

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Magistère

Ecole Doctorale

Option

Mathématiques

Thème

**Homogénéisation de l'équation de
diffusion dans des domaines perforés
à différentes échelles**

Présenté par

Sadani Idir

Soutenu devant le jury composé de :

Mr M. Morsli	Professeur	UMMTO	Président
Mr H. Haddadou	Maître de conférence	ESI	Rapporteur
Mr M. Boukra	Chargé de recherche	UMMTO	Examinateur
Mme F. Khellas	Maître de conférence	UMMTO	Examinatrice
Mme L. Rahmani	Maître de conférence	UMMTO	Examinatrice

Tizi-Ouzou, Année 2009

*A mes parents.
A mes frères et sœurs.
A la mémoire de mes grands-parents.*

*“La musique est une mathématique sonore,
la mathématique une musique silencieuse.”
Edouard Herriot*

Remerciements

Mes toutes premières expressions de gratitude vont à **H. Haddadou**, qui m'a dirigé avec rigueur et application tout au long de mon mémoire. Je le remercie pour son appui scientifique, qui m'a été indispensable, et aussi pour son soutien moral, sa disponibilité, ses qualités personnelles et son amabilité. Je voudrais également remercier **M. Morsli** qui m'a donné l'opportunité de rencontrer mon encadreur, et pour ses conseils judicieux et son aide morale et scientifique, dont il est le président de ma soutenance.

Mes remerciements s'adressent aussi à **Mme Khellas et Mme L. Rahmani** pour l'intérêt qu'elles ont manifesté pour mon travail en acceptant de faire partie de mon jury.

Je remercie chacune et chacun de mes professeurs qui se sont succédés, dès mes premiers pas à la maternelle jusqu'au DES, pour m'éduquer et m'apprendre la science et les bonnes manières. C'est grâce à eux et à leurs encouragements que j'ai pu poursuivre avec réussite mon parcours académique.

Je n'oublierai jamais et je ne remercierai jamais assez chacune et chacun de mes adorables amis, de mes formidables proches, ainsi que toute personne qui m'a aimé, aidé, soutenu et cru en moi. Avec eux, j'ai partagé des moments agréables, inoubliables, de joie et d'émotions.

Enfin, je m'incline respectueusement devant les deux êtres à qui je dois mon existence, mon père et ma mère. Je leur exprime mes hauts et profonds signes de reconnaissance et d'obéissance pour tous les efforts qu'ils ont fournis et tous les sacrifices qu'ils ont généreusement faits, pour que je grandisse dans de parfaites conditions d'amour, de satisfaction et d'épanouissement. C'est à eux que je dédie le résultat de mon travail ainsi qu'à mes sœurs et frères que j'embrasse très fort.

SADANI Idir

Table des matières

Table des matières	iv
Résumé	1
Notations	3
Introduction générale	9
1 Matériaux composites et homogénéisation	10
1.1 Définitions générales	11
1.2 Homogénéisation	13
1.2.1 But de la théorie	17
1.2.2 Applications de l'homogénéisation	17
2 Méthodes d'homogénéisation périodique dans les domaines composites et perforés	19
Première partie. Méthodes d'homogénéisation dans les domaines composites périodiques	21
2.1 Notations et Position du problème	22
2.2 Méthode du Développement asymptotique à deux échelles	24
2.3 Méthode des fonctions test oscillantes	31
2.4 Méthode de convergence à deux échelles	37
Deuxième partie. Méthodes d'homogénéisation dans les domaines perforés périodiques	47
2.5 Notations et position du problème	48
2.6 Méthode des fonctions test oscillantes	50

2.7	Méthode de convergence à deux échelles	56
3	H-convergence dans les domaines composites et perforés	60
3.1	H-convergence dans les domaines composites	61
3.1.1	Caractère local de la H-convergence	62
3.1.2	Lemme de compacité par compensation	63
3.1.3	Compacité séquentielle de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H-convergence	66
3.2	H -convergence dans les domaines perforé	73
3.2.1	Caractère local de la H^0 -convergence	79
3.2.2	Compacité séquentielle de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H^0 -convergence	82
3.2.3	Notion de correcteur	83
3.3	Application de la H-convergence aux matériaux perforés non périodiques	84
3.3.1	Cas du domaine perforé non périodique à une échelle .	84
3.3.2	Résultat de la H^0 -convergence	85
3.4	Application de la H-convergence aux domaines à double per- foration	93
3.4.1	Homogénéisation réitérée	93
3.4.2	Application dans les domaines à double perforation . .	95
	Conclusion & perspectives	103
	Annexe	104
	A	105
A.1	Analyse fonctionnelle	105
A.2	Les propriétés des fonctions rapidement oscillantes	108
	Bibliographie	117

Résumé

Nous proposons dans ce mémoire une étude asymptotique de la solution de l'équation de diffusion. Ce type d'étude s'inscrit dans le cadre de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Pour faire cette étude, nous présentons quelques méthodes d'homogénéisation dans deux domaines différents à savoir, domaines composites et perforés. Notre but est d'étudier trois méthodes particulières dans le sens qu'elle sont valides et applicables uniquement aux problèmes posés dans des domaines périodiques (soit composites ou perforés) i.e. les hétérogénéités sont réparties périodiquement dans la matrice du matériau, et une autre plus générale appelée la H-convergence due à L. Tartar et F. Murat ([35]) qui est applicable dans le cas périodique et non périodique. M. Briane, A. Damlamian et P. Donato ([14]) ont donné une version de la H-convergence dans des domaines perforés sous le nom de la H^0 -convergence. Cette méthode va nous servir pour étudier et énoncer un résultat (un théorème) pour le même type de problèmes dans des domaines non périodiques et à double perforation.

Notations

- Ω : Ouvert borné de \mathbb{R} .
- Y : Cellule de base.
- ϵ : Petit paramètre positif destiné à tendre vers 0.
- x : Variable macroscopique,
- y : Variable microscopique,
- $mes(D)$: Volume, surface ou longueur d'un domaine D .
- $a(.,.)$: Désigne une forme bilinéaire.
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
- $q = \gamma \nabla u$: Le flux de température u .
- $\vec{\nu}$: La normale extérieure au bord considéré.
- $L_{per}^2(Y)$: L'ensemble des fonctions Y -périodiques et à carré sommable dans Y .
- $u(x, y) \in L^p(\Omega; C_{per}(Y))$: Signifie $u(x, y)$ périodique en y tel que, pour tout $y \in Y$, $x \rightarrow u(x, y)$ est dans $L^p(\Omega)$ et pour presque tout $x \in \Omega$, $x \rightarrow u(x, y)$ est continue et $\int_{\Omega} \sup_{y \in Y} |u(x, y)|^p dx < +\infty$.
- $D(\Omega)$: Ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω .
- $D'(\Omega)$: L'espace des distributions.
- $C_{per}^{\infty}(Y)$: Ensemble de fonctions infiniment dérivables dans Y et Y -périodiques.

- $D(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$: L'espace des fonctions régulières sur $\Omega \times \mathbb{R}^N$ telles que pour tout $x \in \Omega$, $x \longrightarrow u(x, \cdot) \in C_{per}^\infty(Y)$ et pour tout $y \in Y$, $x \longrightarrow u(\cdot, y) \in D(\Omega)$.

Introduction générale

Dans ce mémoire il sera question d'étudier le comportement asymptotique de solutions d'une classe d'équations aux dérivées partielles avec des coefficients fortement oscillants. On a choisi comme modèle le problème elliptique de type Dirichlet modélisant la diffusion de la chaleur. Ce type d'étude s'inscrit dans le cadre de la théorie mathématique de l'homogénéisation ; cette théorie est essentiellement développée ces trente dernières années, dans le but de décrire mathématiquement les propriétés des matériaux composites, et bien entendu la structure de ces matériaux peut être très diverse (structure stratifiée, fibrée, . . .), leur point commun étant d'être composés de divers constituants intimement mélangés, imbriqués (liés d'une manière étroite). L'intérêt pour de telles structures s'explique par les propriétés physiques macroscopiques particulières qu'elles présentent, par exemple, dans un matériau à deux composantes différentes, la conduction de la chaleur ou du courant électrique s'effectueront différemment et parfois mieux que dans chacun des deux constituants homogènes pris séparément en raison de leur juxtaposition au niveau microscopique. Une difficulté majeure rencontrée dans l'étude des équations de la physique dans de tels matériaux est que les divers paramètres physiques (coefficients de conductivité, d'élasticité, . . .) sont discontinus et varient très vite d'un constituant à l'autre. Une approche numérique type éléments finis, basée sur une méthode de discrétisation, tombe alors en défaut. En effet, pour prendre en compte les conditions de transmission d'un constituant à l'autre, le pas de discrétisation doit être pris très petit, à l'échelle de la structure microscopique du matériau, le temps et le coût du calcul devenant, par conséquent, excessifs. Pour remédier à ces difficultés, nous allons utiliser la théorie de l'homogénéisation qui permet de moyenniser (homogénéiser) ces équations qui sont déjà posé dans un milieu hétérogène (i.e. dans le matériau composite). Le traitement numérique du problème homogénéisé relève alors des méthodes classiques.

Au départ, ce sont donc des considérations numériques qui ont motivé le développement de la théorie de l'homogénéisation. Pour cela, des méthodes sont mises en œuvre pour déduire le problème homogénéisé, parmi celles-ci, la méthode de développement asymptotique à multi-échelles [7], la méthode de convergence à deux échelles [2] et celle de fonctions test oscillantes [16],[33], qui fonctionnent dans les domaines à microstructure périodique, et que nous allons utiliser pour démontrer les résultats principaux de l'homogénéisation pour notre problème modèle. Très récemment, une nouvelle méthode apparaît sous le nom de **l'éclatement périodique**, développée principalement par D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso dans un article appararu en 2002

(voir [17]). Cette méthode n'est pas traitée dans ce mémoire, brièvement alors, nous citons juste que le problème homogénéisé obtenu par celle-ci se fait par la définition d'un opérateur appelé **opérateur d'éclatement** et par passage à la limite.

En plus de ces méthodes, on a d'autres plus générales qui ne demandent pas une microstructure périodique du domaine, on peut citer par exemple : la H-convergence [33], [35], G-convergence [22], Γ -convergence [42],... Toutes ces méthodes peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes de ce genre. En particulier, dans ce mémoire, on met l'accent sur la méthode de la H-convergence développée par F. Murat et L. Tartar dans les années 70-80, et nous allons l'étudier dans des domaines composites et perforés en démontrant leurs propriétés principales, par exemple : propriété de localité, compacité par compensation, théorème de compacité, etc.

Nous avons traité un cas particulier de domaines, en utilisant la H-convergence dans les domaines perforés, à savoir, le domaine perforé à double perforation, tel que, la grande échelle est périodique tandis que la petite est répartie sur un treillis non périodique défini via un difféomorphisme θ .

Plan du mémoire

Ce mémoire est organisé en trois chapitres avec un appendice.

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on introduit quelques définitions concernant les matériaux composites, les variétés qui y existe. On définit la théorie de l'homogénéisation également, son but, et on termine par citer quelques champs d'application. Quelques exemples des matériaux composites, leurs constituants, leurs applications industrielles, sont récapitulés dans un tableau à la fin de ce chapitre.

Chapitre 2 : Ce chapitre comporte deux parties, chaque partie est consacrée à l'étude des méthodes d'homogénéisation l'une dans les milieux composites et l'autre dans les milieux perforés. Toutes ces méthodes servent à trouver le problème limite (ou homogénéisé) du problème posé. Pour le cas des domaines à microstructure périodique (dorénavant, on dit tout simplement le cas périodique) nous présentons seulement les trois méthodes évoquées ci-dessus, c'est-à-dire, la méthode de développement asymptotique (formelle), la méthode des fonctions test oscillantes, et la dernière est celle de convergence à deux échelles.

Pour introduire l'idée de la théorie de l'homogénéisation, nous considérons le problème de conduction dans un matériau composite dont ses propriétés

varies rapidement à l'échelle microscopique. Notons par $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine occupé par ce matériau, $\epsilon \ll 1$ un petit paramètre caractérisant ses hétérogénéités à l'échelle microscopique. Considérons le problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} -div(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

tel que $\partial\Omega$ est lipschitzienne, $f \in H^{-1}(\Omega)$. Supposons de plus que $A^\epsilon = A(\frac{x}{\epsilon})$ et la matrice $A(y)$ (le tenseur de conductivité thermique) est périodique dans chaque direction de l'espace. Le but de la théorie de l'homogénéisation est d'étudier la limite de u^ϵ quand $\epsilon \rightarrow 0$. En particulier, il est souhaitable d'identifier l'équation satisfaite par u^ϵ dans cette limite. Autrement dit, si u^0 est la limite de u^ϵ quand $\epsilon \rightarrow 0$, cette limite u^0 est solution d'une équation de la forme (0.1). De point de vue physique, la limite $\epsilon \rightarrow 0$ correspond au cas où les hétérogénéités deviennent de plus en plus petites. Notre but est de remplacer le matériau hétérogène de début, caractérisé par les coefficients rapidement oscillants $A(\frac{x}{\epsilon})$ par un matériau homogène ou effectif caractérisé par des coefficients constants A^0 . D'où le nom homogénéisation.

Nous allons montrer, sous certaines conditions sur A^ϵ, f, Ω , que l'équation homogénéisée de (0.1) est

$$\begin{cases} -div(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.2)$$

la constante A^0 , qu'on appellera la matrice homogénéisée est donnée par la formule

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y w_j) e_i dy, \quad (0.3)$$

où w_j est solution du problème suivant (qu'on appelle problème cellulaire) :

$$\begin{cases} div(A(y)(e_j + \nabla_y w_j)) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \rightarrow w_j & \text{Y-périodique, } y \in Y, \end{cases} \quad (0.4)$$

Le calcul des coefficients de la matrice A^0 nécessite la solution d'une EDP posée dans la cellule de base Y , en même temps le calcul de l'intégral (0.3). Donc, trouver la solution homogénéisée u^0 demande la solution de deux EDPs elliptiques : Le problème cellulaire, qui permet la construction de A^0 donné par (0.3), et le problème de Dirichlet (0.2). Le point important est que ces équations ne dépendent pas du petit paramètre ϵ . Dans quelques cas, les deux équations elliptiques peuvent être résolues explicitement. Si ce n'est pas le

cas, on peut les résoudre en utilisant des méthodes numériques comme par exemple, la fameuse méthode des éléments finis.

Nous commencerons le chapitre par la présentation de la méthode de développement asymptotique pour déduire l'équation homogénéisée. Cette méthode est fréquemment utilisée par les ingénieurs en raison de sa simplicité à obtenir l'équation homogénéisée, et elle sera justifiée rigoureusement en utilisant les deux dernières méthodes. Ainsi c'est dans ce chapitre que sera introduite la majorité des outils et notions dont on se servira tout au long de notre travail, tels que variable macroscopique, variable microscopique, développement asymptotique à deux échelles, problèmes cellulaires, convergence à deux échelles, fonctions test, En résumé, les résultats principaux de ce chapitre sont :

1) Un résultat d'homogénéisation périodique concernant le problème (0.1) dans les domaines composites à deux échelles (i.e. formé à partir de deux composants différents) est décrit par le théorème 2.2 : Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u^ϵ est la solution de (0.1) avec $\{A^\epsilon\}$ définie par (2.1) - (2.2) (voir le chapitre 2). Alors,

$$\begin{cases} i) u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ ii) A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases} \quad (0.5)$$

où u^ϵ est solution de problème (0.1), et u^0 est la solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ du problème homogénéisé (0.2). La matrice $A^0 = (A_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq N}$ est constante, appelée la matrice homogénéisée, est définie par

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) e_i dy, \quad (0.6)$$

tel que w_j est solution du problème cellulaire (0.4). Ce théorème est démontré par les deux méthodes évoquées précédemment.

2) Un résultat d'homogénéisation pour le même problème dans les domaines perforés pour une suite de trous $\{T^\epsilon\}$. Etant donné $f \in L^2(\Omega)$ et u^ϵ est la solution de (0.1) avec la condition supplémentaire $A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nu = 0$ sur ∂T^ϵ , et $\{A^\epsilon\}$ définie par (2.66)-(2.67) (voir le chapitre 2). Alors, il existe un prolongement $P_\epsilon u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$P_\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \text{ quand } \epsilon \longrightarrow 0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (0.7)$$

où u^0 la solution de l'équation homogénéisée

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = \theta f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.8)$$

Ce résultat est donné par le théorème 2.11 et sera démontré par la méthode des fonctions test oscillantes à condition que les trous soient isolés et ne touchent pas le bord du domaine. Le même résultat obtenu par la méthode de convergence à deux échelles et qui est donné par le théorème 2.16 (il y a une équivalence entre ce théorème et le théorème 2.11) mais sans faire appel aux opérateurs de prolongement (c'est à dire on n'a pas l'équation (0.7)) et aucune condition doit être vérifiée sur les trous mis à part la condition de régularité imposée sur leurs bords. Le problème homogénéisé dans ce cas est donné par le système homogénéisé dit **à deux échelles** suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y (A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)]) = 0 & \text{dans } \Omega \times Y^*, \\ -\operatorname{div}_x [\int_{Y^*} A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)] dy] = \theta f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ y \longrightarrow u^1(x, y) & \text{Y-périodique,} \\ (A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)]) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial Y^* - \partial Y, \end{cases}$$

qui est équivalent aux problèmes homogénéisés (0.8) et les équations cellulaires (2.71) à travers la relation

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N w_j(y) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x).$$

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous présentons une méthode plus générale, c'est la méthode de la H-convergence introduite par L. Tartar et F. Murat. Dans le cas des matériaux composites occupant un domaine Ω , où f , Ω , A^ϵ , doivent vérifier certaines conditions (voir le chapitre 3), on dit que $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$, H-convergente vers $A^0 \in M(\alpha', \beta'; \Omega)$, si les convergences faibles suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases} \quad (0.9)$$

où u^0 est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (0.10)$$

Parallèlement, nous donnons l'énoncé de cette définition dans les domaines perforés et les résultats principaux dans chaque cas.

Un exemple d'application est fait à propos de la H-convergence dans les domaines perforés à savoir : Etant donné un matériau perforé par deux

types de trous sphériques de tailles différentes. Les grands trous sont répartis périodiquement, avec une périodicité de l'ordre d'un petit paramètre ϵ tandis que les petits trous sont centrés sur un treillis non périodique défini via une fonction auxiliaire θ défini de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , un difféomorphisme de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\theta^{-1} \text{ a une constante lipchitzienne } \gamma^{-1} \text{ avec } \delta > 2. \quad (0.11)$$

Dans cette situation, on obtient un matériau homogénéisé dont ses coefficients dépendent de $\nabla\theta(\theta^{-1})$. Le résultat d'homogénéisation dans ce cas (qui est donné par le théorème 3.25) est le suivant : Supposons que $|\partial\Omega| = 0$. Soit $\{B^\epsilon\}$ une suite dans $M(\alpha, \beta; Y(x))$. Sous la condition de la proposition 3.24, la paire $(B^\epsilon, S_{\epsilon\delta\epsilon})$ est H^0 -convergente dans Y/Π^1 vers la matrice $B_x \in M(\alpha C^{-2}, \beta; Y(x))$. Supposons de plus que B^ϵ est prolongé par périodicité et posons

$$\forall x \in \Omega, A^\epsilon(x) = B^\epsilon\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

alors, la paire $(A^\epsilon, S_{\epsilon,\delta})$ H^0 -converge vers la matrice A^0 définie par

$$A^0(x) = B_x^0, \quad (0.12)$$

où

$$B_x^0 \lambda = \frac{1}{|Y|} \int_Y B^0(\lambda + \nabla_y \tilde{w}_\lambda) dy, \quad (0.13)$$

telle que w_λ Y/Π_1 -périodique de moyenne 0, est l'unique solution dans $H_{per}^1(Y/\Pi_1)/\mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} -div_y [B^0(\lambda + \nabla_y w_\lambda)] = 0 & \text{dans } Y/\Pi_1, \\ B^0(\lambda + \nabla_y w_\lambda)\nu = 0 & \partial\Pi_1. \end{cases} \quad (0.14)$$

Annexe : Dans l'annexe, on a évoqué quelques résultats d'analyse fonctionnelle et les fonctions rapidement oscillantes, qui seront utilisés lors de notre étude. Cet appendice est scindé en deux parties A1 (analyse fonctionnelle) et A2 (fonctions rapidement oscillantes), et les résultats de chaque partie sont numérotés respectivement par A.x.

Chapitre 1

Matériaux composites et homogénéisation

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions générales concernant les matériaux composites. La relation étroite qui existe entre ce type de matériaux et la théorie de l'homogénéisation nous a conduit à introduire ce chapitre. En parallèle, nous donnons la définition de l'homogénéisation, son but et les domaines d'application d'une manière générale. A la fin de ce chapitre se trouve un tableau qui récapitule quelques matériaux composites, leurs constituants et leurs applications industrielles.

1.1 Définitions générales

Définition 1.1 (Matériau homogène et matériau hétérogène [8]). Un matériau est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point d'observation. Mathématiquement, il s'agit de l'indépendance de ses propriétés de la variable espace. Un matériau est dit hétérogène dans le cas contraire.

Définition 1.2 (Matériau composite [8]). Un matériau composite est un matériau constitué de deux ou plusieurs éléments de natures différentes, par exemple l'acier est constitué de fer et de carbone.

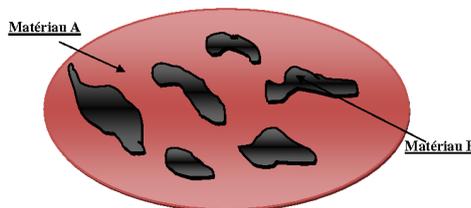


FIG. 1.1 – Matériau composite à deux constituants

Définition 1.3 (Matériau poreux [37]). Un matériau poreux est un matériau constitué d'une phase solide appelée squelette et d'une phase fluide (de l'air par exemple) contenue dans les pores.

L'étude de ces milieux est un domaine de recherche très actif du fait du large champ de ses applications par exemple : l'étude du transport neutronique, du bâtiment, de l'écoulement des fluides et de la propagation d'ondes en milieu poreux déformable, etc.

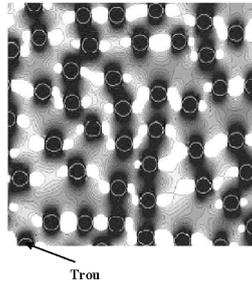


FIG. 1.2 – Plaque perforée

Définition 1.4 (Matériaux à structure périodique [6]). Un matériau est dit à structure périodique s'il est formé par une répétition périodique dans l'espace d'un motif élémentaire constitué de différents matériaux qui représentent les hétérogénéités comme le montre la figure 1.1. Ce motif élémentaire, qui se répète de proche en proche, est généralement appelé cellule de base ou motif de base qu'on note Y , dont la taille est très petite par rapport à celle de la structure.

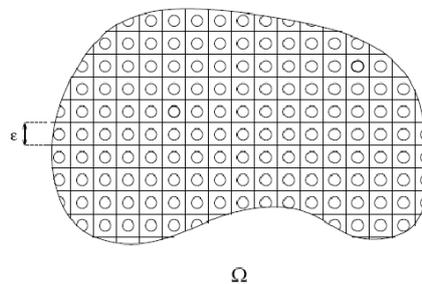


FIG. 1.3 – Matériau à structure périodique [1]

On ait donc en présence de deux échelles de grandeurs associées respectivement à la taille globale de la structure, qu'on appelle échelle macroscopique, et à celle de la cellule de base Y , qu'on appelle échelle microscopique définie par l'intermédiaire d'une dilatation de rapport ϵ . En conséquence, le comportement mécanique peut être caractérisé par une description faisant appelle à deux variables x et y où x décrit la variation des grandeurs à l'échelle de la structure et y décrit la variation rapide et consécutive à la microstructure. Les deux variables ne sont cependant pas totalement indépendantes. Si on

désigne par ϵ l'ordre de grandeur caractéristique de la cellule (évidemment très petit vis-à-vis des dimensions caractéristiques de la structure globale), il est possible de relier la variable microscopique y à la variable macroscopique x par la transformation d'homothétie $y = \frac{x}{\epsilon}$.

1.2 Homogénéisation

Définition 1.5 (Homogénéisation [8]). L'homogénéisation consiste à remplacer le milieu hétérogène par un milieu homogène effectif qui a les mêmes propriétés. Mathématiquement, il s'agit d'étudier le comportement asymptotique d'une équation aux dérivées partielles à coefficients oscillants, dépendant d'un petit paramètre en faisant tendre ce dernier vers zéro. Ou bien, d'une manière équivalente, l'homogénéisation est une méthode mathématique qui permet d'obtenir des problèmes asymptotiquement équivalents en faisant tendre la taille des hétérogénéités vers zéro (c'est-à-dire en faisant tendre ϵ vers zéro).

Pour présenter cette théorie, nous considérons le problème de conduction de la chaleur dans deux milieux différents à savoir, le milieu homogène et le milieu hétérogène ou composite. Le procédé de l'homogénéisation intervient uniquement quand le problème est posé dans ce dernier milieu avec une forte hétérogénéité, sinon le problème est résolu directement en milieu homogène.

On a en particulier les deux situations suivantes :

Problème en milieu homogène : Soit un corps homogène occupant un domaine Ω , de conductivité thermique γ . Pour simplifier l'exposé, supposons que le matériau est isotrope (c'est-à-dire que les propriétés mécaniques du matériau ne dépendent pas de la direction), par conséquent, γ est un scalaire. Supposons que f représente la source de la chaleur et que la température sur $\partial\Omega$ égale à zéro. Alors, la température au point x notée $u = u(x)$ satisfait le problème elliptique homogène suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Puisque γ est une constante, l'équation (1.1) peut être écrite sous la forme

suivante :

$$\begin{cases} -\gamma \Delta u(x) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Le flux de la température est défini par

$$q = \gamma \nabla u.$$

C'est un problème aux limites classique. Si f est suffisamment régulière, il admet une unique solution deux fois différentiable et résout le système (1.2) en tout point $x \in \Omega$ (pour plus de détail, voir [12]). Notons que le calcul de la solution du problème ne demande pas un passage par le procédé de l'homogénéisation.

Problème en milieu hétérogène : Si maintenant on considère un matériau hétérogène (composite) occupant un domaine Ω , alors la conductivité thermique prend différentes valeurs sur chaque composant de composite. Pour cette raison γ est alors une fonction discontinue sur le domaine Ω . Pour simplifier, supposons que nous sommes en présence de mixture de deux matériaux de conductivités différentes, l'un occupe un sous domaine qu'on note Ω_1 et l'autre occupe Ω_2 , avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \partial\Omega_1$ (voir la figure ci-dessous). Notons que dans la figure ci-dessous, la partie Ω_1 est considérée comme une hétérogénéité dans Ω .

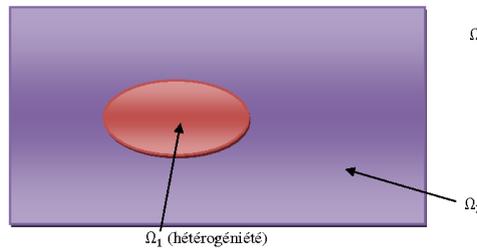


FIG. 1.4 –

Supposons en plus que les conductivités thermiques des corps occupant Ω_1 et Ω_2 sont γ_1 , et γ_2 respectivement, i.e.

$$\gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \gamma_2 & \text{si } x \in \Omega_2 \end{cases}$$

La température et le flux prennent respectivement les valeurs

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

et

$$q(x) = \begin{cases} \gamma_1 \nabla u_1(x) & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \gamma_2 \nabla u_2(x) & \text{si } x \in \Omega_2, \end{cases}$$

Les hypothèses physiques habituelles sont la continuité de la température u et le flux q à l'interface des deux matériaux, i.e.

$$\begin{cases} u_1 = u_2 & \text{sur } \partial\Omega_1, \\ (q_1 - q_2)\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1, \end{cases} \quad (1.3)$$

où ν est la normale extérieure au $\partial\Omega_1$. Donc, la température u est solution du problème thermique stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma_1 \nabla u_1) = f & \text{dans } \Omega_1, \\ -\operatorname{div}(\gamma_2 \nabla u_2) = f & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1 = u_2 & \text{sur } \Omega_1, \\ (q_1 - q_2)\nu = 0 & \text{sur } \Omega_1, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le système ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

On observe en général que, d'après (1.3), le gradient de u est discontinu, et généralement, le flux q n'est pas différentiable.

