



COURS SUR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Éléments de base et application aux
structures mécaniques

Seddik MERAKEB

2023

TABLE DES MATIERES

Introduction	1
Généralités	1
Formulation intégrale. Formulation variationnelle	3
Intérêt de la MEF.....	3
Types de problèmes en éléments finis	4
organisation de l'ouvrage	5
Chapitre I Systèmes d'équations linéaires	6
I.1 Introduction.....	6
I.2 Systèmes linéaires	6
I.3 méthodes directes.....	8
I.3.1. Stratégie de base	9
I.3.2. Orthogonalisation de Schmidt.....	9
I.3.3. Décomposition de Cholesky : matrice symétriques	12
I.3.4. Elimination de Gauss et notion de pivot	15
I.4 Méthodes indirectes.....	18
I.4.1. Construction de la matrice d'itérations.....	19
I.4.2. Itération de Jacobi	19
I.4.3. Itération de Gauss-Seidel	20
I.5 Conditionnement d'un système	21
Chapitre II Formulation intégrale.....	25
II.1 Introduction.....	25
II.2 Structures discrètes.....	26
II.2.1. Exemple de réseau électrique	26
II.2.2. Exemple de structure en mécanique.....	29
II.3 Formes intégrales	29
II.4 Discrétisation de la forme intégrale	30
II.5 Approximation de fonctions.....	30
II.6 Méthodes des résidus pondérés	32
II.6.1. Méthode de collocation par points	32
II.6.2. Méthode de collocation par sous-domaine	34
II.6.3. Méthode de Galerkin.....	36
II.7 Formes intégrales faibles.....	38
II.7.1. Intégration par partie	38

II.7.2.	Théorème de Green	39
II.8	Application aux problèmes thermiques	40
II.8.1.	Equation différentielle de la diffusion thermique.....	40
II.8.2.	Conditions aux frontières	40
II.8.3.	Formulations intégrales.....	41
II.8.4.	Discrétisation algébrique de la forme intégrale.....	42
II.8.5.	Exemple de conduction thermique dans un domaine rectangulaire.....	43
II.9	Formulation intégrale des équations de l'élasticité linéaire	47
II.9.1.	Position du problème	47
II.9.2.	Construction des formes intégrales	48
II.9.3.	Cas des barres en flexion simple	50
II.9.4.	Résolution par la méthode de Galerkin.....	52
II.10	Conclusion	54
Chapitre III	Approximation par éléments finis.....	56
III.1	Introduction.....	56
III.2	Concept de base de la méthode des éléments finis.....	56
III.2.1.	Approche globale de la méthode	56
III.2.2.	Approche locale de la méthode	58
III.3	Application aux problèmes mécaniques en élasticité linéaire.....	58
III.4	Construction des fonctions de forme.....	61
III.4.1.	Méthode générale.....	61
III.4.2.	Cas de fonctions à une seule variable	62
III.5	Élément fini à une dimension.....	65
III.5.1.	Barres en traction-compression	65
III.5.2.	Poutre en flexion	66
III.6	Transformations géométriques.....	71
III.7	Éléments finis en deux dimensions	76
III.7.1.	Efforts internes	76
III.7.2.	Cinématique du déplacement	77
III.7.3.	Forme de Galerkin – Équation des travaux virtuels	79
III.7.4.	Plaque en cisaillement.....	82
III.7.5.	Discrétisation de la forme	83
III.7.6.	Membrane en flexion simple bidirectionnelle	88
III.8	Conclusion	95

Chapitre IV Éléments de référence et transformations géométriques.....	97
IV.1 Introduction.....	97
IV.2 Représentation paramétrique.....	97
IV.3 Opérateurs différentiels.....	98
IV.3.1. Élément de courbe.....	98
IV.3.2. Élément d'aire.....	99
IV.3.3. Élément de volume.....	100
IV.3.4. Opérateur gradient.....	100
IV.3.5. Opérateur Laplacien.....	101
IV.4 Éléments de référence.....	101
IV.4.1. Éléments à une dimension.....	101
IV.4.2. Éléments à deux dimensions.....	103
IV.4.3. Éléments à trois dimensions.....	105
IV.5 Expression de la fonction solution.....	106
IV.6 Matrice de rigidité et vecteur-force élémentaires.....	106
IV.7 Conclusion.....	107

Notations et conventions

Ce cours utilise les notations et conventions suivantes :

Les noms de variables ou de fonctions scalaires sont en lettres minuscules et simples, ceux des grandeurs matricielles ou vectorielles sont en gras. Les matrices sont en majuscule. Un vecteur, s'il n'est pas fait mention du contraire, est un vecteur-colonne. Quelques exceptions peuvent apparaître, et dans ce cas la définition de la grandeur concernée est explicite.

La convention des indices muet et franc est utilisée pour les sommes et les égalités.

De plus, et dans la mesure du possible, les notations utilisées sont les suivantes :

$\{ \}$	vecteur colonne
$\langle \rangle$	vecteur ligne
Ω	domaine géométrique, linéique, plan ou spatial
$\partial\Omega$	frontière du domaine géométrique Ω , (courbe ou surface fermée)
δ	symbole du calcul des variations
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker
$\delta(\mathbf{x})$	distribution de Dirac
i, j	variables entières indicielles
Δ, div	opérateur Laplacien, opérateur divergence
$\bar{\nabla}$	opérateur gradient
Δ_j	distribution de Dirac centrée sur le point \mathbf{x}_j
$\mathcal{L}(), \mathcal{B}()$	opérateurs différentiels scalaires ou vectoriels
τ^e	transformation géométrique d'un élément fini de référence vers l'espace réel
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur de contraintes de Cauchy d'ordre 2
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenseur de déformation linéarisé de Green-Lagrange d'ordre 2
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}$	tenseur de contraintes de Cauchy d'ordre 1
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$	tenseur de déformation linéarisé de Green-Lagrange d'ordre 1
\vec{n}	vecteur unitaire normal à une courbe plane ou une surface courbe en un point
\vec{t}	vecteur unitaire tangent à une courbe en un point
\mathbf{B}	matrice de déformation
\mathbf{C}	matrice de Hooke ou matrice des propriétés élastiques
\mathbf{J}	matrice Jacobienne de la transformation géométrique
\mathbf{H}	Co-matrice de la matrice Jacobienne
\mathbf{L}	matrice des opérateurs différentiels
\mathbf{N}	matrice des fonctions de forme
\mathbf{f}	champ de force volumique
\mathbf{t}	vecteur de contrainte $\mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \vec{n}$ ou chargement mécanique surfacique

\mathbf{g}	distribution de la charge mécanique sur un plan moyen d'une coque
\mathbf{q}	chargement linéique réparti ou vecteur-déplacement nodal
$\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{Q}$ moments)	efforts internes dans un élément de coque (effort normal, cisaillement et moments)
\mathbf{u}, \mathbf{v}	fonctions vectorielles des variables spatiales, définies sur le domaine Ω
$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$	réduction des fonctions \mathbf{u}, \mathbf{v} sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω
$M(x), T(x)$	efforts internes (moment fléchissant et effort tranchant) dans une poutre
\mathcal{R}	résidu de l'équation différentielle de l'équilibre
W	résultat de la forme intégrale
$d\Omega, dA, d\ell$	éléments infinitésimaux de volume, d'aire et d'arc
$\langle a_n \rangle$	vecteur-ligne des paramètres généraux polynomiaux
$\langle P(\mathbf{x}) \rangle$	base d'un espace fonctionnel de dimension n
$\langle N(\mathbf{x}) \rangle$	fonctions de forme d'un élément fini à n degrés de liberté
\mathbf{x}	regroupe les coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou (x_1, x_2, x_3)
ξ	regroupe les coordonnées cartésienne (ξ, η, ζ) d'un espace de référence

LISTE DES FIGURES

FIGURE II-1 : EQUILIBRE STATIQUE D'UN SOLIDE DEFORMABLE	25
FIGURE II-2 : RESEAU ELECTRIQUE.....	26
FIGURE II-3 : STRUCTURE EN TREILLIS, BARRES EN TRACTION-COMPRESSION.....	29
FIGURE II-4 : APPROXIMATION DE LA SOLUTION PAR UNE COURBE DU SECOND DEGRE	31
FIGURE II-5 : EQUATION DE POISSON DANS UN DOMAINE RECTANGULAIRE	33
FIGURE II-6 : COMPARAISON DES SOLUTIONS ANALYTIQUE ET NUMERIQUES (A 1 ET 2 PARAMETRES)	36
FIGURE II-7 : THEOREME DE GREEN SUR UN DOMAINE BIDIMENSIONNEL	39
FIGURE II-8 : DIFFUSION THERMIQUE DANS UN MILIEU CONDUCTIF.....	40
FIGURE II-9 : DIFFUSION THERMIQUE DANS UN MILIEU RECTANGULAIRE DE COTES (AXB).....	43
FIGURE II-10 : DISTRIBUTION DE LA TEMPERATURE DANS LE RECTANGLE.....	46
FIGURE II-11 : CHAMP VECTORIEL DU FLUX DE CHALEUR $\vec{q} = -k\vec{\nabla}T$	46
FIGURE II-12 : PROJECTION D'UNE SURFACE PLANE SUR LES TROIS PLANS PRINCIPAUX.....	48
FIGURE II-13 : POUTRE CONTINUE HYPERSTATIQUE	50
FIGURE II-14 : COURBES DES DEPLACEMENTS.....	53
FIGURE II-15 : DIAGRAMMES DES EFFORTS INTERNES : MOMENT FLECHISSANT (A GAUCHE) ET EFFORT TRANCHANT (A DROITE) POUR LES 3 APPROXIMATIONS ET LA SOLUTION ANALYTIQUE.....	54
FIGURE III-1 : DISCRETISATION SCHEMATIQUE D'UN DOMAINE GEOMETRIQUE EN ELEMENTS FINIS	57
FIGURE III-2 : FONCTIONS DE FORMES NODALES CONSTRUITES SUR 2 NŒUDS	62
FIGURE III-3 : FONCTIONS DE FORMES DE LAGRANGE CONSTRUITES SUR 3 NŒUDS	63
FIGURE III-4 : FONCTIONS NODALES HERMITIENNES CONSTRUITES SUR 2 NŒUDS	64
FIGURE III-5 : ÉLÉMENT FINI DE TYPE BARRE EN TRACTION-COMPRESSION.....	65
FIGURE III-6 : ELEMENT FINI DE TYPE BARRE EN FLEXION A 2 NŒUDS	66
FIGURE III-7 : ÉLÉMENT FINI-BARRE EN FLEXION COMPOSEE DANS UN CONTEXTE BIDIMENSIONNEL.....	72
FIGURE III-8 : EXEMPLE DE SYSTEME BARRE EN TRACTION-COMPRESSION.....	73
FIGURE III-9 : MODELISATION EN ELEMENTS FINIS DE TYPE BARRE EN TRACTION-COMPRESSION	74
FIGURE III-10 : DEFINITION DES DEGRES DE LIBERTE DE LA STRUCTURE DANS LE REPERE GLOBAL	74
FIGURE III-11: TYPE D'ELEMENTS FINIS BIDIMENSIONNELS.....	76
FIGURE III-12 : INTEGRATION SUR L'ÉPAISSEUR DE L'ÉTAT DE CONTRAINTE POUR UN ELEMENT DE COQUE	77
FIGURE III-13 : CINEMATIQUE DU DEPLACEMENT D'UN ELEMENT DE COQUE SELON L'HYPOTHESE DE KIRCHHOFF	78
FIGURE III-14 : PLAQUE EN CISAILLEMENT PLAN	82
FIGURE III-15 : UN ELEMENT FINI RECTANGULAIRE DE LAGRANGE A 4 NŒUDS.....	84
FIGURE III-16 : DEUX ELEMENTS FINIS TRIANGULAIRES DE LAGRANGE A 3 NŒUDS.....	84
FIGURE III-17 : SYSTEME DE CHARGEMENT	87
FIGURE III-18 : CARTOGRAPHIE DES EFFORTS INTERNES : DE GAUCHE A DROITE : EFFORTS N_{xx} , N_{yy} , T_{xy}	88
FIGURE III-19 : ELEMENT FINI RECTANGULAIRE HERMITIEN A 4 NŒUDS POUR MEMBRANE EN FLEXION SIMPLE.....	90
FIGURE III-20 : TRIANGLE DE PASCAL	91

FIGURE III-21 : DALLE SIMPLEMENT APPUYEE DE DIMENSIONS $4 \times 3 \times 0,05 \text{ M}^3$	94
FIGURE III-22 : CARTOGRAPHIE DE LA FLECHE : LES ISOVALEURS SONT EN MM	94
FIGURE III-23 : CARTOGRAPHIE DES EFFORTS INTERNES.....	95
FIGURE III-24 : REACTIONS D'APPUIS AUX NŒUDS DE L'ÉLÉMENT.....	95
FIGURE IV-1 : MAILLAGE CORRECT D'UNE PLAQUE AVEC DES ÉLÉMENTS DE TYPE LINEAIRE	97
FIGURE IV-2 : EXEMPLES D'ÉLÉMENTS DE REFERENCE (2D) ET TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES.....	98
FIGURE IV-3 : TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES D'ÉLÉMENTS SEGMENTAIRES.....	102
FIGURE IV-4 : ÉLÉMENTS DE REFERENCE TRIANGULAIRES LINEAIRE A 3 NŒUDS ET QUADRATIQUE A 6 NŒUDS....	103
FIGURE IV-5 : ÉLÉMENTS DE REFERENCE QUADRILATERES LINEAIRE A 4 NŒUDS ET QUADRATIQUE A 8 NŒUDS....	104
FIGURE IV-6 : ÉLÉMENTS FINIS PRISMATIQUES LINEAIRE (6 NŒUDS) ET QUADRATIQUE (18 NŒUDS)	105
FIGURE IV-7 : ÉLÉMENTS FINIS HEXAEDRIQUES LINEAIRE (8 NŒUDS) ET QUADRATIQUE (20 NŒUDS)	105
FIGURE IV-8 : ÉLÉMENTS FINIS TETRAEDRIQUES LINEAIRE (4 NŒUDS) ET QUADRATIQUE (10 NŒUDS).....	105
FIGURE IV-9 : CHARGEMENT D'UNE FACE TRIANGULAIRE D'UN ÉLÉMENT TETRAEDRIQUE	107

Cet ouvrage a pour but de mettre à disposition des étudiants en Master Génie Civil un cours d'éléments finis rédigé dans un langage mathématique le plus élémentaire sans pour autant abandonner un niveau de rigueur nécessaire en pédagogie. C'est ainsi que certaines démonstrations ont été négligées au profit d'une présentation plus pratique et simple des concepts et notions les plus indispensables. Chaque chapitre comprend un certain nombre d'exemples résolus qui mettent en évidence l'intérêt de la méthode utilisée. Ce cours s'adresse principalement aux étudiants ayant acquis une licence en Génie Civil. Le cours suppose un pré-requis sur *l'algèbre linéaire et l'analyse numérique*. D'autres notions de *Résistance des Matériaux* sont indispensables pour l'assimilation des méthodes présentées. Plus loin dans le cours, les notions de *Mécanique des Milieux Continus* sont indispensables. Ce cours de *Méthode des Éléments Finis* est une application aux structures mécaniques qu'on étudie communément en Génie Civil. L'ouvrage présente une certaine méthode d'acquisition par palier successif. Les notions de base sont d'abord abordées et peuvent être dispensées selon l'intérêt du cours à prodiguer. C'est ainsi que le cours peut être comprimé en un seul semestre en négligeant certaines sections. Le dernier chapitre peut être laissé à l'étudiant pour compléter ses connaissances à titre autodidactique.

Beaucoup d'ouvrages sur la méthode des éléments finis ont influencé ce cours, particulièrement les ouvrages d'Amar Khennane et de Thomas Gmür sur les débuts des chapitres II et III. Toutefois, les exemples traités sont ceux qu'on traite communément dans les différents modules enseignés en Génie Civil. Les exemples sur les poutres sont loquaces. La bibliographie est réduite uniquement aux ouvrages disponibles à la bibliothèque. L'étudiant peut toujours consulter différents ouvrages également disponibles à la bibliothèque centrale de l'université.

INTRODUCTION

GENERALITES

En science de l'ingénieur, il existe trois domaines :

- Les sciences expérimentales : c'est l'observation directe en laboratoire des phénomènes physiques ;
- Les sciences appliquées créent des modèles physiques et mathématiques pour représenter ces phénomènes : c'est la modélisation ; elles relient les notions et grandeurs physiques dans un formalisme théorique adapté au monde de l'ingénieur ;
- Les sciences numériques étudient les méthodes de résolution des équations obtenues par la modélisation.

Pour la résolution de tous les problèmes physiques rencontrés dans la réalisation de projets divers (projets spatiaux, aéronautiques, nucléaires, prévision météorologique...), l'ingénieur a besoin de modèles pour simuler leurs comportements. On appelle simulation la modélisation et la résolution d'un problème physique.

Un problème d'ingénieur est donc représenté par un modèle mathématique. Ce modèle se présente généralement sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) ou aux dérivées partielles (EDP) définies dans un domaine géométrique.

De très nombreuses méthodes numériques existent. Le choix d'une méthode ou d'une autre dépend :

- Du nombre de variables indépendantes ;
- Du type de problème (stationnaire ou non stationnaire) ;
- Du domaine considéré (géométrie, borné...etc.) ;
- Type d'équation (linéaire ou non, etc.) ;
- etc...

Les grandes familles de méthodes numériques sont les suivantes :

- méthode des différences finies ;
- méthode des volumes finis ;
- méthode des éléments finis ;
- méthode des éléments de frontière ;

Toute méthode numérique implique une discrétisation algébrique et/ou géométrique du système physique.

Parfois, le couplage de plusieurs méthodes issues de différentes familles peut être réalisé. Par exemple, certaines modélisations font appel à la méthode des éléments finis au domaine spatial et la méthode des différences finies pour la discrétisation temporelle pour des problèmes non stationnaire.

Si la méthode numérique développée est nouvelle, il convient de l'analyser pour définir la qualité des solutions qu'elle peut nous offrir (erreur d'approximation), ainsi que son coût (convergence, stabilité).

En général, la simulation numérique comprend les phases suivantes :

- écriture du modèle mathématique (équations)
- choix de l'algorithme (analyse de la méthode, discrétisation...etc.) ;
- lecture des données du problème ;
- calcul numérique et obtention des résultats ;
- Exploitation et analyse des résultats.

La résolution analytique des équations aux dérivées partielles étant dans la plupart des cas impossible à trouver, sa résolution numérique requiert alors des conditions aux limites sur les frontières.

La numérisation du problème consiste à transformer les équations aux dérivées partielles en un ensemble d'équations algébriques. Cette transformation s'appelle l'opération de discrétisation du système. Elle transforme un système continu (nombre de degrés de liberté infini) en un système discret (nombre de degrés de liberté fini). L'ingénieur peut alors choisir l'une des méthodes déjà citées. La méthode des différences finies est simple quand il s'agit de résoudre des problèmes dans un domaine géométrique régulier, mais devient difficile quand la géométrie du système étudié est complexe avec des conditions aux limites quelconques. On lui préfère de loin la méthode des éléments finis (MEF).

La MEF a été conçue d'abord comme un procédé de calcul en mécanique des structures au milieu du XX siècle. Sa formalisation a ensuite permis de l'étendre efficacement à tous les domaines des sciences de l'ingénieur. Nous introduisons cette méthode sous sa forme achevée de procédé général de résolution.

La MEF consiste donc à remplacer un système continu par un système discret équivalent. La discrétisation s'effectue sur deux fronts. D'une part, la discrétisation géométrique qui consiste à subdiviser le domaine en sous-domaines de géométrie simple, appelés éléments finis. D'autre part, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par un système d'équations algébriques à l'aide

de méthodes de calcul variationnel et de minimisation de l'erreur comme les méthodes de résidus pondérés. La solution finale est un assemblage des solutions obtenues sur chaque élément fini.

A ce niveau de la réflexion, le problème est : comment réaliser cette discrétisation ? Autrement dit, comment passer d'un système continu à un système discret équivalent. Le concept de système ou structure discrète est assez répandu notamment dans les structures poutres-poteaux des bâtiments ou structures en treillis qui sont d'ailleurs le domaine d'application initiale de la MEF. Il n'en est pas de même pour d'autres types de systèmes où l'opération de discrétisation n'est pas aussi évidente, par exemple les problèmes de transfert thermique, hydrique, écoulement fluide, problème de plaques et coques...etc.

Comme on l'a expliqué plus haut, la discrétisation est de deux types : discrétisation géométrique et discrétisation algébrique par méthodes d'approximation.

FORMULATION INTEGRALE. FORMULATION VARIATIONNELLE

En général, la résolution analytique des équations aux dérivées partielles est impossible à obtenir. On transforme alors le système continu en un système discret équivalent dont le comportement est décrit par des équations algébriques de la forme qu'on peut résoudre par des méthodes numériques bien connues. La formulation intégrale est issue du système d'équations différentielles. Elle est ensuite discrétisée en utilisant une approximation sur un sous-domaine. On obtient alors une forme intégrale élémentaire.

Nous définissons alors la MEF comme une méthode de discrétisation des formes intégrales.

On est donc amené à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- Au niveau d'un sous-domaine, c'est la formulation élémentaire
- Au niveau de tout le domaine ou système entier, c'est la formulation globale

Il existe deux procédés différents pour obtenir une telle formulation intégrale. Le premier est la méthode des résidus pondérés. Le second est la minimisation d'une fonctionnelle (de l'énergie potentielle par exemple d'une structure mécanique).

La méthode des résidus pondérés peut s'appliquer à toute fonction indépendamment de l'existence et de la connaissance d'une formulation variationnelle. Elle a donc un avantage certain sur celle-ci.

INTERET DE LA MEF

La méthode des éléments finis présente des intérêts considérables, parmi lesquels :

- Traitement des formes géométriques compliquées,

- Traitements des comportements complexes et évolutifs (non linéarité, viscosité, régimes transitoires...etc.),
- Possibilités de couplages des différents phénomènes : mécanique, thermique, hydraulique, diffusif...etc.
- Exploitation directes et rapide des résultats,
- Grandes capacités d'adaptation aux innovations (modèles, matériaux, procédés,...),
- Très grande simplicité d'utilisation (c'est aussi un inconvénient ! car cela n'incite pas trop à la réflexion !).

Néanmoins, certains inconvénients peuvent être gênants en particuliers :

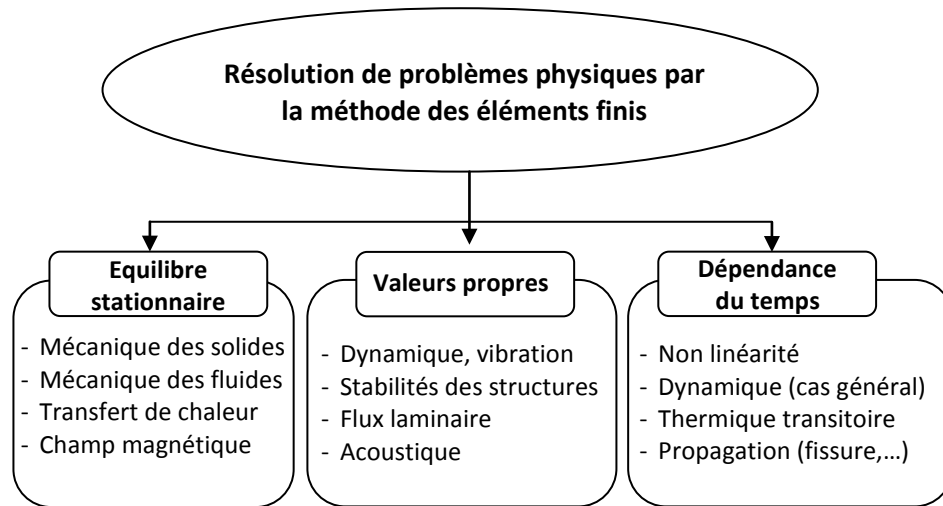
- Temps de calcul assez significatif pour les modèles réels,
- Grand besoin en ressources informatiques (puissance, capacité de stockage),
- Résultats non transposables et spécifiques à l'application numérique,
- Efforts considérables pour l'interprétation et la validation des résultats.

Il faut garder à l'esprit que le coût réel d'une modélisation n'est en réalité ni le coût-machine ni le coût-logiciel, mais plutôt le coût-ingénieur évalué par le temps passé pour définir un modèle, l'implémenter, le valider, interpréter et présenter les résultats du modèle.

TYPES DE PROBLEMES EN ELEMENTS FINIS

La MEF permet de résoudre trois types de problèmes principaux :

- Problèmes d'équilibre stationnaire : Dans ce type de problème, le comportement est défini en fonction de l'état du système, de sa géométrie, des sollicitations et des conditions aux limites. On trouve dans cette catégorie, l'équilibre statique et les régimes stationnaires d'écoulement, de transfert thermique et d'électromagnétisme.
- Problèmes aux valeurs propres : Il s'agit des phénomènes de vibration ou d'instabilité d'un état stationnaire. Les modes propres de vibration, le flambage des structures ou l'instabilité des flux laminaires font parties de cette catégorie
- Problème dépendant du temps : Lorsque l'état du système dépend de son histoire ou bien des paramètres de sorties, le système devient interdépendant et la résolution directe n'est plus possible. Ce cas inclut par exemple le comportement en dynamique non linéaire, les régimes transitoires et la fissuration des pièces.



Différents types de problème en éléments finis

ORGANISATION DE L'OUVRAGE

L'organisation du présent ouvrage est la suivante :

Le chapitre **I** présente la notion de système linéaire ainsi que les méthodes numériques de résolution. Des rappels sur les matrices et leurs propriétés sont indispensables pour pouvoir présenter les différentes méthodes de résolution directes et indirectes.

Le chapitre **II** introduit le concept de base de la MEF : la formulation variationnelle. Des exemples simples sont présentés pour résoudre ces formes intégrales en 1D et 2D. Cette partie de l'ouvrage se concentre sur les problèmes des solides déformables et de transfert thermique.

Le chapitre **III** se focalise sur la forme nodale de la formulation intégrale. Les polynômes d'interpolation sont étudiés sous leurs formes Lagrangienne et Hermiteenne. La notion de matrice de rigidité, des déplacements nodaux et des forces nodales y sont présentés. L'étude est portée particulièrement aux problèmes de mécanique notamment les treillis, les poutres, les voiles et les membranes.

Le chapitre **IV** présente la notion d'éléments de référence par l'utilisation des transformations géométriques. Le calcul différentiel et les opérateurs de gradient, de Laplacien sont définis dans l'espace de référence. Les différents éléments finis communément utilisés y sont également présentés en 1D, 2D et 3D.

Chaque chapitre propose un ensemble d'exercices d'application, pour lesquels sont fournis des éléments de solution qui sont plus ou moins détaillés selon les cas.

Chapitre I SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

I.1 INTRODUCTION

Les systèmes d'équations algébriques jouent un rôle très important en ingénierie. On peut les classer en deux grandes familles : les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires.

Aujourd'hui, les progrès de l'informatique nous permettent de résoudre des problèmes de taille prodigieuse, jusqu'à plusieurs centaines de milliers d'inconnues, et de types très variés, structures complexes, mécaniques des fluides...etc.

Ces calculs complexes requièrent des méthodes de résolution efficaces qui minimisent le temps de calcul et l'espace-mémoire requis avec une précision suffisante.

Dans ce chapitre, nous allons aborder uniquement les systèmes linéaires ainsi que les différentes méthodes pour les résoudre. Nous allons également aborder la notion de conditionnement d'un système liée à la stabilité numérique.

I.2 SYSTEMES LINEAIRES

DEFINITION I.1

On appelle système linéaire un ensemble de m équations linéaires comportant n variables inconnues.

- Si $m > n$, le système est surdéterminé (méthode des moindres carrés)
- Si $m < n$ le système est sous-déterminé
- Si $m = n$ le système est déterminé.

Nous aborderons uniquement les systèmes déterminés. De façon générale, la résolution d'un système linéaire consiste à trouver un vecteur $\vec{x} = \langle x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle^T$ solution de :

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \vdots \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{I.2-1}$$

On utilisera la notation matricielle qui est beaucoup pratique et surtout plus compacte et on abandonnera dans la suite de ce paragraphe l'utilisation des flèches au dessus des lettres pour indiquer les vecteurs. Le système **I.2-1** s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{A} \cdot \{x\} = \{b\} \tag{I.2-2}$$

où $\{b\} = \langle b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n \rangle^T$ est le membre de droite. Bien entendu la matrice \mathbf{A} et le vecteur $\{b\}$ sont connus. Il reste à déterminer le vecteur $\{x\}$. Le système **I.2-2** est un système à n équations et n inconnues et il admet donc une solution unique si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- La seule solution de $\mathbf{A} \cdot \{x\} = \{0\}$ est $\{x\} = \{0\}$
- Les vecteurs-lignes ou les vecteurs-colonnes de \mathbf{A} sont indépendants deux à deux.

Ces trois conditions sont équivalentes les unes aux autres.

REMARQUE I.1

Dans la plupart des cas, nous traitons des matrices non singulières ou inversibles, c'est à dire dont la matrice inverse existe.

DEFINITION I.2

Une matrice est dite diagonale si tous les a_{ij} sont nuls pour tout $i \neq j$. Une matrice diagonale a la forme type suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

L'inverse d'une matrice diagonale \mathbf{A} est une matrice diagonale dont les éléments sont les inverses des éléments diagonaux de \mathbf{A} .

DEFINITION I.3

Une matrice est dite triangulaire inférieure (resp. supérieure) si tous les a_{ij} (resp. tous les a_{ij}) sont nuls pour $i < j$. Une matrice triangulaire inférieure a la forme type suivante :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Une matrice triangulaire supérieure est la transposée d'une matrice triangulaire inférieure.

Un système triangulaire inférieur peut être résolu par la méthode de la descente, appelée descente triangulaire :

$$x_1 = b_1 / a_{1,1}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} x_k}{a_{i,i}} \quad \text{I.2-3}$$

Pour un système triangulaire supérieur, la même méthode appliquée de manière rétrograde, appelée aussi remontée triangulaire, on a :

$$x_n = b_n / a_{n,n}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{i,k} x_k}{a_{i,i}} \quad \text{I.2-4}$$

Le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour effectuer la remontée ou la descente triangulaire se répartit comme suit :

- n^2 multiplications/divisions
- $n^2 - n$ additions/soustractions

Lorsque n devient grand, le nombre d'opérations élémentaires est donc de l'ordre de n^2 .

REMARQUE I.2

Les équations I.2-3 et I.2-4 sont valides si les $a_{i,i}$ sont tous non nuls. Dans le cas contraire, la matrice \mathbf{A} n'est pas inversible et, donc, le système I.2-2 n'a pas une solution unique.

On se souvient que le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire (inférieure ou supérieure) est :

$$\det(\mathbf{A}_{\text{triangulaire}}) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Les matrices triangulaires sont primordiales pour la résolution des systèmes linéaires. En général, la résolution des systèmes linéaires se résume à une triangularisation de la matrice \mathbf{A} .

Nous allons voir dans ce chapitre deux types de méthodes de résolution : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

I.3 METHODES DIRECTES

DEFINITION I.4

Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite directe si la solution du système peut être obtenue de manière **exacte** par cette méthode en un nombre fini et prédéterminé d'opérations.

Autrement dit, les méthodes directes permettent d'obtenir le résultat après un nombre connu de multiplications, de divisions, d'additions et de soustractions. On peut alors déduire le temps de calcul nécessaire à la résolution et qui dépend naturellement de la taille n du système. Bien qu'elles

ont l'avantage de fournir la solution exacte en un nombre d'opérations de l'ordre de $n^3/3$, elles ont un coût élevé de stockage en mémoire lorsque le système atteint une taille prodigieuse de plusieurs dizaines de milliers de variables inconnues, qu'on rencontre généralement dans des problèmes de calcul industriel en 3 dimensions.

L'exactitude de la solution fait abstraction des erreurs d'arrondis des systèmes de calcul (à la main, sur une calculette ou par un ordinateur).

1.3.1. Stratégie de base

Le système **1.2-2** peut être résolu si nous connaissons explicitement l'inverse de **A**,

$$\{b\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \{x\} \quad \mathbf{1.3-1}$$

Malheureusement, la recherche de l'inverse d'une matrice est plus coûteuse que la résolution du système lui-même.

Les systèmes les plus simples à résoudre sont les systèmes diagonaux et les systèmes triangulaires. Hélas, on rencontre rarement de tels systèmes.

Si la matrice **A** est diagonale, le système **1.2-2** est très facile à résoudre :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad \mathbf{1.3-2}$$

Si la matrice **A** est triangulaire, le système **1.2-2** peut être résolu par les formules **1.2-3** ou **1.2-4**.

Une stratégie de résolution consiste donc à transformer le système **1.2-2** en un système diagonal ou triangulaire. La recherche d'un système diagonal nécessite le calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice **A** qui est beaucoup plus cher en termes de ressource (temps, espace-mémoire disponible sur ordinateur). Alors on lui préfère les systèmes triangulaires.

Il existe plusieurs méthodes de triangularisation d'un système linéaire, parmi elles, l'orthogonalisation de Schmidt, la décomposition de Cholesky, l'élimination de Gauss, la factorisation de Crout et la triangularisation de Givens et Householder. Nous allons voir dans ce chapitre les trois premières méthodes.

1.3.2. Orthogonalisation de Schmidt

L'orthogonalisation de Schmidt consiste à décomposer la matrice **A** en un produit de deux matrices,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{1.3-3}$$

tel que :

- la matrice **Q** est orthogonale, c'est-à-dire $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$

- la matrice \mathbf{U} est triangulaire supérieure.

En multipliant à gauche l'équation **I.2-2** par \mathbf{Q}^T nous avons :

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \{x\} = \mathbf{Q}^T \cdot \{b\}$$

Et en tenant compte de l'équation **I.3-3** nous obtenons finalement :

$$\mathbf{U} \cdot \{x\} = \{c\} \quad \text{I.3-4}$$

Le système **I.3-4** est triangulaire supérieur qui peut être résolu par les équations **I.2-4**.

Il nous reste maintenant à trouver les éléments des matrices \mathbf{Q} et \mathbf{U} . Pour cela, explicitons le produit de l'équation **I.3-3** :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

Tous les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{A} , c'est-à-dire tous les $a_{i,j}$, s'écrivent comme suit :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^j q_{i,k} \cdot u_{k,j} \quad \text{I.3-5}$$

Et puisque $u_{k,j} = 0$ pour tout $k > j$, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \{a\}_1 &= u_{1,1} \cdot \{q\}_1 \\ \{a\}_2 &= u_{1,2} \cdot \{q\}_1 + u_{2,2} \cdot \{q\}_2 \\ \{a\}_3 &= u_{1,3} \cdot \{q\}_1 + u_{2,3} \cdot \{q\}_2 + u_{3,3} \cdot \{q\}_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \{a\}_n &= u_{1,n} \cdot \{q\}_1 + u_{2,n} \cdot \{q\}_2 + u_{3,n} \cdot \{q\}_3 + \cdots + u_{n,n} \cdot \{q\}_n \end{aligned} \quad \text{I.3-6}$$

où $\{a\}_i$ et $\{q\}_i$ sont les $i^{\text{ème}}$ vecteurs-colonnes respectivement de \mathbf{A} et \mathbf{Q} . La matrice \mathbf{Q} est orthogonale et ses vecteurs-colonnes sont orthonormés, ce que nous pouvons traduire par :

$$\begin{aligned} \|\{q\}_i\| &= 1 \\ \{q\}_i^T \cdot \{q\}_j &= \delta_{i,j} \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{I.3-7}$$

$\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Nous pouvons déduire les éléments de la matrice \mathbf{Q} et \mathbf{U} comme suit :

- En considérant la 1^{ère} équation de **I.3-6** et en tenant compte de la condition **I.3-7** de normalité des vecteurs-colonnes de la matrice \mathbf{Q} , nous pouvons écrire :

$$\|\{a\}_1\| = \|u_{1,1} \cdot \{q\}_1\| = |u_{1,1}|$$

Le choix du signe de $u_{1,1}$ est arbitraire. Les composantes du vecteur-colonne $\{q\}_1$ sont obtenues par :

$$\{q\}_1 = \frac{\{a\}_1}{u_{1,1}}$$

- en multipliant les équations **I.3.6** par $\{q\}_1$ et en tenant compte toujours de **I.3.7**, nous obtenons :

$$\{q\}_1^T \cdot \{a\}_i = u_{1,i}$$

Les éléments $u_{1,i}$ de la matrice **U** sont obtenus en effectuant le produit scalaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur-colonne de **A** par le vecteur-colonne $\{q\}_1$.

