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

**Théorème II.2 :** [11], [13] : Sous les conditions du théorème II.1, les correcteurs rationnels stabilisant le système d'une manière interne et satisfaisant  $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  sont décrit par la représentation suivante (LFT) Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure :

$$K(s) = F_l(K_a(s), \Phi(s)) \quad (\text{II.27})$$

Où  $\Phi(s) \in \mathbb{R} H_\infty$  est une matrice de transfert de dimensions  $n_u \times n_y$  arbitraire vérifiant  $\|\Phi(s)\|_\infty < \gamma$  et  $K_a(s)$  est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ u(t) \\ u_a(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T & Z_\infty B_u \\ -B_u^T X_\infty & 0 & I_{n_u} \\ -C_y & I_{n_y} & 0 \end{bmatrix}}_{K_a(s)} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ y(t) \\ y_a(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

$$\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_w B_w^T X_\infty - B_u B_u^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_y^T C \quad (\text{II.29})$$

$$Z_\infty = (I_n - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (\text{II.30})$$

En particulier, le correcteur correspondant à  $\Phi(s) = 0$  appelé **correcteur central**, admet la représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_y^T \\ -B_u^T X_\infty & 0 \end{bmatrix}}_{K_0(s)} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

La mise en œuvre de cette solution consiste donc à utiliser tout d'abord les résultats du théorème II.1 pour approcher la valeur optimale de  $\gamma$  par dichotomie (procédure appelé couramment “ $\gamma$  -itération”). on calcule ensuite le correcteur central en appliquant le théorème II.2.

### II.2.2. $\gamma$ –itération (méthode de dichotomie):

$\gamma$  –itération est un algorithme permettant d'approcher par dichotomie la valeur optimal de  $\gamma$  en suivant les étapes suivantes :

**a)** Choix d'un niveau de tolérance  $\eta$  sur le calcul de la valeur  $\gamma_0$  et de deux valeurs  $\gamma_{min}$  et  $\gamma_{max}$  telle que, pour  $\gamma = \gamma_{max}$ , le problème  $H_\infty$  standard admet une solution et que pour  $\gamma = \gamma_{min}$  le problème  $H_\infty$  standard n'admet pas de solution ;

**b)** On teste si pour  $\gamma = \frac{\gamma_{max} + \gamma_{min}}{2}$ , le problème  $H_\infty$  standard admet une solution. Si oui alors  $\gamma_{max} = \gamma$  sinon  $\gamma_{min} = \gamma$ .

**c)** Si  $\gamma_{max} - \gamma_{min} > \eta$  alors retourner a l'étape b) si non continuer.

**d)** Calcul de la représentation d'état de la loi de commande permettant d'obtenir une norme  $H_\infty$  proche de  $\gamma_{max}$ .

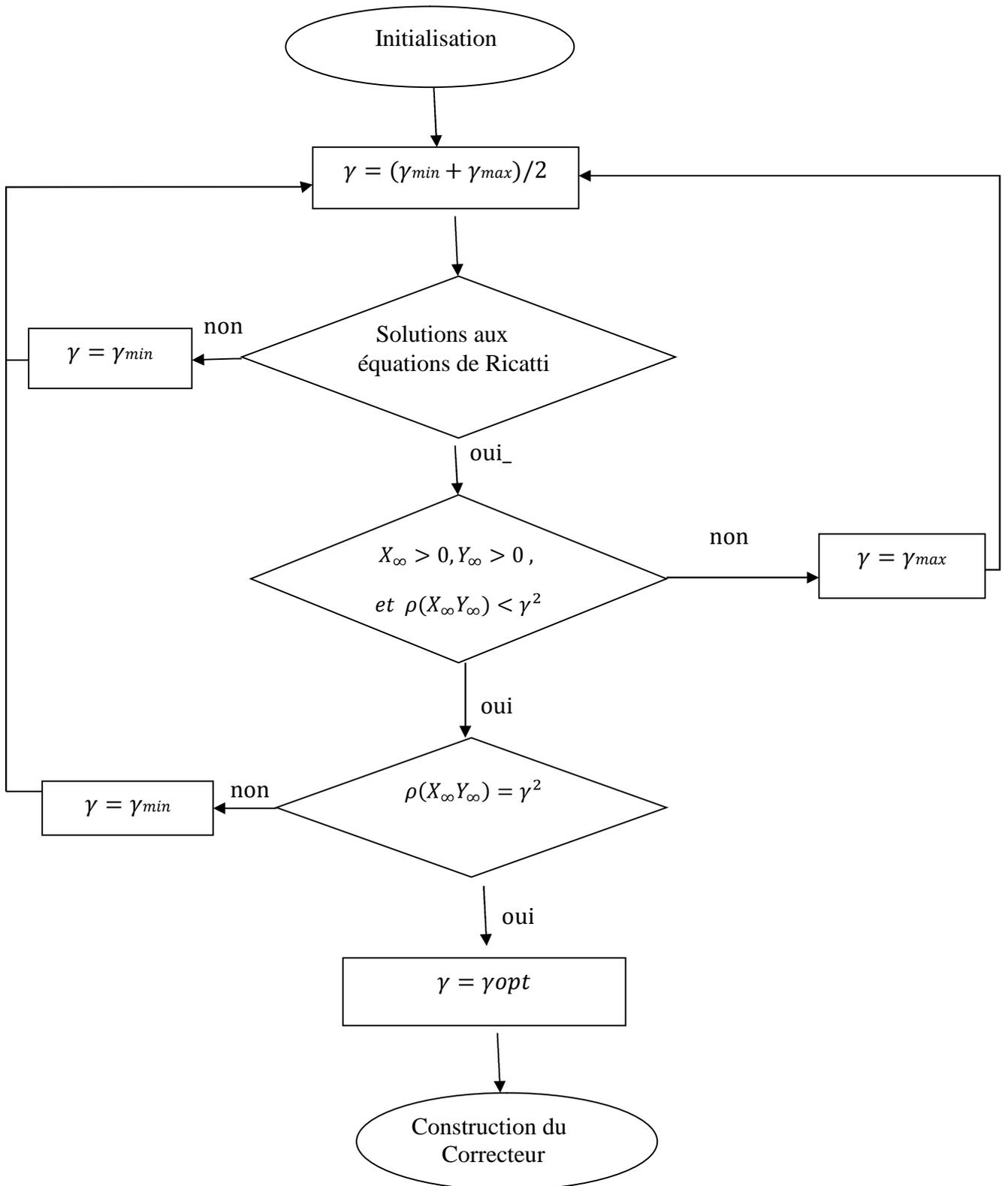


Figure. II.2. Organigramme de calcul du  $\gamma_{opt}$

**Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons présenté la problématique de la commande  $H_\infty$  linéaire (le problème standard, les fonctions de pondérations et le problème de sensibilité mixte).

La résolution de cette problématique se fait par plusieurs méthodes, nous avons opté pour la résolution par les équations de Riccati (qui est la méthode la plus fiable numériquement), cette méthode se résout par un algorithme très fiable qui consiste à synthétiser un correcteur  $K(s)$  assurant la stabilité asymptotique du système en boucle fermée et minimisant la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert entre les entrées et les signaux d'erreurs.

Etant la majorité des systèmes réels sont non linéaires, il est nécessaire de présenter la commande  $H_\infty$  des systèmes non linéaires, qui fera l'objet du prochain chapitre.

*CHAPITRE III*  
*LA COMMANDE  $H_\infty$  DES SYSTEMES*  
*NON LINEAIRE*

**Introduction :**

L'objectif de la commande  $H_\infty$  non linéaire, comme dans le cas linéaire, est d'assurer une stabilité asymptotique du système en boucle fermée et de minimiser le rapport entre l'énergie de sortie à réguler et l'énergie des entrées exogènes (perturbation). Ce rapport est appelé par la suite, le *gain*  $L_2$ . Sa minimisation n'est pas globale mais relative à un certain niveau d'atténuation. Ce qui qualifie la commande sous-optimale.

Pour obtenir un contrôleur  $H_\infty$  non linéaire, il est essentiel de trouver une solution pour l'équation de Hamilton-Jacobi (HJE) ou les HJI. Une approximation de la solution de cette équation peut être calculée par la méthode des approximations successives qui sera présentée dans ce chapitre.