En tenant compte de ces discontinuités, la question qui se pose alors : quelle est la formulation mathématique qu'on peut associer à ce problème et quel est l'espace fonctionnel où on ait la solution ? (Puisqu'on ne peut pas avoir une solution de classe C^1).

Une réponse à ces questions peut être donnée en présentant une notion faible de solution. Elle est basée sur la notion de dérivée faible (au sens des distributions), et bien entendu, l'espace fonctionnel utilisé est celui de Sobolev.

Dans la définition de solution faible, le problème (1.4) est remplacé par la formulation variationnelle suivante : Pour $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \quad (1.5)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel sont démontrées en appliquant le lemme de Lax-Milgram.

Dans ci-dessus, nous avons présenté le problème de conduction de la chaleur dans deux milieux différents, homogène et hétérogène (composite) à une seule hétérogénéité. Maintenant, considérons le même problème dans un milieu composite contenant plusieurs hétérogénéités. Supposons que ces hétérogénéités sont très petites par rapport à la taille globale de Ω , et qu'elles sont équi-distribuées. Du point de vue mathématique, on peut modéliser cette distribution en supposant qu'elle est périodique (voir la figure ci-dessous). Notons que cette distribution n'est pas une propriété intrinsèque, il y a par exemple des structures aléatoires (roches,...), quasi-périodiques, ...

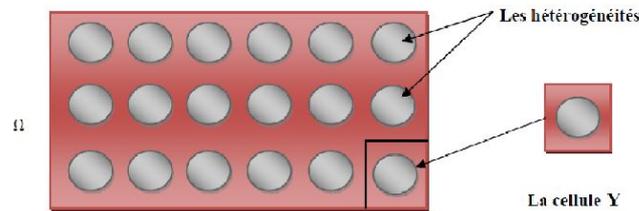


FIG. 1.5 – Matériau composite périodique

Par suite, cette périodicité peut être représentée par un petit paramètre ϵ . Alors, le coefficient γ dans (1.5) dépend de ϵ , et (1.5) s'écrit comme suit : Trouver $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$, tel que

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \gamma^\epsilon(x) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in H. \quad (1.6)$$

La manière naturelle pour introduire la périodicité de γ^ϵ dans (1.6) est de l'écrire sous la forme suivante :

$$\gamma^\epsilon(x) = \gamma\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad (1.7)$$

où γ est une fonction périodique (donnée) de période Y . Cela signifie que nous avons donné une période de référence. Par la définition (1.7), les hétérogénéités sont de période ϵY et leurs tailles sont de l'ordre ϵ . On observe que les deux échelles qu'on a évoqué dans le chapitre précédent caractérisent le modèle (1.6), l'échelle macroscopique x et l'échelle microscopique x/ϵ décrivant les micro-oscillations.

Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique du problème (1.6) en faisant tendre la taille des hétérogénéités vers zéro. Rendre ces hétérogénéités de plus en plus petites est la procédure pour homogénéiser (moyenner) le mélange. Du point de vue mathématique, faire tendre $\epsilon \rightarrow 0$, c'est l'homogénéisation mathématique du problème (1.6).

Dans ce cas, beaucoup de questions se posent et parmi celles-ci :

1. Est-ce que la température u^ϵ converge vers une certaine limite u^0 quand $\epsilon \rightarrow 0$?
2. Si cela est vrai, est-ce que u^0 vérifie un problème aux limites de même type que le problème initial ?
3. Finalement, est-ce que u^0 est une bonne approximation de u^ϵ ?

La réponse à ces questions est le but de la théorie mathématique de l'homogénéisation.

1.2.1 But de la théorie

Le but de la théorie de l'homogénéisation est de décrire les propriétés moyennes des matériaux composites au niveau macroscopique en tenant compte de leur arrangement microscopique. Dans la pratique numérique son rôle réside dans le gain de temps et la quantité de la mémoire utilisée lors de la simulation numérique (résolution d'un problème donné par ordinateur).

1.2.2 Applications de l'homogénéisation

Les champs d'application de cette théorie sont variés, par exemple en génie civil, mécanique, aéronautique, électronique, l'ingénierie pétrolière, la gestion des déchets radioactifs, problème de transport neutronique, problèmes d'optimisation des formes et la gestion des ressources en eau souterraines.

Exemples des matériaux composites et leurs applications

Le tableau suivant illustre quelques matériaux composites et leurs domaines d'application.

	Constituants	Domaines d'applications
1) Composites à matrice organique		
Papier, carton	Résine /charge/fibres cellulosiques	Imprimerie/emballage, etc.
Panneaux de particule	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de fibres	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Toiles enduites	Résine souple /tissus	Sports, bâtiment
Matériau d'étanchéité	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Pneumatiques	Elastomères/bitume/textiles	Toiture, terrasse, etc.
Stratifiés	Caoutchouc/toile/acier	Automobile, etc
Plastique renforcés	Résine/charges/fibres de verre	Domaines variés
Plastique renforcés	Résine/microsphères	Domaines variés
2) Composites à matrice minérale		
Béton	Ciment/sable/granulats	Génie civil
Composite carbone-carbone	Carbone/fibres de carbone	Aviation, espace, sports, etc.
Composite céramique	Céramique/fibres céramiques	Pièces thermomécaniques
3) Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de carbone	Espace
4) Sandwiches	Métaux, stratifiés, etc.	Domaines multiples
Peaux	Mousses, nids d'abeilles,	
Armes	plastiques renforcés, etc.	

Tableau 1.1. Exemples des matériaux composites pris au sens large [8].

Chapitre 2

Méthodes d'homogénéisation périodique dans les domaines composites et perforés

Ce chapitre est composé de deux parties : La première partie est consacrée à l'étude des méthodes d'homogénéisation périodique dans les domaines composites et dont elles seront utilisées pour démontrer notre résultat principal qui est donné par le théorème 2.2. Dans la deuxième partie, nous présentons ces méthodes d'homogénéisation dans les domaines perforés en démontrant le théorème 2.11 par la méthode des fonctions test oscillantes et le théorème 2.16 par la méthode de convergence deux échelles.

Première partie

Méthodes d'homogénéisation dans les
domaines composites périodiques

Cette partie de ce chapitre est consacrée essentiellement à l'étude de quelques méthodes d'homogénéisation dans les milieux composites. Ici, nous présentons trois méthodes, la méthode du développement asymptotique (formelle), la méthode des fonctions test oscillantes due à L. Tartar, et la méthode mise au point par Nguetseng (1989) et Allaire (1992) introduite dans [36] et [2], dite de convergence à deux échelles. La méthode du développement asymptotique est complétée par la méthode des fonctions test oscillantes pour justifier les deux premiers termes de développement. Toutes ces méthodes sont utilisées lorsque les hétérogénéités sont réparties périodiquement, et elles servent à trouver le problème limite dit **homogénéisé** du problème initial. Pour les présenter, nous considérons comme modèle, le problème elliptique de type (0.1) décrivant la conduction de la chaleur.

2.1 Notations et Position du problème

Soient Ω un sous ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^N occupé par un matériau composite, et ϵ prend ses valeurs sur une suite de nombres réels positifs strictement décroissante qui converge vers zéro. On note par $Y =]0, l_1[\times \dots \times]0, l_N[$, où l_1, \dots, l_N sont des nombres réels positifs, la cellule de base dans Ω .

Définition 2.1 ([16]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$. On note par $M(\alpha, \beta, \Omega)$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in (L^\infty(\Omega))^{N \times N}$ telles que

$$\begin{cases} i) & (A(x)\xi, \xi) \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \\ ii) & |A(x)\xi| \leq \beta |\xi| \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

p.p. $x \in \Omega$.

Définition 2.2. On dit qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans H^1 est Y-périodique si $\varphi(x) = \varphi(x + l_i e_i)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $i = 1, \dots, N$, telle que $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la base canonique de \mathbb{R}^N .

On définit $A^\epsilon = (a_{ij}^\epsilon)_{1 \leq i, j \leq N} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{M}_{N, N}(\mathbb{R})$ par

$$A^\epsilon(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est Y-périodique } \forall i, j = 1, \dots, N, \\ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M(\alpha, \beta, Y), \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < \beta$.

Définissons l'opérateur \mathcal{A}^ϵ par

$$\mathcal{A}^\epsilon = -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla) = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\{A^\epsilon\}$ défini comme ci-dessus. Notre but est d'homogénéiser le problème (2.3), autrement dit, nous allons étudier le comportement asymptotique de (2.3) quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Problème variationnel de (2.3). Le problème (2.3) admet la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.4)$$

Pour chaque ϵ fixé, d'après le lemme de Lax-Milgram, le problème (2.4) admet une unique solution $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie l'estimation a priori suivante :

$$\|u^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Notons que la représentation (2.4) ne demande pas des conditions de régularité sur les fonctions a_{ij} . Comme $\{u^\epsilon\}$ est une suite bornée, d'après le théorème A.3, il existe une suite extraite de $\{u^\epsilon\}$ (notée aussi par $\{u^\epsilon\}$) et un élément $u^0 \in H_0^1(\Omega)$ tels que

$$u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

On observe d'après (2.6) que la limite u^0 dépend de la sous-suite extraite. La question qui se pose, est ce que u^0 se détermine d'une manière unique ? En d'autres termes, est ce qu'on peut construire un opérateur B tel que $\{u^\epsilon\}$ converge vers u^0 solution unique du problème suivant :

$$\begin{cases} Bu^0 = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $B = -\operatorname{div}(A^0 \nabla)$. Dans cette situation, nous appelons (2.6) problème homogénéisé du (2.3) et A^0 la matrice homogénéisée de $\{A^\epsilon\}$. On verra au fur et à mesure que la réponse à cette question est par oui.

La difficulté dans l'homogénéisation de notre problème consiste dans le passage à la limite du produit $A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ qui est le produit de deux suites faiblement convergentes. En général, la limite de produit de deux suites faiblement convergentes ne converge pas vers le produit des limites. Pour se convaincre, voir le contre exemple 2.1 ci-dessous. Notons que si $\{A^\epsilon\}$ converge fortement dans $(L^2(\Omega))^{N^2}$ vers une matrice $A^0 \in M(\alpha, \beta, \Omega)$, on peut passer à la limite dans $A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ d'après la proposition A.4, et on a $A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0$ dans $(L^2(\Omega))^N$ faible, et donc u^0 est solution unique car $A^0 \in M(\alpha, \beta, \Omega)$. Il en va autrement si l'on ne fait pas l'hypothèse de convergence forte sur $\{A^\epsilon\}$.

Exemple 2.1. Nous considérons $Y =]0, 2\pi[$ et $f(x) = \sin x$. Il est clair que $f^\epsilon(x) = \sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ converge vers 0 faiblement dans $L^2(Y)$ (voir l'exemple A.1). D'autre part, f^ϵ ne converge pas presque partout. En outre,

$$\|f^\epsilon - 0\|_{L^2(Y)}^2 = \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \longrightarrow \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(y) dy\right) 2\pi = \pi \neq 0, \quad (2.8)$$

qui montre qu'on n'a pas la convergence de f^ϵ vers f dans la topologie forte de $L^2(Y)$. En outre, cet exemple prouve bien que la limite de produit de deux suites faiblement convergentes diffère de produit de limites. En effet, (2.8) prouve que $(f^\epsilon)^2 = f^\epsilon \times f^\epsilon$ ne converge pas faiblement dans $L^2(Y)$ vers 0.

2.2 Méthode du Développement asymptotique à deux échelles

Afin d'étudier le comportement homogénéisé du corps occupant un domaine Ω , c'est-à-dire de trouver la limite du problème (2.3) quand $\epsilon \rightarrow 0$, on utilise une méthode dite de développement asymptotique à deux échelles. Il s'agit d'une analyse asymptotique de l'équation (2.3) lorsque la période ϵ tend vers 0. L'hypothèse de départ est de supposer que la solution u^ϵ de l'équation (2.3) est donnée par un développement en série de ϵ , dit à **deux échelles**, du type

$$u^\epsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 u_2\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots, \quad (2.9)$$

avec $u_j = u_j(x, y)$ pour $j = 1, 2, \dots$, tel que

$$\begin{cases} u_j(x, y) & \text{est définie pour } x \in \Omega \text{ et } y \in Y, \\ u_j(x, y) & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

Cette méthode est classique et souvent utilisée en physique et en mécanique pour les problèmes qui contiennent plusieurs paramètres (échelles). Il s'avère que cette méthode est bien adaptée, en particulier, dans un cadre de travail périodique (matériaux à microstructure périodique), comme témoignée par les résultats obtenus par Sanchez-Palencia (1970) et Bensoussan, Lions, et Papanicolaou (1978) (pour plus de détails voir [7], [15]).

L'idée de la méthode est d'insérer la série (2.9) dans l'équation (2.3). Soit alors $\Psi = \Psi(x, y)$ une fonction dépendante de deux variable de \mathbb{R}^N , et notons par Ψ_ϵ la fonction suivante :

$$\Psi_\epsilon(x) = \Psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

qui dépend seulement d'une variable. En utilisant la règle de dérivation composée, on obtient

$$\frac{\partial \Psi_\epsilon}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y_i}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right).$$

Par conséquent, on peut écrire $\mathcal{A}_\epsilon \Psi_\epsilon$ comme suit

$$\mathcal{A}_\epsilon \Psi_\epsilon(x) = [(\epsilon^{-2} \mathcal{A}_0 + \epsilon^{-1} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \Psi]\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right),$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}^\epsilon(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \\ \mathcal{A}_1 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^\epsilon(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i} \left(a_{ij}^\epsilon(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \\ \mathcal{A}_2 = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^\epsilon(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{cases} \quad (2.10)$$

Maintenant, en injectant (2.9) dans l'équation (2.3) et en utilisant (2.10), on obtient, en identifiant chaque puissance de ϵ comme une équation individuelle, la cascade d'équations suivante (sur le principe qu'une série entière de ϵ est nulle si et seulement si tout ses coefficients sont nuls) :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_0 = 0 & \text{dans } Y, \\ u_0 & Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_1 + \mathcal{A}_1 u_0 = 0 & \text{dans } Y, \\ u_1 & Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_2 = f - \mathcal{A}_1 u_1 - \mathcal{A}_2 u_0 & \text{dans } Y, \\ u_2 & Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (2.13)$$

et pour tout $i \geq 1$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_{i+2} = -\mathcal{A}_1 u_{i+1} - \mathcal{A}_2 u_i & \text{dans } Y, \\ u_{i+2} & Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Remarque 2.1 ([16]). 1) Notons que ce système a une structure particulière. Les inconnus u_j peuvent être déterminés successivement. En effet, la première équation (2.11) contient seulement l'inconnu u_0 . Si u_0 est connu, la seconde équation (2.12) permet de déterminer u_1 en fonction de u_0 . De la même manière, la troisième équation (2.13) détermine u_2 en terme de u_0 et u_1 , et ainsi de suite.

Pour résoudre ces équations nous aurons besoin de résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 2.1 ([1]). Soit $H_{per}^1(Y)$ l'espace de Sobolev des fonctions périodiques de période Y , et soit $F \in (H_{per}^1(Y))'$. Alors, le problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A\nabla_y v) = F & \text{dans } Y, \\ y \longrightarrow v(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

admet une unique solution $v \in H_{per}^1(Y)/\mathbb{R}$ (à une constante additive près) si et seulement si

$$\int_Y F(y) dy = 0.$$

Cette condition s'appelle **alternative de Fredholm**.

On ait maintenant en position de d'étudier les systèmes (2.11), (2.12) et (2.13) qui suffisent pour déterminer l'équation homogénéisée de notre problème.

Première étape : Étude du système (2.11)

L'équation (2.11) équivalente à

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y u(x, y)) = 0 & \text{dans } Y, \\ u_0 & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases} \quad (2.15)$$

En utilisant la formule de Green et en tenant compte de l'hypothèse de périodicité, le problème ci-dessus est équivalent au problème suivant : Trouver $u_0(x, \cdot) \in H_{per}^1(Y)$ tel que

$$\int_Y A\nabla u_0 \nabla \varphi dy = 0, \forall \varphi \in H_{per}^1(Y).$$

Dans les équations ci-dessus y est la variable et x n'est qu'un paramètre. En vertu du lemme 2.1, le problème (2.15) admet une unique solution $u_0(x, \cdot) \in H_{per}^1(Y)$ à une constante additive près. Choisissons $\varphi = u_0(x, \cdot)$ dans la formulation variationnelle ci-dessus et en utilisant la condition d'ellipticité satisfaite par la matrice A , il suit immédiatement que $u_0(x, \cdot) = \text{const}$ par rapport à y , i.e.

$$u_0(x, y) = u_0(x).$$

Deuxième étape : Étude du système (2.12)

Comme $\nabla_y u_0 = 0$, l'équation (2.12) devient

$$\operatorname{div}_y(A(y)(\nabla_y u_1(x, y) + \nabla_x u_0(x))) = 0 \text{ dans } Y, \quad (2.16)$$

qui est une équation pour l'inconnu u_1 dans la cellule de base Y vérifiant le lemme 2.1. Cette équation admet une unique solution, à une constante additive près, ce qui nous permet de calculer u_1 en fonction du gradient $\nabla_x u(x)$. Par ailleurs, si w_i est solution du problème cellulaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)(e_i + \nabla_y w_i(y))) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \longrightarrow w_i(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases} \quad (2.17)$$

où $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ est la base canonique de \mathbb{R}^N , alors $W(y)\nabla u_0(x)$, où $W(y) = (w_i(y))_{1 \leq i \leq N}$, est solution de (2.16), donc en vertu de l'existence et de l'unicité de la solution de problème (2.16) à une constante additive près (qui est assuré par le lemme 2.1), u_1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_1(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i(y) \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} + \tilde{u}_1(x), \quad (2.18)$$

\tilde{u}_1 est une constante additive près par rapport à y .

Troisième étape : Étude de système (2.13)

Finalement, la troisième équation (2.13) devient

$$-div_y (A(y)\nabla_y u_2(x, y)) = div_y (A(y)\nabla_x u_1) + div_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) + f,$$

qui est une équation pour l'inconnu u_2 dans la cellule Y . L'équation admet une unique solution à une constante additive près, si la condition de compatibilité suivante est vérifiée

$$\int_Y [div_y (A(y)\nabla_x u_1) + div_x (A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) + f] dy = 0. \quad (2.19)$$

En intégrant et en utilisant la périodicité, le premier terme de (2.19) s'annule. Par conséquent (2.19) se simplifie en

$$-div_x \left(\int_Y A(y) (\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) dy \right) = |Y| f(x) \text{ dans } \Omega. \quad (2.20)$$

En insérant l'expression (2.18) pour $u_1(x, y)$, dans l'équation (2.20), on obtient l'équation homogénéisée

$$\begin{cases} -div_x (A^0 \nabla_x u_0(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.21)$$

avec

$$A^0 \nabla_x u_0 = \frac{1}{|Y|} \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) dy.$$

La condition aux limites de Dirichlet pour u_0 provient de celle imposée à u^ϵ sur $\partial\Omega$. La matrice homogénéisée A^0 est donc définie par ses coefficients

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) e_i dy. \quad (2.22)$$

D'une manière équivalente, A^0 est défini par

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y) (e_i + \nabla_y w_i) (e_j + \nabla_y w_j) dy, \quad (2.23)$$

qui s'obtient en remarquant qu'à cause de la formulation variationnelle de (2.17)

$$\int_Y A(y) (e_j + \nabla_y w_j) \nabla_y w_i dy = 0$$

La formule (2.23) n'est pas totalement explicite car elle dépend des solutions w_i des problèmes cellulaires que l'on ne peut pas résoudre analytiquement en général. La matrice constante A^0 décrit les propriétés effectives ou homogénéisées ou macroscopiques du milieu hétérogène $A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Remarquons qu'elle ne dépend ni du choix du domaine Ω , ni de la fonction f , et ni des conditions aux limites sur $\partial\Omega$.

Voici un exemple simple de calcul explicite de A^0 en dimension 1.

Exemple 2.2. En dimension d'espace $N = 1$ et $Y = [0, 1]$, on peut résoudre explicitement le problème cellulaire (2.17) et donner une formule explicite pour le tenseur homogénéisé A^0 (qui est un scalaire puisque $N = 1$). En effet, dans ce cas le problème cellulaire s'écrit

$$\begin{cases} -\left(A(y)(1+w'(y))'\right) = 0 & \text{dans } [0, 1], \\ y \longrightarrow w(y) & \text{1-périodique,} \end{cases}$$

où le signe (\prime) indique la dérivée en y . En intégrant cette équation différentielle, on trouve que

$$w(y) = -y + \int_0^y \frac{C_1}{A(t)} dt + C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. Pour que w soit périodique c'est-à-dire $w(0) = w(1)$, il faut que

$$C_1 = \left(\int_0^1 \frac{1}{A(y)} dy \right)^{-1}.$$

Tandis que C_2 est quelconque (ce qui est compatible avec le résultat d'unicité à une constante près du lemme 2.1). En injectant l'expression obtenue pour w dans la formule (2.23) pour A^0 , on obtient

$$A^0 = \int_0^1 A(y) \left(1 + w'(y)\right)^2 dy.$$

Finalement, on trouve

$$A^0 = \left(\int_0^1 \frac{1}{A(y)} dy \right)^{-1}.$$

Remarque 2.2. Par linéarité, les équations (2.17) sont équivalentes au problème défini pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)(\lambda + \nabla_y W_\lambda(y))) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \longrightarrow W_\lambda(y) & \text{Y-périodique,} \end{cases} \quad (2.24)$$

tel que $w_i = W_{e_i}$ solution de (2.24). La matrice homogénéisée dans ce cas est donnée par

$$A^0 \lambda = M_Y(A(y)(\nabla W_\lambda + \lambda)) = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(\nabla W_\lambda + \lambda) dy. \quad (2.25)$$

On aurait souvent utilisé la fonction W_λ dans les démonstrations qui suivent au lieu des fonctions $(w_i)_{1 \leq i \leq N}$ seulement pour simplifier les notations. Si on veut par suite calculer les coefficients A_{ij}^0 , il suffit de poser $\lambda = e_i, 1 \leq i \leq N, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$.

Remarque 2.3 (Importante). La méthode du développement asymptotique à deux échelles est seulement formelle du point de vue mathématique. En général, elle conduit heuristiquement à des résultats corrects, mais elle ne constitue pas une preuve du procédé d'homogénéisation. La raison en est que la série postulée n'est pas exacte après les deux premiers termes (ce sont les seuls que l'on peut pleinement justifier). Par exemple, cette série ne tient pas compte des conditions imposées sur le bord $\partial\Omega$ (pour plus de détails sur ce point, voir [7]).

Le résultat principal d'homogénéisation est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.2 ([16]). Soient $f \in H^{-1}(\Omega)$ et u^ϵ est la solution de (2.3) avec A^ϵ défini par (2.1)-(2.2). Alors,

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases} \quad (2.26)$$

où u^0 est la solution unique dans $H_0^1(\Omega)$ du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.27)$$

où la matrice $A^0 = (A_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq N}$ est constante, et définie par

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{|Y|} \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y w_j) e_i dy,$$

tel que w_j est solution du problème cellulaire (2.17).

Les deux sous sections suivantes ont pour but de démontrer le théorème ci-dessus en utilisant la méthode des fonctions test oscillantes et la méthode de convergence à deux échelles. Rappelons encore, en prouvant le théorème 2.2 en utilisant ces méthodes considéré une justification rigoureuse de problème homogénéisé (2.21) obtenu précédemment à l'aide de la méthode du développement asymptotique.

2.3 Méthode des fonctions test oscillantes

Cette méthode qui va nous servir pour démonter le théorème 2.2, repose sur la construction d'une classe de fonctions test oscillantes obtenues en utilisant le développement asymptotique. Dans notre cas (i.e. cas périodique), elles sont de la forme suivantes :

$$w_\lambda^\epsilon(x) = \lambda x + \epsilon w_\lambda \left(\frac{x}{\epsilon} \right),$$

tel que w_λ est solution du problème cellulaire (2.17).

Démonstration du théorème 2.2 par la Méthode des fonctions test oscillantes.
Soit u^ϵ la solution du problème (2.3). d'après l'estimation (2.5), on a

$$\begin{cases} i) u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ ii) u^\epsilon \longrightarrow u^0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.28)$$

De plus, si on pose $\xi^\epsilon = A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ alors

$$\int_\Omega \xi^\epsilon \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (2.29)$$

Puisque,

$$\|\xi^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha},$$

alors, il existe une sous suite de $\{\xi^\epsilon\}$ notée toujours $\{\xi^\epsilon\}$ et $\xi^0 \in (L^2(\Omega))^N$ tels que

$$\xi^\epsilon \rightharpoonup \xi^0 \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^N. \quad (2.30)$$

En passant à la limite dans (2.29) , il vient

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad (2.31)$$

ce qui implique que

$$-div \xi^0 = f \text{ dans } \Omega. \quad (2.32)$$

Alors, le théorème 2.2 est démontré si on prouve que

$$\xi^0 = A^0 \nabla u^0, \quad (2.33)$$

car ceci, joint à (2.31), implique que u^0 satisfait le problème (2.27) du théorème 2.2. D'autre part, en vertu de lemme de Lax-Milgram et l'ellipticité de la matrice homogénéisée A^0 (voir [16]) on obtient l'unicité de la solution. Par conséquent, les convergences (2.28) restent vraies pour la suite toute entière. Posons maintenant

$$w_\lambda^\epsilon(x) = \lambda x + \epsilon w_\lambda^t \left(\frac{x}{\epsilon} \right), \quad (2.34)$$

tel que w_λ^t est solution du problème adjoint cellulaire suivant :

$$\begin{cases} -div({}^t A(y) (\lambda + \nabla_y w_\lambda^t(y))) = 0 & \text{dans } Y, \\ y \longrightarrow w_\lambda^t(y) & \text{Y-périodique,} \end{cases}$$

où ${}^t A$ est la transposée de A . En raison du théorème A.13, on a

$$w_\lambda^\epsilon \rightharpoonup \lambda x \text{ faiblement dans } L^2(\Omega). \quad (2.35)$$

Par ailleurs, observons que

$$\nabla_x w_\lambda^\epsilon(x) = \lambda + \nabla_y w_\lambda^t \left(\frac{x}{\epsilon} \right).$$

Ainsi, en vertu du théorème A.13, on a

$$\nabla_x w_\lambda^\epsilon \rightharpoonup M_Y(\lambda + \nabla_y w_\lambda^t) = \lambda + M_Y(\nabla_y w_\lambda^t) = \lambda \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \quad (2.36)$$

En effet, d'après la formule de Green, on a

$$\int_Y \nabla_y w_\lambda^t(y) dy = \int_{\partial Y} w_\lambda^t \nu ds_y = 0,$$

car w_λ^t prend la même trace sur les faces opposées de Y . Alors,

$$M_Y(\nabla_y w_\lambda^t) = 0.$$

D'autre part, d'après (2.35) et (2.36), on obtient

$$\begin{cases} i) w_\lambda^\epsilon \rightharpoonup \lambda x & \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \\ ii) w_\lambda^\epsilon \longrightarrow \lambda x & \text{fortement dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.37)$$

Par suite, introduisons la fonction vectorielle suivante :

$$\eta_\lambda^\epsilon = {}^t A^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon.$$

D'après (2.34) et (2.1), on voit que

$$\eta_\lambda^\epsilon(x) = {}^t A (\lambda + \nabla_y w_\lambda^t) \left(\frac{x}{\epsilon} \right).$$

Puisque ${}^t A$ est Y -périodique, ${}^t A \nabla_y w_\lambda^t$ est Y -périodique aussi, en appliquant une autre fois le théorème A.13, on aura

$$\eta_\lambda^\epsilon \rightharpoonup M_Y (({}^t A) (\lambda + \nabla_y w_\lambda^t)) = {}^t A^0 \lambda \text{ faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \quad (2.38)$$

où A^0 est donné par le théorème ci-dessus.