- L'étape suivante consiste à calculer le vecteur-colonne $\{q\}_2$. Alors on considère d'abord la 2^{ème} équation des équations **I.3-6** et l'on a :

$$u_{2,2} \cdot \{q\}_2 = \{a\}_2 - u_{1,2} \cdot \{q\}_1$$

Ce qui donne,

$$\|u_{2,2} \cdot \{q\}_2\| = \|\{a\}_2 - u_{1,2} \cdot \{q\}_1\| = |u_{2,2}|$$

On en déduit $\{q\}_2$ par :

$$\{q\}_2 = (\{a\}_2 - u_{1,2} \cdot \{q\}_1) / u_{2,2}$$

Nous continuons le même procédé de calcul jusqu'à trouver $u_{n,n}$.

L'algorithme de Schmidt peut être défini comme suit :

ALGORITHME I.1

1. Pour $i=1$, faire $u_{1,1} = \pm \|\{a\}_1\|$ et $\{q\}_1 = \{a\}_1 / u_{1,1}$
2. Pour tout $i=2, \dots, n$ calculer $u_{i,i} = \pm \left\| \{a\}_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{j,i} \cdot \{q\}_j \right\|$
3. Pour tout $i=2, \dots, n$ calculer $\{q\}_i = \left(\{a\}_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{j,i} \cdot \{q\}_j \right) / u_{i,i}$
4. Pour tout $i,r=2, \dots, n$ calculer $u_{i,r} = \{q\}_i^T \cdot \{a\}_r$

EXEMPLE I.1 :

Résoudre par la méthode de Schmidt le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{Bmatrix}$$

Nous avons $u_{1,1} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{104} = 10,19804$

Nous déduisons le vecteur-colonne :

$$\{q\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,19612 \\ 0,58835 \\ 0,78446 \end{Bmatrix}, \text{ ce qui donne } u_{1,2} = 6,47182 \text{ et } u_{1,3} = 1,17670$$

$$u_{2,2} \cdot \{q\}_2 = \{a\}_2 - u_{1,2} \cdot \{q\}_1 = \begin{Bmatrix} -0,26925 \\ 0,19230 \\ -0,07688 \end{Bmatrix}, \text{ ce qui donne } u_{2,2} = 0,33968 \text{ et } \{q\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,79265 \\ 0,56611 \\ -0,22633 \end{Bmatrix}$$

$$u_{2,3} = -1,81163.$$

$$\text{Et enfin, } u_{3,3} \cdot \{q\}_3 = \{a\}_3 - u_{1,3} \cdot \{q\}_1 - u_{2,3} \cdot \{q\}_2 \text{ ce qui donne } |u_{3,3}| = \left\| \begin{Bmatrix} 0,33324 \\ 0,33327 \\ -0,33310 \end{Bmatrix} \right\| \text{ et l'on}$$

$$\text{dédit } u_{3,3} = 0,57713 \text{ et } \{q\}_3 = \begin{Bmatrix} 0,57741 \\ 0,57747 \\ -0,57717 \end{Bmatrix}$$

Le système triangulaire qu'on obtient après l'orthogonalisation de Schmidt est :

$$\begin{pmatrix} 10,19804 & 6,47182 & 1,17670 \\ 0 & 0,33968 & -1,81163 \\ 0 & 0 & 0,57713 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,19612 & -0,79265 & 0,57741 \\ 0,58835 & 0,56611 & 0,57747 \\ 0,78446 & -0,22633 & -0,57717 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 44,71440 \\ -1,12919 \\ 0,56882 \end{Bmatrix}$$

La solution, après avoir effectué la remontée triangulaire est $x_3 = 0,98560$, $x_2 = 1,93223$ et $x_1 = 3,04466$.

Et la solution exacte est : $x_3 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_1 = 3$

REMARQUE I.3

L'orthogonalisation de Schmidt est sensible aux erreurs d'arrondis surtout lorsque le système est de très grande taille. Les vecteurs-colonnes de Q s'écartent alors de leur orthogonalité.

I.3.3. Décomposition de Cholesky : matrice symétriques

La décomposition de Cholesky s'applique aux matrices symétriques définies positives.

DEFINITION I.5 :

Une matrice A de dimension n est dite définie strictement positive lorsqu'elle satisfait à la condition suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} > 0$$

Si \mathbf{A} est une matrice définie strictement positive, nous pouvons lui appliquer la décomposition de Cholesky donnée par :

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \quad \mathbf{I.3-8}$$

avec \mathbf{L} une matrice triangulaire inférieure et \mathbf{L}^T sa transposée. Cette décomposition impose une autre contrainte à la matrice \mathbf{A} : celle d'être symétrique.

A partir de l'expression **I.3-8**, nous pouvons déterminer tous les éléments $l_{i,j}$. Il suffit d'écrire explicitement le produit de \mathbf{L} par \mathbf{L}^T :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & \cdots & l_{n,1} \\ 0 & l_{2,2} & \cdots & l_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour trouver les éléments de la 1^{ère} colonne de \mathbf{L} ,

- Multiplier la 1^{ère} ligne de \mathbf{L} par la 1^{ère} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{1,1} = l_{1,1} \cdot l_{1,1} \Rightarrow l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

- Multiplier la 1^{ère} ligne de \mathbf{L} par la j ^{ème} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{1,j} = l_{1,1} \cdot l_{j,1} \Rightarrow l_{j,1} = \frac{a_{1,j}}{l_{1,1}}$$

Pour trouver les éléments de la 2^{ème} colonne de \mathbf{L} ,

- Multiplier la 2^{ème} ligne de \mathbf{L} par la 2^{ème} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{2,2} = l_{2,1} \cdot l_{2,1} + l_{2,2} \cdot l_{2,2} \Rightarrow l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2}$$

- Multiplier la 2^{ème} ligne de \mathbf{L} par la j ^{ème} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{2,j} = l_{2,1} \cdot l_{j,1} + l_{2,2} \cdot l_{j,2} \Rightarrow l_{j,2} = \frac{a_{2,j} - l_{2,1} \cdot l_{j,1}}{l_{2,2}} \quad j \geq 2$$

Pour trouver les éléments de la i ^{ème} colonne de \mathbf{L} ,

- Multiplier la i ^{ème} ligne de \mathbf{L} par la i ^{ème} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{i,i} = \sum_{k=1}^i l_{i,k} \cdot l_{i,k} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{i,k} + l_{i,i} \cdot l_{i,i} \Rightarrow l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}$$

- Multiplier la i ^{ème} ligne de \mathbf{L} par la j ^{ème} colonne de \mathbf{L}^T :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^i l_{i,k} \cdot l_{j,k} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k} + l_{i,i} \cdot l_{j,i} \Rightarrow l_{j,i} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k}}{l_{i,i}} \quad j \geq i$$

Une fois la matrice \mathbf{A} décomposée, le système **I.2-2** devient :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \{x\} = \{b\} \quad \mathbf{I.3-9}$$

Nous devons d'abord résoudre le système triangulaire inférieur par la méthode de la descente explicite par les équations **I.2-3** pour obtenir $\{y\}$

$$\mathbf{L} \cdot \{y\} = \{b\} \quad \text{I.3-10}$$

Ensuite résoudre le système triangulaire supérieur par la remontée triangulaire explicite par les équations **I.2-4**.

$$\mathbf{L}^T \cdot \{x\} = \{y\} \quad \text{I.3-11}$$

ALGORITHME I.2

1. Pour $i=1$, faire $l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$
2. Pour tout $j=2, \dots, n$ calculer $l_{j,1} = \frac{a_{1,j}}{l_{1,1}}$
3. Pour tout $i=2, \dots, n$ calculer $l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2}$
4. Pour tout $j \geq i$ calculer $l_{j,i} = \frac{a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k}}{l_{i,i}}$
5. Résoudre par la descente triangulaire, le système $\mathbf{L} \cdot \{y\} = \{b\}$
6. Résoudre par la remontée triangulaire, le système $\mathbf{L}^T \cdot \{x\} = \{y\}$

EXEMPLE I.2

Soit à résoudre par la méthode de Cholesky le système d'équation suivant :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons $l_{1,1} = \sqrt{5} = 2,23607$ et nous déduisons :

$$l_{2,1} = \frac{a_{1,2}}{l_{1,1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,89443 \quad ; \quad l_{3,1} = \frac{a_{1,3}}{l_{1,1}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -0,89443$$

Le calcul de la 2^{ème} colonne de la matrice \mathbf{L} se fait par :

$$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{10 - 0,89443^2} = 3,03315$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{2,3} - l_{2,1} \cdot l_{3,1}}{l_{2,2}} = \frac{3 - 0,89443 \cdot (-0,89443)}{3,03315} = 1,25282$$

$$l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - (l_{3,1}^2 + l_{3,2}^2)} = \sqrt{4 - (-0,89443)^2 - (1,25282)^2} = 1,27689$$

Nous obtenons la matrice \mathbf{L} suivante :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2,23607 & 0 & 0 \\ 0,89443 & 3,03315 & 0 \\ -0,89443 & 1,25282 & 1,27689 \end{pmatrix}$$

En résolvant le système triangulaire suivant

$$\begin{pmatrix} 2,23607 & 0 & 0 \\ 0,89443 & 3,03315 & 0 \\ -0,89443 & 1,25282 & 1,27689 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

par la méthode de la descente, nous obtenons $\{y\} = \langle -0,44721 \quad -0,52750 \quad 2,55376 \rangle^T$

Ensuite en résolvant le système

$$\begin{pmatrix} 2,23607 & 0,89443 & -0,89443 \\ 0 & 3,03315 & 1,25282 \\ 0 & 0 & 1,27689 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,44721 \\ -0,52750 \\ 2,55376 \end{pmatrix}$$

Par la méthode de la remontée nous obtenons $\{x\} = \langle 0,99999 \quad -0,99999 \quad 1,99998 \rangle^T$

1.3.4. Élimination de Gauss et notion de pivot

Cette méthode est la plus utilisée car elle ne nécessite pas que la matrice \mathbf{A} soit symétrique ou définie positive. Il faut seulement qu'elle soit non singulière.

L'élimination de Gauss consiste à transformer la matrice \mathbf{A} en une triangulaire supérieure, c'est-à-dire, à éliminer tout les termes sous la diagonale de la matrice \mathbf{A} . Chaque étape de la triangularisation a comme résultat d'éliminer successivement une inconnue x_s , $s = 1, 2, \dots, n$ dans les équations de rang $r > s$ jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule inconnue à la dernière équation du système. Il revient donc à éliminer tout les termes sous la diagonale de la matrice \mathbf{A} .

Avant de considérer un exemple, introduisons la matrice augmentée.

DEFINITION I.6 :

La matrice augmentée d'un système linéaire est la matrice de dimension $n \times (n+1)$ que l'on obtient en ajoutant le membre de droite $\{b\}$ à la matrice \mathbf{A} , c'est-à-dire :

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right) \quad \mathbf{I.3-12}$$

Soit le système **I.3-12**. La 1^{ère} étape consiste à isoler l'inconnue x_1 de la 1^{ère} équation du système.

$$a_{1,1}x_1 = b_1 - a_{1,2}x_2 - \dots - a_{1,n}x_n$$

Ensuite, substituer cette inconnue x_1 dans toutes les équations qui suivent. On obtient ainsi une matrice augmentée notée $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}} & \dots & a_{i,n} - \frac{a_{i,1}a_{1,n}}{a_{1,1}} & b_i - \frac{a_{i,1}b_1}{a_{1,1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,j} - \frac{a_{n,1}a_{1,j}}{a_{1,1}} & \dots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1}a_{1,n}}{a_{1,1}} & b_n - \frac{a_{n,1}b_1}{a_{1,1}} \end{array} \right)$$

Cette matrice $\mathbf{A}^{(2)}$ possède des zéro à la 1^{ère} colonne sous l'élément diagonal $a_{1,1}$ car l'inconnue x_1 ne figure pas dans les équations de rang supérieur à 1.

A la 2^{ème} étape on isole l'inconnue x_2 de la 2^{ème} équation et on la substitue dans toutes les équations qui suivent. On obtient ainsi une autre matrice notée $\mathbf{A}^{(3)}$ et ainsi de suite. A la k^{ème} étape nous obtenons la matrice $\mathbf{A}^{(k)}$ dont les éléments sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(k+1)} &= a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} a_{k,j}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} & i, j = k+1 \dots n \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \end{aligned} \quad \mathbf{I.3-13}$$

DEFINITION I.7 :

L'élément $a_{k,k}$ est appelé pivot et il ne doit en aucun cas être nul.

Noter que le symbole supérieur (k) de la matrice \mathbf{A} représente le nombre d'éliminations.

L'algorithme ainsi construit peut ne pas fonctionner si en cours d'élimination, le pivot $a_{k,k}$ est nul. En pratique on effectue une permutation de la ligne (ou de la colonne) de rang k avec une ligne (ou colonne) de rang $r > k$. La permutation des colonnes induit la permutation du rang des inconnues.

ALGORITHME I.3

1. Pour $k=1$, faire

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j} - \frac{a_{i,1}a_{1,j}}{a_{1,1}} \quad i, j=2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i - \frac{a_{i,1}b_1}{a_{1,1}}$$
2. pour $k=2, \dots, n-1$, faire

$$a_{i,j}^{(k+1)} = a_{i,j}^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} a_{k,j}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}} \quad i, j=k+1, \dots, n$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{i,k}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$$
3. Résoudre par la remontée triangulaire le système obtenu.

EXEMPLE I.3 : Recherche d'un pivot non nul

Soit la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

Le premier pivot étant nul, permutons la 1^{ère} et la 2^{ème} ligne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 8 & 6 & 0 & 12 \end{array} \right)$$

Cette matrice n'est plus symétrique, en plus on ne peut pas permuter la 1^{ère} et la 2^{ème} colonnes car ceci redonnera un pivot nul. Après élimination nous obtenons le système triangulaire suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 8 & 0 & -24 & 1 \end{array} \right)$$

EXEMPLE I.4

Considérons l'exemple suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array} \right]$$

A la 1^{ère} étape nous calculons tous les éléments de la 2^{ème} et 3^{ème} lignes, on obtient alors :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array} \right]$$

A la 2^{ème} étape nous obtenons

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

A l'issue de cette dernière étape, nous effectuons la remontée triangulaire donnée par les équations I.2-3.

EXEMPLE I.5

Soit le système linéaire représenté par la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 5 & -2 \end{array} \right)$$

A la 1^{ère} étape de la triangularisation de Gauss nous obtenons :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \end{array} \right)$$

A l'issue de cette 1^{ère} étape, le processus de triangularisation ne peut plus continuer car le nouveau pivot est nul ($a_{2,2}=0$). Toutefois, nous pouvons permuter la ligne (resp. la colonne) 2 avec une ligne (resp. une colonne) dont le rang est supérieur à 2. Pour permuter les lignes, le seul choix ici est celui des lignes 2 et 3 et on obtient une matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 \end{array} \right)$$

Cette permutation rend l'étape 2 non nécessaire car tous les éléments sous le pivot $a_{2,2}$ sont nuls. On continue alors la triangularisation à l'étape 3 avec un pivot $a_{3,3}$ non nul et l'on obtient la matrice augmentée suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right)$$

La solution est finalement $\{x\} = \langle 1 \quad -1 \quad 2 \quad -2 \rangle^T$

La permutation des lignes ne permute pas les éléments du vecteur $\{x\}$ tout en permutant ceux de $\{b\}$. En revanche, celle des colonnes ne permute pas les éléments de $\{b\}$ mais permute ceux de $\{x\}$.

REMARQUE I.4

A chaque permutation de lignes ou de colonnes, le déterminant de la matrice change de signe.

I.4 METHODES INDIRECTES

DEFINITION I.8

Une méthode est dite indirecte si la solution peut être **approchée** de manière itérative en un nombre **indéterminé** mais limité d'opérations.

Les méthodes indirectes s'opposent aux méthodes directes. Elles sont des méthodes itératives dont la solution est approchée avec une certaine précision. Le temps de calcul est indéterminé ainsi que le nombre d'opérations élémentaires.

Les méthodes itératives consistent à transformer le système **I.2-2** en une décomposition

$$\{x\} = \mathbf{M} \cdot \{x\} + \{c\} \quad \mathbf{I.4-1}$$

Le principe général des méthodes itératives est le suivant : Le vecteur-solution du système est obtenu comme limite (quand elle existe) d'une suite itérative de vecteurs définie par une récurrence linéaire de la forme :

$$\begin{aligned} \{x\}^{(0)} & \text{ donné} \\ \{x\}^{(k+1)} & = \mathbf{M} \cdot \{x\}^{(k)} + \{c\} \end{aligned} \quad \mathbf{I.4-2}$$

Et partant d'une estimation $x^{(0)}$ on la porte au second membre pour calculer $x^{(1)}$ et ainsi de suite jusqu'à convergence.

I.4.1. Construction de la matrice d'itérations

La façon la plus simple d'obtenir \mathbf{M} est de décomposer \mathbf{A} en deux matrices :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

Et le système **I.2-2** devient :

$$\mathbf{A}_1 \cdot \{x\} = -\mathbf{A}_2 \cdot \{x\} + \{b\}$$

À condition que \mathbf{A}_1 soit régulière et facilement inversible :

$$\{x\} = -\mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \{x\} + \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \{b\}$$

Cette équation est bien de la forme **I.4-1**.

Le système **I.4-1** doit bien sûr être équivalent au système **I.2-2**. Les équations **I.4-2** s'inspirent des méthodes de point fixe. La construction de la matrice d'itération doit répondre à la problématique des méthodes itératives :

- i. Comment obtenir la matrice \mathbf{M} pour que les équations **I.2-2** et **I.4-1** soient équivalents ?
- ii. Le processus itératif converge-t-il ? si oui à quelle vitesse ?
- iii. Peut-on accélérer la convergence dans le cas d'un processus convergent ?

I.4.2. Itération de Jacobi

La manière la plus simple de décomposer \mathbf{A} est de l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}$$

\mathbf{D} : matrice diagonale constituée des éléments diagonaux de \mathbf{A} .

\mathbf{L} : matrice triangulaire inférieure de \mathbf{A} comportant des zéros sur la diagonale

\mathbf{U} : matrice triangulaire supérieure de \mathbf{A} comportant des zéros sur la diagonale.

La méthode de Jacobi consiste à écrire la forme itérative comme suit :

$$\{x\}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \cdot \{x\}_k + \mathbf{D}^{-1} \cdot \{b\} \quad \mathbf{I.4-3}$$

La matrice \mathbf{D} étant diagonale, elle est facilement inversible. En notation indicielle, nous pouvons écrire l'équation **I.4-3** comme suit :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} - b_i \right) \quad \mathbf{I.4-4}$$

1.4.3. Itération de Gauss-Seidel

Nous pouvons améliorer la convergence de l'itération de Jacobi en injectant les itérés $x_i^{(k+1)}$ disponibles pour calculer les itérés de rang supérieur à i .

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \cdot x_j^{(k)} - b_i \right) \quad \mathbf{I.4-5}$$

En notation matricielle, l'équation **I.4-5** s'écrit :

$$\{x\}_{k+1} = -\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{U} \cdot \{x\}_k + \mathbf{L} \cdot \{x\}_{k+1} - \{b\}) \quad \mathbf{I.4-6}$$

Habituellement, mais pas dans tout les cas, l'itération de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi. La condition de convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel est :

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \quad i, j = 1, \dots, n \quad \mathbf{I.4-7}$$

L'expression **I.4-7** s'appelle la condition d'une matrice à diagonale strictement dominante. La matrice d'itération $\mathbf{M} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{U})$ possède alors une norme $\|\mathbf{M}\|_\infty < 1$. La méthode converge quel que soit le terme initial $\{x\}^{(0)}$. Toutefois, la méthode de Gauss-Seidel converge également si la matrice \mathbf{A} est symétrique et définie positive (*définition I.5*).

EXEMPLE I.6

Soit à résoudre le système suivant par les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nous prenons comme vecteur de départ le vecteur $\{x\}^{(0)} = \langle 0 \ 0 \ 0 \rangle^T$.

Les résultats des itérations sont donnés dans les tableaux suivants :

Itérations de Jacobi			
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1,666670	1,500000	1,500000
2	0,666667	0,694444	0,708333
3	1,199070	1,159720	1,159720
4	0,893519	0,907022	0,910301
5	1,060890	1,050440	1,049860
6	0,966564	0,971392	0,972166
7	1,018810	1,015780	1,015510
8	0,989568	0,991143	0,991350
9	1,005840	1,004920	1,004820
10	0,996753	0,997251	0,997311
1	1,001810	1,001530	1,001500
2	0,998990	0,999146	0,999164
13	1,000560	1,000480	1,000470
14	0,999686	0,999735	0,999740
15	1,000180	1,000150	1,000140
16	0,999902	0,999918	0,999919
17	1,000050	1,000050	1,000050
18	0,999970	0,999974	0,999975
19	1,000020	1,000010	1,000010
20	0,999991	0,999992	0,999992

Itérations de Gauss-Seidel			
k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1,66667	0,944444	0,847222
2	1,06944	1,00231	0,98206
3	1,00521	1,00125	0,998384
4	1,00012	1,00023	0,999913
5	0,999953	1,00003	1,000000
6	0,999988	1,000000	1,000000
7	0,999998	1,000000	1,000000
8	1,000000	1,000000	1,000000

La convergence est très lente dans la méthode de Jacobi et le nombre d'itérations dans la méthode de Gauss-Seidel est donc réduit de manière significative.

I.5 CONDITIONNEMENT D'UN SYSTEME

DEFINITION I.9

On appelle norme matricielle, l'application $\|\cdot\|$ qui associe à toute matrice carrée dans \mathbb{R}^n un nombre réel positif :

$$\|\cdot\|: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{I.5-1}$$

La norme $\|\cdot\|$ vérifie toujours :

- $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha \cdot \mathbf{A}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{A}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ (inégalité triangulaire)
- $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|, \forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

Nous proposons dans ce paragraphe une norme matricielle subordonnée à une norme vectorielle définie par :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{I.5-2}$$

REMARQUES 1.5

1. La norme d'une matrice vérifie toujours $\|\mathbf{I}\| = 1$, \mathbf{I} étant la matrice identité.
2. La norme d'une matrice \mathbf{A} est égale à la norme de sa transposée.
3. La norme d'une matrice orthogonale est égale à 1.

Soit \mathbf{A} une matrice carrée d'ordre n inversible et $\{b\}$ un vecteur de \mathbb{R}^n . On considère le système linéaire **1.2-2** de solution exacte et unique :

$$\{x\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \{b\} \quad \mathbf{1.5-3}$$

Nous supposons dans un premier cas une perturbation $\{\delta b\}$ du second membre $\{b\}$. Soit donc $\{x\} + \{\delta x\}$ la solution perturbée :

$$\{x\} + \{\delta x\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \{b\} + \mathbf{A}^{-1} \cdot \{\delta b\} \quad \mathbf{1.5-4}$$

Comme $\{x\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \{b\}$, la relation ci-dessus implique :

$$\{\delta x\} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \{\delta b\} \quad \mathbf{1.5-5}$$

en utilisant la norme $\|\cdot\|$, on écrit l'inégalité suivante :

$$\|\{\delta x\}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\{\delta b\}\| \quad \mathbf{1.5-6}$$

D'autre part, nous avons aussi :

$$\|\{b\}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\{x\}\| \quad \mathbf{1.5-7}$$

En multipliant les deux relations précédentes membre à membre (la norme $\|\cdot\|$ est un nombre positif), nous obtenons :

$$\frac{\|\{\delta x\}\|}{\|\{x\}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\{\delta b\}\|}{\|\{b\}\|} \quad \mathbf{1.5-8}$$

Cette expression majore les perturbations relatives de la solution par un facteur proportionnel à la perturbation relative du second membre.

Supposons à présent une perturbation $\delta\mathbf{A}$ de la matrice \mathbf{A} et laissons fixe le second membre $\{b\}$. Soit $\{x\} + \{\delta x\}$ la solution exacte perturbée. Nous pouvons écrire :

$$(\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}) \cdot (\{x\} + \{\delta x\}) = \{b\} \quad \mathbf{1.5-9}$$

En tenant compte de **1.2-2** et en identifiant $\{x_p\} = \{x\} + \{\delta x\}$, le terme $\{\delta x\}$ se déduit par l'expression :

$$\{\delta x\} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \delta\mathbf{A} \cdot \{x_p\} \quad \mathbf{1.5-10}$$

En utilisant la norme $\|\cdot\|$, nous déduisons l'inégalité :

$$\frac{\|\{\delta x\}\|}{\|\{x_p\}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad \text{I.5-11}$$

Là encore, nous avons une expression qui majore les perturbations relatives de la solution par un facteur proportionnel à la perturbation relative de la matrice.

La quantité $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$ se retrouve dans les expressions I.5-8 et I.5-11. Elle s'appelle conditionnement de \mathbf{A} et est notée :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad \text{I.5-12}$$

Par définition, la norme de la matrice identité \mathbf{I} est égale à 1. Nous avons donc le résultat important suivant :

$$\mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \|\mathbf{I}\| = 1 \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) \geq 1 \quad \text{I.5-13}$$

On dit que le système est bien conditionné si le conditionnement de sa matrice est proche de 1. Plus $\text{cond}(\mathbf{A})$ est grand et plus le système est mal conditionné.

EXEMPLE I.7

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

La solution à ce système est $\{x\} = \langle 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle^T$. Ajoutons une perturbation sur le vecteur

$\{\delta b\} = \langle 0,01 \ -0,01 \ 0,01 \ -0,01 \rangle^T$. La perturbation sur le second membre est de $\frac{\|\{\delta b\}\|}{\|\{b\}\|} = 3,319 \times 10^{-4}$.

La solution perturbée à ce nouveau système est $\{x_p\} = \langle 1,82 \ 0,36 \ 1,35 \ 0,79 \rangle^T$ et est très

différente de $\{x\}$. La perturbation sur la solution est de $\frac{\|\{\delta x\}\|}{\|\{x\}\|} = 0,8198$. La perturbation sur la

solution est amplifiée d'un facteur de 2460.

Introduisons à présent la perturbation $\delta \mathbf{A}$ sur la matrice \mathbf{A} :

$$\delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}$$

La solution perturbée à ce nouveau système est $\{x_p\} = \langle -81 \ 137 \ -34 \ 22 \rangle^T$ et est encore très différente de $\{x\}$. La perturbation sur la solution est de $\frac{\|\{\delta x\}\|}{\|\{x\}\|} = 81,98$. Bien que l'erreur relative sur \mathbf{A} , qui vaut $\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} = 0,0076$, est petite, la perturbation sur la solution est amplifiée d'un facteur de l'ordre de 10^4 .

La notion de conditionnement d'un système linéaire est donc une notion importante car elle nous renseigne sur la stabilité des systèmes physiques en plus de nous donner le caractère numérique de la solution.

Chapitre II FORMULATION INTEGRALE

Dans ce chapitre, il est recommandé aux lecteurs, dans un premier temps, de faire des rappels sur les polynômes d'interpolation et les approximations. Les ouvrages [D1], [F1], [K2], [N1] et [S1] sont liés aux aspects algébriques de la méthode intégrale qui fera l'objet de cette partie de l'ouvrage.

II.1 INTRODUCTION

Le comportement d'un système physique continu est généralement représenté par un ensemble d'équations différentielles aux dérivées partielles associé à des conditions aux frontières du domaine considéré. La résolution numérique nécessite sa transformation en un système discret équivalent dont le comportement est régi par un ensemble d'équations algébriques qu'on peut résoudre par des méthodes numériques largement étudiées (systèmes linéaires d'équations algébriques, systèmes aux valeurs propres...).

Nous représentons le système d'équations différentielles par un opérateur $\mathcal{L}()$ agissant sur une variable (qui peut être une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle) sous forme d'une équation générale :

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad \text{II.1-1}$$

$\mathcal{L}()$ est un opérateur différentiel qui est en général scalaire ou vectoriel et \mathbf{u} est une fonction des variables spatiales (x,y,z) définie sur le domaine Ω , continue et dérivable autant de fois que l'opérateur $\mathcal{L}()$ l'exige. Elle satisfait aussi à des conditions de frontière $\partial\Omega$ qui délimite le domaine Ω . Ces conditions peuvent être de natures différentes appliquées sur des morceaux différents de la frontière. Elles sont en général écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}) + \mathbf{q} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^1 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega^2 \end{aligned} \quad \text{II.1-2}$$

$\partial\Omega^1$ et $\partial\Omega^2$ sont des parties distinctes de la frontière $\partial\Omega$, $\mathcal{B}()$ est un opérateur différentiel appliqué à la fonction \mathbf{u} évaluée à la frontière et \mathbf{q} une charge de surface agissant sur la frontière $\partial\Omega^1$.

Un exemple de ces équations différentielles aux dérivées partielles, celles qui régissent l'équilibre statique d'un solide déformable avec des conditions de frontières en force et en déplacement (Fig. II-1).

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\sigma} + \vec{\mathbf{f}} &= \vec{\mathbf{0}} \\ \sigma_{i,j} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{i,j} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{k,k} \delta_{i,j} \\ \varepsilon_{i,j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad \Omega$$

Figure II-1 : Equilibre statique d'un solide déformable

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \text{sur } \Omega$$

L'équation ci-dessus associée à des conditions de forces et de déplacements à la frontière $\partial\Omega$ forme un système d'équations différentielles complet. La solution est un champ vectoriel de déplacement \mathbf{u} relié géométriquement au tenseur $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de déformation. Ce champ tensoriel de déformation est relié au champ de contrainte via une loi de comportement dite élastique linéaire.

Nous allons d'abord voir dans cet ouvrage, les exemples de structures discrètes et les équations régissant leur comportement. Nous allons ensuite décrire les systèmes continus et définir leurs différentes formes intégrales ainsi que les procédés de discrétisations algébriques et les méthodes de résolutions numériques.

II.2 STRUCTURES DISCRETES

Avant de commencer à décrire la méthode des éléments finis, il y a lieu de modéliser quelques structures discrètes. Une structure discrète est régie par un nombre fini de variables reliées entre elles par des lois physiques dans un ensemble d'équations algébriques. Ces équations découlent d'un assemblage d'équations élémentaires pour former un système algébrique généralisé.

II.2.1. Exemple de réseau électrique

II.2.1.a. Loi de comportement

Une démarche pour construire le système algébrique régissant un réseau électrique et d'écrire la loi d'Ohm qui relie linéairement la chute de potentiel électrique ΔV entre 2 nœuds i et j d'un « élément » de résistance, au courant j^e qui le traverse. Il s'agit donc d'une écriture locale de la loi de comportement.

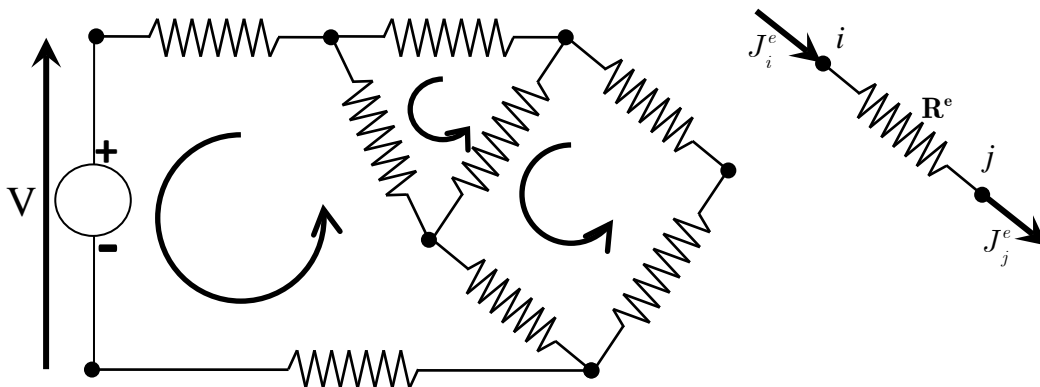


Figure II-2 : Réseau électrique

$$\begin{aligned} j_i^e &= \frac{1}{R^e} (v_i - v_j) \\ j_j^e &= \frac{1}{R^e} (v_j - v_i) \end{aligned} \quad \text{II.2-1}$$

L'écriture matricielle

$$\begin{Bmatrix} j_i^e \\ j_j^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{R^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix}$$

peut s'écrire sous forme condensée :

$$\mathbf{J}^e = \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{V}^e \quad \text{II.2-2}$$

L'écriture globale des équations du réseau suppose la continuité des potentiels aux nœuds.

Nous devons en plus imposer l'équilibre des courants qui traverse ce nœud.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\mathbf{e}} K_{ij}^e \cdot v_j = p_i \quad \text{II.2-3}$$

Où p_i est l'apport externe de courant au nœud i . La sommation sur l'indice \mathbf{e} concerne tous les éléments qui partagent le nœud i . L'expression ci-dessus peut se simplifier comme suit :

$$p_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot v_j \quad i = 1, \dots, n \quad \text{II.2-4}$$

où

$$K_{ij} = \sum_{\mathbf{e}} K_{ij}^e \quad \text{II.2-5}$$

Sous forme matricielle, nous écrivons :

$$\mathbf{K} \cdot \{\mathbf{V}_n\} = \{\mathbf{P}_n\} \quad \text{II.2-6}$$

II.2.1.b. Résolution

Le système algébrique ci-dessus ne peut être résolu qu'à une constante additive près. Nous devons donc fixer les valeurs des potentiels au niveau du générateur de potentiel \mathbf{V} et réduire le système. La construction du vecteur $\{\mathbf{P}_n\}$ s'effectue en annulant toutes ses composantes sauf celles liées aux nœuds du générateur. Soient α et β les numéros de ces nœuds, nous écrivons alors le vecteur $\{\mathbf{P}_n\}$ comme suit :

$$\{\mathbf{P}_n\} = \langle \dots \quad P_\alpha \quad \dots \quad P_\beta \quad \dots \rangle^T$$

tel que

$$\begin{bmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & K_{\alpha\alpha} & \dots & K_{\alpha\beta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & K_{\beta\alpha} & \dots & K_{\beta\beta} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} V_\alpha = 0 \\ \vdots \\ V_\beta = \mathbf{V} \\ \vdots \end{cases} = \begin{cases} p_\alpha \\ \vdots \\ p_\beta \\ \vdots \end{cases}$$

En séparant les inconnus de l'équation, nous écrivons :

$$\begin{bmatrix} \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{cases} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{cases} = \begin{cases} \dots - K_{i\alpha} V_\alpha - K_{i\beta} V_\beta \\ p_\alpha - K_{\alpha\alpha} V_\alpha - K_{\alpha\beta} V_\beta \\ \dots - K_{j\alpha} V_\alpha - K_{j\beta} V_\beta \\ p_\beta - K_{\beta\alpha} V_\alpha - K_{\beta\beta} V_\beta \\ \dots - K_{k\alpha} V_\alpha - K_{k\beta} V_\beta \end{cases}$$

Sous forme indicielle, nous pouvons écrire le système comme suit :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha \neq \beta}}^n K_{ij} V_j = P_i - K_{i\alpha} V_\alpha - K_{i\beta} V_\beta = \tilde{P}_i \quad i = 1, \dots, n \quad \text{II.2-7}$$

En supprimant les équations $i = \alpha$ et $i = \beta$, nous obtenons un système algébrique linéaire où seules les variables inconnues V_i apparaissent ; les inconnues p_α et p_β n'y sont pas incluses.