**III.1 Notion de passivité et dissipativité :**

La propriété d'atténuation des perturbations est liée au concept de passivité suivant :

**Définition :** [Van der Shaft (2000)] un système non linéaire de la forme

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \omega) \\ z &= h(x, \omega)\end{aligned}\tag{III.1}$$

Avec  $x(0) = x_0$  est localement dissipatif autour de  $(x, w) = (0,0)$  s'il existe une fonction de stockage  $S(x)$  passive telle que  $S(0) = 0$  et une fonction  $s(\omega, z)$  localement intégrale, telles que

$$S(x) - S(x_0) \leq \int_0^t s(\omega(\tau), z(\tau)) d\tau\tag{III.2}$$

Sur tout l'intervalle  $[0, t]$ .

Si  $S(x)$  est différentiable, l'équation (III.2) peut être mise sous forme

$$\dot{S}(x) \leq s(\omega, z)\tag{III.3}$$

$$\frac{dS}{dx} f(x, \omega) \leq s(\omega, h(x, \omega))\tag{III.4}$$

Une particularité de  $s$  permet de définir la passivité du système (III.1).

**Définition :** [Van der Shaft(2000)] le système (III.1) est passif s'il est dissipatif et si la fonction  $s$  s'exprime par  $s(\omega, z) = \omega^T z$

### III.2 Problème de commande $H_\infty$ non linéaire :

#### III.2.1 Formulation mathématique du problème:

Nous considérons la forme générale d'un système non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, w, u) \\ z = Z(x, u) \\ y = Y(x, u) \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Ou  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état de système,  $z \in \mathbb{R}^s$  est la sortie objective,  $w \in \mathbb{R}^r$  l'entrée exogène,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie de mesure et  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande. Les fonctions  $F$ ,  $Z$  et  $Y$  sont supposées lisse (fonction classe  $C^k$ , avec  $k$  suffisamment grand) et définies au voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ .

Il est impossible d'aboutir une loi de commande explicite du a la nature générale de fonction  $F$ ,  $Z$  et  $Y$ . Dans cette section nous intéressons aux systèmes non linéaires de type affine.

Nous appelons un système non linéaire affine (en états et en entrée un système dont la représentation d'état prend les formes suivantes :

- Affine en état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(w, u)x + g_1(w) + g_2(u) \\ z &= h_1(w, u)x + K_{11}(w) + K_{12}(w) \\ y &= h_2(w, u)x + K_{21}(w) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

- Affine en entrée :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + K_{11}(x)w + K_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + K_{21}(x)w \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Ou  $x \in \mathbb{R}^n$  est l'état de système  $z \in \mathbb{R}^{p1}$  est la sortie contrôlée,  $w \in \mathbb{R}^{m1}$  est l'entrée exogène  $y$  compris toutes les commandes et perturbation,  $u \in \mathbb{R}^{m2}$  est la mesuresortie. Le problème est de trouver un contrôleur.

$$K: \begin{cases} \dot{\xi} = A_K(\xi) + B_K(\xi)y \\ u = C_K(\xi) \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

$\xi$  est le vecteur d'état du correcteur,  $y$  est le vecteur de sortie du système et  $u$  la commande.

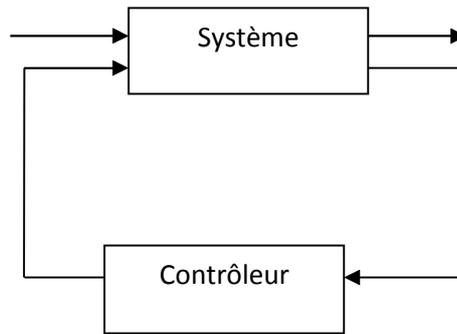


Figure III.1: problème standard  $H_\infty$ .

### III.2.2 Objectif de la commande :

Le problème de la commande  $H_\infty$  sous-optimale consiste à trouver un contrôleur (une loi de commande) ayant comme entrées les sorties mesurées du système  $y$  et produisant les entrées de commande  $u$ , tel que le système non linéaire sous la forme standard représentée sur la figure III.1 :

- 1- Soit stable asymptotiquement en boucle fermée.
- 2- Ait un *gain*  $L_2$  inférieur ou égale à un niveau  $\gamma$  donné, c.à.d. pour tout  $T \geq 0$  et  $w \in L_2(0, T)$ , on a :

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad \text{avec} \quad \text{gain } L_2 = \frac{\int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \quad (\text{III.9})$$

On parle de problème d'atténuation des entrées exogènes  $w$  sur la variable de pénalité  $z$ . le lien entre la dissipativité et le *gain*  $L_2$  d'un système non linéaire est mise en évidence dans Van de Shaft (2000). Si le système(III.1) est localement asymptotiquement stable et localement dissipatif avec :

$$S(w, z) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \quad (\text{III.10})$$

Alors sa réponse, pour une entrée suffisamment petite et  $x(0) = 0$  satisfait :

$$\int_0^T (\gamma^2 \|w\|^2 - \|\tau\|^2) dt > V(0) - V(T) > -V(T) \quad (\text{III.11})$$

Pour tout  $t > 0$ . D'où(III.1) ait un **gain  $L_2$**  inférieur ou égale  $\gamma$ .

Cette inégalité signifie que la norme  $H_\infty$  du système est inférieur ou égal à  $\gamma$  si  $T \rightarrow \infty$ . Quand  $\gamma = 1$ , l'inégalité implique que l'énergie d'entrée est supérieure ou égal à l'énergie de sortie. En d'autres termes, une certaine énergie a été dissipée et, par conséquent, le système est appelé dissipatif.

### III.3 Hypothèses d'existence de la commande $H_\infty$ non linéaire :

La résolution du problème de commande  $H_\infty$  non linéaire n'est possible que sous les hypothèses suivantes [14].

#### a) Hypothèse 1

Il existe des fonctions uniques  $w_*(x, p)$  et  $u_*(x, p)$  définies au voisinage de  $(0,0)$  qui satisfait

$$\frac{\partial H}{\partial w}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (\text{III.12})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$w_*(0,0)u_*(0,0) \quad (\text{III.14})$$

Tel que

$$H(x, p, w, u_*(x, p)) \leq H(x, p, w_*(x, p), u_*(x, p)) \quad (\text{III.15})$$

$$\leq H(x, p, w_*(x, p), u)$$

Ou  $H$  est la fonction hamiltonienne définit par :

$$H(x, p, w, u) = p^T F(x, w, u) + \|z(x, u)\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \quad (\text{III.16})$$

et

$$p^T = V_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{III.17})$$

#### b) Hypothèse 2

Chaque trajectoire  $x(t)$  du système  $\dot{x}(t) = F(x(t), 0, u(t))$  satisfait

$Z(x(t), u(t)) = 0$  Pour tout  $t \geq 0$  tel que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Cette dernière hypothèse est la version non linéaire qu'un système linéaire ayant une entrée  $u$  et une sortie  $z$  ( $w = 0$ ) n'a pas de zéros sur l'axe imaginaire.

Dans la littérature, le problème de commande  $H_\infty$  non linéaire est traité pour une classe particulière des systèmes non linéaires. Cette classe est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{11}(x)w + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w + K_{22}(x)u \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^m$  est la commande,  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie de mesure,  $z \in \mathbb{R}^s$  est la sortie objective et  $w \in \mathbb{R}^r$  est l'entrée exogène.

Les systèmes non linéaire, qui s'écrivent de cette manière, sont appelés systèmes non linéaire affins aux entrées.

Dans le but de simplifier l'analyse de la commande  $H_\infty$  non linéaire, les hypothèses suivantes ont été considérées.

**c) Hypothèses simplificatrices [10]**

•  $K_{11}(x) = 0$  et  $K_{22}(x) = 0$  (III.19)

•  $K_{12}(x)^T [h_1(x) K_{12}(x)] = [0 \ I]$  (III.20)

•  $\begin{bmatrix} g_1(x) \\ K_{21}(x) \end{bmatrix} K_{21}^T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$  (III.21)

•  $[h_1(x) \quad f(x)]$  est détectable à l'état nul.

• Le système nominal est atteignable à l'origine.