Montrons maintenant que η_λ^ϵ satisfait

$$\int_\Omega \eta_\lambda^\epsilon \nabla v dx = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.39)$$

Pour faire cela, considérons une fonction $\varphi \in D(\Omega)$, et posons

$$\varphi^\epsilon(y) = \varphi(\epsilon y), \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N.$$

Il est clair que φ^ϵ appartenant à $D(\mathbb{R}^N)$. Donc, puisque

$$\begin{cases} -\text{div} ({}^t A (\lambda + \nabla w_\lambda^t)) = 0 & \text{dans } D'(\mathbb{R}^N), \\ y \longrightarrow w_\lambda^t(y) & Y\text{-périodique,} \end{cases}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} {}^t A (\lambda + \nabla w_\lambda^t) (y) \nabla \varphi^\epsilon (y) dy = 0.$$

Par changement de variable $x = \epsilon y$ il suit que

$$\int_{\Omega} {}^t A (\lambda + \nabla w_\lambda^t) \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla \varphi(x) dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega),$$

puisque $\text{supp } \varphi \subset \Omega$. Ce qui implique (2.39) car $\overline{D(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, choisissons $\varphi w_\lambda^\epsilon$ et φu^ϵ comme fonctions test dans (2.29) et (2.39), respectivement, on obtient

$$\int_{\Omega} \varphi \xi^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon dx + \int_{\Omega} (\xi^\epsilon \nabla \varphi) w_\lambda^\epsilon dx = \langle f, \varphi w_\lambda^\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in D(\Omega), \quad (2.40)$$

et

$$\int_{\Omega} ({}^t A^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon) (\nabla u^\epsilon) \varphi dx + \int_{\Omega} ({}^t A^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon) (\nabla \varphi) u^\epsilon dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (2.41)$$

Observons que

$$\xi^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon = A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon = {}^t A^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon \nabla u^\epsilon.$$

Donc par soustraction de l'équation (2.41) de (2.40), il vient que

$$\int_{\Omega} \xi^\epsilon (\nabla \varphi) w_\lambda^\epsilon dx - \int_{\Omega} {}^t A^\epsilon \nabla w_\lambda^\epsilon (\nabla \varphi) u^\epsilon dx = \langle f, \varphi w_\lambda^\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (2.42)$$

Par suite, en passant à la limite dans cette identité quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Prenons $\epsilon \rightarrow 0$ dans (2.42), les convergences (2.30) et (2.37)ii) donnent

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \xi^\epsilon (\nabla \varphi) w_\lambda^\epsilon dx = \int_{\Omega} \xi^0 (\nabla \varphi) (\lambda x) dx.$$

En utilisant les convergences (2.38) et (2.28)ii), on aura

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \eta_\lambda^\epsilon (\nabla \varphi) u^\epsilon dx = \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx.$$

Alors, d'après (2.42) et (2.37)i), on aura finalement

$$\int_{\Omega} \xi^0 (\nabla \varphi) (\lambda x) dx - \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla \varphi u^0 dx = \langle f, (\lambda x) \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall \varphi \in D(\Omega),$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante : pour tout $\varphi \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla [(\lambda x)\varphi] dx - \int_{\Omega} \xi^0 \lambda \varphi - \int_{\Omega} {}^t A^0 \nabla(\varphi) u^0 dx = \langle f, (\lambda x)\varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Ceci donne, en utilisant l'équation (2.31) écrite pour la fonction test $v = (\lambda x)\varphi$,

$$\int_{\Omega} \xi^0 \lambda \varphi = - \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla(\varphi) u^0 dx, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

En raison de la définition de la dérivée au sens des distributions et en tenant compte le fait que ${}^t A^0 \lambda$ est une constante, on obtient

$$\int_{\Omega} \xi^0 \lambda \varphi = - \int_{\Omega} {}^t A^0 \lambda \nabla u^0 \varphi dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

D'où, grâce au théorème A.7

$$\xi^0 \lambda = {}^t A^0 \lambda \nabla u^0 = A^0 \nabla u^0 \lambda,$$

qui donne (2.33), puisque λ est arbitraire dans \mathbb{R}^N . □

Convergence de l'énergie

Une conséquence intéressante de théorème 2.2 est la convergence de l'énergie associée au problème (2.3), à savoir la quantité

$$E^\epsilon(u^\epsilon) = \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla u^\epsilon.$$

Nous allons prouver deux résultats importants, qui sont originalement prouvés par De Giorgi et Spagnolo (1973) dans le cas où $\{A^\epsilon\}$ est symétrique.

Proposition 2.3 ([35]). *Soit u^ϵ la solution du problème (2.3). Alors*

$$E^\epsilon(u^\epsilon) \longrightarrow E^0(u^0) = \int_{\Omega} A^0 \nabla u^0 \nabla u^0,$$

où u^0 et A^0 sont donnés par le théorème 2.2.

Démonstration. D'après la formulation variationnelle (2.4) du problème (2.3) écrite pour u^ϵ , on obtient

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla u^\epsilon = \langle f, u^\epsilon \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

La convergence (2.28)i) implique que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla u^0 = \langle f, u^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

D'autre part, en choisissant u^0 comme fonction test dans (2.4), on obtient à la limite

$$\int_{\Omega} A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 = \langle f, u^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Ce qui donne le résultat. □

Proposition 2.4 ([35]). *Soit u^ϵ la solution du problème (2.3). Alors, la convergence suivante est vérifiée*

$$A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla u^\epsilon \longrightarrow A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 \text{ dans } D'(\Omega),$$

où u^0 et A^0 sont donnés par le théorème 2.2.

Démonstration. On doit prouver que

$$\int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla u^\epsilon \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} A^0 \nabla u^0 \nabla u^0 \varphi dx \text{ pour toute } \varphi \in D(\Omega).$$

Utilisons $u^\epsilon \varphi$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de (2.3), on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon (\nabla u^\epsilon) \varphi dx &= \langle f, u^\epsilon \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega)} - \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon (\nabla \varphi) u^\epsilon dx \\ &= \langle f, u^\epsilon \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega)} - \int_{\Omega} \xi^\epsilon (\nabla \varphi) u^\epsilon dx \end{aligned} \quad (2.43)$$

Observons que d'après (2.28)i)

$$u^\epsilon \varphi \rightharpoonup u^0 \varphi \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \text{ pour tout } \varphi \in D(\Omega). \quad (2.44)$$

Cette convergence, jointe à (2.30) et la proposition A.4, permet de passer à la limite dans (2.43) et d'obtenir

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\epsilon} \nabla u^{\epsilon} \nabla u^{\epsilon} dx &= \langle f, u^0 \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \xi^0 \nabla \varphi u^0 dx \\ &= \langle f, u^0 \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} - \int_{\Omega} \xi^0 \nabla (\varphi u^0) dx + \int_{\Omega} \xi^0 \nabla u^0 \varphi dx. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Prenons maintenant $v = u^0 \varphi$ comme fonction test dans la formulation variationnelle de problème homogénéisé (2.27), il vient

$$\int_{\Omega} \xi^0 \nabla (\varphi u^0) dx = \langle f, u^0 \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)},$$

qu'on remplace dans (2.45) pour obtenir

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} A^{\epsilon} \nabla u^{\epsilon} \nabla u^{\epsilon} \varphi dx = \int_{\Omega} \xi^0 \nabla u^0 \varphi dx.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

2.4 Méthode de convergence à deux échelles

Dans cette section, nous allons présenter la méthode de convergence à deux échelles et nous démontrons aussi le théorème 2.2. La notion de convergence à deux échelles a été introduite par Nguetseng (1989) dans [36] et développée par Allaire (1992,1994) dans [2]. Elle s'occupe de la convergence des intégrales de la forme

$$\int_{\Omega} v^{\epsilon}(x) \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right),$$

où la suite $\{v^{\epsilon}\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $\psi = \psi(x, y)$ est une fonction régulière périodique en y . Mentionnons que cette méthode est très efficace car elle permet d'obtenir le problème homogénéisé et de montrer la convergence en même temps.

Commençons par le lemme important suivant :

Lemme 2.5 ([16]). *On a*

1) Soit $\varphi \in L^p(\Omega; C_{per}(Y))$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors, $\varphi(\cdot, \cdot/\epsilon) \in L^p(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} i) \left\| \varphi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|\varphi(x, y)\|_{L^p(\Omega; C_{per}(Y))}, \\ ii) \varphi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) &\rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(x, y) dy \text{ faiblement dans } L^p(\Omega). \end{aligned}$$

En particulier, si $\varphi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left[\varphi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right]^2 dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y [\varphi(x, y)]^2 dx dy. \quad (2.46)$$

2) Supposons que $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, $\varphi_1 \in L^s(\Omega)$, $\varphi_2 \in L^r_{per}(Y)$ avec $1 \leq r, s < \infty$ et

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}.$$

Alors, $\varphi(x, x/\epsilon) \in L^p(\Omega)$ et

$$\varphi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \rightharpoonup \frac{\varphi_1(x)}{|Y|} \int_Y \varphi_2(y) dy \text{ faiblement dans } L^p(\Omega).$$

Définition 2.3 ([2]). Soit $\{v^\epsilon\}$ une suite de fonctions dans $L^2(\Omega)$. On dit que $\{v^\epsilon\}$ converge à deux échelles vers $v^0 = v^0(x, y)$ avec $v^0 \in L^2(\Omega \times Y)$ si, pour toute fonction $\psi = \psi(x, y) \in D(\Omega; C^\infty_{per}(Y))$, on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^\epsilon(x) \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y v^0(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (2.47)$$

Lemme 2.6 ([2]). Soit $v^\epsilon \in L^2(\Omega)$ une suite de fonctions qui converge à deux échelles vers $v^0 \in L^2(\Omega \times Y)$. La convergence (2.47) reste vraie pour toute fonction ψ de la forme $\psi(x, y) = \psi_1(y)\psi_2(x, y)$ avec $\psi_1 \in L^\infty(Y)$ et $\psi_2 \in L^2_{per}(Y; C(\bar{\Omega}))$, et pour tout ψ de la forme $\psi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ où φ_1 et φ_2 sont définis comme dans le lemme 2.5.

La convergence à deux échelles implique la convergence faible. En particulier, on a le lemme suivant :

Proposition 2.7 ([2]). Soit $v^\epsilon \in L^2(\Omega)$ une suite de fonctions qui converge à deux échelles vers $v^0 \in L^2(\Omega \times Y)$. Alors

$$v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

où

$$v(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y v^0(x, y) dy.$$

Démonstration. Choisissons $\psi(x, y) \in D(\Omega)$ comme fonction test dans (2.47), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega v^\epsilon(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v^0(x, y) \varphi(x) dy dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_Y v^0(x, y) dy \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour toute fonction test $\varphi \in D(\Omega)$, d'où le résultat. □

Une conséquence immédiate de ce lemme est le résultat suivant :

Corollaire 2.8 ([2]). Soit $v^\epsilon \in L^2(\Omega)$ une suite de fonctions qui converge à deux échelles vers $v^0 \in L^2(\Omega)$ i.e. la limite v^0 indépendante de y . Alors la limite faible dans $L^2(\Omega)$ coïncide avec limite à deux échelles.

Remarque 2.4 ([16]). Supposons que la suite $\{v^\epsilon\}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$v^\epsilon(x) = v^0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon v^1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

où v^0, v^1, \dots sont des fonctions régulières et Y -périodique. Alors, en appliquant le lemme 2.5 à $v^\epsilon(\cdot) \psi(\cdot, \cdot/\epsilon)$ avec ψ est une fonction régulière, on obtient que $\{v^\epsilon\}$ converge à deux échelles vers $v^0 = v^0(x, y)$ qui est le premier terme de développement asymptotique. En effet,

$$\int_\Omega v^\epsilon \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \int_\Omega v^0(x) \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \int_\Omega \epsilon v^1(x) \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

Par passage à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$, on trouve

$$\int_\Omega v^\epsilon \psi\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_\Omega \int_Y v^0(x) \psi(x, y) dy dx,$$

du fait que le deuxième terme du côté droit de l'égalité ci-dessus tend vers 0. Cela justifie a posteriori la méthode de développement asymptotique.

Dans ce qui suit, nous allons énoncer et démontrer deux résultats principaux de convergence à deux échelles, à savoir le théorème de compacité et la convergence à deux échelles des suites bornées dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.9 (Compacité [16]). *Soit $\{v^\epsilon\}$ une suite bornée dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe une sous suite $\{v^{\epsilon'}\}$ et une fonction $v^0 \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ telles que $\{v^{\epsilon'}\}$ converge à deux échelles vers v^0 .*

Démonstration. Soit $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. Alors d'après l'inégalité de Hölder et le lemme 2.5, on a

$$\left| \int_{\Omega} v^\epsilon \phi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega; C_{per}(Y))}, \quad (2.48)$$

où $C > 0$ est indépendant de ϵ . Ceci signifie que $\{v^\epsilon\}$ peut être considéré comme un élément V^ϵ de l'espace dual de $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ tel que

$$\langle V^\epsilon, \phi \rangle_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]', L^2(\Omega; C_{per}(Y))} = \int_{\Omega} v^\epsilon(x) \phi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx, \forall \phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)). \quad (2.49)$$

En outre, d'après (2.48), on a

$$\|V^\epsilon\|_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]'} \leq C.$$

Alors, il existe un élément $V^0 \in [L^2(\Omega; C_{per}(Y))]'$ et une suite extraite de V^ϵ tels que

$$V^{\epsilon'} \rightharpoonup V^0 \text{ faiblement } * \text{ dans } [L^2(\Omega; C_{per}(Y))]'$$

Par suite, en passant à la limite dans l'égalité (2.49), on obtient

$$\begin{aligned} \langle V^0, \phi \rangle_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]', L^2(\Omega; C_{per}(Y))} &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \langle V^{\epsilon'}, \phi \rangle_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]', L^2(\Omega; C_{per}(Y))} \\ &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\epsilon'}(x) \phi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.50)$$

D'autre part, comme la suite $\{v^\epsilon\}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, l'inégalité de Hölder et la convergence (2.46), nous donnent

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega} v^{\epsilon'}(x) \phi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}. \quad (2.51)$$

L'équation (2.51), combinée avec (2.50), donne

$$\left| \langle V^0, \phi \rangle_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]', L^2(\Omega; C_{per}(Y))} \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega \times Y)}, \quad (2.52)$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. Puisque l'espace $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ est dense dans $L^2(\Omega \times Y)$, l'inégalité (2.52) reste vraie pour toute fonction $\psi \in L^2(\Omega \times Y)$. Donc, V^0 peut être prolongé par continuité à $L^2(\Omega \times Y)$, et ainsi, d'après le théorème de représentation de Riez, la fonction V^0 peut être identifiée à un élément $v \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que

$$\langle V^0, \phi \rangle_{[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]', L^2(\Omega; C_{per}(Y))} = \int_{\Omega \times Y} v(x, y) \phi(x, y) dx dy. \quad (2.53)$$

L'équation (2.53), jointe à (2.50) mènent à

$$\int_{\Omega \times Y} v(x, y) \phi(x, y) dx dy = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\epsilon'}(x) \phi\left(x, \frac{x}{\epsilon'}\right) dx,$$

ce qui signifie que $v^0 = |Y|v$ est la limite à deux échelles de la suite $\{v^{\epsilon'}\}$. \square

La propriété suivante donne une information sur la convergence à deux échelles dans le cas des suites bornées dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.10 ([2]). *Soit $\{v^\epsilon\}$ une suite de fonctions dans $H^1(\Omega)$ telle que*

$$v^\epsilon \rightharpoonup v^0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega). \quad (2.54)$$

Alors, la suite $\{v^\epsilon\}$ converge à deux échelles vers v^0 , et il existe une sous suite ϵ' et $v^1 = v^1(x, y)$ dans $L^2(\Omega; H^1_{per}/\mathbb{R})$ tels que

$$\nabla v^{\epsilon'} \text{ converge à deux échelles vers } \nabla_x v^0 + \nabla_y v^1.$$

Démonstration. D'après le théorème 2.9, on peut extraire une sous suite ϵ' telle que

$$\begin{cases} i) v^{\epsilon'} & \text{converge à deux échelles vers } v \in L^2(\Omega \times Y), \\ ii) \nabla v^{\epsilon'} & \text{converge à deux échelles vers } V \in [L^2(\Omega \times Y)]^N. \end{cases} \quad (2.55)$$

Donc, pour tout $\psi \in (D(\Omega; C_{per}^\infty))^N$, on a

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla v^{\epsilon'} \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y V(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (2.56)$$

Par définition de la dérivation au sens des distributions, il suit que

$$\int_{\Omega} \nabla v^{\epsilon'} \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx = - \int_{\Omega} v^{\epsilon'} \left[\operatorname{div}_x \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) + \frac{1}{\epsilon'} \operatorname{div}_y \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) \right] dx,$$

ce qui implique que

$$\int_{\Omega} v^{\epsilon'} \operatorname{div}_y \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx = \epsilon' \left[\int_{\Omega} \nabla v^{\epsilon'} \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx + \int_{\Omega} v^{\epsilon'} \operatorname{div}_x \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx \right] \quad (2.57)$$

En passant à la limite quand $\epsilon' \rightarrow 0$, et en utilisant (2.57) et (2.55), on obtient

$$\int_{\Omega} \int_Y v(x, y) \operatorname{div}_y \psi(x, y) = 0.$$

Grâce à la formule de Green, cette égalité reste vraie en particulier pour toute fonction $\psi \in D(\Omega \times Y)$

$$\int_{\Omega} \int_Y \nabla_y v(x, y) \psi(x, y) = 0.$$

On en déduit, en vertu de théorème A.7

$$\nabla_y v = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \times Y.$$

Ce qui signifie que v ne dépend pas de y . Alors, grâce à (2.54) et le corollaire 2.8, on a $v = v^0 \in H^1(\Omega)$.

Prenons maintenant une fonction test $\psi \in (D(\Omega; C_{per}^\infty))^N$ telle que $\operatorname{div}_y \psi = 0$ dans (2.57), en divisant par ϵ et passons à la limite quand $\epsilon' \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} \nabla v^{\epsilon'} \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx &= - \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} v^{\epsilon'} \operatorname{div}_x \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon'} \right) dx \\ &= - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y v^0(x) \operatorname{div}_x \psi(x, y) \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \nabla v^0(x) \psi(x, y), \end{aligned}$$

où on a utilisé la convergence à deux échelles de $\{v^\epsilon\}$. Ce qui joint à (2.56), donnent

$$\int_{\Omega} \int_Y [V(x, y) - \nabla v^0(x)] \psi(x, y) = 0.$$

Maintenant, on a besoin d'utiliser un résultat classique pour qui nous referons le lecteur aux livres de Girault et Raviart (1981) et Temam (1979) et qui affirme : Si $(F, \varphi)_{L^2} = 0$, pour tout φ tel que $\operatorname{div} \varphi = 0$, alors F est un gradient. Ce résultat s'applique ici pour $F(y) = V(x, y) - \nabla v^0(x)$ p.p. sur Ω , ce qui implique qu'il existe une fonction unique $v^1 \in L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})$ telle que

$$V(x, y) - \nabla v^0(x) = \nabla_y v^1(x, y).$$

La preuve du théorème ainsi est terminée. \square

Démonstration du théorème 2.2 par la méthode de convergence à deux échelles.

Dans ce qui suit, nous démontrons le théorème 2.2 en utilisant la méthode de convergence à deux échelles.

Soit u^ϵ la solution du problème (2.3). Grâce à l'estimation (2.5), pour une sous suite de ϵ (notée toujours ϵ), on a

$$\begin{cases} i) u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ ii) u^\epsilon \rightarrow u^0 & \text{fortement dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (2.58)$$

D'après le théorème 2.10, u^ϵ converge à deux échelles vers u^0 . En plus, il existe $u^1 \in L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})$ tel que ∇u^ϵ converge à deux échelles vers $\nabla_x u^0 + \nabla_y u^1$.

Montrons maintenant que u^0 satisfait le problème homogénéisé. Soit $v^0 \in D(\Omega)$ et $v^1 \in D(\Omega; C_{per}^\infty(\Omega))$. Il est clair que la fonction définie par

$$v^\epsilon = v^0(\cdot) + \epsilon v^1(\cdot, \cdot/\epsilon),$$

est dans $H_0^1(\Omega)$, donc on peut la considérée comme fonction test dans (2.4).

Alors,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \left[\nabla v^0(x) + \epsilon \nabla_x v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \nabla_y v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right] dx \\ &= \left\langle f, v^0(\cdot) + \epsilon v^1 \left(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon} \right) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u^\epsilon({}^t A^\epsilon) \left[\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right] dx + \epsilon \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla_x v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx \\ & = \left\langle f, v^0(\cdot) + \epsilon v^1 \left(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon} \right) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Pour passer à la limite dans cette égalité, nous procédons en trois étapes.

Première étape : Passage à limite dans le premier terme du premier membre de (2.59).

Pour le premier terme, on a, ${}^t A^\epsilon$ est dans $L^\infty(\Omega)$ et $\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)$ est dans $L^2_{per}(Y; C(\overline{\Omega}))$ donc ${}^t A^\epsilon(y)[\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)]$ peut être utilisé comme fonction test dans la définition de la convergence à deux échelles de ∇u^ϵ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u^\epsilon({}^t A^\epsilon) \left[\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \right] dx \\ & = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) {}^t A(y) [\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)]. \end{aligned}$$

Deuxième étape : Passage à la limite dans le deuxième terme du premier membre de (2.59).

Pour le second terme de (2.59), en utilisant le lemme 2.5 écrit pour $\varphi(x, y) = \nabla_x v^1(x, y)$, l'inégalité de Hölder et le fait que $A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ est borné dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \int_{\Omega} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla_x v^1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx = 0.$$

Troisième étape : Passage à la limite dans le deuxième membre de (2.59).

Notons que par définition de v^ϵ , on a

$$v^0(\cdot) + \epsilon v^1 \left(x, \frac{\cdot}{\epsilon} \right) \rightharpoonup v^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Donc, en passant à la limite dans (2.59) quand $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y (\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) {}^t A(y) [\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)] \\ & = \langle f, v^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

qui peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) [\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)] dx dy \\ = \langle f, v^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Montrons maintenant que (2.60) admet une seule solution dans l'espace $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})$. Faisons cela en utilisant le lemme de Lax-Milgram.

Munissons l'espace \mathcal{H} par la norme

$$\|V\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \|v^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v^1\|_{L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})}^2, \quad \forall V = (v^0, v^1) \in \mathcal{H},$$

et définissons pour tout $U = (u^0, u^1) \in \mathcal{H}$ et $V = (v^0, v^1) \in \mathcal{H}$ la forme bilinéaire suivante :

$$a(U, V) = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y A(y) (\nabla_x u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) [\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)] dx dy.$$

Observons que

$$a(U, V) \geq \frac{\alpha}{|Y|} \|\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2, \quad \forall V = (v^0, v^1) \in \mathcal{H}, \quad (2.61)$$

puisque $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\nabla v^0(x) + \nabla_y v^1(x, y)\|_{L^2(\Omega \times Y)}^2 &= \|v^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|v^1\|_{L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})}^2 \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} \int_Y \nabla v^0(x) \nabla_y v^1(x, y) dx dy = \|V\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

puisque, d'après la formule de Green et la périodicité de v^1

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_Y \nabla v^0(x) \nabla_y v^1(x, y) dx dy &= \int_{\Omega} \left[\int_Y \nabla_y (\nabla v^0(x) \nabla_y v^1(x, y)) dy \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_{\partial Y} \nabla v^0(x) \nabla_y v^1(x, y) \nu(y) ds_y \right] dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.2 par la méthode de convergence à 2-échelles

La coercivité de a sur \mathcal{H} est alors établie dû à (2.60) et (2.61).

Par ailleurs, la forme linéaire suivante :

$$F : V = (v^0, v^1) \longrightarrow \langle f, v^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$$

est continue sur \mathcal{H} .

Donc, on peut appliquer le lemme de Lax-Milgram pour obtenir l'existence et l'unicité de $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_{per}^1(Y)/\mathbb{R})$ la solution de (2.60).

Maintenant, choisissons dans (2.60), $v^0 = 0$ et $v^1 = 0$, respectivement, on obtient le système à deux équations suivant :

$$\begin{cases} -div_y (A(y) \nabla_y u_1(x, y)) = div_y (A(y)) \nabla u^0(x) & \text{dans } \Omega \times Y, \\ -div_x [\int_Y A(y) (\nabla u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) dy] = |Y| f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^1(x, \cdot) & \text{Y-périodique.} \end{cases} \quad (2.62)$$

En ce moment, le procédé d'homogénéisation est réalisé puisque la suite entière u^ϵ converge vers la solution du problème limite bien-posé (2.62), qu'on appelle souvent **problème homogénéisé à deux échelles**. Il est clair que le problème (2.62) est équivalent aux problème homogénéisé (2.27) et les équations cellulaires (2.17) et (2.21) à travers la relation

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N w_j(y) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x).$$

□

Deuxième partie

Méthodes d'homogénéisation dans les domaines perforés périodiques

Dans ce qui suit, nous étudions les deux dernières méthodes d'homogénéisation précédentes dans les domaines perforés périodiquement en gardant toujours le même problème. Nous utiliserons les techniques de prolongement pour démontrer le résultat principal d'homogénéisation avec la méthode des fonctions test oscillantes (le théorème de convergence 2.11) démontré originalement par D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin dans [18]. La méthode de convergence à deux échelles peut aussi résoudre le problème posé dans ces domaines démontré originalement par G. Allaire dans [2] mais sans faire appel aux lemmes de prolongement. La différence entre ces deux méthodes est que la première nécessite que les trous soient isolés et ne coupent pas le bord du domaine, or que la dernière aucune condition n'est imposée sur eux (mis à part la condition de régularité imposée sur leurs bords).

2.5 Notations et position du problème

Dans ce qui suit, nous adaptons les notations suivantes :

- T est un trou dans \mathbb{R}^N de frontière régulière.
- $\Omega^\epsilon = \Omega / \bigcup_{j=1}^k T_\epsilon^j$, k fini, i.e. Ω^ϵ représente la partie de Ω occupée par le matériau est supposé connexe. Analytiquement, on l'écrit comme suit :

$$\Omega^\epsilon = \left\{ x \in \Omega / \chi \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = 1 \right\}, \quad (2.63)$$

où χ est la fonction caractéristique de Ω^ϵ , et tel que T_ϵ^j dans \mathbb{R}^N sont définis comme les composantes connexes de l'ensemble suivant :

$$\left\{ x \in \Omega / \chi \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = 0 \right\}.$$

- $Y^* = Y/T$,
- θ représente la proportion du matériau dans la cellule de base, i.e.

$$\theta = \frac{\text{mes}Y^*}{\text{mes}Y} = \frac{|Y^*|}{|Y|} \quad (2.64)$$

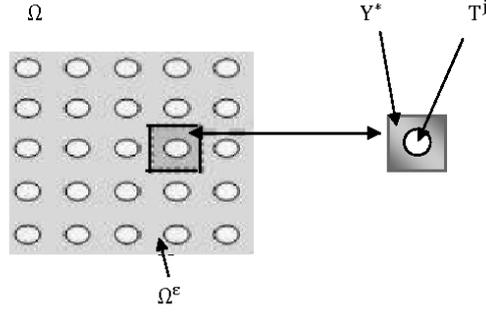


FIG. 2.1 – Domaine perforé périodiquement

Problème modèle

Notre problème consiste à homogénéiser l'équation suivante posée dans le domaine perforé Ω^ϵ

$$\begin{cases} \mathcal{A}^\epsilon u^\epsilon \doteq - \operatorname{div} \left(A \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u^\epsilon \right) = f, & \text{dans } \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u^\epsilon}{\partial \nu_{A^\epsilon}} \doteq (A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nu) = 0 & \text{sur } \partial T_\epsilon^i, 1 \leq i \leq k, \end{cases} \quad (2.65)$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$ et le champ de matrices A^ϵ est Y -périodique défini par

$$A^\epsilon(x) = A \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = (a_{ij}^\epsilon(x))_{1 \leq i, j \leq N} \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N, \quad (2.66)$$

où

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ est prolongé par } Y\text{-périodicité,} \\ A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \in M(\alpha, \beta, Y). \end{cases} \quad (2.67)$$

Le problème (2.65) admet la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega^\epsilon} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega^\epsilon), H_0^1(\Omega^\epsilon)}, \forall v \in H_0^1(\Omega^\epsilon), \quad (2.68)$$

ce qui implique que

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq C \text{ et } \|\nabla u^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq C. \quad (2.69)$$

2.6 Méthode des fonctions test oscillantes

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 2.11 ([18]). *soient $f \in L^2(\Omega)$ et u^ϵ est la solution de (2.65) avec A^ϵ définie par (2.66)-(2.67). Alors, il existe un prolongement $P_\epsilon \in \mathcal{L}(E_\epsilon, H_0^1(\Omega))$ tel que*

$$\begin{cases} P_\epsilon u^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \\ P_\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \quad \text{quand } \epsilon \longrightarrow 0, \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

où u^0 la solution de l'équation homogénéisée

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = \theta f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.70)$$

et la matrice A^0 est définie par

$$A^0 \lambda = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} A(y) (\lambda + \nabla_y w_\lambda) dy,$$

telle que w_λ est solution du problème cellulaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(y) (\nabla w_\lambda(y) + \lambda)) = 0 & \text{dans } Y^*, \\ w_\lambda & Y\text{-périodique}, \\ M_{Y^*}(w_\lambda) = 0, \\ A(y) (\nabla w_\lambda(y) + \lambda) \nu = 0 & \text{sur } \partial(T_\epsilon^j \cap Y). \end{cases} \quad (2.71)$$

La difficulté principale dans l'homogénéisation dans les domaines perforés est de montrer que la suite $\{u^\epsilon\}$ admet une limite u dans $H^1(\Omega)$. Par les inégalités (2.69) on ne peut pas extraire une sous suite convergente par la compacité faible dans un espace donné de Sobolev, puisque chaque $\{u^\epsilon\}$ est définie dans un espace différent $H^1(\Omega^\epsilon)$ qui change avec ϵ . Néanmoins, ce problème a été d'abord résolu par D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin (voir [18]) dans le cas des domaines perforés avec des trous isolés en utilisant les techniques de prolongement, tandis que le cas général est traité dans [30].