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \{\tilde{\mathbf{V}}_n\} = \{\tilde{\mathbf{P}}_n\}$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ est obtenue en supprimant les lignes et colonnes α et β de la matrice \mathbf{K} . La première étape de résolution consiste d'abord à inverser la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ pour trouver les composantes du vecteur $\{\tilde{\mathbf{V}}_n\}$, ensuite remonter jusqu'aux valeurs de p_α et p_β de l'équation II.2-6.

Cette discrétisation peut aussi s'appliquer sur un réseau de distribution d'eau potable. Il suffit de remplacer les équations reliant la chute de potentiel hydrique au débit d'écoulement dans un « élément » de conduite, par l'équation locale :

$$Q^e = c^e (h_i - h_j)$$

Un élément de conduite est un tuyau de caractéristiques géométriques définies (longueur, section, rugosité) dont dépend en partie le coefficient c^e . Ce paramètre est aussi fonction du coefficient de perte de charge linéique λ qui dépend de la vitesse d'écoulement dans la conduite et la matrice \mathbf{K} est déterminée en fonction de ce paramètre. Le système II.2-6 équivalent est donc non linéaire et sa résolution nécessite l'utilisation des processus itératifs jusqu'à convergence.

L'introduction des pertes de charges singulières (changement brusque de section d'une conduite ou existence de coudes) dans les équations rend l'obtention de la solution très complexe car dans ce cas les potentiels hydrauliques ne sont pas continus.

II.2.2. Exemple de structure en mécanique

Les structures mécaniques les plus complexes ne peuvent être comprises en une seule opération. Leur subdivision en composants élémentaires où « éléments » dont le comportement peut facilement être appréhendé, et leur assemblage pour la reconstruction du système initial, est un moyen naturel d'étude utilisé en général par les ingénieurs et les scientifiques.

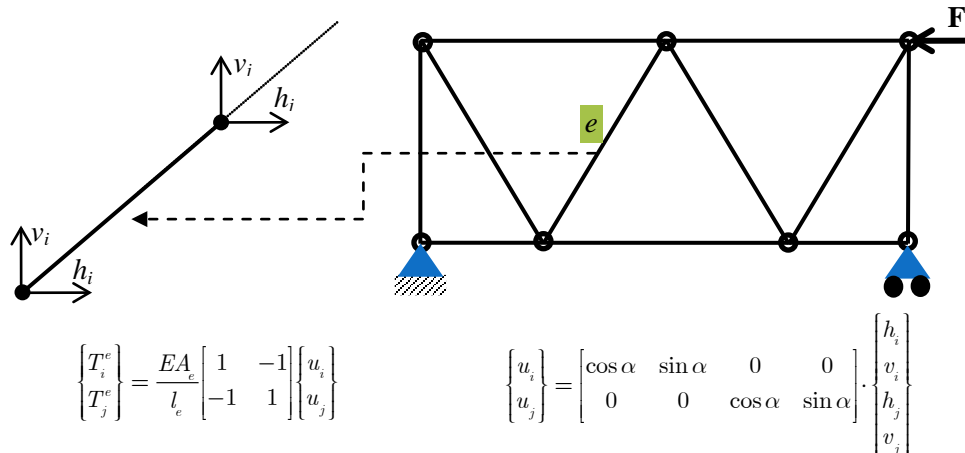


Figure II-3 : Structure en treillis, barres en traction-compression

Le cas des treillis est le plus simple dans la catégorie des structures mécaniques étudiées. Les éléments simples que sont les barres possèdent un comportement uni-axial représenté par la loi de Hooke. L'équation d'équilibre de chaque nœud est appelée équation locale (**Fig. II-3**). L'ensemble des équations locales forment donc un système algébrique linéaire global qu'on peut résoudre. Nous verrons plus en détail ce genre de structure dans les prochains chapitres.

Dans la suite de ce travail, nous allons étudier les structures continues et leurs discrétisation dans le but d'obtenir des systèmes discrets équivalents dont la solution s'obtient en résolvant des équations algébriques. Pour cela, nous allons définir d'abord les formes intégrales ensuite les opérations nécessaires pour les transformer en un système algébrique.

II.3 FORMES INTEGRALES

On appelle forme intégrale ou forme variationnelle du système différentiel **II.1-1**, l'expression suivante :

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{v} (\mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}) d\Omega \quad \text{II.3-1}$$

\mathbf{v} et \mathbf{u} sont des fonctions, scalaires ou vectorielles, continues et suffisamment dérivables sur Ω et \mathbf{v} est appelée fonction de pondération ou fonction test. Pour une fonction $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{exacte}}$, solution de l'équation **II.1-1**, la forme intégrale **II.3-1** s'annule. Si nous choisissons une fonction \mathbf{u} différente de $\mathbf{u}_{\text{exacte}}$, alors nous commettons une erreur appelée résidu, tel que

$$\mathcal{R} = \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad \text{sur } \Omega \quad \text{II.3-2}$$

Le résidu \mathcal{R} est nul en tout point du domaine Ω si $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{exacte}}$.

II.4 DISCRETISATION DE LA FORME INTEGRALE

En général, la solution exacte appartient à un espace fonctionnel de dimension infinie, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas s'exprimer par la combinaison d'un nombre fini de fonctions élémentaires. Si toutefois elle existe dans un espace de dimension finie, alors la solution approchée qui minimise le résidu II.3-2 devient exacte si elle est recherchée dans le même espace.

Pour chercher une solution approchée de l'équation II.1-1, nous devons approcher la solution exacte par une fonction \mathbf{u} choisie de manière qu'elle soit continue et suffisamment dérivables et satisfaisant aux conditions de frontières. On effectue de ce fait une projection de la solution exacte sur un sous-espace dont la base est constituée d'un nombre fini de fonctions : c'est ce qu'on appelle une **discrétisation algébrique**. La solution approchée devient alors une troncature de la solution exacte.

II.5 APPROXIMATION DE FONCTIONS

On peut chercher \mathbf{u} dans un espace fonctionnel de dimension n sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de base

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \quad \text{II.5-1}$$

où $a_i, i=1, \dots, n$, sont les paramètres de l'approximation et $P_i(\mathbf{x})$ sont des fonctions polynomiales ou trigonométriques linéairement indépendantes formant une base génératrice de l'espace fonctionnel de dimension n finie. La résolution numérique du problème consiste donc à rechercher les paramètres a_i tel que le résidu de l'équation II.3-2 soit minimal.

LINEARITE DE L'OPERATEUR $\mathcal{L}()$

On dit que l'opérateur $\mathcal{L}()$ est linéaire si et seulement si :

$$\mathcal{L}(a \cdot \mathbf{u}_1 + b \cdot \mathbf{u}_2) = a \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}_1) + b \cdot \mathcal{L}(\mathbf{u}_2)$$

Avec $a, b \in \mathbb{R}$, \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont des fonctions continues et suffisamment dérivables. En fait, la linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}()$ est liée à celle des équations différentielles.

EXEMPLE I.5.1

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0 \quad \text{sur } [0, \pi]$$

avec les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f'(\pi) = 1$, la solution analytique s'écrit comme $f(x) = \sin x$. C'est une fonction transcendante qui ne peut être approximée exactement que sous forme d'un polynôme de degré infini.

On se place dans l'intervalle $[0, \pi]$ et on cherche une solution approchée $g(x)$ de type polynomiale du second ordre. On choisit une base génératrice de tous les polynômes du second degré : $P_1(x)=1$;

$P_2(x)=x$; $P_3(x)=x^2$, et l'on écrit sous forme d'un produit scalaire :

$$g(x) = \left\langle \begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Les conditions aux limites imposent que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. L'expression discrétisée de la forme intégrale de l'équation différentielle conduit au système suivant :

$$\int_0^\pi v \left(\frac{d^2 g}{dx^2} + g \right) dx = \int_0^\pi v \left\langle \begin{matrix} 1 & x & 2 + x^2 \end{matrix} \right\rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} dx = 0$$

La résolution de l'équation ci-dessus dépend du choix de la fonction de pondération v . Nous verrons que, selon la fonction v , la forme discrète donne lieu à plusieurs approximations plus ou moins bonnes. Nous pouvons choisir d'ores et déjà $v(x) = 1$ sur le domaine d'étude, et compte tenu des valeurs de a_0 et a_1 , l'équation devient :

$$\int_0^\pi (x + a_2(2 + x^2)) dx = 0$$

D'où nous tirons la valeur de $a_2 = \frac{-3\pi}{12 + 2\pi^2}$. La figure ci-contre montre la solution numérique en comparaison avec la solution analytique. Le rapport qualité/prix de cette solution est excellent car il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'une approximation à un seul paramètre ; les deux premiers étant calculés par application des conditions aux limites.

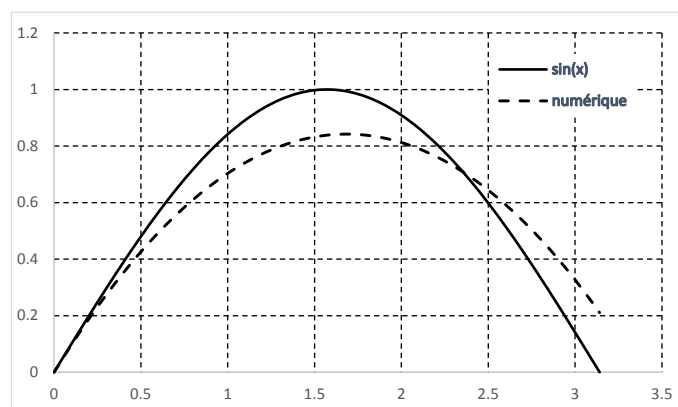


Figure II-4 : Approximation de la solution par une courbe du second degré

II.6 METHODES DES RESIDUS PONDERES

Pour un choix de la fonction \mathbf{u} donné par l'expression II.5-1, les méthodes des résidus pondérés consistent à choisir la fonction de pondération \mathbf{v} qui minimise l'intégrale du résidu sur un domaine Ω donné. Le choix de \mathbf{v} donne lieu à plusieurs variantes de ces méthodes à savoir :

- Méthode de collocation par points
- Méthode de collocation par sous-domaine
- Méthode des moments
- Méthode des moindres carrés
- Méthode de Galerkin

Nous allons voir les deux premières variantes en plus de la méthode de Galerkin, qui est un cas particulier des méthodes des résidus pondérés.

II.6.1. Méthode de collocation par points

La méthode de collocation par point utilise les distributions de Dirac (on dit aussi pic de Dirac) comme fonctions de pondération (voir annexe A). Elles sont définies comme suit :

$$v(\mathbf{x}) = \Delta_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad \mathbf{x}_j \in \Omega \quad \text{II.6-1}$$

Si la fonction $\mathbf{u}_{\text{exacte}}$ annule le résidu de l'équation II.3-2 en tout point du domaine Ω , cette méthode suggère d'annuler le résidu \mathcal{R} en n points \mathbf{x}_j déterminés et appartenant au domaine. Les n points sont généralement, mais pas nécessairement, régulièrement répartis sur le domaine. L'équation II.3-1 devient alors :

$$\int_{\Omega} \Delta_j(\mathbf{x}) \mathcal{R} \cdot d\Omega = \mathcal{R}_j = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad \text{II.6-2}$$

En introduisant l'expression II.5-1 et en tenant compte de la linéarité de l'opérateur $\mathcal{L}()$, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\int_{\Omega} \Delta_j \mathcal{L} \left(\sum_i a_i P_i(\mathbf{x}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \Delta_j \mathbf{f} d\Omega = \sum_i a_i \mathcal{L} (P_i(\mathbf{x}_j)) + \mathbf{f}_j = 0$$

Δ_j est le pic de Dirac localisé au point \mathbf{x}_j et \mathbf{f}_j est la force de volume évaluée en \mathbf{x}_j .

EXEMPLE II.6-1

Soit à résoudre par la méthode de collocation par points l'équation de Poisson suivante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p$$

où w est une fonction scalaire des variables x et y , définie sur un domaine rectangulaire (Fig. II-5). Les conditions aux limites sont : $w = 0$ pour $x = \pm a$ et $y = \pm b$.

Pour approximer le champ scalaire w par une fonction u , cette dernière doit être continue et suffisamment dérivable par rapport à x et y . Elle doit en plus satisfaire aux conditions aux frontières imposées sur w . Nous pouvons donc choisir u sous la forme polynomiale suivante :

$$u = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(\alpha_1 + \alpha_2(x^2 + y^2) + \dots)$$

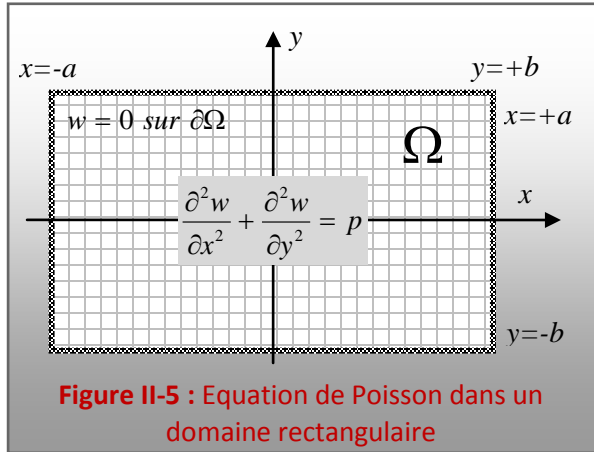


Figure II-5 : Equation de Poisson dans un domaine rectangulaire

II.6.1.a. Approximation à un seul paramètre

Pour simplifier le problème, nous allons considérer un domaine carré ($a = b$) et nous prenons une approximation à un seul paramètre.

$$u = \alpha_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

Le résidu s'écrit alors comme :

$$\mathcal{R} = \mathcal{L}(u_1) - p = 2\alpha_1((x^2 - a^2) + (y^2 - a^2)) - p \text{ sur } \Omega$$

Avec $\mathcal{L}(\cdot) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ le Laplacien, un opérateur différentiel.

Puisque l'approximation est à un seul paramètre, alors nous devons annuler l'intégrale du résidu \mathcal{R} en un seul point du domaine Ω . Ce point est choisi par exemple comme le centre géométrique du rectangle de coordonnées $\mathbf{x}_1 = (0 \ 0)$.

$$\int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \Delta_1 (2\alpha_1(x^2 + y^2 - 2a^2) - p) dx dy = -4a^2\alpha_1 - p = 0$$

Ce qui donne $\alpha_1 = -\frac{p}{4a^2}$ et l'approximation s'écrit alors :

$$u_1 = -\frac{p}{4a^2}(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)$$

II.6.1.b. Approximation à deux paramètres

Choisissons maintenant une approximation à deux paramètres :

$$u_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(\alpha_1 + \alpha_2(x^2 + y^2))$$

Le résidu s'écrit alors comme suit :

$$\mathcal{R} = \mathcal{L}(u_2) - p = 2\alpha_1(x^2 + y^2 - 2a^2) + \alpha_2 \begin{pmatrix} 24x^2y^2 + 2(x^4 + y^4) \\ -16a^2(x^2 + y^2) + 4a^4 \end{pmatrix} - p$$

Puisque nous avons une approximation à deux paramètres, α_1 et α_2 , alors nous devons annuler l'intégrale du résidu en deux points du domaine. Nous choisissons les points $\mathbf{x}_1 = (0 \ 0)$ et

$\mathbf{x}_2 = \left(\frac{a}{2} \ \frac{a}{2}\right)$. Nous avons donc deux équations qui correspondent chacune à un point :

$$\begin{aligned} 2\alpha_1(-2a^2) + \alpha_2(4a^4) &= p \\ 2\alpha_1\left(-\frac{3a^2}{2}\right) + \alpha_2\left(-\frac{9a^4}{4}\right) &= p \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un système de deux équations algébriques à deux inconnues dont la solution est $\alpha_1 = -\frac{25}{84} \frac{p}{a^2}$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{21} \frac{p}{a^4}$.

L'approximation u_2 s'écrit alors :

$$u_2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \left(-\frac{25}{84} \frac{p}{a^2} - \frac{1}{21} \frac{p}{a^4} (x^2 + y^2) \right)$$

Comparons à présent les valeurs de u_1 et de u_2 avec la solution exacte donnée par

$w \simeq -\frac{36.64}{\pi^4} pa^2 \simeq -0.295pa^2$ au centre du domaine (voir annexe **B**), c'est-à-dire au point de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$. Nous avons $u_1 = -0.250pa^2$ et $u_2 = -0.297pa^2$.

Nous remarquons que la précision de la solution numérique dépend du nombre de paramètres de l'approximation : elle approche la solution exacte lorsque le nombre de paramètres augmente. Nous constatons aussi que la complexité des calculs augmente rapidement avec le nombre de paramètres.

II.6.2. Méthode de collocation par sous-domaine

La méthode de collocation par sous-domaines requiert l'annulation de l'intégrale du résidu sur un sous-domaine Ω_j de Ω . La fonction de pondération \mathbf{v} est égal à 1 sur tout le sous-domaine Ω_j et est nulle ailleurs.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 1 \text{ si } \mathbf{x} \in \Omega_j \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= 0 \text{ si } \mathbf{x} \notin \Omega_j \end{aligned} \tag{II.6-3}$$

L'intégrale du résidu s'écrit alors :

$$\int_{\Omega_j} \mathcal{R} \cdot d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \tag{II.6-4}$$

EXEMPLE I.6-2

Résoudre par la méthode de collocation par sous-domaine l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + w + x = 0$$

Les conditions aux limites sont $w = 0$ en $x = 0$ et $x = 1$. Le domaine d'étude est donc $x \in [0, 1]$.

Nous choisissons une approximation u qui satisfait les conditions aux limites ainsi que les conditions de dérivabilité imposées par l'opérateur différentiel $\frac{d^2}{dx^2}$.

$$u = x(1-x)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n)$$

II.6.2.a. Approximation à un seul paramètre

Dans un premier temps, nous limiterons l'approximation à un seul paramètre, c'est à dire :

$$u = \alpha_0 x(1-x)$$

Dans ce cas, le sous-domaine Ω_1 choisi pour annuler l'intégrale du résidu est (mais pas obligatoirement) tout le domaine $\Omega = [0, 1]$:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x \right) dx = \int_0^1 (\alpha_0(-2 + x - x^2) + x) dx = -\frac{11}{6} \alpha_0 + \frac{1}{2} = 0$$

Ce qui donne $\alpha_0 = \frac{3}{11}$ et l'approximation u_1 s'écrit :

$$u_1 = \frac{3}{11} x(1-x)$$

II.6.2.b. Approximation à un deux paramètres

Considérons à présent l'approximation à deux paramètres, c'est-à-dire,

$$u_2 = x(1-x)(\alpha_0 + \alpha_1 x)$$

Dans ce cas nous devons choisir deux sous-domaines d'intégration, Ω_1 et Ω_2 , par exemple, de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Omega_1 : 0 \leq x \leq 1/2 \\ \Omega_2 : 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Les intégrales des résidus s'écrivent alors pour chaque sous-domaine Ω_i de la manière suivante:

$$\int_{\Omega_i} (2(\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_0 - 6\alpha_1 + 1)x + (\alpha_1 - \alpha_0)x^2 - \alpha_1 x^3) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

Nous obtenons donc deux équations à deux inconnues que sont les paramètres α_i :

$$\begin{aligned}\frac{11}{12}\alpha_0 - \frac{53}{192}\alpha_1 &= \frac{1}{8} \\ \frac{11}{6}\alpha_0 + \frac{11}{12}\alpha_1 &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La solution de ce système d'équations linéaire est $\alpha_0 = \frac{97}{517}$, $\alpha_1 = \frac{24}{141}$ et l'approximation u_2

s'écrit donc :

$$u_2 = x(1-x) \left(\frac{97}{517} + \frac{24}{141}x \right)$$

La solution exacte est :

$$w = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

La figure II-6 montre une fois de plus que l'approximation à deux paramètres est meilleure que celle à un seul paramètre.

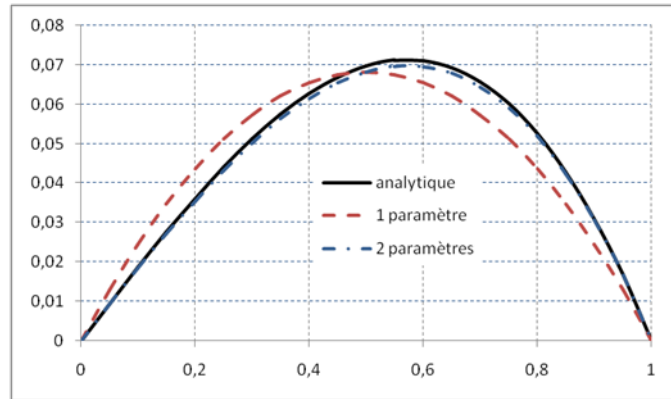


Figure II-6 : Comparaison des solutions analytique et numériques (à 1 et 2 paramètres)

REMARQUE II.1

A première vue, il semble que la méthode de collocation par sous-domaines est plus avantageuse que la méthode de collocation par points. Ceci est dû au fait que l'erreur est réparti sur tout un sous-domaine (nombre infini de points) au lieu d'un nombre fini de points dans le cas de la méthode de collocation par points.

II.6.3. Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin utilise comme fonctions de pondération l'ensemble des variations $\delta \mathbf{u}$ des fonctions approchées \mathbf{u} .

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \delta a_i P_i(\mathbf{x}) \quad \text{II.6-5}$$

L'équation II.6-5 peut s'écrire de façon vectorielle comme suit :

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} = \langle \delta a \rangle \cdot \{P(\mathbf{x})\}$$

$\langle \delta a \rangle$ étant le vecteur-ligne dont les composantes sont les δa_i et $\{P(\mathbf{x})\}$ est le vecteur-colonne constitué de l'ensemble des fonctions d'interpolation $P_i(\mathbf{x})$.

La forme intégrale II.3-1 devient alors :

$$\mathbf{W} = \langle \delta a \rangle \int_{\Omega} \{P(\mathbf{x})\} \left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \right) + \mathbf{f} \right) d\Omega \quad \text{II.6-6}$$

La forme intégrale **II.6-6** doit s'annuler quelques soient les variations $\langle \delta a \rangle$; nous déduisons alors mathématiquement le système d'équations suivant :

$$\int_{\Omega} \{P(\mathbf{x})\} \left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \right) + \mathbf{f} \right) d\Omega = 0 \quad \text{II.6-7}$$

Le développement de cette équation donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P_1(\mathbf{x}) \left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \right) + \mathbf{f} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} P_2(\mathbf{x}) \left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \right) + \mathbf{f} \right) d\Omega &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} P_n(\mathbf{x}) \left(\mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n a_i P_i(\mathbf{x}) \right) + \mathbf{f} \right) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad \text{II.6-8}$$

Pour une approximation à n paramètres inconnus, les expressions **II.6-8** forment un système à n équations, il est donc déterminé. Sa résolution requiert des méthodes numériques du chapitre I.

EXEMPLE II.6-3

Reprenons l'exemple **II.6-1** et appliquons la méthode de Galerkin à l'équation de Poisson et considérons la même approximation à un seul paramètre.

$$u = \alpha_1 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = \alpha_1 P_1(x, y)$$

Le système **II.6-8** se réduit à une seule équation :

$$\int_{\Omega} P_1(x, y) \left(\Delta (\alpha_1 P_1(x, y)) - p \right) d\Omega = 0$$

Avec $P_1(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$, l'intégrale du résidu devient alors :

$$\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \left(2\alpha_1 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2) - p \right) dx dy = 0$$

Après intégration, nous obtenons $\alpha_1 = \frac{-5p}{8(a^2 + b^2)}$ et la fonction approchée u s'écrit :

$$u = \frac{-5p}{8(a^2 + b^2)} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

La valeur de u au centre du domaine ($x = 0$ et $y = 0$) est donnée par

$$u(0, 0) = \frac{-5pa^2b^2}{8(a^2 + b^2)}$$

Pour un domaine carré ($a = b$) nous avons $u(0, 0) = \frac{-5pa^2}{16} = -0.3125pa^2$.

Pour un même choix de fonctions d'approximation, cette solution à un seul paramètre est plus avantageuse que celles obtenues par la méthode de collocation par points avec deux paramètres.

II.7 FORMES INTEGRALES FAIBLES

La résolution par les méthodes exposées jusqu'ici nécessite le choix de la fonction d'approximation satisfaisant à la condition de dérivabilité imposée par l'opérateur différentiel $\mathcal{L}()$. Nous allons présenter dans ce paragraphe des formes intégrales équivalentes à la forme II.3-1 et qui utilisent des fonctions d'approximations dont il n'est pas nécessaire qu'elles respectent les conditions de dérivabilité de l'opérateur $\mathcal{L}()$. Ces formes intégrales possèdent des termes d'intégration sur les frontières $\partial\Omega$ du domaine Ω . Ces termes sont identifiés comme conditions aux frontières, lesquelles sont de deux types : conditions aux frontières essentielles (Dirichlet) et conditions aux frontières naturelles (Neumann). Nous verrons plus en détail ces types de conditions dans le paragraphe qui concerne les problèmes de la thermique.

II.7.1. Intégration par partie

Pour des systèmes d'équations différentielles à une seule variable réelle x , nous pouvons appliquer le théorème bien connu de l'intégration par partie.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \text{II.7-1}$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues et dérivables sur l'intervalle $]a, b[$.

Soit à intégrer par parties la forme suivante :

$$W = \int_a^b v \frac{d^4 u}{dx^4} dx \quad \text{sur } \Omega = [a, b]$$

La 1^{ère} intégration par partie nous donne :

$$W = \int_a^b v \frac{d^4 u}{dx^4} dx = v \frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dv}{dx} \frac{d^3 u}{dx^3} dx$$

Cette écriture de la forme intégrale W utilise des dérivées d'ordre 3 sur la fonction d'approximation u et l'ordre des dérivées sur la fonction de pondération v augmente à 1. Il apparaît aussi un terme limite.

Effectuons une seconde intégration par partie de cette dernière équation et nous obtenons :

$$W = v \frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dv}{dx} \frac{d^3 u}{dx^3} dx = v \frac{d^3 u}{dx^3} \Big|_a^b - \frac{dv}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx$$

Cette nouvelle écriture de la forme intégrale utilise des dérivées d'ordre 2 sur la fonction d'approximation u ainsi que sur la fonction de pondération v . Il apparaît des termes limites qui sont évalués grâce à la connaissance des conditions aux limites appliquées aux dérivées de la fonction u .

Est-il nécessaire de continuer l'intégration par partie de cette forme intégrale ? La réponse est non, car l'ordre des dérivées sur la fonction v augmentera à 3 ce qui en augmente la restriction. Le choix de v doit donc respecter, dans ce cas, cette condition de dérivabilité.

Il existe une intégration par partie en deux dimensions : C'est la transformation de Green.

II.7.2. Théorème de Green

Soient P et Q deux fonctions de x et y continues et dérivable sur le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ (Fig. II.7). Le théorème de Green s'énonce par l'équation suivante :

$$\int_{\partial\Omega} Q dy + \int_{\partial\Omega} P dx = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad \text{II.7-2}$$

Supposons que $Q = \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ et $P = -\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, alors l'équation II.7-2 se met sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \int_{\partial\Omega} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx = \iint_{\Omega} \left(\Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy \quad \text{II.7-3}$$

Les termes à gauche de l'égalité sont une intégrale de contour. On peut l'écrire comme :

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x} dy - \int_{\partial\Omega} \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx = \int_{\partial\Omega} \Phi \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} dy \\ -dx \end{Bmatrix} \quad \text{II.7-4}$$

Si \vec{dl} est un élément du contour de composantes $\langle dx \quad dy \rangle^T$ tel que $\vec{dl} = dl \cdot \vec{t}$, \vec{t} étant le vecteur unitaire tangent au contour, alors nous pouvons écrire :

$$\begin{Bmatrix} dy \\ -dx \end{Bmatrix} = dl \cdot \vec{n}$$

tel que \vec{n} est la normale extérieure. Il est aisé de vérifier que \vec{dl} et \vec{n} sont orthogonaux, il suffit d'effectuer le produit scalaire qui est identiquement nul.

Sous forme plus concise, nous écrivons donc l'équation II.7-3 comme :

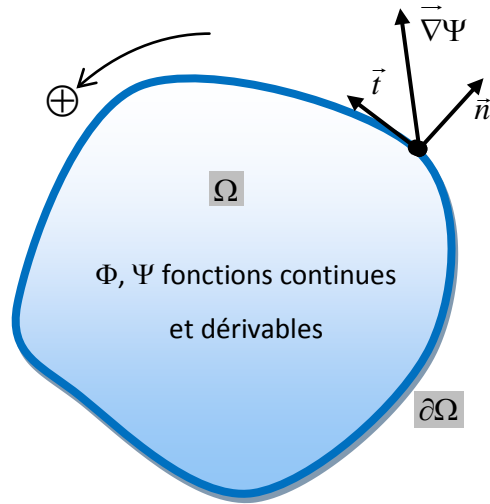


Figure II-7 : Théorème de Green sur un domaine bidimensionnel

$$\int_{\partial\Omega} \Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi \cdot \vec{n} \cdot dl = \iint_{\Omega} \left(\Phi \cdot \Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi \right) dx dy \quad \text{II.7-5}$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur Laplacien, $\vec{\nabla} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$ est l'opérateur gradient. Le vecteur

unitaire \vec{t} est tangent au contour $\partial\Omega$ et \vec{n} est orthogonale à \vec{t} et sortant du domaine Ω ; dl est l'élément de parcours de la frontière $\partial\Omega$. Le sens positif du parcours est tel que le domaine Ω reste toujours à gauche.

II.8 APPLICATION AUX PROBLEMES THERMIQUES

II.8.1. Equation différentielle de la diffusion thermique

Nous allons étudier dans ce paragraphe la diffusion thermique en régime permanent, ou stationnaire, dans un domaine Ω bidimensionnel, homogène et isotrope (Fig. II-8). Dans un milieu de conductivité thermique k , l'équilibre thermique est régi par la loi de Fourier couplée à l'équation de conservation.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0 \quad \text{II.8-1}$$

où T est le champ scalaire des températures et Q la production volumique de chaleur.

Les inconnus du problème sont la fonction spatiale T et le flux thermique \vec{q} . Le champ de température doit être deux fois dérivable pour que l'équation ci-dessus ait un sens.

II.8.2. Conditions aux frontières

La résolution numérique du problème passe par la connaissance des conditions thermiques qui règnent à la frontière $\partial\Omega$ du domaine. Ces conditions sont de 3 types :

II.8.2.a. Condition aux frontières de Dirichlet – température imposée

Sur une partie $\partial\Omega^T$ de la frontière, le profil de température est connue (température pas seulement constante).

$$T = T_{surf} \quad \text{sur } \partial\Omega^T \quad \text{II.8-2}$$

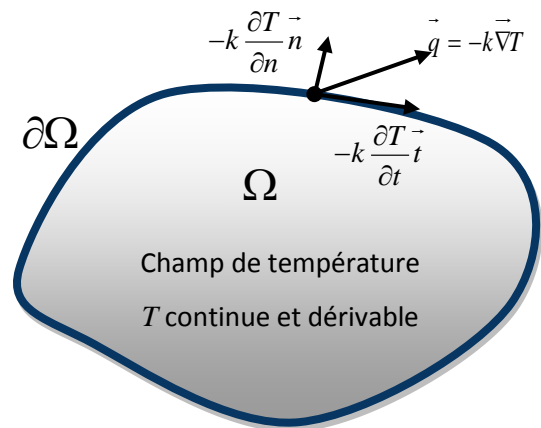


Figure II-8 : Diffusion thermique dans un milieu conducteur

II.8.2.b. Condition aux frontières de Neumann – flux thermique imposé

Sur une partie $\partial\Omega^q$ de la frontière du domaine, le flux thermique \vec{q} est connu. Il est lié au gradient thermique par la loi de Fourier :

$$\vec{q} = -k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad \text{sur } \partial\Omega^q \quad \text{II.8-3}$$

La composante tangentielle du vecteur-flux de chaleur $(-k \frac{\partial T}{\partial t} \vec{t})$ ne participe pas au bilan thermique du système.

II.8.2.c. Condition aux frontières mixte – condition de convection

Cette condition est liée aux échanges avec le milieu extérieur. Dans le domaine de la thermique, outre les transferts conductifs, il existe des échanges radiatifs et des échanges convectifs. Les échanges radiatifs sont fortement non linéaires et font appel à la théorie du rayonnement du corps noir.

La convection est un échange thermique qui s'effectue par mouvement de matière à l'interface de deux milieux de propriétés différentes. Lorsqu'un fluide, à une température T , est en contact avec une paroi de température T' , il s'effectue un échange spontané de chaleur qui induit une variation de température du fluide. Ce dernier possède alors des propriétés thermodynamiques différentes du fluide environnant (température, densité...etc.). Cette différence de propriétés induit à son tour un mouvement de matière qui transporte ainsi la chaleur. Ce mode de transport s'appelle transport par convection. Cet échange est d'autant plus grand que la différence de température est grande.

En particulier, on s'intéressera dans ce paragraphe à la convection linéaire. Sur une partie $\partial\Omega^C$ de la frontière du domaine, on suppose que les échanges convectifs sont proportionnels à la différence de température entre le milieu extérieur et la frontière du domaine.

$$\vec{q} = C(\hat{T} - T_{ext}) \cdot \vec{n} \quad \text{sur } \partial\Omega^C \quad \text{II.8-4}$$

Le coefficient de proportionnalité C est appelé coefficient de convection et \hat{T} est la température évaluée à la frontière $\partial\Omega^C$.

II.8.3. Formulations intégrales

II.8.3.a. Formulation forte

La forme forte de l'équation II.8-1 s'écrit :

$$W = \int_{\Omega} v \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \right) d\Omega \quad \text{II.8-5}$$

Nous allons étudier le cas où la conductivité thermique k est constante (milieu homogène), sinon le problème devient non linéaire. Elle est également une grandeur scalaire (milieu isotrope). Un milieu orthotrope est caractérisé par une conductivité exprimée par une grandeur tensorielle que nous n'allons pas voir dans ce cours, ce qui n'enlève en rien l'intérêt de cet exemple. L'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$W = \int_{\Omega} v \left(k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \right) d\Omega = \int_{\Omega} v (k\Delta T + Q) d\Omega \quad \text{II.8-6}$$

Dans cette formulation, les conditions aux frontières n'y apparaissent pas.