Sous ses hypothèses, le système donné par l'équation (III.18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z = h_1(x) + K_{12}(x)u \\ y = h_2(x) + K_{21}(x)w \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

**III.4 Solution du problème  $H_\infty$  des systèmes non linéaires :**

La solution du problème de commande  $H_\infty$  non linéaire est donnée moyennant le théorème suivant :

**Théorème III.1:** [14] [15] [10] Sous les hypothèses précédentes, s'il existe une fonction positive définie «  $V$  » au voisinage de  $x = 0$  tel que  $V(0) = 0$ , qui satisfait l'inégalité (III.5) ; alors la loi de commande :

$$u = -\frac{1}{2}g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = -g_2^T X \quad (III.23)$$

Résout le problème de commande  $H_\infty$  non linéaire (stabilité interne et atténuation des perturbations). Et le contrôleur  $H_\infty$  non linéaire est donné par :

$$K: \begin{cases} \dot{\xi} = A_K(\xi) + B_K(\xi)y \\ u = C_K(\xi) \end{cases} \quad (III.24)$$

$$A_k = f(\xi) + \gamma^{-2}g_1(\xi)g_1^T(\xi)X(\xi) + g_2(\xi)C_k(\xi) - B_k(\xi)h_2(\xi)C_k(\xi) = -g_2^T(\xi)X(\xi) \quad (III.25)$$

$$C_k(\xi) = -g_2^T(\xi)X(\xi) \quad (III.26)$$

Et  $B_k(\xi)$  satisfait l'équation suivante:

$$[Y(x) - X(x)]^T B_k(\xi) = \gamma^2 h_2^T(\xi) \quad (III.27)$$

$\xi$  est le vecteur d'état du correcteur, et  $y$  et le vecteur de sortie de système.

$Y(\xi)$  et  $X(\xi)$  Sont les solutions de deux équations dites **équation de Hamilton Jacobi**, données par (III-28a) et (III-28b).

$$H_{FI}(V, x) = \frac{\partial V}{\partial x} f + \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} (\gamma^{-2} g_1 g_1^T - g_2 g_2^T) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_1^T h_1 = 0 \quad (III.28a)$$

$$H_{FC}(U, x) = \frac{\partial U}{\partial x} f + \gamma^{-2} h_1^T h_1 - h_2^T h_2 + \frac{1}{4} \frac{\partial U}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial V^T}{\partial x} = 0 \quad (III.28b)$$

Ou 
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2X \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 2Y \quad (III.28c)$$

Ces deux équations sont la version non linéaire des équations de Riccati.

L'équation (III.28a) est dite de filtrage, et l'équation (III.28b) est de contrôle.

La théorie de commande  $H_\infty$  des systèmes non linéaire a été développée de l'analyse du gain  $L_2$ , basé sur le concept de la dissipation d'énergie. Ses applications ne sont pas faciles à cause des équations (inégalités) de Hamilton Jacobi, dont la solution exacte est inexistante ou impossible à calculer. Deux approches ont été particulièrement utilisées dans la littérature pour résoudre ce problème. La première est l'approche basée sur les inégalités matricielles non linéaires. La seconde est l'approche utilisant un algorithme des approximations successives pour le calcul de la solution approximée de l'équation de Hamilton Jacobi [16][22], qui sera exposée dans la partie suivante.

### III.5 Résolution du problème de commande non linéaire via la méthode des approximations successives :

Pour trouver un contrôleur  $H_\infty$  non linéaire du Théorème(III.1), il faut résoudre le HJE (III.28a), dont la solution approximative peut être construite par la méthode successive de la série de puissance [23,24]. Nous présenterons un algorithme successif modifié. L'équation de Hamilton Jacobi (HJE) de (III.28a) peut être réécrite comme suit :

$$V(x)f(x) + V(x)\frac{1}{4}[\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x)]V_x^T(x) + h_1^T(x)h_1(x) = 0 \quad (\text{III.29})$$

Ou

$$X(x) = \frac{1}{2}V_x^T(x) \quad (\text{III.30})$$

Définir

$$V(x) = \sum_{m=2}^k V^m(x) = x^T X_x + \sum_{m=2}^k V^m(x)\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x) \quad (\text{III.31})$$

$$f(x) = Ax + f_h(x) \quad (\text{III.32})$$

$$\frac{1}{4}(\gamma^{-2}g_1(x)g_1^T(x) - g_2(x)g_2^T(x)) = \frac{1}{4}(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T) + R_h(x) \quad (\text{III.33})$$

$$h_1^T(x)h_1(x) = x^T C_1^T C_1 x + Q_h \quad (\text{III.34})$$

$$F = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X \quad (\text{III.35})$$

Ou  $X$  est la solution l'équation de Riccati suivante :

$$A^T X + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0 \quad (\text{III.36})$$

$$\text{Où } f_h(x) = O(x^2), R_h(x) = O(x), Q(x) = O(x^3) \quad (\text{III.37})$$

$O(x)$  est le symbole de landau généralisé d'ordre 1.

$O(x^2)$  est le symbole de landau généralisé d'ordre 2.

$O(x^3)$  est le symbole de landau généralisé d'ordre 3.

$(.)^k$  désigne le terme d'ordre k de la commande.

$(.)^{[k]}$  est le terme d'ordre k de la commande cumulés incluant  $x^k$ .

$X$  est le Solution stabilisante semi-défini positive de l'équation (III.36), et

$$\frac{\partial V^k}{\partial x} = 2x^T X + \sum_{m=3}^k \frac{\partial V^m}{\partial x} \tag{III.38}$$

Notez que l'ordre de  $\frac{\partial V^m}{\partial x}$  est  $m-1$ . L'approximation des solutions du HJE (III.29) peuvent être calculées successivement en utilisant l'équation suivante :

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)} \tag{III.39}$$

Où  $k \geq 3$  est un nombre entier. Un ensemble d'équations linéaires peut être Établi en comparant les coefficients pour les deux côtés de (III.39). Les solutions approximatives du HJE en (III.28a) sont obtenues par ce qui suit :

$$X^{[k-1]} = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = X x + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} \tag{III.40}$$

### III.5.1 Algorithme des l'approximation successives

#### Etape 1 : Initialisation

- ◆ Linéarisation du model du système non linéaire autour de l'origine.
- ◆ Calcul de, la solution de l'équation de Riccati (III.37), et de  $\gamma$  optimal (voir chapitre 2).
- ◆ Initialisation de la solution de Hamilton-Jacobi  $\frac{\partial V^k}{\partial x} = 2x^T X$ .
- ◆ Fixer : - la tolérance  $\epsilon$

-Le nombre d'itération N

#### Etape 2 : Calcul des approximations

- ◆ Calcul des approximations successives, en comparant les coefficients de l'équation suivante

$$-\frac{\partial V^{(k)}}{\partial x} F_c x = \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial V^{(m)}}{\partial x} f_h^{(k-m+1)} + \sum_{m=3}^{k-1} \frac{\partial V^{(k-m+2)}}{\partial x} \frac{1}{4} R_s \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + \sum_{n=1}^{k-2} \sum_{m=2}^{k-n} \frac{\partial V^{(k-n-m+2)}}{\partial x} R_h^{(n)} \frac{\partial^T V^{(m)}}{\partial x} + Q_h^{(k)}$$

Calcul de la solution approximé de l'équation de Hamilton Jacobi

$$X^{[k-1]} = \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{[k]}}{\partial x} = X x + \frac{1}{2} \sum_{m=3}^k \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x} = X^{[k-2]}(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V^{(k)}}{\partial x}$$

### Etape 3 : Vérification

Si  $X^{[k-1]}(x) - X^{[k-2]}(x) \leq \varepsilon$

Calculer la commande  $u = -g_2^T(x) X^{[k-1]}(x)$

Si non  $k = k + 1$

Si  $k \leq N + 3$

Recommencer l'étape 2

Si non calculer la commande  $u = -g_2^T(x) X^{[k-1]}(x)$

Fin

Fin.

Une fois la solution approximée de l'inégalité de Hamilton-Jacobi est calculée, on la remplace par sa valeur dans les équations (III.25) et (III.26), pour calculer les matrices  $A_k$  et  $C_k$ . par contre  $B_k$  fait intervenir dans son expression la solution de la deuxième inégalité de Hamilton- Jacobi (III.28b), dont la solution est inconnue. **Lu** et **Chang**, dans leur travaux, proposent de considérer  $B_k$  égale à son équivalent dans le cas du correcteur linéaire.

### Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exposé la problématique  $H_\infty$  non linéaire, et nous avons présenté la méthode des approximations successives, qui est la version non linéaire de la méthode de Riccati (elle permet de donner une solution approximé de l'équation de Hamilton Jacobi). Un test sera fait va permettre de mettre en évidence l'intérêt et la robustesse de la commande  $H_\infty$  non linéaire qui sera exposé dans le chapitre suivant.



*CHAPITRE IV*

*APPLICATION DE LA COMMANDE*  
*SUR UN MODELE D'UN PENDULE*  
*INVERSE*

### Introduction :

Dans ce chapitre nous utiliserons les différents théorèmes vus dans les chapitres précédents ainsi que la méthode de calcul du correcteur  $H_\infty$ .

Pour tester la robustesse de commande  $H_\infty$ , on a choisit un modèle plus utilisé et plus fiable dans les systèmes non linéaire basé sur un pendule inversé.

Dans l'application de cette commande on utilisera la méthode basé sur les équations de Ricatti (cas linéaire) et la méthode des approximations successive (cas non linéaire).

### IV.1 Application de la commande $H_\infty$ sur un model de pendule inversé :

#### IV.1.1 Application de la commande $H_\infty$ linéaire :

Nous considérons un système de pendule inversé décrit dans l'annexe A, dont la dynamique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24,1314x_3 - 4,0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,4606 + 1,2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{IV.1})$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{IV.2})$$

Nous rappelons que les états du système sont :

$x_1 = r$  est le déplacement de chariot.

$x_2 = \dot{r}$  est la vitesse linéaire

$x_3 = \theta$  est l'angle(déplacement angulaire)

$x_4 = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire

Le déplacement est en mètre (m), et l'angle est en (rad).

Notre objectif est de la stabilité le système et de la maintenir a la position verticale, tout en assurant une bonne atténuation des bruits.

## Chapitre 4 Application de la commande $H_\infty$ sur un modèle de pendule inversé

Pour calculer un correcteur  $H_\infty$ , il faut tout d'abord déterminer des gabarits qui permettent de définir des spécifications (temps de réponse en boucle fermée, erreurs statique...). Dans notre cas, les spécifications à respecter sont les suivantes :

- Bon suivi de la consigne avec une erreur d'ordre  $10^{-6}$  sur la deuxième et la dernière sortie.
- Rejection de toutes les perturbations et tous les bruits.
- Minimisation de l'effort de commande.

Pour se faire, nous introduisons les fonctions de pondération suivante :

$W_x$  sur l'erreur de poursuite.

$W_u$  sur la commande pour la contrainte sur les actionneurs.

$W_d$  et  $W_n$  sur les entrées exogènes (perturbations et bruits respectivement).

Notre système devient alors sous la forme suivante :

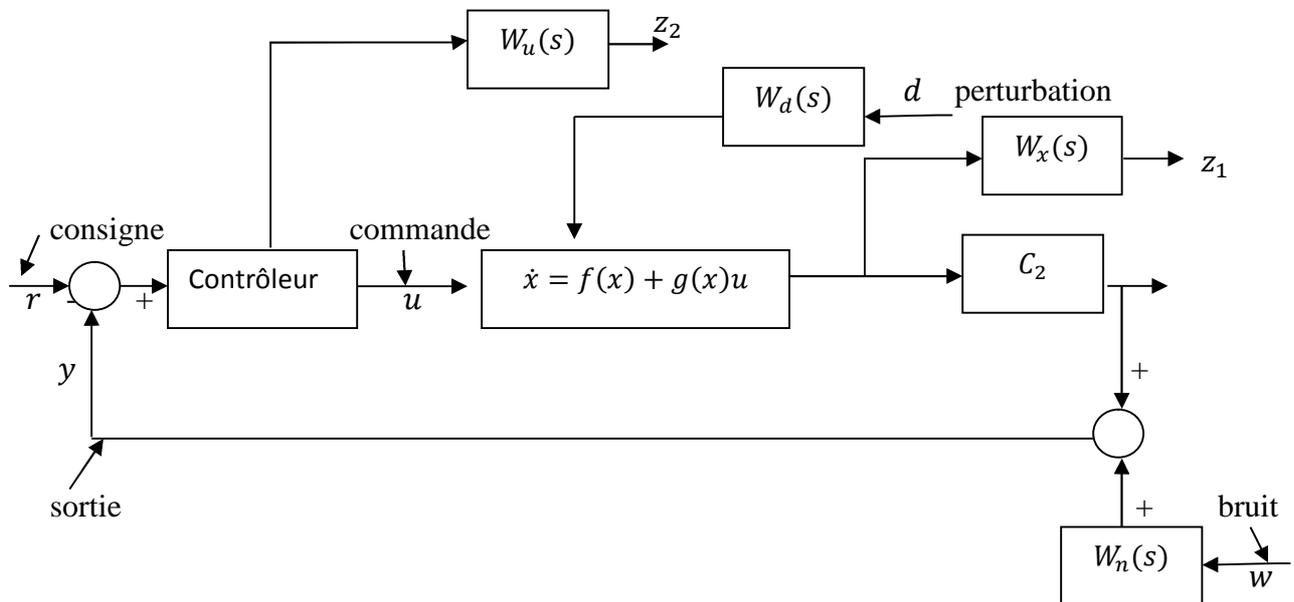


Figure IV.1 : Schéma du système pondéré

Les fonctions de pondérations qui répond au cahier de charge et vérifient les contraintes (II-9) sont les suivantes :

$$W_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}, W_d = I_4, W_n = I_2, W_u = 1 \quad (\text{IV.3})$$

Dans notre cas tous les gabarits ont une forme diagonale, ce qui permet de spécifier des performances pour chaque variable du système MIMO.

En introduisant toutes ces fonctions de pondérations, la représentation d'état du pendule inversé devient :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24,1314x_3 - 4,0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,4606 + 1,2303x_3^2 \end{bmatrix} u + [w_d \ 0]w \\ &= \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24,1314x_3 - 4,0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,4606 + 1,2303x_3^2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + [0 \ w_n]w \quad (\text{IV.5})$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ w_u \end{bmatrix} u \quad (\text{IV.6})$$

La première étape est la linéarisation de système. En linéarisant ce système, nous aboutirons au système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24.1314 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,4606 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (\text{VI.7})$$

## Chapitre 4 Application de la commande $H_\infty$ sur un modèle de pendule inversé

En utilisant **Matlab** on trouve la valeur optimale de  $\gamma$  est égale à 53.966015. Et pour nos simulations, nous considérons  $\gamma = 55$ .

La solution de l'équation de Riccati (II.22) est égale à :

$$X = \begin{bmatrix} 1.82558 & 1.6660 & 5.3303 & 1.0859 \\ 1.6660 & 2.4959 & 8.6347 & 1.7594 \\ 5.3303 & 8.6347 & 69.6382 & 14.1508 \\ 1.0859 & 1.7594 & 14.1508 & 2.8797 \end{bmatrix}$$

Nous appliquons la commande  $H_\infty$  calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati, par simulation, sur ce système, pour différentes conditions initiales et perturbation. Et cela dans le but de tester la robustesse de cette commande.

### L'étude temporelle :

En appliquant la commande  $H_\infty$  linéaire calculée par la méthode basée sur les équations de Riccati sur le pendule inversé, nous aboutissons aux résultats de simulation suivants :

Pour les conditions initiales  $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$  et pour une entrée exogène nulle

$w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , nous avons les résultats des figures suivantes :