En premier lieu, nous rappelons quelques lemmes de prolongement importants qui seront utiles dans la démonstration du théorème 2.11 en utilisant

la méthode de fonctions test oscillantes.

Pour appliquer cette méthode, les trous T^j doivent vérifier les hypothèses suivantes :

1. Les trous T^j sont de frontières régulières et ne coupent pas le bord de Ω
2. Les trous T^j sont isolés.

Introduisons ainsi l'espace vectoriel suivant :

$$E_\epsilon = \{v \in H^1(\Omega^\epsilon), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

munit de la norme

$$\|v\|_{E_\epsilon} = \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega^\epsilon)]^2}.$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.12 ([18]). *Il existe un opérateur de prolongement*

$$P_\epsilon \in \mathcal{L}(E_\epsilon, H_0^1(\Omega)),$$

tel que

$$\begin{aligned} \|\nabla P_\epsilon v\|_{[L^2(\Omega)]^N} &\leq C \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega^\epsilon)]^N}, \forall v \in E_\epsilon, \\ \|P_\epsilon v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|v\|_{L^2(\Omega^\epsilon)}, \forall v \in E_\epsilon, \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de ϵ .

Lemme 2.13 ([18]). *Soient ϕ et F deux fonctions de $[L^2(Y^*)]^N$ et de $L^2(Y)$ respectivement, telles que*

$$-\operatorname{div}\phi = F \text{ dans } Y^*,$$

et

$$\int_{\partial(T^j \cap Y)} \phi \cdot \nu ds = \int_{T^j \cap Y} F dx, i = 1, \dots, M,$$

où ν la normale orientée vers l'extérieur de Y^* .

Alors, il existe $\tilde{\phi} \in [L^2(\bigcup_{i=1}^M (T^j \cap Y))]^N$ tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\tilde{\phi} &= F \text{ dans } \bigcup_{i=1}^M (T^j \cap Y), \\ \tilde{\phi} \cdot \nu|_{\partial(T^j \cap Y)} &= \phi \cdot \nu|_{\partial(T^j \cap Y)}. \end{aligned}$$

En outre,

$$\left\| \tilde{\phi} \right\|_{[L^2(\cup_{i=1}^M (T^j \cap Y))]^N} \leq C \left(\|F\|_{L^2(Y)} + \|\phi\|_{[L^2(Y^*)]^N} \right), \quad (2.72)$$

où C est une constante strictement positive.

Lemme 2.14 ([18]). *Il existe un opérateur de prolongement*

$$P \in \mathcal{L}(H^1(Y^*), H^1(Y)),$$

tel que

$$\begin{aligned} \|\nabla P\varphi\|_{[L^2(Y)]^N} &\leq c \|\nabla\varphi\|_{[L^2(Y^*)]^N}, \forall \varphi \in H^1(Y^*), \\ \|P\varphi\|_{L^2(Y)} &\leq c \|\varphi\|_{L^2(Y^*)}, \forall \varphi \in H^1(Y^*). \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 2.11. Au début, d'après (2.69), on a les estimations suivantes :

$$\|u^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega^\epsilon)} \leq C \text{ et } \|\xi^\epsilon\|_{[L^2(\Omega^\epsilon)]^N} \leq C$$

Par suite, posons $\xi^\epsilon = A^\epsilon \nabla u^\epsilon$, on obtient

$$-div \xi^\epsilon = f \equiv f|_{\Omega^\epsilon} \text{ dans } \Omega^\epsilon,$$

avec la condition

$$\xi^\epsilon \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial T_\epsilon^i, 1 \leq i \leq k. \quad (2.73)$$

Par ailleurs, d'après (2.73), les prolongements par zéro en dehors des trous T_ϵ^i de ξ^ϵ et f^ϵ , qu'on les note par $Q_\epsilon \xi^\epsilon \in [L^2(\Omega)]^N$ et $R_\epsilon f^\epsilon \in L^2(\Omega)$ respectivement vérifient les relations suivantes :

D'après (2.72), on a

$$\|Q_\epsilon \xi^\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq C_1 \|\xi^\epsilon\|_{[L^2(\Omega^\epsilon)]^N}, \|R_\epsilon f^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)},$$

et

$$-div Q_\epsilon \xi^\epsilon = R_\epsilon f^\epsilon = \chi_{\Omega^\epsilon} f \text{ dans } \Omega, \quad (2.74)$$

où $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ sont indépendants de ϵ .

Donc, on peut extraire des sous suites, notées encore par $Q_\epsilon \xi^\epsilon$ et $R_\epsilon f^\epsilon$ telles que

$$Q_\epsilon \xi^\epsilon \rightharpoonup \xi^0 \text{ quand } \epsilon \longrightarrow 0, \text{ faiblement dans } [L^2(\Omega)]^N,$$

et puisque $\chi_{\Omega^\epsilon} \rightharpoonup \theta$ faiblement $*$ dans $L^\infty(\Omega)$, qui est une conséquence du théorème A.13, on a

$$R_\epsilon f^\epsilon \rightharpoonup \theta f \text{ quand } \epsilon \longrightarrow 0, \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

On en déduit que

$$-\operatorname{div} \xi^0 = \theta f.$$

Cherchons maintenant un prolongement $P_\epsilon u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\|\nabla P_\epsilon u^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|\nabla u^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)}. \quad (2.75)$$

Pour faire cela, nous construisons au préalable des prolongements sur la cellule de base Y , puis on déduit des prolongements sur Ω . En effet, le prolongement donné par le lemme 2.14 peut être utilisé pour prolonger u^ϵ .

Soit $y = x/\epsilon$ et définissons la fonction \tilde{u}^ϵ par

$$\tilde{u}^\epsilon(y) = \frac{1}{\epsilon} u^\epsilon(\epsilon y). \quad (2.76)$$

Cette fonction est définie sur Y puisque u^ϵ définie dans Ω^ϵ et vérifie

$$\tilde{u}^\epsilon \in H^1(Y^*).$$

Soit P l'opérateur de prolongement qui prolonge \tilde{u}^ϵ de $H^1(Y^*)$ dans $H^1(Y)$ (sachant que cet opérateur existe puisque les bords des trous sont réguliers). Par suite, la fonction $P\tilde{u}^\epsilon$ est définie sur Y , définissons $P_\epsilon \tilde{u}^\epsilon$ sur $\Omega = \epsilon Y$ par

$$(P_\epsilon u^\epsilon)(x) = \epsilon (P_\epsilon \tilde{u}^\epsilon) \left(\frac{x}{\epsilon} \right), x \in \epsilon Y.$$

Il nous reste à montrer que ce prolongement satisfait l'inégalité (2.75).

Puisque

$$(\nabla(P_\epsilon u^\epsilon))(x) = \frac{1}{\epsilon} (\nabla(P_\epsilon \tilde{u}^\epsilon)) \left(\frac{x}{\epsilon} \right),$$

il suit que

$$\int_{\Omega} |\nabla P_{\epsilon} u^{\epsilon}|^2 dx = \int_{\Omega} \left| \frac{1}{\epsilon} (\nabla(P_{\epsilon} u^{\epsilon})) \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \right|^2 dx = \epsilon^2 \int_{\Omega/\epsilon} |\nabla P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy.$$

Le domaine Ω/ϵ est couvert par les cellules Y et le nombre de telles cellules est de l'ordre $(1/\epsilon^N)$ ($|\Omega|/|Y|$), et

$$\epsilon^2 \int_{\Omega/\epsilon} |\nabla P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy$$

est de même ordre que

$$\epsilon^2 \sum_{p_1, \dots, p_N} \int_{(p_1+1)l_1}^{p_1 l_1} \int_{(p_2+1)l_2}^{p_2 l_2} \dots \int_{(p_N+1)l_N}^{p_N l_N} |\nabla P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy. \quad (2.77)$$

Le nombre de termes dans la somme ci-dessus est de l'ordre $(1/\epsilon^N)$ ($|\Omega|/|Y|$). Maintenant, nous allons estimer cette somme. On a chaque terme a la forme suivante :

$$\int_{Y_k} |\nabla P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy,$$

(Y_k est la translattée de la cellule Y).

Par le lemme 2.14, il suit que

$$\int_{Y_k} |\nabla P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy \leq C \int_{\epsilon Y_k^*} |\nabla \tilde{u}^{\epsilon}(y)|^2 dy.$$

Par ailleurs, d'après la définition (2.76), on a

$$\nabla \tilde{u}^{\epsilon}(y) = (\nabla u^{\epsilon})(\epsilon y) \quad y \in Y^*,$$

et donc

$$\int_{Y_k} |\nabla(P_{\epsilon} \tilde{u}^{\epsilon}(y))|^2 dy \leq C \int_{\epsilon Y_k^*} \frac{1}{\epsilon^2} |\nabla u^{\epsilon}(x)|^2 dx.$$

Alors, la somme (2.77) est bornée par

$$\epsilon^2 \sum_{k=1}^{(1/\epsilon^N)(|\Omega|/|Y|)} \int_{\epsilon Y_k^*} |\nabla u^{\epsilon}(x)|^2 dx,$$

qui est de même ordre que $\int_{\Omega^\epsilon} |(\nabla u^\epsilon)(x)|^2 dx$. La preuve de l'inégalité (2.75) est complète. Par l'inégalité (2.75), on peut extraire une sous suite (notée par $\{P_\epsilon u^\epsilon\}$) telle que

$$P_\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup u^0, \text{ quand } \epsilon \longrightarrow 0, \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Afin de trouver l'équation satisfaite par u^0 , nous procédons comme suit : Comme dans le cas des milieux composites, le problème cellulaire dans les milieux perforés défini par : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ définissons la fonction w_λ^t solution du problème cellulaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}({}^t A(y) (\nabla w_\lambda^t(y) + \lambda)) = 0 & \text{dans } Y^*, \\ w_\lambda^t & \text{Y-périodique,} \\ M_{Y^*}(w_\lambda^t) = 0, \\ A(y) (\nabla w_\lambda^t(y) + \lambda) \nu = 0 & \text{sur } \partial(T_\epsilon^j \cap Y). \end{cases}$$

Posons $\eta_\lambda = {}^t A \nabla w_\lambda^t$. Cette fonction peut être prolongée par 0 à l'intérieur de T_ϵ^j , ($i = 1, \dots, k$). Soit $Q\eta_\lambda$ ce prolongement. Alors, la matrice homogénéisée ${}^t A^0$ est définie par

$${}^t A^0 \lambda = M(Q\eta_\lambda) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} {}^t A (\nabla w_\lambda + \lambda) dy, \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Par ailleurs, introduisons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} w^\epsilon &= \lambda x + \epsilon (P w_\lambda^t) \left(\frac{x}{\epsilon} \right), \\ \eta_{\lambda\epsilon} &= \eta_\lambda \left(\frac{x}{\epsilon} \right), \end{aligned}$$

et

$$(Q_\epsilon \eta_{\lambda\epsilon})(x) = (Q\eta_\lambda) \left(\frac{x}{\epsilon} \right).$$

On a

$$-\operatorname{div} Q_\epsilon \eta_{\lambda\epsilon} = 0 \text{ dans } \Omega^\epsilon. \quad (2.78)$$

Par définition de w_λ^t et η_λ on peut extraire des sous suites w^ϵ et $Q_\epsilon \eta_{\lambda\epsilon}$ telles que

$$w_\lambda^t \rightharpoonup w^0 \text{ faiblement dans } H^1(\Omega),$$

$$\begin{aligned}\nabla w^\epsilon &\rightharpoonup \lambda \text{ faiblement dans } [L^2(\Omega)]^N, \\ Q_\epsilon \eta_{\lambda^\epsilon} &\rightharpoonup {}^t A^0 \lambda \text{ faiblement dans } [L^2(\Omega)]^N,\end{aligned}$$

et

$$\nabla w^0 = \lambda.$$

Prenons maintenant une fonction $\varphi \in D(\Omega)$. Multiplions (2.74) par les fonctions test φw^ϵ et (2.78) par $\varphi P_\epsilon u^\epsilon$ on obtient, après la soustraction de (2.78) de (2.74)

$$\begin{aligned}\int_\Omega Q_\epsilon \xi^\epsilon (\nabla \varphi) w^\epsilon dx + \int_\Omega Q_\epsilon \xi^\epsilon \varphi \nabla w^\epsilon dx - \int_\Omega Q_\epsilon \eta_{\lambda^\epsilon} \cdot (\nabla \varphi) \cdot P_\epsilon u^\epsilon dx \\ - \int_\Omega Q_\epsilon \eta_{\lambda^\epsilon} \cdot (\varphi) \cdot \nabla (P_\epsilon u^\epsilon) dx = \int_\Omega R_\epsilon f^\epsilon \varphi w^\epsilon dx.\end{aligned}$$

Alors, par passage à la limite, on obtient

$$\int_\Omega \xi^0 (\nabla \varphi) w^0 dx - \int_\Omega {}^t A^0 \lambda (\nabla \varphi) u^0 dx = \int_\Omega \theta f \varphi w^0 dx.$$

On aura finalement

$$\int_\Omega \xi^0 \nabla (\varphi w^0) dx = \int_\Omega \theta f \varphi w^0 dx,$$

qui est la formulation faible du problème homogénéisé cherché. La preuve est complète. \square

2.7 Méthode de convergence à deux échelles

Posons le lemme suivant :

Lemme 2.15 ([2]). *Pour tout fonction $\theta(x) \in [L^2(\Omega)]^N$, il existe $\Psi(x, y)$ dans $[L^2(\Omega; L^2_{per}(Y^*))]^N$ tel que*

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_y \Psi(x, y) &= 0 \text{ dans } Y^*, \\ \Psi(x, y) &= 0 \text{ sur } \partial Y^* / \partial Y, \\ \int_{Y^*} \Psi(x, y) dy &= \theta(x), \\ \|\Psi(x, y)\|_{[L^2(\Omega; L^2_{per}(Y^*))]^N} &\leq C \|\theta(x)\|_{(L^2(\Omega))^N}.\end{aligned}$$

Le résultat principal de cette section est donné par le théoème ci-dessous :

Théorème 2.16. *Notons par $\tilde{\cdot}$ le prolongement par zéro dans le domaine Ω/Ω^ϵ . Les suites \tilde{u}^ϵ et $\tilde{\nabla}u^\epsilon$ convergent à deux échelles vers $u(x)\chi(y)$ et $\chi(y)[\nabla u(x) + \nabla_y u_1(x, y)]$, respectivement, où (u, u_1) est l'unique solution dans $H_1^0(\Omega) \times L^2[\Omega; H_{per}^1(Y^*)/\mathbb{R}]$ du système homogénéisé à deux échelles suivant :*

$$\begin{cases} -div_y (A(y)\nabla_y u_1(x, y)) = div_y (A(y)) \nabla u^0(x) & \text{dans } \Omega \times Y^*, \\ -div_x [\int_{Y^*} A(y) (\nabla u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) dy] = \theta f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^1(x, \cdot) & Y\text{-périodique.} \\ A(y) (\nabla u^0(x) + \nabla_y u^1(x, y)) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial Y^* - \partial Y. \end{cases} \quad (2.79)$$

Démonstration du théorème 2.16. D'après la formulation variationnelle (2.68), on obtient

$$\|u^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq C \text{ et } \|\nabla u^\epsilon\|_{L^2(\Omega^\epsilon)} \leq C.$$

Les deux suites $\{\tilde{u}^\epsilon\}$ et $\{\tilde{\nabla}u^\epsilon\}$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$, et elles sont convergentes à deux échelles vers $u^0(x, y)$ et $\xi^0(x, y)$, respectivement. Puisque, par définition, $\{\tilde{u}^\epsilon\}$ et $\{\tilde{\nabla}u^\epsilon\}$ sont nulles dans Ω/Ω^ϵ , leurs limites à deux échelles sont $u^0(x, y)$ et $\xi^0(x, y)$ sont égales aussi à zéro dans $\Omega \times Y/Y^*$.

Afin de trouver la forme précise de u^0 et ξ^0 dans $\Omega \times Y^*$, considérons deux fonctions $\psi \in D(\Omega; C_{per}^\infty(Y))$ et $\Psi(x, y) \in (D(\Omega; C_{per}^\infty(Y)))^N$ nulles dans $\Omega \times Y/Y^*$. On a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\epsilon} u^\epsilon \psi \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^*} u^0(x, y) \psi(x, y) dx dy. \quad (2.80)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\epsilon} \nabla u^\epsilon \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^*} \xi^0(x, y) \Psi(x, y) dx dy. \quad (2.81)$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\epsilon \int_{\Omega^\epsilon} \nabla u^\epsilon \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) dx = - \int_{\Omega^\epsilon} u^\epsilon \left[div_y \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon div_x \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) \right] dx.$$

Par passage à la limite, quand $\epsilon \rightarrow 0$, dans les deux termes en utilisant (2.80) et (2.81), on trouve

$$0 = - \int_{\Omega} \int_{Y^*} u^0(x, y) \operatorname{div}_y \Psi(x, y) dx dy.$$

Ceci implique que u^0 ne dépend pas de y dans Y^* , autrement dit, il existe $u(x) \in L^2(\Omega)$ tel que

$$u^0(x, y) = u(x) \chi(y).$$

Maintenant, ajoutons aux hypothèses précédentes la condition $\operatorname{div}_y \Psi(x, y) = 0$. On intègre par parties sur Ω^ϵ , on obtient

$$\int_{\Omega^\epsilon} \nabla u^\epsilon(x) \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx = - \int_{\Omega^\epsilon} u^\epsilon(x) \operatorname{div}_x \Psi \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) dx.$$

Passons à la limite à deux échelles, on aura

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^*} \xi^0(x, y) \Psi(x, y) dx dy = - \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{Y^*} u(x) \operatorname{div}_x \Psi(x, y) dx dy. \quad (2.82)$$

On utilise le lemme 2.15 écrit pour $\theta(x) = \Psi(x, y)$, implique que $u(x) \in H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, une intégration par parties dans (2.82), montre que, pour toute fonction $\Psi(x, y) \in [L^2(\Omega; L_{per}^2(Y^*))]^N$ avec $\operatorname{div}_y \Psi(x, y) = 0$ et $\Psi(x, y) \cdot \nu_y = 0$ sur $\partial Y - \partial Y^*$, on a

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} [\xi^0(x, y) - \nabla u(x)] \Psi(x, y) dx dy = 0.$$

Maintenant, en utilisant le résultat classique évoqué précédemment qui nous referons le lecteur aux livres de Girault et Raviart (1981) et Temam (1979), i.e. si $(F, \varphi)_{L^2} = 0$, pour tout φ tel que $\operatorname{div} \varphi = 0$, alors F est un gradient, on déduit de (2.81) qu'il existe une fonction $u^1(x, y) \in L^2[\Omega; (H_{per}^1(Y^*))/\mathbb{R}]$ telle que

$$\xi^0(x, y) = \chi(y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)].$$

Nous sommes maintenant en position de trouver les équations homogénéisées satisfaites par u et u^1 . Pour cela, on multiplie l'équation originale par la

fonction test $\phi(x) + \epsilon\phi_1(x, x/\epsilon)$, où $\phi \in D(\Omega)$ et $\phi_1 \in D[\Omega; C_{per}^\infty(Y)]$. Par intégration par parties et par passage à la limite à deux échelles, on obtient

$$\int_{\Omega} \int_{Y^*} A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)] \cdot [\nabla \phi(x) + \nabla \phi_1(x, y)] dx dy = \theta \int_{\Omega} f \phi dx \quad (2.83)$$

Par densité, (2.83) reste vrai pour tout $(\phi, \phi_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega, (H_{per}^1(Y^*))/\mathbb{R})$. Une simple intégration par parties montre que (2.83) est une forme variationnelle associée à (2.70). D'après la coercivité du membre gauche de (2.83), l'existence et l'unicité de la solution sont établies d'après le lemme de Lax-Milgram.

Maintenant, choisissons dans (2.83), $\phi = 0$ et $\phi_1 = 0$, respectivement, on obtient le système à deux équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -div_y (A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)]) = 0 & \text{dans } \Omega \times Y^*, \\ -div_x [\int_{Y^*} A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)] dy] = \theta f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ y \longrightarrow u^1(x, y) & \text{Y-périodique,} \\ (A(x, y) [\nabla u(x) + \nabla_y u^1(x, y)]) \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial Y^* - \partial Y, \end{array} \right.$$

qui est équivalent aux problèmes homogénéisé (2.70) et et les équations cellulaires (2.71) à travers la relation

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N w_j(y) \frac{\partial u^0(x)}{\partial x_j} + \tilde{u}_1(x).$$

□

Chapitre 3

H-convergence dans les domaines composites et perforés

Les méthodes d'homogénéisation vues dans le chapitre précédent traitent seulement le cas des problèmes posés dans des domaines à microstructure périodique, et avec celles-ci, on ne peut pas traiter les problèmes d'homogénéisation en cas des domaines à microstructure non périodique. Afin de répondre à cette question, De Giorgi et S.Spagnolo en 1968 ont introduit la G-convergence (elle est associée à la convergence des fonctions de Green) pour l'étude de convergence des solutions des problèmes elliptiques (voir [22]), dans le cas où la matrice A^ϵ est symétrique. F. Murat et L. Tartar [32] ont généralisé la notion de G-convergence au cas non symétrique sous le nom de la H-convergence. De Giorgi (1975) a introduit la Γ -convergence originalement pour les problèmes de calcul des variations. C'est une notion abstraite de convergence fonctionnelle qui est utilisée par la suite pour résoudre quelques problèmes d'homogénéisation. Parmi toutes ces méthodes évoquées dont on a d'autres, nous nous limitons à l'étude de la H-convergence dans les milieux composites et perforés en présentant dans chaque cas leurs propriétés fondamentales.

3.1 H-convergence dans les domaines composites

Définition 3.1 (F. Murat et L. Tartar [32]). Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et A^ϵ un champ de matrices dans $M(\alpha, \beta; \Omega)$. On dit que A^ϵ est H-convergente vers $A^0 \in M(\alpha', \beta'; \Omega)$ si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution u^ϵ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

vérifie les convergences faibles suivantes :

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \end{cases}$$

où u^0 est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La H-convergence de A^ϵ vers A^0 est notée $A^\epsilon \xrightarrow{H} A^0$.

- Remarque 3.1** ([26]).
1. La topologie de la H-convergence est associée à une métrique. On peut ainsi passer à la limite dans le produit $\xi^\epsilon = A^\epsilon \nabla u^\epsilon$ vu comme produit de dualité entre la topologie de la H-convergence pour la suite $\{A^\epsilon\}$ et la topologie faible dans $(L^2(\Omega))^N$ pour la suite $\{\nabla u^\epsilon\}$.
 2. La matrice A^0 donnée par la H-convergence est indépendante du second membre $f \in H^{-1}(\Omega)$ et des conditions aux limites.

3.1.1 Caractère local de la H-convergence

Le résultat suivant montre l'unicité de la H-limite et le caractère local de cette convergence.

Proposition 3.1 ([33]). *i) Une suite de matrices $\{A^\epsilon\}$ appartenant à $M(\alpha, \beta; \Omega)$ ne peut avoir qu'une seule H-limite.*

ii) Si deux suites de matrices $\{A^\epsilon\}$ et $\{B^\epsilon\}$ vérifient

1. $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ et $B^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$,
2. $A^\epsilon = B^\epsilon$, dans un ouvert ω de Ω ,
3. $A^\epsilon \xrightarrow{H} A^0, B^\epsilon \xrightarrow{H} B^0$,

alors

$$A^0 = B^0 \text{ sur } \omega.$$

Démonstration. i) Supposons que la suite A^ϵ admet une H-limite A^0 , et soit $\omega_1 \subset\subset \omega$ et $\phi \in D(\omega_1)$.

On définit alors pour $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $f_\lambda(x) = -\text{div}(A^0(x)\text{grad}((\lambda, x)\phi(x)))$, et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(A^\epsilon \nabla u_\lambda^\epsilon) = f & \text{dans } \omega_1, \\ u_\lambda^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\omega_1. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse de la H-convergence de $\{A^\epsilon\}$ vers A^0 , on a

$$\begin{cases} u_\lambda^\epsilon \rightharpoonup u_\lambda^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\omega_1), \\ A^\epsilon \nabla u_\lambda^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u_\lambda^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\omega_1))^N, \end{cases}$$

où u_λ^0 est solution du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -div(A^0 \nabla u_\lambda^0) = -div(A^0(x) grad((\lambda, x)\phi(x))) & \text{dans } \omega_1, \\ u_\lambda^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega_1. \end{cases}$$

On a, d'après la coercivité de A^0 , $u_\lambda^0 = (\lambda, x)\phi(x)$ est l'unique solution du problème homogénéisé ci-dessus. Par ailleurs, si B^0 est une autre H-limite de la suite $\{A^\epsilon\}$, on aura également

$$\begin{cases} u_\lambda^\epsilon \rightharpoonup v_\lambda^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\omega_1), \\ A^\epsilon \nabla u_\lambda^\epsilon \rightharpoonup B^0 \nabla v_\lambda^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\omega_1))^N, \end{cases}$$

où v_λ^0 est solution du problème homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} -div(B^0 \nabla v_\lambda^0) = -div(A^0(x) grad((\lambda, x)\phi(x))) & \text{dans } \omega_1, \\ v_\lambda^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Puisque $u_\lambda^\epsilon \rightharpoonup v_\lambda^0$ faiblement dans $H_0^1(\omega_1)$, on aura $v_\lambda^0 = (\lambda, x)\phi$ est l'unique solution de ce problème homogénéisé. Par conséquent,

$$u_\lambda^0 = v_\lambda^0 = (\lambda, x)\phi \text{ dans } \omega_1.$$

Ce qui implique, qu'en raison de l'égalité (3.1), que

$$-div((A^0 - B^0)\nabla u_\lambda^0) = 0 \text{ dans } \omega_1.$$

D'où $A^0 \nabla u_\lambda^0 = B^0 \nabla u_\lambda^0$, et comme $\nabla u_\lambda^0 = \lambda$ dans ω_1 . Or le choix de λ est arbitraire dans \mathbb{R}^N , alors $A^0 = B^0$ dans ω_1 . Finalement, l'ensemble ω_1 est quelconque dans ω , on conclut que $A^0 = B^0$ dans ω .

ii) La deuxième assertion est une conséquence immédiate de la partie i) et de la définition de la H-convergence. \square

3.1.2 Lemme de compacité par compensation

Ce lemme qui suit nous facilite de surmonter les difficultés présentées dans le passage à la limite dans le produit des suites qui sont seulement faiblement convergentes.

Lemme 3.2 (Compacité par compensation [32]). Soient $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $\{g^\epsilon\}, \{u^\epsilon\}$ deux suites qui convergent faiblement vers g dans $L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et u dans $W^{1,p}(\Omega)$ respectivement. Supposons que $\{-\operatorname{div} g^\epsilon\}$ converge fortement vers $-\operatorname{div} g$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$. Alors, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} g^\epsilon \nabla u^\epsilon \varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega} g \nabla u \varphi dx.$$

Lemme 3.3 ([33]). Si $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ et si $A^\epsilon \longrightarrow A$ p.p. , alors $A^\epsilon \xrightarrow{H} A$.

Lemme 3.4 ([33]). Soit $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$. Soient $\{u^\epsilon\}$ et $\{v^\epsilon\}$ deux suites dans $H^1(\Omega)$ telles que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \\ \xi^\epsilon = A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup \xi^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \\ -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) \longrightarrow -\operatorname{div} \xi^0 & \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases} \quad (3.2)$$

et

$$\begin{cases} v^\epsilon \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \\ \eta^\epsilon = {}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon \rightharpoonup \eta^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \\ -\operatorname{div}({}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon) \longrightarrow -\operatorname{div} \eta^0 & \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega), \end{cases} \quad (3.3)$$

alors, on a

$$(\xi^0, \nabla v^0) = (\nabla u^0, \eta^0) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Proposition 3.5 ([33]). Si une suite de matrices $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ H -converge vers $A^0 \in M(\alpha', \beta'; \Omega)$, alors la suite $\{{}^t A^\epsilon\}$ des transposées H -converge vers ${}^t A^0$.