II.8.3.b. Formulation faible

Selon le théorème de Green (§ II.7.2), la forme intégrale faible se déduit comme suit :

$$W = \int_{\Omega} v (k\Delta T + Q) \cdot d\Omega = \int_{\partial\Omega} vk \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \cdot dl - \int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot k \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\Omega + \int_{\Omega} v Q d\Omega \quad \text{II.8-7}$$

A l'équilibre ($W=0$), l'équation devient :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} v \cdot k \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\Omega = \int_{\partial\Omega} vk \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \cdot dl + \int_{\Omega} v Q d\Omega \quad \text{II.8-8}$$

Le premier terme du membre de droite exprime les échanges avec le milieu extérieur sous forme d'un flux imposé et d'une convection selon les expressions II.8-3 et II.8-4 :

$$\int_{\partial\Omega} vk \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \cdot dl = - \int_{\partial\Omega^q} v \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dl - C \int_{\partial\Omega^c} v (\hat{T} - T_{ext}) dl \quad \text{II.8-9}$$

Les conditions aux frontières de Dirichlet, température imposée, n'apparaissent pas dans cette expression. Cette condition sera prise en compte quand nous serons obligés de la respecter dans le choix d'une approximation du champ de température $T(x,y)$. L'équation II.8-8 se met finalement, en tenant compte de l'expression II.8-9 et en séparant l'inconnue T à gauche de l'égalité :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} v \cdot k \cdot \vec{\nabla} T \cdot d\Omega + C \int_{\partial\Omega^c} v \hat{T} dl = - \int_{\partial\Omega^q} v \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dl + C \int_{\partial\Omega^c} v T_{ext} dl + \int_{\Omega} v Q d\Omega \quad \text{II.8-10}$$

II.8.4. Discrétisation algébrique de la forme intégrale

Pour discrétiser la forme intégrale ci-dessus, il convient de choisir une approximation polynomiale du champ de température :

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i P_i(x, y) = \langle P(x, y) \rangle \cdot \{ \mathbf{a}_n \} \quad \text{II.8-11}$$

La forme intégrale discrète type Galerkin impose que la fonction de pondération v soit l'ensemble des variations du champ T , c'est-à-dire :

$$v = \delta T(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta a_i P_i(x, y) = \langle P(x, y) \rangle \cdot \{ \delta \mathbf{a}_n \} \quad \text{II.8-12}$$

En portant ces deux expressions ci-dessus dans la forme **II.8-10**, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$\mathbf{A} \cdot \{ \mathbf{a}_n \} = \{ \mathbf{q}_n \} \quad \text{II.8-13}$$

tel que :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \cdot k \cdot \mathbf{G} d\Omega + C \int_{\partial\Omega^c} \{ P(x, y) \} \langle P(x, y) \rangle dl \quad \text{II.8-14}$$

$$\{ \mathbf{q}_n \} = - \int_{\partial\Omega^f} \{ P(x, y) \} \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dl + C \int_{\partial\Omega^c} \{ P(x, y) \} T_{ext} dl + \int_{\Omega} \{ P(x, y) \} Q d\Omega \quad \text{II.8-15}$$

Avec : $\mathbf{G} = \vec{\nabla} \langle P(x, y) \rangle$ est une matrice gradient des fonctions $P_i(x, y)$ de taille $(n \times 2)$ tel que :

$$G_{i,j} = \frac{\partial P_j(x_1, x_2)}{\partial x_i} \quad j=1, \dots, n; i=1, 2 \quad \text{II.8-16}$$

Les variables x et y étant associées respectivement aux symboles x_1 et x_2 .

$\{ \mathbf{q}_n \}$ est le vecteur de chargement thermique composé d'un terme de frontière (les différents flux thermiques à la frontière du domaine) et d'un autre de volume (la production volumique de chaleur Q dans le domaine Ω).

Les composantes de la matrice \mathbf{A} et du vecteur $\{ \mathbf{q}_n \}$ se déduisent des expressions indicielles suivantes :

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} P_i(x, y) \cdot k \cdot \vec{\nabla} P_j(x, y) d\Omega + C \int_{\partial\Omega^c} P_i(x, y) P_j(x, y) dl \quad \text{II.8-17}$$

$$q_i = - \int_{\partial\Omega^f} P_i(x, y) \cdot \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot dl + C \int_{\partial\Omega^c} P_i(x, y) T_{ext} dl + \int_{\Omega} P_i(x, y) Q d\Omega$$

II.8.5. Exemple de conduction thermique dans un domaine rectangulaire

II.8.5.a. Position du problème

Soit un domaine rectangulaire ABCD, de côtés a et b comme montré en figure **II-9**, soumis à une diffusion thermique. Le milieu, homogène et isotrope, est de conductivité k .

Trouver le champ de température sachant que la production de chaleur (terme de volume) est nulle ($Q = 0$).

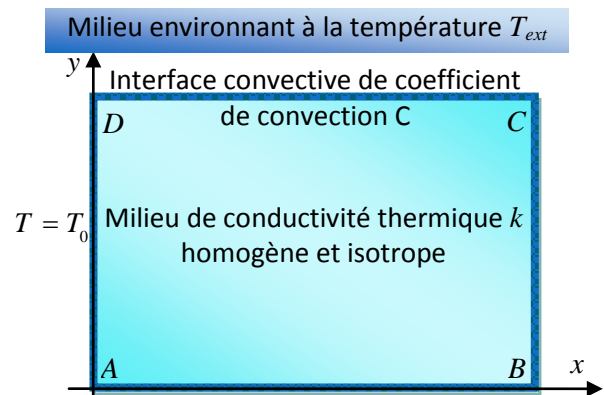


Figure II-9 : Diffusion thermique dans un milieu rectangulaire de côtés $(a \times b)$

Les conditions aux frontières sont décrites comme suit :

1. Sur le côté AD ($x = 0$), la température est maintenue à la valeur T_0 .
2. Sur le côté AB ($y = 0$) et BC ($x = a$), les flux thermiques sont nuls, c'est-à-dire que $-k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} = 0$.
3. Sur le côté CD ($y = b$), une condition de convection est maintenue avec une température extérieure constantes T_{ext} où $\vec{q} \cdot \vec{n} = -k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} = C(\hat{T} - T_{ext})$

La forme intégrale faible (Eq. II.8-10) devient alors :

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla}v \cdot k \cdot \vec{\nabla}T \cdot d\Omega + C \int_{\partial\Omega^c} v\hat{T}dl = C \int_{\partial\Omega^c} vT_{ext}dl$$

\hat{T} est la température qui règne sur le côté CD du rectangle.

II.8.5.b. Construction de l'approximation

La construction de l'approximation est plus aisée dans une géométrie aussi simple. Par exemple, prenons un polynôme de degré 2 complet.

$$T(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3xy + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 + \alpha_6x^2y + \alpha_7xy^2 + \alpha_8x^2y^2$$

Il faut d'abord s'assurer que l'expression ci-dessus respecte la condition sur AD, c'est-à-dire que $T(0, y) = T_0$. Ceci est possible si et seulement si $\alpha_0 = T_0$ et $\alpha_2 = \alpha_5 = 0$. Ensuite la condition de

flux nul sur la frontière AB, $-k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} = -k\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, implique que $\alpha_3 = \alpha_6 = 0$. Enfin, la condition de flux

nul sur la frontière BC, $-k\vec{\nabla}T \cdot \vec{n} = -k\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, implique que $\alpha_1 = -2\alpha_4a$ et $\alpha_7 = -2\alpha_8a$.

L'approximation du champ de température peut donc être réécrite comme suit :

$$T(x, y) = T_0 + x(x - 2a)(\alpha_4 + \alpha_8y^2) = \left\langle 1 \quad x(x - 2a) \quad x(x - 2a)y^2 \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} T_0 \\ \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

ou

$$T(x, y) = \left\langle P_0(x, y) \quad P_1(x, y) \quad P_2(x, y) \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} T_0 \\ \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix}$$

II.8.5.c. Résolution du système et interprétation des résultats

Il nous reste à trouver les deux paramètres restant α_4 et α_8 en utilisant les expressions :

$$[\mathbf{A}] = k \int_0^b \int_0^a [\mathbf{G}]^T \cdot [\mathbf{G}] dx dy + C \int_0^a \{P(x,b)\} \{P(x,b)\} dx$$

$$\{\mathbf{q}_n\} = CT_{ext} \int_0^a \{P(x,b)\} dx$$

Après développement, nous obtenons le système matriciel :

$$k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4a^3b}{3} & \frac{4a^3b^3}{9} \\ 0 & \frac{4a^3b^3}{9} & \frac{4a^3b^3(3b^2+8a^2)}{45} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} a & -\frac{2a^3}{3} & -\frac{2a^3b^2}{3} \\ -\frac{2a^3}{3} & \frac{8a^5}{15} & \frac{8a^5b^2}{15} \\ \frac{2a^3b^2}{3} & \frac{8a^5b^2}{15} & \frac{8a^5b^4}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_0 \\ \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = CT_{ext} \begin{pmatrix} a \\ -\frac{2a^3}{3} \\ \frac{2a^3b^2}{3} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{pmatrix} Ca & -C\frac{2a^3}{3} & -C\frac{2a^3b^2}{3} \\ -C\frac{2a^3}{3} & C\frac{8a^5}{15} + k\frac{4a^3b}{9} & C\frac{8a^5b^2}{15} + k\frac{4a^3b^3}{9} \\ -C\frac{2a^3b^2}{3} & C\frac{8a^5b^2}{15} + k\frac{4a^3b^3}{9} & C\frac{8a^5b^4}{15} + k\frac{4a^3b^3(3b^2+8a^2)}{45} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_0 \\ \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = CT_{ext} \begin{pmatrix} a \\ -\frac{2a^3}{3} \\ \frac{2a^3b^2}{3} \end{pmatrix}$$

La température T_0 étant connue, elle passe à droite de l'égalité et ce système d'équations se réduit (après avoir éliminé la 1^{ère} équation du système) à :

$$\begin{pmatrix} C\frac{4a^2}{5} + 2kb & C\frac{4a^2b^2}{5} + k\frac{2b^3}{3} \\ C\frac{4a^2b^2}{5} + k\frac{2b^3}{3} & C\frac{4a^2b^4}{5} + k\frac{2b^3(3b^2+8a^2)}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} T_0 - T_{ext} \\ b^2(T_0 - T_{ext}) \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{4a^2}{5} + 2\frac{k}{C}b & \frac{4a^2b^2}{5} + \frac{k}{C}\frac{2b^3}{3} \\ \frac{4a^2}{5} + \frac{k}{C}\frac{2b^3}{3} & \frac{4a^2b^4}{5} + \frac{k}{C}\frac{2b^3(3b^2+8a^2)}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 - T_{ext} \\ T_0 - T_{ext} \end{pmatrix}$$

La figure II-10 montre la distribution de la température dans le rectangle. L'isovaleur $T=300^\circ\text{C}$ commence sur le côté gauche du rectangle. La température minimale est celle du point C évaluée à 169°C . La figure II-11 montre le flux vectoriel de chaleur où nous faisons remarquer que, sur les côtés $x = a$ et $y = 0$, ces flux sont tangents aux côtés \overline{AB} et \overline{BC} , ce qui est conforme au choix de l'approximation qui obéit déjà aux conditions de frontières de Neumann (flux imposés). Nous observons également les flux entrant sur le côté \overline{AD} et sortant sur le côté \overline{CD} du rectangle. En régime permanent, l'accumulation de l'énergie est nulle en tout point du domaine, ce qui veut dire que la somme de ces flux est nulle selon l'équation suivante :

$$-k \int_0^b \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} dy = C \int_0^a (T(x, y = b) - T_{ext}) dx$$

L'évaluation numérique du bilan thermique fait ressortir un différentiel de près de 10%. La solution numérique obtenue ne respecte donc pas le principe de la conservation de l'énergie. La pertinence de la solution s'arrête là où l'erreur n'est plus tolérable. Ceci dépend des considérations sur la qualité de la solution que l'on veut obtenir et qui sort du cadre de ce cours.

Si nous introduisons l'approximation $T(x, y)$ dans l'équation II.8-1, nous déduisons qu'elle n'est tout simplement pas respectée (on dit que la fonction $T(x, y)$ n'est pas la solution exacte). L'équation de Fourier étant l'expression locale du principe de la conservation de l'énergie, on s'attend logiquement à ce que ce principe ne soit pas respecté à l'échelle globale. Le choix d'une autre approximation d'ordre supérieur fait diminuer l'écart (entre les flux entrant et sortant) et augmente la précision numérique de la solution.

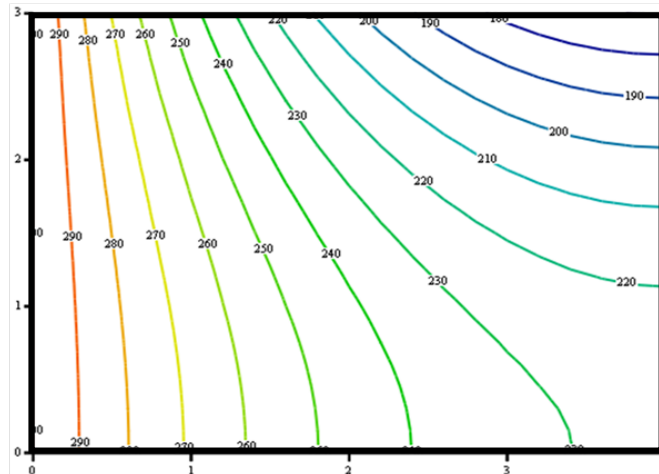


Figure II-10 : Distribution de la température dans le rectangle.
Données : $a=4.0$; $b=3.0$; $k=50.0$; $C=10.0$; $T_0=300^\circ\text{C}$; $T_{ext}=25^\circ\text{C}$

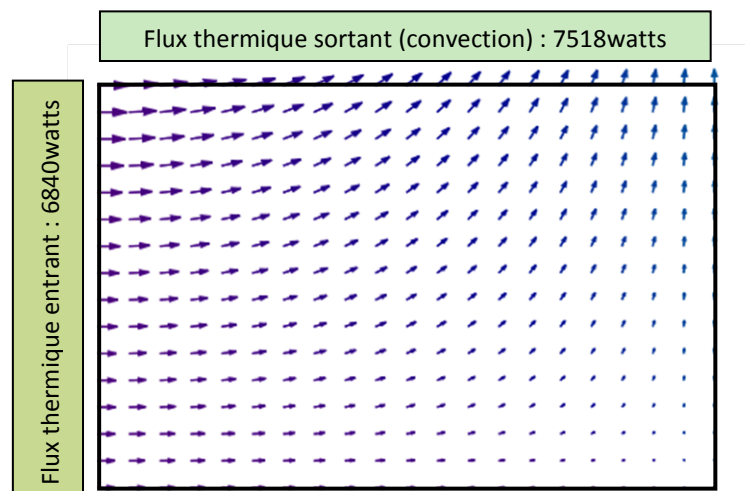


Figure II-11 : champ vectoriel du flux de chaleur $q = -k\nabla T$

Le tableau II-1 compare 2 solutions numériques obtenues avec 2 approximations. La dernière colonne du tableau représente la solution exacte.

Tableau II-1 : Comparatif des solutions numériques et analytique

Degré du polynôme		Ordre 2 complet	Ordre 3 complet	Solution exacte
Température au point C	$T(a, b)$	169.44°C	182.70°C	179.16°C
Flux sur le côté AD (watt)	$-k \int_0^b \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right _{x=0} dy$	6840	7250	7395
Flux convectif sur le côté CD (watt)	$C \int_0^a (T(x, y=b) - T_{ext}) dx$	7518	7427	7395
Bilan thermique (watt)	$\int_{\partial\Omega} k \cdot \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \cdot dl$	678	177	0

Ce tableau montre que le champ de température converge plus vite que ses dérivées. C'est une règle générale que le taux de convergence de la fonction recherchée soit plus grand que celui de ses dérivées. Nous verrons plus en détail ce phénomène numérique dans le paragraphe suivant.

II.9 FORMULATION INTEGRALE DES EQUATIONS DE L'ELASTICITE LINEAIRE

Dans la suite de ce chapitre, il est nécessaire de consulter les ouvrages [B1], [B2], [B3], [G1] et [T1] sur la *Mécanique des Milieux Continus* et la *Résistance Des Matériaux*. Il y est fait référence à des notions fondamentales qui ne sont pas démontrées dans le cadre de ce cours.

II.9.1. Position du problème

Les équations d'équilibre statique d'un solide déformable sont données par l'équation vectorielle suivante :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{II.9-1}$$

Cette équation est celle de l'équilibre locale défini sur un élément infinitésimal du solide de configuration initiale lagrangienne Ω .

$\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur symétrique de contraintes et \mathbf{f} est la force volumique agissant dans le corps du solide (poids spécifique par exemple).

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} \end{pmatrix}$$

En notation indicielle, avec la convention des indices franc et muet, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{II.9-2}$$

II.9.2. Construction des formes intégrales

La forme intégrale forte de cette équation d'équilibre s'écrit :

$$W = \int_{\Omega} \mathbf{v} \left(\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} \right) d\Omega = 0 \quad \text{II.9-3}$$

En notation indicielle, l'équation ci-dessus s'écrit :

$$W = \int_{\Omega} v_i \left(\frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} + f_i \right) d\Omega \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{II.9-4}$$

La solution du système est un champ vectoriel de déplacement \mathbf{u} tel que

$$\mathbf{u} = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle^T$$

Et nous choisissons comme fonction de pondération \mathbf{v} l'ensemble des variations $\delta \mathbf{u}$ de \mathbf{u} (forme intégrale de type Galerkin).

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{u} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3 \rangle^T$$

Pour obtenir la forme intégrale faible des équations II.9-4, appliquons le théorème de

l'intégration par partie. Pour cela, focalisons-nous sur le terme $j=2$. Nous écrivons alors l'expression II.9-4 comme :

$$\begin{aligned} W &= \dots + \int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial \sigma_{i,2}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 + \dots \\ &= \dots + \int_{\Sigma(x_2)} \left(\int_a^b \delta u_i \frac{\partial \sigma_{i,2}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \dots \\ &= \dots + \int_{\Sigma(x_2)} \left(\delta u_i \sigma_{i,2} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_2} \sigma_{i,2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \dots \\ &= \dots + \int_{\Sigma(x_2)} \left(\delta u_i \sigma_{i,2} \Big|_a^b \right) dx_1 dx_3 - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_2} \sigma_{i,2} d\Omega + \dots \end{aligned}$$

$\Sigma(x_2)$ est la surface plane issue de l'intersection en x_2 du plan \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 avec le domaine Ω .

REMARQUE II.2

L'élément de volume $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$ vient en réalité du produit mixte $d\Omega = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3)$.

Si on définit \vec{n} comme la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$, le terme de frontière s'écrit alors :

$$W = \dots + \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{i,2} dx_1 dx_3 - \int_{\Omega} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_2} \sigma_{i,2} d\Omega + \dots$$

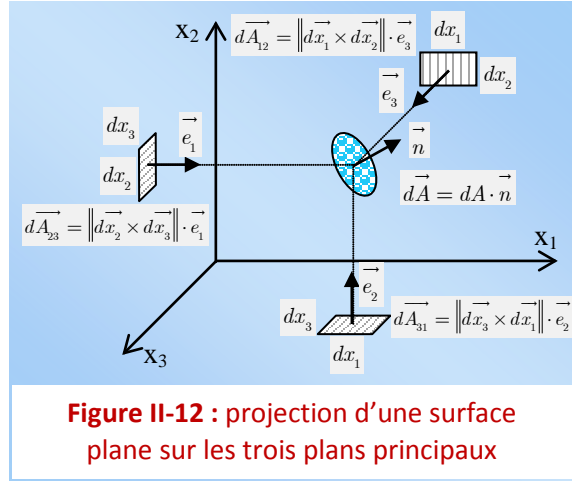


Figure II-12 : projection d'une surface plane sur les trois plans principaux

D'après la définition de la surface élémentaire $d\bar{A} = dA \cdot \bar{n}$ et compte tenu de la relation $\|d\bar{x}_3 \times d\bar{x}_1\| = dx_1 dx_3 = \lambda_2 \cdot dA$ (Fig. II-12), nous pouvons réécrire l'expression ci-dessus, en remplaçant l'indice j :

$$W = \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{i,j} \lambda_j dA - \int_{\Omega} \sigma_{i,j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{II.9-5}$$

λ_j est la $j^{\text{ème}}$ composante de la normale \bar{n} à la surface $\partial\Omega$ (les cosinus directeur du vecteur $d\bar{A}$). En identifiant le terme $\sigma_{i,j} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}$, compte tenu de la symétrie du tenseur de contrainte, au produit

doublement contracté de $\bar{\sigma} : \delta\bar{\varepsilon}$, l'équation II.9-5 se met, en notation matricielle, sous la forme :

$$W = \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \left(\bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) dA - \int_{\Omega} \left(\bar{\sigma} \cdot \delta\bar{\varepsilon} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right) d\Omega \quad \text{II.9-6}$$

$\bar{\sigma}$ et $\delta\bar{\varepsilon}$ représentent respectivement les contraintes et les déformations virtuelles définies vectoriellement comme suit :

$$\bar{\sigma} = \left\langle \sigma_{1,1} \quad \sigma_{2,2} \quad \sigma_{3,3} \quad \sigma_{1,2} \quad \sigma_{1,3} \quad \sigma_{2,3} \right\rangle^T$$

$$\delta\bar{\varepsilon} = \left\langle \delta\varepsilon_{1,1} \quad \delta\varepsilon_{2,2} \quad \delta\varepsilon_{3,3} \quad \delta\gamma_{1,2} \quad \delta\gamma_{1,3} \quad \delta\gamma_{2,3} \right\rangle^T$$

Les composantes normales $\delta\varepsilon_{i,i}$ et tangentielles $\delta\gamma_{i,j}$ de $\delta\bar{\varepsilon}$ sont données par :

$$\delta\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\delta\gamma_{i,j} = 2\delta\varepsilon_{i,j} \quad i \neq j$$

En identifiant $\bar{\sigma} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ dans le terme de l'intégrale de surface au vecteur de contrainte \mathbf{t} , et en annulant la forme II.9-6, nous réécrivons cette dernière comme :

$$\int_{\Omega} \left(\delta\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\sigma} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left(\delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} \right) dA + \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \right) d\Omega \quad \text{II.9-7}$$

L'équation II.9-7 n'est autre que la traduction du principe des travaux virtuels qui stipule que la variation du travail des efforts intérieurs, ou énergie interne, est égal à celle du travail des forces extérieures, composées d'un terme de volume \mathbf{f} auquel est ajouté le terme de surface \mathbf{t} . Nous concluons donc que l'expression du théorème des travaux virtuels n'est autre que la forme intégrale faible de Galerkin des équations d'équilibre.

La discrétisation de la forme II.9-7 requiert un choix de l'approximation sur le champ vectoriel de déplacement \mathbf{u} qui respecte les conditions aux frontières de Dirichlet (déplacements imposés sur une partie de la frontière du domaine Ω). En réalité, il n'est pas aisé de trouver une approximation adéquate lorsque la géométrie du domaine est complexe. Cette difficulté sera levée en adoptant une

expression algébrique adaptée sur les fonctions d'approximation définies par morceau que nous verrons au chapitre sur l'approximation par éléments finis.

II.9.3. Cas des barres en flexion simple

La résolution d'un système de poutres est largement étudiée et l'on trouve dans les ouvrages une multitude de problèmes très bien analysés. Cependant, l'expression de la solution est quelques fois laborieuse. L'exemple de système de poutres participe d'une

démarche beaucoup plus pédagogique et nous donne un aperçu bien clair du rôle de la *MEF* dans les systèmes complexes.

L'équation d'équilibre d'une poutre en flexion simple, dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli (conservation de la planéité des sections transversales et de leur orthogonalité par rapport à l'axe neutre), est donnée par l'expression différentielle suivante :

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - q(x) = 0 \quad \text{II.9-8}$$

EI est la rigidité flexionnelle de la poutre, w est la flèche et $q(x)$ est une fonction de chargement. Cette fonction peut être une distribution de Dirac, en l'occurrence une force ponctuelle (annexe A).

Nous nous proposons de tracer les diagrammes des efforts internes (Le moment fléchissant M et l'effort tranchant T) ainsi que la flèche $w(x)$ de la poutre illustrée en figure II-13. Nous avons les lois d'interactions suivantes :

$$M(x) = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$T(x) = -\frac{dM(x)}{dx} = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad \text{II.9-9}$$

$M(x)$ et $T(x)$ sont les efforts internes (respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant) à la section d'abscisse x .

II.9.3.a. Formulations forte et faible de l'équation d'équilibre

La formulation forte s'écrit :

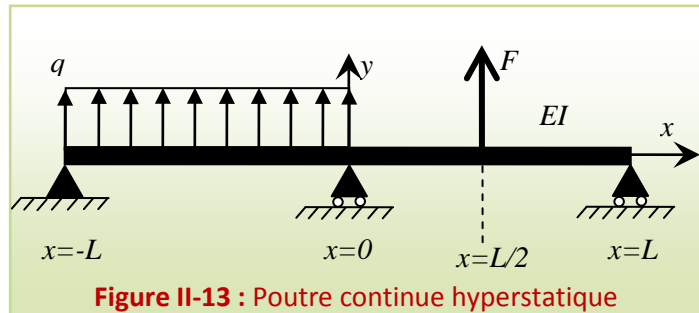


Figure II-13 : Poutre continue hyperstatique

$$W = \int_{-L}^L v \left(EI \frac{d^4 w}{dx^4} - q(x) \right) dx \quad \text{II.9-10}$$

En effectuant deux fois l'intégration par partie de l'équation ci-dessus, nous obtenons la formulation faible :

$$W = vEI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=-L}^{x=L} + \int_{-L}^L \frac{d^2 v}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_{-L}^L v q dx \quad \text{II.9-11}$$

A l'équilibre ($W=0$), l'équation **II.9-11** s'écrit alors :

$$vEI \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=-L}^{x=L} - \frac{dv}{dx} EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=-L}^{x=L} + \int_{-L}^L \frac{d^2 v}{dx^2} EI \frac{d^2 w}{dx^2} dx = \int_{-L}^L v q dx \quad \text{II.9-12}$$

II.9.3.b. Conditions aux limites du problème

- En termes de déplacement (conditions aux limites essentielles)

Pour $x=0$ nous avons $w=0$

Pour $x = L$ et $x = -L$ nous avons $w = 0$

- En termes d'effort (conditions aux limites naturelles)

$$M(x = -L) = M(x = L) = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=\pm L} = 0$$

Les moments sont nuls aux extrémités libres des poutres. Ils sont proportionnels à la courbure

$\frac{d^2 w}{dx^2}$ et donc le terme limite $\frac{dv}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=-L}^{x=L}$ s'annule, ce qui réduit l'équation **II.9-12** à l'expression :

$$EI \left(v \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=-L}^{x=L} + \int_{-L}^L \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 w}{dx^2} dx \right) = \int_{-L}^L v q dx \quad \text{II.9-13}$$

II.9.3.c. Choix de la fonction d'approximation

Nous choisissons une fonction d'approximation $u(x)$ qui satisfait aux conditions aux limites en termes de déplacement imposées sur la fonction $w(x)$, c'est à dire

$$w(x) \rightarrow u(x) = x(x^2 - L^2)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots) \quad \text{II.9-14}$$

Cette forme de la fonction $u(x)$ respecte toutes les conditions aux limites en termes de déplacement. En revanche, il n'est pas nécessaire qu'elle soit 4 fois dérivable comme imposé par la formulation forte.

II.9.4. Résolution par la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin consiste à choisir comme fonction de pondération $v(x)$ l'ensemble des variations de $u(x)$

$$v(x) = \delta u(x) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i P_i(x)$$

Compte tenu du fait que $v(x)$ respecte aussi les conditions aux limites essentielles, c'est à dire que

$$v(x = \pm L) = \delta u(\pm L) = \sum_{i=1}^n \delta \alpha_i P_i(\pm L) = 0$$

Le terme limite $v \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=-L}^{x=L}$ de l'équation II.9-13 s'annule et l'équation devient finalement :

$$EI \int_{-L}^L \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_{-L}^L v q dx \quad \text{II.9-15}$$

II.9.4.a. Approximation à deux paramètres

Nous pouvons choisir de résoudre l'équation ci-dessus avec une approximation à deux paramètres :

$$u(x) = x(x^2 - L^2)(\alpha_0 + \alpha_1 x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x)$$

Avec $P_0(x) = (x^3 - L^2 x)$ et $P_1(x) = (x^4 - L^2 x^2)$.

En portant $v(x)$ et $u(x)$ dans l'équation II.9-14, nous obtenons l'expression indicelle suivante :

$$EI \int_{-L}^L \left(\delta \alpha_j \frac{d^2 P_j(x)}{dx^2} \right) \left(\alpha_i \frac{d^2 P_i(x)}{dx^2} \right) dx = \int_{-L}^L \delta \alpha_j P_j(x) q dx$$

Cette égalité doit être vraie quelque soient $\delta \alpha_j$, ce qui nous permet d'écrire :

$$EI \int_{-L}^L \frac{d^2 P_j(x)}{dx^2} \left(\alpha_i \frac{d^2 P_i(x)}{dx^2} \right) dx = \int_{-L}^L P_j(x) q dx \quad i, j = 0, 1 \quad \text{II.9-16}$$

ou

$$\begin{aligned} EI \int_{-L}^L \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} \left(\alpha_0 \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} \right) dx &= \int_{-L}^L P_0(x) q dx \\ EI \int_{-L}^L \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} \left(\alpha_0 \frac{d^2 P_0(x)}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d^2 P_1(x)}{dx^2} \right) dx &= \int_{-L}^L P_1(x) q dx \end{aligned} \quad \text{II.9-17}$$

Les termes de chargement q des équations **II.9-17** comportent deux termes : le 1^{er} est une intégrale sur $[-L, 0]$ de la charge répartie q . Le 2^{ème} est une évaluation de $P_i(x)$ en $x=L/2$ avec qdx identifié à F (terme de Dirac, voir annexe **A**), nous avons donc :

$$\int_{-L}^L P_j(x)qdx = q \int_{-L}^0 P_j(x)dx + P_j\left(\frac{L}{2}\right)F$$

En remplaçant les fonctions $P_i(x)$ par leurs expressions nous évaluons les équations **II.9-17** comme suit :

$$EI \int_{-L}^L 6x(6\alpha_0 x + \alpha_1(12x^2 - 2L^2))dx = q \int_{-L}^0 (x^3 - L^2x)dx + \left(\frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{2}\right)F$$

$$EI \int_{-L}^L (12x^2 - 2L^2)(6\alpha_0 x + \alpha_1(12x^2 - 2L^2))dx = q \int_{-L}^0 (x^4 - L^2x^2)dx + \left(\frac{L^4}{16} - \frac{L^4}{4}\right)F$$

Et nous obtenons les valeurs de α_0 et α_1 en inversant le système linéaire :

$$96EI\alpha_0 = qL - \frac{3F}{2}$$

$$\frac{168}{5}EI\alpha_1 = -\frac{2}{15}q - \frac{3}{16}\frac{F}{L}$$

et nous déduisons :

$$\alpha_0 = \frac{qL - \frac{3F}{2}}{96EI}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\frac{2}{3}q + \frac{15}{16}\frac{F}{L}}{168EI}$$

II.9.4.b. Approximation à plusieurs paramètres

Par ailleurs, nous proposons des solutions numériques basées sur des approximations à plusieurs paramètres. Les courbes de la figure **II.14** montrent les flèches obtenues avec des approximations à 3, 5 et 7 paramètres ; La charge répartie q étant nulle.

Des graphes de la figure **II-14**, la courbe de la flèche se confond avec la courbe théorique. Pour les courbes des efforts internes, la convergence est très lente à cause de l'existence des discontinuités aux appuis et au point de l'application de la charge ponctuelle. Les

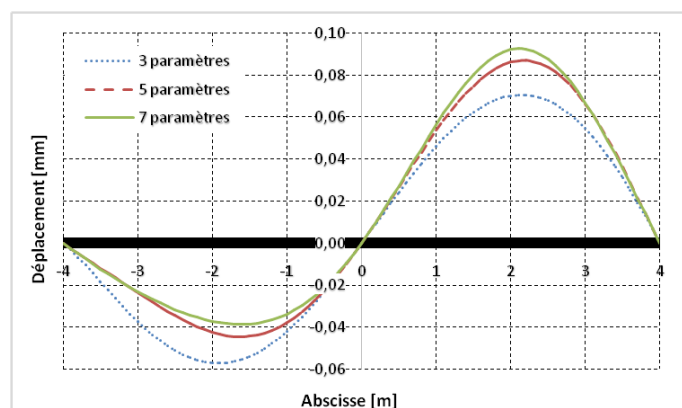


Figure II-14 : courbes des déplacements

polynômes de degré inférieur ne peuvent pas représenter des courbes ayant de fortes variations dans certaines zones (taux de variation infinie dans le cas de l'effort tranchant) et de faibles variations dans d'autres zones voisines. Ceci n'est possible qu'avec des polynômes de degré plus grand.

Il ressort de ces courbes que le taux de convergence de la fonction $u(x)$ est plus grand que celui de ses dérivées. En général, la convergence de la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $u(x)$ est plus lente que celle des dérivées d'ordre inférieur. Ceci est très observé sur la courbe des efforts tranchants. La courbe de moment est continue mais que sa dérivée première ne l'est pas (c'est-à-dire que la courbe de l'effort tranchant est discontinue).

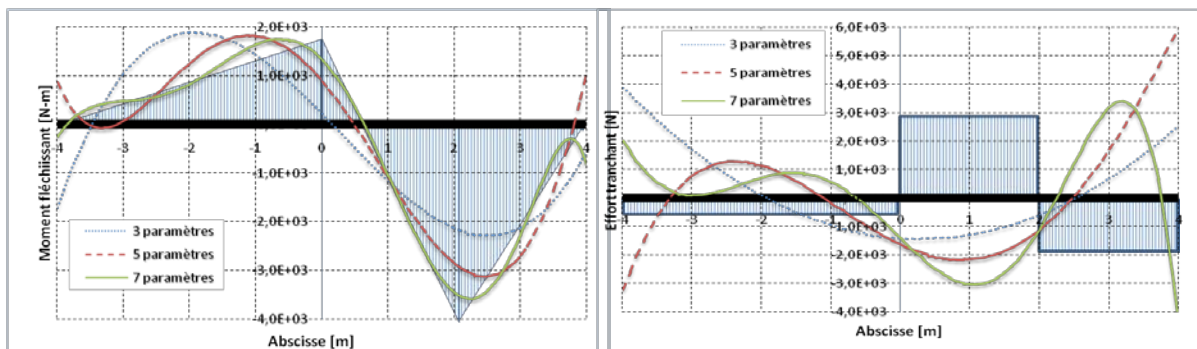


Figure II-15 : Diagrammes des efforts internes : moment fléchissant (à gauche) et effort tranchant (à droite) pour les 3 approximations et la solution analytique

L'intérêt de cet exemple est de mettre en lumière les problèmes de précision de la solution obtenue. Les courbes des solutions numériques étant, par définition, continues et dérivables, elles ne peuvent pas représenter une fonction discontinue comme celle de l'effort tranchant. Et il n'est pas recommandé de prendre des approximations polynomiales de degré très grand car ceci générerait des instabilités numériques en général difficile à surmonter. Nous pouvons contourner cette difficulté en choisissant une technique d'approximation polynomiale continue par morceau. L'avantage est d'utiliser des polynômes de degré faible (que la formulation faible rend possible) sur des parties limitées du domaine d'étude, par exemple les intervalles où l'effort tranchant est continu. C'est ce qu'on appelle approximation par élément fini qui fera l'objet du chapitre suivant.