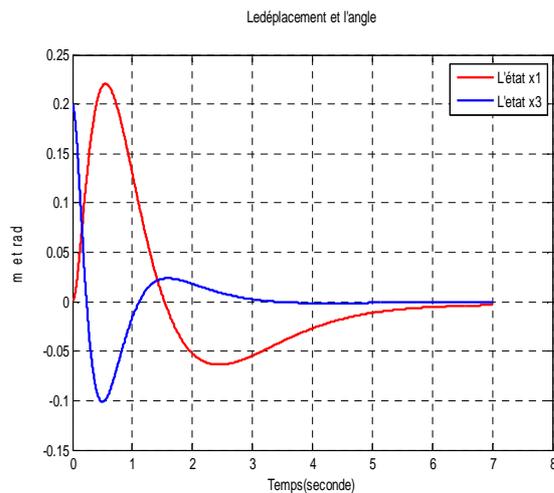


Figure VI.2 : Le déplacement et l'angle de chariot

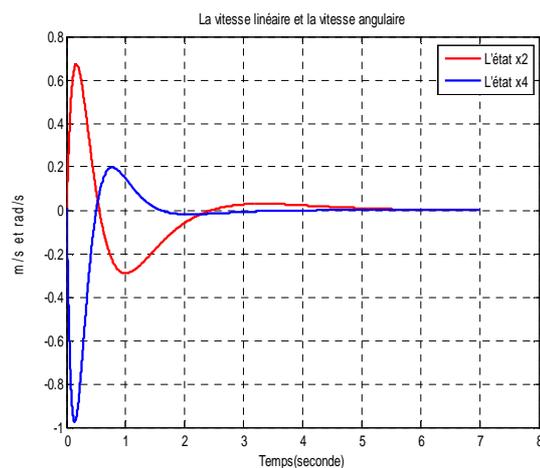


Figure VI.3 : La vitesse linéaire et angulaire

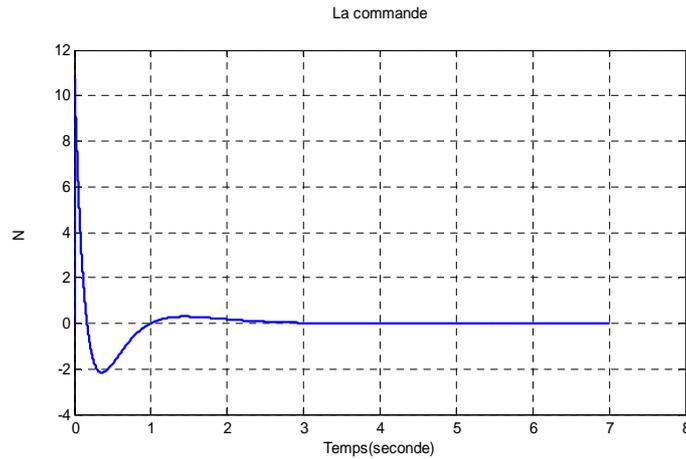


Figure VI.4 : La commande

La commande représente la force qu'il faut appliquée pour maintenir le pendule à la position verticale.

Sans perturbation, et pour une valeur initiale  $x_3 = \theta = 0.2 \text{ rad}$ , le système commandé se stabilise à la position verticale après 6 secondes. Ayant une erreur maximale de  $0.22 \text{ m}$  sur  $r$  et une erreur maximale de  $0.1 \text{ rad}$  dans le sens négatif de  $\theta$ .

Nous changeons, maintenant, les conditions initiales  $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$  l'entée exogène est égale à  $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , est appliquée à  $t=0s$ , les résultats sont, alors données par les figures suivantes :

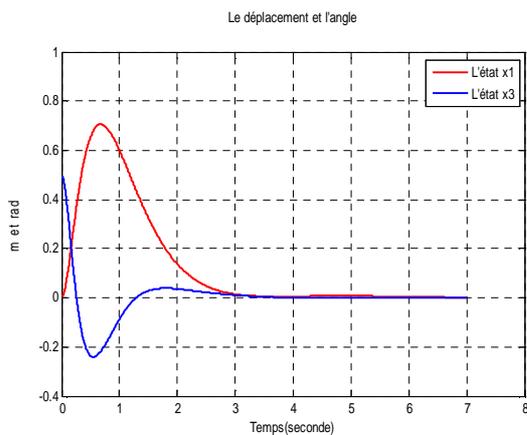


Figure VI.5 : Le déplacement et l'angle de chariot

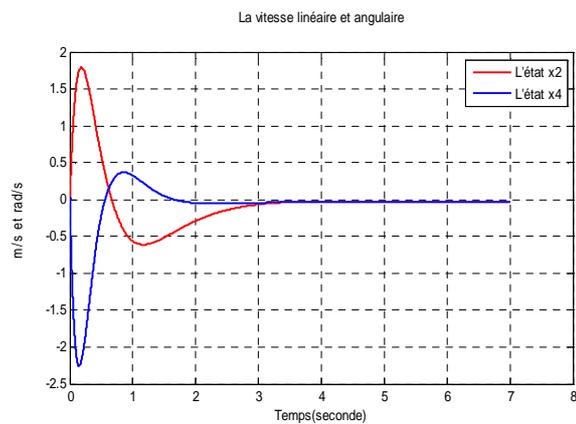


Figure VI.6 : La vitesse linéaire et angulaire de chariot

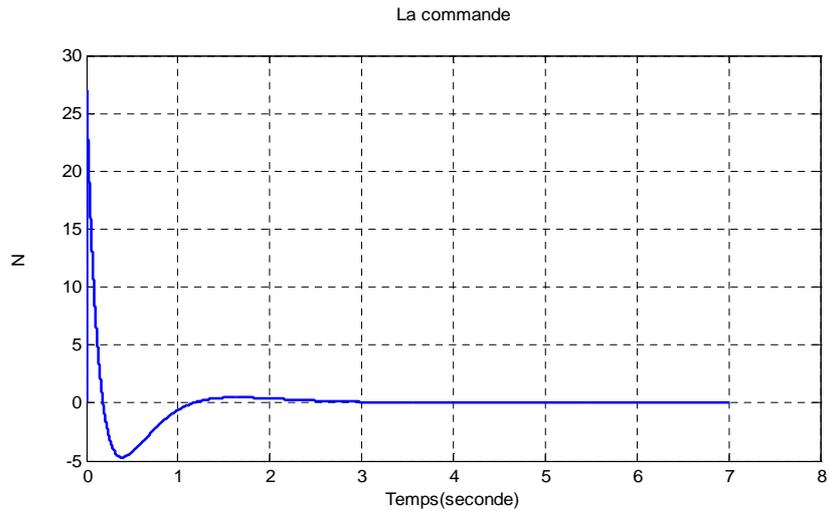


Figure VI.7 : La commande

Le système commandé se stabilise à la position verticale après 3 secondes. L'erreur maximale du déplacement est  $0.7\text{ m}$  et l'erreur maximale de l'angle est de  $0.22\text{ rad}$ .

La valeur de l'entrée exogène étant égale à  $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ , et appliquée à  $t=0\text{s}$ , nous avons les résultats de simulation suivantes :

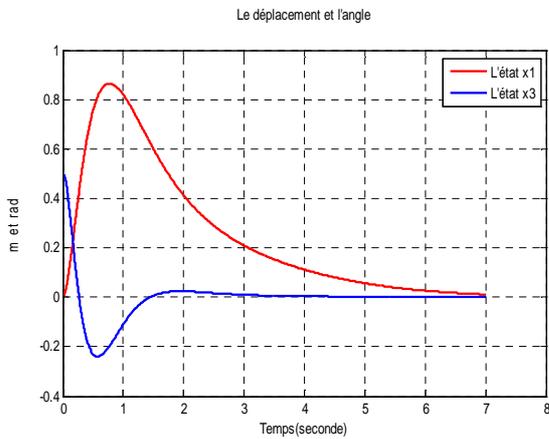


Figure VI.8 : Le déplacement et l'angle de chariot

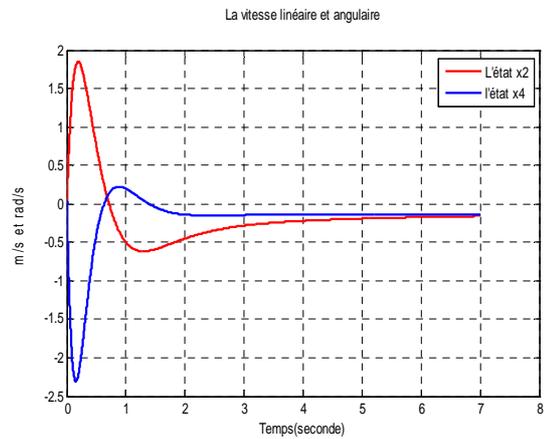


Figure VI.9 : La vitesse linéaire et angulaire de chariot.