Démonstration. Soit $g \in H^{-1}(\Omega)$. On doit montrer que la solution v^ϵ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}({}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon) = g & \text{sur } \Omega, \\ v^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

satisfait

$$\begin{cases} v^\epsilon \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ {}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon \rightharpoonup {}^t A^0 \nabla v^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases}$$

où v^0 est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}({}^t A^0 \nabla v^0) = g & \text{sur } \Omega, \\ v^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Notons que la suite $\{v^\epsilon\}$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$; en outre, ${}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon$ est uniformément bornée dans $(L^2(\Omega))^N$. Donc, il existe une sous suite notée $\sigma(\epsilon)$ et deux fonctions $v \in H_0^1(\Omega)$ et $\eta \in (L^2(\Omega))^N$ telles que

$$\begin{cases} v^{\sigma(\epsilon)} \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ {}^t A^{\sigma(\epsilon)} \nabla v^{\sigma(\epsilon)} \rightharpoonup \eta^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N. \end{cases}$$

Il est clair que

$$-\operatorname{div} \eta^0 = g \text{ sur } H^{-1}(\Omega).$$

D'autre part, soit u^ϵ la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = g & \text{dans } \Omega, \\ u^\epsilon \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On a par hypothèse

$$\begin{cases} u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^\epsilon \nabla u^\epsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^N, \end{cases}$$

où u^0 la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

En vertu du lemme 3.4, on a

$$(A^0 \nabla u^0, \nabla v^0) = (\nabla u^0, \eta^0) \text{ p.p. sur } \Omega. \quad (3.4)$$

Puisque g peut être choisi arbitrairement dans $H^{-1}(\Omega)$, on peut prendre $u^0 = (\lambda, x)\phi(x)$, telle que $\phi \in D(\omega)$, $\phi = 1$ sur ω , $\omega \subset\subset \Omega$, alors, $\nabla u^0 = \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}^N$ est arbitraire. Donc (3.4) devient

$$(A^0 \lambda, \nabla v^0) = (\lambda, \eta^0) \text{ p.p. sur } \omega. \quad (3.5)$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$, on peut conclure que $\eta^0 = {}^t A^0 \nabla v^0$ sur ω . L'égalité $-\operatorname{div} \eta^0 = g$ implique que $v = v^0$ sur ω . Par l'unicité des limites, on a toutes les suites v^ϵ et ${}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon$ qui convergent vers v^0 et ${}^t A^0 \nabla v^0$ respectivement sur ω . Finalement, puisque ω est un ensemble relativement compact quelconque dans Ω , alors la H-convergence de ${}^t A^\epsilon$ vers ${}^t A^0$ est vérifiée sur tout Ω . \square

3.1.3 Compacité séquentielle de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H-convergence

Théorème 3.6 (L. Tartar et F. Murat [33]). *Etant donné une suite $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$, alors il existe une sous suite $\{A^{\sigma(\epsilon)}\}$ de $\{A^\epsilon\}$ et $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}; \Omega)$ tel que $A^{\sigma(\epsilon)}$ H-converge vers A^0 .*

Remarque 3.2 ([33]). Ce résultat important a été obtenu par L. Tartar et F. Murat est la compacité séquentielle de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H-convergence. L'énoncé du théorème montre que la H-limite d'une suite de matrices de $M(\alpha, \beta; \Omega)$, que nous avons supposée appartenir à $M(\alpha', \beta'; \Omega)$ dans la définition de la H-convergence, appartenant en fait à $M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}; \Omega)$. Il y a donc stabilité de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H-convergence en ce qui concerne la constante de coercivité.

Avant de démontrer ce théorème, on a besoin d'énoncer les deux propositions importantes suivantes :

Proposition 3.7 ([33]). *Soient F un espace de Banach séparable et G un espace de Banach réflexif. Soit $\mathcal{L}(F; G)$ un ensemble de tous les opérateurs linéaires continus de F dans G . Supposons que*

- i) $T^\epsilon \in \mathcal{L}(F; G)$,
- ii) $\|T^\epsilon\|_{\mathcal{L}(F; G)} \leq c, c > 0$.

Alors, il existe une sous suite $\{T^{\sigma(\epsilon)}\}$ de $\{T^\epsilon\}$ et un opérateur $T^0 \in \mathcal{L}(F; G)$ tel que pour tout $f \in F$

$$T^{\sigma(\epsilon)} f \rightharpoonup T^0 f \text{ faiblement dans } G.$$

La démonstration de la proposition ci-dessus est utile, puisque les techniques utilisées pour démontrer le théorème 3.6 seront les mêmes.

Proposition 3.8 ([33]). *Soit V un espace de Banach réflexif et séparable. Soit α et β deux constantes positives et $\{T^\epsilon\}$ une suite d'opérateurs tels que pour tout $\epsilon > 0$*

$$\begin{cases} i) T^\epsilon \in \mathcal{L}(V; V^*), \\ ii) \|T^\epsilon\|_{\mathcal{L}(V; V^*)} \leq \beta, \\ iii) \text{ Pour tout } v \in V, \langle T^\epsilon v, v \rangle_{V^*, V} \geq \alpha \|v\|_V^2. \end{cases}$$

Alors, il existe une sous suite $\{T^{\sigma(\epsilon)}\}$ de $\{T^\epsilon\}$ et un opérateur $T^0 \in \mathcal{L}(V; V^*)$ tels que

$$\begin{cases} i) T^0 \in \mathcal{L}(V; V^*), \\ ii) \|T^0\|_{\mathcal{L}(V; V^*)} \leq \frac{\beta^2}{\alpha}, \\ iii) \text{ Pour tout } v \in V, \langle T^0 v, v \rangle_{V^*, V} \geq \alpha \|v\|_V^2. \end{cases}$$

En outre, pour tout

$$(T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \rightharpoonup (T^0)^{-1} f \text{ faiblement dans } V.$$

Démonstration de la proposition 3.8. Puisque *i)* est vérifié, on peut définir une forme bilinéaire $a_\epsilon : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a_\epsilon(u, v) = \langle T^\epsilon u, v \rangle,$$

pour tout $u, v \in V$. Par les hypothèses *ii)* et *iii)*, il suit immédiatement que a_ϵ continue et coercive. Donc, d'après le lemme de Lax-Milgram, pour $f \in V^*$, il existe une fonction unique $u \in V$ telle que

$$a_\epsilon(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in V.$$

On a

$$\|(T^\epsilon)^{-1} f\|_V = \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V^*},$$

pour tout $f \in V^*$. Il en résulte que $\|(T^\epsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(V; V^*)} \leq \frac{1}{\alpha}$. Par la proposition ci-dessus, il existe une sous suite $\sigma(\epsilon)$ de ϵ et un opérateur $S \in \mathcal{L}(V^*; V)$ tels que pour tout $f \in V^*$

$$(T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \rightharpoonup Sf \text{ faiblement dans } V.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f, f \rangle_{V, V^*} &= \langle (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f, T^{\sigma(\epsilon)} (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \rangle_{V, V^*} \\ &\geq \alpha \left\| (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \right\|_V^2 \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|f\|_{V^*}^2. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $f \in V^*$

$$\langle Sf, f \rangle_{V, V^*} \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \|f\|_{V^*}^2.$$

Ceci prouve que S est coercif donc inversible. Notons par $T^0 \in \mathcal{L}(V; V^*)$ son inverse. Notons encore que pour tout $v \in V$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \|T^0 v\|_{V^*}^2 \leq \langle ST^0 v, T^0 v \rangle_{V, V^*} \leq \langle v, T^0 v \rangle_{V, V^*} \leq \|v\|_V \|T^0 v\|_{V^*}.$$

On conclut que

$$\|T^0\|_{\mathcal{L}(V; V^*)} \leq \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

D'autre part, on a pour tout $f \in V^*$

$$\alpha \left\| (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \right\|_V^2 \leq \langle T^{\sigma(\epsilon)} (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f, (T^{\sigma(\epsilon)})^{-1} f \rangle_{V^*, V},$$

en tenant compte de la semi-continuité inférieure faible de la norme dans V , on obtient pour tout $f \in V^*$

$$\alpha \|Sf\|_V^2 \leq \langle f, Sf \rangle_{V^*, V}.$$

On prend en particulier $f = T^0 v$, on conclut que

$$\alpha \|v\|_V^2 \leq \langle T^0 v, v \rangle_{V^*, V},$$

pour tout $v \in V$. La preuve de la proposition est terminée. □

Démonstration de théorème 3.6.

Première étape : Nous allons construire des fonctions test qui seront employées dans le lemme 3.4.

Soit Ω' un sous ensemble ouvert et borné dans \mathbb{R}^N tel que $\Omega \subset\subset \Omega'$.

Considérons une suite $B^\epsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega')$ telle que

$$B^\epsilon = \begin{cases} {}^t A^\epsilon & \text{sur } \Omega, \\ \alpha I & \text{sur } \Omega'/\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

Considérons une suite d'opérateurs $\mathcal{B}^\epsilon \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega'); H^{-1}(\Omega'))$ définie pour $\epsilon > 0$ par

$$\mathcal{B}^\epsilon u = -\text{div}(B^\epsilon \nabla u). \quad (3.7)$$

En vertu de la proposition 3.8, il existe une sous suite $\{\mathcal{B}^{\sigma(\epsilon)}\}$ de $\{\mathcal{B}^\epsilon\}$ et un opérateur $\mathcal{B}^0 \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega'); H^{-1}(\Omega'))$ tels que pour tout $g \in H^{-1}(\Omega')$

$$(\mathcal{B}^{\sigma(\epsilon)})^{-1} g \rightharpoonup (\mathcal{B}^0)^{-1} g \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega'). \quad (3.8)$$

Maintenant, soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$ tel que $\varphi = 1$ sur Ω , on note par g_i la fonction dans $H^{-1}(\Omega')$ définie par

$$g_i = \mathcal{B}^0((e_i, x)\varphi),$$

pour tout $i = 1, \dots, N$. Notons par $v_{\sigma(\epsilon), i}$ la solution de

$$\begin{cases} \mathcal{B}^{\sigma(\epsilon)} v_{\sigma(\epsilon), i} = g_i & \text{sur } \Omega', \\ v_{\sigma(\epsilon), i} \in H_0^1(\Omega'). \end{cases}$$

Cette définition jointe à (3.6) et (3.7) implique que pour tout $i = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{cases} -\text{div}({}^t A^{\sigma(\epsilon)} \nabla v_{\sigma(\epsilon), i}) = g_i & \text{sur } \Omega, \\ v_{\sigma(\epsilon), i} \in H_0^1(\Omega'). \end{cases}$$

En plus, grâce à (3.8), on a

$$v_{\sigma(\epsilon), i} \rightharpoonup (e_i, \cdot) \text{ faiblement dans } H^1(\Omega).$$

Par suite, puisque ${}^t A^{\sigma(\epsilon)} \nabla v_{\sigma(\epsilon), i}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, alors, il existe une sous suite $\tau(\epsilon)$ extraite de $\sigma(\epsilon)$ telle que, pour tout $i = 1, \dots, N$

$${}^t A^{\sigma(\epsilon)} \nabla v_{\sigma(\epsilon), i} \rightharpoonup \eta_i \text{ faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Notons ainsi que pour tout $i = 1, \dots, N$, la suite $(v_{\sigma(\epsilon), i})$ satisfait les hypothèses (3.3) du lemme 3.4.

Définissons $A^0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^{N^2})$ par

$$(A^0(x))_{i,j} = (\eta_i(x))_j \text{ pour p.p. } x \in \Omega \text{ et pour tout } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Dans le reste des étapes, nous démontrerons que $(A^{\tau(\epsilon)})$ H-converge vers A^0 et $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$.

Deuxième étape : Pour des raisons de simplification, nous écrirons dans toute la suite ϵ au lieu de $\tau(\epsilon)$.

Pour tout $\epsilon > 0$, on note par

$$\mathcal{A}^\epsilon \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)) \text{ et } \mathcal{T}^\epsilon \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega); L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)),$$

deux opérateurs définis par

$$\mathcal{A}^\epsilon u = -\text{div}(\mathcal{A}^\epsilon \nabla u),$$

et

$$\mathcal{T}^\epsilon f = \mathcal{A}^\epsilon \nabla ((\mathcal{A}^\epsilon)^{-1} f),$$

respectivement. Par l'application de la proposition 3.8 à l'opérateur \mathcal{A}^ϵ , on déduit qu'il existe une sous suite $\rho(\epsilon)$ de ϵ et un opérateur noté par $\mathcal{A}^0 \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ tels que

$$(\mathcal{A}^{\rho(\epsilon)})^{-1} f \rightharpoonup (\mathcal{A}^0)^{-1} f \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$.

D'autre part, on a

$$\|\mathcal{T}^\epsilon f\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} \leq \beta \|(\mathcal{A}^\epsilon)^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{\beta}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$. Par l'application de la proposition 3.7 à cet opérateur, on déduit qu'il existe une sous suite notée encore $\rho(\epsilon)$ de ϵ et un opérateur $\mathcal{T}^0 \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega); L^2(\Omega; \mathbb{R}^N))$ tels que pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, on a

$$\mathcal{T}^{\rho(\epsilon)} f \rightharpoonup \mathcal{T}^0 f \text{ faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

Par ailleurs, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, posons

$$(\mathcal{A}^\epsilon)^{-1} f = u_\epsilon, (\mathcal{A}^0)^{-1} f = u_0.$$

On a alors

$$\begin{cases} u_{\rho(\epsilon)} \rightharpoonup u_0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ A^{\rho(\epsilon)} \nabla u_{\rho(\epsilon)} \rightharpoonup \mathcal{T}^0 f = \xi & \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ -\operatorname{div}(A^{\rho(\epsilon)} \nabla u_{\rho(\epsilon)}) = f & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Notons que la suite $\{u_{\rho(\epsilon)}\}$ satisfait l'hypothèse (3.2) du lemme 3.4.

Ceci joint du fait que la suite $\{v_{\tau(\epsilon)}\}$ construite dans l'étape précédente vérifie les hypothèses (3.2) de lemme 3.4, implique que, pour tout $i \in 1, \dots, N$

$$(\xi, \nabla(e_i, x)) = (\nabla u_0, \eta_i) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

Par définition de A^0 ce n'est rien d'autre que

$$\mathcal{T}^0 f = \xi = A^0 \nabla u_0.$$

Troisième étape : Montrons que $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}, \Omega)$.

Par définition $A^0 \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N^2})$. Donc, pour tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, on a $A^0 \nabla u_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par le lemme de compacité par compensation 3.2 on obtient

$$(A^{\rho(\epsilon)} \nabla u_{\rho(\epsilon)}, \nabla u_{\rho(\epsilon)}) \longrightarrow (A^0 \nabla u_0, \nabla u_0) \text{ dans } D'(\Omega). \quad (3.9)$$

D'autre part, par l'hypothèse d'ellipticité de A^ϵ on a

$$\int_{\Omega} (A^{\rho(\epsilon)} \nabla u_{\rho(\epsilon)} \nabla u_{\rho(\epsilon)}) \varphi dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_{\rho(\epsilon)}|^2 \varphi dx, \quad (3.10)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Alors, en utilisant (3.9), (3.10) et la semi-continuité inférieure faible de la norme dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on obtient

$$\int_{\Omega} (A^0 \nabla u_0 \nabla u_0) \varphi dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 \varphi dx, u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad (3.11)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

Maintenant, choisissons $u_0 = (\lambda, x)\psi$ où $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $\psi = 1$ dans $\omega \subset\subset \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}^N$ arbitraire, d'après (3.11) on déduit

$$\int_{\omega} (A^0(x)\lambda, \lambda) \varphi dx \geq \alpha \int_{\omega} |\lambda|^2 \varphi dx,$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Donc

$$(A^0(x)\lambda, \lambda) \geq |\lambda|^2 \text{ dans } \omega,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Puisque ω est un ensemble relativement compact quelconque de Ω , on en déduit que l'inégalité ci-dessus est vraie sur tout Ω .

Montrons maintenant que $|A^0(x)\lambda| \leq \frac{\beta^2}{\alpha} |\lambda|$ pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$.

Puisque $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta, \Omega)$, il suit que pour tout $\epsilon > 0$ les inégalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned} ((A^\epsilon)^{-1}(x)\mu, \mu) &\geq ((A^\epsilon)^{-1}(x)\mu, A^\epsilon(A^\epsilon)^{-1}\mu) \geq \alpha |(A^\epsilon)^{-1}\mu|^2 \geq \frac{\alpha}{\beta^2 |\mu|^2} \\ &\text{p.p. } x \in \Omega \text{ et pour tout } \mu \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ceci donne

$$\int_{\Omega} (\nabla u_\epsilon, A^\epsilon \nabla u_\epsilon) \varphi^2 dx \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \int_{\Omega} |A^\epsilon \nabla u_\epsilon|^2 \varphi^2 dx,$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et pour tout $\epsilon > 0$. Donc, en particulier c'est vrai pour tout $\rho(\epsilon)$. Par passage à limite (en tenant compte du lemme de compacité par compensation 3.2 et la semi-continuité inférieure faible de la norme dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$) on obtient

$$\int_{\Omega} (\nabla u_0, A^0 \nabla u_0) \varphi^2 dx \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \int_{\Omega} |A^0 \nabla u_0|^2 \varphi^2 dx.$$

De la même manière que ci-dessus, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\lambda, A^0 \lambda) \varphi^2 dx \geq \frac{\alpha}{\beta^2} \int_{\Omega} |A^0 \lambda|^2 \varphi^2 dx.$$

D'après cette inégalité on peut déduire que

$$\frac{\alpha}{\beta^2} \|(A^0 \lambda \varphi)\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}^2 \leq \|A^0 \lambda \varphi\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} \|\lambda \varphi\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)}.$$

Finalement

$$\|A^0 \lambda \varphi\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\beta^2}{\alpha} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} |\lambda|,$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$. On a encore $A^0 \lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et

$$\|A^0 \lambda\|_{L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\beta^2}{\alpha} |\lambda| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Quatrième étape : Dans l'étape précédente on a montré que $A^0 \in M(\alpha, \frac{\beta^2}{\alpha}; \Omega)$.

La limite u_0 de la suite $\{u_{\rho(\epsilon)}\}$ est définie de façon unique (indépendante de la sous suite $\rho(\epsilon)$ extraite de la suite ϵ) par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u_0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_0 \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

pour $f \in H^{-1}(\Omega)$. En plus, par l'unicité des limites, on a toutes les suites $\{u_{\tau(\epsilon)}\}$ et $\{A^{\tau(\epsilon)} u_{\tau(\epsilon)}\}$ qui convergent. On conclut que $A^{\tau(\epsilon)}$ H-converge vers A^0 . La preuve de théorème est complète. \square

3.2 *H*-convergence dans les domaines perforés

Dans cette section, on donne comme dans le cas des domaines composites les principaux résultats concernant la H-convergence dans les domaines perforés qu'on note par H^0 -convergence introduite dans [13] par M. Briane, P. Damlamian et P. Donato.

Introduisons les notations suivantes :

- S_ϵ est un sous ensemble compact de Ω et $\Omega/S_\epsilon = \Omega^\epsilon$;
- χ^ϵ la fonction caractéristique de Ω^ϵ ;

– Q^ϵ l'opérateur linéaire de prolongement par zéro de $H_0^1(\Omega^\epsilon)$ dans $H_0^1(\Omega)$.
 Posons

$$V_\epsilon = \{u \in H^1(\Omega^\epsilon) \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Définition 3.2 ([14]). La suite $\{S_\epsilon\}$ est dite admissible (dans Ω) si

- i) Chaque point limite faible $*$ dans L^∞ de χ^ϵ est positif presque par tout dans Ω .
- ii) Il existe un nombre réel positif C , indépendant de ϵ , et une suite $\{P^\epsilon\}$ d'opérateurs de prolongement appartenant à $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega^\epsilon); H_0^1(\Omega))$ tels que

$$\begin{cases} a) \forall u \in V_\epsilon, (P^\epsilon u)|_{\Omega^\epsilon} = u \\ b) \|\nabla P^\epsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega^\epsilon)}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Remarque 3.3 ([14]). 1. L'ensemble S_ϵ représente les trous dans le matériau occupant le domaine Ω , et, a) et b) représentent une condition sur la régularité des trous.

2. P^ϵ s'il existe n'est pas unique.

3. La constante de Poincaré est indépendante de ϵ . En effet,

$$\|u\|_{0,\Omega^\epsilon} \leq \|P^\epsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla P^\epsilon u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega^\epsilon)}.$$

Exemple 3.1. Les trous périodiques sont admissibles.



FIG. 3.1 – Domaine perforé

Soit P^ϵ un opérateur de prolongement linéaire de V^ϵ dans $H_0^1(\Omega)$, son adjoint $P^{\epsilon*}$ est défini de $H^{-1}(\Omega)$ dans l'espace dual V_ϵ' de V^ϵ comme suit :

$$\forall u \in V^\epsilon, \langle P^{\epsilon*} f, u \rangle_{V_\epsilon', V^\epsilon} = \langle f, P^\epsilon u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Maintenant, nous donnons la définition de la *H*-convergence dans les domaines perforés.

Définition 3.3 ([14]). Soient $\{A^\epsilon\}$ une suite du champ de matrices appartenant à $M(\alpha, \beta; \Omega)$, $\{S_\epsilon\}$ une suite de trous admissible dans Ω et pour tout ϵ , on note par $P^{\epsilon*}$ l'opérateur adjoint de P^ϵ . La paire (A^ϵ, S_ϵ) est dite *H*⁰-convergente vers la matrice $A^0 \in M(\alpha', \beta', \Omega)$, si et seulement si, pour toute fonction f de $H^{-1}(\Omega)$, la solution u^ϵ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) = P^{\epsilon*} f & \text{dans } \Omega, \\ A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nu = 0 & \text{sur } \partial S_\epsilon, \\ u^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

satisfait les convergences faibles suivantes :

$$\begin{cases} P^\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ Q^\epsilon(A^\epsilon \nabla u^\epsilon) \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où u^0 est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases}$$

Pour démontrer les résultats qui viennent, on a besoin de ce lemme.

Lemme 3.9 ([14]). Soient $\{S^\epsilon\}$ une suite de trous admissible dans Ω , et P^ϵ, R^ϵ deux familles d'opérateurs de prolongement satisfaites (3.13). Alors,

$$(v^\epsilon \rightharpoonup v^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)) \Rightarrow (P^\epsilon(v^\epsilon_{|\Omega^\epsilon}) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega)). \quad (3.15)$$

Si v^ϵ appartenant à V_ϵ et $P^\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup v^0$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors

$$\begin{cases} a) R^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ b) \forall \varphi \in D(\Omega), P^\epsilon(\varphi_{|\Omega^\epsilon} v^\epsilon) \rightharpoonup \varphi v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.16)$$

Démonstration. Pour l'assertion (3.15), observons que $\|v^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$ est borné indépendamment de ϵ , alors $\left\|v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right\|_{V_\epsilon}$ l'est aussi. Donc, $P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, par conséquent compact dans $L^2(\Omega)$ d'après le théorème A.10. Par suite, soient z la limite faible de $P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et χ^0 une limite faible $*$ de χ^ϵ dans $L^\infty(\Omega)$ pour une certaine sous suite notée toujours ϵ . On a $P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right)\chi^\epsilon = v^\epsilon\chi^\epsilon$ p.p. dans Ω , par passage à la limite, $z\chi^0 = v^0\chi^0$ p.p. dans Ω . Ceci, par la définition 3.2, implique que $z = v^0$, qui montre que v^0 est la seule limite de la suite faiblement relativement compacte de $P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right)$, par conséquent sa limite.

Quant à (3.16), est une conséquence de (3.15). En effet, Pour l'assertion a), il suffit de remplacer P^ϵ par R^ϵ et v^ϵ par $P^\epsilon(v^\epsilon)$ pour obtenir, puisque, $P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right) \rightharpoonup v^0$ que $R^\epsilon\left(P^\epsilon\left(v_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon\right)\right) \rightharpoonup v^0$.

Pour l'assertion b), on remplace v^ϵ par $\varphi P^\epsilon v^\epsilon$, on obtient

$$\varphi P^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup \varphi v^0 \text{ dans } H_0^1(\Omega),$$

car $\varphi P^\epsilon v^\epsilon$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$, et d'après (3.15), $P^\epsilon(\varphi_{|\Omega^\epsilon} v^\epsilon) \rightharpoonup \varphi v^0$. D'où le résultat. \square

Lemme 3.10 (Divergence-Rotationnel [14]). *Supposons que S_ϵ une suite de trous admissible dans Ω . Soit ξ^ϵ un champ de vecteurs appartenant à $(L^2(\Omega^\epsilon))^N$ tel que $Q^\epsilon(\xi^\epsilon)$ est borné dans $(L^2(\Omega))^N$ et satisfait*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\xi^\epsilon = P^{\epsilon*} f^\epsilon & \text{dans } \Omega^\epsilon, \\ \xi^\epsilon \nu = 0 & \text{sur } \partial S_\epsilon, \end{cases}$$

où f^ϵ est dans un sous ensemble compact de $H^{-1}(\Omega)$. Alors,

i) $\operatorname{div}Q^\epsilon(\xi^\epsilon)$ est dans un sous ensemble compact de $H^{-1}(\Omega)$.

ii) Si $Q^\epsilon(\xi^\epsilon)$ converge faiblement vers un certain ξ^0 , alors $f^0 = -\operatorname{div}\xi^0$ dans $H^{-1}(\Omega)$. De plus, si $\eta^\epsilon \in L^2(\Omega)$ est un champ de vecteurs qui converge faiblement vers un certain $\eta^0 \in L^2(\Omega)$ et tel que $\operatorname{rot}\eta^\epsilon$ est compact dans $H^{-1}(\Omega)$, alors $Q^\epsilon(\xi^\epsilon)\eta^\epsilon$ converge vers $\xi^0\eta^0$ dans $D'(\Omega)$.

Théorème 3.11 ([14]). *Soient $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ et S_ϵ une suite de trous admissible dans Ω . Les assertions suivantes sont équivalentes*

- a) La paire (A^ϵ, S_ϵ) est H^0 -convergente vers A^0 .
 b) Pour toute suite de fonctions g^ϵ dans $L^2(\Omega^\epsilon)$, telle que $Q^\epsilon(g^\epsilon) \rightharpoonup h$ faiblement dans $L^2(\Omega)$. La solution v^ϵ du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^\epsilon \nabla v^\epsilon) = g^\epsilon & \text{dans } \Omega^\epsilon, \\ A^\epsilon \nabla v^\epsilon \nu = 0 & \text{sur } \partial S_\epsilon, \\ v^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (3.17)$$

satisfait les convergences suivantes :

$$\begin{cases} P^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ Q^\epsilon(A^\epsilon \nabla v^\epsilon) \rightharpoonup A^0 \nabla v^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où v^0 est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla v^0) = h & \text{dans } \Omega, \\ v^0 = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

- c) Pour toute fonction g de $L^2(\Omega)$, et pour toute sous suite ϵ' telle que $\chi^{\epsilon'} \rightharpoonup \chi^0$ faiblement* dans $L^\infty(\Omega)$, la solution $v^{\epsilon'}$ du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^{\epsilon'} \nabla v^{\epsilon'}) = g & \text{dans } \Omega^{\epsilon'}, \\ A^{\epsilon'} \nabla v^{\epsilon'} \nu = 0 & \text{sur } \partial S_{\epsilon'}, \\ v^{\epsilon'} = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

satisfait les convergences suivantes :

$$\begin{cases} P^{\epsilon'} v^{\epsilon'} \rightharpoonup v^0 & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ Q^{\epsilon'}(A^{\epsilon'} \nabla v^{\epsilon'}) \rightharpoonup A^0 \nabla v^0 & \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (3.20)$$

où v^0 est la solution de problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^0 \nabla v^0) = \chi^0 g & \text{dans } \Omega, \\ v^0 = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. (a) \Rightarrow (b) : Supposons que la paire (A^ϵ, S_ϵ) *H*-converge vers A^0 . Soit g^ϵ une suite telle que $Q^\epsilon(g^\epsilon)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers un certain h . Soit u^ϵ la solution de problème (3.14) associée à $f = h$, v^ϵ est la solution de problème (3.17) et w^ϵ est la différence $u^\epsilon - v^\epsilon$. Alors

$$\begin{aligned}
 \alpha C^{-2} \|\nabla P^\epsilon w^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega^\epsilon} A^\epsilon \nabla w^\epsilon \nabla w^\epsilon dx \\
 &= \int_{\Omega^\epsilon} A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla w^\epsilon dx - \int_{\Omega^\epsilon} A^\epsilon \nabla v^\epsilon \nabla w^\epsilon dx \\
 &= \left\langle P^{\epsilon'}(h), w^\epsilon \right\rangle_{V_{\epsilon'}, V_\epsilon} - \int_{\Omega^\epsilon} g^\epsilon w^\epsilon dx \quad (3.21) \\
 &= \int_{\Omega} h P^\epsilon(w^\epsilon) dx - \int_{\Omega} Q^\epsilon(g^\epsilon) P^\epsilon(w^\epsilon) dx \\
 &= \int_{\Omega} (h - Q^\epsilon(g^\epsilon)) P^\epsilon(w^\epsilon) dx.
 \end{aligned}$$

Puisque la fonction $P^\epsilon w^\epsilon$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, elle converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers 0 (pour une sous suite) d'après le théorème A.10, alors, le dernier terme de (3.21) tend vers 0 faiblement. Par conséquent, $P^\epsilon w^\epsilon$ converge vers 0 fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

La H^0 -convergence de (A^ϵ, S_ϵ) implique que $P^\epsilon u^\epsilon$ converge faiblement vers v^0 solution du problème (3.18). D'où $P^\epsilon v^\epsilon$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers v^0 .