II.10 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons exposé la première étape de résolution, par la méthode des résidus, des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles, à savoir, la discrétisation algébrique des formes intégrales. Celles-ci sont de deux types : la forme forte et la forme faible. Dans la formulation forte, il n'est pas explicité les conditions de frontières. Ces dernières apparaissent dans la formulation faible sous l'expression des intégrales de frontières qui apparaissent lors des

transformations intégrales appliquées à la forme forte (intégration par partie, théorème de Green). Le théorème de Green est une généralisation de l'intégration par partie de fonctions à deux variables. Il est tout aussi généralisable pour des problèmes à 3 dimensions comme nous l'avons fait pour l'équilibre des solides déformables (§ II.9).

La discrétisation algébrique est une troncature de la solution exacte par une approximation à nombre fini de paramètres (on dit aussi à nombre fini de *ddl*). Cette approximation est choisie dans un espace fonctionnel de dimension finie. On choisit en général un espace à base polynomiale. Si la solution exacte du problème appartient à un espace fonctionnel de dimension finie, alors la résolution du système différentiel peut être exacte si la solution est recherchée dans ce même espace.

Cette opération de discrétisation ramène un problème ayant une infinité de degrés de liberté (problème continu), à un problème à nombre fini de degrés de liberté (problème discret) que sont les paramètres de l'approximation et qui apparaissent linéairement dans des équations dites algébriques. Cette linéarité provient de celle des équations différentielles.

Nous pouvons appliquer cette stratégie à la formulation faible dont l'intérêt est qu'elle nous permet d'utiliser des approximations polynomiales de faible degré. Mais l'intérêt de cette formulation se trouve dans l'utilisation d'une approximation continue par sous-domaine où nous pouvons, par exemple, suggérer que la variation du champ inconnu y est linéaire. La construction d'une approximation continue par sous-domaine est connue sous le nom de l'approximation par élément fini.

Chapitre III APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS

Les ouvrages [E1], [G2], [K1], [V1] et [Z1] sont nécessaires pour approfondir les connaissances sur les concepts d'éléments finis en mécanique. Il existe plusieurs approximations qui donnent lieu à des éléments finis adaptés à des problèmes spécifiques dans le domaine des sciences de l'ingénieur.

III.1 INTRODUCTION

Bien que pour l'étude des systèmes continus, la forme faible discrète s'appuyant sur la méthode de Galerkin soit une approche à première vue plus puissante que la formulation forte basée sur l'écriture directe des équations différentielles de l'équilibre, elle laisse rapidement entrevoir ses limites en présence de géométrie complexe, son inconvénient principale résidant dans le fait que les fonctions d'approximation représentant les inconnues du système continu sont définies globalement sur l'ensemble du domaine étudié.

La *méthode des éléments finis* contourne cette difficulté en subdivisant le domaine géométrique du système étudié de forme complexe en un assemblage de sous-domaines ou éléments de formes simples. Dérivée en tant que cas particulier d'application de la méthode de Galerkin, elle constitue un procédé numérique général et systématique pour la discrétisation spatiale des systèmes de types très variés.

Dans ce chapitre, on présentera les techniques de construction des fonctions d'approximation grâce auxquelles nous pouvons réaliser une discrétisation d'un système continu. Nous commençons par décrire l'approximation nodale sur un domaine Ω , pour ensuite introduire la notion d'approximation nodale par sous-domaine dite approximation par éléments finis.

III.2 CONCEPT DE BASE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solutions par sous-domaines. L'approximation est basée sur la détermination d'un nombre fini de variables, lesquelles sont les valeurs approchées de la fonction en un certain nombre de points appelés nœuds.

III.2.1. Approche globale de la méthode

Dans la méthode des éléments finis, le domaine étudié est considéré comme un assemblage d'éléments à géométrie simple (segment de droite en une dimension, triangle ou quadrilatère en deux dimensions, tétraèdre, prisme ou hexaèdre en trois dimensions) et à configuration structurelle bien définie (barre, poutre, coque, solide... pour les systèmes mécaniques), reliés entre eux en un nombre fini de nœuds ou points nodaux (**Fig. III.1**).

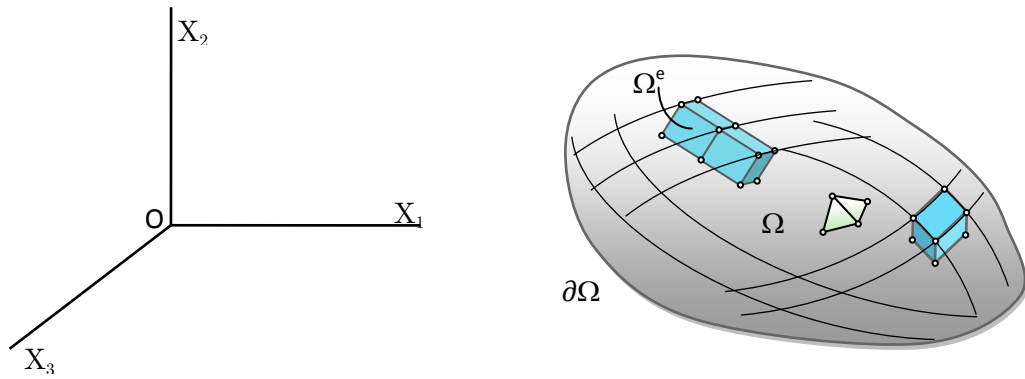


Figure III-1 : Discretisation schématique d'un domaine géométrique en éléments finis

A chacun des p nœuds du réseau d'éléments finis est alors attachée une fonction de forme nodale $N_i(\mathbf{x})$ ($i=1,2,\dots, p$). Les champs approché \mathbf{u} et virtuel $\delta\mathbf{u}$ caractérisant le comportement du système sont construits par combinaison linéaire de ces fonctions de forme analogues aux relations II.5-1 et II.6-5 :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^p \mathbf{q}^i N_i(\mathbf{x}) \\ \delta\mathbf{u} &= \sum_{i=1}^p \delta\mathbf{q}^i N_i(\mathbf{x})\end{aligned}\quad \text{III.2-1}$$

\mathbf{q}^i et $\delta\mathbf{q}^i$ représentent les valeurs nodales au nœud i des champs approché \mathbf{u} et virtuel $\delta\mathbf{u}$, $N_i(\mathbf{x})$ est la fonction de forme nodale rattachée au nœud i .

Il est important de noter que les conditions aux limites essentielles ne sont pas représentées dans les équations III.2-1. Elles ne seront intégrées qu'une fois le système algébrique équivalent au système continu soit construit. Les fonctions de forme nodales sont, par convention, définies comme des polynômes par morceaux de faible degré, les opérations à effectuer au niveau élémentaire sont très simples et en général limitées à un nombre restreint d'éléments finis génériques servant, comme nous le verrons dans ce chapitre, d'archétypes aux éléments constituant le réseau.

Pour simplifier l'écriture, il convient d'écrire les équations II.2-1 sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} \\ \delta\mathbf{u} &= \mathbf{N} \cdot \delta\mathbf{q}\end{aligned}\quad \text{III.2-2}$$

avec

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_p & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_p \end{array} \right)$$

et

$$\mathbf{q} = \left\langle q_1^1 \quad q_2^1 \quad q_3^1 \mid q_1^2 \quad q_2^2 \quad q_3^2 \mid \dots \mid q_1^p \quad q_2^p \quad q_3^p \right\rangle^T$$

\mathbf{N} représente la matrice $(3 \times 3p)$ des fonctions de forme nodales et \mathbf{q} est le vecteur nodal des déplacements renfermant les $3p$ inconnues discrètes de l'approximation et $\delta \mathbf{q}$ est le vecteur nodal des déplacements virtuels.

III.2.2. Approche locale de la méthode

Le point de vue global décrit brièvement au paragraphe précédent étant indispensable pour le développement des propriétés mathématiques de la méthode des éléments finis, seule l'approche traditionnelle *locale* ou dite *élémentaire* est véritablement adaptée à l'algorithmique du procédé et à la construction des divers éléments finis. Ce point de vue est basé sur la compacité des fonctions de forme, c'est à dire, la réduction ou la localisation ${}^e \mathbf{u}$ du champ \mathbf{u} sur un domaine ${}^e \Omega$ d'un élément fini du réseau ou du maillage par l'équation

$${}^e \mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot {}^e \mathbf{q} \quad \text{III.2-3}$$

L'indice supérieur gauche symbolise le caractère local de l'équation ; ${}^e \mathbf{q}$ est le vecteur à $3n$ composantes représentant la restriction du vecteur \mathbf{q} à l'élément e considéré, n étant le nombre de nœuds constituant l'élément.

Le champ global \mathbf{u} est obtenu par sommation sur tous les éléments constituant le maillage

$$\mathbf{u} = \sum_{e=1}^r \mathbf{u}^e \quad \text{III.2-4}$$

où r est le nombre total d'éléments finis du maillage tel que $\Omega = \bigcup_{e=1}^r \Omega^e$.

III.3 APPLICATION AUX PROBLEMES MECANIQUES EN ELASTICITE LINEAIRE

Nous pouvons appliquer cette stratégie de localisation au vecteur champ de déplacement \mathbf{u} dans l'équation II.9-7 (chap. II), issue du principe des travaux virtuels qui n'est autre que la forme intégrale faible des équations d'équilibre.

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega = \int_{\partial \Omega} (\hat{\delta \mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}) dA + \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) d\Omega \quad \text{III.3-1}$$

$\hat{\delta \mathbf{u}} = \left\langle \hat{\delta u}_1 \quad \hat{\delta u}_2 \quad \hat{\delta u}_3 \right\rangle$ est le champ de déplacement évalué à la frontière $\partial \Omega$ du domaine.

Introduisons la loi de comportement en élasticité linéaire (loi de Hooke généralisée) sous la forme matricielle :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{III.3-2}$$

où \mathbf{C} est la matrice des propriétés élastiques, $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ étant les tenseurs de contrainte et de déformation exprimés sous la forme vectorielle suivante :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left\langle \sigma_{1,1} \quad \sigma_{2,2} \quad \sigma_{3,3} \quad \sigma_{1,2} \quad \sigma_{1,3} \quad \sigma_{2,3} \right\rangle^T$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\langle \varepsilon_{1,1} \quad \varepsilon_{2,2} \quad \varepsilon_{3,3} \quad \gamma_{1,2} \quad \gamma_{1,3} \quad \gamma_{2,3} \right\rangle^T$$

La relation géométrique entre le champ de déformation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et le champ de déplacement \mathbf{u} peut s'écrire dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations comme :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} \\ \varepsilon_{2,2} \\ \varepsilon_{3,3} \\ \gamma_{1,2} \\ \gamma_{1,3} \\ \gamma_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} \quad \text{III.3-3}$$

\mathbf{L} est l'opérateur différentiel de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}^T \quad \text{III.3-4}$$

et \mathbf{u} le vecteur champ de déplacement $\left\langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \right\rangle^T$.

En portant l'expression III.2-2 de \mathbf{u} dans III.3-3, nous écrivons la matrice de passage des déplacements vers les déformations :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad \text{III.3-5}$$

La matrice \mathbf{B} est la matrice des dérivées des fonctions de forme. Elle est de taille (6×3p) et s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x_2} & \frac{\partial N_p}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial x_3} & \frac{\partial N_p}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{III.3-6}$$

Par la suite, la forme intégrale faible de l'équation d'équilibre s'écrit de manière concise sur un élément Ω comme :

$$\int_{\Omega} (\delta^e \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\delta^e \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t}) dA + \int_{\Omega} (\delta^e \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}) d\Omega \quad \text{III.3-7}$$

En remplaçant la fonction approchée \mathbf{u} par son expression nodale III.2-3 nous écrivons :

$$\int_{\Omega} (\delta^e \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\delta^e \mathbf{q}^T \cdot \widehat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{t}) dA + \int_{\Omega} (\delta^e \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f}) d\Omega \quad \text{III.3-8}$$

Nous réécrivons l'équation ci-dessus, compte tenu de l'associativité du produit matriciel et aussi du fait que $\delta^e \mathbf{q}$ et \mathbf{q} ne sont pas des fonctions des variables spatiales :

$$\delta^e \mathbf{q}^T \cdot \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega \cdot \mathbf{q} = \delta^e \mathbf{q}^T \cdot \left(\int_{\partial\Omega} \widehat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{t} dA + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} d\Omega \right)$$

Cette équation doit être vraie quel que soit le déplacement virtuel $\delta^e \mathbf{q}$; nous déduisons donc :

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega \cdot \mathbf{q} = \int_{\partial\Omega} \widehat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{t} dA + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad \text{III.3-9}$$

Cette dernière équation est linéaire en \mathbf{q} et elle peut se mettre sous la forme concise :

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{q} = \mathbf{F}^e \quad \text{III.3-10}$$

avec

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} d\Omega \quad \text{III.3-11}$$

et

$$\mathbf{F}^e = \int_{\partial\Omega} \widehat{\mathbf{N}}^T \cdot \mathbf{t} dA + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} d\Omega \quad \text{III.3-12}$$

\mathbf{K}^e est appelée matrice de rigidité élémentaire et \mathbf{F}^e est le vecteur élémentaire nodal de chargement issu des forces de surface \mathbf{t} et des forces de volume \mathbf{f} . La matrice de rigidité globale est construite par assemblage de toutes les matrices de rigidité élémentaires. Cette étape de la MEF est

très simple à réaliser, mais pour les besoins de ce chapitre, nous allons d'abord présenter les méthodes de construction des fonctions de forme nodales.

III.4 CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME

La construction des fonctions de forme nodales est basée sur un choix d'une base polynomiale. Nous avons déjà exprimé la fonction d'approximation \mathbf{u} comme une combinaison linéaire des fonctions linéairement indépendantes de la forme donnée par l'équation II.5-1 (chap. II).

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i P_i(\mathbf{x}) \quad \text{III.4-1}$$

Les coefficients \mathbf{a}_i n'ont en général pas de signification physique. Nous préférons substituer la forme III.4-1 à celle donnée par l'expression III.2-1. Les deux formes sont équivalentes sauf que l'écriture de la première forme est générale et la deuxième est dite Lagrangienne. Pour cela, calculons le champ \mathbf{u} en un certain nombre de points \mathbf{x}^i appartenant au domaine Ω . Ces points sont appelés nœuds de l'approximation et la valeur \mathbf{u}_i que prend le champ \mathbf{u} en ces points sont appelées valeurs nodales.

La fonction d'approximation doit être continue à l'interface de deux sous-domaines ou éléments finis. On dit alors que l'approximation par élément fini est de continuité C^0 (élément lagrangien). Si en plus elle doit satisfaire la condition de continuité de ses dérivées premières, continuité de classe C^1 , l'élément est dit hermitien. Un élément fini associé à une fonction d'approximation lagrangienne ou hermitienne, est dit **compatible**.

Les fonctions d'approximation doivent aussi permettre de représenter les états de déformation nulle (mode rigide) et les états de déformation constante. L'élément fini est alors dit **complet**. Un élément fini compatible et complet est dit **conforme**.

III.4.1. Méthode générale

Si u est une fonction des variables spatiales x , y et z , nous pouvons écrire l'équation III.4-1 comme :

$$u = a_1 P_1(\mathbf{x}) + a_2 P_2(\mathbf{x}) + \dots + a_n P_n(\mathbf{x}) = \left\langle P_1(\mathbf{x}) \quad P_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad P_n(\mathbf{x}) \right\rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad \text{III.4-2}$$

Sur un ensemble de points appelés nœuds constituant l'élément e , nous pouvons évaluer la fonction $u(\mathbf{x})$ en ces points comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1 P_1(\mathbf{x}_1) + a_2 P_2(\mathbf{x}_1) + \dots + a_n P_n(\mathbf{x}_1) \\
 u_2 &= a_1 P_1(\mathbf{x}_2) + a_2 P_2(\mathbf{x}_2) + \dots + a_n P_n(\mathbf{x}_2) \\
 &\dots\dots\dots \\
 u_n &= a_1 P_1(\mathbf{x}_n) + a_2 P_2(\mathbf{x}_n) + \dots + a_n P_n(\mathbf{x}_n)
 \end{aligned}$$

III.4-3

Sous forme matricielle nous écrivons :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & P_2(\mathbf{x}_1) & \dots & P_n(\mathbf{x}_1) \\ P_1(\mathbf{x}_2) & P_2(\mathbf{x}_2) & \dots & P_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\mathbf{x}_n) & P_2(\mathbf{x}_n) & \dots & P_n(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

III.4-4

Par cette équation, nous pouvons exprimer les paramètres généraux a_i en fonction des valeurs nodales u_i en inversant l'équation III.4-4 ci-dessus.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(\mathbf{x}_1) & P_2(\mathbf{x}_1) & \dots & P_n(\mathbf{x}_1) \\ P_1(\mathbf{x}_2) & P_2(\mathbf{x}_2) & \dots & P_n(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\mathbf{x}_n) & P_2(\mathbf{x}_n) & \dots & P_n(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

III.4-5

En substituant les paramètres généraux a_i de la forme II.4-2 par leurs expressions traduites par l'équation III.4-5, nous obtenons une forme dite nodale d'expression :

$$u(\mathbf{x}) = u_1 N_1(\mathbf{x}) + u_2 N_2(\mathbf{x}) + \dots + u_n N_n(\mathbf{x})$$

III.4-6

$N_i(x)$ sont les fonctions de forme et nous avons :

$$u_j = u(\mathbf{x}_j) = u_1 N_1(\mathbf{x}_j) + u_2 N_2(\mathbf{x}_j) + \dots + u_n N_n(\mathbf{x}_j) = u_j N_j(\mathbf{x}_j)$$

Cette relation doit être vraie quelque soient les valeurs nodales u_i , ce qui implique donc la propriété fondamentale suivante :

$$N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

III.4-7

III.4.2. Cas de fonctions à une seule variable

III.4.2.a. Approximation de Lagrange à 2 nœuds

L'approximation nodale à 2 nœuds d'abscisses x_0 et x_1 se construit avec l'approximation générale de forme polynomiale de degré 1 suivante :

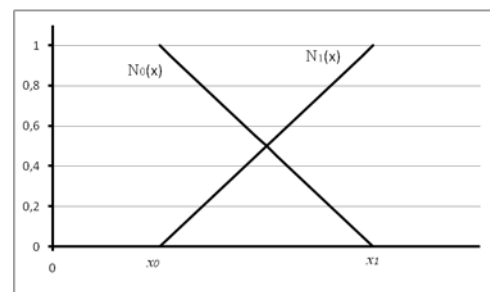


Figure III-2 : fonctions de formes nodales construites sur 2 nœuds

$$u(x) = a_0 + a_1 x = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

III.4-8

L'expression III.4-4 s'écrit alors

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}$$

En inversant l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{pmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix}$$

En portant les paramètres généraux a_i dans l'équation III.4-7 et en mettant en facteur les paramètres nodaux u_i , nous obtenons la relation suivante :

$$u(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} u_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} u_1$$

Et les fonctions de forme s'identifient alors comme :

$$N_0(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$$

$$N_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

III.4-9

La figure III.2 montre l'allure des 2 fonctions N_0 et N_1 . On voit bien que la propriété III.4-6 est satisfaite.

III.4.2.b. Approximation quadratique de Lagrange à 3 nœuds

L'approximation nodale quadratique se construit sur 3 points d'abscisses x_0 , x_1 et x_2 avec l'interpolation de forme générale polynomiale de degré 2 suivante :

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

III.4-10

L'équation III.4-3 devient alors :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

Pour simplifier les écritures prenons un exemple de trois points d'abscisses $x_0=1$, $x_1=2$ et $x_2=4$, alors nous écrivons :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

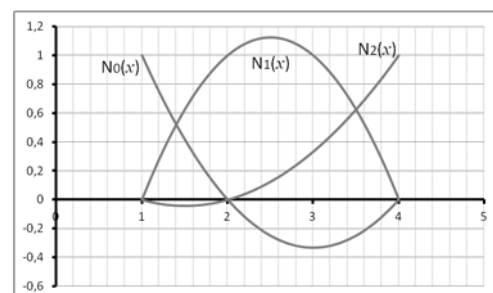


Figure III-3 : fonctions de formes de Lagrange construites sur 3 nœuds

ou

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & -12 & 2 \\ -12 & 15 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

En portant les valeurs des a_i dans III.4-9 nous déduisons les fonctions de forme nodales suivantes :

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \frac{1}{6}(16 - 12x + 2x^2) \\ N_1(x) &= \frac{1}{6}(-12 + 15x - 3x^2) \\ N_2(x) &= \frac{1}{6}(2 - 3x + x^2) \end{aligned}$$

La figure III-3 montre l'allure quadratique de ces fonctions nodales et l'on voit bien qu'elles respectent aussi la propriété III.4-6.

III.4.2.c. Approximation hermitienne à 2 nœuds

L'approximation nodale quadratique de type hermitienne se construit sur 2 points d'abscisses x_0 et x_1 avec l'interpolation de forme générale polynomiale de degré 2 donnée par III.4-10. Les valeurs nodales sont celle de la fonction $u(x)$ en x_0 et x_1 ainsi que la valeur p_0 de sa dérivée en x_0 . Prenons l'exemple où $x_0=0$ et $x_1=L$:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ p_0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

En inversant l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{pmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \\ -1 & 1 & -L \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ p_0 \end{Bmatrix}$$

Les fonctions nodales se déduisent donc :

$$\langle N_0(x) \quad N_1(x) \quad N_2(x) \rangle = \frac{1}{L^2} \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \cdot \begin{pmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 \\ -1 & 1 & -L \end{pmatrix}$$

où

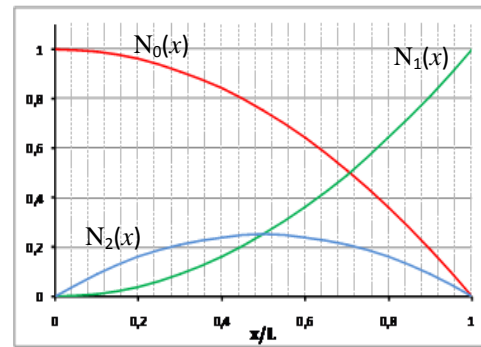


Figure III-4 : fonctions nodales hermitiennes construites sur 2 nœuds

$$N_0(x) = \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

$$N_1(x) = \frac{x^2}{L^2}$$

$$N_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Toute interpolation équivalente à l'expression III.4-10 et utilisant les valeurs nodales, s'exprime par :

$$u(x) = u_0 N_0(x) + u_1 N_1(x) + p_0 N_2(x)$$

III.5 ELEMENT FINI A UNE DIMENSION

III.5.1. Barres en traction-compression

Soit un élément barre en compression-traction de section transversale constante. Nous allons utiliser l'approximation nodale pour calculer la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local de cet élément.

Les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ se réduisent respectivement aux composantes $\sigma_{1,1}$ et $\varepsilon_{1,1}$ dont la relation est celle de Hooke à une dimension, E étant le module d'Young :

$$\sigma_{1,1} = E\varepsilon_{1,1}$$

Le champ de déplacement \mathbf{u} se réduit lui aussi à la composante u_1 qui est le déplacement axial d'une section d'abscisse x . La relation qui lie la déformation $\varepsilon_{1,1}$ au champ de déplacement u_1 est :

$$\varepsilon_{1,1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1}{dx_1}$$

L'approximation du champ de déplacement u_1 se met alors sous la forme :

$$u_1 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{q} = \left\langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_p \right\rangle \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^p \end{pmatrix}$$

La matrice \mathbf{B} se réduit alors :

$$\mathbf{B} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial N_p}{\partial x_1} \right\rangle$$

L'équation III.3-9 qui donne la matrice de rigidité élémentaire, s'écrit dans le cas d'un élément barre en traction-compression comme suit :

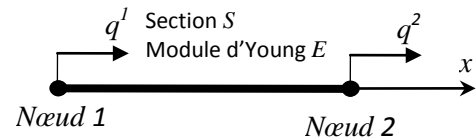


Figure III-5 : Élément fini de type barre en traction-compression

$${}^e \mathbf{K} = \int_0^L \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_p}{\partial x_1} \end{pmatrix} \cdot E \cdot \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x_1} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial N_p}{\partial x_1} \right\rangle S dx$$

Si nous prenons l'exemple d'une approximation linéaire ($p=2$) en remplaçant les fonctions nodales N_i par leurs expressions correspondantes, $N_1 = 1 - \frac{x}{L}$ et $N_2 = \frac{x}{L}$, la matrice de rigidité devient finalement :

$${}^e \mathbf{K} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A FAIRE : trouver la matrice de rigidité dans le cas d'une approximation quadratique.

III.5.2. Poutre en flexion

Soit un élément barre en flexion de section transversale $\Sigma(x)$ constante. Nous allons utiliser l'approximation nodale pour calculer la matrice de rigidité élémentaire dans le repère local de cet élément. Les hypothèses en vigueur sont celles issues de la théorie des poutres en *RDM* (hypothèse de Bernoulli).

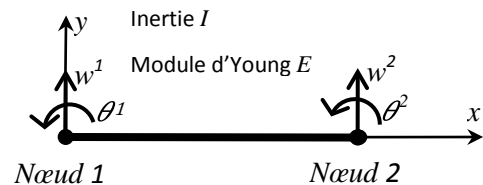


Figure III-6 : élément fini de type barre en flexion à 2 nœuds

Le nombre de degrés de liberté pour chaque nœud est égal à deux. Ce sont le déplacement transversal w suivant l'axe y et la rotation θ_z autour de l'axe transversal z . Il existe une relation entre les deux degrés de liberté dans le cadre de l'hypothèse de Bernoulli, à savoir,

$$\theta^i = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=x_i} \quad \text{III.5-1}$$

Cet élément est de type hermitien car, dans ce cas, le champ de déplacement $w(x)$ doit être dérivable pour pouvoir définir les rotations $\theta_z(x)$.

Le déplacement \mathbf{u} d'un point d'une section droite est donné par la formule géométrique suivante :

$$\mathbf{u} = \langle u_x \quad u_y \quad u_z \rangle^T = \langle -y\theta_z \quad w \quad 0 \rangle^T$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'écrit selon la relation III.3-2 comme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -y\theta_z \\ w \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \\ -\theta_z + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Compte tenu de l'hypothèse de Bernoulli, la 4^{ème} composante du vecteur champ de déformation est identiquement nulle, ce qui nous permet de réduire l'état de déformation à la déformation axiale :

$$\varepsilon_{1,1} = -y \frac{d\theta_z}{dx} \quad \text{III.5-2}$$

L'expression de l'énergie interne, produit tensoriel doublement contracté des tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\delta\varepsilon}$, se réduit donc au produit des composantes $\sigma_{1,1}$ et $\delta\varepsilon_{1,1}$.

Pour pouvoir calculer le déplacement généralisé d'une section droite (un déplacement transversal et une rotation) par valeurs nodales, nous définissons alors le vecteur-déplacement nodal d'un élément barre en flexion à deux nœuds de la manière suivante :

$$\mathbf{q} = \langle w^1 \quad \theta^1 \quad w^2 \quad \theta^2 \rangle^T \quad \text{III.5-3}$$

Nous avons donc 4 degrés de liberté par éléments, deux pour chaque nœud. Nous avons besoin de 4 paramètres généraux et donc d'une base polynomiale de degré 3 :

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \text{III.5-4}$$

Le champ des rotations se déduit alors comme :

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \quad \text{III.5-5}$$

Le champ de déplacement généralisé est celui d'une section subissant un déplacement transversal et une rotation :

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{III.5-6}$$

Les coordonnées des nœuds sont $x_1=0$ et $x_2=L$, L étant la longueur de l'élément de poutre, nous écrivons alors le vecteur-déplacements nodal comme suit :

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

En portant les paramètres généraux a_i dans l'approximation polynomiale,

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

nous déduisons les fonctions de formes suivantes :

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_1' & N_2' & N_3' & N_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

III.5-7

Introduisons maintenant ces expressions dans l'équation des travaux virtuels, sachant que les composantes suivant l'axe z des chargements surfacique \mathbf{t} et volumique \mathbf{f} sont nulles (pas de flexion déviée) :

$$\int_{\Omega} E(-y \cdot \frac{d\theta_z}{dx})(-y \cdot \delta \frac{d\theta_z}{dx}) \cdot dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \left\langle -y\delta\theta_z \quad \delta w \quad 0 \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ 0 \end{Bmatrix} dA + \int_{\Omega} \left\langle -y\delta\theta_z \quad \delta w \quad 0 \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{Bmatrix} dx dy dz \quad \text{III.5-8}$$

En développant cette expression, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} EI \frac{d\theta_z}{dx} \cdot \delta \frac{d\theta_z}{dx} \cdot dx = \int_{\partial\Omega} (-y\delta\theta_z \cdot t_x + \delta w \cdot t_y) dA + \int_{\Omega} (-y\delta\theta_z \cdot f_x + \delta w \cdot f_y) dx dy dz \quad \text{III.5-9}$$

Avec $I = \int_{\Sigma} y^2 dy dz$ étant le moment d'inertie de la section transversale Σ de la poutre suivant l'axe z .

Les termes de droite de l'équation III.5-9 peuvent se simplifier de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (-y\delta\theta_z \cdot t_x) dA &= \int_0^L \delta\theta_z \left[\int_{\partial\Sigma} (-y \cdot t_x) dl \right] dx = \int_0^L \delta\theta_z \cdot c_z^s dx \\ \int_{\Omega} (-y\delta\theta_z \cdot f_x) dx dy dz &= \int_0^L \delta\theta_z \left[\int_{\Sigma} -y f_x dy dz \right] dx = \int_0^L \delta\theta_z \cdot c_z^v dx \\ \int_{\partial\Omega} (\delta w \cdot t_y) dA &= \int_0^L \delta w \left[\int_{\partial\Sigma} t_y \cdot dl \right] dx = \int_0^L \delta w \cdot q_y^s dx \\ \int_{\Omega} (\delta w \cdot f_y) dx dy dz &= \int_0^L \delta w \left[\int_{\Sigma} f_y dy dz \right] dx = \int_0^L \delta w \cdot q_y^v dx \end{aligned}$$

c_z^s , c_z^v , q_y^s et q_y^v sont respectivement des moments de flexion et des charges réparties sur la longueur de la poutre issus des forces de surface (sur-indice 's') et des forces de volume (sur-indice 'v'). Pour annuler les effets axiaux des composantes des charges t_x et f_x , les expressions suivantes doivent être satisfaites :

$$\begin{aligned} \int t_x dl &= 0 \\ \int_{\Sigma} f_x dy dz &= 0 \end{aligned}$$

Ces expressions ci-dessus ne traduisent que l'absence de l'effort normal engendré par les charges axiales t_x et f_x sur une section transversale.

Remplaçons les fonctions w et θ_z de l'équation III.5-4 par leurs expressions issues de l'équation III.5-3 en supposant le terme EI constant, nous écrivons alors :

$$\begin{aligned}
 & EI \int_{\Omega} \langle \delta w^1 \quad \delta \theta^1 \quad \delta w^2 \quad \delta \theta^2 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} \cdot \langle N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4'' \rangle \cdot \begin{Bmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} \cdot dx \\
 &= \int_{\partial\Omega} \langle \delta w^1 \quad \delta \theta^1 \quad \delta w^2 \quad \delta \theta^2 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot q_y dx + \int_{\partial\Omega} \langle \delta w^1 \quad \delta \theta^1 \quad \delta w^2 \quad \delta \theta^2 \rangle \cdot \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{Bmatrix} \cdot c_z dx
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne finalement :

$$EI \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} \cdot \langle N_1'' \quad N_2'' \quad N_3'' \quad N_4'' \rangle dx \cdot \begin{Bmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot q_y dx + \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{Bmatrix} \cdot c_z dx$$

L'écriture matricielle de l'équation ci-dessus est :

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{F}^e$$

Avec :

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^e = \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} \cdot q_y dx + \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \\ N_3' \\ N_4' \end{Bmatrix} \cdot c_z dx$$

Cette équation peut se mettre sous la forme indicielle suivante :

$$EI \int_0^L N_i'' N_j'' dx \cdot q^j = \int_0^L N_i q_y dx + \int_0^L N_i' c_z dx$$

EXEMPLE III.5-1 :

La flèche d'une poutre isostatique de longueur L soumise à une force concentrée F sur la section médiane ($x=L/2$) est donnée, selon les formulaires de la *RDM* appliqués aux poutres, par la

formule $\frac{FL^3}{48EI}$. La formulation par élément fini nous donne :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \theta^1 \\ w^2 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} \cdot q_y dx = F \begin{pmatrix} N_1(x=L/2) \\ N_2(x=L/2) \\ N_3(x=L/2) \\ N_4(x=L/2) \end{pmatrix}$$

Après application des conditions aux limites ($w^1=w^2=0$), l'équation finale s'écrit :

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 \\ 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} L/8 \\ -L/8 \end{pmatrix}$$

En inversant l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} = \frac{FL^2}{96EI} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{FL^2}{16EI} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'approximation nodale de la déformée s'écrit alors, compte tenu des conditions aux limites :

$$w(x) = N_2 \theta^1 + N_4 \theta^2$$

L'estimation de la flèche au milieu de la poutre ($x=L/2$) donne :

$$w(x=L/2) = \frac{L}{8} \theta^1 - \frac{L}{8} \theta^2 = \frac{FL^3}{64EI}$$

L'écart par rapport à la valeur analytique s'explique par le choix de l'approximation : la flèche théorique s'exprime par deux polynômes du 3^{ème} degré continu par morceau, alors que la solution numérique est basée sur une approximation qui repose sur un seul polynôme du 3^{ème} degré défini sur l'ensemble du domaine.

III.6 TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Les matrices de rigidité élémentaires des éléments barres sont écrites dans le repère local de celles-ci. Cependant, il est rare que le repère local d'un élément coïncide avec le repère global de la structure dans laquelle l'élément appartient. Dans ce cas, il vaut mieux réécrire les équations d'équilibre de chaque élément dans le repère global et résoudre l'équation d'équilibre dans ce même repère.