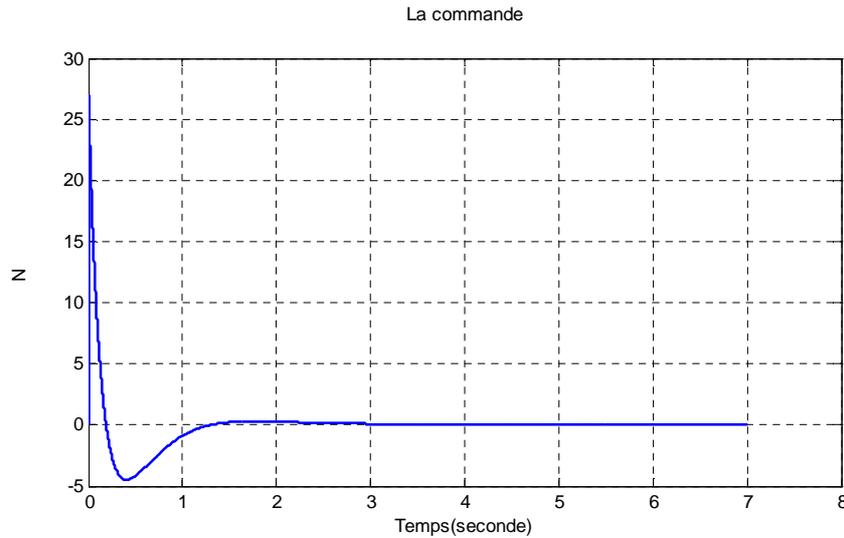


Figure VI.10 : La commande

La commande stabilise le système à la position verticale après 6 secondes. L'erreur maximale sur  $r$  est de  $0.85\text{ m}$  et celle de l'angle  $\theta$  est de  $0.22\text{ rad}$ .

Avec les perturbations, la commande appliquée ramène tous les états à 0, mais le temps de réponse varie selon les conditions initiales, les valeurs des incertitudes et les moments de leur application.

Pour les différentes valeurs de perturbations, et peu importe à quel instant les perturbations sont introduites, le pendule est maintenu à la position verticale.

D'après les résultats de simulation de cette application, la commande  $H_\infty$  linéaire, calculé par la méthode basse sur les équations de Riccati, atteint les objectifs de stabilité et atténuation de l'effet des perturbations puisqu'elle maintient, toujours le pendule à la position verticale, malgré les perturbations.

### IV.1.2 application de la commande $H_\infty$ non linéaire :

Reprenons le modèle de pendule inversé représenté par l'équation (VI.4) (VI.5) (VI.6)

Notre objectif est toujours de stabiliser le système et le maintenir à la position verticale.

Nous appliquons la commande  $H_\infty$  calculée par une approximation successive de l'équation de Hamilton Jacobi (III.28a) qui est une extension de la méthode basé sur les équations de Riccati, par simulation, sur ce système, pour différentes conditions initiales et perturbation.

## Chapitre 4 Application de la commande $H^\infty$ sur un modèle de pendule inversé

En faisant une simulation sur **Matlab**, le gamma optimal ainsi que la solution de l'équation de Riccati est donnée par les valeurs suivantes :

$$X = \begin{bmatrix} 1.82558 & 1.6660 & 5.3303 & 1.0859 \\ 1.6660 & 2.4959 & 8.6347 & 1.7594 \\ 5.3303 & 8.6347 & 69.6382 & 14.1508 \\ 1.0859 & 1.7594 & 14.1508 & 2.8797 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = 55$$

### Etude temporelle :

Pour les premières simulations, nous considérons, les conditions initiales  $[0 \ 0 \ 0.2 \ 0]^T$  et une entrée exogène nulle  $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  ( $d$  représente les perturbations et  $n$  les bruits) les résultats sont, alors, données par les figures suivantes :

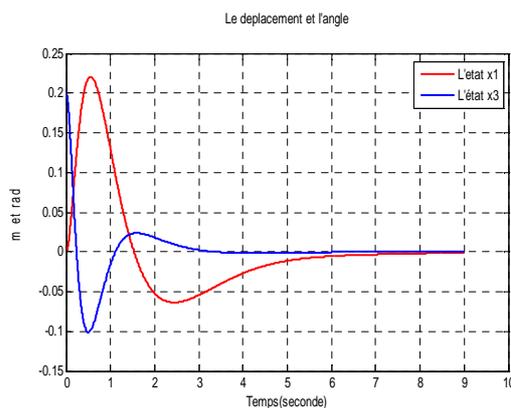


Figure VI.11 : Le déplacement et l'angle de chariot

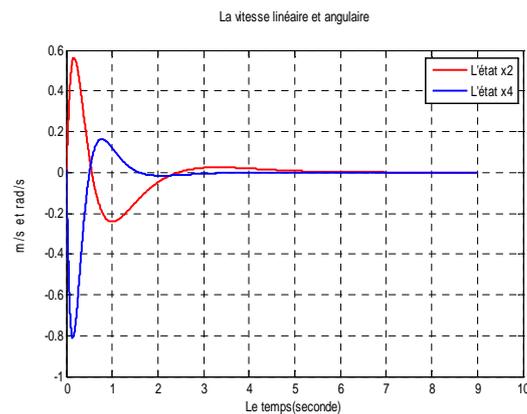


Figure VI.12: La vitesse linéaire et angulaire

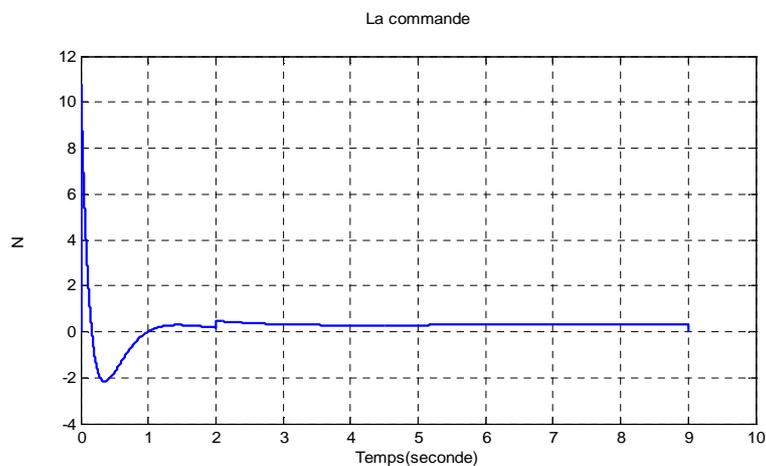


Figure VI.13 : Le déplacement et l'angle de chariot

## Chapitre 4 Application de la commande $H_\infty$ sur un modèle de pendule inversé

La commande  $H_\infty$  non linéaire, calculée par la méthode des approximations successives, pour une perturbation nulle, et pour une valeur initiale  $x_3 = \theta = 0.2 \text{ rad}$ , stabilise le système après 6 secondes, puisqu'elle le maintient à la position verticale avec une erreur maximale de  $0.22 \text{ m}$  sur  $r$  et une erreur maximale de  $0.1 \text{ rad}$  dans le sens négatif des .

Pour les conditions initiales  $[0 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$  et pour une entrée exogène  $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.03 * [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , introduite, cette fois ci à  $t = 2s$ , les résultats de simulation sont données par les figures suivantes :