(b) \Rightarrow (c) Il suffit de poser $g^\epsilon = \chi^\epsilon g$ pour conclure.

(c) \Rightarrow (a) : Au début, supposons que la sous suite ϵ' est choisie comme dans l'énoncé et que (3.20) est vérifié pour toute fonction g de $L^2(\Omega)$. Montrons que $(A^{\epsilon'}, S_{\epsilon'})$ H^0 -convergente vers A^0 . Pour ce but, il est suffisant de tester cela pour les fonctions appartenant à un sous ensemble dense de $H^{-1}(\Omega)$. Alors la convergence faible $*$ de $\chi^{\epsilon'}$ vers χ^0 jointe à (i) de la définition 3.2 implique le sous ensemble de $L^2(\Omega)$ composé de fonctions $\chi^0 g$ où $g \in L^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, donc aussi dans $H^{-1}(\Omega)$. On utilise une fonction $\chi^0 g$ comme f . Soit $u^{\epsilon'}$ la solution associée au problème (3.14) et $v^{\epsilon'}$ la solution de problème (3.19). Comme ci-dessus dans (3.21) (en remplaçant ϵ par ϵ'), $(P^{\epsilon'} u^{\epsilon'} - P^{\epsilon'} v^{\epsilon'})$ converge vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$. Ceci joint à (3.20) prouve que $(A^{\epsilon'}, S_{\epsilon'})$ H^0 -converge vers A^0 .

Maintenant, supposons que la suite $\{(A^\epsilon, S_\epsilon)\}$ n'est pas H-convergente vers A^0 , donc on peut extraire une sous suite ϵ' pour qui $\chi^{\epsilon'}$ convergerait faiblement $*$ vers une certaine fonction χ^0 , et telle que $P^{\epsilon'} u^{\epsilon'}$ ne convergerait pas vers u^0 , ce fait contredisant ce qui est prouvé dans l'étape précédente (a) \Rightarrow (b). D'où (A^ϵ, S_ϵ) H-convergente vers A^0 . \square

Corollaire 3.12 ([14]). *La définition de la H^0 -convergence est indépendante du choix des opérateurs de prolongement P^ϵ .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 3.11 et de lemme 3.9. \square

3.2.1 Caractère local de la H^0 -convergence

Proposition 3.13 (Localité [14]). *Soient $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$, $B^\epsilon \in M(\alpha, \beta; O)$, $\{S_\epsilon\}$ et $\{T_\epsilon\}$ deux suites de trous admissible dans Ω et O respectivement tels que (A^ϵ, S_ϵ) et (B^ϵ, T_ϵ) H-convergent vers A^0 et B^0 . Alors, pour tout sous ensemble relativement compact ω de $\Omega \cap O$, on a*

$$(\omega \cap S_\epsilon = \omega \cap T_\epsilon \text{ et } A^\epsilon = B^\epsilon \text{ sur } \omega/S_\epsilon) \Rightarrow (A^0 = B^0 \text{ sur } \omega).$$

Démonstration. Soit ω un sous ensemble ouvert relativement compact de $\omega \cap O$ tel que

$$\omega \cap S_\epsilon = \omega \cap T_\epsilon \text{ et } A^\epsilon = B^\epsilon \text{ sur } \omega/S_\epsilon,$$

Soient $\phi \in D(\omega)$ prolongé par 0 dans l'espace \mathbb{R}^N tout entier et f, g sont définis par

$$\begin{cases} f = -\text{div}(A^0 \nabla \phi), \\ g = -\text{div}(B^0 \nabla \phi). \end{cases}$$

u^ϵ la solution du problème (3.14) et v^ϵ la solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(B^\epsilon \nabla v^\epsilon) = \Pi^{\epsilon*} g & \text{dans } O^\epsilon = O/T_\epsilon, \\ B^\epsilon \nabla v^\epsilon \nu = 0 & \text{sur } \partial T_\epsilon, \\ v^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial O, \end{cases}$$

où $(\Pi^\epsilon, \Theta^\epsilon)$ est l'analogue de (P^ϵ, Q^ϵ) pour O^ϵ .

D'après la H^0 -convergence de (A^ϵ, S_ϵ) et (B^ϵ, T_ϵ) , on a

$$\begin{cases} P^\epsilon u^\epsilon \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ où } -\operatorname{div}(A^0 \nabla u^0) = f = -\operatorname{div}(A^0 \nabla \phi), \\ \Pi^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup v^0 & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ où } -\operatorname{div}(B^0 \nabla v^0) = f = -\operatorname{div}(B^0 \nabla \phi). \end{cases}$$

On obtient ainsi, d'après les convergences faibles ci-dessus

$$u^0 = v^0 \phi \text{ dans } \omega. \quad (3.22)$$

Par ailleurs, pour ψ positif et arbitraire dans $D(\omega)$, posons

$$z^\epsilon = \begin{cases} \psi v^\epsilon & \text{dans } \omega_\epsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega^\epsilon \cup O^\epsilon / \omega_\epsilon. \end{cases}$$

On a $\|z^\epsilon\|_{H^1(\Omega^\epsilon \cup O_\epsilon)}$ est uniformément borné en ϵ , donc de même pour $\|P^\epsilon(z_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon)\|_{H_0^1(\Omega)}$ et $\|\Pi^\epsilon(z_{|O^\epsilon}^\epsilon)\|_{H_0^1(O)}$. Puisque $\Pi^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup v^0$, d'après le lemme 3.9, on obtient

$$\Pi^\epsilon(z_{|O_\epsilon}^\epsilon) \rightharpoonup \psi v^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(O).$$

Par suite, on peut supposer la convergence faible de $P^\epsilon(z_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon)$ vers un certain z^0 dans $H_0^1(O)$.

D'après l'égalité $(P^\epsilon(z_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon) - \Pi^\epsilon(z_{|O^\epsilon}^\epsilon)) \chi^\epsilon = 0$ dans ω , on obtient, par passage à la limite

$$z^0 = \psi v^0 = \psi \phi \text{ dans } \omega.$$

Pareillement, pour

$$\xi^\epsilon = \begin{cases} \psi u^\epsilon & \text{dans } \omega_\epsilon, \\ 0 & \text{dans } \Omega^\epsilon \cup O_\epsilon / \omega_\epsilon, \end{cases}$$

on a

$$P^\epsilon(\xi_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon) \rightharpoonup \psi u^0 \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Supposons que $\Pi^\epsilon(\xi_{|\Omega^\epsilon}^\epsilon)$ faiblement dans $H_0^1(O)$, ceci implique

$$\xi^0 = \psi u^0 = \psi \phi \text{ dans } \omega.$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} \nabla P^\epsilon ((\xi^\epsilon - z^\epsilon)|_{\Omega^\epsilon}) \rightharpoonup \nabla(\psi u^0 - z^0) & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \nabla \Pi^\epsilon ((\xi^\epsilon - z^\epsilon)|_{O^\epsilon}) \rightharpoonup \nabla(\xi^0 - \psi v^0) & \text{faiblement dans } L^2(O). \end{cases}$$

Notons que ces limites faibles sont nulles sur ω .

Par ailleurs, on a

$$A^\epsilon = B^\epsilon \text{ sur } \omega_\epsilon,$$

ce qui laisse à écrire

$$\begin{aligned} & \beta^{-1} \int_{\omega_\epsilon} |A^\epsilon \nabla (\psi(u^\epsilon - v^\epsilon))|^2 dx \leq \int_{\omega_\epsilon} A^\epsilon \nabla (\psi(u^\epsilon - v^\epsilon)) dx \\ & = \int_{\Omega^\epsilon} \psi A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla (\xi^\epsilon - z^\epsilon) dx - \int_{O_\epsilon} \psi B^\epsilon \nabla v^\epsilon \nabla (\xi^\epsilon - z^\epsilon) dx \quad (3.23) \\ & + \int_{\omega} (P^\epsilon u^\epsilon - \Pi^\epsilon v^\epsilon) Q^\epsilon (A^\epsilon \nabla \psi) \nabla (P^\epsilon \xi^\epsilon - \Pi^\epsilon z^\epsilon) dx \end{aligned}$$

On demande que chaque terme de côté droite de (3.23) tend vers zéro quand $\epsilon \rightarrow 0$. En effet, on peut appliquer le lemme 3.10 à chacun des deux premiers termes (avec $\eta^\epsilon = \nabla P^\epsilon ((\xi^\epsilon - z^\epsilon)|_{\Omega^\epsilon})$ et $\nabla \Pi^\epsilon ((\xi^\epsilon - z^\epsilon)|_{O_\epsilon})$ respectivement), et chaque limite est égale à zéro parce que ψ s'annule en dehors de ω . Quant au troisième terme, son premier facteur $(P^\epsilon u^\epsilon - \Pi^\epsilon v^\epsilon)$ converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$, tandis que le deuxième facteur est borné dans $L^\infty(\omega)$ et le troisième est borné dans $L^2(\omega)$. Par conséquent, le membre à gauche de (3.23) tend vers 0, ce qui implique que

$$Q^\epsilon (A^\epsilon \nabla u^\epsilon) - \Theta^\epsilon (B^\epsilon \nabla v^\epsilon) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2_{loc}(\omega),$$

puisque

$$A^\epsilon \nabla (\psi(u^\epsilon - v^\epsilon)) = \psi (Q^\epsilon (A^\epsilon \nabla u^\epsilon) - \Theta^\epsilon (B^\epsilon \nabla v^\epsilon)) + (P^\epsilon u^\epsilon - \Pi^\epsilon v^\epsilon) Q^\epsilon (A^\epsilon \nabla \psi),$$

et ψ est arbitraire dans $D(\omega)$.

Donc d'après (3.22) et la définition de A^0 et B^0 , on obtient

$$A^0 \nabla \phi = B^0 \nabla \phi, \quad \forall \phi \in D(\omega).$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

3.2.2 Compacité séquentielle de $M(\alpha, \beta; \Omega)$ pour la H^0 -convergence

Théorème 3.14 (Compacité [14]). *Soient $A^\epsilon \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ et $\{S_\epsilon\}$ une suite de trous admissible dans Ω . Alors, il existe une sous suite ϵ' de ϵ et un élément A^0 de $M(\alpha C^{-2}, \frac{\beta^2}{\alpha}; \Omega)$ tels que $(A^{\epsilon'}, S_{\epsilon'})$ H^0 -converge vers A^0 .*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celui de compacité pour la H-convergence. □

Proposition 3.15 ([14]). *La paire (A^ϵ, S_ϵ) H^0 -converge vers A^0 si et seulement si $({}^t A^\epsilon, S_\epsilon)$ H^0 -converge vers ${}^t A^0$.*

Démonstration. Soit $\{(A^\epsilon, S_\epsilon)\}$ une suite H^0 -convergente vers A^0 . D'après le théorème 3.14, la paire $({}^t A^\epsilon, S_\epsilon)$ H^0 -converge vers une certaine matrice B^0 à une sous suite extraite. Montrons que $B^0 = {}^t A^0$. Soit u^ϵ (respectivement v^ϵ) des solutions du problème (3.14) correspondant au champ de matrice A^ϵ (respectivement ${}^t A^\epsilon$) et le membre à droite $f = -div(A^0 \nabla u^0)$ (respectivement $g = -div(B^0 \nabla v^0)$), où $u^0, v^0 \in H_0^1(\Omega)$. On a

$$\int_{\Omega^\epsilon} \varphi A^\epsilon \nabla u^\epsilon \nabla v^\epsilon dx = \int_{\Omega^\epsilon} \varphi {}^t A^\epsilon \nabla v^\epsilon \nabla u^\epsilon dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Alors, d'après le lemme 3.10, par passage à la limite, on obtient

$$\int_{\Omega^\epsilon} \varphi A^0 \nabla u^0 \nabla v^0 dx = \int_{\Omega^\epsilon} \varphi B^0 \nabla v^0 \nabla u^0 dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega^\epsilon} \varphi {}^t A^0 \nabla v^0 \nabla u^0 dx = \int_{\Omega^\epsilon} \varphi B^0 \nabla v^0 \nabla u^0 dx, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Par conséquent, $B^0 = {}^t A^0$. Ainsi, la H^0 -convergence est vérifiée pour toute la suite. □

3.2.3 Notion de correcteur

Nous terminons cette section par la définition de correcteur dans le cadre de la H^0 -convergence, introduite originalement par L. Tartar (pour les problèmes elliptiques) dans le papier **Cours Peccot, collège de France, Mars 1977**. En parallèle, nous présentons deux résultats importants pour cette notion et qui sont donnés par la proposition 3.16 et le théorème 3.17. Ces deux résultats seront utilisés dans la section 3.3 pour démontrer un résultat de la H^0 -convergence dans le cas des domaines perforés non périodiques. Notons que la proposition 3.16 et la définition 3.4 admettent une version dans le cas de la H-convergence.

Définition 3.4 ([13]). Soient $\{A^\epsilon\}$ est une suite dans $M(\alpha, \beta; \Omega)$ et S^ϵ est admissible dans Ω . Supposons que (A^ϵ, S^ϵ) H^0 -converge vers A^0 . Un champ de matrices M^ϵ sur Ω est un correcteur pour (A^ϵ, S^ϵ) si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\nabla u^\epsilon - M^\epsilon \nabla u^0\|_{L^1(\Omega^\epsilon)} = 0. \quad (3.24)$$

- M^ϵ défini sur Ω est un correcteur local pour (A^ϵ, S^ϵ) si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, (3.24) est vérifié sur $\Omega^\epsilon \cap \omega$ pour tout sous ensemble relativement compact ω de Ω .

Proposition 3.16 ([14]). Soient (A^ϵ, S^ϵ) une paire H^0 -converge vers A^0 dans Ω et $\{M^\epsilon\}$ est une suite de champs de matrices de $L^2(\Omega)$ satisfait pour tout vecteur λ dans \mathbb{R}^N les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (i) & M^\epsilon \lambda \text{ faiblement dans } L^2(\Omega), \\ (ii) & \text{rot} M^\epsilon \lambda \text{ est compact dans } H^{-1}(\Omega), \\ (iii) & \text{div}(\chi^\epsilon A^\epsilon M^\epsilon \lambda) \text{ est compact dans } H^{-1}(\Omega). \end{cases} \quad (3.25)$$

Alors, M^ϵ est un correcteur pour (A^ϵ, S^ϵ) et $\chi^\epsilon A^\epsilon M^\epsilon \rightharpoonup A^0$ dans $L^2(\Omega)$.

Si ∇u^0 est dans $L^\infty(\Omega)$ ou si $M^\epsilon \chi^\epsilon$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$, la convergence (3.24) est vérifiée dans $L^2(\Omega)$.

Si (3.25) est vérifié seulement pour tout sous ensemble relativement compact ω de Ω , M^ϵ est un correcteur local.

Théorème 3.17 ([14]). Supposons que (A^ϵ, S^ϵ) et (B^ϵ, T^ϵ) H^0 -convergentes vers A^0 et B^0 respectivement dans Ω , et soit ω un sous ensemble ouvert

relativement compact de Ω . Supposons que parmi tous les correcteurs locaux associés aux quatre paires (A^ϵ, S^ϵ) , $({}^tA^\epsilon, S^\epsilon)$, (B^ϵ, T^ϵ) et $({}^tB^\epsilon, T^\epsilon)$, il existe un N^ϵ qui satisfait la version locale de (3.25) et tel que

$$\exists p > 2, N^\epsilon \text{ est borné dans } L^p(\omega; \mathbb{R}^{N^2}) \text{ par un certain } d.$$

Alors, il existe un nombre non négatif τ tel que

$$\exists c > 0, \|A^0 - B^0\|_{L^1(\omega)} \leq c \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left[|(S_\epsilon \Delta T_\epsilon) \cap \omega| + \|A^\epsilon - B^\epsilon\|_{L^1(\omega)} \right]^\tau$$

où Δ signifie la différence symétrique, c dépend de a, b, C, d et ω , alors que τ dépend seulement de p .

3.3 Application de la H-convergence aux matériaux perforés non périodiques

3.3.1 Cas du domaine perforé non périodique à une échelle

On considère un matériau perforé par des trous sphériques. Les trous sont des compacts dans Ω et sont portés sur un treillis non-périodique défini par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, un difféomorphisme de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\theta^{-1} \text{ a une constante lipshitzienne } \kappa^{-1} \text{ avec } \kappa > 2. \quad (3.26)$$

Soit le treillis de boules défini par

$$S_\epsilon^k = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - \theta(k\epsilon)| \leq \epsilon\}, k \in \mathbb{Z}^N.$$

Par la condition (3.26), les boules S_ϵ^k sont séparées car

$$\forall p \neq q \in \mathbb{Z}^N, |\theta(p\epsilon) - \theta(q\epsilon)| \geq \kappa\epsilon > 2\epsilon = \text{diam} S_\epsilon^k,$$

en effet, on a d'après (3.26)

$$\left| \frac{\theta^{-1}(\theta(p\epsilon)) - \theta^{-1}(\theta(q\epsilon))}{\theta(p\epsilon) - \theta(q\epsilon)} \right| \leq \kappa^{-1},$$

ceci implique, du fait que $|p - q| > 1$

$$|\theta(p\epsilon) - \theta(q\epsilon)| \geq \kappa\epsilon|p - q| > 2\epsilon.$$

Pour la donnée d'un domaine borné Ω dans \mathbb{R}^N , on définit l'ensemble S_ϵ par

$$S_\epsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \{S_\epsilon^k; S_\epsilon^k \subset \Omega, \text{dist}(\theta(k\epsilon), \partial\Omega) > 2\epsilon\}. \quad (3.27)$$

La matrice de matériau en dehors des trous est définie par

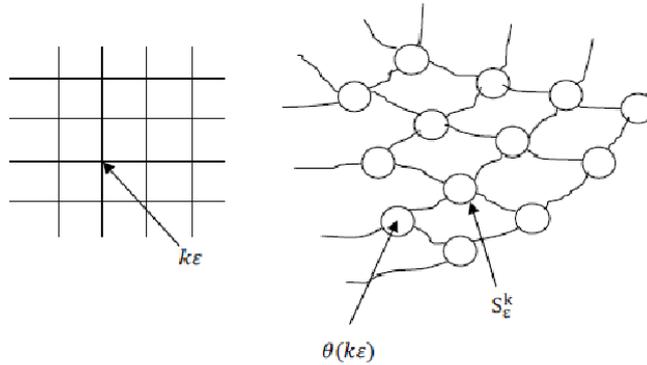


FIG. 3.2 –

$$A^\epsilon(x) = A\left(\frac{\theta^{-1}(x)}{\epsilon}\right) \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ avec } A(y) \in M(\alpha, \beta; Y), Y = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N. \quad (3.28)$$

Le but de cette section est d'énoncer un résultat de H^0 -convergence dans cette situation.

3.3.2 Résultat de la H^0 -convergence

Pour énoncer le résultat principal de cette section, on définit une famille de problèmes d'homogénéisation périodique avec des trous paramétrés par un point $z = \theta(k\epsilon)$ dans \mathbb{R}^N . Pour cela, soit $x \in \mathbb{R}^N$ un voisinage de z , on aura d'après le développement de Taylor

$$x = \theta(k\epsilon) + |\nabla\theta(\theta^{-1}(z))| k\epsilon + |\theta^{-1}(x) - k\epsilon| \epsilon(\theta^{-1}(x) - k\epsilon) \quad (3.29)$$

Un simple calcul nous donne

$$|x - \nabla\theta(\theta^{-1}(z)) k\epsilon| \leq |z + |\theta^{-1}(x) - k\epsilon| \epsilon(\theta^{-1}(x) - k\epsilon) = r. \quad (3.30)$$

Posons alors

$$T_\epsilon(z) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^N} T_\epsilon^j(z) \text{ où } T_\epsilon^j = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - \nabla\theta(\theta^{-1}(z)) \epsilon j| \leq r\}. \quad (3.31)$$

Le système composé des trous $T_\epsilon^j(z)$ qui sont centrés aux points $\nabla\theta(\theta^{-1}(z)) \epsilon j$ est périodique de période $Y(z)$ définie par

$$\begin{cases} Y(z) = \left\{ \nabla\theta(\theta^{-1}(z)) x; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N \right\}, \\ Y^*(z) = Y(z)/T_1^0(z), \end{cases} \quad (3.32)$$

puisque pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^N$, on a $x \cdot \nabla\theta(\theta^{-1}(z)) \in \left[\frac{-\nabla\theta(\theta^{-1}(z))}{2}, \frac{\nabla\theta(\theta^{-1}(z))}{2}\right]$ et cette cellule de base dépend de z , cela justifie la notation $Y(z)$.

Par suite, la matrice $Y(z)$ -périodique est définie par

$$B(z, y) = A\left(\left(\nabla\theta(\theta^{-1}(z))\right)^{-1} y\right), y = \frac{x - z}{\epsilon}, \quad (3.33)$$

qui est $Y(z)$ -périodique puisque A est Y -périodique.

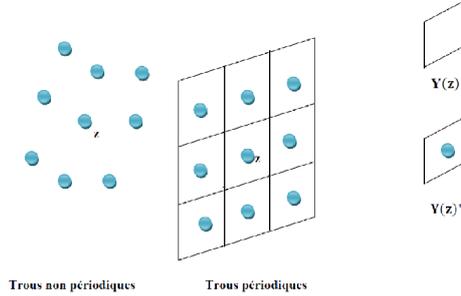


FIG. 3.3 –

Pour chaque domaine borné ω dans \mathbb{R}^N , le problème périodique paramétré sur ω est défini par la paire

$$\begin{cases} a) B_z^\epsilon(x) = B\left(z, \frac{x-z}{\epsilon}\right), \\ b) T_\epsilon^\omega(z) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^N} \{T_\epsilon^j(z); T_\epsilon^j(z) \subset \omega, \text{dist}((\nabla\theta(\theta^{-1}(z)) j, \partial\omega)) > \epsilon\}. \end{cases} \quad (3.34)$$

D'après les résultats d'homogénéisation pour les perforations périodiques de D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin (voir le chapitre 2), la paire $(B_z^\epsilon, T_\epsilon^\omega(z))$ H^0 -converge vers la matrice B_z^0 dans ω définie comme suit :

$$B_z^0 \lambda = \frac{1}{|Y(z)|} \int_{Y^*(z)} B(z, y) (\nabla_y w_\lambda(z, y) + \lambda) dy, \quad (3.35)$$

où $w_\lambda(z, y)$ est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [B(z, y) (\nabla_y w_\lambda(z, y) + \lambda)] = 0 & \text{dans } Y^*(z), \\ B(z, y) (\nabla_y w_\lambda(z, y) + \lambda) \nu = 0 & \text{sur } \partial(T^j \cap Y(z)), \\ w_\lambda & Y(z)\text{-périodique de moyenne } 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Définissons le recouvrement de Ω suivant :

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{n(\epsilon)} C_\epsilon^n \text{ où } \begin{cases} C_\epsilon^n \text{ est un cube de taille } \epsilon^\gamma \text{ avec } \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ C_\epsilon^n \subset \Omega \text{ et } C_\epsilon^n \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.37)$$

Dans chaque cube C_ϵ^n il existe au moins un point de la forme $\theta(k\epsilon)$.

On a les lemmes suivants :

Lemme 3.18 ([13]). *Soit $w_\lambda(z, y)$ la solution de (3.55). Il existe $p > 2$ et un prolongement $Pw_\lambda(z, y)$ de $w_\lambda(z, y)$ tel que $\lambda Pw_\lambda(z, y) - \lambda y$ est $Y(z)$ -périodique et pour tout compact K de \mathbb{R}^N*

$$\exists c > 0, \forall z \in K, \|Pw_\lambda(z, y)\|_{W^{1,p}(Y(z))} \leq c. \quad (3.38)$$

D'après [13], la fonction $\nabla_y Pw_\lambda(z, \frac{x-z}{\epsilon})$ est un correcteur associé à la paire périodique $(B_\epsilon^z, T_\epsilon(z))$. pour obtenir un correcteur associé à la paire localement périodique (B^ϵ, T_ϵ) par la fonction précédente, on régularise la fonction $Pw_\lambda(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon})$, $x \in C_\epsilon^n$ sur le bord de chaque cube C_ϵ^n .

Construisons une suite de fonctions uniformément bornées φ_n^ϵ telle que

$$\begin{cases} \varphi_n^\epsilon \in D(C_\epsilon^n), \\ \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} |\varphi_n^\epsilon - \chi_{C_\epsilon^n}| \longrightarrow 0 & \text{fortement dans } L^1(\Omega), \\ \forall k \in \mathbb{N}, \|\nabla^k \varphi_n^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq c_k \epsilon^{-k\sigma} & \text{où } \gamma < \sigma < 1. \end{cases} \quad (3.39)$$

Soit w_λ^ϵ une fonction régulière définie par

$$w_\lambda^\epsilon(x) = \lambda x + \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \varphi_n^\epsilon \left[\epsilon Pw_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) - \lambda(x - x_\epsilon^n) \right]. \quad (3.40)$$

Lemme 3.19 ([14]). *La fonction matricielle N^ϵ définie par*

$$N^\epsilon \lambda = \nabla w_\lambda^\epsilon, \forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (3.41)$$

est un correcteur associé à la paire (B^ϵ, T_ϵ) .

Pour démontrer ce lemme, on a besoin de résultat suivant :

Lemme 3.20 ([14]). *Soit $f(z, y)$ est une fonction dans $L^p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ qui est $Y(z)$ -périodique et satisfait*

$$\exists c > 0, \forall z \in \bar{\Omega}, \|f(z, y)\|_{L^p(Y(z))} \leq c. \quad (3.42)$$

Alors,

- i) La fonction $f^\epsilon(x) = f\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right)$, $x \in C_\epsilon^n$ est bornée dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$.
- ii) Si la moyenne de $f(z, y)$ dans $Y(z)$, notée $\bar{f}(z)$, est continue sur $\bar{\Omega}$, les convergences suivantes restent vraies
 - a) $f^\epsilon \rightharpoonup \bar{f}$ faiblement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)$.
 - b) $\sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \nabla \varphi_n^\epsilon f^\epsilon \rightarrow \text{div} \bar{f}$ fortement dans $H^{-1}(\Omega)$, où les fonctions φ_n^ϵ sont définies par (3.39).

Démonstration du lemme 3.19. Nous démontrons que la matrice N^ϵ définie par (3.41) satisfait les conditions (3.25) de la proposition 3.16. La condition (3.25)ii) est clairement satisfaite, puisque $\text{rot} N^\epsilon \lambda = \nabla \wedge N^\epsilon \lambda = 0$.