Prenons le cas d'un élément barre en flexion composée (**Fig. III-7**) défini par les nœuds i et j . Les degrés de liberté de l'élément sont donnés par le vecteur déplacement nodal écrit dans le repère local :

$$\{u_n\} = \langle u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j \rangle^T$$

Pour obtenir le vecteur déplacement exprimé dans le repère global, il faut opérer une transformation géométrique de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}$$

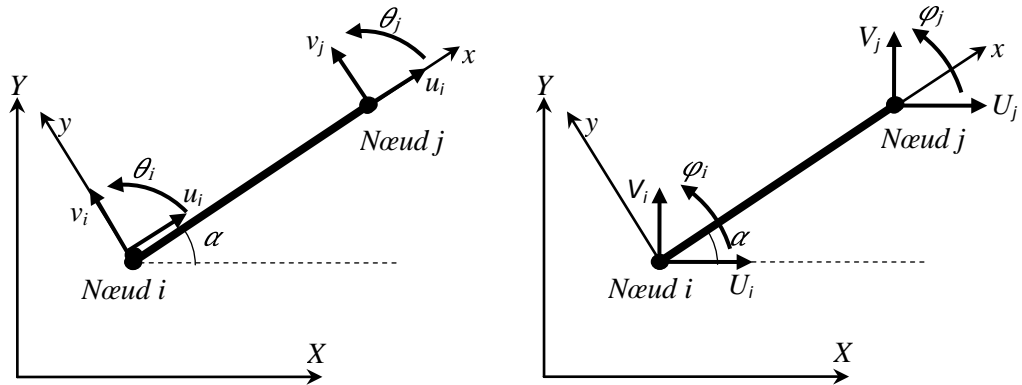


Figure III-7 : Elément fini-barre en flexion composée dans un contexte bidimensionnel

Pour le vecteur déplacement nodal, nous avons donc :

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \varphi_i \\ U_j \\ V_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \text{III.6-1}$$

Sous forme condensée, nous écrivons :

$$\{\mathbf{U}_n\} = \mathbf{T} \{u_n\} \quad \text{III.6-2}$$

De la même façon, le vecteur force nodal est transformé dans le repère global par :

$$\{\mathbf{F}_n\} = \mathbf{T} \cdot \{f_n\} \quad \text{III.6-3}$$

L'équation d'équilibre local exprimée dans le repère local s'écrit :

$$\mathbf{K}^e \cdot \{u_n\} = \{f_n\} \quad \text{III.6-4}$$

En multipliant à gauche l'équation ci-dessus par la matrice de transformation \mathbf{T} , appelée aussi matrice de passage, et en inversant les équations III.6-2 et III.6-3, nous obtenons :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \{\mathbf{U}_n\} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_n\}$$

ou

$$\mathbf{K}_G^e \cdot \{\mathbf{U}_n\} = \{\mathbf{F}_n\} \quad \text{III.6-5}$$

L'équation III.6-5 exprime l'équilibre élémentaire d'un élément dans le repère global de la structure. En faisant remarquer que la matrice \mathbf{T} est orthogonale car issue de la rotation d'axes

(transformation isométrique), par conséquent l'inverse de la matrice \mathbf{T} est sa transposée ; la matrice de rigidité \mathbf{K}_G^e est calculée par l'expression suivante :

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{T}^T \quad \text{III.6-6}$$

La matrice de rigidité d'un élément en flexion composée est construite par assemblage de la matrice de rigidité d'un élément barre en traction-compression avec celle d'un élément barre en flexion simple. L'opération d'assemblage est effectuée en numérotant les degrés de liberté de chaque élément fini. Le vecteur de déplacement nodal est donné comme

$$\{u_n\}^T = \langle \overbrace{u_i \quad v_i \quad \theta_i}^{1 \quad 2 \quad 3} \quad \overbrace{u_j \quad v_j \quad \theta_j}^{4 \quad 5 \quad 6} \rangle$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3} \begin{Bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix}$$

EXEMPLE III.6-1 :

Soit à résoudre par la méthode des éléments finis, le système de barre en traction-compression (**Fig. III-8**) :

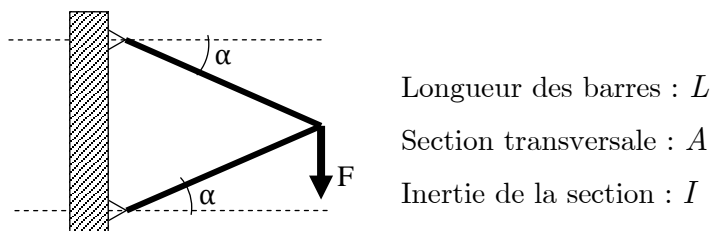


Figure III-8 : exemple de système barre en traction-compression

La 1^{ère} étape consiste à définir les nœuds et les éléments finis constituant la structure (**Fig. III.9**). Le vecteur-déplacement nodal élémentaire pour un élément constitué des nœuds i et j s'écrit dans le repère global comme :

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

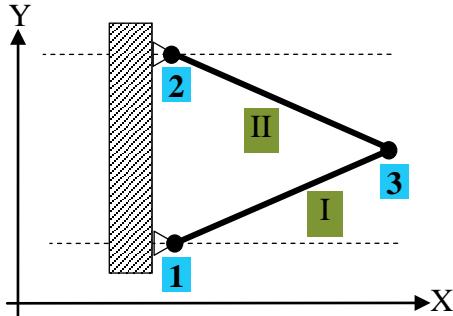


Figure III-9 : Modélisation en éléments finis de type barre en traction-compression

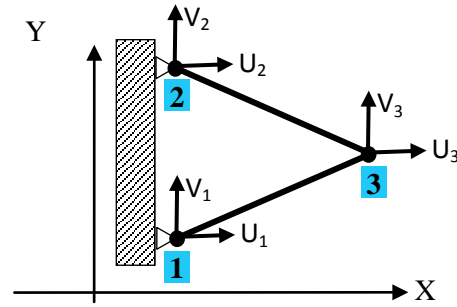


Figure III-10 : Définition des degrés de liberté de la structure dans le repère global

De même pour le vecteur-force nodal, nous écrivons :

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix}$$

La matrice de passage s'identifie alors :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément **I** dans le repère global s'obtient par la relation suivante :

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha \\ 0 & \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

avec $c = \cos \alpha$ et $s = \sin \alpha$

Pour l'élément **I**, constitué des nœuds 1 et 3, les numéros de degré de liberté associés sont les numéros 1, 2, 5 et 6, comme illustré ci-après :

$$\mathbf{K}_G^I = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{1}{\cos^2 \alpha} & \overset{2}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} & \overset{5}{-\cos^2 \alpha} & \overset{6}{-\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & \cos^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha & -\sin^2 \alpha & \frac{1}{2} \sin 2\alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Pour l'élément **II**, la matrice de rigidité s'écrit avec un angle d'orientation de la barre de $-\alpha$ et les numéros de degré de liberté associés sont les numéros 3, 4, 5 et 6 :

$$\mathbf{K}_G^{II} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{3}{c^2} & \overset{4}{-cs} & \overset{5}{-c^2} & \overset{6}{cs} \\ -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & cs & c^2 & -cs \\ cs & -s^2 & -cs & s^2 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité globale s'obtient par assemblage des deux matrices \mathbf{K}_G^I et \mathbf{K}_G^{II} , après avoir identifié les numéros de degrés de liberté définis dans la structure :

$$\mathbf{K}_G = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{1}{U_1} & \overset{2}{V_1} & \overset{3}{U_2} & \overset{4}{V_2} & \overset{5}{U_3} & \overset{6}{V_3} \\ c^2 & cs & 0 & 0 & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & 0 & 0 & -cs & -s^2 \\ 0 & 0 & c^2 & -cs & -c^2 & cs \\ 0 & 0 & -cs & s^2 & cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & -c^2 & cs & 2c^2 & 0 \\ -cs & -s^2 & cs & -s^2 & 0 & 2s^2 \end{bmatrix}$$

Après élimination des degrés de liberté nuls (les ddl N° 1, 2, 3 et 4) associés aux conditions aux limites du problème, nous obtenons finalement l'équation d'équilibre global :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2c^2 & 0 \\ 0 & 2s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne finalement $U_3=0$ (ce qui est parfaitement prévisible à cause de la symétrie du problème) et $V_3 = \frac{-FL}{2EA s^2}$.

Si nous voulons exprimer cette solution dans le repère local de chaque élément, il faut inverser la relation III.6-1 et déduire les valeurs des composantes du déplacement du nœud 3 dans chaque élément.

III.7 ÉLÉMENTS FINIS EN DEUX DIMENSIONS

En mécanique des structures, les éléments en deux dimensions se présentent sous forme géométrique plane, comme les triangles et les quadrilatères (**Fig. III-11**), associés à des configurations structurelles de type coque, plaque épaisse (cisaillement plan) ou membrane mince (flexion bidirectionnelle).

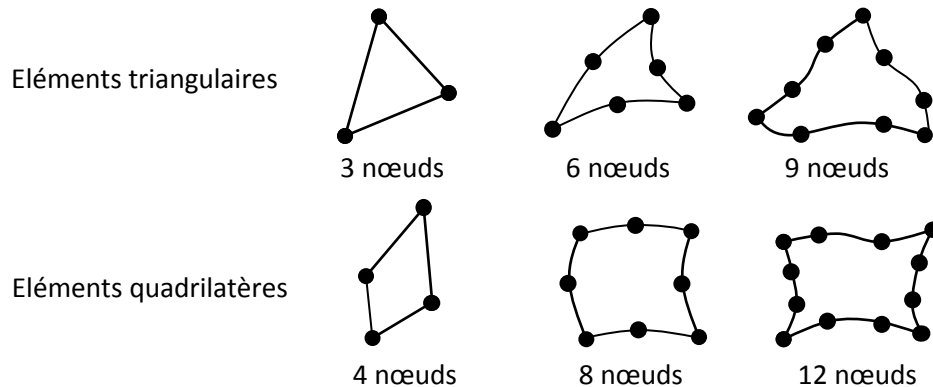


Figure III-11: Type d'éléments finis bidimensionnels

Les fonctions de forme associées à ces éléments seront étudiées dans un autre chapitre consacré aux éléments de référence. Toutefois, les éléments que nous allons présenter dans ce paragraphe, bien qu'ils appartiennent aux familles citées dans la figure **III.11**, sont de forme plus simple comme un rectangle ou un triangle rectangle.

III.7.1. Efforts internes

Trois types de structures mécaniques sont étudiés dans ce paragraphe : les plaques en cisaillement, les membranes en flexion simple et, plus généralement, les coques.

Il convient de définir les grandeurs mécaniques généralisées (les efforts internes) dans un repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ d'un élément de volume d'une coque (**Fig. III-12**). Les formules d'intégration des contraintes sont définies comme suit :

$$\mathcal{N} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{III.7-1}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad \text{III.7-2}$$

$$\mathcal{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad \text{III.7-3}$$

Les équations ci-dessus expriment, respectivement, les efforts normaux et le cisaillement plan, les efforts tranchant transverses, et les moments de flexion et de torsion.

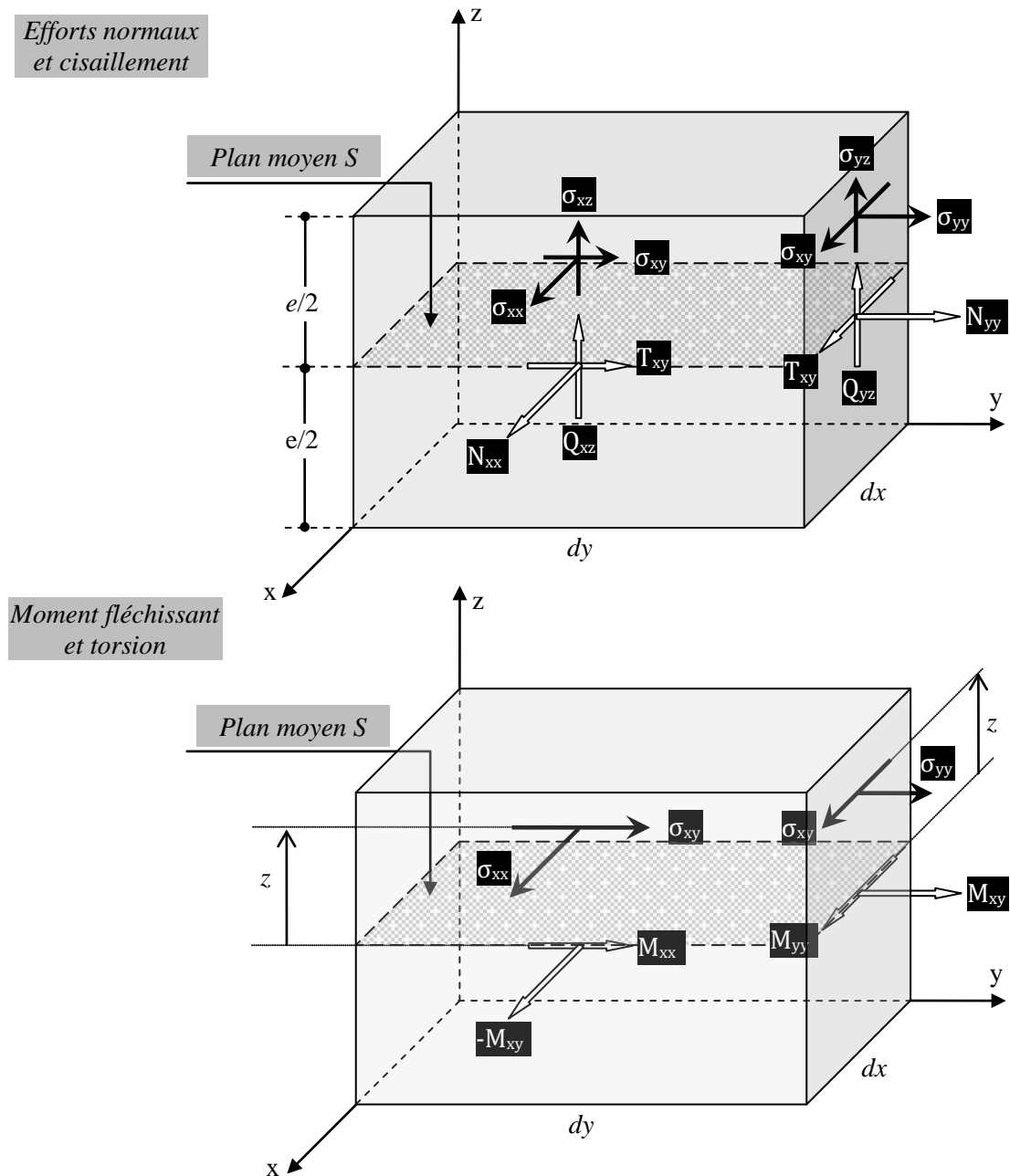


Figure III-12 : Intégration sur l'épaisseur de l'état de contrainte pour un élément de coque

III.7.2. Cinématique du déplacement

Dans le cadre de l'hypothèse de Kirchhoff, tout segment de droite initialement orthogonal au plan moyen reste orthogonal au plan moyen après déformation. Dans ce cas, le déplacement d'un point M quelconque de coordonnées (x,y,z) est défini par (Fig. III-13) :

$$\mathbf{u} = \langle u_x \quad u_y \quad u_z \rangle^T = \langle u + z\theta_y \quad v - z\theta_x \quad w \rangle^T \quad \text{III.7-4}$$

u , v et w sont les composantes du déplacements du point G de coordonnée $(x,y,0)$ et θ_x et θ_y sont les rotation de la fibre respectivement autour des axes x et y.

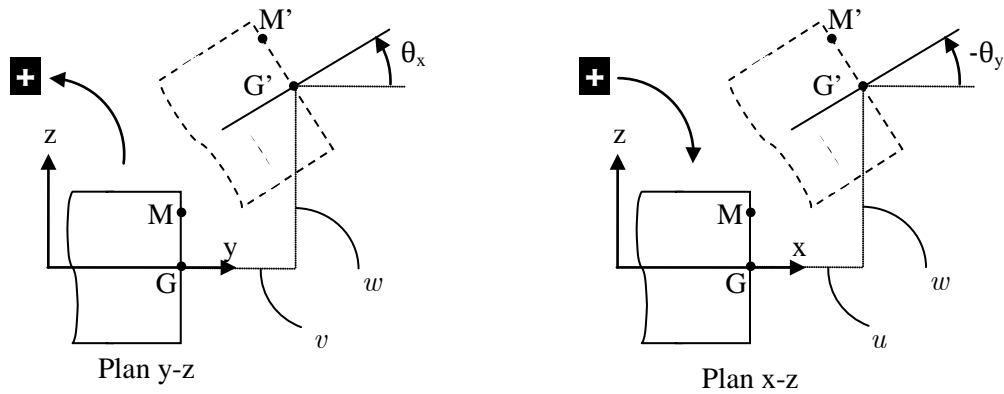


Figure III-13 : Cinématique du déplacement d'un élément de coque selon l'hypothèse de Kirchhoff

Le champ de déformation se déduit de l'expression III.3-2 :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u + z\theta_y \\ v - z\theta_x \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-5}$$

Selon l'hypothèse de Kirchhoff, le déplacement transversal w est lié aux rotations par :

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad \text{III.7-6}$$

ce qui annule mathématiquement les composantes γ_{xz} et γ_{yz} et réduit ainsi l'équation III.7-5 aux

seules composantes du plan x-y :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u + z\theta_y \\ v - z\theta_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-7}$$

L'hypothèse de Kirchhoff annule donc l'énergie de déformation due au cisaillement transverse.

Les composantes Q_{xz} et Q_{yz} des efforts internes sont donc négligées.

Nous pouvons séparer le champ de déformation en deux parties suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-8}$$

De manière concise, l'équation III.7-8 ci-dessus s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_G + z \cdot \boldsymbol{\Phi} \quad \text{III.7-9}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_G$ représente l'état de déformation de la coque au niveau du plan moyen et $\boldsymbol{\Phi}$ est le vecteur de rotation différentielle ou courbure.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle^T$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \left\langle \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right\rangle^T \quad \text{III.7-10}$$

III.7.3. Forme de Galerkin – Équation des travaux virtuels

III.7.3.a. Expression de l'énergie interne

L'expression variationnelle de l'énergie interne (Eq. II.9-7) s'écrit, en tenant compte des expressions III.7-1, III.7-3 et III.7-9 :

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dx dy dz = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta \varepsilon}_G \cdot \boldsymbol{\sigma} dx dy dz + \int_{\Omega} z \cdot \boldsymbol{\delta \Phi} \cdot \boldsymbol{\sigma} dx dy dz$$

$$= \int_S \boldsymbol{\delta \varepsilon}_G \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}} dx dy + \int_S \boldsymbol{\delta \Phi} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}} dx dy \quad \text{III.7-11}$$

Cette forme convient aux éléments finis dits « mixtes ». Il faut remarquer dans cette expression que le domaine d'intégration est la surface définie par le plan moyen S.

REMARQUE

Bien que $\boldsymbol{\varepsilon}_G$ et $\boldsymbol{\Phi}$ soient représentés par des vecteurs, ils possèdent une nature tensorielle d'ordre 2. De même pour les grandeurs $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, de telle sorte que le produit tensoriel doublement contracté $\boldsymbol{\delta \varepsilon}_G : \boldsymbol{\mathcal{N}}$ et $\boldsymbol{\delta \Phi} : \boldsymbol{\mathcal{M}}$ soient équivalents aux produits scalaires $\boldsymbol{\delta \varepsilon}_G \cdot \boldsymbol{\mathcal{N}}$ et $\boldsymbol{\delta \Phi} \cdot \boldsymbol{\mathcal{M}}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_G &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Phi} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

III.7.3.b. Loi de comportement

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire, la matrice \mathbf{C} des propriétés élastiques qui, dans le cas d'un matériau isotrope et dans le cadre d'un état plan de contrainte ou de déformation, relie la déformation à la contrainte via la loi de Hooke généralisée :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

III.7-12

- En déformation plane, $E_0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $a = \frac{\nu}{1-\nu}$ et $b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$
- En contrainte plane, $E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}$, $a = \nu$ et $b = \frac{1-\nu}{2}$,

E étant le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Etablissons les relations entre les efforts internes et le champ de déplacement :

Pour les efforts normaux et le cisaillement :

$$\mathcal{N} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = eE_0 \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = eE_0 \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} \\ a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ b \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix}$$

III.7-13

Pour les moments de flexion et la torsion :

$$\mathcal{M} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{e^3}{12} E_0 \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{e^3}{12} E_0 \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - a \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ a \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ b \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \frac{e^3}{12} E_0 \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

III.7-14

Sous forme condensée, les équations III.7-13 et III.7-14 s'écrivent :

$$\mathcal{N} = e\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_G$$

$$\mathcal{M} = \frac{e^3}{12} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Phi}$$

III.7-15

III.7.3.c. Chargement extérieur

Le travail des forces extérieures se divise en une partie issue des forces de volume et une autre issue du terme de frontière.

i. Terme de volume

Le terme de volume s'exprime comme :

$$\int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta u + z\delta\theta_y \\ \delta v - z\delta\theta_x \\ \delta w \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} dx dy dz = \int_S \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} dx dy + \int_{\Omega} z \begin{Bmatrix} \delta\theta_y \\ -\delta\theta_x \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} dx dy dz$$

$$= \int_S \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} dx dy + \int_S \begin{Bmatrix} \delta\theta_y \\ \delta\theta_x \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} c_y \\ c_x \end{Bmatrix} dx dy$$

III.7-16

Le terme de volume est composé d'un chargement plan et d'un chargement transversal en plus des moments. Nous avons les expressions de chargement suivantes :

$$\mathbf{g} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} dz$$

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_y \\ c_x \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{e/2} z \cdot \begin{Bmatrix} f_x \\ -f_y \end{Bmatrix} dz$$

III.7-17

où \mathbf{g} et \mathbf{c} sont des distributions de chargement sur la surface S (plan moyen). Ils peuvent représenter des chargements répartis sur une ligne ou une force (ou moment) ponctuelle en un point (chargement de Dirac).

ii. Chargement de frontière – termes de Dirac

Le développement du terme de frontière suppose une concentration de la charge \mathbf{g} surfacique sur le contour ∂S ou une partie de celui-ci. De manière générale, l'équation III.7-16 combine tout type de charge, les charges surfaciques, linéiques et concentrées, grâce à la notion de distribution (voir **Annexe A**) et peut donc représenter toutes les charges de frontière de la façon suivante :

$$\int_S \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} dx dy = \int_{\partial S} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{g}} dl + \delta \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{G}_p \quad \text{III.7-18}$$

où $\tilde{\mathbf{g}}$ est une charge répartie sur le contour ∂S , \mathbf{G}_p une charge ponctuelle agissant en un point P (on dit aussi distribution de Dirac) et $\delta \hat{\mathbf{u}}$ et $\delta \mathbf{u}_p$ sont les déplacements virtuels définis, respectivement, à la frontière ∂S et au point P . La même analyse s'effectue aussi sur les moments c_x et c_y .

Nous pouvons donc utiliser l'expression III.7-16 pour représenter indifféremment les forces de volumes et celles de frontière (chargement surfacique sur ∂S) et même les charges ponctuelles.

Par la suite, l'expression des travaux virtuels (ou la forme faible de Galerking) s'écrit comme :

$$\int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}_G \cdot \mathcal{N} dx dy + \int_S \delta \Phi \cdot \mathcal{M} dx dy = \int_S \left\langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} dx dy \quad \text{III.7-19}$$

$$+ \int_S \left\langle \delta \theta_y \quad \delta \theta_x \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} c_y \\ c_x \end{Bmatrix} dx dy$$

III.7.4. Plaque en cisaillement

Une plaque en cisaillement plan est caractérisée par l'absence de moments de flexion et de torsion. Ceci n'est possible que si les moments c_x et c_y et le chargement g_z sont nuls dans l'expression III.7-19 des travaux des forces extérieures.

De plus, la formulation utilisée pour résoudre cette structure est la formulation en déplacement qui est la méthode la plus utilisée. Il est nécessaire donc d'exprimer les efforts internes \mathcal{N} en fonction de la

déformation qui s'écrit sous forme concise, selon la formule III.7-15. En tenant compte de cette expression, l'équation des travaux virtuels III.7-19 se réduit à :

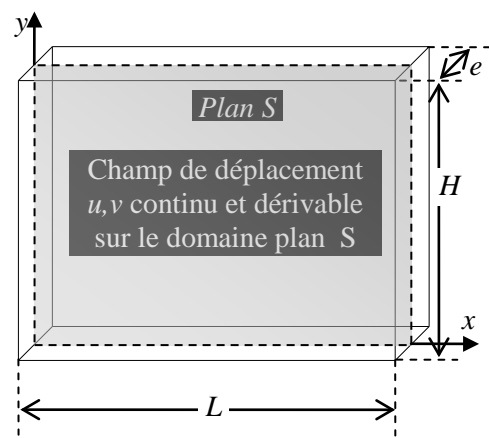


Figure III-14 : Plaque en cisaillement plan

$$e \int_S \delta \boldsymbol{\varepsilon}_G \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_G dx dy = \int_S \langle \delta u \quad \delta v \rangle \cdot \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} dx dy \quad \text{III.7-20}$$

L'équation III.7-20 est la forme faible de l'équation d'équilibre d'une plaque en cisaillement plan.

III.7.5. Discrétisation de la forme

Nous allons construire l'équation d'équilibre discrétisée d'un élément fini à p nœuds ensuite nous allons l'appliquer aux cas d'un élément rectangulaire à 4 nœuds de dimensions $L_x H_x e$ (Fig. III-15) et triangulaire à 3 nœuds (Fig. III-16). Les composantes du champ de déplacement se réduisent dans ce cas à 2 composantes, horizontale u et verticale v , et s'expriment par une approximation nodale à p nœuds de la forme générale donnée par la formule III.2-2 avec

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_p & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_p \end{bmatrix} \quad \text{III.7-21}$$

$$\mathbf{q} = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_p \quad v_p \rangle^T \quad \text{III.7-22}$$

Le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}_G$ s'écrit selon l'expression III.7-8 en éliminant les composantes rotationnelles :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_p & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_p \\ v_p \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-23}$$

Sous forme concise, l'équation III.7-23 s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad \text{III.7-24}$$

La matrice \mathbf{B} est réduite donc à une matrice $(3 \times 2p)$:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc| \dots & \dots & | & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} & \frac{\partial N_p}{\partial x} \end{array} \right) \quad \text{III.7-25}$$

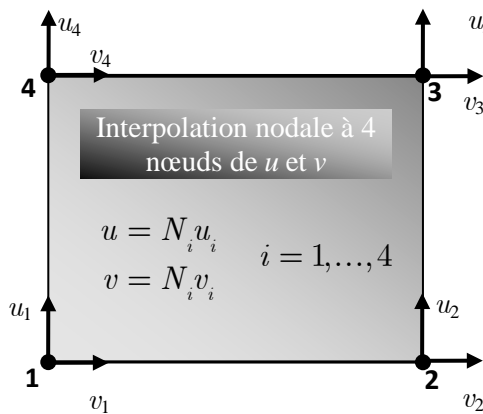


Figure III-15 : Un élément fini rectangulaire de Lagrange à 4 nœuds

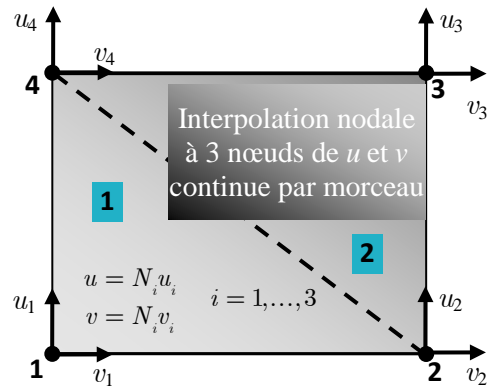


Figure III-16 : Deux éléments Finis triangulaires de Lagrange à 3 nœuds

III.7.5.a. Fonctions de forme nodales

L'interpolation polynomiale des champs u et v sur un domaine rectangulaire à 4 nœuds requiert 4 paramètres et s'écrit de manière générale :

$$u = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \rangle \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-26}$$

Ce polynôme est d'ordre 1 complet. Sous forme Lagrangienne, l'écriture équivalente utilise les valeurs aux nœuds de l'élément (**Fig. III-15**) telles que :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 \\ 1 & L & H & LH \\ 1 & 0 & H & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-27}$$

Nous avons donc l'interpolation **III.7-26** en inversant l'expression **III.7-27** ci-dessus :

$$u = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ \frac{1}{LH} & -\frac{1}{LH} & \frac{1}{LH} & -\frac{1}{LH} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-28}$$

Les fonctions de forme se déduisent :

$$\mathbf{N} = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ \frac{1}{LH} & -\frac{1}{LH} & \frac{1}{LH} & -\frac{1}{LH} \end{pmatrix} \quad \text{III.7-29}$$

ou :

$$\mathbf{N} = \left\langle 1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{H} + \frac{xy}{LH} \mid \frac{x}{L} - \frac{xy}{LH} \mid \frac{xy}{LH} \mid \frac{y}{H} - \frac{xy}{LH} \right\rangle \quad \text{III.7-30}$$

Ces fonctions respectent bien la propriété II.4-7. La matrice **B** devient alors :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} + \frac{y}{LH} & 0 & \frac{1}{L} - \frac{y}{LH} & 0 & \frac{y}{LH} & 0 & -\frac{y}{LH} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{H} + \frac{x}{LH} & 0 & -\frac{x}{LH} & 0 & \frac{x}{LH} & 0 & \frac{1}{H} - \frac{x}{LH} \\ -\frac{1}{H} + \frac{x}{LH} & -\frac{1}{L} + \frac{y}{LH} & -\frac{x}{LH} & \frac{1}{L} - \frac{y}{LH} & \frac{x}{LH} & \frac{y}{LH} & \frac{1}{H} - \frac{x}{LH} & -\frac{y}{LH} \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un triangle, l'approximation polynomiale utilise un polynôme à 3 paramètres :

$$u = a_0 + a_1x + a_2y = \langle 1 \quad x \quad y \rangle \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-31}$$

Ce polynôme est d'ordre 1 incomplet. Sous forme Lagrangienne, l'écriture équivalente utilise les valeurs aux nœuds de l'élément (l'élément triangulaire N°1 de la Fig. III-16) telles que :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 \\ 1 & 0 & H \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-32}$$

Nous avons donc l'interpolation III.7-29 en inversant l'expression III.7-30 ci-dessus :

$$u = \langle 1 \quad x \quad y \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-33}$$

Les fonctions de forme se déduisent :

$$\mathbf{N} = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \rangle \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{H} & 0 & \frac{1}{H} \end{pmatrix} \quad \text{III.7-34}$$

où :

$$\mathbf{N} = \left\langle 1 - \frac{x}{L} - \frac{y}{H} \mid \frac{x}{L} \mid \frac{y}{H} \right\rangle \quad \text{III.7-35}$$

La matrice \mathbf{B} devient :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{H} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ -\frac{1}{H} & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{H} & 0 \end{pmatrix}$$

III.7.5.b. Matrice de rigidité

Selon l'équation discrétisée III.3-11, la matrice de rigidité d'un élément rectangulaire se met sous la forme indicielle suivante :

$$K_{i,j} = e \int_0^H \int_0^L B_{l,i} C_{l,k} B_{k,j} dx dy \quad \begin{matrix} k,l=1\dots 3 \\ i=1\dots 2p \\ j=1\dots 2p \end{matrix} \quad \text{III.7-36}$$

L'épaisseur e de la plaque résulte de l'intégration de l'équation III.3-11 sur sa dimension transversale et p est le nombre de nœuds de l'élément. La matrice \mathbf{K} , de l'ordre de $2p \times 2p$, est la matrice de rigidité élémentaire, comme indiquée ci-dessous pour un élément à 4 nœuds :

$$\mathbf{K} = eE_0 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{a+b}{4} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 - 2H^2}{LH} & \frac{a-b}{4} & -\frac{1}{6} \frac{H^2 - bL^2}{LH} & -\frac{a+b}{4} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{b-a}{4} \\ \frac{1}{6} \frac{bL^2 - 2H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 - 2bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} \\ \frac{1}{6} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 - 2H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 + L^2}{LH} \\ -\frac{1}{6} \frac{H^2 - bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 - 2bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} \\ \frac{1}{6} \frac{H^2 - bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 - 2bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} \\ \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 - 2bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} \\ \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 - 2bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{1}{6} \frac{H^2 + bL^2}{LH} & \frac{1}{4} \frac{bH^2 - 2L^2}{LH} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} LH & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} LH & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} LH & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} LH \end{pmatrix}$$

Pour un élément triangulaire à 3 nœuds, il faut remarquer que la matrice \mathbf{B} est constante.

L'intégration de l'équation III.7-36 s'effectue sur l'aire du triangle qui vaut $LH/2$:

$$K_{i,j} = \frac{LHe}{2} (B_{l,i} C_{l,k} B_{k,j}) \quad \begin{matrix} k,l = 1\dots 3 \\ i = 1\dots 2p \\ j = 1\dots 2p \end{matrix} \quad \text{III.7-37}$$

ce qui donne finalement :

$$\mathbf{K} = \frac{eE_0}{2} \begin{bmatrix} \frac{H}{L} + b\frac{L}{H} & a+b & -\frac{H}{L} & -b & -b\frac{L}{H} & -a \\ a+b & \frac{L}{H} + b\frac{H}{L} & -a & -b\frac{H}{L} & -b & -\frac{L}{H} \\ -\frac{H}{L} & -a & \frac{H}{L} & 0 & 0 & a \\ -b & -b\frac{H}{L} & 0 & b\frac{H}{L} & b & 0 \\ -b\frac{L}{H} & -b & 0 & b & b\frac{L}{H} & 0 \\ -a & -\frac{L}{H} & a & 0 & 0 & \frac{L}{H} \end{bmatrix}$$

III.7.5.c. Vecteur-force nodal

Le vecteur-force nodal se calcule par la formule III.7-16 en intégrant d'abord le chargement surfacique \mathbf{t} , appliquée sur les faces latérales de la plaque, sur la dimension transversale (la direction Oz) pour obtenir un chargement linéique $\tilde{\mathbf{g}}$, réparti sur le contour ∂S ou une partie du contour du plan moyen de la plaque (Fig. III-17).

Le vecteur-force nodal s'obtient par la somme de tout les types de chargement (distribution surfacique, linéique ou ponctuelle sous la forme générale suivante :

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{g} dx dy + \oint_{\partial S} \hat{\mathbf{N}}^T \cdot \tilde{\mathbf{g}} dl + \mathbf{N}_p^T \cdot \mathbf{G} \quad \text{III.7-38}$$

$\hat{\mathbf{N}}$ et \mathbf{N}_p sont les fonctions de forme évaluées, respectivement, sur le contour ∂S et le point P où sont distribuées les charges linéiques $\tilde{\mathbf{g}}$ et ponctuelle \mathbf{G} .

EXEMPLE III.7.1

Soit à tracer le champ de contrainte d'une plaque rectangulaire encastree à sa base et soumise au nœud N°4 (Fig. III-15) à une force ponctuelle $G_x = 50000\text{N}$ horizontale.

Nous utilisons un élément rectangulaire à 4 nœuds (Fig. III-15) et nous posons l'équation d'équilibre discrétisée de la forme III.3-10 avec \mathbf{q} étant le vecteur-déplacement nodal défini comme :

$$\mathbf{q} = \left\langle u_1 \quad v_1 \mid u_2 \quad v_2 \mid v_3 \quad v_3 \mid v_4 \quad v_4 \right\rangle^T$$

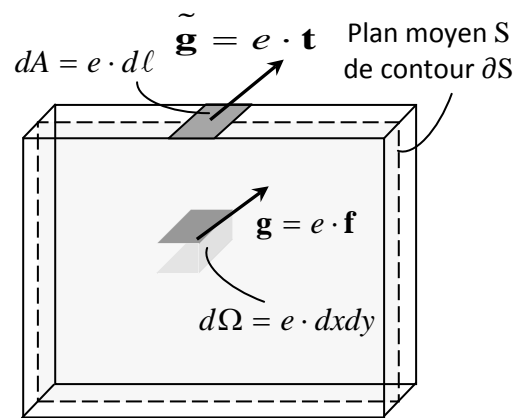


Figure III-17 : système de chargement

L'encastrement à la base de la plaque impose $u_1=u_2=v_1=v_2=0$, ce qui réduit l'équation d'équilibre discrétisée à :

$$eE_0 \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{a+b}{4} & \frac{1}{6} \frac{bL^2 - 2H^2}{LH} & \frac{b-a}{4} \\ \frac{a+b}{4} & \frac{1}{3} \frac{L^2 + bH^2}{LH} & \frac{b-a}{4} & \frac{1}{6} \frac{2bH^2 - L^2}{LH} \\ \frac{1}{6} \frac{bL^2 - 2H^2}{LH} & \frac{b-a}{4} & \frac{1}{3} \frac{bL^2 + H^2}{LH} & \frac{b-a}{4} \\ \frac{b-a}{4} & \frac{1}{6} \frac{2bH^2 - L^2}{LH} & \frac{b-a}{4} & \frac{1}{3} \frac{L^2 + bH^2}{LH} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_x \\ 0 \end{Bmatrix}$$

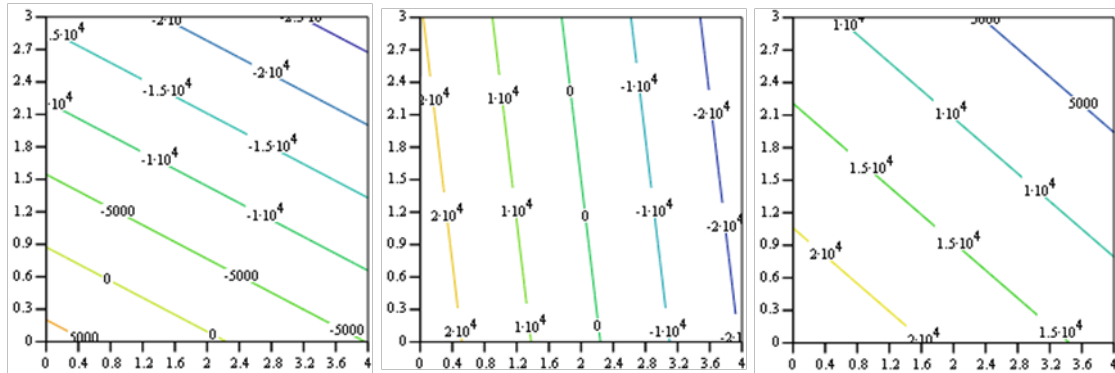


Figure III-18 : Cartographie des efforts internes : de gauche à droite : Efforts N_{xx} , N_{yy} , T_{xy}

La figure III-18 ci-dessus montre la cartographie des efforts internes sous forme d'isovaleurs. Ces dernières présentent des allures linéaires. Ceci est le résultat du choix de l'élément fini rectangulaire associé à la fonction d'approximation qui est polynomiale d'ordre 1.