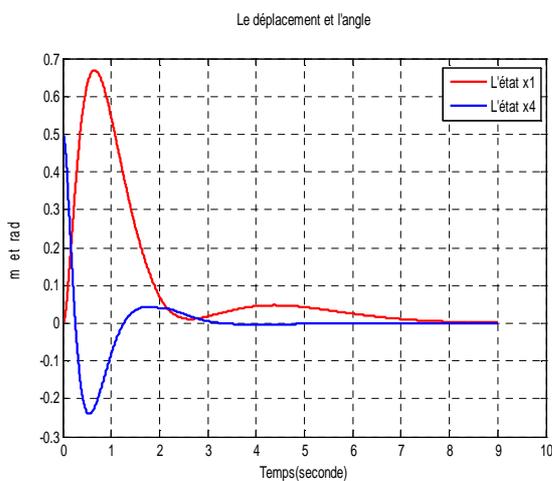


Figure VI.14 : Le déplacement et l'angle de chariot

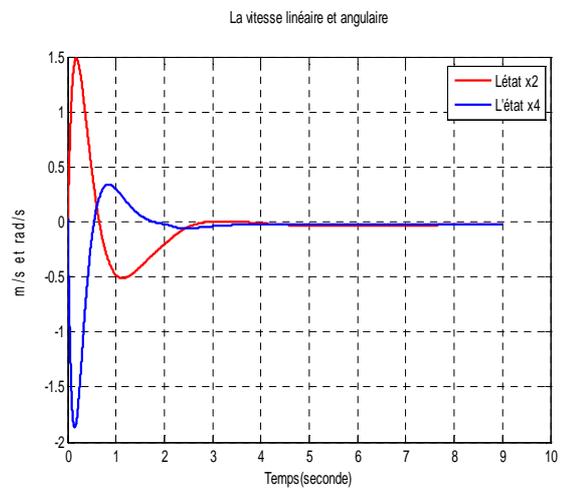


Figure VI.15: La vitesse linéaire et angulaire

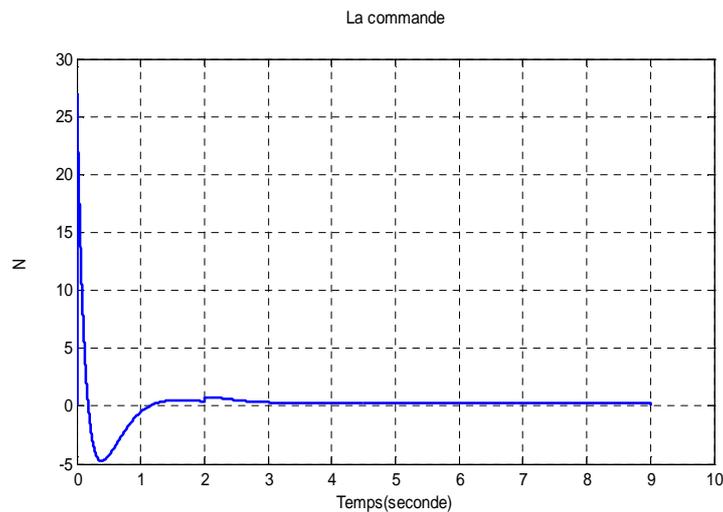


Figure VI.16 : La commande

## Chapitre 4 Application de la commande $H^\infty$ sur un modèle de pendule inversé

Les erreurs, dans ce cas là, atteignent les valeurs suivantes :  $0.68\text{ m}$  pour le déplacement et  $0.22\text{ rad}$  pour l'angle. Le système se stabilise à l'instant  $t = 7\text{ s}$ .

Toujours pour les mêmes conditions initiales  $[0\ 0\ 0.5\ 0]^T$  et pour une entrée exogène  $w = \begin{bmatrix} d \\ n \end{bmatrix} = 0.15 * [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$ , introduite à  $t=2\text{s}$ , les résultats de simulations sont donnés par les figures suivantes :

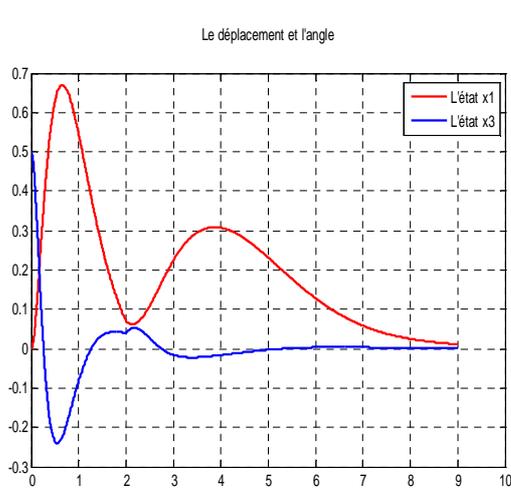


Figure VI.17 : Le déplacement et l'angle de chariot

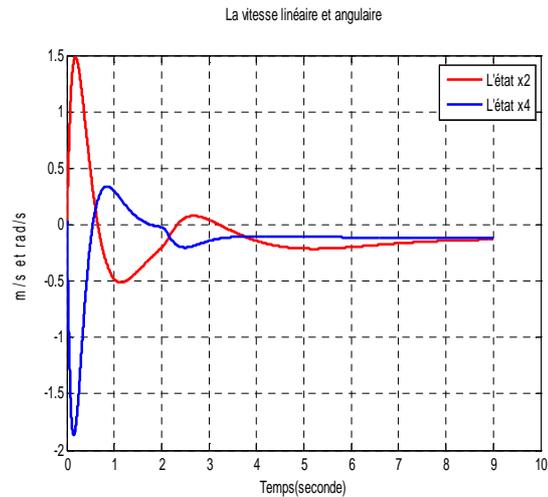


Figure VI.18 : La vitesse linéaire et angulaire

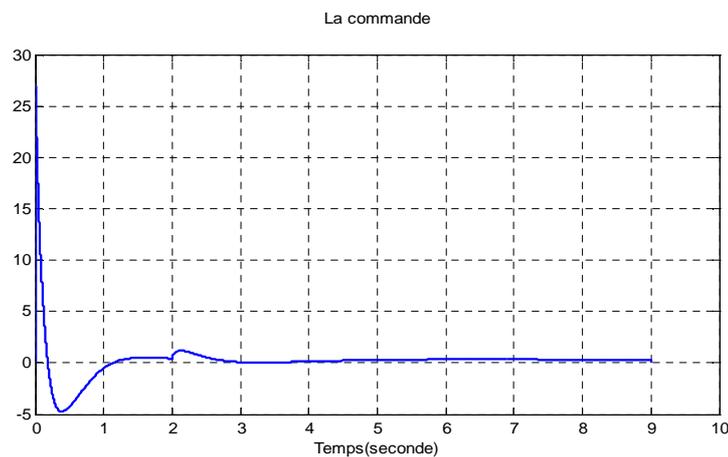


Figure VI.19 : La commande

Dans ce cas là le système bouclé prend 9 secondes pour ramener et maintenir les états à 0.

## **Chapitre 4    Application de la commande $H_\infty$ sur un modèle de pendule inversé**

---

La commande  $H_\infty$  non linéaire, calculée par la méthode des approximations successives stabilise le système du pendule inversé et atténue l'effet des perturbations puisqu'elle maintient toujours, le pendule à la position verticale, et ceci pour différentes valeurs de perturbations et différentes valeurs initiales.

### **Conclusion :**

Dans ce chapitre on a mis en œuvre les deux commandes  $H_\infty$  linéaire et non linéaire en utilisant deux méthodes de résolution. D'après les résultats de simulation on conclut que la commande  $H_\infty$  non linéaire est plus efficace.

## *CONCLUSION GENERALE*

## Conclusion générale

---

### Conclusion générale :

Le travail présenté dans ce mémoire avait pour objectif l'étude de la commande robuste de type  $H_\infty$  avec une application à la commande d'un pendule inversé.

On a exposé les notions générales sur la commande robuste, ainsi que la commande  $H_\infty$  linéaire et non linéaire, et les approches les plus utilisées pour la résolution des problèmes de commande  $H_\infty$ .

En premier lieu on a brièvement exposés la notion de la robustesse et ses différents types (robustesse en stabilité et en performance). On a introduit aussi les incertitudes (structurées et non structurées), ainsi que les notions de base de la norme  $H_\infty$  et  $H_2$ .

En deuxième lieu, on a étudié la commande  $H_\infty$  linéaire. On a donné une description pour le problème standard de cette commande et on a finalisé par sa résolution en utilisant la méthode basée sur l'équation de Riccati.

Ensuite, on a consacré notre étude à la commande  $H_\infty$  non linéaire et sa problématique puis on a présentée la méthode des approximations successives pour résoudre cette problématique.

Enfin pour tester l'efficacité de la commande  $H_\infty$  une application sur un modèle d'un pendule inversé a été mise en œuvre.