La condition i) : D'après l'estimation (3.38) de lemme (3.31), la fonction $Pw_\lambda(z, y) - \lambda y$ et sa dérivée satisfont l'estimation (3.42) de lemme 3.20. Alors, d'après le résultat i) de lemme 3.20, on obtient

$$\sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \varphi_n^\epsilon(x) \left[\epsilon Pw_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) - \lambda(x-x_\epsilon^n) \right] \rightarrow 0, \text{ fortement dans } L^p(\Omega).$$

En effet,

$$\begin{aligned} & \int_{C_\epsilon^n} \left| \varphi_n^\epsilon(x) \left[\epsilon Pw_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) - \lambda(x-x_\epsilon^n) \right] \right|^p dx \\ &= \epsilon^p \int_{C_\epsilon^n} \left| \varphi_n^\epsilon(x) \left[\epsilon Pw_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) - \lambda(x-x_\epsilon^n) \right] \right|^p dx \\ &= \epsilon^p \int_{Y(x_\epsilon^n)} \epsilon^N |\varphi_n^\epsilon [Pw_\lambda(x_\epsilon^n, y) - \lambda y]|^p dy \\ &= \epsilon^{p+N} \int_{Y(x_\epsilon^n)} |\varphi_n^\epsilon [Pw_\lambda(x_\epsilon^n, y) - \lambda y]|^p dy \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_n^\epsilon \in D(C_\epsilon^n)$ et $Pw_\lambda(x_\epsilon^n, y) - \lambda y$ est borné dans $L^p(\Omega)$, on a le résultat cherché i.e. $w_\lambda^\epsilon \rightarrow \lambda x$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Cette convergence implique

$$w_\lambda^\epsilon \longrightarrow \lambda x \text{ faiblement dans } L^p(\Omega).$$

D'où, la matrice N^ϵ satisfait la condition i) de la proposition 3.16.

La condition iii) : Soient $\psi_\sharp(z, y)$ et ψ_\sharp^ϵ deux fonctions définies par

$$\begin{cases} \psi_\sharp(z, y) = \chi_{\mathbb{R}^N/T_1(z)}(y), \\ \psi_\sharp^\epsilon = \psi_\sharp\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right), x \in C_\epsilon^n, \end{cases} \quad (3.43)$$

où $T_1(z)$ est un treillis $Y(z)$ -périodique défini par (3.31).

Soit $\sigma_\lambda(z, y)$ et σ_λ^ϵ sont des fonctions définies par

$$\begin{cases} \sigma_\lambda(z, y) = \psi_\sharp(z, y)B(z, y)\nabla Pw_\lambda(z, y), \\ \sigma_\lambda^\epsilon(x) = \sigma_\lambda\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right), x \in C_\epsilon^n, \end{cases} \quad (3.44)$$

où $B(z, y)$ est une matrice définie par (3.33) et $Pw_\lambda(z, y)$ est un opérateur de prolongement donné par le lemme 3.18.

Soit ψ^ϵ est une fonction caractéristique de Ω/T_ϵ . alors, on a

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda^\epsilon(x) - \psi^\epsilon(x)B^\epsilon(x)N^\epsilon\lambda &= \\ &= \sigma_\lambda^\epsilon(x) - \psi_\sharp^\epsilon(x)B^\epsilon(x)\nabla w_\lambda^\epsilon + (\psi_\sharp^\epsilon(x) - \psi^\epsilon(x))B^\epsilon(x)\nabla w_\lambda^\epsilon(x) \\ &= \sigma_\lambda^\epsilon(x) - \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \chi_{C_\epsilon^n(x)}\psi_\sharp^\epsilon(x)B^\epsilon(x)\nabla_y Pw_\lambda\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$- \psi_\sharp^\epsilon(x)B^\epsilon(x) \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} (\varphi_n^\epsilon(x) - \chi_{C_\epsilon^n(x)}) \nabla_y Pw_\lambda\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right) \quad (3.46)$$

$$- \psi_\sharp^\epsilon(x)B^\epsilon(x) \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} (-\varphi_n^\epsilon(x) + \chi_{C_\epsilon^n(x)}) \lambda \quad (3.47)$$

$$- \psi_\sharp^\epsilon(x)B^\epsilon(x) \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \nabla\varphi_n^\epsilon(x) \left[\epsilon Pw_\lambda\left(x_\epsilon^n, \frac{x-x_\epsilon^n}{\epsilon}\right) - \lambda(x-x_\epsilon^n) \right] \quad (3.48)$$

$$+ (\psi_\sharp^\epsilon(x) - \psi^\epsilon(x))B^\epsilon(x)\nabla w_\lambda^\epsilon(x). \quad (3.49)$$

Le terme (3.45) de l'égalité précédente vaut 0 d'après la définition (3.44) de $\sigma_\lambda(z, y)$. Le terme (3.46) est fortement convergent vers 0 dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ d'après la définition (3.40) de la fonction φ_n^ϵ , l'estimation (3.38) de lemme (3.31) et le lemme 3.20 i).

Le terme (3.47) est fortement convergent vers 0 dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ d'après (3.34). Le terme (3.48) fortement convergent vers 0 dans d'après (3.34) et lemme 3.20 i).

Le terme (3.49) est fortement convergent vers 0 dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ d'après les définitions (3.56), (3.43) et la convergence faible de w_λ^ϵ vers λx dans $W^{1,p}(\Omega)$. On obtient ainsi la convergence suivante :

$$\sigma_\lambda^\epsilon - \psi^\epsilon(x)B^\epsilon(x)N^\epsilon\lambda \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N). \quad (3.50)$$

D'après la définition (3.39), (3.44) et le lemme 3.20 i), on a

$$\sigma_\lambda^\epsilon(x) - \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \varphi_n^\epsilon(x) \sigma_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad (3.51)$$

et d'après la définition (3.55) de la fonction $w_\lambda(z, y)$, on a aussi

$$\operatorname{div}_y \sigma_\lambda(z, y) = 0 \text{ et } \operatorname{div}_y \left[\sigma_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) \right] = 0 \text{ dans } D'(\Omega).$$

Les égalités précédentes jointes à (3.51) impliquent la convergence

$$\operatorname{div} \sigma_\lambda^\epsilon(x) - \sum_{n=1}^{n(\epsilon)} \nabla \varphi_n^\epsilon(x) \sigma_\lambda \left(x_\epsilon^n, \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon} \right) \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega). \quad (3.52)$$

Ainsi, la moyenne de la fonction $\sigma_\lambda(z, y)$ est continue. D'où, d'après la convergence b) de lemme 3.20 ii), les convergences (3.51) et (3.52), la condition (3.25) iii) est vérifiée. \square

Maintenant, on peut énoncer le résultat de la H^0 -convergence pour les matériaux non périodiques défini par la paire (A^ϵ, S_ϵ) dans (3.27), (3.28) suivant :

Théorème 3.21 ([14]). *La paire (A^ϵ, S_ϵ) H^0 -converge vers la matrice A^0 définie par*

$$A^0(x) = B_x^0, \quad (3.53)$$

où B_x^0 est définie par

$$B_x^0 \lambda = \frac{1}{|Y(x)|} \int_{Y^*(x)} B(x, y) (\nabla_y w_\lambda(x, y) + \lambda) dy, \quad (3.54)$$

où $w_\lambda(x, y)$ est la solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div} [B(x, y) (\nabla_y w_\lambda(x, y) + \lambda)] = 0 & \text{dans } Y^*(x), \\ B(x, y) (\nabla_y w_\lambda(x, y) + \lambda) \nu = 0 & \text{sur } \partial(T^j \cap Y(x)), \\ w_\lambda & Y(x)\text{-périodique de moyenne } 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

De plus, il existe un correcteur associé à la paire (A^ϵ, S_ϵ) , qui est borné dans L^p .

Démonstration. Dans ce qui suit, nous utilisons l'idée de M. Briane introduite dans [13]. Elle consiste dans l'approximation de matériau non périodique par un matériau périodique.

La preuve du théorème se fait en trois étapes :

Etape 1 : Définition du matériau localement périodique

Etape 2 : Construction de correcteur

Etape 3 : Identification de la H-limite

Etape 1 : Définition du matériau localement périodique

Comme dans [13], on définit un treillis localement périodique T^ϵ et une matrice localement périodique B^ϵ dans Ω , qui sont périodiques dans des domaines de tailles plus grandes que ϵ mais plus petit que 1. Afin de faire cela, on considère le recouvrement de Ω défini précédemment

$$\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{n(\epsilon)} C_\epsilon^n \text{ où } \begin{cases} C_\epsilon^n \text{ est un cube de taille } \epsilon^\gamma \text{ avec } \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ C_\epsilon^n \subset \Omega \text{ et } C_\epsilon^n \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans chaque cube C_ϵ^n il existe au moins un point de la forme $\theta(k\epsilon)$. Notons chacun de ces points par x_ϵ^n . Le treillis localement périodique T^ϵ défini par

$$T^\epsilon = \bigcup_{n=1}^{n(\epsilon)} T_\epsilon^{\Omega \cap C_\epsilon^n}(x_\epsilon^n), \quad (3.57)$$

coïncide dans chaque cube C_ϵ^n avec le treillis périodique $T_\epsilon^{\Omega \cap C_\epsilon^n}(x_\epsilon^n)$ défini par (3.31), (3.32), (3.34).

Par ailleurs, la matrice localement périodique B^ϵ coïncide dans chaque cube C_ϵ^n avec la matrice périodique définie par (3.33) et (3.34) pour le paramètre $z = x_\epsilon^n$:

$$B^\epsilon(x) = B\left(x_\epsilon^n, \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon}\right) = A\left(\left(\nabla\theta\left(\theta^{-1}(x_\epsilon^n)\right)\right)^{-1} \frac{x - x_\epsilon^n}{\epsilon}\right), x \in C_\epsilon^n. \quad (3.58)$$

Maintenant, on donne une estimation de la différence entre la paire (A^ϵ, S^ϵ) définie par (3.27), (3.28) et la paire (B^ϵ, T_ϵ) définie par (3.57), (3.58) :

Lemme 3.22 ([13]). *Les estimations suivantes sont vérifiées :*

- i) $|S_\epsilon \Delta T_\epsilon| \leq c\epsilon^{2\gamma-1}$.
- ii) $A^\epsilon - B^\epsilon \rightarrow 0$ fortement dans $L^q(\Omega), \forall 1 \leq q \leq \infty$.

Etape 2 : Construction de correcteur

D'après le lemme 3.19, $N^\epsilon \lambda = \nabla w_\lambda^\epsilon, \lambda \in \mathbb{R}^N$ est un correcteur associé à la paire (B^ϵ, T_ϵ) .

Etape 3 : Identification de la H-limite

D'après la condition de séparation satisfaite par S_ϵ et la définition (3.57) de T_ϵ , on peut construire des opérateurs de prolongement pour la paire (A^ϵ, S_ϵ) et (B^ϵ, T_ϵ) , qui satisfaits la condition (3.13). D'où, on peut appliquer les résultats de la H-convergence.

D'après le lemme 3.19, la matrice N^ϵ définie par (3.41) est un correcteur associé à la paire (B^ϵ, T_ϵ) . Alors, d'après la proposition 3.16, la H^0 -limite B^0 de la paire (B^ϵ, T_ϵ) est égale à la limite faible de $\psi^\epsilon B^\epsilon M^\epsilon$ où ψ^ϵ est la fonction caractéristique de Ω/T_ϵ . D'après les convergences (3.50), (3.51) et a) de lemme 3.20, la fonction $\psi^\epsilon B^\epsilon M^\epsilon \lambda$ faiblement convergente vers la moyenne de $\sigma_\lambda(z, y)$ dans $Y(x)$, qui est égale à $B_x^0 \lambda$ d'après les définitions (3.32), (3.35) et (3.44). La H^0 -limite $B^0(x)$ est égale ainsi à B_x^0 .

Maintenant, par la propriété de compacité de la H^0 -convergence, il suffit de montrer que B^0 est H^0 -limite de (A^ϵ, S_ϵ) . Mais, ceci est conservé par l'application du théorème 3.17 à (A^ϵ, S_ϵ) et (B^ϵ, T_ϵ) dans cette situation, compte

tenu du lemme 3.19, la convergence faible de w_λ^ϵ vers λx dans $W^{1,p}(\Omega)$ et le lemme (3.26). Ainsi, (3.53) de théorème (3.23) est prouvé.

Maintenant, on montre que N^ϵ est un correcteur pour (A^ϵ, S_ϵ) . Compte tenu de lemme 3.19, il suffit de montrer que $\text{div}(\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon)$ est compact dans $H^{-1}(\Omega)$, ou équivalent à $\text{div}(\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon N^\epsilon)$ est compact dans $H^{-1}(\Omega)$. Ceci implique du fait que $\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon N^\epsilon$ est compact dans $L^2(\Omega)$. En fait, $\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon N^\epsilon$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ comme peut se voir par les calculs suivants, en tenant compte de lemme 3.22

$$\begin{aligned} |\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon N^\epsilon| &= |N^\epsilon| |\chi^\epsilon A^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon| \\ &= |N^\epsilon| |\chi^\epsilon (A^\epsilon - B^\epsilon) + (\chi^\epsilon - \psi^\epsilon) B^\epsilon| \\ &\leq [\chi_{S_\epsilon \Delta T_\epsilon} (|B^\epsilon| + |A^\epsilon - B^\epsilon| |N^\epsilon|)]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

D'où, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1/2$, on a, puisque $\|B^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq b$

$$\|\chi^\epsilon A^\epsilon N^\epsilon - \psi^\epsilon B^\epsilon N^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \left(\|A^\epsilon - B^\epsilon\|_{L^q(\Omega)} + b \|\chi_{S_\epsilon \Delta T_\epsilon}\|_{L^q(\Omega)} \right), \quad (3.60)$$

qui tend vers 0 avec ϵ d'après le lemme 3.22. □

3.4 Application de la H-convergence aux domaines à double perforation

3.4.1 Homogénéisation réitérée

Le cas que nous allons présenter est traité dans [19] par A. DAMLAMIEN et P. DONATO.

Considérons la suite $\{(A^\epsilon, T^\epsilon)\}$ qui est construite par ϵY -périodicité à partir de la suite $\{(B^\epsilon, \Lambda^\epsilon)\}$ dans la cellule de référence Y . Le sous ensemble Λ^ϵ constitué de deux ensembles disjoints (voir la figure ci-dessous). Le premier Π_1 est indépendant de ϵ tandis que S_ϵ^1 est tel que $(B^\epsilon, S_\epsilon^1)$ H^0 -converge vers un certain B^0 dans la cellule de base Y/Λ^* . En ajoutant à ces conditions l'hypothèse suivante : Soit Π_1 un sous ensemble compact de Y à frontière régulière. S_ϵ^1 est une suite de sous ensembles compacts de Y/Π_1 à frontière régulière qui est $H^1(Y/\Pi_1)$ -admissible. On pose

$$T^\epsilon = S_\epsilon \cup \Pi_1^*, \quad (3.61)$$

où

$$S_\epsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \{ \epsilon S_\epsilon^k, S_\epsilon^k \subset \Omega, S_\epsilon^k \cap \partial\Omega = \emptyset, \forall k \in \mathbb{Z}^N \}, \quad (3.62)$$

et

$$\Pi^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^N} \{ \epsilon \Pi_i, \Pi_i \subset \Omega, \Pi_i \cap \partial\Omega = \emptyset, \forall i \in \mathbb{Z}^N \}. \quad (3.63)$$

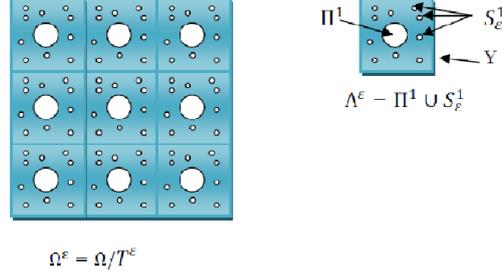


FIG. 3.4 –

Dans cette situation, on a le résultat suivant :

Théorème 3.23 ([19]). *Supposons que $|\partial\Omega| = 0$. Soient Π_1 un sous ensemble compact de Y à frontière régulière, $\{S_\epsilon^1\}$ est une suite de sous ensembles compacts de Y/Π_1 à frontière régulière qui est $H^1(Y/\Pi_1)$ -admissible et B^ϵ une suite dans $M(\alpha, \beta, \Omega)$ telle que (B^ϵ, S_ϵ) H^0 -converge dans Y/Π_1 vers $B^0 \in M(\frac{\alpha}{C^2}, \beta, \alpha^{-2}, \Omega)$. Supposons que B^ϵ est prolongé par périodicité et posons*

$$\forall x \in \Omega, A^\epsilon(x) = B^\epsilon\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \quad (3.64)$$

alors, la suite $\{(A^\epsilon, S_\epsilon)\}$ H^0 -converge dans Ω vers A^0 défini par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, A^0 \lambda = M_Y(B^0(\nabla \tilde{w}_\lambda + \lambda)), \quad (3.65)$$

où w_λ est l'unique solution de

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_\lambda \text{ dans } H_{per}^1(Y/\Pi_1)/\mathbb{R} \text{ tel que} \\ -\text{div}[B^0(\nabla w_\lambda + \lambda)] = 0 \text{ dans } Y/\Pi_1, \\ M_{Y/\Pi_1}(w_\lambda) = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

Remarque 3.4. Notons que la condition de régularité de bord de Ω i.e. $|\partial\Omega| = 0$, dans le théorème ci-dessus n'a pas été donnée d'une manière explicite dans [19]. Ultérieurement, cette hypothèse a été ajoutée par H. Haddadou dans son papier (voir [29]) pour le cas d'élasticité linéarisée.

3.4.2 Application de la H-convergence pour l'homogénéisation dans des domaines perforés à deux échelles dont la plus petite est non périodique

On considère un matériau perforé par deux types de trous sphériques de tailles différentes. Les grands trous sont répartis périodiquement, avec une périodicité de l'ordre d'un petit paramètre ϵ tandis que les petits trous sont centrés sur un treillis non périodique défini via une fonction auxiliaire $\theta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, un difféomorphisme de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\theta^{-1} \text{ a une constante lipchitzienne } \gamma^{-1} \text{ avec } \delta > 2. \quad (3.67)$$

Le treillis des petits trous non périodiques est défini par

$$S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - \theta(k\epsilon\delta_\epsilon)| \leq \epsilon\delta_\epsilon\}, k \in \mathbb{Z}^N. \quad (3.68)$$

D'après (3.68) les petits trous sont séparés car

$$\forall p \neq q \in \mathbb{Z}^N, |\theta(p\epsilon\delta_\epsilon) - \theta(q\epsilon\delta_\epsilon)| \geq \gamma\epsilon\delta_\epsilon > 2\epsilon\delta_\epsilon. \quad (3.69)$$

Notons par Π_i les grands trous. On suppose alors que les $\Pi_i, \forall i \in \mathbb{Z}^N$ et les $S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k, \forall k \in \mathbb{Z}^N$ sont disjoints, compacts dans le domaine borné Ω et ont tous une frontière régulière (voir la figure ci-dessous). Par suite, on définit

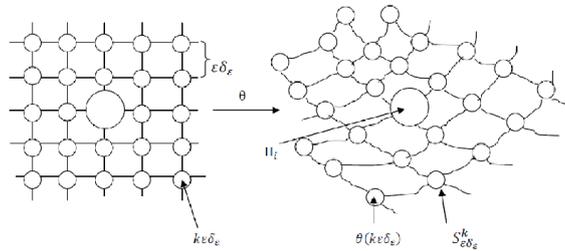


FIG. 3.5 –

l'ensemble $\mathcal{S}_{\epsilon\delta_\epsilon}$ comme l'union de tous les trous (petits et grands trous) qui inclus dans Ω et ne parcourent pas son bord, par

$$\mathcal{S}_{\epsilon\delta_\epsilon} = S_{\epsilon\delta_\epsilon} \cup \Pi^*, \quad (3.70)$$

tel que

$$S_{\epsilon\delta_\epsilon} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^N} \{S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k, S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k \subset \Omega, S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k \cap \partial\Omega = \emptyset, \forall k \in \mathbb{Z}^N\}, \quad (3.71)$$

et

$$\Pi^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^N} \{\Pi_i, \Pi_i \subset \Omega, \Pi_i \cap \partial\Omega = \emptyset, \forall i \in \mathbb{Z}^N\}. \quad (3.72)$$

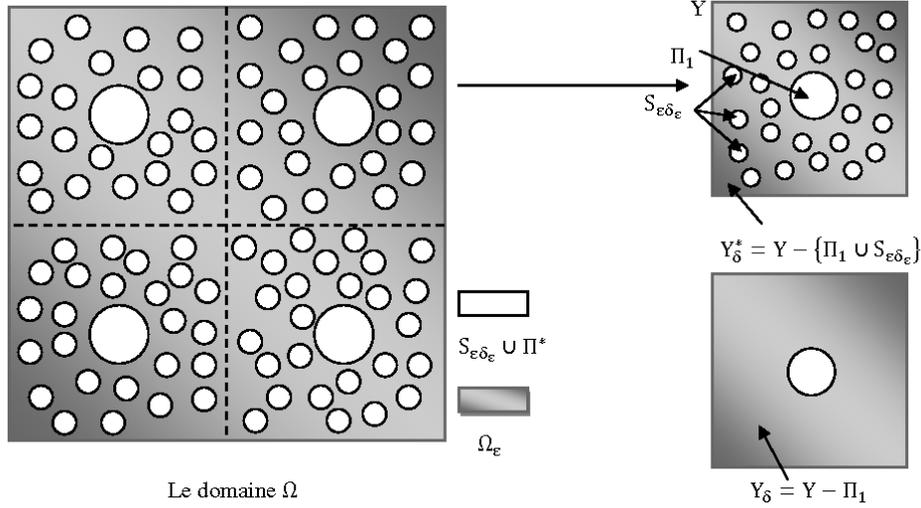


FIG. 3.6 –

La matrice du matériau périodique (voir la figure ci-dessus qui illustre le matériau avant qu'on a appliqué la déformation des centres des petits trous en utilisant le difféomorphisme θ) en dehors des trous est définie par

$$A^\epsilon(x) = A\left(\frac{\theta^{-1}(x)}{\epsilon}, \frac{\theta^{-1}(x)}{\epsilon}\right) x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.73)$$

avec $A(y, z) \in M(\alpha, \beta, Y_{p,\delta} \times Z)$, où $y \left(= \frac{\theta^{-1}(x)}{\epsilon}\right) \in Y_{p,\delta}$ (L'indice p de $Y_{p,\delta}$ signifie *périodique*) et $z \left(= \frac{\theta^{-1}(x)}{\epsilon\delta_\epsilon}\right) \in Z$. Les cellules de base Z et $Y_{p,\delta}$ sont définies comme dans la figure 3.5, telles que chaque cellule Y est recouverte par un nombre fini de cellules Z .

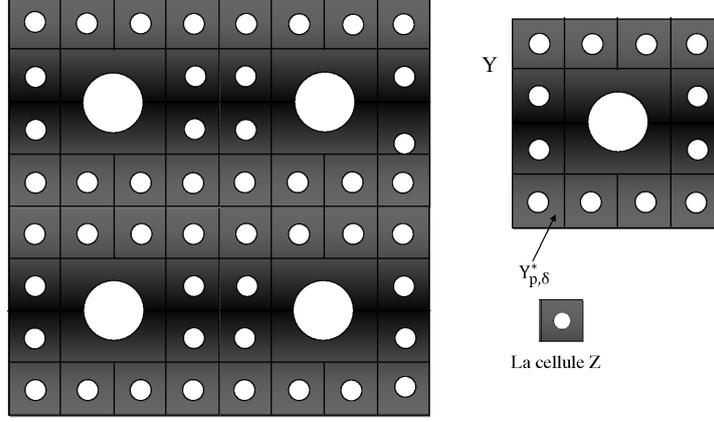


FIG. 3.7 –

Le but de cette section est d'énoncer le résultat de la H^0 -convergence dans cette situation.

Pour énoncer le résultat d'homogénéisation dans ce cas, nous définissons un matériau localement périodique paramétré par un point $t = \theta(k\epsilon\delta_\epsilon)$ dans \mathbb{R}^N .

Les petits trous périodiques sont donnés par le treillis de boules de rayon d'ordre $\epsilon\delta_\epsilon$ suivant :

$$T_{\epsilon\delta_\epsilon}(t) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^N} T^j(t) \text{ où } T_{\epsilon\delta_\epsilon}^j(t) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x - \nabla\theta(\theta^{-1}(t))j| \leq \epsilon\delta_\epsilon\}. \quad (3.74)$$

Dans ce cas tous les trous (les grands et les petits) sont périodiques de période $Y_{p,\delta} \times Z(t)$, et $Z(t)$ défini par

$$Z(t) = \{\nabla\theta(\theta^{-1}(t))x, x \in \Omega\}. \quad (3.75)$$

On note par

$$Y_{p,\delta}^* = Y_{p,\delta}/\Pi_1 \cup \left\{ \bigcup_{j \text{ fini}} T_{\epsilon\delta_\epsilon}^j \right\}, Z^*(t) = Z(t)/T_1^1, \quad (3.76)$$

où Π_1 est un grand trou dans $Y_{p,\delta}$ et T_1^1 est l'un des petits trous périodiques dans la cellule $Z(t)$.

La matrice de treillis $Y_{p,\delta} \times Z(t)$ -périodique est définie par

$$B(t, y, z) = A\left(y, [\nabla\theta(\theta^{-1}(t))]^{-1}z\right), \quad (3.77)$$

qui est $Y_{p,\delta} \times Z(t)$ -périodique puisque la matrice A est périodique. Pour chaque domaine borné ω dans \mathbb{R}^N , le problème périodique paramétré sur ω est défini par la paire $(B_t^\epsilon, T_{\epsilon\delta_\epsilon}^\omega(t))$ comme suit

$$B_t^\epsilon(x) = B\left(t, \frac{x}{\epsilon}, \frac{x-t}{\epsilon\delta_\epsilon}\right), \quad (3.78)$$

et

$$T_{\epsilon\delta_\epsilon}^\omega = S_{per}^{\epsilon\delta_\epsilon}(t) \cup \Pi_\omega^*, \quad (3.79)$$

tels que

$$S_{per}^{\epsilon\delta_\epsilon}(t) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^N} \{T_{\epsilon\delta_\epsilon}^j(t), T_{\epsilon\delta_\epsilon}^j(t) \subset \omega, \partial T_{\epsilon\delta_\epsilon}^j(t) \cap \partial\omega = \emptyset\}, \quad (3.80)$$

et

$$\Pi_\omega^* = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^N} \{\Pi_i, \partial\Pi_i \cap \partial\omega = \emptyset\}. \quad (3.81)$$

Pour notre but, on a besoin d'étendre la notion d'admissibilité légèrement qui permet de passer de la première étape de l'homogénéisation à la deuxième étape. Posons alors la définition suivante :

Définition 3.5 ([19]). Soit $\{S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k\}_k$ une suite de sous ensembles compacts dans Y/Π_1 et posons

$$Y^* = Y / \{\Pi_1 \cup S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k\}. \quad (3.82)$$

On dit que $\{S_{\epsilon\delta_\epsilon}^k\}_k$ est $H^1(Y/\Pi_1)$ -admissible si

- i) Chaque point limite faible $*$ de $\{\chi_{Y^*}\}_\epsilon$ est positive p.p. dans Y/Π_1 .
- ii) Il existe un réel positif C , indépendant de ϵ , et une suite $\{Q_\epsilon^1\}_\epsilon$ d'opérateurs de prolongement linéaires tels que pour chaque ϵ

$$\begin{cases} Q_\epsilon^1 \in \mathcal{L}(H^1(Y^*), H^1(Y/\Pi_1)), \\ (Q_\epsilon^1)_{|Y^*} = v, \forall v \in H^1(Y^*), \\ \|(Q_\epsilon^1 v)\|_{L^2(Y/\Pi_1)} \leq C \|v\|_{L^2(Y^*)}, \forall v \in H^1(Y^*), \\ \|\nabla(Q_\epsilon^1 v)\|_{L^2(Y/\Pi_1)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(Y^*)}, \forall v \in H^1(Y^*). \end{cases} \quad (3.83)$$

Tournons de nouveau à notre problème posé. En gardant les mêmes notations (voir la figure 3.4 et 3.5, on a la proposition suivante :

Proposition 3.24. *Soit Π_1 un sous ensemble compact de Y avec une frontière lipschitzienne. $\{S_{\varepsilon\delta_\varepsilon}^k\}$ est la suite de trous définie par (3.68) dans $Y_\delta = Y/\Pi_1$ de frontière lipschitzienne. Alors, $\{S_{\varepsilon\delta_\varepsilon}^k\}$ est $H^1(Y_\delta)$ -admissible.*

Démonstration. Pour démontrer la $H^1(Y_\delta)$ -admissibilité de la suite $\{S_{\varepsilon\delta_\varepsilon}^k\}$, il suffit de montrer qu'il existe un opérateur $P_\delta \in \mathcal{L}(H^1(Y_\delta^*), H^1(Y_\delta))$ tel que

$$\|P_\delta w\|_{L^2(Y_\delta)} \leq C' \|P_\delta w\|_{L^2(Y_\delta^*)} \quad \forall w \in H^1(Y_\delta), \quad (3.84)$$

avec $C' > 0$ indépendant de δ .