III.7.6. Membrane en flexion simple bidirectionnelle

III.7.6.a. Forme intégrale

Dans le cas de membranes minces, les efforts normaux et le cisaillement plan sont nuls. L'équation III.7-19 se simplifie :

$$\int_S \delta \Phi \cdot \mathcal{M} dx dy = \int_S \delta w \cdot g_z dx dy + \int_S \langle \delta \theta_y \quad \delta \theta_x \rangle \cdot \begin{Bmatrix} c_y \\ c_x \end{Bmatrix} dx dy \quad \text{III.7-39}$$

En remplaçant \mathcal{M} par son expression III.7-15 et en réarrangeant le membre de droite de l'expression III.7-39 sous une forme vectorielle plus pratique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{e^3}{12} \int_S \delta \Phi \cdot \mathbf{C} \cdot \Phi dx dy &= \int_S \langle \delta w \quad \delta \theta_y \quad \delta \theta_x \rangle \cdot \begin{Bmatrix} g_z \\ c_y \\ c_x \end{Bmatrix} dx dy \\ &= \int_S \delta \widehat{\mathbf{w}} \cdot \widehat{\mathbf{g}} dx dy \end{aligned} \quad \text{III.7-40}$$

$\widehat{\delta \mathbf{w}}$ et $\widehat{\mathbf{g}}$ sont respectivement le déplacement virtuel et le chargement extérieurs définis sur le domaine S de l'élément.

$$\begin{aligned}\widehat{\delta \mathbf{w}} &= \left\langle \delta w \quad \delta \theta_y \quad \delta \theta_x \right\rangle^T \\ \widehat{\mathbf{g}} &= \left\langle g_z \quad c_y \quad c_x \right\rangle^T\end{aligned}\quad \text{III.7-41}$$

III.7.6.b. Discrétisation

La discrétisation de la forme III.7-40 s'effectue en supposant l'interpolant de la fonction w avec ses valeurs hermitiennes issues de ses dérivées spatiales θ_x et θ_y (Eq. III.7-6). Nous avons donc les expressions indicielles suivantes :

$$\begin{aligned}w(x, y) &= N_i q^i \\ \theta_y(x, y) &= -\frac{\partial N_i}{\partial x} q^i \quad i = 1, \dots, 3p \\ \theta_x(x, y) &= \frac{\partial N_i}{\partial y} q^i\end{aligned}\quad \text{III.7-42}$$

p est le nombre de nœuds de l'interpolation et q^i la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur-déplacement nodal \mathbf{q} défini comme suit :

$$\mathbf{q} = \left\langle w^1 \quad \theta_y^1 \quad \theta_x^1 \quad \dots \quad w^p \quad \theta_y^p \quad \theta_x^p \right\rangle^T \quad \text{III.7-43}$$

La courbure Φ explicitée par l'expression II.7.10 peut ensuite se mettre sous la forme matricielle :

$$\Phi = \left\langle \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right\rangle^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}$$

Par les équations III.7-42, nous pouvons exprimer la courbure au moyen de la matrice de passage \mathbf{B} tel que :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \dots & -\frac{\partial N_{3p-2}}{\partial x} & -\frac{\partial N_{3p-1}}{\partial x} & -\frac{\partial N_{3p}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{3p-2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{3p-1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{3p}}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w^1 \\ \theta_y^1 \\ \theta_x^1 \\ \vdots \\ w^p \\ \theta_y^p \\ \theta_x^p \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-44}$$

et sous forme concise :

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \quad \text{III.7-45}$$

Le champ de courbure virtuelle s'écrit alors :

$$\delta\Phi = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{q} \quad \text{III.7-46}$$

Ce qui définit la matrice \mathbf{B} comme suit :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial x^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_{3p-2}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{3p-1}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_{3p}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_3}{\partial y^2} & \dots & -\frac{\partial^2 N_{3p-2}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{3p-1}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_{3p}}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 N_1}{\partial x\partial y} & -2\frac{\partial^2 N_2}{\partial x\partial y} & -2\frac{\partial^2 N_3}{\partial x\partial y} & \dots & -2\frac{\partial^2 N_{3p-2}}{\partial x\partial y} & -2\frac{\partial^2 N_{3p-1}}{\partial x\partial y} & -2\frac{\partial^2 N_{3p}}{\partial x\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{III.7-47}$$

L'équation d'équilibre discrétisée d'une membrane en flexion simple s'obtient :

$$\left(\frac{e^3}{12} \int_S \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot dx dy \right) \cdot \mathbf{q} = \int_S \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{g}} dx dy \quad \text{III.7-48}$$

avec $\hat{\mathbf{g}} = \langle g_z \quad c_y \quad c_x \rangle^T$ le chargement extérieur comportant une composante transversale est deux composantes en flexion. L'équation ci-dessus est la même que l'équation III.3.10 tel que :

$$\mathbf{K} = \frac{e^3}{12} \int_S \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot dx dy \quad \text{III.7-49}$$

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{N}^T \cdot \hat{\mathbf{g}} dx dy \quad \text{III.7-50}$$

III.7.6.c. Construction d'éléments finis de plaque en flexion

A ce stade du développement, il apparaît qu'en tout point du domaine S on dénombre 3 degrés de liberté. Il faut donc construire une approximation de la fonction $w(x,y)$ qui soit continue, dérivable (pour définir les rotations) et, surtout, qui respecte la condition de symétrie par rapport à l'axe x et à l'axe y , c'est-à-dire que l'approximation doit reproduire le même comportement de flexion de la membrane suivant les deux axes du plan x - y .

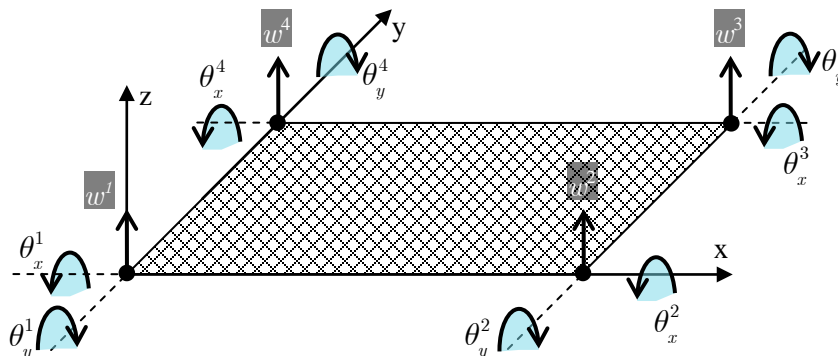


Figure III-19 : Élément fini rectangulaire hermitien à 4 nœuds pour membrane en flexion simple

III.7.6.d. Choix d'un polynôme : Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal (**Figure III-20**) est un outil qui permet de construire une base polynômiale à deux variables indépendantes x, y de telle sorte à choisir une fonction d'interpolation satisfaisant aux exigences d'un élément fini conforme.

0				1									
1			x		y								
2			x ²		xy		y ²						
3			x ³		x ² y		xy ²		y ³				
4			x ⁴		x ³ y		x ² y ²		xy ³		y ⁴		
5			x ⁵		x ⁴ y		x ³ y ²		x ² y ³		xy ⁴		y ⁵

Figure III-20 : Triangle de Pascal

Pour un élément quadrilatère à 4 nœuds, nous avons besoin de 12 paramètres nodaux (3 degré de liberté par nœud). Nous devons donc choisir 12 monômes sur le triangle de Pascal de telle sorte qu'il ne faut pas privilégier une direction particulière pour garder le même comportement suivant les deux axes x - y . Par exemple, si nous choisissons le monôme x^2y , nous devons lui adjoindre le monôme xy^2 pour garder cette symétrie. Les monômes sont d'abord extraits du niveau zéro (le monôme de valeur constante 1), ensuite le niveau 1 et ainsi de suite jusqu'à compléter au niveau 3. La base polynomiale obtenue est donc de degré 3 en ajoutant deux monômes du niveau 4 :

$$\langle P(x,y) \rangle = \langle 1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad x^2y \quad xy^2 \quad x^3 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \rangle$$

L'interpolation polynomiale sur la fonction w ainsi que sur ses dérivées premières θ_y et θ_x donnée en équations **III.7-6** s'écrit avec un polynôme général en utilisant les paramètres généraux a_i .

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & -1 & 0 & -y & -2x & 0 & -2xy & -y^2 & -3x^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 2y & x^2 & 2xy & 0 & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \end{Bmatrix} \quad \text{III.7-51}$$

La matrice \mathbf{P}_n est construite en sachant que les coordonnées des nœuds sont explicitées en figure III-14 pour une membrane rectangulaire de longueur L et de largeur H .

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & L^2 & 0 & 0 & 0 & L^3 & 0 & 0 \\ 1 & L & H & LH & L^2 & H^2 & L^2H & LH^2 & L^3 & H^3 & L^3H & LH^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -H & -2L & 0 & -2LH & -H^2 & -3L^2 & 0 & -3L^2H & -H^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 2H & L^2 & 2LH & 0 & 3H^2 & L^3 & 3LH^2 & 0 \\ 1 & 0 & H & 0 & 0 & H^2 & 0 & 0 & 0 & H^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -H & 0 & 0 & 0 & -H^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2H & 0 & 0 & 0 & 3H^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En inversant \mathbf{P}_n et en portant l'expression des paramètres généraux dans l'interpolation III.7-51 ci-dessus, nous obtenons les fonctions de forme illustrées dans le tableau III-1. La matrice de rigidité est ensuite calculée, de façon indicielle, selon l'expression III.7-49 :

$$K_{i,j} = \frac{e^3}{12} \int_0^H \int_0^L B_{l,i} C_{l,k} B_{k,j} dx dy \quad \begin{array}{l} k, l = 1 \dots 3 \\ i = 1 \dots 3p \\ j = 1 \dots 3p \end{array} \quad \text{III.7-52}$$

\mathbf{K} est de taille $(3p \times 3p)$ et pour un élément quadrilatère à 4 nœuds ($p=4$) son expression est fastidieuse. Le membre de droite de l'équation III.7-48 est le vecteur-force nodal défini par l'équation III.7-50 avec \mathbf{N} la matrice des fonctions de forme construite de la façon suivante (Eq. III.7-42) :

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_{3p-2} & N_{3p-1} & N_{3p} \\ -\frac{\partial N_1}{\partial x} & -\frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & -\frac{\partial N_{3p-2}}{\partial x} & -\frac{\partial N_{3p-1}}{\partial x} & -\frac{\partial N_{3p}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{3p-2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{3p-1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{3p}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Tableau III-1 : Fonctions de forme pour un élément quadrilatère hermitien à 4 nœuds

$ddl N^{\circ}$	$N_i(x,y)$
1	$1 - \frac{xy}{LH} - 3\frac{x^2}{L^2} - 3\frac{y^2}{H^2} + 3\frac{x^2y}{L^2H} + 3\frac{xy^2}{LH^2} + 2\frac{x^3}{L^3} + 2\frac{y^3}{H^3} - 2\frac{x^3y}{L^3H} - 2\frac{xy^3}{LH^3}$
2	$-x + \frac{xy}{H} + 2\frac{x^2}{L} - 2\frac{x^2y}{LH} - \frac{x^3}{L^2} + \frac{x^3y}{L^2H}$
3	$y - \frac{xy}{L} - 2\frac{y^2}{H} + 2\frac{xy^2}{LH} + \frac{y^3}{H^2} - \frac{xy^3}{LH^2}$
4	$\frac{xy}{LH} + 3\frac{x^2}{L^2} - 3\frac{x^2y}{L^2H} - 3\frac{xy^2}{LH^2} - 2\frac{x^3}{L^3} + 2\frac{x^3y}{L^3H} + 2\frac{xy^3}{LH^3}$
5	$\frac{x^2}{L} - \frac{x^2y}{LH} - \frac{x^3}{L^2} + \frac{x^3y}{L^2H}$
6	$\frac{xy}{L} - 2\frac{xy^2}{LH} + \frac{xy^3}{LH^2}$
7	$-\frac{xy}{LH} + 3\frac{x^2y}{L^2H} + 3\frac{xy^2}{LH^2} - 2\frac{x^3y}{L^3H} - 2\frac{xy^3}{LH^3}$
8	$\frac{x^2y}{LH} - \frac{x^3y}{L^2H}$
9	$-\frac{xy^2}{LH} + \frac{xy^3}{LH^2}$
10	$\frac{xy}{LH} + 3\frac{y^2}{H^2} - 3\frac{x^2y}{L^2H} - 3\frac{xy^2}{LH^2} - 2\frac{y^3}{H^3} + 2\frac{x^3y}{L^3H} + 2\frac{xy^3}{LH^3}$
11	$-\frac{xy}{H} + 2\frac{x^2y}{LH} - \frac{x^3y}{L^2H}$
12	$-\frac{y^2}{H} + \frac{xy^2}{LH} + \frac{y^3}{H^2} - \frac{xy^3}{LH^2}$

EXEMPLE III.7.2 :

Soit à calculer la flèche d'une membrane rectangulaire de dimensions ($4 \times 3 \times 0,05 \text{m}^3$) simplement appuyée sur ses 4 cotés et chargée transversalement en son centre par une force ponctuelle $G_z = 10000$ Newtons.

Étant donné la symétrie biaxiale de la structure, nous n'allons étudier que son quart haut et droit (**Figure III-21**).

Les conditions aux limites de la structure sont :

1. rotations nulles au centre (vue la symétrie biaxiale),
2. déplacements nuls aux appuis.

$$L=4\text{m} ; H=3\text{m} ; e=5\text{cm}$$

$$E=1,1 \times 10^{10} \text{N/m}^2 ; \nu=0,2 ;$$

$$G_z=10000\text{N} ;$$

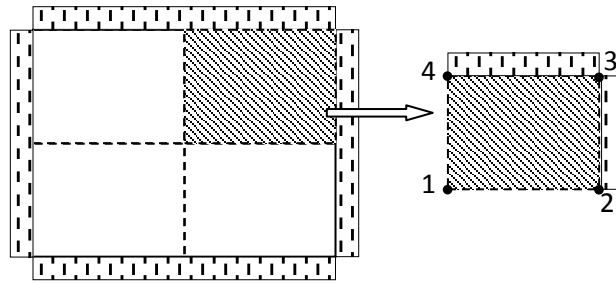


Figure III-21 : Dalle simplement appuyée de dimensions 4x3x0,05 m³

Cela se traduit sur le quart de la structure par les valeurs de $\theta_x^1 = \theta_y^1 = 0$ pour les conditions 1 et $w^2 = w^3 = w^4 = 0$ pour les conditions 2. Si la flèche est nulle le long des cotés 2-3 et 3-4 de l'élément, cela se traduit également, selon les équations III.7-6, par $\theta_x^2 = \theta_x^3 = 0$ et $\theta_y^3 = \theta_y^4 = 0$. L'équation d'équilibre discrétisée se réduit (en tenant compte du fait que le quart de la structure reprend un quart de la charge totale) à :

$$\frac{e^3}{60} E_0 \begin{bmatrix} \frac{10L^4 + 10H^4 + (5a + 14b)L^2H^2}{L^3H^3} & -\frac{bL^2 + 5H^2}{L^2H} & \frac{5L^2 + bH^2}{LH^2} \\ -\frac{bL^2 + 5H^2}{L^2H} & \frac{2}{3} \frac{2bL^2 + 5H^2}{LH} & 0 \\ \frac{5L^2 + bH^2}{LH^2} & 0 & \frac{2}{3} \frac{5L^2 + 2bH^2}{LH} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w^1 \\ \theta_y^2 \\ \theta_x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_z/4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant l'équation ci-dessus dans le cadre d'un état plan de contrainte (paragraphe III.7.3.b), nous obtenons le vecteur-déplacement nodal \mathbf{q} . L'interpolation nodale III.7-42 nous permet alors d'obtenir la flèche $w(x,y)$ (Fig. III-22) avec la valeur maximale de 13mm au nœud N°1 (le nœud en bas-gauche de l'élément ou le centre de la membrane).

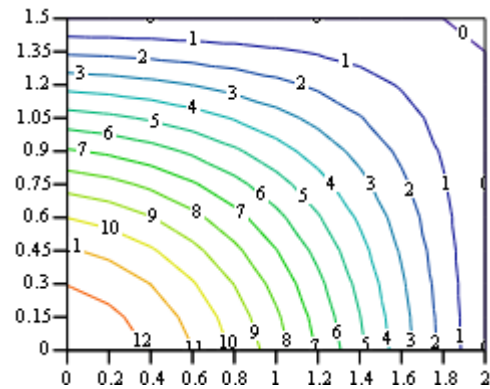


Figure III-22 : cartographie de la flèche : les isovaleurs sont en mm

Les efforts internes (Fig. III-23) sont ensuite calculés par l'équation III.7-15 et II.7-44 :

$$\mathcal{M} = \frac{e^3}{12} \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q} \tag{III.7-53}$$

Enfin, les réactions d'appuis s'obtiennent en appliquant l'équation d'équilibre (Eq. III.7-48) pour calculer le vecteur-force nodal (Fig. III-24).

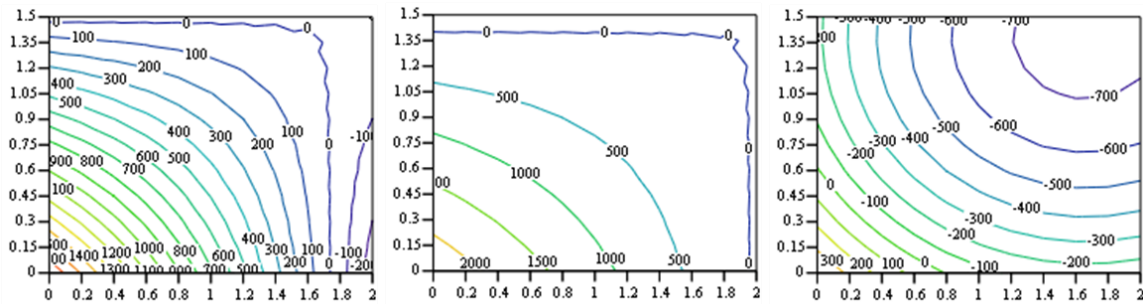


Figure III-23 : cartographie des efforts internes, de gauche à droite :
les moments M_{xx} , M_{yy} et M_{xy} en N-m/ml

Nous pouvons aisément vérifier l'équilibre des forces sur l'élément de la figure III-24 ci-dessous. L'équilibre des moments n'est pas vérifié (Il faut toujours garder à l'esprit que la solution est une approximation et les valeurs qui s'éloignent le plus de la solution exacte sont les valeurs hermitiennes, en l'occurrence, les rotations). Nous avons déjà vu ce phénomène à la section II.9 portant sur l'approximation à plusieurs paramètres d'une poutre continue sur appuis.

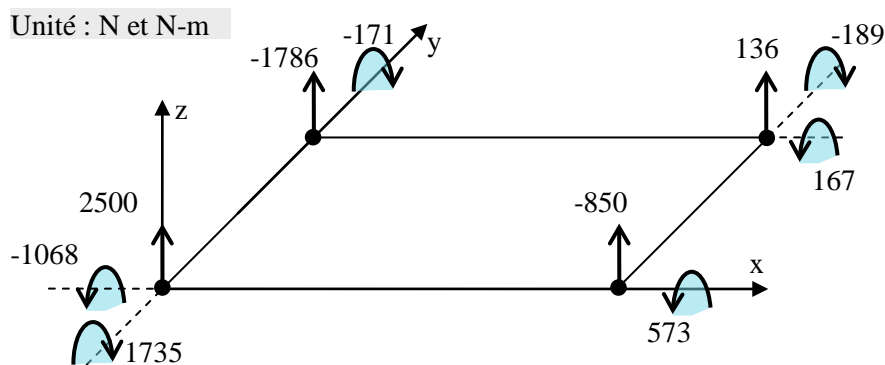


Figure III-24 : Réactions d'appuis aux nœuds de l'élément

L'utilisation de l'élément fini sur lequel l'étude a consisté n'est pas fortuite. Elle est dictée par certaines conditions relatives au choix de la forme intégrale à résoudre (en terme de déplacement, de contrainte, etc...), à la géométrie de l'élément et à l'interpolation adoptée.

Enfin, la structure étudiée peut aussi être résolue dans un contexte tridimensionnel, auquel cas, d'autres transformations peuvent s'ajouter en vue d'assembler les matrices de rigidité et les vecteurs nodaux élémentaires dans un référentiel unifié et dans une équation d'équilibre globale et discrétisée.

III.8 CONCLUSION

Nous avons développé dans ce chapitre essentiellement la discrétisation par élément fini des structures mécaniques unidimensionnelles (structures en barres) et bidimensionnelles (plaques épaisses et membranes minces). Nous avons également étudié les structures unidimensionnelles

dans un contexte bidimensionnel via les transformations trigonométriques ; les cas tridimensionnels peuvent se déduire par les mêmes transformations dites isométriques.

Les différents éléments finis étudiés sont de type lagrangien (traction-compression des barres et cisaillement des plaques épaisses) et hermitien (flexion plane des barres et flexion bidimensionnelle des membranes minces). La continuité des champs de déplacement entre élément à l'interface de deux éléments est assurée par des approximations de classe C^0 ou C^1 . Les éléments ainsi construits sont complets.

Chapitre IV ÉLÉMENTS DE REFERENCE ET TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

IV.1 INTRODUCTION

Dans un problème réel, il est fastidieux de calculer directement les matrices de rigidité de chaque élément à cause des différentes formes que peut contenir un maillage. Les règles de maillage d'un domaine géométrique sont généralement simples à respecter, néanmoins, il est difficile d'obtenir un maillage avec un seul type d'éléments. De plus, les bornes d'intégration dans un élément réel sont difficiles à écrire et s'apprête mal à une écriture algorithmique des procédés de calcul.

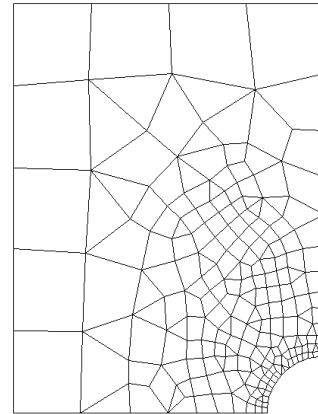


Figure IV-1 : Maillage correct d'une plaque avec des éléments de type linéaire

Les éléments de références sont une réponse à ces problèmes et permettent d'offrir un cadre mathématique simple et de réduire le problème à l'étude d'un nombre restreints d'éléments de base de formes géométriques plus simples.

IV.2 REPRESENTATION PARAMETRIQUE

Le vecteur position \mathbf{x} d'un point P_x d'un élément fini ${}^e\Omega$ est défini au moyen de la transformation τ^e en fonction des variables de référence $\xi(\xi, \eta, \zeta)$:

$$\begin{aligned} \tau^e : \Omega^{ref} &\rightarrow {}^e\Omega \\ \xi &\rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi) \end{aligned} \quad \text{IV.2-1}$$

ou encore :

$$\tau^e : \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(\xi, \eta, \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.2-2}$$

À chaque point $P_{\xi} \in \Omega^{ref}$ correspond un seul point P_x dans l'espace réel ${}^e\Omega$ par la transformation τ^e . La représentation en élément fini utilisant les fonctions de forme s'écrit :

$$\tau^e : \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \\ y_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \\ z_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1(\xi, \eta, \zeta) \\ N_2(\xi, \eta, \zeta) \\ \vdots \\ N_p(\xi, \eta, \zeta) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.2-3}$$

$N_i(\xi, \eta, \zeta)$ est la fonction de forme rattachée au nœud i et p est le nombre de nœuds constituant l'élément e .

Les fonctions de forme $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ doivent assurer la continuité de la géométrie pour garantir $\Omega = \bigcup_{e=1}^r \Omega^e$, r étant le nombre d'éléments constituant la géométrie.

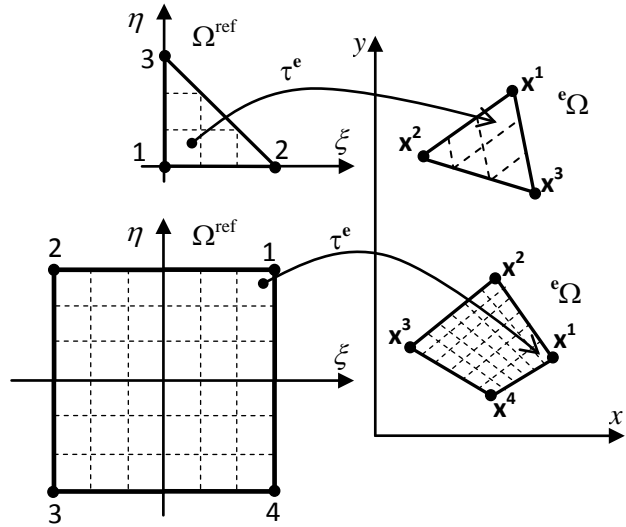


Figure IV-2 : Exemples d'éléments de référence (2D) et transformations géométriques

IV.3 OPERATEURS DIFFERENTIELS

IV.3.1. Élément de courbe

Un élément différentiel dx , dy ou dz doit s'exprimer en fonction des coordonnées de l'espace de référence. Selon l'expression IV.2-3, la différentielle totale de la fonction $x(\xi, \eta, \zeta)$ s'écrit :

$$dx = x_i \left(\frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} d\zeta \right) \tag{IV.3-1}$$

En généralisant en 3 dimensions et en optant pour une écriture matricielle, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_p \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_p}{\partial \xi} & \frac{\partial N_p}{\partial \eta} & \frac{\partial N_p}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{Bmatrix} \tag{IV.3-2}$$

Sous forme concise :

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{B}_\xi \cdot d\xi \\ &= \mathbf{J} \cdot d\xi \end{aligned} \tag{IV.3-3}$$

où :

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y_1 & y_2 & \dots & y_p \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{d\xi} & \frac{\partial N_1}{d\eta} & \frac{\partial N_1}{d\zeta} \\ \frac{\partial N_2}{d\xi} & \frac{\partial N_2}{d\eta} & \frac{\partial N_2}{d\zeta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_p}{d\xi} & \frac{\partial N_p}{d\eta} & \frac{\partial N_p}{d\zeta} \end{bmatrix}$$

Le membre de gauche de l'équation **IV.3-3** ci-dessus peut représenter un élément de contour $d\vec{\ell}$ si l'on veut sommer par exemple une charge linéique le long d'une ligne courbe.

Nous pouvons alors définir la matrice Jacobienne de l'équation **IV.3-3** comme étant :

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}_n \cdot \mathbf{B}_\xi \quad \text{IV.3-4}$$

\mathbf{J} étant la matrice constituée des dérivées partielles des variables spatiales par rapport aux variables de l'espace de référence :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{IV.3-5}$$

IV.3.2. Élément d'aire

Un élément de surface $d\vec{A}$ possède une nature vectorielle, sa projection sur les trois plans donne :

$$d\vec{A} = \|d\vec{y} \times d\vec{z}\| \cdot \vec{e}_1 + \|d\vec{z} \times d\vec{x}\| \cdot \vec{e}_2 + \|d\vec{x} \times d\vec{y}\| \cdot \vec{e}_3 \quad \text{IV.3-6}$$

Par une écriture en coordonnées, nous posons :

$$d\vec{A} = \langle dydz \quad dx dz \quad dx dy \rangle^T$$

L'expression **IV.3-6** peut se développer, en se servant des expressions **IV.3-1**, comme suit :

$$\begin{aligned} d\vec{y} \times d\vec{z} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\zeta} - \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\eta} \\ \frac{\partial z}{d\zeta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\zeta} \\ \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\zeta} - \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\eta} \end{pmatrix} d\vec{\eta} \times d\vec{\zeta} + \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\xi} - \frac{\partial y}{d\xi} \frac{\partial z}{d\zeta} \\ \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\eta} - \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\xi} \\ \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\eta} - \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\zeta} \end{pmatrix} d\vec{\zeta} \times d\vec{\xi} + \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{d\xi} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\xi} \\ \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\eta} \\ \frac{\partial x}{d\xi} \frac{\partial y}{d\eta} - \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\xi} \end{pmatrix} d\vec{\xi} \times d\vec{\eta} \\ d\vec{z} \times d\vec{x} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\zeta} - \frac{\partial z}{d\zeta} \frac{\partial x}{d\eta} \\ \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\xi} - \frac{\partial x}{d\xi} \frac{\partial y}{d\zeta} \\ \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\zeta} \end{pmatrix} d\vec{\eta} \times d\vec{\zeta} + \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\eta} - \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\xi} \\ \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\zeta} - \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\eta} \\ \frac{\partial y}{d\xi} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\xi} \end{pmatrix} d\vec{\zeta} \times d\vec{\xi} + \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\eta} \\ \frac{\partial x}{d\xi} \frac{\partial y}{d\eta} - \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\xi} \\ \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\zeta} \end{pmatrix} d\vec{\xi} \times d\vec{\eta} \\ d\vec{x} \times d\vec{y} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\zeta} - \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\eta} \\ \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\zeta} \\ \frac{\partial z}{d\zeta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\zeta} \end{pmatrix} d\vec{\eta} \times d\vec{\zeta} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{d\zeta} \frac{\partial y}{d\xi} - \frac{\partial x}{d\xi} \frac{\partial y}{d\zeta} \\ \frac{\partial y}{d\xi} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\xi} \\ \frac{\partial z}{d\eta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\eta} \end{pmatrix} d\vec{\zeta} \times d\vec{\xi} + \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{d\xi} \frac{\partial y}{d\eta} - \frac{\partial x}{d\eta} \frac{\partial y}{d\xi} \\ \frac{\partial y}{d\zeta} \frac{\partial z}{d\eta} - \frac{\partial y}{d\eta} \frac{\partial z}{d\zeta} \\ \frac{\partial z}{d\zeta} \frac{\partial x}{d\xi} - \frac{\partial z}{d\xi} \frac{\partial x}{d\zeta} \end{pmatrix} d\vec{\xi} \times d\vec{\eta} \end{aligned} \quad \text{IV.3-7}$$

L'opérateur (\times) est le produit vectoriel, \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 sont les vecteurs de la base orthonormée de l'espace réel et $\|\bullet\|$ est la norme 2 associée.

L'image de $d\vec{A}$ sur l'espace de référence par la transformation τ° est un élément d'aire orientée $d\vec{A}_\xi$ tel que :

$$d\vec{A} = \mathbf{H} \cdot d\vec{A}_\xi \quad \text{IV.3-8}$$

\mathbf{H} est la Co-matrice de \mathbf{J} définie comme suit :

$$\mathbf{H} = \text{Co}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} & \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{IV.3-9}$$

et

$$d\vec{A}_\xi = \langle d\eta d\zeta \quad d\xi d\zeta \quad d\xi d\eta \rangle^T \quad \text{IV.3-10}$$

IV.3.3. Élément de volume

Un élément de volume $d\Omega$ est défini comme suit :

$$d\Omega = d\vec{x} \cdot (d\vec{y} \times d\vec{z}) = dx \cdot dy \cdot dz \quad \text{IV.3-11}$$

En développant l'expression ci-dessus moyennant les équations **IV.3-2**, nous pouvons écrire :

$$d\Omega = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \right) d\xi d\eta d\zeta$$

où l'on peut remarquer aisément que :

$$d\Omega = |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad \text{IV.3-12}$$

$|\mathbf{J}|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

IV.3.4. Opérateur gradient

Nous écrivons la différentielle totale d'une fonction $u(x,y,z)$ continue et dérivable comme suit :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

La même fonction définie par les variables ξ , η et ζ s'écrit également :

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta$$

Les deux équations nous permettent d'obtenir :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right\rangle \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix}$$

ce qui nous permet, en tenant compte de **IV.3-3**, d'écrire de manière concise :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle = \tilde{\mathbf{J}} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \quad \text{IV.3-13}$$

En inversant l'équation ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad \text{IV.3-14}$$

$\tilde{\mathbf{J}}$ est la transposée de la matrice Jacobienne de la transformation τ^e déjà définie par **IV.3-15**.

IV.3.5. Opérateur Laplacien

Le Laplacien est le produit scalaire de l'opérateur gradient par lui-même :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{IV.3-16}$$

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle \quad \text{IV.3-17}$$

De l'équation **III.3-14**, nous obtenons le Laplacien en utilisant l'espace de référence :

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle \quad \text{IV.3-18}$$

IV.4 ÉLÉMENTS DE RÉFÉRENCE

IV.4.1. Éléments à une dimension

La transformation géométrique de l'espace de référence unidimensionnel vers l'espace réel (**3D**) est réduite, selon la définition **IV.2-3** à :

$$\boldsymbol{\tau}^e : \xi \rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i(\xi)x_i \\ N_i(\xi)y_i \\ N_i(\xi)z_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_p \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ \vdots \\ N_p(\xi) \end{Bmatrix} \quad \text{IV.4-1}$$

Les fonctions de forme sont des fonctions de la seule variable ξ .

Un élément $d\vec{\ell}$ de l'élément est transformé, en posant $d\eta = d\zeta = 0$ dans l'expression IV.3-2, comme suit :

$$d\vec{\ell} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_{1,1} \\ j_{2,1} \\ j_{3,1} \end{Bmatrix} \cdot d\xi = \{\mathbf{j}\}_1 \cdot d\xi \quad \text{IV.4-2}$$

$\{\mathbf{j}\}_1$ est la 1^{ère} colonne de la matrice Jacobienne \mathbf{J} .