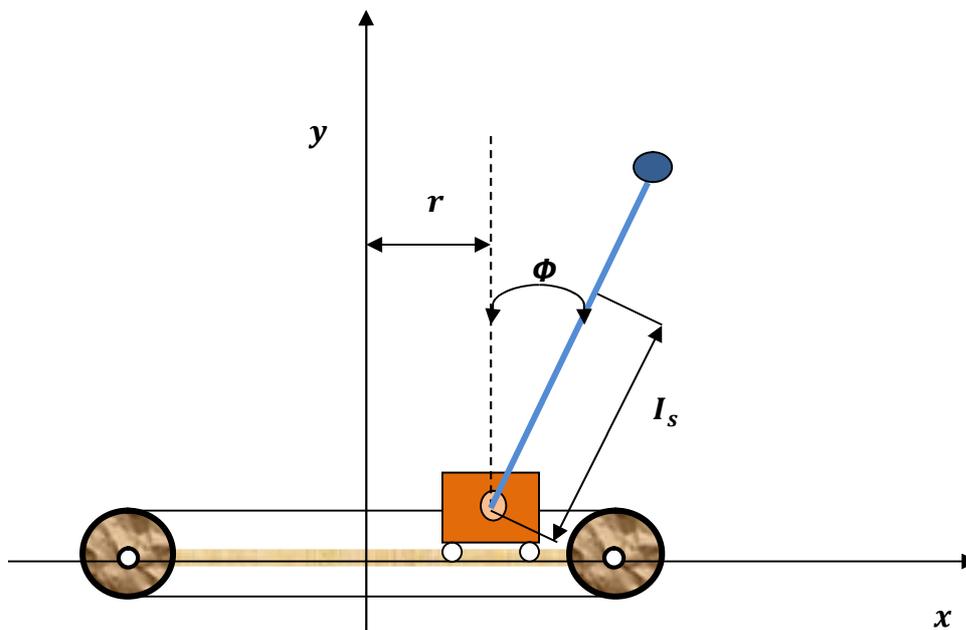
Les résultats de simulation de notre application montrent l'efficacité et la robustesse de la commande  $H_\infty$  linéaire et non linéaire. Après la comparaison entre les deux commandes on a constaté que la commande  $H_\infty$  non linéaire abouti a de meilleurs résultats puisqu'elle considère les non linéarités des systèmes.

# *ANNEXE*

## Annexe A

## A.1. Modèle d'un pendule inversé :

Un pendule inversé est un système qui présente des caractéristiques intéressantes permettant d'illustrer quelques problèmes type. Il s'agit d'un système instable parfaitement décrit par un modèle non linéaire obtenant on appliquant les lois de la physique. L'objectif de cette étude est d'illustrer la commande des systèmes non linéaires. Le schéma de principe de système est donné sur la figure suivante :



Le système est constitué d'un chariot de masse  $M$  solidaire d'une courroie qui peut être entraîné horizontalement à l'aide d'un moteur à courant continu et un système à poulies. Une tige d'aluminium avec à son bout une masse (pendule) est reliée au chariot et peut pivoter dans le plan vertical (voir figure). Soit  $L$  la distance entre l'axe de rotation de la tige et le centre de gravité du pendule et  $m$  la masse de pendule, on appelle  $\theta$  l'angle entre le pendule et le verticale et  $r$  la position de chariot par rapport à l'origine qui sera prise entre les deux poulies.

## A.2. modèle mathématique :

Nous considérons un système de pendule inversé d'écrit par la dynamique suivante :

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} - mgL \sin \theta + mL \cos \theta \ddot{r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$(M + m)\ddot{r} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta + mL \ddot{\theta} \cos \theta = f \quad (\text{A.2})$$

$$u = \ddot{r} \quad (\text{A.3})$$

$$J = \frac{1}{3}mL^3 \quad (\text{A.4})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{4L} \sin \theta - \frac{3}{4L} \cos \theta \cdot u \quad (\text{A.5})$$

$$f = (M + m + 0.75m \sin^2 \theta)u - mL\theta^2 \sin \theta + 0.75\dot{m}g \cos \theta \sin \theta \quad (\text{A.6})$$

$M = 0.445kg$  est la masse de chariot.

$m = 0.21kg$  est la masse de la barre.

$L = 0.3048m$  est la longueur de la barre.

$g = 9.807 m/sec^2$  est l'accélération gravitationnelle.

$J = 1/3mL^2$  est le moment d'inertie.

En définie le vecteur d'états suivant :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \quad (\text{A.7})$$

Ou  $x_1 = r$  est le déplacement.

$x_2 = \dot{r}$  est la vitesse linéaire.

$x_3 = \theta$  est l'angle(déplacement angulaire).

$x_4 = \dot{\theta}$  est la vitesse angulaire.

La représentation d'état non linéaire du système du pendule inversé est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ u \\ \dot{\theta} \\ \frac{3g}{4L} \sin \theta - \frac{3}{4L} \cos \theta \cdot u \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

En remplaçant les paramètres par leur valeurs nous aboutissons à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 24,1314x_3 - 4,0219x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2,4606 + 1,2303x_3^2 \end{bmatrix} u \quad (\text{A.9})$$

$$y = \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (\text{A.10})$$

*REFERENCES*  
*BIBLIOGRAPHIQUES*

## Bibliographie

---

### Références bibliographiques

- [1] A. Benlatreche, “ Contribution à la commande robuste de systèmes à grande échelle d’enroulement de bandes flexibles ”, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 26 Janvier 2007
- [2] A. Lahmer, “Implantation expérimentale de la commande robuste par un contrôleur ”, Mémoire de Magister, Université de Batna, 12 Janvier 2011
- [3] G. Scorletti, V. Fromion, “Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle ”, Cours AU32 du Master Recherche ESCI 2A UFR de Sciences, Université de Caen/Basse Normandie, France, 2007
- [4] G. Zames, “Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, issue N°4, 1981.
- [5] L. Lavigne, “ Outils d’analyse et de synthèse des lois de commande robustes des systèmes dynamiques plats ”, Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 17 Juin 2003.
- [6] F. Abdulgalil, “ Commande non linéaire dans les systèmes de forage pétrolier: contribution a la suppression du phénomène de « stick-slip » ”, Thèse de Doctorat en sciences, Université Paris XI Orsay, 28 Février 2006
- [7] G. Sallom, “Contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation”, Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 13 Mars 2007.
- [8] R. Boukezzoula, “Commande floue d’une classe de systèmes non linéaires: application au problème de suivi de trajectoire”, Thèse de Doctorat, Université de Savoie, 31 mars 2000.
- [9 ] M. Mohamed Seddik, “ application de la commande aux systèmes linéaires perturbés “, thèse magister, Université Ferhat Abbas \_ Sétif, Ufas (Algérie) ,24 janvier 2012.
- [10] Mme Yousfi safia “développement d’algorithme pour la commande  $H_\infty$  des systèmes non linéaires : application à un procédé industriel“, Thèse de Magister , Université Mouloud Mammeri de Tizi uzou, 30 mai 2010.
- [11] G.Duc, S. Font, “Commande et  $\mu$ -analyse”, Hermès Science Publication, 1999.
- [12] T.Nakayama, H. Ohmori, A Sano, &  $H_\infty$ . Ito. A desingn of  $H_\infty$  stable controller. Proceedings of the European control conference, 1995.

## Bibliographie

---

- [13] K. Zhou, J.C. Doyle, "Essentials of Robust Control", Prentice-Hall, 1999.
- [14] A. Isidori, W. Kang, " $H_\infty$  Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems," IEEE Trans Automatic Control vol. 40, No. 3, pp.466-472, 1995.
- [15] Shr-Shiung Hu and Bor-Chin Chang. "Design of a Nonlinear H Controller for Inverted Pendulum system" 1998 IEEE Conference on control Applications. Sept 1998.
- [16] S. S. Hu, P. H. Yang, and B. C. Chang, "A Successive Algorithm for Solving Hamilton-Jacobi Equation," Proceedings of the 1999 American Control Conference, June 1999.
- [17] D. Sammier, "Sur la modélisation et la commande de suspension de véhicules automobiles", Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 09 Novembre 2001.
- [18] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis, "State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 34, N°8, pp. 831-847, 1989.
- [19] L. Palladino, "Analyse comparative de différentes lois de commande en vue du contrôle global du Châssis", Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud XI, 04 Décembre 2006.
- [20] S. Choulak, "Modélisation et Commande D'un Procédé D'extrusion Réactive", Thèse Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon 1, 2004.
- [21] Y. Lossier, "Ajustement de lois de commande application en aéronautique", Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 24 mars 2006.
- [22] Pao-Hwa Yang. Shr-Shing Hu. J.Y.Juang. "Design of a Nonlinear H Controller Applied to a Ship Control System". 2000 IEEE Conference on control Applications. Sept 25-27, 2000.
- [23] A. J. van der Schaft, "L2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear  $H_\infty$  control," IEEE Trans Automat. Contr., vol. 37, pp. 770-784, 1992.
- [24] D.L. Lukes, "Optimal Regulation of Nonlinear Dynamical Systems," SIAM J. Optim. Control, vol. 7, pp. 75-100, 1969.