En effet, d'après les résultats de l'homogénéisation pour les trous périodiques de D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin (voir [18]), il existe un opérateur

$$P_{p,\delta} \in \mathcal{L}(H^1(Y_{p,\delta}^*), H^1(Y_{p,\delta})), \quad (3.85)$$

et une constante C positive et indépendante de δ tels que

$$\|P_{p,\delta}\|_{L^2(Y_{p,\delta})} \leq C \|v\|_{L^2(Y_{p,\delta}^*)}, \forall v \in H^1(Y_{p,\delta}^*). \quad (3.86)$$

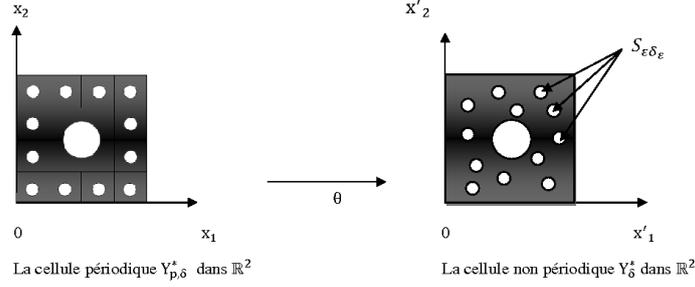


FIG. 3.8 –

Faisons le changement de variable suivant : $x' = \theta(x)$. On a, $x = \theta^{-1}(x')$ et $dx = |\nabla\theta(\theta^{-1}(x'))| dx' = J_\theta dx'$ (avec $J_\theta = |\nabla\theta(\theta^{-1}(x'))|$).

Appliquons cette nouvelle variable sur les deux membres de l'inégalité ci-dessus. On aura pour le premier membre,

$$\|P_{p,\delta}\|_{L^2(Y_{p,\delta})}^2 = \int_{Y_{p,\delta}} |P_{p,\delta}v|^2 dx = \int_{Y_\delta} \left| P_{p,\delta}v(\theta^{-1}(x')) \right|^2 J_\theta dx'. \quad (3.87)$$

Définissons l'opérateur P_δ par

$$P_\delta v(x') = P_{p,\delta}v(x') \sqrt{|J_\theta|}, \quad |J_\theta| \text{ est la valeur absolue de } J_\theta. \quad (3.88)$$

Par suite, pour le deuxième membre de l'inégalité, on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(Y_{p,\delta}^*)}^2 &= \int_{Y_{p,\delta}^*} |v(x)|^2 dx = \int_{Y_\delta^*} \left| v(\theta^{-1}(x')) \right|^2 J_\theta dx' \\ &\leq \max_{Y_\delta^*} |J_\theta| \int_{Y_\delta^*} \left| v(\theta^{-1}(x')) \right|^2 dx'. \end{aligned}$$

En résumé, on a

$$\int_{Y_\delta} \left| P_\delta v(\theta^{-1}(x')) \right|^2 dx' \leq C \max_{Y_\delta^*} |J_\theta| \int_{Y_\delta^*} \left| v(\theta^{-1}(x')) \right|^2 dx', \quad (3.89)$$

avec P_δ défini par (3.88). On pose aussi $w(x') = v(\theta^{-1}(x'))$, il vient,

$$\int_{Y_\delta} |P_\delta w(x')|^2 dx' \leq C' \int_{Y_\delta^*} |w(x')|^2 dx', \quad (3.90)$$

avec $C' = C \max_{Y_\delta^*} |J_\theta|$. Ce qui est équivalent à

$$\|P_\delta w\|_{L^2(Y_\delta)} \leq C' \|P_\delta w\|_{L^2(Y_\delta^*)} \quad \forall w \in H^1(Y_\delta), \quad (3.91)$$

avec $C' > 0$ indépendant de δ . □

On a alors le résultat d'homogénéisation suivant :

Théorème 3.25. *Supposons que $|\partial\Omega| = 0$. Soit $\{B^\epsilon\}$ une suite dans $M(\alpha, \beta; Y(x))$. On a, la paire $(B^\epsilon, S_{\epsilon\delta_\epsilon})$ est H^0 -convergente dans Y/Π^1 vers la matrice $B_x \in M(\alpha C^{-2}, \beta \alpha^{-2}; Y(x))$. Prolongeons par périodicité B^ϵ et posons*

$$\forall x \in \Omega, A^\epsilon(x) = B^\epsilon\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

alors, la paire $(A^\epsilon, S_{\epsilon,\delta})$ H^0 -converge vers la matrice A^0 définie par

$$A^0(x) = B_x^0, \quad (3.92)$$

où

$$B_x^0 \lambda = \frac{1}{|Y|} \int_Y B_x(\lambda + \nabla_y \tilde{w}_\lambda) dy, \quad (3.93)$$

telle que w_λ Y/Π_1 -périodique de moyenne 0, est l'unique solution dans $H_{per}^1(Y/\Pi_1)/\mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y [B_x(\lambda + \nabla_y w_\lambda)] = 0 & \text{dans } Y/\Pi_1, \\ B_x(\lambda + \nabla_y w_\lambda)\nu = 0 & \partial\Pi_1. \end{cases} \quad (3.94)$$

Démonstration. D'après le théorème 3.21, la paire définie par $(B^\epsilon, S_{\epsilon\delta_\epsilon})$ H^0 -convergente dans Y/Π_1 vers $B_x \in M(\alpha C^{-2}, \beta \alpha^{-2}, Y)$. Par ailleurs, d'après la proposition 3.24 et le théorème 3.23, la paire $(A^\epsilon, S_{\epsilon,\delta})$ H^0 -convergente vers la matrice A^0 définie par

$$B_x^0 \lambda = \frac{1}{|Y|} \int_Y B_x(\lambda + \nabla_y \tilde{w}_\lambda) dy, \quad (3.95)$$

telle que w_λ Y/Π_1 -périodique de moyenne 0, est l'unique solution dans $H_{per}^1(Y/\Pi_1)/\mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} -div_y [B_x(\lambda + \nabla_y w_\lambda)] = 0 & \text{dans } Y/\Pi_1, \\ B_x(\lambda + \nabla_y w_\lambda)\nu = 0 & \partial\Pi_1. \end{cases} \quad (3.96)$$

□

Conclusion & perspectives

Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'homogénéisation du modèle de diffusion dans deux domaines différents à savoir les domaines composites et les domaines perforés. Le contexte théorique considéré où deux échelles de modélisation (macroscopique-microscopique) étaient à prendre en compte, nécessitait la mise au point de méthodes d'homogénéisation. Ces méthodes ont été développées aussi bien suivant l'aspect théorique (preuve rigoureuse des problèmes homogénéisés via la méthode des fonctions test oscillantes et la méthode de convergence à deux échelles dans le cas périodique). La généralisation de ces méthodes au cas non périodique est faite en introduisant la H-convergence due à L. Tartar et F. Murat. Cependant, un inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne donne pas une formule explicite de tenseur homogénéisé A^0 dans le cas non périodique. M. Briane, A. Damlamian et P. Donato ont donné une version de la H-convergence pour les domaines perforés sous le nom de la H^0 -convergence que nous avons exploité pour donner la formule du tenseur homogénéisé A^0 dans un cas particulier des domaines à double perforation (voir la section 3.4). Cette application constitue un cas particulier du travail de M. Briane [13] et celui de A. Damlamian et P. Donato [19].

Perspectives

De très nombreuses perspectives peuvent être envisagées à l'issue de ce travail. Nous en mentionnons brièvement quelques qui méritent selon nous des développements plus détaillés :

1. Cette recherche peut s'étendre à l'étude théorique d'autres matériaux plus sophistiqués et aussi d'autres équations aux dérivées partielles plus générales que notre problème considéré dans ce mémoire.

2. Le calcul numérique des propriétés effectives des matériaux composites en utilisant les programmes et les langages informatiques écrits pour ce but.
3. Application de l'homogénéisation à l'optimisation des formes.

Annexe A

A.1 Analyse fonctionnelle

Proposition A.1 ([16]). *Soit $1 < p < \infty$ et $\{u_n\}$ une suite dans $L^p(\Omega)$, alors les propriétés a) et b) sont équivalentes*

a) $(u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$)

b)

$$\left. \begin{array}{l} i) \|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C \\ ii) \int_I u_n dx \longrightarrow \int_I u dx, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indépendante de } n, \\ \text{pour tout } I \in \Omega. \end{array}$$

Proposition A.2 ([16]). *Soit $\{x_n\}$ une suite dans un espace de Banach E , on a*

$$(a) x_n \rightarrow x \text{ fortement dans } E \Rightarrow (b) \left\{ \begin{array}{l} i) x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E, \\ ii) \|x_n\|_E \rightarrow \|x\|_{E^*}. \end{array} \right.$$

De plus, si E est uniformément convexe, on a l'équivalence entre a) et b).

Théorème A.3 ([16]). *Soit X un espace de Banach réflexif. Soit $\{x_n\}$ une suite dans X et K une constante positive tel que $\|x_n\|_X \leq K$. Alors, il existe un $x \in X$ et une sous suite $\{x_{\sigma(n)}\}$ de $\{x_n\}$ tels que*

$$x_{\sigma(n)} \rightharpoonup x \text{ dans } X \text{ faible.}$$

Proposition A.4 ([16]). *Soient $x_n \subset E$ et $y_n \subset E'$, E est un espace de Banach, tels que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E, \\ y_n \rightarrow y \text{ fortement dans } E'. \end{array} \right.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle y_n, x_n \rangle_{E', E} = \langle y, x \rangle_{E', E}.$$

Théorème A.5 ([16]). *Supposons que l'espace de Banach E est réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E . Alors*

i) Il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ et $x \in E$ tels que, quand $k \rightarrow \infty$,

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E,$$

ii) Si toutes les sous suites de $\{x_n\}$ ont la même limite faible x , alors, la suite $\{x_n\}$ converge faiblement vers x , i.e.

$$x_n \rightharpoonup x \text{ faiblement dans } E.$$

Théorème A.6 ([16]). *Supposons que $\partial\Omega$ est continu et lipschitzien. Alors,*

i) Si $1 \leq p < N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec

- Une injection compacte pour $q \in [1, p^*]$, où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$,
- Une injection continue pour $q = p^*$,

ii) Si $p = N$, $W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, avec une injection compacte si $q \in [1, +\infty[$,

iii) Si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ avec une injection compacte.

Théorème A.7 ([16]). *Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \forall \varphi \in D(\Omega)$, alors $f = 0$ p.p. sur Ω .*

Théorème A.8 ([16]). *i) (Inégalité de Poincaré) Soit Ω un ensemble ouvert et borné, et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)},$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

ii) (Inégalité de Poincaré-Wirtinger) Soit Ω un ensemble ouvert borné et convexe, et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors, il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|u - M_{\Omega}(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R}^N)},$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemme A.9 (Lax-Milgram [3]). Soit a une forme bilinéaire continue et coercive sur l'espace de Hilbert H . Alors, pour tout $f \in H^*$, il existe un unique élément $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ pour tout } v \in H.$$

Théorème A.10 (Rellich [3]). Si Ω est un ensemble ouvert borné régulier de classe C^1 , alors pour toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous suite convergente fortement dans $L^2(\Omega)$ (autrement dit, l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Problème de Dirichlet homogène. Soient $A \in M(\alpha, \beta; \Omega)$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$, et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème variationnel associé est

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\nabla u \nabla v dx, \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème A.11 (Problème de Dirichlet homogène [16]). Supposons que la matrice $A \in M(\alpha, \beta, \Omega)$. Alors, pour toute $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (A.1). En plus

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

où

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, la solution satisfait l'estimation

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_{\Omega}}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

où C_{Ω} est la constante de Poincaré.

A.2 Les propriétés des fonctions rapidement oscillantes

On étudie ici une classe de fonctions périodiques qui joue un rôle fondamental dans la théorie de l'homogénéisation. Particulièrement, en faisant attention à des fonctions de la forme

$$a_\epsilon(x) = a\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

où a est une fonction périodique, ϵ prend des valeurs d'une suite qui tend vers zéro. Si a est Y -périodique tel que Y la cellule de base définie par

$$Y =]0, l_1[\times \dots \times]0, l_N[, \tag{A.2}$$

où l_1, \dots, l_N sont des nombres positifs. Alors la fonction $a_\epsilon(x)$ est ϵY -périodique. la question qui se pose est de décrire le comportement de la suite a_ϵ quand $\epsilon \rightarrow 0$.

Fonctions périodiques dans L^1

On introduit la notion de périodicité d'une fonction en posant la définition suivante :

Définition A.1 ([16]). Soit Y un pavé défini par (A.2) et f une fonction définie dans \mathbb{R}^N . La fonction f est appelée Y -périodique si

$$f(x + kl_i e_i) = f(x) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

où $\{e_1, \dots, e_N\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^N .

Dans le cas où $N = 1$, f est l_1 -périodique.

La valeur moyenne d'une fonction périodique est essentielle dans l'étude des fonctions oscillantes, posons alors la définition suivante :

Définition A.2 ([16]). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $f \in L^1(\Omega)$, la valeur moyenne de f sur Ω est le nombre réel $M_\Omega(f)$ donné par

$$M_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(y) dy.$$

Le lemme suivant prouve que la valeur moyenne d'une fonction périodique peut être calculée sur n'importe quel ensemble translaté de la période de référence.

Lemme A.12 ([16]). *Soit f une fonction Y -périodique dans $L^1(\Omega)$, soit y_0 un point fixé dans \mathbb{R}^N , et Y_0 l'ensemble translaté de Y défini par $Y_0 = y_0 + Y$. Soit $f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ p.p sur \mathbb{R}^N . Alors,*

$$\begin{cases} i) \int_{Y_0} f(y)dy = \int_Y f(y)dy, \\ ii) \int_{\epsilon Y_0} f_\epsilon(x)dx = \int_{\epsilon Y} f_\epsilon(x)dx = \epsilon^N \int_Y f(y)dy. \end{cases}$$

Les deux exemples suivants sont importants pour comprendre la convergence faible des fonctions rapidement oscillantes. On verra que la convergence obtenue pour ce genre de suites ne peut pas être forte, en d'autre terme, elle est uniquement faible et la limite obtenue égale à la valeur moyenne de la suite considérée.

Exemple A.1. Soit $v(y)$ une fonction périodique de période 1 définie sur \mathbb{R} par

$$v(y) = \sin(2\pi y).$$

Posons

$$v_\epsilon(x) = v\left(\frac{x}{\epsilon}\right) = \sin\left(2\pi\frac{x}{\epsilon}\right), x \in (a, b),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Choisissons par exemple $a = 0, b = 2$ et ϵ prend les valeurs de la suite $\{1/2^n\}_n$. Pour $n = 0, 1, 2$, on a les graphes ci-dessous, associés pour $n = \{0, 1, 2\}$. A partir de ces graphes, il est clair que, quand $\epsilon \rightarrow 0$, $\sin(2\pi x/\epsilon)$ n'admet pas une limite. En appliquant la proposition A.1, on montre en particulier que

$$v_\epsilon \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^2(a, b). \tag{A.3}$$

En effet, on a la suite $\{v_\epsilon\}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^2(a, b)$.

D'autre part, pour tout intervalle $I =]a_1, b_1[\subset]a, b[$, on a

$$\int_{a_1}^{b_1} \sin\left(2\pi\frac{x}{\epsilon}\right) dx = -\frac{\epsilon}{2\pi} \cos\left(2\pi\frac{x}{\epsilon}\right) \Big|_{a_1}^{b_1} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, en vertu de l'assertion (b) de la proposition A.1, (A.3) est démontré.

On remarque que cette convergence n'est pas forte dans $L^2(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon - 0\|_{L^2(a,b)} &= \int_a^b \sin^2\left(2\pi\frac{x}{\epsilon}\right) dx = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{\frac{2\pi a}{\epsilon}}^{\frac{2\pi b}{\epsilon}} \sin^2 y dy \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{\epsilon}{8\pi} \left[-\sin\frac{4\pi b}{\epsilon} + \sin\frac{4\pi a}{\epsilon} \right]. \end{aligned}$$

On obtient, en faisant tendre ϵ vers 0

$$\|v_\epsilon - 0\|_{L^2(a,b)} \rightarrow \frac{b-a}{2} \neq 0.$$

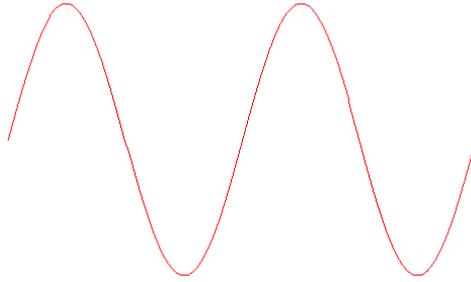


FIG. A.1 – $n = 0$

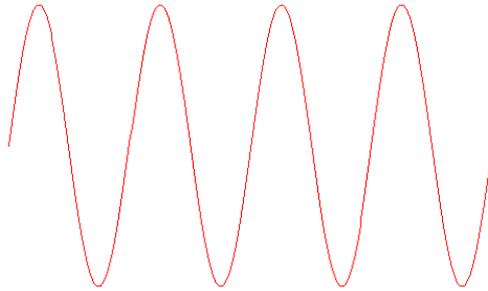


FIG. A.2 – $n = 1$

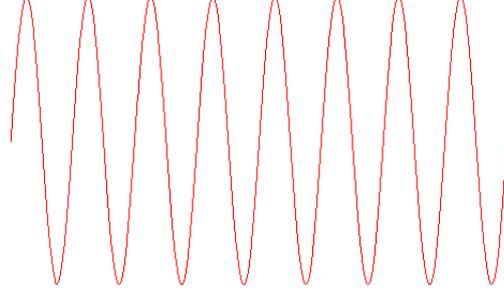


FIG. A.3 – $n = 2$

Exemple A.2 ([16]). Soit $z(y)$ une fonction périodique de période 2 définie sur $]0, 2[$ par

$$z(y) = \begin{cases} \alpha & \text{si } y \in [0, \frac{2}{3}], \\ \beta & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme dans le premier exemple, on pose

$$z_\epsilon(x) = z\left(\frac{x}{\epsilon}\right), x \in]a, b[,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Même chose, on peut voir que si $\epsilon \rightarrow 0$, z_ϵ ne peut pas converger presque partout. La suite $\{z_\epsilon\}$ est bornée indépendamment de ϵ dans $L^2(\Omega)$. On voudrait appliquer la proposition A.1 à cette suite. Pour faire ainsi, on a besoin de vérifier l'assertion (ii) de cette proposition. Soit $I =]a_1, b_1[$ un intervalle arbitraire dans $]a, b[$. Calculons

$$J_\epsilon = \int_{a_1}^{b_1} z_\epsilon(x) dx.$$

Pour tout ϵ positif, il existe k et θ tels que

$$b_1 = a_1 + 2k\epsilon + \theta\epsilon, k \in \mathbb{N}, 0 \leq \theta < 2.$$

Donc, un changement de variable ($y = \frac{x}{\epsilon}$), nous donne

$$J_\epsilon = \epsilon \int_{\frac{a_1}{\epsilon}}^{\frac{b_1}{\epsilon}} z(y) dy = \epsilon \int_{\frac{a_1}{\epsilon}}^{\frac{a_1}{\epsilon} + 2k} z(y) dy + \epsilon \int_{\frac{a_1}{\epsilon} + 2k}^{\frac{a_1}{\epsilon} + 2k + \theta} z(y) dy. \quad (\text{A.4})$$

D'après le lemme A.12, on a

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\frac{a_1}{\epsilon}}^{\frac{a_1}{\epsilon}+2k} \frac{a_1}{\epsilon} z(y) dy &= \epsilon \sum_{h=1}^k \int_{\frac{a_1}{\epsilon}+2(h-1)}^{\frac{a_1}{\epsilon}+2h} z(y) dy = k\epsilon \int_0^2 z(y) dy \\ &= \frac{b_1 - a_1 - \theta\epsilon}{2} \int_0^2 z(y) dy. \end{aligned}$$

D'autre part, par le lemme A.12, on a

$$\left| \int_{\frac{a_1}{\epsilon}+2k}^{\frac{a_1}{\epsilon}+2k+\theta} z(y) dy \right| \leq \int_{\frac{a_1}{\epsilon}+2k}^{\frac{a_1}{\epsilon}+2k+2} |z(y)| dy = \int_0^2 |z(y)| dy.$$

Par conséquent, par passage à la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ dans (A.4), nous donne

$$J_\epsilon \longrightarrow \frac{b_1 - a_1}{2} \int_0^2 z(y) dy = (b_1 - a_1) \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\beta \right).$$

Ce qui grâce à la proposition A.1 implique

$$z_\epsilon \rightharpoonup z_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\beta \right) \text{ faiblement dans } L^2(a, b). \quad (\text{A.5})$$

Et de même ici, on n'a pas la convergence forte dans $L^2(a, b)$. En effet, si cette convergence est forte, la proposition A.2 impliquerait que

$$\|z_\epsilon\|_{L^2(a,b)}^2 \rightarrow \|z_0\|_{L^2(a,b)}^2.$$

Même calculs utilisés dans l'exemple précédent donnent

$$\|z_\epsilon\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b z_\epsilon^2(x) dx \rightarrow (b-a) \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{4}{3}\beta^2 \right),$$

qui est différent de

$$\|z_0\|_{L^2(a,b)}^2 = (b-a) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}\beta \right) \right]^2.$$

Observons que dans les deux exemples ci-dessus, les limites faibles données par (A.3) et (A.5) respectivement, sont égales à $M_Y(v)$ et $M_Y(z)$. Ce fait est contenu dans un résultat général concernant la limite faible d'une suite de fonctions rapidement oscillantes suivant :

Théorème A.13 ([16]). *Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et f une fonction Y -périodique dans $L^p(Y)$. Posons*

$$f_\epsilon(x) = f\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^N. \quad (\text{A.6})$$

Alors, si $p < +\infty$, quand $\epsilon \rightarrow 0$

$$f_\epsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \text{ faiblement dans } L^p(\omega),$$

pour tout sous ensemble ouvert et borné $\omega \in \mathbb{R}^N$.

Si $p = +\infty$, on a

$$f_\epsilon \rightharpoonup M_Y(f) = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(y) dy, \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0, \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Bibliographie

- [1] G. Allaire, *Conception optimale de structures*. Mathématiques et applications. s.l. : Springer, 2007.
- [2] G. Allaire, *Homogenization and two-scale convergence*. SIAM J. MATH. ANAL, Vol. 23, p. 1482-1518. 6, Novembre 1992.
- [3] G. Allaire, *Numerical Analysis and Optimization. An introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. Oxford University Press, 2007.
- [4] G. Allaire, *Periodic homogenization and effective mass theorems for the Schrödinger equation*. Commissariat 'a l'Energie Atomique DRN/DMT/SERMA C.E.N. Saclay F-91191 Gif Sur Yvette (FRANCE), 2006.
- [5] G. Allaire, *Two-Scale Convergence and Homogenization of periodic structure*. Commissariat 'a l'Energie Atomique DRN/DMT/SERMA C.E.N. Saclay F-91191 Gif Sur Yvette (FRANCE), 1993.
- [6] H. Attouch, *Homogénéisation*. France, Séminaire de N.Bourbaki. p. 7-30. 1987-1988.
- [7] A. Bensoussan, J.-L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structure*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [8] J. M. Berthelot, *Matériaux Composites*. Vallouise. TEC AND DOC, 1999.
- [9] B. Birnir N.Wellander and S.Hou, *A Homogenization of the Navier-Stokes Equation, Obtaining the Viscous Moore-Greitzer Equation for Aeroengine Flow*. 2003.
- [10] F.Bomemann, *Homogenization in Time of Singularly Perturbed Mechanical Systems*. s.l. : Springer, 1998.
- [11] Bouchanan and L. James, *marine acoustics*. SIAM. Philadelphia. 1999.
- [12] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et application*. Paris : Dunod, 1999.

-
- [13] M. Briane, *Homogenization of a non non-periodic material*, J.Math.Pures Appl., 73, p. 47 à 66. 1994.
- [14] M. Briane P. Damlamian and P. Donato, *H-convergence for perforated domains*, in non-linear partial differential equations and their applications. 391, New-York, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Vol. XIII, p. 62-100. 1998.
- [15] R. Brizzi AND G. Allaire, *A multiscale method for numerical homogenization*. France, 2004.
- [16] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization*. s.l. : Oxford University Press, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 17. 1999.
- [17] D. Cioranescu, A. Damlamian et G. Griso, *Periodic unfolding and homogenization* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris 335, no. 1, p. 99104. 2002.
- [18] D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin, *Homogenization in Open Sets with Holes*. Journal of mathematical analysis and application , p. 590-607. 1979.
- [19] A. Damlamian, P. Donato, *H-convergence and iterated homogenization*, Asymptotic Analysis, 39 (1) (2004), 45-60.
- [20] P. Donato - H. Haddadou, *Meyers type estimates in elasticity and applications to H-convergence*, Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol. 16, No 2, p. 537-567. 2006.
- [21] O. Debordes, *Homogénéisation périodique*. Marseille, 2001.
- [22] E. De Giorgi, S. Spagnolo, *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori elliptici del secondo ordine*. Boll. Un. Mat. Ital. Vol 8, 391-411. 1973.
- [23] R. Eymard, T. Gallouet, *H-convergence and numerical schemes for elliptic problems*. 2002.
- [24] B.Gambin, J.J.Telega and P.Castañeda, *Nonlinear Homogenization and its Applications to Composites, Polycrystals and Smart Materials*. Philadelphia : Springer. 2005.
- [25] D.Gay V.Suong Hoa,W.Stephen Tsai, *Composite materials design and applications*. 2003.
- [26] I. Gruet, *Compacité par compensation et homogénéisation* :notes de cours de DEA de F.Murat.
- [27] I.Gruet, Homogénéisation et H-mesure.
- [28] B.Gustafsson, J. Mossino, *A criterion for H-convergence in elasticity*. Italy. p. 247-269. 2007.

-
- [29] H. Haddadou, *Iterated homogenization for the linearized elasticity by H_e^0 -convergence*, Ricerche di Matematica, Vol. LIV, 137-163. 2005.
- [30] K. Hamadache Y. Amirat, *Sur quelques problèmes d'homogénéisation non locale et de fluides en milieu poreux*. [éd.] Laboratoire des mathématiques de Blaise Pascal. France. Vol. 14, p. 149-186. 2007.
- [31] S. Monssuro, *Homogenization of two-component composite with interfacial thermal barrier*. Italy. 2002.
- [32] F. Murat, *Compacité par compensation*. France. Vol. 6, p. 125-127. 1979.
- [33] F. Murat, *H-convergence*. univ. d'Alger. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique. 1977/1978.
- [34] F. Murat, G. Allaire, *Homogenization of the Neuman problem with non-isolated holes*. Asymptotic Anal.
- [35] F. Murat, L. Tartar, *H-Convergence*, in *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, ed. A. Cherkaev and R. Kohn, Birkhauser, Boston, 21-43. 1997.
- [36] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal. Vol 20, 608-629. 1989.
- [37] A. Nouredine, P. Raymond and S. Franck, *Etude numérique et expérimentale de l'absorption acoustique et de la transparence acoustique des matériaux poreux*. irsst. Québec, 2001.
- [38] L. Robert, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. USA, 2002.
- [39] J. Saint Jean Paulin, R. Bunoiu, *Linear flow in porous media with double periodicity*. 1999, Vol. 56.
- [40] E. Sanchez-Palencia, *Non-homogenous Media and Vibration theory*, Lecture Notes in physic. Vol.127, Springer, Berlin, 1980.
- [41] E. Sanchez-Palencia et J. Sanchez-Hubert, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Paris, MASSON, 1992.
- [42] S. Spagnolo, *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calor*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21, 657-699. 1967.
- [43] A. M. Stuart G. A. Pavliotis, *Multiscale methods. Averaging and homogenization*. s.l. : Springer, 2007.
- [44] L. Tartar, *Homogeneisation et H-mesures*. Vol. 6, p. 111-131. 1998.
- [45] A. Zaoui and E. Sanchez-Palencia, *Homogenization Techniques for Composite Media*. Italy : Springer, 1985.

- [46] L. Zhang H.Owhadi, *Numerical Homogenization of the Acoustic Wave Equations with a Continuum of Scales*. California Institute of Technology Applied and Computational Mathematics. Pasadena, 2008.