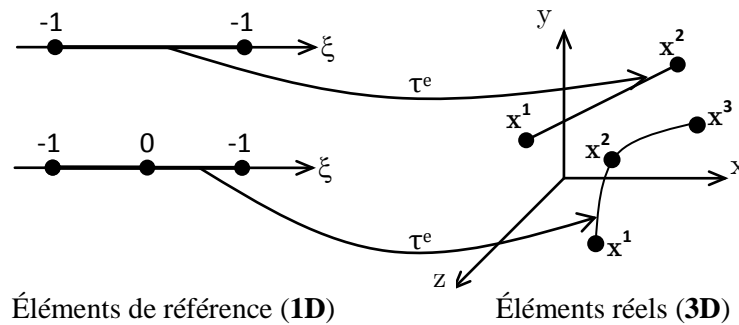


Figure IV-3 : Transformations géométriques d'éléments segmentaires

Pour un élément segmentaire à 2 nœuds, les fonctions de forme sont définies par :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1 - \xi}{2} \\ N_2(\xi) &= \frac{1 + \xi}{2} \end{aligned} \quad \text{IV.4-3}$$

Et pour un élément à 3 nœuds :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2) \\ N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}(\xi + \xi^2) \end{aligned} \quad \text{IV.4-4}$$

La longueur d'une courbe peut s'obtenir par l'expression :

$$\ell = \int_{\Omega^e} \|d\vec{\ell}\| = \int_{-1}^{+1} \|\{\mathbf{j}\}_1\| \cdot d\xi = \int_{-1}^{+1} \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{array} \right\| \cdot d\xi = \int_{-1}^{+1} \left\| \begin{array}{c} x_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \\ y_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \\ z_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi} \end{array} \right\| \cdot d\xi \quad \text{IV.4-5}$$

Pour un élément à 2 nœuds (élément linéique), on retombe sur la formule trigonométrique :

$$\ell = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

IV.4.2. Éléments à deux dimensions

Les fonctions de forme d'un élément triangulaire linéaire dans l'espace de référence sont :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ N_2(\xi, \eta) &= \xi \\ N_3(\xi, \eta) &= \eta \end{aligned} \quad \text{IV.4-6}$$

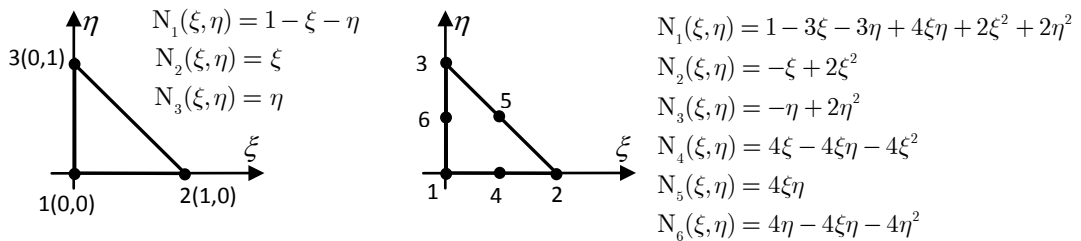


Figure IV-4 : Éléments de référence triangulaires linéaire à 3 nœuds et quadratique à 6 nœuds

La matrice Jacobienne pour l'élément à 3 nœuds, s'écrit alors comme :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix}$$

Les quantités infinitésimales sont définies en posant $d\xi=0$. Par exemple, la surface du triangle est calculée en intégrant la formule IV.3-8 sur l'espace de référence en posant :

$$d\vec{\mathbf{A}}_\xi = \langle 0 \quad 0 \quad d\xi d\eta \rangle^T$$

Alors nous pouvons poser :

$$\vec{\mathbf{A}} = \int_{\Omega^e} d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\Omega^{ref}} \mathbf{H} \cdot d\vec{\mathbf{A}}_\xi = \int_{\Omega^{ref}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{array} \right\} d\xi d\eta$$

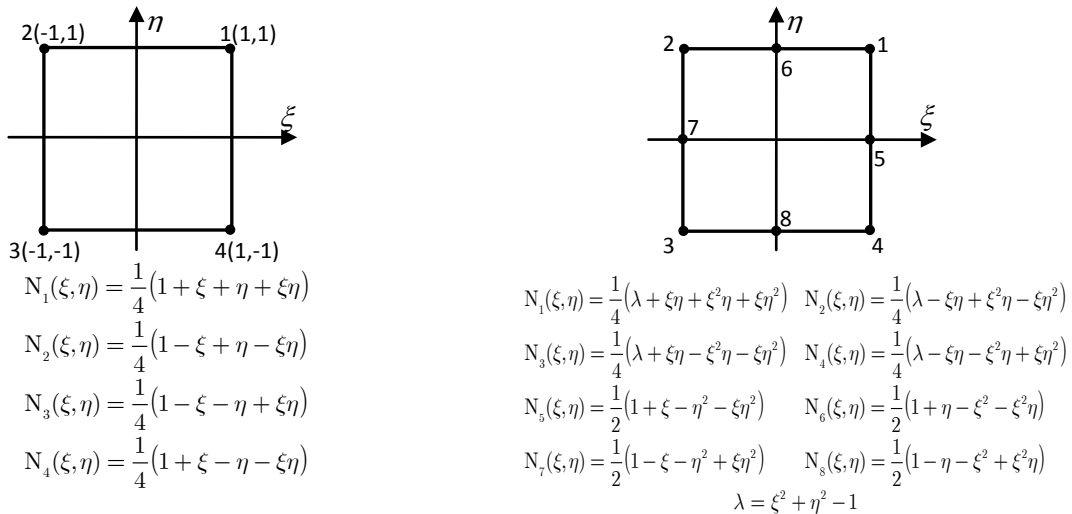


Figure IV-5 : Éléments de référence quadrilatères linéaire à 4 nœuds et quadratique à 8 nœuds

En remplaçant les fonctions x, y et z par leurs expressions **IV.2-3**, nous écrivons

$$\vec{\mathbf{A}} = \int_{\Omega^{ref}} \begin{Bmatrix} y_i z_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \\ x_i z_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \\ x_i y_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \right) \end{Bmatrix} d\xi d\eta$$

En portant les fonctions de forme **IV.4-4** dans cette expression ci-dessus, nous obtenons finalement :

$$\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_1 z_2 - y_1 z_3 - y_2 z_1 + y_2 z_3 + y_3 z_1 - y_3 z_2 \\ -x_1 z_2 + x_1 z_3 + x_2 z_1 - x_2 z_3 - x_3 z_1 + x_3 z_2 \\ x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2 \end{Bmatrix}$$

Dans le cas d'un élément dans la plan x - y ($z_1=z_2=z_3$), l'aire du triangle est réduite à l'expression :

$$A = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2)$$

Nous pouvons alors remarquer que :

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{J}_z|$$

avec $|\mathbf{J}_z|$ étant le déterminant la matrice \mathbf{J}_z obtenue en supprimant la ligne nulle de \mathbf{J} .

$$\mathbf{J}_z = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

IV.4.3. Éléments à trois dimensions

Les éléments de référence tridimensionnels sont de types prismatique, hexaédrique et tétraédrique (Fig. IV-6, III-7 et IV-8).

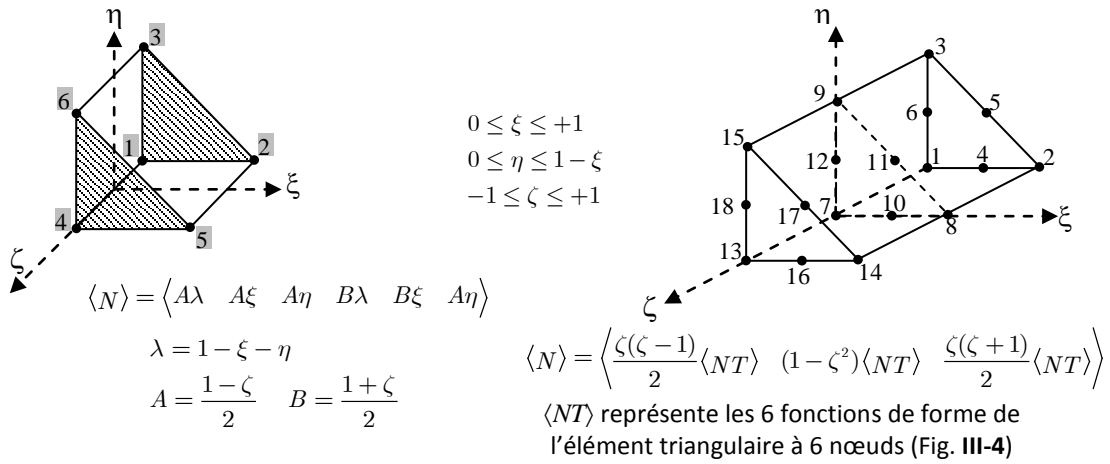


Figure IV-6 : éléments finis prismatiques linéaire (6 nœuds) et quadratique (18 nœuds)

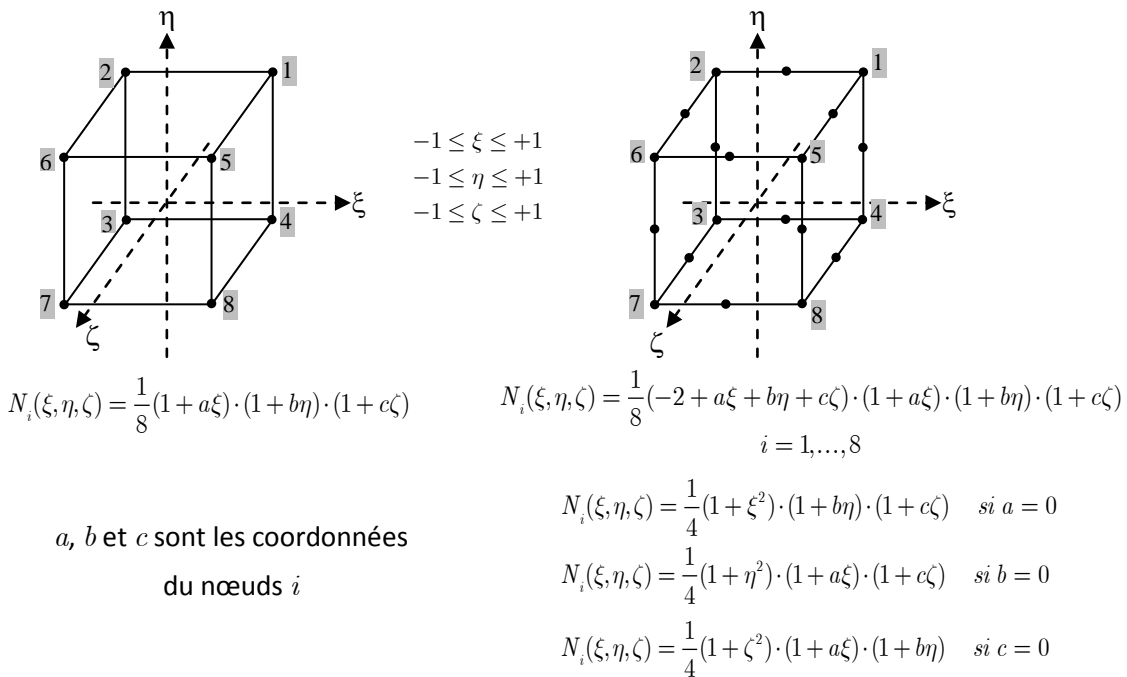


Figure IV-7 : Éléments finis Hexaédriques linéaire (8 nœuds) et quadratique (20 nœuds)

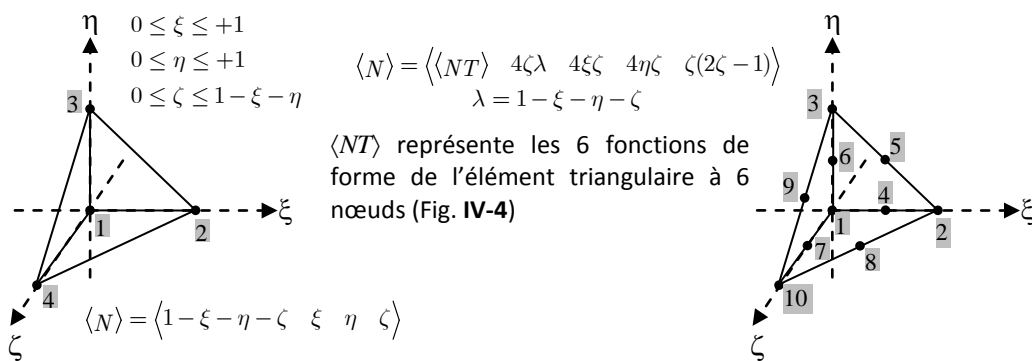


Figure IV-8 : éléments finis tétraédriques linéaire (4 nœuds) et quadratique (10 nœuds)

IV.5 EXPRESSION DE LA FONCTION SOLUTION

La fonction $u(\mathbf{x})$, solution de la forme variationnelle W (type Galerkin), ainsi que la fonction de pondération $\delta u(\mathbf{x})$, sont représentées, sur chaque élément, par une combinaison linéaire des fonctions de forme :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= N_i(\mathbf{x}) \cdot u_i \\ \delta u(\mathbf{x}) &= N_i(\mathbf{x}) \cdot \delta u_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, p \quad \text{IV.5-1}$$

Nous pouvons écrire les mêmes expressions en utilisant les variables paramétriques :

$$\begin{aligned} u(\xi) &= N_i(\xi) \cdot u_i \\ \delta u(\xi) &= N_i(\xi) \cdot \delta u_i \end{aligned} \quad i = 1, \dots, p \quad \text{IV.5-2}$$

De la même manière, la représentation des variables indépendantes \mathbf{x} s'écrit :

$$\mathbf{x} = \overline{N}_i(\xi) \cdot \overline{\mathbf{x}}_i \quad i = 1, \dots, \overline{p} \quad \text{IV.5-3}$$

Dans les deux expressions ci-dessus, p est le nombre de variables nodales servant à approximer la fonction $u(\mathbf{x})$ alors que \overline{p} est le nombre de nœuds de l'élément. Si $\overline{p} = p$ l'élément est dit isoparamétrique (les fonctions de forme sont celles qui approximent la fonction $u(\mathbf{x})$ et aussi celles qui définissent la transformation géométrique τ^e). L'élément est super-paramétrique si $\overline{p} > p$ et sub-paramétrique si $\overline{p} < p$. L'exemple d'un élément super-paramétrique est l'élément fini hermitien en flexion simple bidirectionnel à 12 degrés de liberté (§ III.7.6) avec une transformation géométrique à 4 nœuds.

Les composantes de la matrice de déformation \mathbf{B} (Eq. III.7-25) sont calculées selon les transformations des opérateurs de dérivées partielles (Eq. IV.3-13) par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \tilde{j}_{1,1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \tilde{j}_{1,2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \tilde{j}_{1,3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \tilde{j}_{2,1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \tilde{j}_{2,2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \tilde{j}_{2,3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \tilde{j}_{3,1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \tilde{j}_{3,2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \tilde{j}_{3,3} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad \text{IV.5-4}$$

On remarque que les fonctions de formes dans les transformations géométriques (qui apparaissent dans les composantes de la matrice Jacobienne) ne sont pas identiques à celles utilisées dans l'approximation de la fonction-solution.

IV.6 MATRICE DE RIGIDITE ET VECTEUR-FORCE ELEMENTAIRES

La matrice de rigidité et le vecteur-force nodal d'un élément quelconque déjà définis au chapitre III (Eq. III.3-11 et III.3-12), s'écrivent en utilisant les expressions IV.3-8 et IV.3-12 :

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dx dy dz = \int_{\Omega^{ref}} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta d\zeta \quad \text{IV.6-1}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^e &= \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot dA + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} \cdot d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega^{ref}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot \left\| \mathbf{H} \cdot d\vec{A}_\xi \right\| + \int_{\Omega^{ref}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{f} \cdot |\mathbf{J}| d\Omega^{ref} \end{aligned} \quad \text{IV.6-2}$$

Par exemple, le vecteur-force nodal associé à un élément tétraédrique à 4 nœuds chargé sur la face 1-2-3 ($\zeta=0$ et $d\vec{A}_\xi = \langle 0 \quad 0 \quad d\xi d\eta \rangle^T$) par un chargement surfacique \mathbf{t} est donné par :

$$\mathbf{F}^e = \int_{\partial\Omega^{ref}} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot \|\{\mathbf{h}\}_3\| d\xi d\eta \quad \text{IV.6-3}$$

$\{\mathbf{h}\}_3$ étant la 3^{ème} colonne de la matrice \mathbf{H} qui est constante ; son module équivaut à deux fois l'aire de la face du tétraèdre réel associé à la face triangulaire 1-2-3 du tétraèdre de référence (Fig. IV-8).

$$\mathbf{F}^e = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{t} \cdot d\xi d\eta \quad \text{IV.6-4}$$

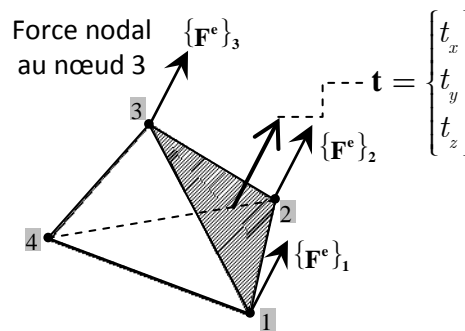


Figure IV-9 : chargement d'une face triangulaire d'un élément tétraédrique

IV.7 CONCLUSION

Ce chapitre est consacré au calcul différentiel nécessaire au calcul des dérivées et des sommes intégrales de formules définissant les matrices de rigidité et les forces nodales dans un élément réel, en utilisant les éléments de référence. Cette partie a aussi été dédiée aux transformations géométriques de structures unidimensionnelles ou bidimensionnelles dans un contexte tridimensionnel plus général.

Toutefois, l'analyse et l'optimisation de cette méthode n'ont pas été présentées dans cet ouvrage. D'autres parties concernant la MEF sont nécessaires pour compléter les procédures de calcul en améliorant la précision de la solution (maillage, choix des éléments, réduction du temps de calcul, estimation des erreurs, utilisation moindre des ressources en programmation sur

ordinateur...etc.). De plus, les bases étudiées sont indispensables à tout développement de la méthode sur les structures non-linéaires et son extension dans le domaine spatio-temporel.

ANNEXE A

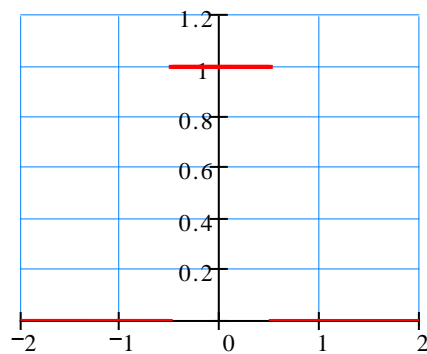
La fonction porte $\Pi(x)$

La porte $\Pi(x)$ est une fonction discontinue définie par morceaux :

$$\begin{aligned}\Pi(x) &= 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ \Pi(x) &= 0 & |x| > \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{A-1}$$

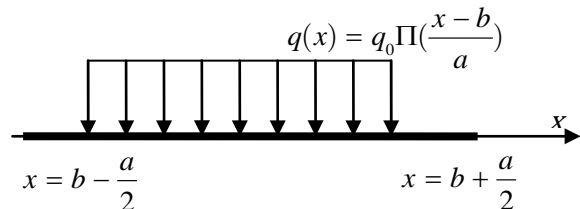
Elle n'est pas définie sur les deux bords (mais on pourra appliquer des prolongements par continuité si nécessaire). On dit que cette fonction est de largeur 1 ou de support 1, c'est à dire qu'elle est non nulle sur un intervalle de largeur 1.

En mécanique, on utilise parfois la fonction porte pour définir des chargements uniformément répartis sur une longueur a . Ainsi la fonction



$$q(x) = q_0 \Pi\left(\frac{x-b}{a}\right)\tag{A-2}$$

correspond à une charge répartie rectangulaire d'amplitude q_0 sur une largeur a et centrée sur la valeur $x = b$. Son intégrale vaut $F = aq_0$ et représente la charge totale.



Distribution de Dirac $\delta(x)$

Considérons la fonction :

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\tag{A-3}$$

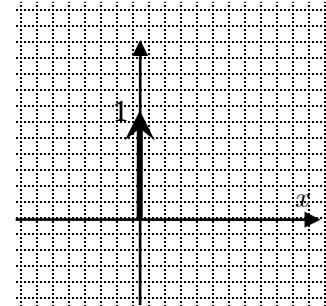
C'est une porte de largeur ε et de hauteur $1/\varepsilon$. Son intégrale vaut toujours 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) dx = 1\tag{A-4}$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, cette fonction a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini, mais son intégrale est toujours égale à 1. On appellera distribution de Dirac et on notera $\delta(x)$ cette limite :

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\text{A-5})$$

δ est donc de largeur nulle (on parle aussi de support nul ou de mesure nulle), de hauteur infinie et d'intégrale 1. On parle de "pic de Dirac" ou d'impulsion de Dirac. Le graphe de δ sera représenté par convention par une flèche vers le haut, de hauteur 1, centrée en $x = 0$.



La hauteur de la flèche vaut 1 pour signifier que l'intégrale de δ vaut 1. Pour le graphe de 2δ ce sera une flèche de hauteur 2. Attention, ne pas confondre δ avec la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs.

Il est facile de voir que $N \cdot \delta(x)$ (avec $N \in \mathbb{R}$) est d'intégrale N , mais un problème se pose si $N = 0$. On admettra que $0 \cdot \delta(x) = 0$.

Nous avons également les propriétés suivantes :

- Changement d'origine : $\delta(x - a)$ vaut 0 partout sauf en $x = a$ (on parle de pic de Dirac localisé en $x = a$).
- La somme $K_1\delta(x - x_1) + K_2\delta(x - x_2)$ représente une distribution à deux pics, d'intégrales K_1 et K_2 localisés en x_1 et x_2 . Si $x_1 \neq x_2$ il n'y a pas de superposition entre les deux pics (le premier est nul partout sauf en x_1 , le second est nul partout sauf en x_2).
- L'intégrale de $\delta(x)$ vaut 1 sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $a < 0$ et $b > 0$:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1$$

En physique la distribution δ est utilisée pour décrire des impulsions, comme par exemple une force très intense et très brève (un coup de pied dans un ballon). Les charges ponctuelles sont également décrites par des distributions δ : une densité infinie dans un volume nul mais une charge totale finie. Nous pouvons exprimer une force ponctuelle d'intensité F appliquée en un point d'abscisse $x=b$, par :

$$\Phi(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{F}{a} \Pi\left(\frac{x-b}{a}\right) = F\delta(x-b) \quad (\text{A-6})$$

Propriété fondamentale — Définition de δ

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui n'est pas infinie en 0 et qu'on supposera dans un premier temps intégrable sur \mathbb{R} . On s'intéresse à la quantité :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \quad (\text{A-7})$$

Pour approcher cette intégrale, nous allons utiliser la fonction g_ε dont δ est la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x) dx \quad (\text{A-8})$$

et l'on permute limite et intégrale (en s'assurant que l'intégrale converge dans l'intervalle) :

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\varepsilon(x) dx \quad (\text{A-9})$$

et comme la fonction $g_\varepsilon(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$, le domaine d'intégration se réduit à cet intervalle. Il vient :

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} f(x) g_\varepsilon(x) dx \quad (\text{A-9})$$

et le changement de variable $x = \varepsilon y$ permet d'écrire

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\varepsilon y) dy \quad (\text{A-10})$$

REMARQUE :

En physique δ n'existe pas, on aura plutôt affaire à des fonctions très localisées et d'amplitude très élevée mais finie de type g_ε : le produit $0 \cdot g_\varepsilon(x) = 0$ ne pose pas de problème et on adoptera le passage à la limite : $0 \cdot \delta(x) = 0$.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(0) dy = f(0) \quad (\text{A-11})$$

D'où l'égalité

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (\text{A-12})$$

qui est en fait la véritable définition de la distribution de Dirac δ . Attention, ceci n'est valable que si

$f(0)$ existe, écrire $\frac{\delta(x)}{x}$ n'a pas de sens : δ n'est pas une fonction ordinaire, en ce sens qu'elle n'est

pas définie par sa valeur en chaque point (dire qu'elle est infinie en 0 ne suffit pas). δ est en fait définie par l'intégrale sous une courbe : on parle de distribution et non de fonction.

Graphiquement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on interprète l'intégrale $\int f(x)g_\varepsilon(x)dx$ par l'aire du rectangle de largeur ε et de hauteur $\frac{f(0)}{\varepsilon}$. Cette aire vaut $f(0)$.

On en déduit aussi, comme $f(x)\delta(x)$ est nulle partout sauf en $x = 0$ où elle est infinie, que ce produit peut être assimilé à une distribution de Dirac. Et comme son intégrale vaut $f(0)$, il vient

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (\text{A-13})$$

ce qui se généralisera en

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (\text{A-14})$$

Quelques propriétés de δ

δ peut se construire avec une fonction quelconque.

Soit g une fonction définie en 0 et d'intégrale 1 sur \mathbb{R} (pas nécessairement une fonction porte). On peut montrer que

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (\text{A-15})$$

En effet, considérons une fonction f (dite "test") intégrable sur \mathbb{R} , et formons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \quad (\text{A-16})$$

Par un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, on montre que $I = f(0)$. Par conséquent, d'après la définition de δ , la quantité $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ s'identifie à $\delta(x)$.

Changement d'échelle

Soit a réel différent 0. Que vaut $\delta(ax)$? Il est trivial de voir que $\delta(ax)$ vaut 0 partout sauf en 0 où il est infini. Il paraît donc assimilable à une distribution de Dirac et peut s'écrire $K \cdot \delta(ax)$. La constante K est simplement l'intégrale de $\delta(ax)$ sur \mathbb{R} . Calculons K :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx \quad (\text{A-17})$$

Le changement de variable $y = ax$ donne

$$K = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \quad (\text{A-18})$$

La valeur absolue $|a|$ vient du fait que si $a < 0$ les bornes changent de signe. Il vient $K = \frac{1}{|a|}$. D'où la propriété de changement d'échelle

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{A-19})$$

Fonction de Dirac en deux dimensions

La construction de la fonction de Dirac en deux dimensions est basée sur la fonction échelon à deux dimensions :

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) &= 1 && |x| < \frac{1}{2} \text{ et } |y| < \frac{1}{2} \\ \Pi(x, y) &= 0 && |x| > \frac{1}{2} \text{ et } |y| > \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{A-20})$$

Cette fonction est de support 1 et de hauteur égale à 1.

Nous pouvons réécrire cette fonction-échelon comme :

$$\Pi(x, y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y) \quad (\text{A-21})$$

La fonction de Dirac en deux dimensions se définit comme suit :

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon_1}, \frac{y}{\varepsilon_2}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_1} \Pi\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_2} \Pi\left(\frac{y}{\varepsilon_2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

À partir de cette expression, nous pouvons définir la fonction de Dirac en deux dimensions par la relation :

$$\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y) \quad (\text{A-23})$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x, y) dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x) \cdot \delta(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx \right] \delta(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \times 1 = 1 \end{aligned} \quad (\text{A-24})$$

L'utilisation de la fonction de Dirac en deux dimensions devient alors intuitive.

ANNEXE B

Solution analytique de l'équation du Laplacien

La forme discrète type Galerkin de l'équation de Poisson de l'exemple II.6-1 est donnée par :

$$\int_{\Omega} P_j(\mathbf{x}) \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \Delta P_i(\mathbf{x}) \right) - p \right) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{B-1})$$

Nous allons introduire une approximation trigonométrique avec la base génératrice suivante :

$$P_{mn}(x, y) = \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-2})$$

Avec $m, n \in \mathbb{N}$ des entiers positifs et impairs.

L'approximation devient alors une double sommation sur les indices m et n :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (\text{B-3})$$

Le Laplacien de la fonction $w(x, y)$ s'obtient comme suit :

$$\Delta w(x, y) = - \sum_{\substack{n=1,3,5 \\ m=1,3,5}}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{4a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{4b^2} \right) \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \quad (\text{B-4})$$

Et l'équation intégrale s'écrit alors :

$$\int_{\Omega} P_{kl}(\mathbf{x}) \left(\left(\sum_{\substack{m=1 \\ n=1}}^{\infty} A_{mn} \Delta P_{mn}(\mathbf{x}) \right) - p \right) d\Omega = 0 \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-5})$$

Nous allons utiliser l'une des propriétés essentielles de la base fonctionnelle (l'orthogonalité), à savoir :

$$\int_{-a}^{+a} \cos \frac{k\pi x}{2a} \cos \frac{l\pi x}{2a} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ a & \text{si } k = l \end{cases} \quad (\text{B-6})$$

L'équation II-1 peut donc se réécrire en remplaçant les indices $i \equiv mn$ et $j \equiv kl$:

$$\int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left(A_{kl} \left(\frac{k^2 \pi^2}{4a^2} + \frac{l^2 \pi^2}{4b^2} \right) \cos \frac{k\pi x}{2a} \cos \frac{k\pi x}{2a} \cos \frac{l\pi y}{2b} \cos \frac{l\pi y}{2b} \right) dx dy \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-7})$$

$$+ \int_{-b}^{+b} \int_{-a}^{+a} \left(p \cos \frac{k\pi x}{2a} \cos \frac{l\pi y}{2b} \right) dx dy = 0$$

$$A_{kl} \left(\frac{bk^2 \pi^2}{4a} + \frac{al^2 \pi^2}{4b} \right) + p \frac{16ab}{kl\pi^2} \left(\sin \frac{k\pi}{2} \right) \left(\sin \frac{l\pi}{2} \right) = 0 \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-8})$$

Ce que, compte tenu de la propriété **B-6**, nous simplifions par

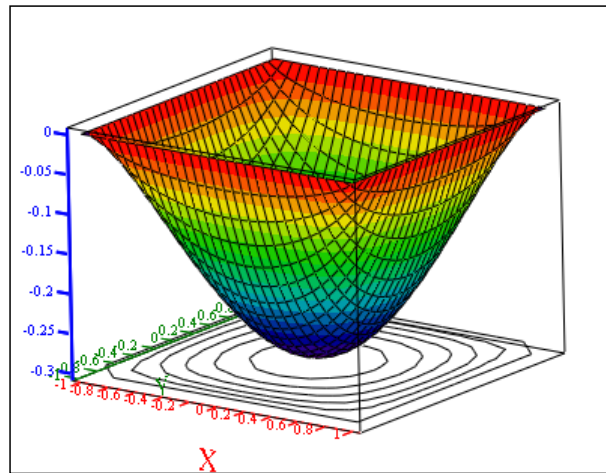
$$A_{kl} \left(\frac{bk^2 \pi^2}{4a} + \frac{al^2 \pi^2}{4b} \right) - p \left(\frac{16ab}{kl\pi^2} \right) \cdot (-1)^{\frac{k+l}{2}} = 0 \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-9})$$

$$A_{kl} = \frac{64pab}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl \left(\frac{bk^2}{a} + \frac{al^2}{b} \right)} \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-10})$$

Pour $a = b$ (domaine carré), nous obtenons :

$$A_{kl} = \frac{64pa^2}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl(k^2 + l^2)} \quad k, l = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{B-11})$$

Et la valeur extrême de $w(x, y)$ (au centre du domaine) est : $\frac{64}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{k+l}{2}}}{kl(k^2 + l^2)} pa^2 \simeq -0.2947 pa^2$



Graphe de la solution ; tracé en surface et en contour

Bibliographie

[B1] **Batoz Jean Louis et Dhatt Gouri** Modélisation des structures par éléments finis [Livre]. - Paris : Hermès, 1990. - Vol. 1.

[B2] **Bazergui André et Bui-Quoc Thang** Résistance Des Matériaux [Livre]. - Montréal : Presses internationales Polytechnique, 2002. - 3ème Edition : pp. Chapitre 1-5. - 2-553-01034-6.

[B3] **Botsis John et Deville Michel** Mécanique des milieux continus : Une introduction [Livre]. - Lausanne : Presses polytechniques et universitaires Romandes, 2006. - 2-88074-643-4.

[C1] **Curnier Alain** Méthodes numériques en mécanique des solides [Livre].

[D1] **Derradji Salah** Analyse numérique I [Livre]. - Alger : Office des publications universitaires, 1990. - p. Chapitres IV et V.

[E1] **Ern Alexandre** Aide-mémoire, Eléments finis [Livre] / éd. Dunod. - Paris : L'Usine Nouvelle, 2005. - 2 10 007303 6.

[F1] **Fortin André** ANALYSE NUMERIQUE pour INGENIEUR [Livre]. - [s.l.] : Presses Internationales Polytechnique, 2001. - 2ème édition. - Chapitre 5. - 2 553 00936 4.

[G1] **Gmür Thomas** Dynamique des Structures [Livre]. - Lausanne : Presses Polytechniques et universitaires Romandes, 1997.

[K1] **Khennane, Amar, Institut de Génie Civil, Université de Tizi-Ouzou** Méthode des éléments finis - Enoncés des principes de bases [Livre]. - Alger : Office des publications universitaires, 1997. - 9961.0.0173.7.

[K2] **Kurt Arbenz Alfred Wohlhauser** Analyse numérique [Livre]. - Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1996. - Chapitre 5. - Collection "Méthodes mathématiques pour l'ingénieur". - 2 88074 016 9.

[N1] **Nougier Jean-Pierre** Méthodes de calcul numérique [Livre]. - Paris : Masson, 1991. - 3ème édition. - Chapitre 3. - 2 225 81086 9.

[S1] **Schatzman Michelle** Analyse numérique : Cours et exercices pour la licence [Livre]. - Paris : InterEditions, 1991. - Chapitre VII. - 2 7296 0373 5.

[T1] **Thionnet Alain et Martin Christiane** Mécanique et comportement des Milieux continus, Concept généraux [Livre]. - Paris : Ellipses, 2003. - Vol. 1.

[V1] **Vanhille Christian, Lavie Antoine et Campos-Pozuelo Cleofé** Modélisation numérique en mécanique [Livre]. - Paris : LAVOISIER, 2007. - 978-2-7462-1867-3.

[Z1] **Zienkiewicz O. C. et Taylor R. L.** La Méthode des éléments finis, Formulation de base et problèmes linéaires [Livre]. - Paris-La Défense : AFNOR, 1991. - 2-12-301111-8.

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{LH} & \frac{1}{H} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{LH} & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{LH} & 0 & 0 & \frac{1}{LH} & -\frac{1}{H} & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{H^2} & 0 & -\frac{2}{H} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{H^2} & 0 & -\frac{1}{H} \\ \frac{3}{L^2H} & -\frac{2}{LH} & 0 & \frac{-3}{L^2H} & -\frac{1}{LH} & 0 & \frac{3}{L^2H} & \frac{1}{LH} & 0 & \frac{-3}{L^2H} & \frac{2}{LH} & 0 \\ \frac{3}{LH^2} & 0 & \frac{2}{LH} & \frac{-3}{LH^2} & 0 & -\frac{2}{LH} & \frac{3}{LH^2} & 0 & -\frac{1}{LH} & \frac{-3}{LH^2} & 0 & \frac{1}{LH} \\ \frac{2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} & 0 & \frac{-2}{L^3} & -\frac{1}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{H^3} & 0 & \frac{1}{H^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{H^3} & 0 & \frac{1}{H^2} \\ \frac{-2}{L^3H} & \frac{1}{L^2H} & 0 & \frac{2}{L^3H} & \frac{1}{L^2H} & 0 & \frac{-2}{L^3H} & -\frac{1}{L^2H} & 0 & \frac{2}{L^3H} & -\frac{1}{L^2H} & 0 \\ \frac{-2}{LH^3} & 0 & -\frac{1}{LH^2} & \frac{2}{LH^3} & 0 & \frac{1}{LH^2} & -\frac{2}{LH^3} & 0 & \frac{1}{LH^2} & \frac{2}{LH^3} & 0 & -\frac{1}{LH^2} \end{bmatrix}$$